КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А.Я.Оленко

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2005

Збірник задач з актуарної математики/ Упорядник А. Я. Оленко.– К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 67 с.

Рецензенти

Член-кор. НАН України, проф. М.Й.Ядренко

Зав. кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики
КДУ ім. Т. Шевченка, проф. Ю.С.Мішура

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
13 вересня 2004 р.

ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичний посібник до практичних занять з дисципліни "Актуарна математика" призначено для студентів механіко-математичного й економічного факультетів. Посібник створено на основі багаторічного досвіду викладання відповідних дисциплін у Київському національному університеті ім. Т. Шевченка та Національному університеті "Києво-Могилянська академія".

У посібнику подано задачі, уміння розв'язувати які є необхідним для успішного оволодіння матеріалом курсу.

Структура кожного заняття посібника така: спочатку стисло наведено теоретичний матеріал та основні формули з відповідної теми, далі подано задачі. Додатковий теоретичний матеріал та приклади розв'язку типових задач можна знайти в літературі, що наведена в кінці посібника. У двох додатках вміщено таблиці тривалості життя, за допомогою яких студенти мають змогу проводити розрахунки, близькі до тих, що здійснюються у практиці страхових фірм і пенсійних фондів.

Крім теоретичних, посібник містить прикладні задачі, при розв'язуванні яких бажано використовувати комп'ютер. Також у кожному занятті є кілька задач, в яких від студента вимагається створення невеликих програм, що обчислюють вартість певних страхових полісів, будують таблиці відповідних значень по роках тощо. Такі задачі призначено для контролю засвоєння матеріалу та здатності використовувати його на практиці. Вибір програмного забезпечення для виконання цих завдань залишається на розсуд студента.

Згідно з навчальним планом, протягом семестру проводиться контрольна робота для перевірки знань студентів. Задачі для неї підбираються того самого рівня, що й у посібнику.

Укладач вдячний аспірантам Б. Кликавці та О. Панасюк за допомогу при підготовці TEX–макета посібника.

Матеріал для посібника зібрано та підготовлено за часткової підтримки грантом TEMPUS PROJECT IB-JEP-25054-2004.

Заняття 1

Моделі на основі складних відсотків

Відсоткова ставка називається *фактичною*, якщо період конверсії збігається з основною одиницею часу; у цьому випадку відсотковий прибуток виплачується наприкінці основної одиниці часу.

Нехай i – фактична річна відсоткова ставка. *Множник, що дисконтує*, чи *коефіцієнт дисконтування*, визначається як

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Якщо період конверсії не збігається з основною одиницею часу, то відсоткова ставка називається *номінальною*. Позначимо еквівалентну i номінальну річну відсоткову ставку з виплатою відсотків m разів на рік $i^{(m)}$:

$$i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1).$$

Величина $\delta = \lim\limits_{m\to\infty} i^{(m)}$ називається силою (*нормою) відсоткового прибутку,* еквівалентною ставці i. δ пов'язане з i так:

$$e^{\delta} = 1 + i.$$

Відсотковий прибуток, що виплачується на початку кожного періоду конверсії, називають *дисконтом,* а відповідну ставку – ставкою дисконту чи *дисконтною ставкою.*

Якщо d – річна фактична ставка дисконту, то

$$d = \frac{i}{1+i} = 1 - v.$$

Нехай $d^{(m)}$ — *номінальна ставка* авансового відсоткового прибутку, що виплачується m разів на рік, еквівалентна d. Тоді

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}.$$

Безтермінові ренти складаються із щорічних виплат величиною 1.

Якщо перша виплата здійснюється в момент 0, то така рента називається *прямою безтерміновою рентою* (чи *безтерміновою рентою пренумерандо*), а її поточна вартість позначається через $\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = 1 + v + v^2 + ... = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}.$$

Якщо ж перша виплата здійснюється наприкінці першого року, то така рента називається *безпосередньою безтерміновою рентою* (чи *безтерміновою рентою постнумерандо*). Її поточна вартість позначається через $a_{\overline{\infty}|}$ і дорівнює

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + ... = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}.$$

Безтермінові ренти, в яких сума $1/m$ виплачується m разів на рік. Якщо платежі здійснюються авансом (перша виплата суми $1/m$ здійснюється в момент 0), то поточна вартість такої ренти позначається через $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ і дорівнює

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} := \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + ... = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1-v^{1/m}}\right) = \frac{1}{d^{(m)}}.$$

Якщо ж платежі відкладені (перша виплата суми $1/m$ здійснюється в момент $1/m$), то поточна вартість такої ренти позначається через $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ і має вигляд

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} := \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + ... = \frac{1}{m}\left(\frac{v^{1/m}}{1-v^{1/m}}\right) = \frac{1}{m((1+i)^{1/m}-1)} = \frac{1}{i^{(m)}}.$$

Ануїтет визначається як послідовність платежів з обмеженим терміном тривалості, який ми позначимо через n.

Поточна вартість *прямого ануїтету* з n щорічними платежами по 1, що починаються в момент 0, задається формулою

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1-v^n}{d}.$$

Інвестор платить ціну u, що дає йому право одержати n майбутніх виплат $r_1, ..., r_n$. Виплата r_k здійснюється в момент τ_k, $k = 1, ..., n$. Нехай z – розв'язок рівняння

$$u = \sum_{k=1}^{n} r_k e^{-z\tau_k}.$$

Внутрішньою нормою прибутку (*прибутковістю інвестиції*) називається величина $i = e^z - 1$.

Задачі

1. Номінальна відсоткова ставка дорівнює j. Період конверсії дорівнює півроку. Платежі величиною 1 здійснюються кожні два роки. Виплати здійснюються нескінченну кількість років. Вартість такої угоди страхування – 5,89. Обчислити відсоткову ставку j.

2. За угодою здійснюються зростаючі виплати $1 + k, (1 + k)^2$ і т. д., починаючи з кінця першого року. При відсотковій ставці 4 % вартість угоди за рік до першої виплати становить 51. Знайти k.

3. Особа, що страхується, може вибрати одну з чотирьох еквівалентних угод:

   а) починаючи з одного місяця після смерті, виплати по 120 здійснюються щомісяця й продовжуються вічно;

   б) починаючи з місяця після смерті, виплати здійснюються щомісяця протягом n років і дорівнюють 365,47 ;

   в) здійснюється єдина виплата через n років після смерті величиною 17866,32 ;

   г) на момент смерті родичам виплачується сума X.

   Обчислити X.

4. Компанія має здійснити п'ять річних платежів по 15000. Перший платіж – 31 грудня 1999 р. У банку створюється фонд для цих платежів. Щороку до фонду вноситься сума X, починаючи з 1 січня 1990 р. Відсоткова ставка – 6 %. Останній платіж до фонду здійснюється 1 січня 1999 р. Обчислити X.

5. Компанія робить внесок 100000 до фонду. Фонд платить номінальну відсоткову ставку 12 %, що конвертується щоквартально. З періодом у шість місяців з фонду береться сума X, потім $2X$, потім – $3X$ і т.д. Відомо, що після шостого взяття з фонду він залишився порожнім. Обчислити X.

6. Депозит у 100 вносять до фонду на початку кожного року протягом 10 років. Через 10 років після останнього депозиту сума X береться з фонду щорічно. Фонд вичерпується на нескінченності.

   а) Знайти X при відсотковій ставці 10 %;

   б) Намалювати графік X як функції від i, якщо i змінюється від 1 до 21 %.

7. У банку створюється рахунок, на який нараховується 8 % на суму до 100000, а на все, що перевищує її – 9 %. Такі нарахування відбуваються на початку кожного року. Через один рік з фонду починають брати суму X, і через 10 років фонд стає порожнім. На початку у фонді було 300000. Знайти X.

8. Показати, що

$$i^{(m)} - d^{(m)} = \frac{i^{(m)} \cdot d^{(m)}}{m}.$$

9. Показати, що

$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < ... < \delta < i^{(3)} < i^{(2)} < i$$

та

$$i^{(m)} - d^{(n)} \le \frac{i^2}{\min(m, n)}.$$

10. Страхова компанія повинна зробити протягом п'яти років виплати по 15 000. Перша виплата має відбутися 31 грудня 2009 р. Для накопичення фонду на виплати компанія робить щорічні внески величиною X, $2X$, $3X$..., починаючи з 1 січня 2000 р., на банківський рахунок. На цьому рахунку щорічна відсоткова ставка становить 5 %. Останній внесок компанія зробить 1 січня 2009 р. Обчислити X.

11. Внески по 200 здійснюються на банківський рахунок на початку кожного кварталу протягом п'яти років. Банк нараховує щорічні відсотки величиною i. Через один квартал після останнього внеску баланс на рахунку дорівнював 5000. Обчислити i.

12. Розглянемо неперервний платіжний потік протягом n років з інтенсивністю виплат $r = 1$, який починається в момент 0. Показати, що

$$a_{\overline{n}|} < \overline{a}_{\overline{n}|} < \ddot{a}_{\overline{n}|},$$

якщо $i > 0$.

13. Показати, що якщо $i_1 > i_2 > 0$, то при зростанні n $a_{\overline{n}|}(i_1)/n$ та $a_{\overline{n}|}(i_1)/a_{\overline{n}|}(i_2)$ спадають.

14. Людина може зробити позику 208 через рік, заплативши за це 100 тепер і 108,15 через рік після моменту позики. Якою в цьому разі є фактична відсоткова ставка?

15. Банк може надати студенту позику у 10000 для покриття витрат на навчання в університеті. Фактична відсоткова ставка – 3 %, а умови позики такі:

    а) перші п'ять років виплачуються лише відсотки – 300 на рік;

    б) починаючи з шостого року, виплачуються відсотки та 900 щорічно, доки борг не буде виплачено.

Як довго студенту потрібно виплачувати борг і на скільки остання виплата перевищуватиме залишок боргу? Якщо студент захоче погасити борг достроково в момент $t \in N$, то яку він повинен здійснити виплату?

16. На рахунку вкладника – 10000. Банк гарантує, що протягом трьох років фактична відсоткова ставка становитиме 7 %. Через три роки нова відсоткова ставка буде встановлена на наступні три роки. Банк гарантує, що вона не буде відхилятись більше ніж на 1 % від попередньої. Що можна сказати про суму на рахунку через шість років?

17. Пенсійний фонд має виплатити громадянину:

    а) 5000 – 1 червня 2004 р.;

    б) 3000 – 1 березня 2007 р.;

    в) 2000 – 1 жовтня 2008 р.;

    г) 8000 – 1 квітня 2010 р.

    Технічна відсоткова ставка для розрахунків становить 5 %. Знайти величину зобов'язань фонду перед громадянином на 1 січня 2003 р.

18. Громадянин укладає угоду з недержавним пенсійним фондом на право отримання пенсії через сім років. Пенсія буде:

    а) сплачуватись раз на рік протягом 12 років;

    б) розмір пенсії має враховувати інфляцію й дорівнювати 1200 у нинішніх цінах.

    Припускається, що протягом найближчих трьох років офіційної інфляції не буде, а потім її рівень становитиме приблизно 1,2 % на рік. Фонд розміщує пенсійні резерви й забезпечує учасникам фонду інвестиційний прибуток розміром 6,3 % річних. Який одноразовий пенсійний внесок повинен зробити громадянин?

19. Написати програму знаходження j в задачі 1 для довільного періоду конверсії, вартості страхування, величини й періодичності виплат.

20. Написати програму знаходження внутрішньої норми прибутку за величиною виплат $r_1, ..r_n$, які здійснюються в моменти часу $t_1, ..t_n$, відповідно.

Заняття 2

Моделі тривалості життя

Індивіда віком x позначимо символом (x), тривалість його майбутнього життя – T або $T(x)$. Таким чином, $x + T$ буде віком, у якому ця людина вмре.

Тривалість майбутнього життя T – випадкова величина з функцією розподілу

$$G(t) = P(T < t),\ t \geq 0.$$

Припускаємо, що функція G неперервна і T має щільність розподілу $g(t) = G'(t)$.

Імовірність того, що індивід (x) умре протягом t років, позначають символом ${}_tq_x$, тобто

$${}_tq_x := G(t),$$

а ймовірність того, що індивід віком x проживе принаймні t років – символом

$${}_tp_x := 1 - G(t).$$

Імовірність того, що індивід (x) проживе s років і потім умре в наступні t років, позначають

$${}_{s|t}q_x := P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}\, q_x - {}_s\, q_x.$$

Умовна ймовірність того, що індивід (x) проживе ще t років після досягнення віку $x + s$, становить

$${}_tp_{x+s} := P(T > s + t | T > s) = \frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)}.$$

Умовна ймовірність того, що (x) умре протягом t років після досягнення віку $x + s$, становить

$${}_tq_{x+s} := P(T \leq s + t | T > s) = \frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)}.$$

Очікувана тривалість залишку життя індивіда у віці x є математичним сподіванням $E(T)$, яке визначають за формулою

$$\overset{\circ}{e}_x = \int\limits_0^\infty tg(t)dt\,.$$

Сила смертності для індивіда (x) віком $x+t$ визначається як

$$\mu_x(t) := \mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(1-G(t)).$$

Де Муавр запропонував модель з максимальним віком ω людини і припустив, що T рівномірно розподілена між віком 0 і $\omega - x$, що приводить до $g(t) = \frac{1}{\omega - x}$ для *0<t<* ω*-x*. Тоді сила смертності має вигляд

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t},\ 0 < t < \omega - x\,.$$

Гомпертц запропонував модель, в якій сила смертності зростає експоненційно:

$$\mu_{x+t} = Bc^{x+t},\ t > 0$$

де B і c – сталі, $B > 0,\ c \geq 1.$

Мейкхем запропонував модель вигляду

$$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t},\ t > 0,$$

де A, B, c – сталі, $A > 0,\ B \geq 0,\ c \geq 1.$

$K = [T]$ (ціла частина T) – кількість повних років життя індивіда (x), що залишилися. Розподіл випадкової величини K має вигляд

$$P(K = k) = P(k \leq T < k+1) = {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Математичне сподівання величини K називається *очікуваною обмеженою тривалістю майбутнього життя* (x) і дорівнює

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x.$$

S – дробова частина року смерті, протягом якої (x) залишається живим, тобто $T = K + S$.

Імовірність дожити до віку x позначають $s(x)$.

Задачі

1. Відомо, що ${}_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x}$, x належить проміжку $[0, 100)$, t – проміжку $[0, 100-x]$. Обчислити μ_{45}.

2. Відомо, що ${}_tp_x = 1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}$, $x = 60$, $t \in (0, 100)$. Обчислити $E(T(x))$.

3. Відомо, що $\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}$, $t \in [0, 85)$. Обчислити ${}_{20}p_x$.

4. Відомо, що ${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$, $t \geq 0$. Обчислити $\overset{\circ}{e}_{41}$.

5. Відомо, що μ_{x+t} – стала, $t \in [0, 1)$, $q_x = 0,16$.

   Знайти таке t, що ${}_tp_x = 0,95$.

6. Відомо, що:

   а) якщо сила смертності дорівнює μ_{x+t}, $t \in [0, 1)$, то $q_x = 0,05$.

   б) якщо ж сила смертності становить $\mu_{x+t} - c$, $t \in [0, 1)$, то $q_x = 0,07$.

   Обчислити c.

7. Дано таблицю значень e_x :

Вік x	e_x
75	10,5
76	10
77	9,5

   Обчислити ймовірність особи віком 75 років дожити до 77 років.

8. Сила смертності підпорядкована закону де Муавра, математичне сподівання $E(T(16)) = 36$. Обчислити $D(T(16))$.

9. Розглядаються дві незалежні особи: одна палить, інша – ні. Для того, хто не палить, сила смертності дорівнює μ_x, $x \in [0, w)$, для курця – $c \cdot \mu_x$, c>1, $x \in [0, w)$.

   Обчислити ймовірність того, що час життя, що залишилось, для курця більший, ніж для того, хто не палить.

10. Яка з функцій:

    1) $s_1(x) = e^{x-0,7(2^x-1)}$; 2) $s_2(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$;

    3) $s_3(x) = e^{-x^2}$; 4) $s_4(x) = \frac{20000-10x-x^2}{20000}$

    може виступати як функція виживання?

11. Смертність серед застрахованих визначається інтенсивністю μ, яка є випадковою величиною з рівномірним розподілом на $(0, 2)$. Яка ймовірність смерті випадково обраної застрахованої людини протягом року?

12. Які з таких тверджень істинні $(t, r \geq 0)$:

1) ${}_{t+r}p_x \geq {}_{r}p_{x+t}$;

2) ${}_{r}q_{x+t} \geq {}_{t|r}q_x$;

3) якщо $s(x)$ відповідає закону де Муавра, то медіана величини $T(x)$ дорівнює $\overset{\circ}{e}_x$?

13. Чи можуть бути:

1) $\mu_x = (1+x)^{-3}, x \geq 0$;

2) $s(x) = 1 - \frac{11}{6}x + \frac{11}{8}x^2 - \frac{7}{24}x^3, 0 \leq x \leq 3$;

3) $g(x) = x^{n-1}e^{-x/2}, \quad x \geq 0, \quad n \geq 1\,$?

14. Сила смертності задана формулою

$$\mu_x = \beta c^x, \quad \beta, c = \text{const}, \quad x > 0.$$

Яка ймовірність для трьох осіб (s), (y), (z) померти в такому порядку: спочатку (s), потім (y) і потім (z)?

15. Нехай

$$\mu_x = \frac{Ac^x}{1 + Bc^x}, \quad x > 0.$$

1) Обчислити $s(x)$.

2) Показати, що мода розподілу віку смерті дорівнює

$$x_\circ = \frac{\log \log c - \log A}{\log c}.$$

16. Для деякого (x) відомо, що ${}_{t}q_x = kt$, де k – стала . Виразити μ_{x+t} у термінах k.

17. Для $s(x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}, 0 \leq x \leq 100$, обчислити:

${}_{17}p_{19}, \quad {}_{15}q_{36}, \quad {}_{15|13}q_{36}, \quad \mu_{36}, \quad e_{36}.$

18. Показати, що K і S незалежні тоді й лише тоді, коли ${}_{s}q_{x+k}/q_{x+k}$ не залежить від k для $s \in [0, 1]$.

19. Нехай $g(t) = ce^{-ct}$, $t \geq 0$, $c > 0$. Обчислити ET, DT, медіану T.

20. Дано таблицю значень $1000\, q_x$. Написати програму обчислення e_x за цією таблицею.

Заняття 3

Основні типи страхування

Математичним сподіванням $E(Z)$ поточної вартості страхової суми є *разова нетто-премія* (або чистий разовий внесок) даної угоди страхування.

Довічне страхування передбачає виплату суми 1 наприкінці року смерті. Його разова нетто-премія дорівнює

$$A_x := E(\upsilon^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}.$$

Страхування, що забезпечує страхову виплату 1 тільки при настанні смерті протягом n років, відоме як *тимчасове страхування* на термін n. Його разова нетто-премія дорівнює

$$A^1_{x:\,\overline{n|}} := \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}.$$

Чисте доживання тривалістю n років забезпечує виплату страхової суми 1, якщо застрахований живий до кінця n років. Його разова нетто-премія дорівнює

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} := \upsilon^n{}_n p_k.$$

Нехай страхова сума 1 виплачується в момент смерті, тобто в момент T. Разова нетто-премія в цьому випадку дорівнює

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} \upsilon^t{}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Стандартне довічне зростаюче страхування, при якому в кінці року смерті виплачується сума $K+1$. Разова нетто-премія у цьому випадку дорівнює

$$(IA)_x := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}\,.$$

Для відповідного тимчасового страхування на термін n років маємо

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n|}} = A_x + {}_{1|}A_x + ... + {}_{n-1|}A_x - n \cdot {}_{n|}A_x\,.$$

Задачі

1. Відомо, що:

   а) $\delta = 0,1;$

   б) $s(x) = 1 - x/100,\ x \in [0, 100],$

   $s(x)$ – функція виживання, що показує, яка частка новонароджених жива на момент часу x.

   Обчислити $50000\,\bar{A}_{30}$.

2. δ і $s(x)$ такі ж, як і для попередньої задачі. Виплата здійснюється в момент смерті. Підрахувати вартість тимчасової десятирічної угоди страхування на доживання з виплатою 50000 для людини віком 50 років.

3. Поточна вартість Z_1 – випадкова величина, яка відповідає тимчасовій угоді страхування доживання на n років, укладеній з людиною віком x. Z_2 – випадкова величина, що відповідає тимчасовому страхуванню на n років. І в першому, і в другому випадках величина виплати дорівнює 1. Відомо, що $D(Z_2) = 0,01,\ E(Z_2) = 0,04,$ $v^n = 0,3,\ {}_np_x = 0,8.$

   Обчислити $D(Z_1)$.

4. Поліс страхування укладено з людиною віком 50 років. Відомо, що сила смертності відповідає закону де Муавра з $\omega = 100$. Нарахування відбуваються простими відсотками (відсотки щорічно нараховуються тільки на початкову суму) $\tilde{i} = 0,01$. Виплата у випадку смерті становить $c_t = 100 - 0,01\,t^2$. Знайти вартість такого страхування.

5. Відомо, що:

   а) $s(x) = e^{-0,02x}$ – функція виживання, $x \geq 0$;

   б) $\delta = 0,04;$

   в) Поточна вартість дорівнює $Z = v^T$.

   Укладено угоду з людиною віком y.

   Знайти медіану величини Z.

6. Дворічна угода страхування укладається з людиною віком x на виплату 1 у кінці року смерті. Відомо, що $q_x = 0,5,\ i = 0,\ D(Z) = 0,1771$, де Z – поточна вартість страхової виплати.

   Обчислити q_{x+1}.

7. Угода страхування укладається з людиною віком x. Виплати – у момент смерті.

$$g(t) = \begin{cases} t/5000, & t \in [0,100] \\ 0, & t \notin [0,100] \end{cases}$$

– щільність тривалості майбутнього життя. $\delta = 0,1$. Величина виплат дорівнює 50. Підрахувати вартість угоди.

8. Для трирічного страхового контракту з людиною віком x:

t	Виплата	q_{x+1}
0	3	0,2
1	2	0,25
2	1	0,5

$\upsilon = 0,9$. Виплата здійснюється в кінці року смерті. Вартість контракту становить П. Яка ймовірність того, що компанія здійснить виплати, вартість яких перевищить П?

9. Показати, що $\frac{(IA)_x - A^1_{x:\overline{1}|}}{(IA)_{x+1} + A_{x+1}} = \upsilon p_x$.

10. Відомо, що $A_{x:\overline{n}|} = u$, $A^1_{x:\overline{n}|} = y$, $A_{x+n} = z$. Записати A_x як функцію від u, y, z.

11. Припустимо, що сила смертності й норма відсоткового прибутку постійні й дорівнюють μ та δ відповідно. Обчислити $D(\upsilon^T)$ у термінах μ та δ.

12. Припустимо, що μ та δ – сталі. Відомо, що $E(\upsilon^{2T}) = 0,25$. Обчислити вартість довічного страхування $E(\upsilon^T)$.

13. У клубі є 100 членів віком x. Кожен робить внесок ω до фонду, річна відсоткова ставка дорівнює 10 %. Фонд зобов'язаний сплатити 1000 у момент смерті кожного члена. З імовірністю 0,95 фонд спроможний зробити таку виплату. Відомо, що $\overline{A}_x = 0,06$, а $\overline{A}_x$, яке відповідає υ^2, дорівнює 0,01. Обчислити ω. Припустити, що тривалості життя для членів клуба – незалежні величини, і нормальний розподіл може бути використаний для апроксимації.

14. Вартість чистого доживання з виплатою 1000 для людини віком x на період n становить 650. Якщо ж при такому страхуванні вартість страховки повертається у випадку смерті протягом періоду n, то вона становить 700. Яка вартість страхового контракту, за яким повертається лише половина вартості страховки?

15. Студенти, налякані важким іспитом з актуарної математики, на початку навчального року створюють страховий фонд на таких засадах:

    кожен студент робить внесок S;

    якщо студента відраховують з університету, то він отримує 1000;

    той, хто успішно закінчує рік, отримує назад свій внесок.

    Припускаючи, що фонд буде прибутковим з 21 % річних, відрахування після зимової сесії становлять у середньому 10 %, а після весняної – 11 %, визначити величину внеску S.

16. За трирічною страховою угодою сума виплат у кінці року становить:

    300000 – для першого року, 350000 – для другого, 400000 – для третього. Для розрахунків компанія використовує технічну відсоткову ставку 6 % і припущення, що

$$q_{x+k} = 0,02(k+1), \quad k = 0,1,2.$$

    Якою має бути вартість такої угоди?

17. Компанія укладає велику кількість однотипних угод страхування на два роки з виплатою 100000 у кінці року смерті. Статистика свідчить, що приблизно третина клієнтів палять. $i = 5\,\%$,

$${}_tp_x = \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right],$$

    де $\theta = 1,5$ для тих, хто палить, і $\theta = 2$ для решти. Компанія вирішила призначити одну й ту саму вартість страховки для всіх. Чому вона дорівнює?

18. Час життя описується моделлю де Муавра з граничним віком $\omega = 120$ років. Номінальна відсоткова ставка становить 15 %. Для людини (40) обчислити вартість таких страхових угод:

    а) довічного страхування;

    б) п'ятирічного чистого доживання;

    в) п'ятирічного доживання;

    г) довічного страхування, відкладеного на два роки;

    д) довічного зростаючого страхування.

Заняття 4

Ануїтети

Прямий довічний ануїтет передбачає щорічні виплати по 1, доки застрахована особа жива. Виплати здійснюються в моменти $0, 1, ..., K$. Разова нетто-премія такого ануїтету дорівнює

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k {}_k p_x.$$

Нетто-премії ануїтету та відповідного страхування пов'язані формулою

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x.$$

Нетто-премія прямого довічного ануїтету, обмеженого терміном n років, становить

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k {}_k p_x.$$

Безпосередні довічні ануїтети передбачають виплати в моменти $1, 2, \ldots, K$, і разова нетто-премія задається рівністю

$$a_x = \ddot{a}_x - 1.$$

Нетто-премія відкладеного на m років прямого довічного ануїтету з щорічними виплатами по 1 становить

$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_m p_x \upsilon^m \ddot{a}_{x+m}, \quad \text{або} \quad {}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\,\overline{m}|}.$$

У випадку, коли страхові виплати величиною $1/m$ здійснюються m разів на рік, тобто в моменти часу $0, 1/m, 2/m, \ldots,$ доки застрахований початкового віку x живий, нетто-премія визначається за формулою

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)}.$$

У позначеннях

$$\alpha(m) = \frac{di}{d^{(m)} i^{(m)}} \quad \text{та} \quad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}}$$

маємо

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m).$$

Ануїтет з неперервними виплатами отримуємо у границі при $m \to \infty$. Якщо миттєва норма виплат у момент t дорівнює $r(t)$, то разова нетто-премія становить

$$E(Y) = \int_0^\infty \upsilon^t r(t)_t p_x dt.$$

Задачі

1. Розглядається трирічний тимчасовий ануїтет для людини (x). Відомо: $\upsilon = 0,9$,

t	Виплата	p_{x+t}
0	2	0.8
1	3	0.75
2	4	0.5

   Визначити дисперсію поточної вартості ануїтету.

2. Довести, що

$$_np_x d\ddot{a}_{\overline{n|}} + \sum_{k=0}^{n-1}(1-\upsilon^{k+1})_k p_x\, q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n|}}\,.$$

3. Відомо, що $i = 0,03$ та

x	$\ddot{a}_x$
72	8,06
73	7,73
74	7,43
75	7,15

   Знайти p_{73}.

4. Розглядається тимчасовий ануїтет на три роки з $i = 0,1$. Решта даних – такі, як і в задачі 1. Обчислити ймовірність того, що поточна вартість виплат перевищить 4.

5. Відомо, що:

   а) $\delta = 0$;

   б) $\int\limits_0^{+\infty} t \cdot {}_tp_x dt = g$;

   в) $D(\bar{a}_{\overline{T|}}) = h$.

   Обчислити $E(T)$ у термінах g і h.

6. Відомо, що для $\delta > 0 : E(\bar{a}_{\overline{T|}}) = 10$, а для $\delta_2 = 2\delta$: $E(\bar{a}_{\overline{T|}}) = 7,375$. Для першого δ: $D(\bar{a}_{\overline{T|}}) = 50$. Обчислити $\bar{A}_x$.

7. Довести:

$$\frac{(I\ddot{a})_x - \ddot{a}_{x:\,\overline{1|}}}{(I\ddot{a})_{x+1} + \ddot{a}_{x+1}} = a_{x:\,\overline{1|}} .$$

8. Відомо, що $(\bar{I}_{\overline{n|}}\bar{a})_x = E(Y)$, де

$$Y = \begin{cases} (\bar{I}\bar{a})_{\overline{T|}}, & \text{якщо } 0 \le T < n \ , \\ (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n|}} + n({}_{n|}\bar{a}_{\overline{T-n|}}), & \text{якщо } T \ge n \ , \end{cases}$$

   $\mu_x = 0,04, \ \delta = 0,06.$ Обчислити $\frac{\partial}{\partial n}(\bar{I}_{\overline{n|}}\bar{a})_x$.

9. Відомо, що $\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} = EY$, де $Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & \text{якщо } 0 \le K < n \ , \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & \text{якщо } K \ge n \ . \end{cases}$

   Показати, що

$$DY = \frac{M(-2\delta) - M^2(-\delta)}{d^2},$$

   де $M(u) = Ee^{u \cdot min(K+1,n)}$.

10. Поточна вартість ануїтету величини 1 для особи (x) дорівнює Y. Відомо, що $\ddot{a}_x = 10$ при $i = e^{\delta} - 1 = 1/24$, та $\ddot{a}_x = 6$ при $i = e^{2\delta} - 1$. Обчислити DY.

11. Тривалість життя особи (45) описується моделлю де Муавра з граничним віком 100 років. $i = 10\,\%$. Якою буде вартість довічної ренти із щомісячними виплатами 1000 ?

12. Страхова компанія зобов'язана виплачувати щорічно 150000 робітнику (x), який отримав виробничу травму. Виплати починаються негайно й продовжуються, доки робітник живий. Після того, як компанія

виплатить 500000 , далі виплати здійснюватиме перестрахувальник. Відомо, що $i = 5\,\%$ і після травми

$$ {}_tp_x = \begin{cases} (0,7)^t, \text{ якщо } 0 \le t < 5,5\,, \\ 0, \text{ якщо } t \ge 5,5\,. \end{cases} $$

Яка вартість такого зобов'язання?

13. Відомо, що $\mu_x = 0,06$, для $t > x$, відсоткова ставка становить $4\,\%$. Обчислити ймовірність того, що $\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x$.

14. Особі (x) виплачується неперервна довічна рента з інтенсивністю 1. Відомо, що $\delta = 0,06$ і

$$ \mu_x(t) = \begin{cases} 0,01, \text{ якщо } 0 \le t < 5\,, \\ 0,02, \text{ якщо } t \ge 5\,. \end{cases} $$

Яка вартість цієї ренти?

15. Відомо, що $i = 0,05$, $q_{40} = 0,01$, $\ddot{a}_{41} = 6,951$. Обчислити $\ddot{a}_{40}$. Як зміниться $\ddot{a}_{41}$, якщо q_{40} зменшиться на $60\,\%$?

16. Тривалість майбутнього життя для людини (x), яка не палить, має експоненційний розподіл із середнім 30. Інтенсивність смертності тих, хто палить, удвічі більша. $i = e^{0,04} - 1$. Курці в середньому становлять четверту частину всіх застрахованих. Обчислити середнє та коефіцієнт варіації величини $\bar{a}_{\overline{T_x}|}$.

17. Установити накопичену у віці 70 років вартість ануїтету з такими виплатами в кінці кожного місяця:

    - 100 – від 30 до 40 років;
    - 200 – від 40 до 50 років;
    - 500 – від 50 до 60 років;
    - 1000 – від 60 до 70 років.

18. Написати програму обчислення $\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x + \beta(m)$, де $\alpha(m)$ та $\beta(m)$ задані з точністю δ^3.

19. Написати програму оцінки $\bar{A}_x(\delta)$ та $\bar{a}_x(\delta)$ за відомими значеннями $\bar{A}_x(\delta_i), i = 1, 2$, для $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

20. Написати програму створення щомісячної вартості ануїтетів за таблицею тривалості життя.

Заняття 5

Нетто-премії

Для страхового поліса загальний збиток L страхувальника визначається як різниця між поточною вартістю страхових виплат і поточною вартістю премій. Премія називається нетто-премією (чистою премією) тоді, коли вона відповідає принципу еквівалентності $E(L) = 0$.

Функція корисності $u(x)$ задовольняє умови $u'(x) > 0$ і $u''(x) < 0$ та вимірює корисність грошової суми x для страхувальника.

При заданій функції корисності розрахунок нетто-премій базується на співвідношенні $E(u(-L)) = u(0)$.

Якщо розглянути довічне страхування зі страховою сумою 1, яка виплачується щорічними нетто-преміями, то їх величини становитимуть

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Розглянемо тимчасове страхування на термін n (страхова сума 1 виплачується в кінці року смерті). Щорічна нетто-премія в такому випадку становить

$$P^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}},$$

а щорічна нетто-премія чистого доживання дорівнює

$$P_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}}.$$

Щорічну нетто-премію доживання визначають за формулами

$$P_{x:\,\overline{n}|} = \frac{A_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}}, \qquad P_{x:\,\overline{n}|} = P^1_{x:\,\overline{n}|} + P_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Якщо щорічна нетто-премія сплачується m разів на рік рівними частинами, то

$$P^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{A_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}.$$

Задачі

1. Відомо, що $P_{25:\,\overline{20}|} = 0,064$, $A_{45} = 0,64$ і щорічна премія, яку сплачують не більше 20 років, якщо людина жива, за довічне страхування

з виплатою в кінці року смерті, становить ${}_{20}P_{25}$ = 0,046. Обчислити $P^{1}_{25:\,\overline{20}|}$.

2. Укладається угода страхування життя з виплатою 1 у кінці року смерті людини (x). Премія G сплачується на початку кожного року, якщо людина жива.

   L – витрати страхувальника, коли $G = P_x$;

   L^* – витрати страхувальника, коли G таке, що *EL*$^* = -0,2$;

   $DL = 0,3$. Знайти DL^*.

3. Маємо два страхові контракти для людини (x): A і B. $d = 0,08$. Премії сплачуються на початку кожного року, виплата – у кінці року смерті. L – втрати страхувальника.

	Виплата	Премія	DL
A	4	0,18	3,25
B	6	0,22	

   Обчислити DL для контракту B.

4. Премії сплачуються на початку кожного року протягом 20-ти років. Контракт довічного страхування укладено з людиною (x) на суму 10000 з виплатою в кінці року смерті. Якщо смерть відбулась протягом періоду сплати премій, то в кінці року смерті окрім 10000 виплачується половина суми останньої премії. Показати, що річна премія становить
$$\frac{10\,000A_x}{(1+\frac{d}{2})\ddot{a}_{x:\,\overline{20}|} - \frac{(1-v^{20}{}_{20}p_x)}{2}}.$$

5. Щорічна премія, яку сплачують не більше ніж n років, якщо людина жива, за довічне страхування з виплатою в кінці року смерті становить ${}_nP_x$. Записати ${}_nP_x$ через d, A_x та $A_{x:\,\overline{n}|}$.

6. За страховим полісом для людини (x) у кінці року смерті виплачується сума $b_j = 1000\cdot(1,06)^j$. Премії сплачуються, поки людина жива. Відомо, що $i = 0,06$; $1000 \cdot P_x = 10$. Обчислити вартість контракту.

7. Відомо, що $i = 0,1$; $a_{30:\,\overline{9}|} = 5,6$; $v^{10} \cdot {}_{10}\,p_{30} = 0,35$. Обчислити $1000 \cdot P^{1}_{30:\,\overline{10}|}$.

8. Розглядається страхування на термін два роки з виплатою 1 у кінці року смерті. L – функція втрат при такому страхуванні. Щорічна премія визначається за допомогою принципу еквівалентності.

   Відомо, що $q_x = 0,1$; $q_{x+1} = 0,2$; $v = 0,9$. Обчислити DL.

9. Розглянемо пенсійну угоду з особою (30) з виплатою протягом 20-ти років ануїтету з величиною 1, який почнеться через 30 років. Плата за угоду буде здійснюватись неперервно з інтенсивністю C усі 30 років. $i = 0,045$, $\mu_x = 0,0005 + 10^{-4+0,04x}$. Знайти C.

10. Відомо, що для довічного страхування особи (x):

    1) премія сплачується неперервно з постійною інтенсивністю, доки угода дійсна;

    2) страхова виплата має вигляд $b_t = (1+i)^t$, де i – фактична відсоткова ставка, t – час дії угоди.

    Який з таких виразів для величини втрат L, розрахованої за принципом еквівалентності, правильний:

    а) $\frac{v^{T_x} - \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$; б) $(v^{T_x} - \bar{A}_x)(1-\bar{A}_x)$; в) $\frac{v^{T_x} - \bar{A}_x}{1+\bar{A}_x}$;
    г) $(v^{T_x} - \bar{A}_x)(1+\bar{A}_x)$; д) $\frac{v^{T_x} + \bar{A}_x}{1+\bar{A}_x}$?

11. Людина (35) купує довічну пенсію, яку почнуть виплачувати з 65 років. Пенсія 10000 виплачується раз на рік. Разова премія R вноситься в момент укладання угоди й повертається в кінці року смерті, якщо смерть настала до пенсійного віку. Визначити R.

12. У попередній задачі визначити R, якщо у випадку смерті до пенсійного віку повертається премія та накопичені відсотки.

13. Відомо, що $P_{35:\,\overline{20}|} = 0,42$; ${}_{20}P_{35} = 0,0299$; $A_{55} = 0,6099$. Обчислити $P^1_{35:\,\overline{20}|}$.

14. Обчислити $P^{(4)}_{30:\,\overline{20}|}$ за $P_{30:\,\overline{20}|} = \frac{1}{40}$, $P^1_{30:\,\overline{20}|} = \frac{3}{200}$, ${}_{20}P_{30} = 0,02$, $d = 0,04$, використавши стандартну апроксимацію.

15. Людина (x) сплачує за ануїтет з виплатами по 1, які почнуться через n років, щорічні премії до початку виплат за ануїтетом. Премії повертаються, якщо людина помре до початку виплат за ануїтетом. Якщо ж вона проживе n років, то ануїтет буде сплачуватись t років обов'язково, а якщо людина проживе довше – то до її смерті. Обчислити щорічну премію.

16. Показати, що:

а) $\bar{P}(\bar{A}_x) > \mu_x$, якщо сила смертності – зростаюча з віком функція;

б) $\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\overset{\circ}{e}_x}$, якщо $\delta = 0$;

в) $P(\bar{A}_{40:\,\overline{25}|}) \leq P^{(2)}(\bar{A}_{40:\,\overline{25}|}) \leq P^{(4)}(\bar{A}_{40:\,\overline{25}|}) \leq P^{(12)}(\bar{A}_{40:\,\overline{25}|}) \leq \bar{P}(\bar{A}_{40:\,\overline{25}|})$.

17. Фактична відсоткова ставка становить 5 %, $\bar{P}(\bar{A}_x) = 0,03$. Обчислити величину регулярних премій, які беруть кожні півроку, за страховку у 50 000.

18. Довічна страхова угода укладається з особою (30) з виплатою 1000 у кінці року смерті. Разова премія величиною 20 сплачується через рік після укладання угоди. Відомо, що $i = 5\,\%$; $l_{30} = 96307$; $l_{54} = 87621$. Яка ймовірність того, що угода не буде збитковою для страхувальника?

19. Страхова угода з особою (x) гарантує виплату C, якщо смерть відбудеться протягом n років, та $C/2$, якщо смерть відбудеться раніше. Щорічні премії за таке страхування також зменшуються вдвічі через n років. Визначити величину премії.

20. За угодою довічного страхування нащадкам особи (x) у момент її смерті виплачується сума S. Премії сплачуються неперервно так, що річна премія (без урахування дисконтування) становить P. Замість принципу еквівалентності використовують принцип "рівноваги втрат і прибутків":
$$P(L > 0) = P(L < 0) = 0,5 \ ,$$
де L – загальний збиток страхувальника. За умови, що сила смертності стала, порівняти таку премію з премією, яка обчислена згідно з принципом еквівалентності.

21. Особа (x) укладає дворічну угоду страхування життя з виплатою суми 1 у кінці року смерті. Відомо, що $p_x = 0,75$; $p_{x+1} = 0,8$ і найменша премія, яка гарантує відсутність збитків протягом першого року, становить 0,95. Обчислити дисперсію вартості угоди.

22. Нехай функція корисності $U(x) = \sqrt{C + x}$. Виплати за страховою угодою не перевищують C. Написати програму, яка будує таблицю щорічних премій П залежно від величини виплати та показує відсоток премій П від нетто-премій.

Заняття 6

Резерв нетто-премій

Позначимо через ${}_tL$ різницю в момент t поточної вартості майбутніх страхових виплат і поточної вартості майбутніх внесків. *Резерв нетто-премій у момент* t позначається символом ${}_tV$ і визначається як умовне математичне сподівання величини ${}_tL$ при $T > t$.

Резерв нетто-премій у кінці k-го року становить, згідно з визначенням,

$$ {}_kV = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1} \upsilon^{j+1} {}_jp_{x+k} q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j} \upsilon^j {}_jp_{x+k}, $$

де c_j – страхова сума на j-й рік після видачі поліса, що оплачується щорічними преміями Π_0, Π_1, $\Pi_2, \ldots$, $\Pi_{k,}$ які вносяться в моменти $0, 1, 2, \ldots, k$.

Для довічного страхування резерв нетто-премій у кінці k-го року становить

$$ {}_kV_x = \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k}, $$

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}. $$

Для дробових частин року $k + u$ (k – ціле, $0 < u < 1$) резерв нетто-премій визначають так:

$$ {}_{k+u}V = \frac{1-u}{1-uq_{x+k}} ({}_kV + \Pi_k)(1+i)^u + \left(1 - \frac{1-u}{1-uq_{x+k}}\right) {}_{k+1}V \upsilon^{1-u}. $$

У неперервному випадку страхування визначається двома функціями – страховою сумою $c(t)$ і ставкою премії Π_t у момент $t \geq 0$. Резерв нетто-премій у момент t становить

$$ V(t) = \int_0^{\infty} c(t+h) \upsilon^h {}_hp_{x+t} \mu_{x+t+h} dh - \int_0^{\infty} \Pi(t+h) \upsilon^h {}_hp_{x+t} dh. $$

Ставку премії можна розкласти на компоненту заощаджень

$$ \Pi^s(t) = V'(t) - \delta V(t) $$

і компоненту ризику

$$ \Pi^r(t) = (c(t) - V(t)) \mu_{x+t}. $$

Диференціальне рівняння Тіле:

$$ \Pi(t) + \delta V(t) = V'(t) + \Pi^r(t). $$

Задачі

1. Відомо, що:

   а) ${}_{10}V_{25} = 0,1$;

   б) ${}_{10}V_{35} = 0,2$.

   Обчислити ${}_{20}V_{25}$.

2. Розглядається трирічна угода страхування на доживання:

k	c_{k+1}	q_{x+k}
0	2	0,2
1	3	0,25
2	4	0,5

   Премії величиною 1 сплачуються на початку кожного року, доки (x) живий. У випадку доживання виплачується сума, що дорівнює резерву нетто-премії на третій рік. Відомо, що $i = 1/9$. Обчислити резерви нетто-премій рекурсивно, починаючи з ${}_0V = 0$.

3. За даними задачі 2 обчислити $D\Lambda_1$.

4. Відомо, що $i = 0,06$, $q_x = 0,65$, $q_{x+1} = 0,85$, $q_{x+2} = 1$. Виплата у випадку смерті становить 1. Обчислити ${}_1V_x$.

5. Розглянемо угоду дворічного страхування для (x) на доживання з виплатою 1000 у випадку виживання. Якщо смерть трапляється раніше, то виплачується 1000 і резерв нетто-премії на кінець цього року. Відомо, що:

   а)

k	q_{x+k}	c_{k+1}	${}_kV$
0	0,1	1000+${}_1V$	0
1	0,11	2000	
2			1000

   б) $i = 0,1$.

   Обчислити ${}_1V$.

6. Премії сплачуються протягом 20 років. Відомо, що:

   а) ${}_{23}V_{15} = 0,585$;

   б) ${}_{24}V_{15} = 0,6$;

   в) $i = 4\%$.

   Обчислити p_{38}.

7. Укладається угода довічного страхування з людиною (x) з виплатою в кінці року смерті. Відомо, що:

   а) $P_x = 4/11$;

   б) ${}_tV_x = 0,5$;

   в) $\ddot{a}_{x+t} = 1,1$.

   Обчислити i.

8. Угода з людиною (60) на виплату 1000 укладається 1 травня 1998 р. Відомо, що $q_{70} = 0,033$; ${}_{10}V_{60} \cdot 1000 = 231,14$; ${}_{11}V_{60} \cdot 1000 = 255,4$; $1000 \cdot P_{60} = 33$, $i = 6\,\%$. Використовуючи апроксимацію, знайти резерв нетто-премії на 31 грудня 2008 р.

9. Відомо, що:

k	$\ddot{a}_{\overline{k}\rvert}$	${}_{k-1\rvert}q_x$
1	1	0,33
2	1,93	0,24
3	2.795	0,16
4	3,6	0,11

   Обчислити ${}_2V_{x:\,\overline{4}\rvert}$.

10. Розглядається довічне страхування людини (75) з виплатою 1000 у випадку смерті. Сила смертності підпорядкована закону де Муавра з $\omega = 105$. Відомо, що щорічні премії

$$\Pi_k = \Pi_0 \cdot (1,05)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

   $i = 5\,\%$. Обчислити резерв нетто-премії в кінці п'ятого року.

11. Людина (x) укладає угоду на довічне страхування з виплатою 1500 і щорічною сплатою премій. Відомо, що $i = 0,05$, резерв нетто-премії на кінець n-го року становить 205 , резерв на $n-1$ рік дорівнює 179, $\ddot{a} = 16,2$. Обчислити 1000$\cdot q_{x+n-1}$.

12. Особа (20) уклала угоду довічного страхування на 1000. Через 11 років вона отримала виробничу травму, яка збільшила її силу смертності на 0,01 у цей рік. На 11-й рік резерв нетто-премій становив 81,54, а сила смертності, за якою велись розрахунки, дорівнювала 0,008427. На скільки зменшиться страхова виплата, якщо компанія врахує збільшення ризику смерті?

13. 1 лютого 2002 р. було укладено угоду довічного страхування з виплатою 1000 зі сплатою місячних премій 1,8. Якщо резерв відповідної угоди зі сплатою річних премій становить 240 на 31 січня 2016 р., 260 – на 31 січня 2017р., то яким буде резерв премій угоди зі щомісячними преміями 31 січня 2016 р.; 31 січня 2017 р.; 30 вересня 2016 р.; 20 жовтня 2016 р.?

14. Дві таблиці тривалості життя T та T′ показують, що для віку від 90 до 99 років

$$q'_y = q_y - \frac{0,52}{\ddot{a}_{y+1}}\,.$$

Фактична відсоткова ставка становить 4 %. Граничний вік у таблиці T – 101 рік. Відомо, що

$${}_tV_{90} = {}_tV'_{90}, \quad 0 \le t \le 10.$$

Обчислити $\ddot{a}'_{100}$.

15. Час смерті має рівномірний розподіл для кожного року життя. Які з таких тверджень істинні:

а) ${}_kV(\bar{A}_{x:\,\overline{n|}}) = \frac{i}{\delta}{}_kV_{x:\,\overline{n|}}$;

б) ${}_kV(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}{}_kV_x$;

в) ${}_kV(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n|}}) = \frac{i}{\delta}{}_kV^1_{x:\,\overline{n|}}$?

16. Яка з формул визначає ${}_{15}V^{(m)}_{40}$:

а) $(P^{(m)}_{55} - P^{(m)}_{40})\ddot{a}^{(m)}_{55}$;

б) $(1 - \frac{P^{(m)}_{40}}{P^{(m)}_{55}})A_{55}$;

в) $1 - \frac{\ddot{a}^{(m)}_{55}}{\ddot{a}^{(m)}_{40}}$?

17. За дворічною страховою угодою сума 4000 виплачується в кінці року смерті, а премія вноситься двічі по 743 на початку кожного року.

Фактична відсоткова ставка становить 10 %, резерв нетто-премій на кінець першого року дорівнював ${}_1V = 169$. Визначити дисперсію загальних втрат у момент укладання угоди.

18. Особа (35) купує довічну ренту з інтенсивністю виплат 1, яка почне виплачуватися через 10 років. Премії сплачуються неперервно

до моменту початку ренти. Смертність описується законом де Муавра з граничним віком 85 років. Яким буде резерв нетто-премій на кінець п'ятого року, якщо відсотки не нараховуються?

19. За угодою чистого доживання терміном n років виплачується сума S. Премії надходять неперервно протягом часу дії угоди з інтенсивністю π. У випадку смерті 2/3 резерву нетто-премій повертається.

    а) Написати диференціальне рівняння Тіле для ${}_tV$. Які його граничні умови?

    б) Знайти ${}_tV, \ \ t \in [0, n)$.

    в) На основі принципа еквівалентності обчислити π.

20. У задачі 9 з попереднього заняття обчислити резерв нетто-премій. Як зміниться резерв нетто-премій, якщо у випадку смерті протягом 30 років k-та його частина буде повернута? Розглянути випадки $k = 0,5; \ k = 1$.

21. За страховою угодою виплачується:

    а) неперервний ануїтет з інтенсивністю 1 протягом m років після смерті, якщо смерть настала не пізніше ніж через n років після укладання угоди;

    б) такий же ануїтет, починаючи з моменту n, якщо людина на цей час жива;

    в) довічний ануїтет з інтенсивністю 1, починаючи з моменту $n + m$, якщо людина на цей час жива.

    Обчислити разову нетто-премію, резерв нетто-премій. Отримати диференціальне рівняння Тіле.

22. Розглядається доживання й тимчасове страхування на термін n років для людини віком x. Відомі відсотки i та вважається, що час життя підпорядкований закону де Муавра з максимальним віком ω. Величина страхової суми дорівнює С. Написати програми визначення:

    а) резерву нетто-премій;

    б) премій збереження та ризику;

    в) дисперсії загальних втрат по роках.

Заняття 7

Декременти

Людина знаходиться у визначеному цивільному стані у віці x. Ця людина залишає даний стан у момент T за однією із m взаємовиключних причин декремента (припинення), пронумерованих для зручності числами від 1 до m. Маємо пару випадкових величин: тривалість перебування T у даному стані та *причину декремента* J.

У термінах функцій щільності $g_1(t), ..., g_m(t)$ маємо

$$g(t) = g_1(t) + ... + g_m(t),$$

$$P(J = j|T = t) = \frac{g_j(t)}{g(t)}.$$

$${}_tq_{j,x} := P(T < t, J = j),$$

$${}_tq_{j,x+s} := P(T < s + t, J = j|T > s).$$

Для індивіда (x) сила декремента у віці $x + t$ стосовно причини j становить

$$\mu_{j,x}(t) := \mu_{j,x+t} := \frac{g_j(t)}{1 - G(t)} = \frac{g_j(t)}{{}_tp_x}.$$

Сукупна сила декремента дорівнює

$$\mu_{x+t} := \mu_{1,x+t} + ... + \mu_{m,x+t}\,.$$

Якщо страхування припускає страхову виплату $c_j(T)$ негайно після смерті, то її разова нетто-премія становить

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} c_j(t) \upsilon^t g_j(t) dt.$$

Задачі

1. Статистика дворічного коледжу показує, що ймовірність відрахування за неуспішність становить 0,1 у перший рік і 0,5 – у другий. Імовірність припинення навчання з інших причин становить 0,3 у перший рік і 0,2 – у другий.

а) Скільки потрібно зарахувати абітурієнтів, щоб очікувана кількість випускників становила 180?

б) Скільки потрібно зарахувати абітурієнтів, щоб очікувана кількість студентів, які не завершили навчання, становила 800?

2. Є два декременти. Відомо, що $\mu_{1,x+t} = 0,01$; $\mu_{2,x+t} = 0,02$, $t \geq 0$. Обчислити $q_{1,x}$.

3. Відомо, що

$$\mu_{j,x+t} = \frac{j}{150}, \quad j = 1,2,3; \; t > 0.$$

Обчислити $E(T|J = 3)$.

4. Розглядається угода страхування, за якою виплати здійснюються таким чином:

а) 3000, якщо смерть трапилась унаслідок аварії в громадському транспорті;

б) 2000, якщо смерть трапилась унаслідок іншої аварії;

в) 1000, якщо смерть не пов'язана з аварією.

Відомо, що $\mu_{1,x+t} = 0,01$; $\mu_{2,x+t} = 0,03$; $\mu_{3,x+t} = 0,03$; $\delta = 0,03$. Виплати відбуваються в момент смерті, премії надходять неперервно.

Чому дорівнює величина премії P?

5. Є дві причини декремента. Відомо, що

$$\mu_{1,x+t} = 1, \quad \mu_{2,x+t} = \frac{t}{t+1}, \quad t \geq 0.$$

Обчислити

$$m_x = \frac{q_x}{\int\limits_0^1 {}_tp_x dt}.$$

6. Є дві причини декремента,

x	$q_{1,x}$	$q_{2,x}$	p_x
25	0,01	0,15	0,84
26	0,02	0,1	0,88

Розглядається група з 10 000 чоловік віком 25 років. Яка очікувана кількість людей, що проживуть 1 рік і помруть наступного року з першої причини декремента? Як зміниться ця кількість, якщо $q_{2,25}$ становитиме 0,25?

7. Розглядається контракт страхування на два роки особи (x) з виплатою 2, якщо смерть трапилась унаслідок нещасного випадку, 1 – якщо з іншої причини. Виплата відбувається в момент смерті.

   Відомо, що:

   а) $\mu_{1,x+t} = t/20\,;$

   б) $\mu_{2,x+t} = t/10\,;$

   в) $\delta = 0.$

   Обчислити вартість такого страхування.

8. Є три причини декремента. Смерть із причини будь-якого декремента має рівномірний розподіл протягом кожного року.

   Відомо, що:

   а) $\mu_{1,30+0,2} = 0,2\,;$

   б) $\mu_{2,30+0,4} = 0,1\,;$

   в) $\mu_{3,30+0,8} = 0,15.$

   Обчислити q_{30}.

9. Є дві причини декремента. Відомо, що:

$$_{3}p_{63} = 0;\ q_{1,63} = 0,05;\ q_{2,63} = 0,5;\ _{1|}q_{63} = 0,07;\ _{2|}q_{1,63} = 0,042.$$

   Для групи з 500 чоловік віком 63 роки обчислити очікувану кількість осіб, які помруть з причини другого декремента між 65 та 66 роками.

10. Є дві причини декремента. Відомо, що:

    а) $\mu_{1,x+0,5} = 0,02;$

    б) $q_{2,x} = 0,01.$

    Кожний декремент рівномірно розподілений протягом року життя. Обчислити $1000{\cdot}q_{1,x}$.

11. Є дві причини декремента: нещасний випадок та інше. Розглядається страхування життя для (x) з виплатою на момент смерті. Сума C_1 виплачується, якщо смерть відбулась з причини нещасного випадку,

C_2 – якщо з іншою причини. Відомо, що $\mu_1 = \mathrm{const}$, $\mu_1 > 0$. Премії надходять неперервно. Показати, що величина премії дорівнює

$$C_2 \bar{P}_x + (C_1 - C_2)\mu_1 \,.$$

12. Є три причини декремента, для яких

$$\mu_x^{(k)} = \frac{3}{11k(100-x)} \ , \ x < 100.$$

Яка ймовірність того, що особа (10) не помре до 60 років?

13. У моделі з двома причинами декремента

$$\mu_{x+t}^{(i)} = \frac{i}{100-(x+t)} \ , \quad t < 100 - x.$$

Для $x = 50$ обчислити:

а) $g_i(t)$; б) $g(t)$; в) ${}_3p_{50}^{(1)}$; г) ${}_{3|}q_{50}^{(1)}$; д) ${}_3q_{50}^{(2)}$.

14. Розташувати у зростаючому порядку такі величини:

$$q_x^{(j)}; \quad q_x; \quad m_x^{(j)} := \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(j)} dt}.$$

15. Робітник (30) укладає пенсійну угоду, за якою:

а) якщо він працюватиме на підприємстві до виходу на пенсію у віці 70 років, то він отримуватиме пенсію розміром 300, що множиться на кількість відпрацьованих років;

б) якщо робітник помре до 70 років, будучи працівником підприємства, то його нащадкам буде негайно здійснена виплата 20000;

в) якщо робітник припинить працювати на підприємстві з іншої причини, то починаючи з віку 70 років він отримуватиме довічний ануїтет із щорічною виплатою розміром 300, що множиться на кількість відпрацьованих на підприємстві років.

Виразити вартість такої угоди в термінах елементарних актуарних функцій через силу декрементів.

16. Сили двох декрементів задано формулами

$$\mu^{(1)}_{x+t} = \frac{\theta t^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\int_t^\infty s^{\alpha-1}e^{-\beta s}ds},$$

$$\mu^{(2)}_{x+t} = \frac{1-\theta}{\theta}\mu^{(1)}_{x+t}, \quad t \geq 0,$$

де $0 < \theta < 1, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$

а) Обчислити $g_j(t), \ g(t),$ сумісну функцію розподілу T та J.

б) Виразити ET і DT через α та β.

За страховою угодою здійснюється виплата величиною 1 за першим декрементом і 0 – за другим. Нехай δ – стала.

1) Записати функцію загальних втрат, якщо оплата здійснюється разовою премією.

2) Чому дорівнює разова премія?

3) Отримати формулу дисперсії загальних втрат.

17. За угодою страхування особа (35) у випадку втрати працездатності до 60 років отримує такі платежі:

а) 100 після чотиримісячної непрацездатності;

б) неперервний дворічний ануїтет із сумою 1000 у рік після шестимісячної непрацездатності;

в) неперервний ануїтет до віку 65 років із сумою 2000 у рік після непрацездатності терміном 2,5 роки.

Записати нетто-премію такої угоди в термінах елементарних актуарних функцій.

18. Написати програму, яка за таблицями виходу з деякого цивільного стану за різних причин декрементів створює звичайну таблицю тривалості життя й обчислює вартість:

а) довічного страхування з виплатою 10000;

б) довічного страхування з виплатою c_j за умови виходу з даного стану за причини декремента j.

Заняття 8

Групове страхування

Маємо m осіб початкового віку $x_1, x_2, ..., x_m$. Тривалість майбутнього життя k-го індивіда становить $T(x_k) = T_k \quad (k = 1, ..., m)$. На основі цих m елементів можемо розглядати різноманітні стани u з тривалістю майбутнього життя в них Т(u). ${}_tp_u$ – умовна ймовірність того, що стан u ще не порушений у момент t за умови, що він існував у момент 0; символи q_u, μ_{u+t} і т. д. визначаються аналогічно.

Стан *спільного життя*

$$u := x_1 : x_2 : ... : x_m$$

визначається як існуючий доти, доки всі m осіб, що беруть участь у ньому, живі. Часом руйнування цього стану є

$$T(u) := \min(T_1, T_2, ..., T_m).$$

Розподіл часу руйнування стану задається формулою

$$ {}_tp_{x_1:x_2:...:x_m} := P(T(u) > t) = P(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_m > t) = $$

$$ = \prod_{k=1}^{m} P(T_k > t) = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k}. $$

Миттєва інтенсивність руйнування стану спільного життя u визначається так:

$$\mu_{u+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_u = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{m} \ln {}_tp_{x_k} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t}.$$

Разова нетто-премія страхування з виплатою 1 при першій смерті становить

$$A_{x_1:x_2:...:x_m} := \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1} {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m} \, q_{x_1+k:x_2+k:...:x_m+k}.$$

Разова нетто-премія для прямого ануїтету страхування спільного життя дорівнює

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:...:x_m} := \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m}.$$

$\overline{n|}$ – стан, що порушується в момент n, тобто $T(\overline{n|}) := n$. За цих позначень отримуємо

$$T(x : \overline{n|}) := \min(T(x), n).$$

Стан *виживання останнього*

$$u := \overline{x_1 : x_2 : ... : x_m}$$

зберігається доти, доки живий принаймні один із m індивідів,

$$T(u) = \max\{T_1, T_2, ..., T_m\}.$$

Формула разової нетто-премії довічного ануїтету для стану виживання останнього:

$$\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - .. + (-1)^{m-1} S_m^{\ddot{a}},$$

де $S_k^{\ddot{a}} = \sum \ddot{a}_{x_{j_1}:x_{j_2}:...:x_{j_k}}$.

Нетто-премія страхування на суму 1, яка виплачується в момент смерті останнього члена групи, становить

$$A_{\overline{x_1:x_2:..:x_m}} = S_1^A - S_2^A + S_3^A - ... + (-1)^{m-1} S_m^A \quad ,$$

де $S_k^A = \sum A_{x_{j_1}:x_{j_2}:...:x_{j_k}}$.

Стан

$$u := \frac{k}{x_1 : x_2 : ... : x_m}$$

триває доти, доки живі принаймні k з початкових m індивідів.

Стан

$$u := \frac{[k]}{x_1 : x_2 : .. : x_m}$$

вважається непорушеним, якщо живі тільки k з m індивідів.

Для довільно обраних коефіцієнтів $c_0, c_1, ..., c_m$ маємо

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \, {}_t p_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}^{[k]} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 S_j^t \, ; \qquad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}^{[k]} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 S_j^{\ddot{a}} \, ; \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_k {}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{\;k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^t\,; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_k \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{\;k} = \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^{\ddot{a}}\,; \tag{4}$$

де $S_k^t = \sum {}_tp_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_k}}$, а різницевий оператор визначається так:

$$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k, \quad \Delta^j c_k = \Delta(\,\Delta^{j-1} c_k)\,.$$

Разова нетто-премія страхування з виплатою 1 у момент смерті особи (x_k), якщо це r-та смерть, становить

$$\bar{A}_{x_1:\ldots:x_{k-1}:\overset{r}{x_k}:x_{k+1}\ldots:x_m} = \int_0^\infty v^t {}_tp_{\overline{x_1:\ldots:x_{k-1}:x_{k+1}:\ldots:x_m}}^{[m-r]} \, {}_tp_{x_k} \cdot \mu_{x_k+t}\, dt\,.$$

Задачі

1. За таблицею ймовірностей

x	q_x
80	0,5
81	0,75
82	1

обчислити $q_{80:81}$, $q_{\overline{80:81}}$, $q_{\overline{80:81}}^{[1]}$.

2. Для двох незалежних осіб (x) та (y) відомі ${}_np_x$, ${}_np_y$. Визначити ймовірності таких подій:

а) стан $(x:y)$ зберігається n років;

б) тільки одна особа проживе не менше n років;

в) хоча б одна особа проживе не менше n років;

г) стан $(x:y)$ припиниться протягом n років;

д) хоча б одна з осіб помре протягом n років;

ж) обидві особи помруть протягом n років.

3. Показати, що для двох осіб (30) та (40) імовірність:
   а) смерті в один і той же рік становить

   $$1 + e_{30:40} - p_{30}(1 + e_{31:40}) - p_{40}(1 + e_{30:41}) + p_{30:40}(1 + e_{31:41});$$

   б) смерті в однаковому віці становить

   $$_{10}p_{30}(1 + e_{40:40}) - 2\,_{11}p_{30}(1 + e_{40:41}) + p_{40} \cdot {_{11}p_{30}}(1 + e_{41:41}).$$

4. Відомо, що $\delta = 0,055$, $\mu_{x+t} = 0,045$, $\mu_{y+t} = 0,035$, $t \geq 0$. Обчислити $\bar{A}^2_{x:y}$.

5. У деякій групі людей курці мають силу смертності вдвічі більшу, ніж ті, хто не палить. Для людей, що не палять,

   $$S(x) = 1 - \frac{x}{75}\,, \quad x \in [0, 75].$$

   Відомо, що людина (55) є курцем, а людина (65) не палить. Обчислити $\overset{\circ}{e}_{55:65}$.

6. Для двох осіб (x) та (y) розглядається угода страхування з неперервною виплатою. Виплата величиною 10000 здійснюється в момент другої смерті. Премію за таке страхування сплачують неперервно до часу останньої смерті. Премія сплачується із силою С, доки людина (x) жива; якщо (x) помирає раніше, ніж (y), то після смерті (x) премія сплачується із силою 0,5 С.

   Потрібно знайти С, якщо відомо, що $\delta = 0,05$, $\bar{a}_x = 12$, $\bar{a}_y = 15$, $\bar{a}_{x:y} = 10$.

7. Розглядається страхування для двох осіб однакового віку x з виплатою 1 у кінці року смерті особи, яка вмерла останньою. Нетто-премія сплачується до першої смерті. Відомо, що $A_x = 0,4$, $A_{x:x} = 0,55$, $a_x = 9$. Обчислити величину премії.

8. Сила смертності чоловіків $\mu = 0,04$, сила смертності жінок підпорядкована закону де Муавра з максимальним віком $\omega = 100$.

   Обчислити ймовірність того, що чоловік віком 50 років помре пізніше, ніж жінка віком 50 років.

9. Відомо, що Z – поточна вартість страхування для двох незалежних осіб (x) та (y).

   $$Z = \begin{cases} v^{T(y)}\,, \ T(y) > T(x)\,, \\ 0\,, \ \text{в інших випадках}\,, \end{cases}$$

$\delta = 0,06$. Також відомо, що сили смертності постійні: для (x) – 0,07, для (y) – 0,09. Обчислити $D(Z)$.

10. Розглядається страховий контракт для двох осіб однакового віку (x) з виплатою в момент смерті. Виплати здійснюються таким чином:

    а) виплачується 1 у момент смерті Івана, якщо Павло живий;

    б) виплачується 2 у момент смерті Павла, якщо Іван живий;

    в) виплачується 3, якщо на момент смерті Івана Павло вже помер;

    г) виплачується 4, якщо на момент смерті Павла Іван вже помер.

    Ці дві особи є незалежними. Показати, що нетто-премія такого страхування дорівнює $7\bar{A}_x - 2\bar{A}_{x:x}$.

11. Розглядається угода страхування для двох осіб (x) та (y) з виплатою 1 у момент другої смерті. Якщо (x) помирає раніше за (y), то здійснюється додаткова виплата 0,5. Відомо, що сила смертності для кожної особи підпорядковується закону Гомпертца:

$$\mu_z = Bc^z, \quad z \geq 0.$$

    Показати, що разова нетто-премія такого страхування дорівнює

$$\bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_\omega(1 - 0,5c^{x-\omega}),$$

    де $c^\omega = c^x + c^y$.

12. За угодою про страхування подружжя виплата величиною 1 здійснюється в момент другої смерті. Премії сплачуються неперервно з інтенсивністю P до моменту першої смерті. $\delta = 0,05$. Смерть чоловіка та жінки незалежні з однією й тією ж силою смертності $\mu = 0,07$. Обчислити P.

13. Нехай

$$\mu_x = \frac{1}{100 - x}, \quad 0 \leq x < 100.$$

    Обчислити:

    а) ${}_{10}p_{40:50}$, б) ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$, в) $\mathring{e}_{40:50}$,
    г) $\mathring{e}_{\overline{40:50}}$, д) $DT(40:50)$, е) $DT(\overline{40:50})$,
    є) $cov(T(40:50), T(\overline{40:50}))$, ж) ${}_{25}q^{\;2}_{25:50}$.

14. Неперервний ануїтет з інтенсивністю 1 виплачується, якщо хоча б одна з осіб (40) та (50) жива та її вік більше 60, але за умови, що якщо особа (40) жива та її вік менше 55, то виплати не відбуваються. У термінах елементарних актуарних функцій виразити вартість такого потоку виплат.

15. Показати, що

$$a_{\overline{\overline{x:\,y:\,\overline{n|}}}} = a_{\,\overline{n|}} +_{n|} a_{x:y};$$

$$\bar{A}_{\overline{x:\,\overline{n|}}} = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\,\overline{n|}} + v^n.$$

16. Відомо, що сила смертності описується законом Мейкхема з $c^{10} = 3$ та $A = 0,003$.

    а) обчислити ${}_{\infty}q^1_{40:50}$, якщо $\mathring{e}_{40:50} = 17$.

    б) Виразити $\bar{A}^1_{40:50}$ у термінах $\bar{A}_{40:50}$ та $\bar{a}_{40:50}$.

17. Обчислити $a^{[4]}_{\overline{x:x:x:x:x}}$ за відомими значеннями:
$a_{x:x:x:x} = 11,9; \quad a_{x:x:x:x:x} = 10,75; \quad a_{x:x:x:x:x:x} = 9,675.$

18. Частина таблиці ануїтетів стану спільного життя має вигляд:

Вік осіб	Нетто-премія ануїтету
26:20:28	14,4
29:26:20	14,3
28:29:26	13,8
20:28:29	14,0
29:26:28:20	12,5

Фактичні відсотки становлять 3,5 %. Визначити нетто-премію страхування з виплатою 1000 у кінці року другої смерті в групі з чотирьох осіб: (20), (26), (28) та (29).

19. Написати програму, яка за введеним рядком коефіцієнтів c_k і d_k видає ліву й праву частини формул (1)-(4).

20. Для групового страхування n людей віком (x) написати програму обчислення ставки страхових виплат $r^k(t)$ за таблицею тривалості життя.

Заняття 9

Вимога на виплату у страховому портфелі

Портфель складається із n страхових полісів. Вимога виплати за полісом h становить S_h. Можливі значення величини $S_h - 0, s_{1h}, s_{2h}, ..., s_{mh}$ та їхні ймовірності

$$P(S_h = 0) = p_h, \quad P(S_h = s_{jh}) = q_{jh}$$

для $j = 1, ..., m$ і $h = 1, ..., n.$

Загальна сума вимог на виплати становить

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

Випадкові величини $S_1, S_2, ..., S_n$ – незалежні.

Розподіл величини $S_1 + ... + S_h$ обчислюють за формулою

$$\begin{aligned} P(S_1 + ... + S_h = x) &= \sum_{j=1}^{m} P(S_1 + ... + S_{h-1} = x - s_{jh}) q_{jh} \\ &+ P(S_1 + ... + S_{h-1} = x) p_h \,. \end{aligned}$$

Метод 1 (округлення). Полягає в заміні s_{jh} округленою величиною s^*_{jh}, кратною обраній основній грошовій одиниці. Імовірності підправляють відповідними замінами:

$$s_{jh} \to s^*_{jh}; \;\; q_{jh} \to q^*_{jh} = q_{jh} s_{jh} / s^*_{jh}; \;\; p_h \to p^*_h = 1 - (q^*_{1h} + ... + q^*_{mh}).$$

Метод 2 (розосередження). Нехай s^-_{jh} позначає найбільше кратне (обраної грошової одиниці), яке не перевищує s_{jh}, а s^+_{jh} – найменше її кратне, яке перевищує s_{jh}. Метод полягає в розосередженні ймовірностей у значення s^-_{jh} і s^+_{jh} у такий спосіб, щоб математичне сподівання залишилося незмінним. Нові ймовірності будуть такими:

$$q^-_{jh} = \frac{s^+_{jh} - s_{jh}}{s^+_{jh} - s^-_{jh}} q_{jh}, \quad q^+_{jh} = \frac{s_{jh} - s^-_{jh}}{s^+_{jh} - s^-_{jh}} q_{jh}.$$

Загальна сума вимог страхових виплат має складний пуассонів розподіл, якщо

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N,$$

де випадкові величини X_1, X_2, ... – незалежні, однаково розподілені, N не залежить від X_1, X_2, ... і має пуассонів розподіл з параметром

$$q = q_1 + q_2 + ... + q_m,$$

а ймовірність того, що величина індивідуальної вимоги на виплату дорівнює j, становить

$$p(j) = q_j/q \ \ (j = 1, 2, \ldots..., m).$$

Позначимо ймовірності $P(S = k)$ через $f(k)$. Тоді

$$f(0) = P(S = 0) = P(N = 0) = e^{-q}$$

і маємо рекурентну *формулу Пенджера*

$$f(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{m} j q_j f(k - j), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Перестрахування перевищення збитків із пріоритетом α відшкодовує різницю $X_i - \alpha$ для будь-якої індивідуальної вимоги виплати, що перевищує α.

Перестрахування, що блокує збиток із сталою β, відшкодовує перевищення $R = (S - \beta)^+$ загальної суми вимог страхових виплат.

Нетто-премія перестрахування, що блокує збиток, становить

$$\rho(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} (1 - F(x))dx,$$

а для цілих значень β дорівнює

$$\rho(\beta) = \sum_{k=\beta}^{\infty} (1 - F(k)).$$

Задачі

1. Нехай S_h – виплата за страховим полісом h. Вона може набувати трьох значень:

$$S_h(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{якщо людина } (x) \text{ жива,} \\ 100\,, & \text{якщо людина розриває страхову угоду,} \\ 1000\,, & \text{якщо людина помирає.} \end{cases}$$

Імовірність смерті $q_{1,x} = 0,001$, імовірність відмови від страховки $q_{2,x} = 0,15$. $p_x = 1 - q_{1,x} - q_{2,x}$.

Розглядається страховий портфель $S = S_1 + \ldots + S_5$.

Використовуючи нормальне наближення, знайти ймовірність того, що загальна виплата за портфелем перевищить 200.

2. Відомо, що загальна виплата S наближено описується нормальним законом із середнім μ і дисперсією σ^2.

   Показати, що нетто-премія перестрахування $\rho(\beta)$ зі сталою β визначається формулою

$$\rho(\beta) = (\mu - \beta) \cdot \Phi\left(\frac{\mu - \beta}{\sigma}\right) + \sigma\phi\left(\frac{\mu - \beta}{\sigma}\right),$$

   де Φ і ϕ – функція розподілу та щільність $N(0,1)$, відповідно.

3. За контрактом перестрахування здійснюється виплата:

$$R = \begin{cases} S - \beta\,, \text{ якщо } \beta < S < \gamma\,, \\ \gamma - \beta\,, \text{ якщо } S \geq \gamma\,. \end{cases}$$

   Виразити вартість перестрахування R (тобто $E(R)$) через функцію розподілу S ($F_S(\cdot)$).

4. а) Виразити $F_S(\beta)$ через $\rho(\beta)$.

   б) Відомо, що $\rho(\beta) = (2 + \beta + \frac{1}{4}\beta^2)e^{-\beta}$. Знайти $F_S(\beta)$ та $f(\beta)$.

5. Відомо, що $f(1) = 3f(0)$, $f(2) = 2f(0) + 1,5f(1)$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot (3f(x-3) + 4f(x-2) + 3f(x-1))\,, \quad x = 3, 4, \ldots\,.$$

   Знайти $f(0)$.

6. Відомо, що для наближення $\log S$ використовують $N(\mu, \sigma)$-розподіл. Знайти $\rho(\beta) = E(S - \beta)^+$.

7. З компанією укладено 2500 угод доживання на термін три роки з виплатами по 1000. Премії вносять щорічно протягом дії угоди з першим внеском через рік після укладання угоди. Усі застраховані одного віку – 30 років. Компанія використовує для розрахунків такі показники:

$i = 25\,\%,\;\; l_{30} = 96307; \quad l_{31} = 96117; \quad l_{32} = 95918.$

Визначити величину премії, яка гарантує відсутність втрат за всім портфелем з імовірністю 0,99.

8. Нехай кількість вимог у портфелі розподілена за біноміальним законом з параметрами p та n. Усі вимоги в портфелі – незалежні, однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням m_1 та дисперсією m_2. Обчислити

$$ES; \quad DS; \quad g_s(t) := Ee^{ts}.$$

9. Нехай S має складний пуассонів розподіл з $\lambda = 2$ та ймовірностями індивідуальних вимог

$$p_k = 0,1\,k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Обчислити $P(S = j)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$; ES; DS.

10. Нехай S має складний пуассонів розподіл з пуассоновим параметром λ та розподілом індивідуальних вимог

$$p_k = -\frac{c^k}{x \log(1-c)}, \quad k = 1, 2, 3, ..., \quad 0 < c < 1.$$

Показати, що S має від'ємний біноміальний розподіл. Виразити його параметри через c та λ.

11. Припустимо, що кількість дорожніх аварій застрахованого водія має розподіл Пуассона з параметром λ. За статистикою імовірність того, що у випадку аварії водій вирішує, що пошкодження відбулося не з його вини і є настільки значним, що потрібно звернутися до страхової компанії за відшкодуванням, становить p. За припущення, що кількість аварій та їх рівень незалежні, визначити розподіл кількості аварій, які потребують відшкодування.

12. Нехай S_1 має складний розподіл Пуассона з пуассоновим параметром $\lambda = 2$ та індивідуальними вимогами на виплату, які набувають значень 1,2,3 з імовірностями 0,2; 0,6 та 0,2 відповідно. S_2 має складний розподіл Пуассона з $\lambda = 6$ та індивідуальними вимогами на виплату 3 чи 4 з імовірностями по 0,5. S_1 та S_2 – незалежні. Визначити розподіл $S_1 + S_2$.

13. Показати, що якщо S має гамма-розподіл з параметрами α та β (щільність $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}$), то $E(S - ES)^3 = \frac{2\alpha}{\beta^3}$.

14. Нехай S_1 має складний пуассонів розподіл з пуассоновим параметром λ і розподілом індивідуальних вимог $P_1(k)$; S_2 – складний від'ємно-біноміальний розподіл з параметрами (r, p) та розподілом індивідуальних вимог $P_r(k),\ k = 1, 2, \ldots$. Показати, що S_1 та S_2 однаково розподілені, якщо $\lambda = -r \log p$ та

$$P_1(k) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-p)^i}{i \log p} P_2^{\star i}(k).$$

15. Страхова компанія уклала 10000 типових угод довічного страхування з виплатою страхової суми 1000 у кінці року смерті. Премії сплачуються щорічно. Вік усіх застрахованих – 30 років, смертність задана таблицею

x	l_x	$\ddot{a}_x$
30	96307	15,50099
31	96117	15,25614
32	95918	15,0

$i = 5\%$. Кожен рік здійснюється перестрахування суми під ризиком (тобто різниці між фактичною страховою сумою й резервом на кінець поточного року). Перестрахувальник отримує 90 % від премії на суму під ризиком і у випадку смерті покриває 90 % виплати суми під ризиком. Перестрахувальник не інвестує отримані кошти. Яку загальну премію отримає перестрахувальник на початку другого року?

16. Написати програми:

а) розосередження розподілу в значення, кратні основній грошовій одиниці.

б) обчислення розподілу $S = S_1 + \ldots + S_n$ шляхом послідовної згортки розподілів.

17. Написати програму обчислення ймовірності $P(S = k)$ за формулою Пенджера.

18. Написати програму обчислення ймовірностей $\widehat{F}(x)$ та $E(\widehat{S})$ при перестрахуванні.

19. Написати програму обчислення $\rho(\beta)$ за таблицею значень $F(x)$.

Заняття 10

Навантаження на витрати

Витрати придбання. Вони складаються з усіх витрат, пов'язаних з видачею нового поліса: комісійних страховому агенту та його дорожніх витрат, медичного обстеження, заповнення поліса, реклами. Ці витрати стягуються з кожного поліса у вигляді єдиної суми, пропорційної страховій сумі. Відповідний коефіцієнт пропорційності позначається через α.

Витрати зборів. Ці витрати стягуються на початку кожного року, в якому збирається премія. Передбачається, що ці витрати пропорційні премії, навантаженій на витрати, з коефіцієнтом пропорційності, що позначається через β.

Адміністративні витрати. У цей пункт включено всі інші витрати, такі наприклад, як зарплата, оренда, вартість обробки даних, вартість інвестування, податки, збори на ліцензію тощо. Ці витрати стягуються з поліса протягом усього терміну дії контракту на початку кожного полісного року, звичайно пропорційно страховій сумі чи рівню платежів ануїтету. Відповідний коефіцієнт пропорційності позначається через γ.

Премія, навантажена на витрати (чи адекватна премія), що буде позначатися символом P^a, є такою щорічною премією, очікувана поточна вартість якої саме достатня для фінансування страхових виплат, а також зазнаних витрат, пов'язаних з даним страховим полісом.

$$P^a = P + P^\alpha + P^\beta + P^\gamma,$$

де P позначає щорічну нетто-премію, тоді як $P^\alpha, P^\beta, P^\gamma$ позначають три компоненти навантаження на витрати.

Для доживання (страхова сума 1, термін n, вік при видачі поліса – x) навантажена на витрати щорічна премія становить

$$P^a_{x:\,\overline{n|}} = \frac{A_{x:\,\overline{n|}} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}}$$

або

$$P^a_{x:\,\overline{n|}} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} P_{x:\,\overline{n|}} + \frac{\alpha d + \gamma}{1-\beta}.$$

Резерв навантаженої на витрати премії (чи адекватний резерв) наприкінці року k позначається через ${}_kV^\alpha$. Він визначається як різниця між очікуваною поточною вартістю майбутніх виплат разом з витратами й очікуваною поточною вартістю майбутніх премій, навантажених на витрати.

Резерв навантаженої на витрати премії можна розкласти на компоненти, подібно розкладу самої цієї премії:

$$ {}_kV^a = {}_kV + {}_kV^\alpha + {}_kV^\gamma. $$

Для доживання маємо:

$$ {}_kV^a_{x:\,\overline{n}|} = (1+\alpha){}_kV_{x:\,\overline{n}|} - \alpha. $$

Задачі

1. Розглядається страховий поліс доживання на період $n = 10$ років для людини віком $x = 40$. Страхова сума виплати становить 1000, $i = 4\,\%$. Виконується припущення де Муавра про смертність з максимальним віком $w = 100$.

   а) Витрати придбання полісу становлять 50. Інші витрати не враховуються ($\beta = \gamma = 0$). Визначити адекватну премію та страхові резерви премій для кожного року.

   б) Які максимальні витрати придбання допустимі, якщо резерв премій не може бути від'ємним?

2. Розглядається страховий поліс тимчасового страхування на період $n = 10$ років для людини віком $x = 40$. Страхова сума виплати становить 1000, $i = 4\,\%$. Виконується припущення де Муавра про смертність з максимальним віком $w = 100$.

   а) Витрати придбання полісу становлять 40. Інші витрати не враховуються ($\beta = \gamma = 0$). Визначити адекватну премію та страхові резерви премій для кожного року.

   б) Яка початкова інвестиція страхової компанії для продажу такого полісу, якщо резерв премій не може бути від'ємним?

3. Разова нетто-премія довічного страхування особи (x) з виплатою 1 становить B.

   а) Показати, що ефективна відсоткова ставка у такому випадку дорівнює

$$ \int\limits_0^\infty B^{-\frac{1}{t}}\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt - 1. $$

   б) Якою буде ефективна відсоткова ставка, якщо врахувати витрати придбання, які становлять α.

4. Найпростіше страхування капіталу S полягає у виплаті суми S через n років незалежно від того, живий власник капіталу чи ні.

   а) Яка величина щорічних премій такого страхування, якщо вони сплачуються всі n років?

   б) Якщо премії сплачуються з інтенсивністю u, але лише протягом життя власника капіталу, то яким має бути u?

   в) Визначити модифіковану інтенсивність $\widetilde{u}$ з попереднього пункту, яка враховує витрати придбання αS, витрати зборів $\beta\widetilde{u}$ та адміністративні витрати γS, які стягуються також неперервно.

   г) Установити вираз для резерву премій у всіх попередніх пунктах.

5. Страховка полягає у виплаті суми S, якщо через n років особа (x) жива, і поверненні всіх премій (без зароблених відсотків), якщо особа помирає протягом n років. Премії сплачуються неперервно з інтенсивністю u. Витрати придбання становлять αS, витрати зборів та адміністративні витрати сплачуються неперервно з інтенсивностями βu та γS, відповідно. Визначити u.

6. Дитина віком x застрахована на таких умовах:

   а) якщо вона помре протягом періоду $[x, y)$, то премії із заробленими відсотками повертаються;

   б) якщо вона помре протягом періоду $[y, z)$, або якщо вона жива на момент часу z, то сума S сплачується негайно.

   Премії, витрати зборів та адміністративні витрати стягуються неперервно з інтенсивностями u, β та γS відповідно. Витрати придбання становлять αS.

   а) Написати диференціальне рівняння Тіле для цього страхування.

   б) Визначити перспективний резерв премій з навантаженнями.

   в) Визначити u та суму під ризиком на кожен момент часу.

7. З особою (40) укладається угода страхування доживання до віку 65 років зі страховою сумою 1000. Щорічні премії визначаються за таких умов:

   а) витрати придбання становлять 40 % щорічної премії з усіма навантаженнями;

   б) витрати щорічного продовження угоди становлять 5 % від премії з навантаженнями і збираються з другого по десятий рік угоди;

в) податкові витрати становлять 2 % від премії з навантаженням щорічно;

г) поточні витрати становлять 12,5 і 4 на кожну 1000 страховки в перший і всі наступні роки відповідно;

д) функція виживання

$$s(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{\omega})^a, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \geq \omega \end{cases}$$

з $a > 0$.

Обчислити величину премії і всіх навантажень.

8. Параметри, які були обчислені для довічного страхування життя на суму 1000 за відсотковою ставкою $i = 0,06$, зібрані у таблиці:

Нетто-премія	$\bar{A}_x = 0,20$
Витрати придбання	7,5 % від премії
Податок, ліцензія	3 % від премії
Медична перевірка (у перший рік)	23
Витрати зборів (щорічно з другого року)	2,5
Плата нотаріусу за один контракт (у перший рік)	12

Обчислити премію з навантаженнями $G(b)$, якщо сума страховки становить b. $R(b)$ показує зміну у відсотках премії $G(b)$ при зміні b. Обчислити $R(b)$. Накреслити графіки $G(b)$ та $R(b)$.

9. Клієнт (x) уклав угоду страхування життя на термін 20 років із щорічною виплатою премій та відповідних навантажень. Через 10 років він хотів би зробити єдину виплату замість усіх, які були б до закінчення терміну угоди. Виразити в термінах елементарних актуарних функцій величину такої виплати.

10. Укладається угода з особою (x) про відкладений на n років неперервний довічний ануїтет з інтенсивністю виплат S. Неперервні премії з інтенсивністю u сплачуються до початку виплат за ануїтетом. Витрати придбання становлять αS, збори на поточні та адміністративні витрати здійснюються неперервно з інтенсивностями βu та γS відповідно.

а) Обчислити u та резерв премії.

б) Для врахування інфляції було вирішено змінити інтенсивності поточних та адміністративних витрат на $\beta\varphi(t)u$ та $\gamma\varphi(t)s$, відповідно. Обчислити u та резерв премій за цих змін.

в) Обчислити u та резерв премій для випадків

$$\varphi(t) = 1 + kt \quad \text{та} \quad \varphi(t) = e^{ct}\,,$$

якщо сила смертності визначена за законом де Муавра з максимальним віком 100 років.

11. Укладено страхову угоду з особою (35) на відкладене на 30 років довічне страхування життя з виплатою 1000. Витрати придбання становлять 12, витрати зборів – 15 % від суми премії з навантаженнями, адміністративні витрати – 1 на початку кожного року. Припускаючи, що сила смертності
$$\mu_x = \frac{1}{100 - x}$$
і максимальний вік – 100, обчислити всі складові премії з навантаженнями:
$$1000P, \quad 1000P^{\alpha}, \quad 1000P^{\beta} \text{ та } 1000P^{\gamma}.$$

12. За умов попередньої задачі обчислити складові резерва премії з навантаженнями:
$$1000{}_kV, \quad 1000{}_kV^{\alpha}, \quad 1000{}_kV^{\gamma}$$
для 10-го року.

13. Написати програму обчислення адекватної премії та відповідного резерву премій для доживання.

14. Написати програму обчислення адекватної премії та відповідного резерву премій для тимчасового страхування.

15. Написати програму обчислення адекватної премії та відповідного резерву премій для чистого доживання.

Заняття 11

Оцінювання ймовірності смерті

Імовірність смерті протягом року q_x оцінюють за статистичними даними; ці дані стосуються певної групи осіб (наприклад, власників полісів), які спостерігались протягом деякого періоду часу (одного календарного року чи більше). Цей період називають *періодом спостереження.* Оцінене значення q_x позначається $\widehat{q_x}$.

На *діаграмі Лексиса* життю кожного спостережуваного індивіда відповідає діагональний відрізок прямої, що показує часовий інтервал, протягом якого за ним спостерігали. Горизонтальні межі прямокутника утворені віковою групою, що розглядалася, а вертикальні межі є початком і кінцем періоду спостереження (рис. 1).

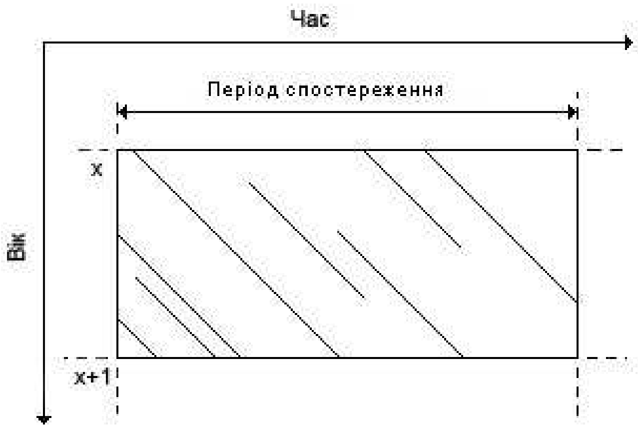

Рис. 1

Індивіди, які досягли віку x до початку періоду спостереження, були обстежені не повністю (деякі з них могли померти до початку спостереження, що могло б залишитися неврахованим); аналогічно, індивіди, які досягнуть віку $x+1$ після закінчення періоду спостереження, будуть обстежені не повністю. Іншим джерелом неповноти обстеження є індивіди, що входять у групу, за якою ведеться спостереження, при придбанні полісу, або ті, що залишають її не через смерть (наприклад, у зв'язку із закінченням страхової угоди) у проміжному віці між x та $x+1$.

Нехай ми маємо результати спостереження за n індивідами. Індивід з номером i знаходиться під наглядом у проміжку від $x+t_i$ до $x+s_i$ $(0 \le t_i < s_i \le 1)$.

Сума
$$E_x = (s_1 - t_1) + (s_2 - t_2) + ... + (s_n - t_n)$$
називається *експозицією.*

Сумарна довжина всіх сегментів у діаграмі Лексиса становить $\sqrt{2}E_x$.

D_x – кількість смертей, які спостерігалися в даному прямокутнику, I – множина індивідів i, спостереження за якими закінчилося у зв'язку зі смертю, та для всіх $i \in I$

$$s_i^{(m)} = [ms_i + 1]/m,$$

тобто $s_i^{(m)}$ є округленням s_i до наступної m-ї частини року.

Класичні оцінки для ймовірності смерті такі:

$$\widehat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \sum\limits_{i \in I} (1 - s_i)},$$

$${}_h\widehat{q}_x = \frac{hD_x}{E_x + \sum\limits_{i \in I} (s_i^{(m)} - s_i)}.$$

За припущення, що смерть відбувається в середньому у віці $x + \frac{1}{2}$, використовують оцінку

$$\widehat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \frac{1}{2}D_x}.$$

За припущення сталої сили смертності використовують оцінки

$$\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{D_x}{E_x},$$

$$\widehat{q}_x = 1 - \exp(-\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}) = 1 - \exp(-\frac{D_x}{E_x}).$$

Для достатньо великої групи людей однакового віку, які спостерігаються ω років, l_x показує, скільки з l_0 народжених доживають до віку x. Імовірність дожити до віку x становить

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}.$$

Кількість людей, які померли у віковому проміжку $[x, x+1)$, дорівнює

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Імовірність того, що людина (x) помре протягом наступного року, дорівнює

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Дві характеристики смертності: m_x – очікувана смертність та L_x – середня кількість тих, хто вижив до $[x, x+1)$, визначаються так:

$$L_x = \int_x^{x+1} l_y dy = \int_0^1 l_{x+t} dt,$$

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}.$$

Часто використовують формули

$${}_t p_x = P(T(0) > x + t / T(0) > x) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x} \; .$$

Таблиця тривалості життя є по суті таблицею ймовірностей смерті q_x протягом одного року, які повністю визначають розподіл величини K. Розподіл T отримують за допомогою інтерполювання за цією таблицею.

У *селективних таблицях тривалості життя* ймовірності смерті розділяються згідно з віком вступу. Таким чином, $q_{[x]+t}$ є ймовірністю смерті протягом одного року для індивіда $(x+t)$, де x – вік вступу. Згідно із селекцією

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots$$

Ефект селекції зазвичай припиняється після кількох років, наприклад, r років після вступу. Припускають, що

$$q_{[x-r]+r} = q_{[x-r-1]+r+1} = q_{[x-r-2]+r+2} = \dots = q_x$$

або

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}, \quad t \geq r.$$

Термін r називають *терміном селекції* і таблицю, що використовується після закінчення терміну селекції, називають завершальною таблицею тривалості життя.

Для обчислення ймовірностей використовують формули

$$p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}};$$

$$q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}.$$

Для розрахунків у задачах потрібно використовувати таблиці тривалості життя, подані в кінці посібника.

Задачі

1. За діаграмою Лексиса (рис. 2) обчислити:

   а) середній вік застрахованих 25 років тому;

   б) кількість застрахованих, які досягли віку 50 за час спостереження;

   в) кількість тих, хто спостерігався 25 років тому і досягнув віку 50.

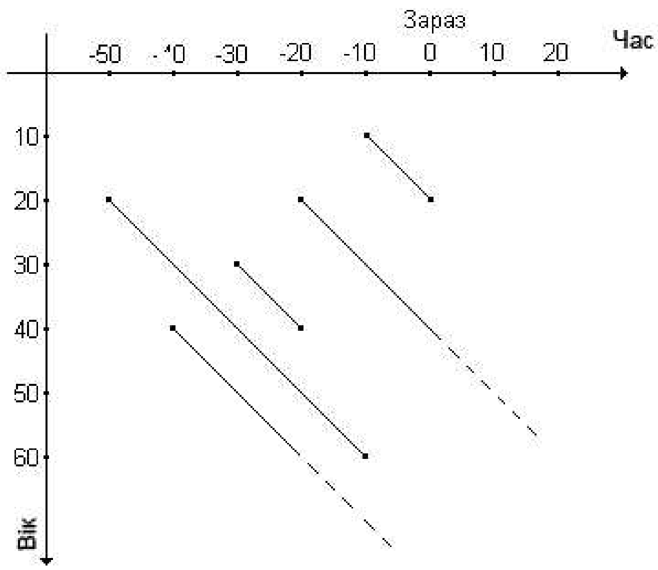

Рис. 2

2. Відомо, що $D_x = 36, E_x = 4820$. Обчислити $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$.

3. У медичному експерименті розглядалася група з 50 пацюків. 20 з них померли. Сумарний час спостереження становив 27,3 року. Оцінити силу смертності та очікувану тривалість життя.

4. Певна група спостережуваних має $E_x = 9758,4$ року у проміжку $(x, x+1]$. Існує кілька причин смерті. Відомо, що в цій групі:

   357 осіб померли з першої причини;

   218 – з другої;

   528 – з інших причин.

   Яка оцінка ймовірності того, що людина (x) помре з першої причини протягом року?

5. 100 страхових полісів укладено з особами віком x, а 60 – з особами віком $x + 0,25$.

   Чотири смерті спостерігалося в період $[x, x+1]$ (для простоти вважаємо, що ці смерті трапились у віці $x + 0,5$). Обчислити $\widehat{q}_x$.

6. Сила смертності є сталою протягом проміжку $(x, x+1]$. 10 людей почали спостерігатися у віці x, двоє – у віці $x + 0,4$. За двома спостереження було припинено у віці $x+0,8$, і по одному – у віці $x+0,2$ і $x + 0,5$. Також одна смерть спостерігалась у віці $x + 0,6$. Обчислити $\widehat{q}_x$.

7. Є дві причини декремента смерті в проміжку $(x, x+1]$. Сила смертності є постійною для кожного декремента. Спостерігалася група з 1000 застрахованих віком x. На проміжку часу $(x, x+1]$ трапилось:

   40 смертей – з першої причини декремента;

   50 смертей – з другої.

   Припускаючи, що смерть відбулась у віці $x + \frac{1}{2}$, знайти оцінку $\widehat{q}_{1,x}$ та $\widehat{q}_{2,x}$.

8. За умови, що сила смертності є строго зростаючою, показати:

   а) $s(x)s(y) \geq s(x+y), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$

   б) $s(x)\int\limits_0^\infty s(y)dy \geq \int\limits_0^\infty s(x+y)dy;$

   в) $s(x)\int\limits_0^\infty s(y)dy \geq \int\limits_x^\infty s(\omega)d\omega;$

   г) $\int\limits_0^\infty s(y)dy \geq \int\limits_x^\infty \frac{s(\omega)}{s(x)}d\omega.$

9. За таблицями тривалості життя обчислити:

   а) імовірність того, що особа (1) помре після 50 років, але до 60;

   б) імовірність того, що особа (30) помре у наступні 35 років;

   в) дві особи (26) та (31) з незалежними тривалостями життя не помруть протягом 12 років.

10. Відомо, що

x	E_x	D_x
40	1150	6
41	900	5
42	1200	12
43	1400	9
44	1300	13

   Знайти $\widehat{q}_x$.

11. Діти, яким придбали страховку, належать до двох груп:

   1) застраховані при народженні – 1600 осіб;

   2) застраховані у віці 10 років – 540 осіб.

   γ – випадкова величина, що дорівнює числу тих застрахованих, які померли до віку 70 років. Припускаючи незалежність тривалості життя для різних осіб, знайти (за таблицями тривалості життя) c таке, що $P(\gamma > c) = 0,05$.

12. Припускаючи рівномірний розподіл часу смерті протягом року, обчислити:

   а) ${}_{1/4}q_{25}$; б) ${}_{5,5}p_{40}$; в) $\mu_{50,3}$; г) m_{50}; д) $\overset{\circ}{e}_{30:\,\overline{n}|}$.

13. Субстандартна таблиця тривалості життя отримується із звичайної при збільшенні сили смертності на сталу c.

   а) Як пов'язані q_x із звичайної таблиці та відповідне q_x^s із субстандартної?

   б) Після вивчення статистики стану здоров'я шахтарів актуарій зробив висновок, що очікувана тривалість життя для особи (40) становить 10 років. Визначити c та побудувати субстандартну таблицю на основі таблиці тривалості життя. Побудувати графік відношення q_x^s/q_x, починаючи з віку $x = 40$.

14. За таблицею тривалості життя оцінити математичне сподівання та дисперсію кількості осіб початкової групи з 1000 новонароджених, які помруть у віці від 50 до 70 років.

15. Припускаючи, що відомі лише значення $e_{20}, \quad e_{25}, \quad e_{30}$ із таблиці тривалості життя і що смертність у віці від 20 до 34 років описується законом Гомпертца, обчислити значення e_x для $x = 20, ..., 34$. Зобразити отримані значення і справжні (з таблиці тривалості життя) на одному графіку.

16. За селективною таблицею тривалості життя обчислити:

    а) ${}_2p_{[30]}$; б) ${}_5p_{[30]}$; в) ${}_{1|}q_{[31]}$; г) ${}_3q_{[31]+1}$; д) $\overset{\circ}{e}_{[63]}$; ж) $\overset{\circ}{e}_{[63]+1}$.

17. За селективною таблицею тривалості життя встановити, чи істинні такі твердження:

    а) ${}_2p_{[31]} > {}_2p_{[30]+1}$; б) ${}_1q_{[31]} >_{1|} q_{[30]+1}$; в) ${}_2q_{[33]} >_2 q_{[31]+2}$.

18. Припускаючи, що момент смерті рівномірно розподілений протягом року, підрахувати, використовуючи селективну таблицю тривалості життя, ${}_{0,9}q_{[60]+0,6}$.

19. Нехай період селекції k і момент смерті розподілені рівномірно протягом року. Виразити $\overset{\circ}{e}_{[x]}$ у термінах $\overset{\circ}{e}_{x+k-1}$, l_{x+k-1} та $l_{[x]+r}$, $r < k$.

20. Написати програму, яка за значеннями e_x з таблиці смертності обчислює:

    а) d_x; б) $1000q_x$; в) e_x; $\quad x = 0, \ldots, 105$.

21. Написати програму, яка для сили смертності $\mu_x = Bc^x, x = 0, ..., 110$, $B = 0,0001$ та кожного із значень $c = 1,01; \;\; 1,05; \;\; 1,1; \;\; 1,2$ видає таблицю відповідних значень e_x та будує їх графік.

22. Використовуючи метод найменших квадратів, підігнати розподіл Гомпертца до таблиці тривалості життя зі значеннями $\{{}_tp_{50}\}_{t=1}^{50}$. Зобразити табличні та отримані за підігнаним законом Гомпертца значення на одному графіку.

Література

[1] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C. et al. *Actuarial Mathematics.* – Itasca: Society of Actuaries. – 1997.

[2] Gerber H.U. *Life insurance mathematics.* – Zürich: Springer. – 1997.

[3] Jordan C.W. *Textbook on life contingencies.* – Chicago: Society of Actuaries. – 1991.

[4] Mess B., Christensen J. *Exercises in life insurance mathematics.* – Copenhagen: University of Copenhagen. – 1996.

[5] Neill A. *Life contingencies.* – London: Heinemann. – 1977.

[6] Scott W.F. *Life assurance mathematics.* – Edinburgh: Heriot-Watt University. – 1999.

[7] Оленко А.Я. *Ймовірність та статистика.* – К.: НаУКМА. – 1999. – Ч. I.

[8] Фалин Г.И., Фалин А.И. *Актуарная математика в задачах.* – М.: Физматлит. – 2003.

Додаток А
Загальна таблиця тривалості життя

x	l_x	L_x	$\overset{\circ}{e}_x$
0	100000	99403,13	78,05
1	98811	98762,48	77,98
2	98714	98678,99	77,06
3	98644	98619,00	76,11
4	98594	98573,00	75,15
5	98552	98533,00	74,18
6	98514	98497,50	73,21
7	98481	98465,50	72,24
8	98450	98437,00	71,26
9	98424	98413,00	70,28
10	98402	98391,50	69,29
11	98381	98371,00	68,31
12	98361	98349,00	67,32
13	98337	98322,00	66,34
14	98307	98285,00	65,36
15	98263	98231,99	64,39
16	98201	98160,99	63,43
17	98121	98075,49	62,48
18	98030	97977,48	61,54
19	97925	97868,98	60,60
20	97813	97750,97	59,67
21	97689	97624,47	58,75
22	97560	97492,97	57,82
23	97426	97355,97	56,90
24	97286	97212,96	55,98
25	97140	97063,96	55,07
26	96988	96908,46	54,15
27	96829	96745,95	53,24
28	96663	96575,95	52,33
29	96489	96397,94	51,42
30	96307	96211,94	50,52
31	96117	96017,43	49,62
32	95918	95813,42	48,72

Продовження табл.

x	l_x	L_x	$\overset{\circ}{e}_x$
33	95709	95599,42	47,83
34	95490	95374,91	46,94
35	95260	95138,90	46,05
36	95018	94890,89	45,16
37	94764	94629,87	44,28
38	94496	94354,86	43,41
39	94214	94065,84	42,54
40	93918	93761,83	41,67
41	93606	93441,31	40,81
42	93277	93103,79	39,95
43	92931	92748,26	39,09
44	92566	92373,23	38,25
45	92181	91977,70	37,40
46	91775	91560,67	36,57
47	91347	91121,13	35,74
48	90896	90657,58	34,91
49	90420	90168,53	34,09
50	89918	89652,98	33,28
51	89389	89109,42	32,47
52	88831	88535,85	31,68
53	88242	87930,77	30,88
54	87621	87292,68	30,10
55	86966	86620,08	29,32
56	86276	85910,97	28,55
57	85548	85163,35	27,79
58	84781	84375,71	27,04
59	83973	83546,06	26,29
60	83122	82672,89	25,56
61	82227	81754,19	24,83
62	81285	80787,47	24,11
63	80294	79771,24	23,40
64	79253	78703,97	22,70
65	78160	77583,17	22,01
66	77012	76406,84	21,34
67	75808	75173,97	20,67
68	74547	73883,07	20,01

Продовження табл.

x	l_x	L_x	$\mathring{e}_x$
69	73227	72532,12	19,36
70	71846	71119,62	18,72
71	70403	69644,57	18,10
72	68897	68106,48	17,48
73	67328	66504,31	16,88
74	65694	64837,59	16,28
75	63996	63106,80	15,70
76	62234	61311,94	15,13
77	60408	59454,01	14,58
78	58520	57534,50	14,03
79	56571	55554,90	13,50
80	54563	53517,74	12,97
81	52499	51426,49	12,47
82	50383	49284,65	11,97
83	48218	47096,75	11,48
84	46010	44868,27	11,01
85	43764	42605,22	10,55
86	41487	40314,62	10,10
87	39186	38003,97	9,67
88	36869	35681,78	9,24
89	34545	33357,60	8,83
90	32224	31041,42	8,43
91	29916	28743,25	8,05
92	27631	26474,16	7,67
93	25381	24246,17	7,31
94	23178	22070,79	6,96
95	21033	19959,06	6,62
96	18957	17922,54	6,29
97	16962	15972,78	5,97
98	15059	14119,74	5,67
99	13257	12373,07	5,37
100	11566	10740,65	5,09
101	9992	9229,14	4,81
102	8542	7843,99	4,55
103	7220	6588,75	4,30
104	6029	5464,31	4,05

Продовження табл.

x	l_x	L_x	$\overset{\circ}{e}_x$
105	4968	4469,77	3,82
106	4036	3601,97	3,59
107	3228	2855,98	3,38
108	2539	2225,17	3,17
109	1961	1701,00	2,97
110	1485	1273,30	2,78
111	1100	931,67	2,59
112	796	664,85	2,41
113	561	461,37	2,24
114	384	310,75	2,07
115	255	202,18	1,89
116	163	126,41	1,72
117	100	75,22	1,54
118	58	42,45	1,35
119	32	22,18	1,12

Додаток В
Селективна таблиця тривалості життя

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
			34 489,000	0
			34 463,823	1
0	34 481,408	34 461,409	34 440,188	2
1	34 456,927	34 438,320	34 418,690	3
2	34 433,841	34 416,624	34 398,727	4
3	34 412,836	34 397,007	34 380,496	5
4	34 393,221	34 378,776	34 363,650	6
5	34 375,681	34 362,274	34 348,186	7
6	34 359,181	34 346,811	34 333,760	8
7	34 344,063	34 332,386	34 320,026	9
8	34 329,638	34 318,653	34 306,985	10
9	34 315,907	34 305,612	34 294,291	11
10	34 303,210	34 292,919	34 281,602	12
11	34 290,518	34 280,230	34 268,918	13
12	34 277,830	34 267,547	34 255,210	14
13	34 264,461	34 253,497	34 239,110	15
14	34 250,070	34 237,055	34 218,225	16
15	34 232,259	34 215,485	34 190,508	17
16	34 209,439	34 187,202	34 154,424	18
17	34 179,680	34 151,017	34 120,378	19
18	34 143,368	34 116,899	34 088,257	20
19	34 109,166	34 084,731	34 057,937	21
20	34 076,957	34 054,389	34 029,283	22
21	34 046,610	34 025,734	34 002,148	23
22	34 017,983	33 998,619	33 976,374	24
23	33 990,921	33 972,879	33 951,787	25
24	33 965,254	33 948,338	33 928,107	26
25	33 940,795	33 924,799	33 905,397	27
26	33 917,341	33 902,051	33 883,161	28
27	33 894,668	33 879,860	33 861,242	29
28	33 872,531	33 857,972	33 839,370	30
29	33 850,662	33 836,106	33 817,250	31
30	33 828,764	33 813,958	33 794,559	32

Продовження табл.

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
31	33 806,514	33 791,191	33 770,947	33
32	33 783,557	33 767,439	33 746,015	34
33	33 759,503	33 742,299	33 719,354	35
34	33 733,924	33 715,331	33 690,498	36
35	33 706,352	33 686,054	33 658,943	37
36	33 676,272	33 653,938	33 624,136	38
37	33 643,122	33 618,409	33 585,478	34
38	33 606,286	33 578,835	33 542,311	40
39	33 565,089	33 534,529	33 493,920	41
40	33 518,794	33 484,739	33 439,528	42
41	33 466,599	35 428,646	33 378,285	43
42	33 407,624	33 365,360	33 109,771	44
43	33 340,915	33 293,909	33 231,486	45
44	33 265,431	33 213,241	33 343,847	46
45	33 180,042	33 122,213	33 045,181	47
46	33 083,523	33 019,589	32 934,221	48
47	32 974,549	32 904,032	32 809,601	49
48	32 851,686	32 774,102	32 669,855	50
49	32 713,392	32 628,250	32 513,405	51
50	32 558,008	32 464,813	32 338,568	52
51	32 383,756	32 282,013	32 143,546	53
52	32 188,740	32 077,958	31 926,430	54
53	31 970,942	31 850,639	31 685,203	55
54	31 728,226	31 597,933	31 417,739	56
55	31 458,342	31 317,610	31 121,815	57
56	31 158,931	31 007,338	30 795,116	58
57	30 827,543	30 664,702	30 435,255	59
58	30 461,645	30 287,215	30 039,787	60
59	30 058,648	29 872,344	29 606,239	61
60	29 615,936	29 417,538	29 132,138	62
61	29 130,898	38 920,265	28 615,051	63
62	28 600,975	28 378,059	28 052,632	64
63	28 023,708	27 788,571	27 442,681	65
64	27 396,808	17 149,632	26 783,206	66

Продовження табл.

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
65	26 718,225	26 459,331	26 072,500	67
66	25 986,236	25 716,097	25 309,230	68
67	25 199,536	24 918,797	24 492,529	69
68	24 357,348	24 066,835	23 622,102	70
69	23 459,538	23 160,273	22 698,338	71
70	22 506,732	22 199,940	21 722,421	72
71	21 500,445	21 187,559	20 696,450	73
72	20 443,198	20 125,863	19 623,545	74
73	19 338,635	19 018,696	18 507,942	75
74	18 191,617	17 871,109	17 355,074	76
75	17 008,294	16 689,418	16 171,618	77
76	15 796,140	15 481,232	14 965,496	78
77	14 563,910	14 255,427	13 745,841	79
78	13 321,717	13 022,064	12 522,890	80
79	12 080,592	11 792,241	11 307,812	81
80	10 852,568	10 577,865	10 112,467	82
			8 949,083 6	83
			7 829,875 2	84
			6 766,592 2	85
			5 770,045 9	86
			4 849,621 9	87
			4 012,825 3	88
			3 264,894 9	89
			2 608,527 4	90
			2 043,746 4	91
			1 567,940 5	92
			1 176,078 3	93
			861,089 35	94
			614,378 01	95
			426,421 17	96
			287,388 47	97
			187,720 94	98
			118,612 37	99

Продовження табл.

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
			72,353 686	100
			42,523 157	101
			24,028 676	102
			13,027 677	103
			6,762 728 4	104
			3,354 093 4	105
			1,586 011 8	106
			0,713 507 81	107
			0,304 748 96	108
			0,123 321 21	109

Зміст