

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

С.М.ЄЖОВ

ЛЕКЦІЇ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ  
КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Київ  
Видавничо-поліграфічний центр  
"Київський університет"  
????

УДК ???  
ББК ???  
Е ???

С.М.ЄЖОВ

Е ??? Лекції з теорії функцій комплексної змінної: Навчальний посібник –  
К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", ??? –  
??? с.

Рецензент: ????????, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ISBN ?????

*Рекомендовано Вченою радою  
фізичного факультету  
?? ?????? 200? року*

Е ????  
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", ??? ББК ????

ISBN ?????

©С.М.ЄЖОВ  
©ВПЦ "Київський університет", ???

# Розділ 1

## Основні поняття

**1.Комплексні числа і дії над ними.** Комплексна змінна. Область на комплексній площині. Функції комплексної змінної. Функції як відображення однієї множини на другу. Обернені функції. Неперервні функції. Неоднозначні функції і точки розгалуження. Теорема про необхідні та достатні умови диференційовності функцій комплексної змінної. Приклади елементарних функцій з обговоренням їх властивостей. Властивості аналітичних функцій.

### 1.1. Комплексні числа і дії над ними

**Комплексним числом** називається вираз типу  $x + iy$ , де  $x$  і  $y$  - дійсні числа, а  $i$  - уявна одиниця. Числа  $x$  і  $y$  називаються, відповідно, *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа  $x + iy$  і позначаються символами

$$x = \operatorname{Re}(x + iy), \quad y = \operatorname{Im}(x + iy). \quad (1.1)$$

Будемо говорити, що комплексні числа  $x_1 + iy_1$  і  $x_2 + iy_2$  є *рівними*,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \quad (1.2)$$

тоді і тільки тоді, коли  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Якщо  $x_2 = x_1$ , а  $y_2 = -y_1$ , то комплексне число  $x_2 + iy_2$  називається *спряженим* до  $x_1 + iy_1$  і позначається символом  $\overline{x_1 + iy_1}$ . Таким чином

$$\overline{x + iy} = x - iy. \quad (1.3)$$

Визначимо операції над комплексними числами.

1. **Додавання.** Сумою  $z_1 + z_2$  комплексних чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  називається комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.4)$$

Із означення безпосередньо випливають такі закони додавання:

- а) *комутативний*:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;
- б) *асоціативний*:  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ .

2. **Віднімання.** Додавання допускає обернену операцію: для довільних двох комплексних чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  можна знайти таке число  $z$ , що  $z_2 + z = z_1$ . Це число називається *різницею* чисел  $z_1$  і  $z_2$  і позначається символом  $z_1 - z_2$ . Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.5)$$

3. **Множення.** Добутком  $z_1 z_2$  комплексних чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  називається комплексне число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.6)$$

Із означення випливають такі закони множення:

- а) *комутативний*:  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ;
- б) *асоціативний*:  $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ ;
- в) *дистрибутивний* (відносно додавання):  $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ .

4. **Ділення.** Множення також допускає обернену операцію, якщо тільки даний множник не дорівнює нулеві. Нехай  $z_2 \neq 0$ , тоді можна знайти таке число  $z$ , що  $z_2 z = z_1$ ; для цього, згідно (1.6), необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_2 x - y_2 y &= x_1, \\ y_2 x + x_2 y &= y_1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

яка при  $z_2 \neq 0$  завжди має однозначний розв'язок, оскільки її визначник  $x_2^2 + y_2^2 > 0$ . Це число  $z$  називається *часткою* чисел  $z_1$  і  $z_2$  і позначається символом  $\frac{z_1}{z_2}$  або  $z_1/z_2$ . Розв'язуючи систему (1.7), отримаємо

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.8)$$

## 1.2. Область на комплексній площині

При вивченні властивостей комплексних чисел дуже зручною є їх геометрична інтерпретація. Оскільки комплексне число визначається як пара комплексних чисел, то природною геометричною інтерпретацією є зображення комплексного числа  $z = x + iy$  точкою площини з декартовими координатами  $x$  і  $y$ . Число  $z = 0$  ставиться у відповідність початку координат цієї площини. Таку площину ми в подальшому будемо називати *комплексною площиною*, вісь абсцис - *дійсною*, а вісь ординат - *уявною* віссю комплексної площини. При цьому установлюється взаємна однозначна відповідність між множиною усіх комплексних чисел  $z = x + iy$  і множиною точок комплексної площини, а також між множиною усіх комплексних чисел і множиною вільних векторів, проєкції яких  $x$  і  $y$  на осі абсцис та ординат відповідно дорівнюють  $x$  і  $y$ .

Для визначення положення точки на площині можна користуватися полярними координатами  $(\rho, \varphi)$ , де  $\rho$  - відстань точки від початку координат (*модуль комплексного числа*,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ ), а  $\varphi$  - кут, який утворює радіус-вектор даної точки з додатним напрямком осі абсцис (*аргумент комплексного числа*,  $\varphi = \text{Arg } z$ ). Додатним напрямком зміни кута  $\varphi$  вважається напрямок проти годинникової стрілки ( $-\infty < \varphi < \infty$ ). В той час, як модуль комплексного числа визначається однозначно, аргумент визначений лише для  $z \neq 0$  і лише з точністю до будь-якого доданку, що є кратним  $2\pi$ :

$$\varphi = \text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2k\pi & (\text{I і IV квадранти}), \\ \arctg \frac{y}{x} + (2k + 1)\pi & (\text{II і III квадранти}), \end{cases} \quad k - \text{ціле}; \quad (1.9)$$

тут  $\arctg$  означає головне значення  $\text{Arctg}$ , тобто значення, що більше, ніж  $-\pi/2$ , і не перевищує  $\pi/2$ . У подальшому поруч із символом  $\text{Arg}$ , що позначає всю сукупність значень аргумента, буде використовуватись символ  $\arg$ , що буде позначати одне з можливих значень  $\text{Arg}$ .

Користуючись зв'язком декартових та полярних координат, можна отримати т.зв. *геометричну форму* запису комплексного числа

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При виконанні операцій добутку та ділення комплексних чисел зручно користуватися такою тригонометричною формою представлення комплексних чисел.

Дійсно, для добутку маємо:

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1\rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= \rho_1\rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

І аналогічно для ділення:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Тригонометрична форма представлення комплексних чисел також є зручною при виконанні алгебраїчних операцій піднесення до цілої додатної степені та добування кореня із комплексного числа. Так, якщо  $z = z_1^n$ , то  $\rho = \rho_1^n$  і  $\varphi = n\varphi_1$ .

Комплексне число  $z_1 = \sqrt[n]{z}$  називається *коренем* степені  $n$  із комплексного числа  $z$ , якщо  $z = z_1^n$ . Із цього означення випливає, що  $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$  і  $\varphi_1 = \frac{\varphi}{n}$ . Оскільки аргумент комплексного числа  $z$  визначається не однозначно, то насправді існує сукупність значень аргумента числа  $z_1$

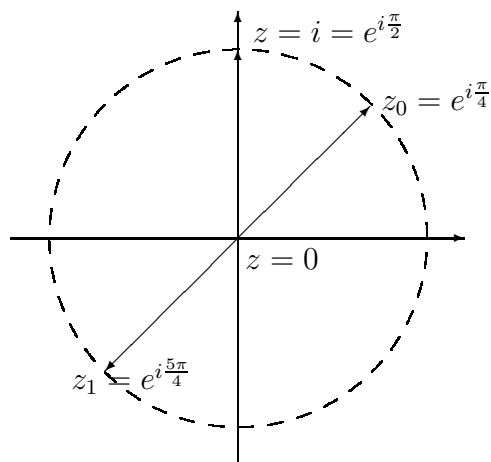
$$\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n},$$

тобто існують різні комплексні числа, які при піднесенні до  $n$ -ої степені дорівнюють одному і тому ж комплексному числу  $z$ . Модулі цих комплексних чисел однакові і дорівнюють  $\sqrt[n]{\rho}$ , а аргументи відрізняються на число, що є кратним до  $\frac{2\pi}{n}$ . Кількість різних значень кореня степеня  $n$  із комплексного числа  $z$  дорівнює  $n$ . Точки на комплексній площині, що відповідають різним значенням кореня, розташовані у вершинах правильного многокутника, що вписаний в коло радіуса  $\sqrt[n]{\rho}$  з центром в точці  $z = 0$ . Відповідні значення  $\varphi_k$  отримуються при  $k$ , що приймають значення  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Приклад 1.** Знайти всі значення  $\sqrt{i}$ .

◁ Запишемо в показниковій формі комплексне число  $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  і отримаємо для квадратних коренів з цього числа вирази  $z_k = i = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi k}{2}}$ ,  $k = 0, 1$  (рис. 1.1). Звідси

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \\ z_1 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = -z_0. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Рис. 1.1.  $\sqrt{i}$ 

**Приклад 2.** Знайти всі значення  $\sqrt[p]{1}$ , де  $p$  - ціле число.

◁ Скористуємось представленням  $1 = e^{i0}$ . Тоді, як і в попередньому прикладі, отримаємо  $z_k = e^{i\frac{2\pi}{p}k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, p-1$ . Звідси

$$z_0 = e^{i0} = 1,$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{p}} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p},$$

...

$$z_{p-1} = e^{i\frac{2\pi}{p}(p-1)} = e^{-i\frac{2\pi}{p}} = \cos \frac{2\pi}{p} - i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Тобто корені відповідають вершинам правильного  $p$ -кутника, що вписаний в коло одиничного радіуса з центром в точці  $z = 0$ . ▷

**Приклад 3.** Знайти всі значення  $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$ .

◁ Оскільки  $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ , то для значень квадратного кореня ми

отримаємо вираз  $z_k = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{2\pi k}{2}}$ ,  $k = 0, 1$ . Звідси

$$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}} = -z_0. \triangleright$$

### 1.3. Геометричні поняття

Точка  $z$  називається *внутрішньою точкою множини  $E$* , якщо існує  $\varepsilon$ -окіл точки  $z$ , всі точки якого належать множині  $E$ . Наприклад, точка  $z$  множини  $|z| \leq 1$  є внутрішньою, якщо  $|z| < 1$ ; точка  $z = 1$  не є внутрішньою точкою даної множини.

Множина  $E$  називається *областю*, якщо виконуються такі умови: 1) кожна точка множини  $E$  є внутрішньою точкою цієї множини (**властивість відкритості**); 2) дві довільні точки множини  $E$  можна з'єднати ламаною, всі точки якої належать  $E$  (**властивість зв'язності**).

Наприклад, множина точок  $|z| < 1$  утворює область. Множина точок  $|z| \leq 1$  не утворює область, оскільки не всі її точки є внутрішніми.

Точка  $z$  називається *зовнішньою точкою області  $\mathcal{G}$* , якщо існує  $\varepsilon$ -окіл точки  $z$ , всі точки якого **не** належать множині  $E$ .

Точка  $z$  називається *граничною точкою області  $\mathcal{G}$* , якщо в довільному  $\varepsilon$ -околі точки  $z$  містяться як точки, що належать області  $\mathcal{G}$ , так і точки, що не належать області  $\mathcal{G}$ . Сукупність всіх граничних точок утворює *границю області  $\mathcal{G}$* , яку звичайно будемо позначати  $\Gamma$ .

Множина, яка утворилась внаслідок приєднання до області всіх її граничних точок, називається *замкненою областю*:  $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \Gamma$ .

Якщо область  $\mathcal{G}$  цілком лежить всередині деякого кола обмеженого радіуса, то вона називається *обмеженою*. В протилежному випадку – *необмеженою*.

### 1.4. Функції комплексної змінної.

Надалі будемо в основному розглядати такі множини  $E$ , коли вони утворюють область  $\mathcal{G}$ , або замкнену область  $\overline{\mathcal{G}}$  в комплексній площині.



Означення. В області  $\mathcal{G}$  комплексної площини задана функція комплексної змінної, якщо заданий закон, що ставить у відповідність кожній точці області  $\mathcal{G}$  деяке комплексне число. Множина  $\mathcal{G}$  називається *множиною значень незалежної змінної*. Цю відповідність будемо записувати у вигляді

$$w = f(z). \quad (1.11)$$

Множина комплексних чисел  $w$ , що відповідають всім  $z \in \mathcal{G}$ , називається *множиною значень функції  $f(z)$* . Будемо позначати

$$w(z) = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.12)$$

де дійсні функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  визначені в області  $\mathcal{G}$  дійсних змінних  $x, y$ , що відповідають області  $\mathcal{G}$  комплексної змінної  $z$ .

Завдання функції  $w = f(z)$  встановлює відповідність між точками області  $\mathcal{G}$  комплексної площини  $z$  та точками області  $G$  комплексної площини  $w$ . Або можна сказати, що встановлюється відображення області  $\mathcal{G}$  на область  $G$ . Є справедливим і обернене твердження. Кожній точці  $w$  області  $G$  ставиться у відповідність одна або декілька точок  $z$  області  $\mathcal{G}$ . Функція, що здійснює таке відображення області  $G$  на область  $\mathcal{G}$ , називається *оберненою функцією  $f(z)$* . В основному ми будемо розглядати такі випадки, коли обернена функція

$$z = \varphi(w) \quad (1.13)$$

є однозначною в області  $G$ , тобто

$$z = \varphi[f(z)].$$

Функція  $f(z)$  називається *однолисною функцією в області  $\mathcal{G}$* , якщо в різних точках  $z$  цієї області вона приймає різні значення.

З цього означення випливає, що однолиста функція здійснює взаємно однозначне відображення.

## 1.5. Неперервні функції

Нехай функція  $f(z)$  визначена на деякій множині  $E$ . Розглянемо різні послідовності точок цієї множини  $\{z_n\}$ , що збігаються до деякої точки  $z_0$  і що відрізняються від точки  $z_0$  ( $z_n \neq z_0$ ), і відповідні до них послідовності значень

функції  $\{f(z_n)\}$ . Якщо незалежно від вибору послідовності  $\{z_n\}$  існує єдина границя  $\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0$ , то ця границя називається граничним значенням, або границею, функції  $f(z)$  в точці  $z_0$ , що можна записати у вигляді

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0. \quad (1.14)$$

**Означення.** Функція  $f(z)$ , що задана на множині  $E$ , називається **неперервною** в точці  $z_0 \in E$ , якщо граничне значення цієї функції в точці  $z_0$  існує, є обмеженим і співпадає із значенням  $f(z_0)$  функції  $f(z)$  в точці  $z_0$ , тобто  $\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = f(z_0)$ .

**Означення.** Точка  $z_0$  називається *ізолюваною точкою* множини  $E$ , якщо існує такий  $\varepsilon$ -окіл точки  $z_0$ , де немає інших точок множини  $E$ .

Якщо точка  $z_0$  є ізолюваною точкою множини  $E$ , то функція  $f(z)$ , за означенням, вважається неперервною в точці  $z_0$ .

Умову неперервності функції можна сформулювати таким чином. Функція  $f(z)$  неперервна в точці  $z_0$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta > 0$ , що для всіх точок  $z \in E$ , що задовольняють нерівності  $|z - z_0| < \delta$ , має місце нерівність  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Із неперервності функції комплексної змінної  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  випливає неперервність її дійсної  $u(x, y)$  та уявної  $v(x, y)$  частин по сукупності змінних  $x, y$ .

**Приклад 4.** Розглянемо лінійну функцію

$$f(z) = w = az + b, \quad (1.15)$$

де  $a$  та  $b$  – деякі комплексні сталі.

◁ Будемо вважати  $a \neq 0$ . Функція (1.15) визначена для всіх значеннях незалежної змінної  $z$ . Множиною її значень є повна комплексна площина  $w$ . Кожному значенню  $w$  відповідає тільки одне значення  $z$ , тобто  $f(z)$  є однозначною функцією  $z$ . Очевидно, що обернена функція  $\varphi(w) = z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} = a_1w + b_1$  має такі ж властивості, що і  $f(z)$ . Тобто, функція  $f(z)$  є однолисною функцією  $z$  на повній комплексній площині і встановлює взаємно однозначну відповідність між площинами  $z$  та  $w$ .

Щоб прояснити геометричний зміст такої відповідності розглянемо допоміжну функцію  $\zeta = az$ . Маємо

$$\zeta = |a| \cdot |z| \cdot \{\cos(\arg a + \arg z) + i \sin(\arg a + \arg z)\} = |\zeta| \{\cos \arg \zeta + i \sin \arg \zeta\}.$$

Звідси випливає  $|\zeta| = |a| \cdot |z|$ ,  $\arg \zeta = \arg a + \arg z$ . Тобто функція  $\zeta = az$  будь-якому комплексному числу  $z$  ставить у відповідність комплексне число  $\zeta$ , модуль якого в  $|a|$  разів більше за модуль  $z$ , а аргумент можна отримати із аргумента  $z$  додаванням сталого доданка – аргумента комплексного числа  $a$ . Геометричний зміст цього перетворення є очевидним: розтяг площини  $z$  в  $|a|$  разів і поворот цієї площини як цілого навколо точки  $z = 0$  на кут  $\arg a$ .

Повертаючись до формули (1.15), яку зараз можна записати у вигляді  $w = \zeta + b$ , можна бачити, що геометричний зміст останнього перетворення полягає у зсуві площини  $z$  на вектор  $b$ .

Таким чином, лінійна функція перетворює комплексну площину  $z$  в комплексну площину  $w$  шляхом розтягу подібності, повороту та зсуву.  $\triangleright$

**Приклад 5.** Розглянемо функцію

$$w = f(z) = \frac{1}{z}. \quad (1.16)$$

$\triangleleft$  Ця функція також визначена на всій комплексній площині, причому  $f(0) = \infty$  та  $f(\infty) = 0$ . Як і в попередньому прикладі можна встановити, що  $f(z)$  є однозначна і однолисна функція  $z$ , що відображає повну площину  $z$  на повну площину  $w$ . Можна встановити, що функція  $f(z)$  є неперервною на повній комплексній площині, за винятком точки  $z = 0$ . Для геометричної інтерпретації цієї функції скористуємось показниковою формою представлення комплексних чисел:  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $w = re^{i\psi} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$ . Ці рівності означають, що  $\arg w = -\arg z$ ,  $|w| = \frac{1}{|z|}$ . Отримані співвідношення дозволяють розглядати відображення, що здійснює дана функція, як сукупність двох відображень:  $\zeta = \zeta(z)$ , де  $|\zeta| = |z|$ ,  $\arg \zeta = -\arg z$ , та  $w = w(\zeta)$ , де  $|w| = \frac{1}{|\zeta|}$ ,  $\arg w = \arg \zeta$ . Перше відображення має геометричний зміст дзеркального відбиття відносно дійсної осі, при якому точка  $z$  переходить в точку  $z^*$ , а друге – інверсії в одиничному колі, що переводить точку  $z^*$  в точку  $w = \frac{1}{z}$ .  $\triangleright$

**Приклад 6.** Розглянемо функцію

$$w = f(z) = z^2. \quad (1.17)$$

◁ Ця функція є однозначною функцією комплексної змінної  $z$ , що визначена на всій комплексній площині. Тут зручно представити комплексні числа в показниковій формі:  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $w = r e^{i\psi} = \rho^2 e^{i2\varphi}$ . З такого представлення легко бачити, що всі точки площини  $z$ , що лежать на промені, який складає кут  $\varphi$  з додатним напрямком дійсної осі, переходять в точки площини  $w$ , що лежать на промені, який складає кут  $2\varphi$  з додатним напрямком дійсної осі.

Точкам  $z$  і  $-z$ , модулі яких співпадають, а аргументи відрізняються на кут  $\pi$ , відповідає одне і те ж значення  $w$ . Таким чином, обернена функція виявляється багатозначною.

Розглянемо більш детально відображення, що здійснюється функцією  $w = z^2$ . Верхня напівплощина  $z$  разом з дійсною віссю переходить у повну площину  $w$ . Для точок верхньої напівплощини  $z$ , для яких  $0 < \varphi < \pi$ , різним значенням  $z$  відповідають різні значення  $w$ .

**Означення.** Область зміни незалежної змінної, різним точкам якої відповідають різні значення функції, називається **областю однолистності**.

У попередніх прикладах областю однолистності була вся область  $z$ . Зараз область, в якій задана функція  $w = z^2$ , є теж вся комплексна площина  $z$ , але областю однолистності слугує напівплощина. Відмітимо, що границі області однолистності (промені  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \pi$ ), переходять в одно і ту ж пряму - додатну частину дійсної осі площини  $w$ .

Відмітимо також, що функція  $w = z^2$  створює відображення і нижньої напівплощини  $z$  разом з дійсною віссю на повну площину  $w$ . В результаті функція

$$z = \sqrt{w}, \quad (1.18)$$

що визначена на всій площині  $w$ , вже не є однозначною – одній точці площини  $w$  відповідають дві різні точки площини  $z$ .

Розглянемо на площині  $w$  деяку замкнену криву  $C$ , що не перетинається сама із собою. Зафіксуємо на ній точку  $w_0$ , яка має аргумент  $\psi_0$ , знайдемо значення  $z_0(w_0) = \sqrt{r} e^{\frac{i}{2}\psi}$  і  $z_1(w_0) = \sqrt{r} e^{\frac{i}{2}(\psi+2\pi)}$  і прослідкуємо за зміною функцій  $z_0(w)$  і  $z_1(w)$  при неперервному русі точки  $w$  по кривій  $C$ . При цьому можливі два різних випадки. У першому крива  $C$  не містить всередині точку  $w = 0$ . Тоді після обходу кривої  $C$  аргумент точки  $w_0$  повернеться до початкового значення  $\arg w_0 = \psi_0$ . В результаті і значення функцій  $z_0(w)$  і  $z_1(w)$  в точці  $w = w_0$  будуть дорівнювати їх початковим значенням. Таким чином, на кривій  $C$  у цьому випадку визначені дві *різні* однозначні функції комплексної змінної  $w$ .

**Означення.** Якщо область  $D$  площини  $w$  має ту властивість, що довільна замкнена крива в цій області не містить точку  $w = 0$ , то в області  $D$  визначені дві різні однозначні неперервні функції  $z_0(w)$  і  $z_1(w)$ . Ці функції називаються **гілками багатозначної функції  $z(w) = \sqrt{w}$**

У другому випадку крива  $C$  містить всередині точку  $w = 0$ . Тоді після обходу кривої  $C$  в додатному напрямку значення аргументу точки  $w_0$  вже не повернеться до початкового значення  $\psi_0$ , а зміниться на кут  $2\pi$ . Тому і значення функцій  $z_0(w)$  і  $z_1(w)$  в точці  $w_0$  в результаті їх неперервної зміни після обходу кривої  $C$  вже не будуть дорівнювати їх початковим значенням. Більш детально отримаємо:  $\tilde{z}_0(w_0) = z_0(w_0)e^{i\pi}$ ,  $\tilde{z}_1(w_0) = z_1(w_0)e^{i\pi}$ . Тобто функція  $z_0(w)$  перейшла у функцію  $z_1(w)$ , і навпаки.

**Означення.** Якщо для точки  $z_0$  можна вказати такий  $\varepsilon$ -окіл, що при однократному обході точки  $z_0$  по довільному замкненому контуру в цьому  $\varepsilon$ -околі одна гілка багатозначної функції переходить в іншу, то точка  $z_0$  називається **точкою розгалуження** даної багатозначної функції, оскільки при обході точки розгалуження їх значення змінюються. В розглянутому прикладі точкою розгалуження є точка  $w = 0$ .

## 1.6. Диференціювання функції комплексної змінної

До цього місця теорія функцій комплексної змінної будувалась у цілковитій аналогії з теорією функцій дійсної змінної. Але поняття диференційованої функції комплексної змінної приводить до суттєвих відмін.

**Означення.** Нехай в області  $G$  комплексної площини  $z$  задана функція  $f(z)$ . Якщо для точки  $z_0 \in G$  існує при  $\Delta z \rightarrow 0$  границя (граничне значення) різницевого відношення

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то ця границя називається **похідною** функції  $f(z)$  по комплексній змінній  $z$  в точці  $z_0$  і позначається  $f'(z_0)$ , тобто

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (1.19)$$

У цьому випадку функція  $f(z)$  називається **диференційованою** в точці  $z_0$ . Підкреслимо, що ця границя (1.19) не залежить від способу прямування  $\Delta z$  до нуля.

**Теорема 1.6.1.** Якщо функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  диференційована в точці  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то в точці  $(x_0, y_0)$  існують частинні похідні функцій  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  по змінних  $x, y$ , причому мають місце такі співвідношення (**умови Коші–Рімана**)

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (1.20)$$

◁ За умови теореми існує границя (1.19), що не залежить від того, як  $\Delta z \rightarrow 0$ . Покладемо  $\Delta z = \Delta x$  і розглянемо вираз

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

З факту існування граничного значення комплексного числа впливає існування границь його дійсної та уявної частин, і має місце формула

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Якщо покласти  $\Delta z = i\Delta y$ , то

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Порівнюючи дві останні формули, переконуємося в справедливості співвідношень (1.20). ▷

**Теорема 1.6.2.** Якщо в точці  $(x_0, y_0)$  функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  диференційовані, а її частинні похідні зв'язані співвідношенням (1.20), то функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  є диференційованою функцією комплексної змінної  $z$  в точці  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

◁ Відповідно до означення диференційовності, прирости функцій  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  в околі точки  $(x_0, y_0)$  можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(x, y), \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y), \end{aligned} \quad (1.21)$$

де функції  $\xi(x, y)$  і  $\eta(x, y)$  прямують до нуля при  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  швидше, аніж  $\delta x$  та  $\Delta y$ . Тоді за допомогою (1.21) і (1.20) можна отримати

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \\ & = u_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + v_x(x_0, y_0) \frac{i\Delta x - \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\xi(x, y) + i\eta(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ & = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{\zeta(z)}{\Delta z}, \quad \zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y). \end{aligned}$$

Відмітимо, що коли  $\Delta z \rightarrow 0$  останній доданок цієї формули прямує до нуля, а перші залишаються незмінними. Тому існує граничне значення

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

що і доводить диференційовність функції  $f(z)$  в точці  $z_0$ .  $\triangleright$

**Означення.** Якщо функція  $f(z)$  диференційована в усіх точках деякої області  $\mathcal{G}$ , а її похідна неперервна в цій області, то функція  $f(z)$  називається **аналітичною** функцією в цій області (інакше, **регулярною** або **голоморфною**).

Аналітичні функції відіграють особливу роль як при розв'язку численних математичних проблем, так і в різних застосуваннях функцій комплексної змінної.

Розглянемо приклади деяких елементарних функцій комплексної змінної. Ці функції є природним продовженням у комплексну площину звичайних для аналізу елементарних функцій. Але при такому продовженні функції інколи набувають нових властивостей, деякі з яких ми розглянемо.

**Приклад 7.** Лінійна функція  $w = f(z) = az + b$ .

$$\begin{aligned} w &= (\operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a)(x + iy) + (\operatorname{Re} b + i \operatorname{Im} b) = \\ &= (\operatorname{Re} a \cdot x - \operatorname{Im} a \cdot y + \operatorname{Re} b) + i(\operatorname{Re} a \cdot y + \operatorname{Im} a \cdot x + \operatorname{Im} b) = u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

Перевіримо для цієї функції виконання умов Коші-Рімана (1.20):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} a = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{Im} a = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

тобто лінійна функція є аналітичною.

**Приклад 8.** Функція  $w = f(z) = z^2$ .

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv.$$

Перевіримо аналітичність цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Приклад 9.** Функція  $w = f(z) = \frac{1}{z}$ .

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = u + iv.$$

Перевіримо аналітичність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

тобто обернена функція є аналітичною всюди за винятком точки  $z = 0$ .

**Приклад 10.** Функція  $w = f(z) = e^z$ .

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u + iv.$$

Перевіримо аналітичність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Розглянемо такі  $z_1$  та  $z_2$ , для яких  $e^{z_1} = e^{z_2}$ . Очевидно, що мають місце рівності  $|z_1| = |z_2|$ , і  $\text{Im } z_2 = \text{Im } z_1 + 2\pi k$ , тобто  $z_2 - z_1 = 2\pi k \cdot i$ , де  $k$  – ціле. Це означає, що функція  $e^z$  є періодичною.

**Приклад 11.** Функція  $w = f(z) = \ln z$ .

За означенням логарифмічна функція визначається як функція, що є оберненою до показникової: число  $w$  називається логарифмом числа  $z$ , якщо  $e^w = z$ . З попереднього прикладу випливає, що  $\ln z$  є нескінченнозначною функцією.

Якщо  $e^{w_1} = z_1$  та  $e^{w_2} = z_2$ , то  $e^{w_1+w_2} = z_1 z_2$ , або  $\ln z_1 z_2 = w_1 + w_2 = \ln z_1 + \ln z_2$ . Зокрема, якщо  $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$ , то

$$\ln z = \ln |z| + \ln e^{i \arg z} = \ln |z| + i \arg z.$$



Щоб явно вказати на багатозначність логарифма комплексного числа, будемо використовувати спеціальне позначення  $\text{Ln } z$ , так що

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z = \ln |z| + i (\arg z + 2k\pi). \quad (1.22)$$

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = u + iv.$$

Перевіримо аналітичність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Співвідношення Коші-Рімана часто використовується при дослідженні різноманітних властивостей аналітичних функцій. Розглянемо ці співвідношення при інших представленнях комплексних чисел. А саме, спочатку розглянемо аргумент у вигляді  $z = x + iy \rightarrow \rho e^{i\varphi}$ , тобто,  $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ . Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

Аналогічно обчислюються вирази:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Тоді, користуючись співвідношеннями (1.20) та лінійною незалежністю функцій  $\sin \varphi$  та  $\cos \varphi$ , отримаємо умову аналітичності функції в іншому вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}. \quad (1.23)$$

Аналогічним чином легко встановити, що модуль і аргумент аналітичної функції  $f(z) = R(x, y)e^{i\Phi(x, y)}$  зв'язані співвідношеннями:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1.24)$$

Будуть корисними співвідношення, які також відображають властивості аналітичних функцій, а саме, якщо  $f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) = R(\rho, \varphi)e^{i\Phi(\rho, \varphi)}$ , то

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{R}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = -\rho R \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (1.25)$$

## 1.7. Властивості аналітичних функцій

1° Якщо функція  $f(z)$  є аналітичною в області  $\mathcal{G}$ , то вона неперервна в цій області.

2° Якщо  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$  є аналітичними функціями в області  $\mathcal{G}$ , то їх сума та добуток також є аналітичними функціями в цій області, а функція  $\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$  є аналітичною всюди, де  $f_2(z) \neq 0$ .

3° Якщо  $w = f(z)$  є аналітичною в області  $\mathcal{G}$  комплексної змінної  $z$ , і в області її значень  $G$  на площині  $w$  визначена аналітична функція  $\zeta = \varphi(w)$ , то функція  $F(z) = \varphi[f(z)]$  є аналітичною функцією комплексної змінної  $z$  в області  $\mathcal{G}$ .

4° Якщо  $w = f(z)$  є аналітичною в області  $\mathcal{G}$  комплексної змінної  $z$  і  $|f'(z)| \neq 0$  в околі деякої точки  $z_0 \in \mathcal{G}$ , то в околі точки  $w_0 = f(z_0)$  в області  $G$  значень функції  $f(z)$  визначена обернена функція  $z = \varphi(w)$ , що є аналітичною функцією комплексної змінної  $w$ . При цьому має місце співвідношення

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(w_0)}. \quad (1.26)$$

5° Нехай в області  $\mathcal{G}$  площини  $x, y$  задана функція  $u(x, y)$ , що є дійсною частиною аналітичної функції  $f(z)$ . Тоді уявна частина визначається з точністю до адитивної сталої. Дійсно, внаслідок умов Коші-Рімана за заданою функцією  $u(x, y)$  можна однозначно визначити повний диференціал невідомої функції  $v(x, y)$ :

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy,$$

звідки випливає твердження.

6° Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною в області  $\mathcal{G}$ . Розглянемо у відповідній області на площині  $x, y$  родини кривих  $u(x, y) = C$  і  $v(x, y) = C$ , що є лінії рівнів дійсної та уявної частин функції  $f(z)$ . За допомогою співвідношень (1.20) можна показати, що в усіх точках даної області є справедливою така рівність:

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = 0,$$

Тобто, родини кривих  $u(x, y) = C$  і  $v(x, y) = C$  є взаємно ортогональні.

## Розділ 2

# Інтегрування функцій комплексної змінної

**2. Інтегрування функцій комплексної змінної.** Теорема Коші. Інтеграл Коші. Теореми Морера і Ліувілля.

### 2.1. Інтеграл Коші

Нехай є заданою деяка орієнтована крива  $\mathcal{C}$  і на ній задано функцію комплексної змінної  $f(z)$ . **Означення.** Інтегралом від  $f(z)$  на кривій  $\mathcal{C}$  називається

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_{k+1})(z_{k+1} - z_k) = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz, \quad (2.1)$$

де  $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$  – послідовність точок, що розбивають криву  $\mathcal{C}$  на  $n$  ділянок,  $a$  та  $b$  – кінці  $\mathcal{C}$ ,  $\zeta_k$  – довільна точка, що лежить на інтервалі  $[z_k, z_{k+1}]$  кривої  $\mathcal{C}$ , і граничне значення береться за припущення, що  $\max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$ .

Якщо  $\mathcal{C}$  – кусково гладенька крива, а  $f(z)$  – кусково неперервна і обмежена функція, то інтеграл (2.1) завжди існує. Питання про існування такого інтеграла можна звести до питання про існування деяких криволінійних інтегралів від дійсної  $u$  та уявної  $v$  частин функції  $f(z)$ . Дійсно, інтеграл (2.1) можна представити у вигляді

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u dy + v dx). \quad (2.2)$$

Це співвідношення може також слугувати визначенням інтегралу від функції  $f(z)$  по кривій  $\mathcal{C}$ . З нього випливають деякі властивості, що є очевидним наслідком відповідних властивостей криволінійних інтегралів:

$$1. \quad \int_{AB} f(\zeta) d\zeta = - \int_{BA} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.3)$$

$$2. \quad \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\mathcal{C}_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.4)$$

$$3. \quad \int_{\mathcal{C}} a f(\zeta) d\zeta = a \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.5)$$

$$4. \quad \int_{\mathcal{C}} \{f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\} d\zeta = \int_{\mathcal{C}} f_1(\zeta) d\zeta + \int_{\mathcal{C}} f_2(\zeta) d\zeta. \quad (2.6)$$

$$5. \quad \left| \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(\zeta)| ds, \quad (2.7)$$

де  $ds$  – диференціал довжини дуги  $\mathcal{C}$ .

**Приклад 12.** В подальшому нам знадобиться інтеграл

$$I = \int_{\mathcal{C}_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}, \quad (2.8)$$

де крива  $\mathcal{C}_\rho$  уявляє собою коло радіуса  $\rho$  із центром в точці  $z_0$ , яке необхідно обходити проти годинникової стрілки.

◁ Скористуємось параметричною формою завдання кривої  $\mathcal{C}_\rho$ :  $\zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi}$   
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , і отримаємо

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad (2.9)$$

Звідси випливає, що значення інтеграла (2.9) не залежить від  $\rho$  та  $z_0$ . ▷

Надалі нас буде цікавити інтеграли від функцій, що є аналітичними в деякій обмеженій області, причому у більшості випадків границею області буде слугувати кусково гладенька замкнена крива, що не має самоперетинів. Така крива

називається *замкненим контуром*, а відповідний інтеграл – *контурним інтегралом*.

**Теорема 2.1.3. (Теорема Коші)** *Нехай в однозв'язній області  $\mathcal{G}$  є заданою однозначна аналітична функція  $f(z)$ . Тоді інтеграл від цієї функції по довільному замкненому контуру  $\Gamma$ , що цілком міститься в області  $\mathcal{G}$ , дорівнює нулю.*

◁ Згідно (2.2) можна записати

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (udx - vdy) + i \int_{\Gamma} (udy + vdx).$$

Оскільки функція  $f(z)$  є аналітичною всюди всередині контура  $\Gamma$ , то функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  в області, що обмежена цим контуром, мають неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді до цих криволінійних інтегралів в правій частині можна застосувати відомий із аналізу результат про неперервні функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  в закненій області  $\bar{\mathcal{G}}$ , що обмежена кусково гладеньким контуром  $\mathcal{C}$ , а саме:

$$\int_{\mathcal{C}} (Pdx + Qdy) = \iint_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dxdy. \quad (2.10)$$

Тому

$$\int_{\Gamma} (udx - vdy) = \iint_{\mathcal{G}} \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dxdy = 0$$

та

$$\int_{\Gamma} (udy + vdx) = \iint_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dxdy = 0,$$

що і доводить твердження теореми ▷.

Ця теорема дозволяє встановити зв'язок між значеннями аналітичної функції у внутрішніх точках області її аналітичності і граничними значеннями цієї функції. Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною в однозв'язній області  $\mathcal{G}$ , що обмежена контуром  $\mathcal{C}$ . Оберемо довільну внутрішню точку  $z_0$  і побудуємо замкнений

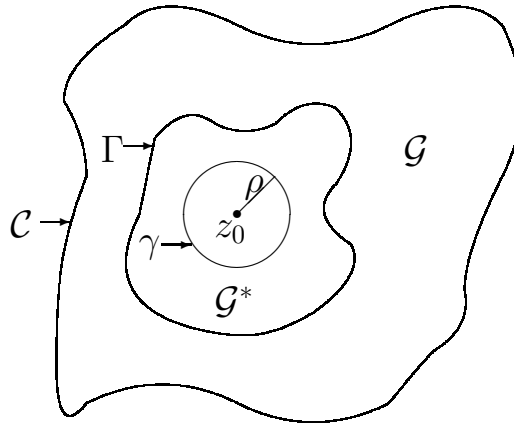


Рис. 2.1. До формули Коші

контур  $\Gamma$ , що цілком лежить в  $\mathcal{G}$  і містить всередині точку  $z_0$ . Всередині цього контура побудуємо ще один замкнений контур  $\gamma$ , що містить точку  $z_0$  (рис. 2.1).

Роглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Функція  $\varphi(z)$  є аналітичною всюди в області  $\mathcal{G}$  за винятком точки  $z_0$ , а, значить, вона аналітична всюди в області  $\mathcal{G}^*$ , що обмежена кривими  $\Gamma$  і  $\gamma$ . Тоді згідно теореми Коші інтеграл від функції  $\varphi(z)$  по кривій  $\Gamma + \gamma$  дорівнює нулю:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \int_{\gamma^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0.$$

Змінюючи напрям інтегрування у другому інтегралі, цю рівність можна переписати у вигляді

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (2.11)$$

Оскільки інтеграл, що стоїть у лівій частині, не залежить від вибору контура  $\gamma$ , і таку ж властивість має інтеграл, що стоїть справа, то надалі зручно обрати як контур інтегрування  $\gamma$  коло деякого радіуса  $\rho$  з центром в точці  $z_0$ . Якщо покласти  $\zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ , то можна отримати

$$\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi.$$

Останній інтеграл можна перетворити таким чином:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi &= \int_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)] d\varphi + \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)] d\varphi + 2\pi f(z_0). \end{aligned}$$

Спрямуємо зараз радіус кола  $\rho$  до нуля. Оскільки функція  $f(z)$  є аналітичною і, як наслідок, неперервною в області  $\mathcal{G}$ , то завжди для довільного  $\varepsilon > 0$  можна знайти таке значення  $\rho$ , що  $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$  при  $|\zeta - z_0| < \rho$ . Звідси випливає, що при  $\rho \rightarrow 0$  існує граничне значення

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [f(\zeta) - f(z_0)] d\varphi = 0.$$

В результаті маємо шуканий результат:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (2.12)$$

Інтеграл в правій частині (2.12) називається *інтегралом Коші*, а сама формула (2.12) називається *формулою Коші*.

Відмітимо, що в праву частину формули Коші входять лише значення  $f(z)$  на границі  $\Gamma$ , тобто значення функції всередині області аналітичності цілком визначаються її значеннями на границі. Відмітимо також, що інтеграл в правій частині (2.12) має сенс для довільного положення точки  $z_0$  при умові, що вона не лежить на контурі  $\Gamma$ . Більш детально можна записати

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \begin{cases} f(z_0), & z_0 - \text{всередині } \Gamma, \\ 0, & z_0 - \text{зовні } \Gamma. \end{cases} \quad (2.13)$$

Коли ж точка  $z_0 \in \Gamma$ , то інтеграл  $I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$  у звичайному

розумінні не існує, але при додаткових умовах щодо поведінки функції  $f(z)$  на контурі  $\Gamma$  цьому інтегралу можна надати певне значення. Так, наприклад, якщо функція  $f(z)$  задовольняє т. зв. умову Гьольдера

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leq K |z_1 - z_0|^\nu, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (2.14)$$

то існує головне значення інтеграла  $I(z_0)$ :

$$\text{P.v. } I(z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad (2.15)$$

де  $\Gamma_\varepsilon$  уявляє собою частину контура  $\Gamma$ , що лежить зовні кола  $|z - z_0| < \varepsilon$ . При цьому

$$\text{P.v. } I(z_0) = \frac{1}{2} f(z_0).$$

Повернемося до аналітичної функції  $f(z)$ , область визначення якої зображена на рис. 2.1.

**Теорема 2.1.4. (Теорема про вищі похідні)** *Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною в області  $\mathcal{G}$  і неперервною в замкненій області  $\overline{\mathcal{G}}$ . Тоді у внутрішніх точках області  $\mathcal{G}$  існує похідна довільного порядку функції  $f(z)$ , і для неї є справедливою формула*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (2.16)$$

де  $z$  знаходиться всередині контура  $\Gamma$ .

◁ За означенням похідної для цієї точки маємо

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \end{aligned}$$

При  $h \rightarrow 0$  функція  $\frac{1}{\zeta - z - h}$  рівномірно для всіх  $\zeta \in \Gamma$  прямує до  $\frac{1}{\zeta - z}$ , значить ця границя існує і

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad (2.17)$$



Для  $n = 1$  теорему доведено. За допомогою метода повної математичної індукції, вважаючи її вірною для деякого  $n$ , можна довести її справедливості і для  $n + 1$ .  $\triangleright$

Таким чином, якщо функція  $f(z)$  є аналітичною функцією в області  $\mathcal{G}$ , то в цій області функція  $f(z)$  має неперервні похідні всіх порядків. Ця властивість аналітичної функції комплексної змінної суттєво відрізняє її від функції дійсної змінної, що має неперервну першу похідну в деякій області. В останньому випадку із існування першої похідної, взагалі кажучи, не впливає існування похідних вищого порядку.

Розглянемо без доведення деякі важливі наслідки встановленої властивості аналітичної функції комплексної змінної.

**Теорема 2.1.5. (Морера)** *Нехай функція  $f(z)$  є неперервною в однозв'язній області  $\mathcal{G}$  і інтеграл від  $f(z)$  по довільному замкненому контуру, що цілком належить  $\mathcal{G}$ , дорівнює нулю. Тоді  $f(z)$  є аналітичною функцією в області  $\mathcal{G}$ .*

У деякому розумінні ця теорема є оберненою до теореми Коші. Її можна узагальнити і на багатозв'язні області.

**Теорема 2.1.6. (Ліувілля)** *Нехай на всій комплексній площині функція  $f(z)$  є аналітичною, а її модуль рівномірно обмежений. Тоді ця функція тотожно дорівнює сталій.*

Як один з прикладів застосування цієї теореми розглянемо тригонометричну функцію  $\sin z$  комплексної змінної. Нагадаємо, що

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} (e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-y+ix} - e^{y-ix}) = \frac{1}{2i} [e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)] = \\ &= \frac{1}{2} [e^{-y}(\sin x - i \cos x) - e^y(-\sin x - i \cos x)] = \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x + i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x = \\ &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

Перевіримо аналітичність цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тобто функція  $\sin z$  є аналітичною на всій комплексній площині. Оскільки вона не є сталою, вона не може бути рівномірно обмеженою. Зокрема, знайдуться такі значення комплексної змінної  $z$ , для яких  $|\sin z| > 1$ . Цією властивістю тригонометричні функції комплексної змінної суттєво відрізняються від відповідних функцій дійсної змінної.

## Розділ 3

# Ряди аналітичних функцій

**3. Ряди функцій комплексної змінної.** Рівномірно збіжні ряди функцій комплексної змінної. Достатня ознака рівномірної збіжності. Теореми про неперервність і аналітичність суми ряду. Степеневі ряди. Теорема Абеля і її наслідки. Формула Коші-Адамара для радіуса збіжності степеневих рядів. Ряд Тейлора. Теорема про розклад в ряд Тейлора. Ряд Лорана. Теорема про розклад в ряд Лорана. Ізольовані особливі точки аналітичної функції. Теорема про поведінку аналітичної функції в околі усуваної особливої точки, полюса і істотно особливої точки.

### 3.1. Ряди функцій комплексної змінної

Розглянемо спочатку *числові* ряди з комплексними числами, тобто вирази типу

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad (3.1)$$

де  $\{a_k\}$  – задана числова послідовність.

**Означення.** Ряд (3.1) називається *збіжним*, якщо збігається послідовність  $\{S_n = \sum_{k=1}^n a_k\}$  його частинних сум. Необхідною умовою збіжності ряду (3.1) є умова:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad (3.2)$$

з дійсними додатними членами, то, очевидно, що збігається ряд (3.1), який в цьому випадку буде *абсолютно збігатися*. Часто для дослідження збіжності

ряда з комплексними членами розглядають ряди з дійсними членами, які є модулями членів вихідного ряду. Для рядів з дійсними членами достатніми умовами збіжності є *ознаки Даламбера і Коші*.

Згідно ознаки Даламбера ряд (3.2) збігається, якщо, починаючи з деякого номера  $N$ , відношення  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq l < 1$  для усіх  $n \geq N$ . Згідно ознаки Коші ряд (3.2) збігається, якщо, починаючи з деякого номера  $N$ ,  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$  для усіх  $n \geq N$ .

**Означення.** Якщо в області  $\mathcal{G}$  визначена нескінчена послідовність однозначних функцій  $\{u_n(z)\}$ , то вирази типу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad (3.3)$$

називаються *функціональним рядом*. Функціональний ряд (3.3) називається *збіжним* в області  $\mathcal{G}$ , якщо для довільного  $z \in \mathcal{G}$  відповідний числовий ряд збігається.

Якщо ряд (3.3) збігається в області  $\mathcal{G}$ , то в цій області можна визначити однозначну функцію  $f(z)$ , значення якої в кожній точці області  $\mathcal{G}$  дорівнює сумі відповідного числового ряду.

**Означення.** Якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вказати такий номер  $N(\varepsilon)$ , що при  $n \geq N(\varepsilon)$  нерівність

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \varepsilon$$

виконується відразу для усіх точок  $z$  в області  $\mathcal{G}$ , то ряд (3.3) *рівномірно збігається* в цій області.

Наведемо важливу достатню ознаку рівномірної збіжності.

**Ознака Вейерштрасса.** Якщо всюди в області  $\mathcal{G}$  члени функціонального ряду (3.3) можуть бути мажоровані членами абсолютно збіжного числового ряду, то ряд (3.3) *рівномірно збігається* в області  $\mathcal{G}$ .

◁ За умовою має місце рівномірна оцінка

$$|u_n(z)| \leq |a_n|, z \in \mathcal{G}. \quad (3.4)$$

Оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  збігається, то для довільного  $\varepsilon > 0$  можна знайти таке

$N$ , що  $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$  при  $n \geq N$ . Тоді внаслідок (3.4) в області  $\mathcal{G}$  має місце нерівність:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$$

при  $n \geq N + 1$ .  $\triangleright$

Відмітимо, що ознака Вейерштрасса є лише достатньою ознакою.

## 3.2. Степеневі ряди

До цього ми розглядали функціональні ряди (3.3) загального типу. Зараз ми розглянемо важливий випадок степеневих рядів, для яких  $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$ , де  $c_n$  – деякі комплексні числа, а  $z_0$  – фіксована точка комплексної площини. Члени ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  є аналітичними функціями на всій комплексній площині. Відмітимо, що область збіжності степеневого ряду визначається виглядом його коефіцієнтів  $c_n$ . Тому, наприклад, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z - z_0)^n$  збігається лише в точці  $z = z_0$ .

Для визначення області збіжності степеневого ряду використовується наступна теорема.

**Теорема 3.2.7. (Теорема Абеля)** *Якщо степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  збігається в деякій точці  $z_1 \neq z_0$ , то він абсолютно збігається і в довільній точці  $z$ , що задовольняє умову  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ ; причому в колі радіуса  $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$  ряд збігається рівномірно.*

З цієї теореми, доведення якої не будемо приводити, можна зробити декілька важливих висновків.

**Наслідок 7.1.** *Якщо степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  розбігається в деякій точці  $z_1$ , то він розбігається в усіх точках  $z$ , що задовольняють умову  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .*

Розглянемо точну верхню межу  $R$  відстаней  $|z - z_0|$  від точки  $z_0$  до точки  $z$ , в яких ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  збігається. Якщо  $R \neq \infty$ , то в усіх точках  $|z - z_0| > R$  ряд розбігається. Нехай  $R$  строго більше нуля, тоді всередині кола  $|z - z_0| < R$

ряд збігається, і в точках границі  $|z - z_0| = R$  він може як збігатися, так і розбігатися.

**Означення.** Область  $|z - z_0| < R$  ( $R > 0$ ) називається *кругом збіжності степеневому ряду*, а число  $R$  – його *радіусом збіжності*.

Таким чином, ми встановили

**Наслідок 7.2.** Для довільного степеневому ряду існує таке число  $R$ , що всередині круга  $|z - z_0| < R$  ряд збігається, а зовні цього круга ряд розбігається.

**Наслідок 7.3.** Всередині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції.

**Наслідок 7.4.** Всередині круга збіжності степеневий ряд можна диференціювати і інтегрувати по членах довільну кількість разів, причому радіус збіжності отриманих рядів дорівнює радіусу збіжності вихідного ряду.

**Наслідок 7.5.** Коефіцієнти степеневому ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  виражаються через значення суми ряду  $f(z)$  та її похідних в центрі круга збіжності за формулами

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (3.5)$$

◁ Покладемо  $z = z_0$  в вираз для суми степеневому ряду  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  і отримаємо значення  $f(z_0) = c_0$ . Придиференціюємо ряд по членах, покладемо  $z = z_0$  у вираз для похідної  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z - z_0)^{n-1}$  і отримаємо  $f'(z_0) = c_1$ . Аналогічно можна поступити і далі і отримаємо формулу (3.5). ▷

**Наслідок 7.6. (Формула Коші-Адамара)** Радіус збіжності степеневому ряду визначається формулою

$$R = \frac{1}{l}, \quad \text{де } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Як приклад розглянемо степеневий ряд  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$ , усі коефіцієнти якого дорівнюють одиниці. За ознакою Даламбера отримаємо, що цей ряд збігається в колі  $|z - z_0| < 1$  до деякої аналітичної функції. Цю функцію легко знайти:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (z - z_0)^{n+1}}{1 - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - (z - z_0)}. \quad (3.6)$$

### 3.3. Ряд Тейлора

Таким чином, попередній приклад показав, що всередині круга збіжності степеневий ряд визначає деяку аналітичну функцію. Можна поставити питання у деякому розумінні протилежне, а саме, чи можна аналітичній функції співставити деякий степеневий ряд? Відповідь дає наступна теорема.

**Теорема 3.3.8. (Теорема Тейлора)** *Функція  $f(z)$ , що є аналітичною всередині круга  $|z - z_0| < R$ , може бути представлена в цьому крузі збіжним степеневим рядом  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ , причому цей ряд визначається однозначно.*

◁ Побудуємо коло  $C_\rho$  радіуса  $\rho < R$  з центром в точці  $z_0$ , яке містить точку  $z$ . Оскільки всередині цього кола функція  $f(z)$  є аналітичною, то згідно до формули Коші можна записати

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.7)$$

Під інтегралом можна зробити очевидне перетворення

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}. \quad (3.8)$$

Тут ми використали очевидну оцінку  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ . Коли  $\zeta \in C_\rho$ , ряд (3.8) збігається рівномірно по  $\zeta$ , оскільки він мажорується збіжним числовим рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ . Підставимо (3.8) в (3.7), проінтегруємо по членах і отримаємо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \quad (3.9)$$

Позначимо

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (3.10)$$

і перепишемо (3.9) у вигляді збіжного в обраній точці  $z$  степеневому ряду:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (3.11)$$

Згідно теореми Коші у формулі (3.10) коло  $C_\rho$  можна замінити довільним замкненим контуром  $C$ , що лежить в області  $|z - z_0| < R$  і містить точку  $z_0$  всередині.

Єдиність доводити не будемо.  $\triangleright$

Збіжний степеневий ряд називається *розкладом* або *рядом Тейлора*.

**Приклад 13.** Знайти розклад в ряд Тейлора функції

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

$\triangleleft$  Ця функція є аналітичною всюди в комплексній площині за винятком точок  $z_{1,2} = \pm i$ . Тому в будь-якому крузі на комплексній площині, яке не містить точок  $z_{1,2} = \pm i$ , ця функція внаслідок теореми 3.3.8. може бути розкладена в ряд Тейлора.

Розглянемо спочатку круг  $|z| < 1$ . Всередині цього круга функція  $\frac{1}{1 + z^2}$  може розглядатися як сума нескінченно спадної геометричної прогресії, тобто,

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad (3.12)$$

що і уявляє собою шуканий розклад. Радіус збіжності цього ряду дорівнює 1.

Зараз розглянемо розклад цієї функції в ряд Тейлора всередині кола  $|z - 1| < \sqrt{2}$ . Безпосереднє користування виразом (3.10) приводить до громіздких обчислень коефіцієнтів  $c_n$ , тому скористуємось наступним представленням:

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{(1 - i)^{n+1}} - \frac{1}{(1 + i)^{n+1}} \right] (z - 1)^n.$$

Скористуємось показовою формою запису комплексних чисел  $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

та  $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$  і отримаємо шуканий результат:

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}} (z - 1)^n. \quad (3.13)$$

$\triangleright$



### 3.4. Єдиність визначення аналітичної функції

Раніш вже було показано, що аналітична функція повністю визначається своїми значеннями на границі області аналітичності. Зараз буде показано, що аналітична функція повністю визначається своїми значеннями на довільній послідовності точок, що збігається до деякої внутрішньої точки області аналітичності.

**Означення.** Нулем аналітичної функції  $f(z)$  називається довільна точка  $z = a$ , в якій  $f(a) = 0$ .

Якщо в околі цієї точки аналітична функція не дорівнює тотожно нулю, то у відповідному ряду Тейлора з центром в точці  $a$  усі коефіцієнти не можуть бути рівними нулю.

**Означення.** Номер молодшого відмінного від нуля коефіцієнта цього розкладу називається *порядком* нуля  $a$ .

Таким чином, в околі нуля порядку  $n$  ряд Тейлора для функції має вигляд:

$$f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots, \quad (3.14)$$

де  $c_n \neq 0$  та  $n \geq 1$ . Це дає можливість представити аналітичну функцію в околі нуля порядку  $n$  у вигляді

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \quad (3.15)$$

де функція

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - a)^1 + \dots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \quad (3.16)$$

є аналітичною в околі точки  $a$ . Внаслідок неперервності ця функція відмінна від нуля також в деякому околі точки  $a$ . Звідси випливає теорема.

**Теорема 3.4.9.** *Нехай функція  $f(z)$  аналітична в околі свого нуля  $a$  і не дорівнює тотожно нулю ні в якому його околі. Тоді існує окіл точки  $a$ , в якому  $f(z)$  не має інших нуле, окрім  $a$ .*

Із цієї теореми випливає наступна теорема.

**Теорема 3.4.10. (Теорема про єдиність)** *Якщо функції  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$  аналітичні в області  $\mathcal{G}$  і їх значення співпадають на деякій послідовності точок  $a_n$ , що збігається до внутрішньої точки  $a$  області  $\mathcal{G}$ , то всюди в  $\mathcal{G}$*

$$f_1(z) = f_2(z).$$

◁ Розглянемо функцію

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Вона є аналітичною в  $\mathcal{G}$  і має своїми нулями точки  $a_n$ , а в силу неперервності і точку  $a$ , тому що  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ . Звідси випливає, що  $f(z)$  тотожно дорівнює 0 в деякому околі  $a$ . ▷

**Наслідок 10.7.** *Якщо аналітичні в  $\mathcal{G}$  функції  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$  співпадають на деякій кривій  $L \in \mathcal{G}$ , то вони тотожно рівні в цій області.*

**Наслідок 10.8.** *Якщо функції  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$ , що є аналітичними відповідно в областях  $\mathcal{G}_1$  та  $\mathcal{G}_2$ , що мають спільну підобласть  $\mathcal{G}$ , то існує єдина аналітична функція  $F(z)$  така, що*

$$F(z) \equiv \begin{cases} f_1(z), & z \in \mathcal{G}_1, \\ f_2(z), & z \in \mathcal{G}_2. \end{cases}$$

Із теореми про єдиність випливає, що аналітична в деякій області  $\mathcal{G}$  і не рівна тотожно нулю функція  $f(z)$  не може дорівнювати нулю в будь-якій підобласті  $\mathcal{G}$ , а також на будь-якій дузі, що лежить в  $\mathcal{G}$ , і навіть на послідовності точок в  $\mathcal{G}$ , що збігається до її внутрішньої точки.

### 3.5. Ряд Лорана

Ряди Тейлора зручно використовувати для функцій, що є аналітичними в деяких кругових областях. В областях іншої форми, наприклад, коли функція аналітична в деякому околі точки  $a$  всюди, за винятком самої точки  $a$ , доводиться розглядати кільцеві області вигляду  $0 < |z - a| < R$ . Для таких функцій можна побудувати розклади по додатних та від'ємних степенях  $(z - a)$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (3.17)$$

що є узагальненням розкладу Тейлора і називається *рядом Лорана*.

Розглянемо область збіжності цього ряду. Для цього перепишемо його у вигляді:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}. \quad (3.18)$$

Очевидно, що областю збіжності ряду (3.17) є спільна частина областей збіжності кожного з доданків правої частини (3.18). Областю збіжності першої суми є круг з центром в точці  $a$  деякого радіуса  $R_1$ . Всередині цього круга цей ряд збігається до деякої аналітичної функції:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R_1. \quad (3.19)$$

Для визначення області збіжності другої суми зробимо заміну змінної  $\zeta = \frac{1}{z-a}$ . Тоді ця сума набуде вигляду  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n$ . Тобто це звичайний степеневий ряд, що збігається до деякої аналітичної функції  $\varphi(\zeta)$  комплексної змінної  $\zeta$  всередині круга збіжності радіуса, який позначимо  $\frac{1}{R_2}$ , тобто  $\zeta < \frac{1}{R_2}$ . Повертаючись до старої змінної і позначаючи  $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$ , отримаємо

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \quad |z-a| > R_2. \quad (3.20)$$

Тобто, областю збіжності другого ряду по від'ємних степенях різниці  $(z-a)$  є область, зовнішня до кола  $|z-a| = R_2$ .

Якщо  $R_2 < R_1$ , то існує спільна область збіжності цих рядів — *кругове кільце*  $R_2 < |z-a| < R_1$ , в якому ряд (3.17) збігається до аналітичної функції

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad R_2 < |z-a| < R_1. \quad (3.21)$$

При цьому  $f_1(z)$  називається *правильною* частиною розкладу Лорана, а  $f_2(z)$  — *головною* частиною цього розкладу.

Якщо  $R_2 > R_1$ , то ряди (3.19) та (3.19) не мають спільної області збіжності і ряд (3.17) не збігається до ніякої аналітичної функції.

**Теорема 3.5.11.** *Функцію  $f(z)$ , що є аналітичною в круговому кільці  $R_2 < |z-a| < R_1$ , можна однозначно представити в цьому кільці збіжним рядом Лорана.*

◁ Побудуємо в кільці  $R_2 < |z-a| < R_1$  два кола  $C_{R'_1}$  та  $C_{R'_2}$  з центрами в точці  $a$ . Нехай виконується умова  $R_2 < R'_2 < R'_1 < R_1$ . Для точки  $z$ , що задовольняє

умову  $R'_2 < |z - a| < R'_1$ , згідно формулі Коші можна записати

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.22)$$

На колі  $C_{R'_1}$  виконується нерівність  $\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < q < 1$  і тому буде зручним таке представлення

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n},$$

що приводить до степеневого ряду для першого інтеграла в (3.22):

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (3.23)$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0. \quad (3.24)$$

На колі  $C_{R'_2}$  виконується нерівність  $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < q < 1$  і тому буде зручним інше представлення

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^n},$$

що приводить до степеневого ряду з від'ємними степенями для другого інтеграла в (3.22):

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}, \quad (3.25)$$

де

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}^-} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} d\zeta, \quad n > 0. \quad (3.26)$$

Оскільки підінтегральні функції в (3.24) та (3.26) є аналітичними в круговому кільці, то внаслідок теореми Коші контури інтегрування можна довільно деформувати. Зокрема, їх можна об'єднати, що приводить до результату:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.27)$$

де  $C$  – довільний замкнений контур, що лежить в кільці  $R_2 < |z - a| < R_1$  і не містить в собі точку  $a$ .

### 3.6. Особливі точки

Зараз ми розглянемо поведінку аналітичних функцій в околі точок найпростішого типу, в яких порушується аналітичність цих функцій.

**Означення.** Точка  $a$  називається *ізолюваною особливою точкою* функції  $f(z)$ , якщо існує такий окіл  $0 < |z - a| < R$  цієї точки (за виключенням точки  $a$ ), в якому функція  $f(z)$  є аналітичною. В самій точці  $a$  функція  $f(z)$  може бути не визначена.

При цьому є можливими три різних випадки, в залежності від яких здійснюється класифікація ізолюваних особливих точок.

1°. При наближенні до точки  $a$  існує обмежене граничне значення  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Така особлива точка називається *усуваною*.

Отриманий ряд Лорана не містить членів з від'ємними степенями  $(z - a)$ . В цьому випадку граничне значення функції  $f(z)$  при  $z \rightarrow a$  дорівнює  $c_0$ . Термін *усувана* означає, що можна покласти  $f(a) = c_0$ , причому  $|c_0| < \infty$ .

Відмітимо, що в околі усуваної особливої точки, коли функція  $f(z)$  є обмеженою, вона може бути представлена у вигляді

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z), \quad (3.28)$$

де  $m \geq 0$  – ціле число, а  $\varphi(a) \neq 0$ . Якщо при цьому  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0$ , то в представленні (3.28) число  $m > 0$  називається *порядком нуля* функції  $f(z)$  в точці  $z = a$ .

**Приклад 14.** Функція  $\frac{\sin z}{z}$  в початку координат має усувану особливу точку.

◁ Дійсно, при будь-якому  $z \neq 0$  можна записати

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

тобто ряд Лорана містить тільки правильну частину. ▷

2°. При наближенні до точки  $a$  функція  $f(z)$  нескінченно зростає, тобто  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . В цьому випадку точка  $a$  називається *полюсом порядку  $m$  функції  $f(z)$* .

**Теорема 3.6.12.** *Для того, щоб точка  $a$  була полюсом функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб головна частина розкладу Лорана  $f(z)$  в околі  $a$  містила лише обмежену кількість членів:*

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k. \quad (3.29)$$

Тут номер старшого від'ємного члена розкладу співпадає з порядком полюса.

◁ Доведення не приводимо. ▷

Можна визначити функцію  $g(z)$ , обернену до  $f(z)$ , тобто  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ . Далі зручно представити цю функцію згідно (3.28) у вигляді  $g(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ , де  $\varphi(a) \neq 0$ . Тоді в околі  $a$  функцію  $f(z)$  можна записати  $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$ , де  $\psi(z)$  є аналітичною функцією. Тобто, встановлено простий зв'язок між нулями і полюсами аналітичних функцій – точка  $a$ , що є нулем порядку  $m$  аналітичної функції  $g(z)$ , одночасно є полюсом того ж порядку функції  $f(z)$ .

**Приклад 15.** *Функція  $\frac{1}{e^{z^2} + 1}$  має нескінченну кількість полюсів в точках  $z = \pm \sqrt{\pi(2k+1)}i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

◁ Дійсно, функція  $g(z) = \frac{1}{f(z)} = e^{z^2} + 1$  має в цих точках нулі першого порядку, бо її похідна в них  $2ze^{z^2}$  не дорівнює нулю. А значить усі полюси – першого порядку і розташовані на двох бісектрисах координатних кутів. ▷

3°. При наближенні до точки  $a$  не існує граничного значення  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . В цьому випадку точка  $a$  називається *суттєво особливою точкою*.

**Теорема 3.6.13.** Точка  $a$  тоді і тільки тоді є суттєво особливою точкою для функції  $f(z)$ , коли головна частина ряду Лорана в околі точки  $a$  містить нескінченну кількість членів.

◁ Доведення не приводимо. ▷

**Приклад 16.** Функція  $e^{\frac{1}{z}}$  має на початку координат суттєво особливу точку.

◁ Дійсно, при будь-якому  $z \neq 0$  можна записати

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots,$$

тобто головна частина ряду Лорана містить необмежену кількість членів. ▷

Однозначні аналітичні функції можна розділити на два найпростіших класи за характером своїх особливих точок.

1°. **Означення.** Функція  $f(z)$  називається *цілою* або *голоморфною*, якщо вона взагалі не має особливих точок.

Відповідно теоремі 3.3.8. довільна ціла функція може бути представлена степеневим рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , що збігається в усій комплексній площині. Є справедливим і зворотне твердження: якщо функція всюди може бути представлена у вигляді збіжного степеневого ряду, вона є цілою функцією.

Прикладами цілих функцій можуть слугувати усі поліноми, показникові функції,  $\sin z$ ,  $\cos z$  та інші. Сума, добуток цілих функцій також будуть цілими функціями.

2°. **Означення.** Функція  $f(z)$  називається *дробною* або *мероморфною*, якщо вона не має інших особливостей, окрім полюсів.

Прикладами мероморфних функцій можуть слугувати усі цілі функції та дрібно-раціональні функції від них.

# Розділ 4

## Теорія лишків

**3.Лишок аналітичної функції в ізольованій особливій точці.** Основна теорема теорії лишків. Побудова аналітичного продовження. Обчислення визначених інтегралів за допомогою лишків. Лема Жордана і обчислення невластних інтегралів. Інтеграли від однолисткових функцій в комплексній площині. Теорема про єдиність означення аналітичної функції. Риманові поверхні. Повна аналітична функція і натуральна область її означення.

### 4.1. Лишок аналітичної функції в ізольованій особливій точці

Раніш було встановлено, що в околі своєї особливої точки  $z_0$  функція  $f(z)$  може бути єдиним чином представлена у вигляді ряду Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (4.1)$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

і зокрема

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta. \quad (4.2)$$

**Означення.** Лишком аналітичної функції  $f(z)$  в ізольованій особливій точці  $z_0$  називається комплексне число, що дорівнює значенню інтеграла



$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta$ . Інтеграл обчислюється в додатному напрямку на довільному замкненому контурі  $C$ , що повністю лежить в області аналітичності функції  $f(z)$  і містить всередині єдину особливу точку  $z_0$  функції  $f(z)$ . Із означення випливає, що формула (4.2) слугує рецептом для обчислення лишка функції  $f(z)$  в ізольованій особливій точці:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta = c_{-1}. \quad (4.3)$$

Зокрема, в усуваній особливій точці лишок функції завжди дорівнює нулю.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1°. Нехай точка  $z_0$  є полюсом першого порядку функції  $f(z)$ . Тоді в околі цієї точки має місце розклад:

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (4.4)$$

Помножимо обидві частини (4.4) на  $(z - z_0)$  і спрямуємо  $z \rightarrow z_0$ :

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (4.5)$$

В даному випадку функція  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  може бути представлена у вигляді відношення двох аналітичних функцій:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (4.6)$$

причому  $\varphi(z_0) \neq 0$ , а точка  $z_0$  є нулем першого порядку функції  $\psi(z)$ , тобто

$$\psi(z) = \psi'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}\psi''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots, \quad \psi'(z_0) \neq 0. \quad (4.7)$$

В результаті отримали формулу для обчислення лишку в полюсі першого порядку:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \quad \text{де} \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}. \quad (4.8)$$

**Приклад 17.** Знайти лишки функції  $f(z) = \frac{z}{z^n - 1}$ .

◁ Особливими точками цієї функції є точки  $z_k = \sqrt[n]{1} = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), причому всі вони є полюси першого порядку. Дійсно, функцію  $f(z)$  можна записати як  $f(z) = \frac{z}{g(z)}$  і далі функція  $g(z) = z^n - 1$  в околі  $z_k$  може бути представлена у вигляді ряду Тейлора:

$$g(z) = nz_k^{n-1}(z - z_k) + \frac{1}{2}n(n-1)z_k^{n-2}(z - z_k)^2 + \dots,$$

і

$$g'(z_k) = nz_k^{n-1} = n \exp\left(i\frac{2\pi k(n-1)}{n}\right) \neq 0.$$

Тобто,  $z_k$  є нулем першого порядку функції  $g(z)$ .

Тоді, згідно (4.8), можна записати

$$\operatorname{res}[f(z), z_k] = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{z_k^2}{z_k^n} = \frac{1}{n} z_k^2 = \frac{1}{n} \exp\left(i\frac{4\pi k}{n}\right). \quad (4.9)$$

▷

2°. Нехай точка  $z_0$  є полюсом порядку  $m$  функції  $f(z)$ . Тоді в околі цієї точки має місце розклад:

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (4.10)$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на  $(z - z_0)^m$ :

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \dots$$

Візьмемо від обох частин похідну порядку  $(m-1)$  і перейдемо до граничного значення при  $z \rightarrow z_0$ . В результаті отримаємо формулу для обчислення лишку в полюсі порядку  $m$ :

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (4.11)$$

Легко бачити, що формула (4.5) є частинним випадком останньої формули.

**Приклад 18.** Знайти лишки функції  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n}$ .

◁ Особливими точками цієї функції є точки  $z_{1,2} = \pm i$ , причому обидві є полюсами порядку  $n$ . Дійсно, обернену функцію  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  поблизу одного з полюсів (наприклад  $z = i$ ) можна розкласти в ряд Тейлора:

$$g(z) = (1 + z^2)^n = \frac{1}{n!}g^{(n)}(z = i)(z - i)^n + \frac{1}{(n + 1)!}g^{(n+1)}(z = i)(z - i)^{n+1} + \dots$$

причому усі похідні меншого ніж  $n$  порядку в точці  $z = i$  дорівнюють нулю. Тоді згідно (4.11) можна записати

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z), i] &= \frac{1}{(n - 1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ (z - i)^n \frac{1}{(1 + z^2)^n} \right] = \\ &= \frac{1}{(n - 1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{1}{(z + i)^n} \right] = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n(n + 1) \cdots (2n - 2)}{(n - 1)!} \cdot \frac{1}{(z + i)^{2n-1}} \Big|_{z=i} = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n - 2)!}{[(n - 1)!]^2} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n - 2)!}{2^{2n-1} [(n - 1)!]^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

▷

## 4.2. Основна теорема теорії лишків

**Теорема 4.2.14. ( Основна теорема теорії лишків)** Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною всюди в замкненій області  $\overline{\mathcal{G}}$ , за винятком обмеженої кількості особливих точок  $z_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), що лежать всередині області  $\mathcal{G}$ . Тоді

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res}[f(z), z_k], \quad (4.13)$$

де  $\Gamma^+$  є повна границя області  $\mathcal{G}$ , по якій інтегрування проходить в додатному напрямку.

◁ Нагадаємо, що якщо функція  $f(z)$  є аналітичною в замкненій області  $\overline{\mathcal{G}}$ , то усі точки границі  $\Gamma$  цієї області є правильними (тобто, неособливими). Проведемо навколо кожної особливої точки  $z_k$  функції  $f(z)$  замкнений контур  $\gamma_k$ , що не містить інших особливих точок окрім  $z_k$ . В отриманій таким чином замкненій

багатозв'язній області, що обмежена контурами  $\Gamma$  і  $\gamma_k$  (див. рис. ??) функція  $f(z)$  буде всюди аналітичною. Внаслідок цього можна записати

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k^-} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (4.14)$$

Використовуючи означення (4.3), отримаємо твердження теореми.  $\triangleright$

Велике практичне значення формули (4.13) полягає в тому, що в багатьох випадках виявляється набагато простіше обчислити лишки функції  $f(z)$  в особливих точках, що лежать всередині області інтегрування, аніж безпосередньо обчислювати інтеграл лівої частини (4.13).

Розглянемо ще одне важливе поняття. Нехай точка  $z = \infty$  є ізольованою особливою точкою аналітичної функції  $f(z)$ .

**Означення.** *Лишком аналітичної функції  $f(z)$  в точці  $z_0 = \infty$  називається комплексне число, що дорівнює значенню інтеграла*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) d\zeta,$$

де  $C$  – довільний замкнений контур, зовні якого функція  $f(z)$  є аналітичною і не має особливих точок, окрім  $z = \infty$ .

Внаслідок визначення коефіцієнтів ряду Лорана (див. (4.2)) можна записати

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) d\zeta = -c_{-1}. \quad (4.15)$$

Звідси, зокрема, випливає, що якщо точка  $z = \infty$  є усуваною особливою точкою функції  $f(z)$ , то  $\operatorname{res}[f(z), \infty]$  може бути відмінним від нуля, в той час як лишок в скінченній усуваній особливій точці завжди дорівнює нулю.

Таким чином, із формул (4.13) і (4.15) випливає твердження наступної теореми.

**Теорема 4.2.15.** *Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною на повній комплексній площині, за винятком обмеженої кількості ізольованих особливих точок  $z_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), включаючи і  $z = \infty$ . Тоді*

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{res}[f(z), z_k] = 0. \quad (4.16)$$

### 4.3. Аналітичне продовження

Нехай дві області  $\mathcal{G}_1$  і  $\mathcal{G}_2$  не мають спільних точок, але мають спільну ділянку границі  $\gamma$  і в цих областях є заданими дві однозначні аналітичні функції  $f_1(z)$  і  $f_2(z)$ , відповідно.

**Означення.** Функція  $f_2(z)$  є *безпосереднім аналітичним продовженням* функції  $f_1(z)$  в область  $\mathcal{G}_2$ , якщо існує аналітична в області  $\mathcal{G}_1 + \gamma + \mathcal{G}_2$  функція  $f(z)$  така, що

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in \mathcal{G}_1, \\ f_2(z) & z \in \mathcal{G}_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Згідно теореми 3.4.10. аналітичне продовження (якщо воно можливе) визначається однозначно.

### 4.4. Обчислення визначених інтегралів за допомогою лишків

Нехай необхідно обчислити інтеграл від дійсної функції  $f(x)$  на деякому інтервалі (обмеженому чи необмеженому)  $(a, b)$  осі  $x$ . Треба доповнити  $(a, b)$  деякою кривою  $C$ , що разом з  $(a, b)$  утворює границю області  $\mathcal{G}$ , і аналітично продовжимо  $f(x)$  в область  $\overline{\mathcal{G}}$ . До побудованого таким чином аналітичного продовження  $f(z)$  можна застосувати теорему про лишки:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_C f(z)dz = 2\pi i \cdot R, \quad (4.18)$$

де  $R$  – сума лишків  $f(z)$  в області  $\mathcal{G}$ . Якщо інтеграл по  $C$  вдається обчислити або виразити через шуканий інтеграл  $\int_a^b$ , то задачу можна вважати розв'язаною.

У деяких випадках допоміжну функцію  $f(z)$  обирають таким чином, щоб вихідна функція, що задана на  $(a, b)$ , була її дійсною чи уявною частиною. Тоді шуканий інтервал знаходиться за допомогою відповідного розділення дійсних і уявних частин формули (4.18).

У випадку нескінченних відрізків  $(a, b)$  звичайно розглядаються родини контурів, що нескінченно розширюються таким чином, щоб у результаті граничного переходу отримати інтеграл на інтервалі  $(a, b)$ . Тут інтеграл по частині контура

$C$  можна не обчислювати, а лише знайти його граничне значення, причому найчастіше він виявляється рівним нулю.

#### 4.4.1. Інтеграли вигляду $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

Розглянемо інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (4.19)$$

де  $R$  – раціональна функція своїх аргументів. Зробимо заміну змінної:

$$z = e^{i\theta}, \quad d\theta = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right).$$

При зміні  $\theta$  від 0 до  $2\pi$  комплексна змінна  $z$  пробігає замкнений контур – коло  $|z| = 1$  у додатному напрямку. Таким чином, інтеграл (4.19) переходить в інтеграл по замкненому контуру від функції комплексної змінної:

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (4.20)$$

Оскільки завжди для раціональної функції можна записати

$$R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \tilde{R}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, \quad (4.21)$$

де  $\tilde{R}(z)$  є аналітична функція всередині кола  $|z| = 1$  всюди, за винятком скінченної  $N \leq m$  кількості особливих точок  $z_k$ , що є нулями знаменника в (4.21). Тоді внаслідок теореми 4.2.14. можна отримати результат:

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \operatorname{res}[\tilde{R}(z), z_k]. \quad (4.22)$$

Якщо  $m_k$  – порядок полюса  $z_k$  функції  $\tilde{R}(z)$  (очевидно, що  $\sum_{k=1}^N m_k \leq m$ ), то останню формулу за допомогою (4.11) можна переписати у вигляді:

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} \left[ (z - z_k)^{m_k} \tilde{R}(z) \right]. \quad (4.23)$$

**Приклад 19.** Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}, \quad |a| < 1. \quad (4.24)$$

◁ Зробимо заміну змінної  $z = e^{i\theta}$  і отримаємо

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}. \quad (4.25)$$

Знаменник має два нулі першого порядку  $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}$ . Тільки  $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$  лежить всередині круга  $|z| = 1$ . Тоді за допомогою формули (4.22) отримаємо

$$I = 4\pi \operatorname{res} \left[ \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right] = 4\pi \frac{1}{a(z - z_2)} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \quad (4.26)$$

▷

**Приклад 20.** Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln |\sin \theta|}{1 + a \cos \theta} d\theta, \quad |a| < 1. \quad (4.27)$$

◁ Такою ж заміною, як і в попередньому прикладі, отримаємо

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{z} = \operatorname{Re} \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \ln \frac{1 - z^2}{2} \cdot \frac{dz}{az^2 + 2z + a}. \quad (4.28)$$

Тут було використане співвідношення

$$\ln |\sin \theta| = \ln \left| \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right| = \ln \left| \frac{1 - e^{2i\theta}}{2} \right| = \operatorname{Re} \ln \frac{1 - z^2}{2}.$$

Тоді за допомогою формули (4.22) отримаємо

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \operatorname{res} \left[ \ln \frac{1 - z^2}{2} \cdot \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right] = \\ &= 4\pi \ln \frac{1 - z^2}{2} \cdot \frac{1}{a(z - z_2)} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{1 - a^2} - (1 - a^2)}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

▷

#### 4.4.2. Інтеграл вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Застосуємо метод лишків до обчислення невластних інтегралів вигляду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (4.30)$$

Ми будемо розглядати тот випадок, коли функція  $f(x)$  є заданою на усій дійсній осі і може бути аналітично подовжена на верхню напівплощину таким чином, що її подовження буде задовольняти деяким додатковим умовам.

Надалі нам знадобиться лема.

**Лема 1**. Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною у верхній напівплощині  $\text{Im } z > 0$  всюди за винятком скінченної кількості ізолюваних точок. Нехай існують такі додатні числа  $R_0$ ,  $M$  та  $\delta$ , що для усіх точок верхньої напівплощини, що задовольняють умову  $|z| > R_0$ , має місце оцінка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0. \quad (4.31)$$

Тоді

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (4.32)$$

де контур інтегрування  $C'_R$  уявляє собою напівколо  $|z| = R$ ,  $\text{Im } z > 0$  у верхній напівплощині  $z$  (рис. 4.1).

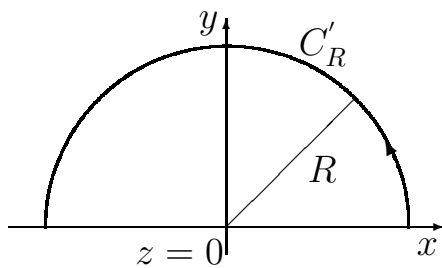


Рис. 4.1

◁ Дійсно, внаслідок (2.7) та умови леми при  $R > R_0$  є справедливим співвідношення

$$\left| \int_{C'_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{C'_R} |f(\zeta)| d\zeta < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^\delta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

▷



**Зауваження 1 до леми 1** Якщо умови леми виконуються в деякому секторі  $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$  площини  $z$ , то формула (4.32) має місце при інтегруванні по дузі  $C'_R$  кола, що лежить в цьому секторі.

**Зауваження 2 до леми 1** Умови леми виконуються і в тому випадку, коли функція  $f(z)$  є аналітичною в околі нескінченно віддаленої точки, і ця точка  $z = \infty$  уявляє собою нуль не нижче другого порядку функції  $f(z)$ . Дійсно, в цьому випадку розклад  $f(z)$  в ряд Лорана в околі  $z = \infty$  має вигляд

$$f(z) = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots = \frac{\psi}{z^2},$$

причому  $|\psi(z)| < M$ , звідки випливає оцінка (4.31) при  $\delta = 1$ .

Лема 1 знаходить широке застосування при обчисленні деяких невластних інтегралів типу  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ .

**Теорема 4.4.16.** *Нехай функція  $f(x)$ , що задана на усій дійсній осі  $-\infty < x < \infty$ , може бути аналітично продовжена на верхню напівплощину  $\text{Im } z \geq 0$ , причому її аналітичне продовження  $f(z)$  задовольняє умови леми 1 і не має особливих точок на дійсній осі. Тоді невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  існує і дорівнює*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}[f(z), z_k], \quad (4.33)$$

де  $z_k$  – особливі точки функції  $f(z)$  у верхній напівплощині.

◁ За умови теореми функція  $f(z)$  у верхній напівплощині має скінченну кількість особливих точок  $z_k$ , причому всі вони задовольняють умову  $|z_k| < R_0$ . Розглянемо замкнений контур, що складається із відрізка дійсної осі  $-R \leq x \leq R$  ( $R > R_0$ ) і напівкола  $C'_R$ ,  $|z| = R$ , у верхній напівплощині. Тоді внаслідок основної теореми теорії лишків є справедливою рівність

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}[f(z), z_k]. \quad (4.34)$$

Оскільки є виконані умови леми 1, то граничне значення другого доданка в лівій частині (4.34) при  $R \rightarrow \infty$  дорівнює нулю. При цьому права частина цього виразу від  $R$  не залежить.  $\triangleright$ .

**Зауваження 1 до теореми 4.4.16.** Аналогічна теорема має місце і в тому випадку, коли аналітичне продовження функції  $f(z)$  в нижню напівплощину задовольняє умови леми, що є аналогічною леми 1.

### Приклад 21.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}. \quad (4.35)$$

$\triangleleft$  Аналітичне продовження підінтегральної функції задовольняє умови теореми ?? Її особливою точкою у верхній напівплощині є точка  $z_0 = \exp(i\frac{\pi}{2})$ , причому вона є полюсом першого порядку. Тому

$$I = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2 + 1}, z_0\right] = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{2}}} = \pi. \quad (4.36)$$

Очевидно, що цей результат легко отримати і в звичайному аналізі, оскільки

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \triangleright$$

### Приклад 22.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}. \quad (4.37)$$

$\triangleleft$  Аналітичне продовження підінтегральної функції задовольняє умови теореми 4.4.16. Її особливими точками у верхній напівплощині є точки  $z_{0,1} = \exp(i\frac{\pi+2\pi k}{4})$ , ( $k = 0, 1$ ), причому обидві ці точки є полюсами першого порядку. Тому

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left\{ \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^4 + 1}, z_0\right] + \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^4 + 1}, z_1\right] \right\} = \\ &= 2\pi i \left\{ \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Отримати цей результат в аналізі дійсної змінної є нетривіальною задачею.  $\triangleright$

## Приклад 23.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}. \quad (4.39)$$

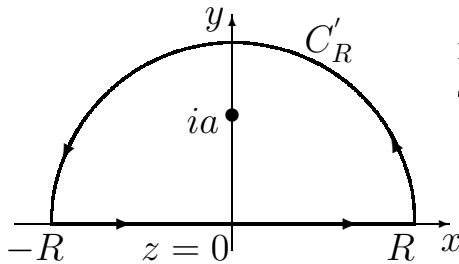


Рис. 4.2

◁ Для обчислення цього інтеграла скористуємось парністю підінтегральної функції, оберемо аналітичне продовження у вигляді

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

та оберемо контур інтегрування, зображений на рис. 4.2, для якого  $R > a$ .

Оскільки на контурі  $C'_R$  функція  $f(z)$  задовольняє умову  $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - a^2}$ , то вона задовольняє умови леми 1. Простий полюс  $f(z)$  знаходиться в точці  $z = ia$  і тоді при  $R > a$  можна записати:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \int_{C'_R} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Відокремлюючи дійсну частину і використовуючи парність функції, знайдемо шуканий інтеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

▷

#### 4.4.3. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$ . Лема Жордана

**Лема 2 (лема Жордана)** Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною у верхній напівплощині  $\text{Im } z > 0$ , за винятком обмеженої кількості ізольованих особливих точок, і рівномірно відносно аргументу  $\arg z$  прямує до нуля при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Тоді при  $a > 0$  є справедливою рівність

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (4.40)$$

де  $C'_R$  – дуга напівкола  $|z| = R$  у верхній напівплощині.

◁ Умова рівномірного прямування  $f(z)$  до нуля означає, що при  $|z| = R$  має місце оцінка

$$|f(z)| < \mu_R, \quad |z| = R,$$

де  $\mu_R \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . В інтегралі (4.40) зробимо заміну змінної  $\zeta = Re^{i\varphi}$  і скористуємось відношенням

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \text{при} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \left| \int_{C'_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| &\leq \mu_R \cdot R \int_0^\pi |e^{ia\zeta}| d\varphi = \mu_R \cdot R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2\mu_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi < 2\mu_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{a} \mu_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

▷

**Зауваження 3 до леми 2** Якщо  $a < 0$ , то можна сформулювати умови такої ж леми для дуги в нижній напівплощині. Аналогічні твердження мають місце і у випадках  $a = \pm i\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), коли інтегрування проводиться відповідно в правій ( $\operatorname{Re} z > 0$ ) або лівій ( $\operatorname{Re} z < 0$ ) напівплощині.

**Зауваження 4 до леми 2** Лема Жордана залишається справедливою і у випадку, коли  $f(z)$  задовольняє умови леми в напівплощині  $\operatorname{Im} z \leq y_0$ . Доведення проводиться аналогічно попередньому при заміні змінної  $\zeta = Re^{i\varphi} + iy_0$ .

**Зауваження 5 до леми 2** Лема Жордана залишається справедливою і у деяких випадках, коли  $f(z)$  задовольняє послаблені умови. Самі умови ми тут приводити не будемо, а відмітимо тільки, що це пов'язано з існуванням додаткового

множника  $e^{ia\zeta}$ , що при  $a > 0$  забезпечує швидке спадання функції у верхній напівплощині.

Лема Жордана знаходить численні застосування при обчисленні невластних інтегралів.

**Теорема 4.4.17.** *Нехай функція  $f(x)$ , що задана на всій дійсній осі, може бути аналітично продовжена на верхню напівплощину  $\text{Im } z > 0$ , її аналітичне продовження не має особливих точок на дійсній осі і у верхній напівплощині задовольняє умови лема Жордана. Тоді інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$ , ( $a > 0$ ), існує і дорівнює*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[e^{iaz} f(z), z_k], \quad (4.41)$$

де  $z_k$  – особливі точки функції  $f(z)$  у верхній напівплощині.

◁ За умовою теореми особливі точки  $z_k$  функції  $f(z)$  задовольняють умову  $|z_k| < R_0$ . Розглянемо замкнений контур, що складається із відрізка дійсної осі  $-R \leq x \leq R$ ,  $R > R_0$  і дуги  $C'_R$  напівкола  $|z| = R$  у верхній напівплощині. Згідно основної теореми теорії лишків 4.2.14. можна записати

$$\int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_{C'_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[e^{iaz} f(z), z_k].$$

За лемою Жордана граничне значення другого інтеграла в лівій частині при  $R \rightarrow \infty$  дорівнює нулю. Звідси випливає твердження теореми. ▷.

При доведенні теорем 4.4.16. та 4.4.17. припускалося, що функція  $f(x)$  не має особливих точок на дійсній осі. Виявляється що деякі незначні доповнення дозволяють застосувати ці теореми до обчислення невластних інтегралів і в тому випадку, коли функція  $f(x)$  має декілька особливих точок на дійсній осі.

Покажемо це на нескладному прикладі.

**Приклад 24.** *Обчислити інтеграл*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \alpha > 0. \quad (4.42)$$

◁ Скористувавшись парністю підінтегральної функції, можна переписати інтеграл у вигляді:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_1. \quad (4.43)$$

Відмітимо, що інтеграл  $I_1$  необхідно розглядати як головне значення невласного інтегралу, а саме

$$I_1 = \operatorname{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \right\}. \quad (4.44)$$

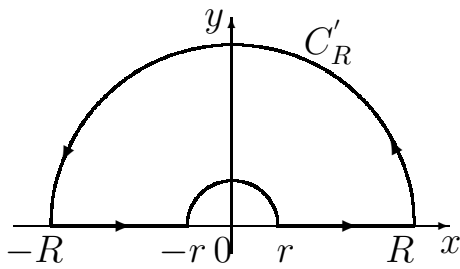


Рис. 4.3

Розглянемо у верхній напівплощині  $\operatorname{Im} z \geq 0$  замкнений контур  $\Gamma$ , що складається з відрізків дійсної осі  $[-R, -\rho]$ ,  $[\rho, R]$  і двох напівкіл  $C'_\rho$ ,  $|z| = \rho$ , та  $C'_R$ ,  $|z| = R$  (рис. 4.3). Всередині цього контура аналітичне продовження функції, а саме  $\frac{e^{i\alpha z}}{z}$ , не має особливих точок. Тому на підставі теореми Коші можна записати:

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C'_\rho} \frac{e^{i\alpha \zeta}}{\zeta} d\zeta + \int_{C'_R} \frac{e^{i\alpha \zeta}}{\zeta} d\zeta = 0. \quad (4.45)$$

Останній доданок на підставі леми Жордана прямує до нуля при  $R \rightarrow \infty$ . В третьому доданку напівкола  $C'_\rho$  долається у від'ємному напрямку (за стрілкою годинника), і при заміні змінної  $\zeta = \rho e^{i\varphi}$  отримаємо:

$$I_3 = \int_{C'_\rho} \frac{e^{i\alpha \zeta}}{\zeta} d\zeta = i \int_{\pi}^0 e^{i\alpha \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} -i\pi. \quad (4.46)$$

Розглядаючи значення (4.45) в межах  $\rho \rightarrow 0$  і  $R \rightarrow \infty$  згідно (4.44) і (4.46) отримуємо:

$$\operatorname{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi, \quad \alpha > 0, \quad (4.47)$$

звідки

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > 0. \quad (4.48)$$

▷

**Приклад 25.** Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx. \quad (4.49)$$

◁ Візьмемо допоміжну функцію

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} = \frac{\cos az + i \sin az}{e^{2\pi z} - 1} = e^{-\pi z} \frac{\cos az + i \sin az}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}},$$

тобто її подвоєна уявна частина на дійсній осі  $x$  дорівнює підінтегральній функції.

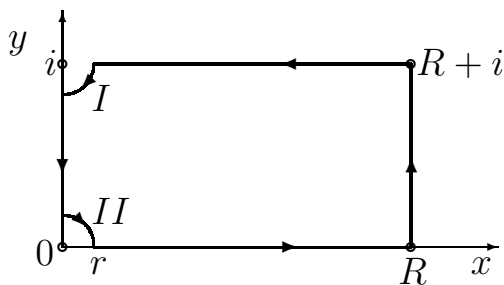


Рис. 4.4

Проінтегруємо цю функцію по контуру, що зображений на рис. 4.4. Розглянемо значення

$$f(x+i) = \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)} - 1} = e^{-a} \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1} = e^{-a} f(x),$$

тобто, можна об'єднати інтеграли по верхній та нижній границях в один, а саме

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x) dx. \quad (A)$$

Розглянемо інтеграл на ділянці  $R, R+i$ :

$$\int_R^{R+i} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} dz = i \int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)} - 1} dy = ie^{iaR-2\pi R} \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - e^{-2\pi R}} dy, \quad (B)$$

який прямує до нуля, коли  $R \rightarrow \infty$ .

Інтеграл по ділянці контура, що лежить на уявній осі, обчислюється таким чином:

$$\begin{aligned} \int_{(1-r)i}^{ri} f(z) dz &= - \int_{ri}^{(1-r)i} f(z) dz = -i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy = -i \int_r^{1-r} e^{-i\pi y} \frac{e^{-ay}}{e^{\pi iy} - e^{-i\pi y}} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_r^{1-r} e^{-i\pi y} \frac{e^{-ay}}{\sin \pi y} dy = -\frac{1}{2} \int_r^{1-r} \frac{(\cos \pi y - i \sin \pi y) e^{-ay}}{\sin \pi y} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_r^{1-r} \operatorname{ctg} \pi y e^{-ay} dy + \frac{i}{2} \int_r^{1-r} e^{-ay} dy. \end{aligned}$$

Оскільки нас цікавить тільки уявна частина інтеграла, то обчислимо тільки її. Це дає результат

$$\frac{1}{2} \int_r^{1-r} e^{-ay} dy = -\frac{1}{2a} \left( e^{-a(1-r)} - e^{-ar} \right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{1}{2a} (e^{-a} - 1). \quad (C)$$

На ділянці контура поблизу точки  $z = i$ , що позначена  $I$ , зробимо заміну змінної  $z = i + re^{i\varphi}$  і  $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$ . Тоді підінтегральна функція може бути представлена у вигляді:

$$f(z) = \frac{e^{ia(i+re^{i\varphi})}}{e^{2\pi(i+re^{i\varphi})} - 1} = e^{-a} \frac{e^{iare^{i\varphi}}}{e^{2\pi re^{i\varphi}} - 1}.$$

Розкладемо чисельник і знаменник дробу в правій частині останнього виразу у відповідні ряди Тейлора:

чисельник –

$$e^{iare^{i\varphi}} = 1 + iare^{i\varphi} + \frac{1}{2} (iare^{i\varphi})^2 + \dots = 1 + ia(z - i) + \frac{1}{2} (ia(z - i))^2 + \dots;$$

знаменник –

$$e^{2\pi re^{i\varphi}} = 1 + 2\pi re^{i\varphi} + \frac{1}{2} (2\pi re^{i\varphi})^2 + \dots - 1 = 2\pi(z - i) + \frac{1}{2} (2\pi(z - i))^2 + \dots$$

В результаті на цій ділянці підінтегральна функція набуває вигляду:

$$f(z) = \frac{e^{-a}}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - i} + P(z - i),$$



де  $P(z - i)$  – правильна в точці  $z = i$  функція, і далі

$$\begin{aligned} \int_I f(z) dz &= \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_I \frac{1}{z-i} dz + \int_I P(z) dz = \\ &= \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -i \frac{e^{-a}}{4} + O(r). \quad (D) \end{aligned}$$

Аналогічно поблизу точки  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{II} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi} \int_{II} \frac{1}{z} dz + \int_{II} P(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -i \frac{1}{4} + O(r). \quad (E) \end{aligned}$$

Оскільки всередині контура підінтегральна функція не має особливостей, то згідно теореми Коші інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю, в тому числі дорівнює нулю і його уявна частина. Звідси отримаємо остаточний результат:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = 2 \operatorname{Im} \int_0^{\infty} f(z) dz = \frac{1}{1 - e^{-a}} 2 \operatorname{Im} [-B - C - D - E] = \\ &= \frac{2}{1 - e^{-a}} \left[ \frac{1}{2a} (e^{-a} - 1) + \frac{e^{-a}}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

▷

# Розділ 5

## Перетворення Лапласа

**5. Перетворення Лапласа.** Загальні властивості зображення Лапласа. Зображення Лапласа елементарних функцій. Теорема запізнювання. Зображення згортки. Означення оригінала по зображенню. Формула Мелліна. Приклади використання формули Мелліна. Розв'язок диференціальних рівнянь за допомогою перетворення Лапласа. Інтеграл Дюамеля і його застосування. Розв'язок лінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, лінійними відносно аргумента.

### 5.1. Визначення перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа є однією із можливих реалізацій так званого принципу відповідності, коли можна встановити відповідність між елементами двох різних класів об'єктів. Наприклад між функціями і операторами, між функціями і функціями тощо. В основі перетворення Лапласа лежить ідея інтегрального перетворення, при цьому, наприклад, розв'язку деякої вихідної задачі (звичайного диференціального рівняння), що уявляє собою функцію дійсної змінної  $f(t)$ , ставиться у відповідність функція комплексної змінної  $F(p)$ , яка задовольняє деяке алгебраїчне рівнянню. Або рівнянню в частинних похідних ставиться у відповідність звичайне диференціальне рівняння.

**Означення.** *Перетворення Лапласа* ставить у відповідність функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$  функцію  $F(p)$  комплексної змінної  $p$  за допомогою перетворення

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.1)$$

Природно, що цей інтеграл існує не для довільної функції  $f(t)$ . Тому необхідно вказати клас функцій, для яких це перетворення існує.

Будемо розглядати функції  $f(t)$ , що є визначеними для всіх значень дійсної змінної  $-\infty < t < \infty$  і задовольняють такі умови:

1° При  $t < 0$  функція  $f(t) \equiv 0$ .

2° При  $t \geq 0$  функція  $f(t)$  на довільній обмеженій ділянці осі  $t$  має не більше ніж скінченну кількість точок розриву першого роду.

3° При  $t \rightarrow \infty$  функція  $f(t)$  має обмежену швидкість зростання, тобто для кожної функції цього класу існують такі невід'ємні сталі  $M$  та  $a$ , що для всіх  $t > 0$  виконується умова

$$|f(t)| \leq M e^{at}. \quad (5.2)$$

Точна нижня границя значень  $a$  називається *показчиком зростання* функції  $f(t)$ . Зокрема, для функції  $f(t) = t^n$  показчик зростання дорівнює нулю.

Відмітимо, що інтеграл (5.1) є невласним інтегралом, що залежить від змінної  $p$  як від параметра. З цього випливає, що цей інтеграл збігається не при всіх значеннях параметра  $p$ . Наприклад, якщо функція  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  прямує до свого граничного значення, що відрізняється від нуля, а  $\operatorname{Re} p < 0$ , то інтеграл розбігається.

**Теорема 5.1.1.** *Інтеграл (5.1) збігається в області  $\operatorname{Re} p > a$ , де  $a$  – показчик степені зростання функції  $f(t)$ , причому для довільного  $x_0 > a$  інтеграл (5.1) при  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$  збігається рівномірно.*

◁ Для довільного  $p = x + iy$  при  $x > a$  можна вказати таке  $\varepsilon > 0$ , що  $x > a_1 = a + \varepsilon$ , причому  $|f(t)| < M e^{a_1 t}$ . Тоді

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-xt} e^{a_1 t} dt = \frac{M}{x - a_1}, \quad x > a_1, \quad (5.3)$$

тобто інтеграл збігається при  $x > a$ . Якщо  $x \geq x_0 > a$ , то аналогічна оцінка дає

$$|F(p)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(x_0 - a_1)t} dt = \frac{M}{x_0 - a_1}, \quad (5.4)$$

що доводить рівномірну збіжність. ▷

Функція  $F(p)$ , що визначена за допомогою (5.1), називається *зображенням Лапласа* функції  $f(t)$ . Функція  $f(t)$  називається *оригіналом* функції  $F(p)$ . Зв'язок функцій  $f(t)$  та  $F(p)$  будемо символічно позначати таким чином:

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \doteq f(t). \quad (5.5)$$

Нагадаємо, що серед функцій комплексної змінної найбільш важливим класом є аналітичні функції. З'ясуємо, чи є аналітичною функцією зображення Лапласа  $F(p)$ .

**Теорема 5.1.2.** *Зображення Лапласа  $F(p)$  функції  $f(t)$  є аналітичною функцією комплексної змінної  $p$  в області  $\operatorname{Re} p > a$ , де  $a$  – показник степені зростання функції  $f(t)$ .*

Доведення не приводимо.

### 5.1.1. Зображення Лапласа елементарних функцій

Знайдемо зображення деяких елементарних функцій дійсної змінної.

1° *Одинична функція Хевісайда.* Нехай

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Тоді

$$f(t) \doteq F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

а функція  $F(p)$  визначена в області  $\operatorname{Re} a > 0$ . Таким чином

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (5.7)$$

Надалі всюди будемо розуміти, що функція  $f(t)$  означає добуток  $f(t) \cdot \sigma_0(t)$ .

2° *Показникова функція*

$$f(t) = e^{\alpha t}. \quad (5.8)$$

Обчислимо інтеграл (5.1) і отримаємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha t}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha. \quad (5.9)$$

3° *Степенева функція*

$$f(t) = t^{\nu}, \quad \nu > -1. \quad (5.10)$$

В цьому випадку інтеграл (5.1) має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\nu} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (5.11)$$

Почнемо з випадку, коли змінна  $p$  приймає дійсні значення:  $p = x > 0$ . Тоді

$$F(p) \Rightarrow F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\nu} dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu} ds = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{x^{\nu+1}}, \quad (5.12)$$

де  $\Gamma(\nu + 1)$  – гамма-функція Ейлера. Внаслідок єдиності аналітичного продовження функція  $F(p)$  в області  $\operatorname{Re} p > 0$  має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\nu} dt = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}. \quad (5.13)$$

При цьому у випадку дробних значень  $\nu$  необхідно обирати ту гілку багатозначної функції  $\frac{1}{p^{\nu+1}}$ , яка є безпосереднім аналітичним продовженням в область

$\operatorname{Re} p > 0$  дійсної функції  $\frac{1}{x^{\nu+1}}$  дійсної змінної  $x > 0$ .

Таким чином,

$$t^{\nu} \doteq \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (5.14)$$

Зокрема, для цілих  $\nu = n$  можна записати

$$t^n \doteq \frac{\Gamma(n + 1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (5.15)$$

## 5.2. Властивості зображень

**Властивість 5.2.1. (лінійність зображення)** Внаслідок властивостей визначених інтегралів є справедливим твердження:

якщо  $F_i(p) \doteq f_i(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \doteq \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t), \quad \operatorname{Re} p > \max a_i, \quad (5.16)$$

де  $\alpha_i$  є заданими сталими, а  $a_i$  – показчик зростання функції  $f_i(t)$ .

### Приклад 26. ( $\cos \omega t$ )

Як приклад застосування цієї властивості і формули (5.9) отримаємо

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \quad (5.17)$$

Аналогічно

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \quad (5.18)$$

**Властивість 5.2.2.** Нехай  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , тоді

$$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \doteq f(\alpha t), \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.19)$$

◁

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

▷

**Властивість 5.2.3. (теорема запізнювання)** Нехай  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$  і є заданою функція

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau > 0, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases} \quad (5.20)$$

Тоді

$$f_{\tau}(t) \doteq F_{\tau}(p) = e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.21)$$

◁

$$F_\tau(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_\tau(t) dt = \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t - \tau) dt = \int_0^\infty e^{-p(t'+\tau)} f(t') dt' = e^{-p\tau} F(p).$$

▷

**Приклад 27. (сходінкова функція)**

◁ Розглянемо зображення сходінкової функції (див. рис. Sve.p.219)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ nf_0, & n\tau \leq t < (n+1)\tau, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.22)$$

Для визначення  $f(t)$  можна застосувати функцію Хевісайда  $\sigma_0$ :

$$f(t) = f_0 [\sigma_0(t - \tau) + \sigma_0(t - 2\tau) + \dots].$$

Використаємо властивість лінійності, теорему запізнювання і отримаємо

$$f(t) \doteq F(p) = f_0 e^{-p\tau} \frac{1}{p} + f_0 e^{-2p\tau} \frac{1}{p} + \dots = \frac{f_0}{p} \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}}. \quad (5.23)$$

▷

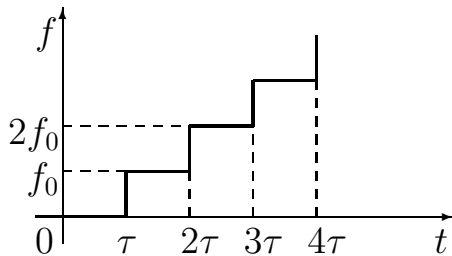


Рис. 5.1

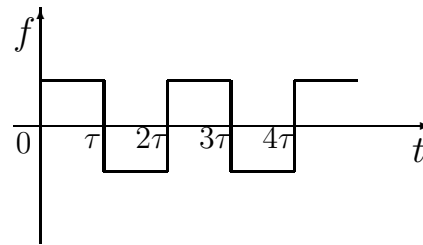


Рис. 5.2

**Приклад 28. (періодична функція)**

◁ Аналогічно можна отримати зображення періодичної функції (рис. Sve.p.220)

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & 2n\tau \leq t < (2n+1)\tau, \\ -f_0, & (2n+1)\tau \leq t < (2n+2)\tau, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.24)$$

Дійсно, спочатку запишемо

$$f(t) = f_0 [\sigma_0(t) - 2\sigma_0(t - \tau) + 2\sigma_0(t - 2\tau) - 2\sigma_0(t - 3\tau) + \dots],$$

а потім

$$\begin{aligned}
 f(t) \doteq F(p) &= f_0 \left[ \frac{1}{p} - 2e^{-p\tau} \frac{1}{p} + 2e^{-2p\tau} \frac{1}{p} - 2e^{-3p\tau} \frac{1}{p} \dots \right] = \\
 &= \frac{f_0}{p} [2 - 2e^{-p\tau} + 2e^{-2p\tau} - 2e^{-3p\tau} \dots - 1] = \\
 &= \frac{2f_0}{p} [1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau} \dots] - \frac{f_0}{p} = \\
 &= \frac{2f_0}{p} \frac{1}{1 + e^{-p\tau}} - \frac{f_0}{p} = \frac{f_0}{p} \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} = \frac{f_0}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

▷

### Приклад 29. (періодична функція загального вигляду)

◁ Теорема запізнювання дозволяє отримати загальну формулу для зображення періодичної функції. Попередньо розглянемо випадок, коли функція дійсної змінної  $f(t)$  може бути представлена у вигляді:

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t. \end{cases} \tag{5.26}$$

Позначимо зображення функцій  $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$  та  $\varphi(t + \tau) \doteq \Phi_\tau(p)$ . Перепишемо (5.26) у вигляді

$$f(t) = \varphi(t) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau, \\ -\varphi(t + \tau - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Використаємо властивість лінійності, теорему запізнювання і отримаємо

$$f(t) \doteq F(p) = \Phi(p) - e^{-p\tau} \Phi_\tau(p). \tag{5.27}$$

Нехай функція  $\varphi(t)$  є періодичною з періодом  $\tau$ , тобто  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ , тоді  $\Phi_\tau(p) = \Phi(p)$ . Тоді із формули (5.27) маємо

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-p\tau}}. \tag{5.28}$$

▷

**Властивість 5.2.4. (зображення похідної)** Якщо  $f'(t)$  задовольняє умови існування зображення при  $\operatorname{Re} p > a$  та  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{5.29}$$



Це є одна з основних властивостей зображення, яка дозволяє замінити диференціювання оригінала на множення зображення на незалежну змінну.

◁ Інтегруємо по частинах і отримуємо

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

▷

**Властивість 5.2.5. (зображення похідної вищих порядків)** Якщо  $f^{(n)}(t)$  задовольняє умови існування зображення при  $\operatorname{Re} p > a$  та  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.30)$$

Доведення є аналогічним попередньому.

Формула (5.30) особливо спрощується в тому випадку, коли  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ :

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p). \quad (5.31)$$

**Приклад 30.** Розв'язати задачу Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t), \quad (5.32)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (5.33)$$

де  $f(t)$  є заданою функцією при  $t \geq 0$ .

◁ Якщо покласти, що  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , то можна побудувати зображення  $f(t) \doteq F(p)$ . Нехай функція  $y(t)$  і усі її похідні задовольняють умови існування зображення. Тоді домножимо рівняння (5.32) на  $e^{-pt}$  і проінтегруємо по  $t$  від 0 до  $\infty$ . В результаті отримуємо:

$$Y(p) \{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n\} = F(p), \quad Y(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt.$$

Позначимо поліном у фігурних дужках як  $P_n(p)$  і отримуємо

$$Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)}. \quad (5.34)$$

Таким чином, якщо можна буде знайти невідомий оригінал  $y(t)$  по його відомому зображенню  $Y(p)$ , то вихідна задача буде розв'язана.  $\triangleright$

**Властивість 5.2.6. (зображення інтеграла)** *Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ . Тоді*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.35)$$

$\triangleleft$

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) d\tau &\doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} F(p). \end{aligned}$$

$\triangleright$

**Властивість 5.2.7. (зображення багатократного інтеграла)** *Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ . Тоді*

$$\varphi(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f(t_n) \doteq \frac{1}{p^n} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.36)$$

Ця властивість доводиться аналогічно попередній.

**Означення** Згортою функцій  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  називається функція  $\varphi(t)$ , що визначається співвідношенням

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (5.37)$$

**Властивість 5.2.8. (зображення згортки)** *Якщо  $f_1(t) \doteq F_1(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_1$  і  $f_2(t) \doteq F_2(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_2$ , то*

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq F_1(p) F_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}. \quad (5.38)$$

◁

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt'} f_2(t') dt' = F_1(p) F_2(p). \end{aligned}$$

▷

**Приклад 31.** Знайти оригінал функції  $F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ .

◁ Згідно (5.17) і (5.18) можна записати:

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \doteq \cos \omega t, \quad \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \doteq \sin \omega t.$$

Тому

$$F(p) \doteq \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \cos \omega(t - \tau) d\tau = \frac{t}{2} \sin \omega t. \quad (5.39)$$

▷

**Властивість 5.2.9. (диференціювання зображення)** Нехай  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ . Тоді

$$F'(p) \doteq -t f(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.40)$$

◁

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt \doteq -t f(t).$$

▷

Цю властивість можна узагальнити.

**Властивість 5.2.10. (багатократне диференціювання зображення)** Нехай  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ . Тоді

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.41)$$

**Властивість 5.2.11. (інтегрування зображення)** Нехай  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$  і функція  $\frac{f(t)}{t}$  задовольняє умови існування зображення. Тоді

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = \int_p^{\infty} F(q) dq, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (5.42)$$

◁ Позначимо

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt,$$

і продиференціюємо цей вираз (праву частину по параметру):

$$I'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = - \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -F(p).$$

Врахуємо, що  $I(\infty) = 0$ , і отримаємо

$$\int_p^{\infty} F(q) dq = - \int_p^{\infty} I'(q) dq = I(p) - I(\infty) = I(p).$$

▷

**Приклад 32.** Знайти зображення функції  $\frac{1}{t} \sin \omega t$ .

◁ Оскільки  $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ , то

$$\frac{1}{t} \sin \omega t \doteq \int_p^{\infty} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}. \quad (5.43)$$

Зокрема, при  $\omega = 1$

$$\frac{1}{t} \sin t \doteq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Тоді, враховуючи властивість 5.2.6., можна отримати зображення інтегрального сінуса:

$$\text{si } t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \left( \frac{\pi}{2} - \text{arctg } p \right). \quad (5.44)$$

▷

**Властивість 5.2.12. (теорема зміщення)** Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\text{Re } p > a$ . Тоді для довільного комплексного числа  $\lambda$  є справедливим співвідношення:

$$F(p + \lambda) \doteq e^{-\lambda t} f(t), \quad \text{Re } p > a - \text{Re } \lambda. \quad (5.45)$$

◁

$$F(p + \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t) dt \doteq e^{-\lambda t} f(t).$$

▷

### 5.2.1. Таблиця зображень

Наведені вище властивості допомагають знайти зображення багатьох функцій. Деякі з яких ми зібрали нижче ( $t > 0$ ):

- 1)  $1 \doteq \frac{1}{p}, \quad \text{Re } p > 0;$
- 2)  $t^\nu \doteq \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}, \nu > -1, \quad \text{Re } p > 0;$
- 3)  $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, n - \text{натуральне}, \quad \text{Re } p > 0;$
- 4)  $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}, \quad \text{Re } p > \text{Re } \alpha;$
- 5)  $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \omega|;$
- 6)  $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \omega|;$
- 7)  $\text{sh } \lambda t \doteq \frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Re } \lambda|;$
- 8)  $\text{ch } \lambda t \doteq \frac{p}{p^2 - \lambda^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Re } \lambda|;$

- 9)  $t^n e^{at} \doteq \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha;$
- 10)  $t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|;$
- 11)  $t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|;$
- 12)  $e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|);$
- 13)  $e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|);$
- 14)  $\frac{\sin \omega t}{t} \doteq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|;$
- 15)  $|\sin \omega t| \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|;$
- 16)  $\operatorname{si} t \doteq \frac{1}{p} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right), \quad \operatorname{Re} p > 0;$

### 5.3. Обернене перетворення Лапласа. Формула Мелліна

Нехай є відомим, що функція комплексної змінної  $F(p)$  є зображенням функції  $f(t)$  з обмеженою швидкістю зростання  $|f(t)| < Me^{at}$ , і значення сталої  $a$  є заданим. Необхідно за даною функцією побудувати шукану функцію  $f(t)$ . Ця задача розв'язується за допомогою теореми.

**Теорема 5.3.3. (формула Мелліна)** *Нехай є відомим, що функція  $F(p)$  в області  $\operatorname{Re} p > a$  є зображенням кусково-гладенької функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ , що має швидкість зростання  $a$ . Тоді*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad x > a. \quad (5.46)$$

◁ Розглянемо допоміжну функцію  $\varphi(t) = e^{-xt} f(t)$ ,  $x > a$ . Ця функція є кусково-гладенькою, на довільній обмеженій ділянці осі  $t$  має скінченну кількість точок розриву першого роду, і експоненціально прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Вона може

бути представлена за допомогою інтеграла Фур'є:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta. \quad (5.47)$$

Використаємо тепер визначення функції  $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} e^{-xt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\eta} f(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_0^{\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (5.48)$$

оскільки  $f(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$ . Тоді, позначаючи  $p = x + i\xi$ , помножимо обидві частини (5.42) на  $e^{xt}$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+i\xi)t} d\xi \int_0^{\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

▷

Формулу Мелліна (5.46) можна також вважати *оберненим перетворенням Лапласа*, оскільки вона допомагає знайти оригінал по відомому зображенню. Розглянемо деякі застосування цієї теореми.

**Теорема 5.3.4.** *Нехай  $f_1(t) \doteq F_1(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_1$  і  $f_2(t) \doteq F_2(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_2$ . Тоді*

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \doteq F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq, \quad (5.49)$$

причому функція  $F(p)$  є визначеною і аналітичною всюди в області  $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$ , а інтегрування проводиться по довільній прямій, що є паралельною уявній осі і задовольняє в першому випадку умову  $a_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2$ , а в другому – умову  $a_2 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1$ .

◁

$$\begin{aligned}
 f(t) \doteq F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q) dq = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q) dq \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q) dq.
 \end{aligned}$$

Ця теорема у деякому розумінні обернена до властивості 5.2.8. ▷

**Приклад 33.** Нехай  $f_1(t) = \cos \omega t$ ,  $f_2(t) = t$ . Знайти зображення функції  $f(t) = t \cos \omega t$ .

◁ Оскільки  $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ ,  $t \doteq \frac{1}{p^2}$ , то внаслідок (5.49) можна записати

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{q dq}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|, \quad (5.50)$$

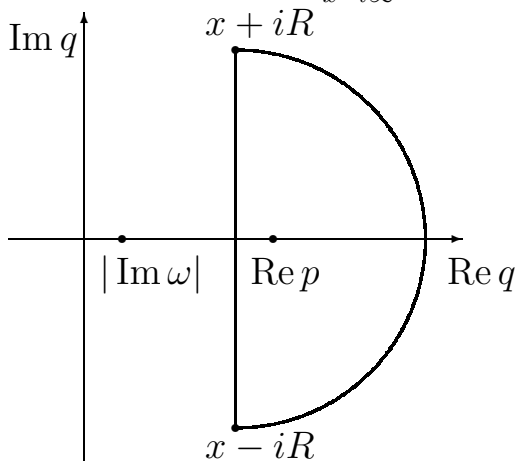


Рис. 5.3

де інтегрування проводиться вздовж довільної прямої, що є паралельною до уявної осі і лежить правіше за пряму  $\operatorname{Re} q = |\operatorname{Im} \omega|$ . Нехай ця пряма проходить лівіше за точку  $q = p$  (рис. 5.3), і розглянемо замкнений контур  $\Gamma$ , що складається із відрізка  $[x - iR, x + iR]$  цієї прямої та напівкола  $|q - x| = R$ . Всередині цього контура підінтегральна функція є аналітичною всюди за винятком точки  $q = p$ , яка є полюсом другого порядку. Тоді

$$\begin{aligned}
 F(p) &= -2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} \left[ \frac{q}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2}, q = p \right] = \\
 &= -\frac{d}{dq} \left[ (p-q)^2 \frac{q}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2} \right]_{q=p} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2},
 \end{aligned}$$

що співпадає з результатом на сторінці 70. Тут інтегрування відбувається проти годинникової стрілки, що враховано знаком "−". Отже,

$$t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (5.51)$$





## Розділ 6

# Варіаційне числення

**5. Варіаційне числення.** Постановка задачі варіаційного числення. Основні леми варіаційного числення. Необхідні умови екстремуму. Прямі методи варіаційного числення.

### 6.1. Постановка задачі варіаційного числення

# Розділ 7

## Метод перевалу

**1.Метод перевалу.** Вступні зауваження. Метод Лапласа. Метод перевалу.

### 7.1. Вступні зауваження

Розглянемо інтеграли вигляду

$$F(\lambda) = \int_c \varphi(z)e^{\lambda f(z)} dz, \quad (7.1)$$

де  $\varphi(z)$  та  $f(z)$  – функції комплексної змінної  $z$ , що є аналітичними в деякій області  $\mathcal{G}$ , в якій міститься крива  $\mathcal{C}$ ;  $\lambda$  – велике додатне число. Будемо вважати, що цей інтеграл існує, і спробуємо отримати асимптотичний розклад функції  $F(\lambda)$  по обернених степенях параметра  $\lambda$ .

Як приклад, розглянемо інтеграл, що визначає гамма-функцію Ейлера

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx, \quad (7.2)$$

і оцінимо його наближене значення при великих значеннях  $p$ . З цією метою зробимо деякі перетворення підінтегрального виразу:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{p \ln x - x} dx, \quad (7.3)$$

що приводить шуканий інтеграл до вигляду (7.1). Підінтегральна функція прямує до нуля при  $x \rightarrow 0$  та  $x \rightarrow \infty$ . Тому значення інтеграла визначається в основному значенням підінтегральної функції в околі її максимуму.

Максимальне значення функція

$$f(x) = p \ln x - x \quad (7.4)$$

набуває в точці  $x = p$ , і в околі цієї точки з точністю до перших членів розкладу можна записати:

$$f(x) \simeq p \ln p - p - \frac{1}{2p}(x - p)^2. \quad (7.5)$$

Це дозволяє легко отримати оцінку значення інтеграла:

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &\simeq \int_{p-\delta}^{p+\delta} e^{p \ln p - p - \frac{1}{2p}(x-p)^2} dx = p^p e^{-p} \int_{p-\delta}^{p+\delta} e^{-\frac{1}{2p}(x-p)^2} dx \simeq \\ &\simeq p^p e^{-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2p}(x-p)^2} dx = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Приблизні рівності мають місце внаслідок того, що підінтегральна функція при виконанні умови  $|x - p| > \delta$  мала і швидко прямує до нуля.

Формула (7.6) дає наближене значення інтеграла (7.2) при великих значеннях  $p$ . Цю формулу часто називають *формулою Стірлінга*.

При отриманні цієї формули не було зроблено оцінки точності зроблених наближень, і тому цей приклад носить лише ілюстративний характер, у зв'язку з чим зробимо декілька зауважень, що дозволять легше зрозуміти основну ідею метода перевалу. Формула (7.6) дає наближене значення інтеграла (7.2) через значення підінтегральної функції в точці її максимуму ( $p^p e^{-p}$ ) і деякій додатковий множник, що відповідає довжині відрізка інтегрування, на якому значення підінтегральної функції є достатньо близьким до максимального. Тут варто нагадати, що підінтегральна в останньому рядку формули (7.6) відповідає нормальному (Гауссовому) розподілу в теорії ймовірностей з дисперсією  $p$ .

Повернемося до інтегралу (7.1), в якому підінтегральна функція є аналітичною в області  $\mathcal{G}$  комплексної площини  $z$ . Цей інтеграл також може бути

наближено обчислений через максимальне значення модуля підінтегральної функції з поправкою на швидкість її спадання на контурі інтегрування. Якщо шлях інтегрування, що з'єднує точки  $z_1$  і  $z_2$ , є таким, що на невеликій його ділянці абсолютне значення підінтегральної функції досягає найбільшого значення, а потім швидко спадає, то природно припустити, що знайдена величина дасть добре наближення.

Оскільки функція  $f(z)$  є аналітичною в області  $\mathcal{G}$ , то внаслідок теореми Коші значення інтеграла (7.1) визначається значеннями початкової  $z_1$  і кінцевої  $z_2$  точок шляху інтегрування, а не виглядом кривої  $\mathcal{C}$ . Звідси випливає, що для заданого інтегралу (7.1) можливість його наближеного обчислення за допомогою метода, що розглядається, пов'язана з можливістю вибору такого контура інтегрування, щоб він задовольняв вказані вище умови.

Ми шукаємо значення інтегралу (7.1) при великих додатних значеннях параметра  $\lambda$ , що стоїть в покажчику експоненти. Тому є природним очікувати, що головний внесок в значення інтегралу дадуть ті ділянки шляху інтегрування, на яких функція  $u(x, y)$  досягає найбільших значень. Тут  $u(x, y)$  є дійсною частиною функції  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ . При цьому необхідно брати до уваги, що функція  $u(x, y)$  є гармонічною в області  $\mathcal{G}$ , не може досягати абсолютного максимуму у внутрішніх точках цієї області, тобто всередині області  $\mathcal{G}$  немає точок, у яких функція  $u(x, y)$  зростає або зменшується по всіх напрямках. Поверхня функції  $u(x, y)$  може мати лише *сідлові точки*.

Нагадаємо, що оскільки  $u$  і  $v$  повинні задовольняти умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x, y \in \mathcal{G},$$

то функції  $u$  і  $v$  є гармонічними, тобто задовольняють рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \mathcal{G}.$$

Нехай точка  $z_0 = x_0 + iy_0$  є єдиною сідловою точкою поверхні  $u(x, y)$  в області  $\mathcal{G}$ . Розглянемо лінії постійних значень  $u(x, y) = u(x_0, y_0) = \text{const}$  функції  $u(x, y)$ , що проходять через цю точку. Внаслідок принципу максимуму для гармонічних функцій, ці лінії не можуть утворювати замкнених кривих, тобто вони або спираються в границю області  $\mathcal{G}$ , або прямують на нескінченність у випадку необмеженої області. Криві  $u(x, y) = u(x_0, y_0)$  розбивають область  $\mathcal{G}$  на сектори, усередині яких значення функції  $u(x, y)$  відповідно або менше, або більше

значення  $u(x_0, y_0)$ . Перші сектори називаються *від'ємними*, а другі – *додатними*.

Якщо граничні точки  $z_1$  і  $z_2$  кривої інтегрування лежать в одному секторі і функція  $u(x, y)$  приймає в цих точках різні значення, то, очевидно, можна таким чином деформувати контур, щоб на ньому функція  $u(x, y)$  змінювалась монотонно. При цьому основний внесок в значення інтеграла буде давати окіл тієї граничної точки, у якій значення  $u(x, y)$  є найбільшим. Така ж ситуація має місце і у випадку, коли точки  $z_1$  і  $z_2$  лежать одна у додатному, а друга у від'ємному секторах.

Метод перевалу застосовується в тому випадку, коли  $z_1$  і  $z_2$  лежать в різних від'ємних секторах, що дає можливість обрати такий контур інтегрування, коли він буде проходити через сідлову точку  $x_0, y_0$ , на якій значення функції  $u(x, y)$  є максимальним в точці  $x_0, y_0$  і швидко спадає у напрямках до граничних точок. Очевидно, що в цьому випадку основний внесок в значення інтеграла (7.1) буде давати мала ділянка в околі сідлової точки, причому останній можна обрати тим менше, чим швидше спадають значення  $u(x, y)$  вздовж кривої інтегрування.

Метод перевалу інколи називають *методом найшвидшого спуску*. Ця назва пов'язана зі топографією поверхні функції  $u(x, y)$  в околі її сідлової точки.

## 7.2. Метод Лапласа

Приведемо ряд допоміжних тверджень (без доведень), що лежать в основі метода Лапласа асимптотичної оцінки інтегралів від функції дійсної змінної.

**Лема 3** При  $p > 0$  і  $A \rightarrow \infty$  має місце асимптотична формула

$$\int_0^A x^{p-1} e^{-x} dx = \Gamma(p) + O\left(e^{-\frac{A}{2}}\right). \quad (7.7)$$

Надалі важливу роль будуть відігравати інтеграли вигляду

$$\Phi(\lambda) = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt, \quad 0 < a < \infty,$$

для яких має місце наступна лема.

**Лема 4** Нехай при  $|t| \leq \delta$  функція  $\varphi(t)$  може бути представлена у вигляді

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2) \quad (7.8)$$

і для деякого  $\lambda_0 > 0$  збігається інтеграл

$$\int_{-a}^a |\varphi(t)| e^{-\lambda_0 t^2} dt < M. \quad (7.9)$$

Тоді для  $\lambda > \lambda_0$  має місце асимптотична формула<sup>1)</sup>

$$\Phi(\lambda) = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt = c_0 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}). \quad (7.10)$$

**Зауваження 6 до леми 4** Можна показати, що у випадку, коли функцію  $\varphi(t)$  можна розкласти в ряд Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + O(t^n), \quad c_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!},$$

має місце асимптотичний розклад

$$\Phi(\lambda) = \int_{-a}^a \varphi(t) e^{-\lambda t^2} dt = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\lambda^{m + \frac{1}{2}}} + O(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}), \quad (7.11)$$

де символ  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  означає найбільше ціле число, що є меншим або дорівнює  $\frac{n-1}{2}$ .

Зокрема, при  $n = 1$ , коли розклад функції  $\varphi(t)$  має вигляд  $\varphi(t) = c_0 + O(t)$ , залишковий член у формулі (7.11) має порядок  $\lambda^{-1}$ , оскільки для оцінки залишку головну роль відіграє інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} O(t) e^{-\lambda t^2} dt < C \int_{-\delta}^{\delta} |t| e^{-\lambda t^2} dt = 2C \int_0^{\delta} t e^{-\lambda t^2} dt.$$

---

<sup>1)</sup> Символ  $O(t^n)$  у розкладі вигляду  $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k + O(t^n)$  означає, що при  $|t| \leq \delta$  має місце рівномірна оцінка  $\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \right| < C|t^n|$ , де  $C$  є сталою.

**Зауваження 7 до леми 4** Лема залишається справедливою і в тому випадку, коли інтегрування відбувається по відрізку  $[a_1, a_2]$ , де  $a_1 < 0$ ,  $a_2 > 0$  і  $-a_1 \neq a_2$ .

**Лема 5** Нехай на відрізку  $|t| \leq \delta_0$  функції  $\varphi(t)$  і  $\mu(t)$  можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2), \quad \mu(t) = c_3 t^3 + O(t^4),$$

і нехай при  $\lambda \rightarrow \infty$  функція  $\delta(\lambda) \leq \delta_0$  задовольняє умови<sup>2)</sup>

$$\lambda \delta^2(\lambda) \rightarrow \infty, \quad \lambda \delta^3(\lambda) \rightarrow 0. \quad (7.12)$$

Тоді при  $\lambda \rightarrow \infty$  має місце асимптотична формула

$$I(\lambda) = \int_{-\delta(\lambda)}^{\delta(\lambda)} \varphi(t) e^{\lambda[-t^2 + \mu(t)]} dt = c_0 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}). \quad (7.13)$$

Ці леми дозволяють довести наступну теорему, що є основною в методі Лапласа асимптотичного розкладу інтегралів від функцій дійсної змінної.

**Теорема 7.2.5.** Нехай функція  $f(t)$ , що є заданою на відрізку  $[a, b]$ , досягає свого абсолютного максимуму у деякій внутрішній точці  $t_0$ , причому  $f''(t_0) < 0$ , і нехай існує таке  $\delta_0 > 0$ , що при  $|t - t_0| < \delta_0$  має місце представлення

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \mu(t).$$

Тоді, якщо функції  $\varphi(t)$  і  $\mu(t)$  при  $|t - t_0| < \delta_0$  задовольняють умови леми 5, тобто

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2), \quad \mu(t) = c_3 t^3 + O(t^4),$$

то має місце асимптотична формула

$$\Psi(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt = e^{\lambda f(t_0)} \left\{ \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda f''(t_0)}} \varphi(t_0) + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}) \right\}, \quad (7.14)$$

якщо виконані наступні додаткові умови:

<sup>2)</sup> Можна показати, що, наприклад, функція  $\delta(\lambda) = \lambda^{-\frac{2}{3}}$  задовольняє умови (7.12).



а) для даного  $\delta_0$  одночасно виконуються співвідношення

$$\text{при } |t - t_0| \leq \delta_0 \quad |\mu(t)| < -\frac{f''(t_0)}{4}(t - t_0)^2,$$

$$\text{при } |t - t_0| > \delta_0 \quad f(t_0) - f(t) \geq h > 0;$$

б) для деякого  $\lambda_0 > 0$  збігається інтеграл

$$\int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt \leq M.$$

**Зауваження 2 до теореми 7.2.5.** Теорема залишається справедливою в тому випадку, коли одна або обидві границі інтегрування дорівнюють нескінченності.

**Зауваження 3 до теореми 7.2.5.** Був отриманий лише перший член асимптотичного розкладу інтеграла (7.14). Аналогічним чином можна отримати вирази і для наступних членів асимптотичного розкладу.

**Зауваження 4 до теореми 7.2.5.** У випадку, коли максимальне значення функції  $f(t)$  досягається в якій-небудь граничній точці відрізка  $[a, b]$ , у формулі (7.14) з'являється додатковий множник  $\frac{1}{2}$ .

**Зауваження 5 до теореми 7.2.5.** У випадку, коли функція  $f(t)$  всередині відрізка  $[a, b]$  має декілька максимумів, що є рівними за величиною, асимптотичний розклад інтегралу (7.14) по обернених степенях великого параметра  $\lambda$  можна отримати при оцінці відповідних інтегралів по  $\delta$ -околу кожної із точок максимума і підсумовуючи результати.

Розглянемо приклади застосування цієї теореми.

**Приклад 34.** Отримати асимптотичний розклад гамма-функції Ейлера

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx.$$

Представимо підінтегральну функцію у вигляді  $x^p e^{-x} = e^{p \ln x - x}$  і зробимо заміну змінних  $x = pt$ . Тоді можна записати

$$\Gamma(p+1) = p^{p+1} \int_0^{\infty} e^{p(\ln t - t)} dt.$$

Це є інтеграл типу (7.14) із  $\varphi \equiv 1$  та  $f(t) = \ln t - t$ . Функція  $f(t)$  досягає свого максимального значення при  $t_0 = 1$ , причому

$$f(1) = -1, \quad f'(t) \Big|_{t=1} = 0, \quad f''(t) \Big|_{t=1} = -1.$$

Тому відповідно формулі (7.14) можна отримати

$$\Gamma(p+1) = e^{-p} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{p} + O(p^{-\frac{3}{2}})} \right\} p^{p+1} = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\}.$$

Таким чином ми отримали асимптотичну оцінку гамма-функції Ейлера, що була отримана трохи раніше. Наведемо без виведення декілька перших членів формули Стірлінга:

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p \left\{ 1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} - \frac{139}{51840p^3} + \dots \right\}.$$

### 7.3. Метод перевалу

Перейдемо тепер до розгляду власне самого метода перевалу для отримання асимптотичних розкладів інтегралів типу (7.1):

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz.$$

Природно припустити, що контур інтегрування  $C$  є таким, що на деякій невеликій його ділянці дійсна частина  $u(x, y)$  функції  $f(z)$  досягає найбільшого значення, а потім швидко спадає (при цьому уявна частина залишається практично сталою, щоб уникнути небажаних швидких осциляцій підінтегральної функції). Тоді основний внесок у величину інтеграла (7.1) дає безпосереднє інтегрування по цій ділянці контура  $C$ . Тому для наближеного обчислення цього інтегралу необхідно деформувати контур  $C$  таким чином, щоб підінтегральна функція на ньому мала вказані властивості. При цьому необхідна деформація контура  $C$  визначається у першу чергу топографією поверхні рівня функції  $u(x, y)$ . Зокрема, контур інтегрування повинен проходити через сідлову точку поверхні функції  $u(x, y)$  у напрямку найшвидшої зміни цієї функції.

Зупинимось докладніше на топографії поверхні гармонічної функції  $u(x, y)$  в околі її сідлової точки  $M_0(x_0, y_0)$ . Напрямки найшвидшої зміни функції визначаються напрямком вектора  $\text{grad } u = \nabla u$ . Нехай  $\nabla u \neq 0$ . Оскільки для

аналітичної функції  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ , то напрям вектора  $\nabla u$  визначає криву  $v(x, y) = \text{const}$ . Є справедливим і обернене твердження: якщо на деякій кривій  $v(x, y) = \text{const}$  та  $\nabla u \neq 0$ , то функція  $u(x, y)$  вздовж цієї кривої змінюється найшвидшим чином. Проте в самій сідловій точці  $M_0$  вектор  $\nabla u = 0$ .

Розглянемо детальніше поведінку функцій  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  в околі сідлової точки. Очевидно, що в точці  $M_0$  похідні по напрямку  $\mathbf{l}$  дотичної до кривої  $v(x, y) = \text{const}$  дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l}(x_0, y_0) = 0.$$

Оскільки похідна від аналітичної функції не залежить від напрямку, то звідси випливає, що

$$f'(z_0) = 0.$$

Тобто, розклад функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  має вигляд

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^p \{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots\},$$

де  $p \geq 2$  і  $c_0 \neq 0$ . Уведемо позначення  $c_n = r_n e^{i\theta_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$ , і отримаємо

$$f(z) - f(z_0) = \rho^p \left\{ r_0 e^{i[p\varphi + \theta_0]} + \rho r_1 e^{i[(p+1)\varphi + \theta_1]} + \dots \right\}.$$

Для кривих  $u(x, y) = \text{const}$  та  $v(x, y) = \text{const}$ , що проходять через точку  $z_0$  маємо  $f(z) - f(z_0) = 0$  і

$$U(\rho, \varphi) = r_0 \cos[p\varphi + \theta_0] + \rho r_1 \cos[(p+1)\varphi + \theta_1] + \dots = 0, \quad (7.15)$$

$$V(\rho, \varphi) = r_0 \sin[p\varphi + \theta_0] + \rho r_1 \sin[(p+1)\varphi + \theta_1] + \dots = 0. \quad (7.16)$$

Тут використані позначення для дійсної і уявної частин функції  $f(z) - f(z_0)$ , а саме

$$\begin{aligned} u(x, y) - u(x_0, y_0) &= \rho^p U(\rho, \varphi), \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) &= \rho^p V(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Оскільки функція  $\cos[p\varphi + \theta_0]$  при зміні  $\varphi$  від 0 до  $2\pi$  змінює знак  $2p$  разів, то із формули (7.15) випливає, що окіл точки  $z_0$  розпадається на  $2p$  криволінійних секторів, всередині яких функція  $U(\rho, \varphi)$  зберігає свій знак. Границі цих секторів визначаються розв'язком рівняння (7.15). Сектори, в яких  $U(\rho, \varphi) < 0$

називаються від'ємними, а сектори в яких  $U(\rho, \varphi) > 0$  – додатними. Напрямки найшвидшого спуску функції  $u(x, y)$  лежать у від'ємних секторах і визначаються тими значеннями кута  $\varphi$ , для яких в околі точки  $(x = 0, y_0)$  функція  $V(\rho, \varphi) = 0$  і  $U(\rho, \varphi) < 0$ , тобто  $\cos(p\varphi + \theta_0) = -1$ . Ці значення дорівнюють

$$\varphi_m = -\frac{\theta_0}{p} + \frac{2m+1}{p}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, p-1. \quad (7.17)$$

Надалі будемо розглядати тільки випадок  $p = 2$ , коли  $f''(z_0) \neq 0$ . При цьому  $\varphi_0 = \frac{1}{2}f''(z_0)$  і  $\theta_0 = \arg f''(z_0)$ . В цьому випадку є лише два від'ємних сектори, всередині яких проходить лінія найшвидшого спуску функції  $u(x, y)$ . Напрямок дотичної до цієї лінії в точці  $z_0$  згідно (7.17) визначається кутами

$$\varphi_0 = \frac{-\theta_0 + \pi}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{-\theta_0 + 3\pi}{2} = \varphi_0 + \pi.$$

**Теорема 7.3.6.** *Нехай функції  $\varphi(z)$  та  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  є аналітичними в області  $\mathcal{G}$  і задовольняють умови:*

1) *Поверхня функції  $u(x, y)$  має всередині  $\mathcal{G}$  єдину сідлову точку  $z_0 = x_0 + iy_0$ , причому  $f''(z_0) \neq 0$ .*

2) *Існує таке  $\delta > 0$ , що на лінії  $L$  постійного значення функції  $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ , що проходить через точку  $z_0$ , в обох від'ємних секторах цієї точки функція  $u(x, y)$  зовні  $\delta$ -околу точки  $z_0$  задовольняє умову*

$$u(x_0, y_0) - u(x, y) \geq h > 0. \quad (7.18)$$

3) *Для деякого значення  $\lambda_0 > 0$  збігається криволінійний інтеграл*

$$\int_C |\varphi(z)| e^{\lambda_0 u(x, y)} ds < M,$$

де крива  $C$  цілком лежить в області  $\mathcal{G}$ , причому її початкова ( $z_1$ ) і кінцева ( $z_2$ ) точки знаходяться в різних від'ємних секторах точки  $z_0$  таким чином, що їх можна з'єднати з кривою  $L$  кривими  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  скінченної довжини, на яких функція  $u(x, y)$  задовольняє умову (7.18).

Тоді для всіх  $\lambda \geq \lambda_0$  має місце асимптотична формула

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} \varphi(z_0) e^{i\varphi_m} + O(\lambda^{-\frac{3}{2}}) \right\}, \quad (7.19)$$

де  $\varphi = \frac{\pi - \theta_0}{2} + m\pi$  ( $m = 0, 1$ ) і  $\theta_0 = \arg f''(z_0)$ . Вибір значення  $\varphi_m$  визначає знак у формулі (7.19) і залежить від напрямку інтегрування вздовж контура  $\mathcal{C}$ .

Доведення теореми не приводимо.

**Зауваження 1 до теореми 7.3.6.** Із теореми випливає, що якщо обидві граничні точки  $z_1$  та  $z_2$  кривої інтегрування  $\mathcal{C}$  лежать в одному і тому ж від'ємному секторі сідлової точки  $z_0$ , то має місце спрощена оцінка:

$$F(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} O(e^{-\lambda h}). \quad (7.20)$$

**Зауваження 2 до теореми 7.3.6.** В застосуваннях часто доводиться розглядати інтеграли типу (7.1) в необмеженій області, коли крива інтегрування  $\mathcal{C}$  прямує до нескінченності. У цих випадках для збіжності інтеграла (7.1) необхідно, щоб крива інтегрування прямувала до нескінченності у від'ємних секторах сідлової точки  $z_0$ . При цьому теорема 7.3.6. і формула (7.19) зберігають силу.

**Приклад 35.** Знайти наближене значення полінома Лежандра  $P_n(\cos \theta)$  при великих значеннях  $n$ .

◁ Нагадаємо деякі відомості про ці поліноми. Вони утворюються при розкладі своєї твірної функції:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad (7.21)$$

і задовольняють такі рекурентні співвідношення:

$$xP_n(x) = \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x), \quad (7.22)$$

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x), \quad (7.23)$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \quad (7.24)$$

За формулою Родрига можна знайти явний вигляд цих поліномів

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

що дозволить отримати для них також інтегральні представлення. Одне з них (при заміні  $x = \cos \theta$ ) ми далі будемо розглядати:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\varphi}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi. \quad (7.25)$$

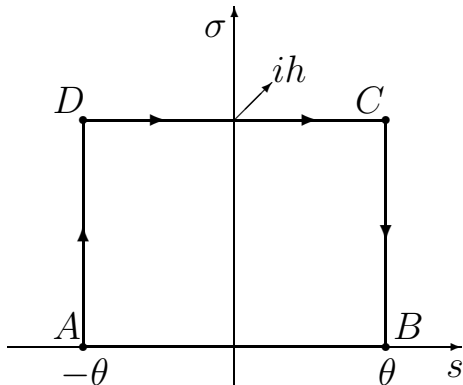


Рис. 7.1

Зробимо наступну заміну, замість  $\varphi$  використаємо комплексну змінну  $\zeta$ :

$$\varphi \Rightarrow \zeta = s + i\sigma,$$

і розглянемо замкнений контур, що зображений на рис. 7.1. Оскільки всередині цього контура підінтегральна функція не має особливостей, то інтеграл по відрізку дійсної осі  $[-\theta, \theta] \equiv AB$  можна замінити на сумму інтегралів по відрізках  $AD$ ,  $DC$  та  $CB$ .

Розглянемо послідовно ці інтеграли. На відрізку  $AD$  маємо  $\zeta = -\theta + i\sigma$ ,  $d\zeta = i d\sigma$  і у випадку  $h \rightarrow \infty$  отримаємо

$$\int_{AD} \Rightarrow i e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma}}{\sqrt{\cos(\theta - i\sigma) - \cos \theta}} d\sigma. \quad (7.26)$$

Для наближеної оцінки цього інтеграла використаємо метод перевалу. Для великих  $n$  функція  $e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma}$  має максимум в точці  $\sigma = 0$ , причому найбільш стрімким є спуск, для якого  $\sigma$  приймає дійсні значення, так що шлях інтегрування не треба деформувати. Наявність множника  $\frac{1}{\sqrt{\cos(\theta - i\sigma) - \cos \theta}}$  перед  $e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma}$  лише посилює пік в точці  $\sigma = 0$ . Дійсно, маємо

$$\cos(\theta - i\sigma) - \cos \theta = -2 \sin\left(\theta - \frac{i\sigma}{2}\right) \sin \frac{i\sigma}{2},$$

і тоді модуль множника

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta - i\sigma) - \cos \theta}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} \left| \sin\left(\theta - \frac{i\sigma}{2}\right) \right|}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \infty$$

та спадає зі швидкістю показникової функції при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Таким чином, головну частину інтеграла (7.26) при великих  $n$  можна обчислити, обмежуючись лише маленьким інтервалом інтегрування  $0 < \sigma < h$ , на якому

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(\theta - i\sigma) - \cos \theta}} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \sin\left(\theta - \frac{i\sigma}{2}\right) \frac{i\sigma}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \theta}} \cdot \sigma^{-\frac{1}{2}}.$$

З тією ж точністю можна зберегти і частину  $(h, \infty)$  інтервала інтегрування, тому що при великих  $n$  функція  $e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma}$  швидко спадає. Тоді для першого інтервала отримаємо оцінку

$$\int_{AD} \approx \int_A^\infty \approx ie^{-i[(n+\frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}]} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \int_0^\infty \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma} d\sigma = ie^{-i[(n+\frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}]} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2}) \sin \theta}}.$$

Аналогічну оцінку отримаємо для ділянки контура  $CB$ , а саме

$$\int_{CB} \approx \int_\infty^B \approx -ie^{i[(n+\frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}]} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2}) \sin \theta}}.$$

На відрізку  $DC$ , де  $\zeta = s + ih$ , модуль підінтегральної функції можна оцінити

$$\left| \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\zeta}}{\sqrt{\cos \zeta - \cos \theta}} \right| \leq \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})h}}{\sqrt{|\cos \zeta| - |\cos \theta|}}$$

і він прямує до нуля, коли  $h \rightarrow \infty$ . Тобто

$$\int_{DC} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0.$$

Об'єднуючи тепер значення інтегралів на відрізках  $AD$  і  $CB$ , після нескладних перетворень отримаємо

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(n+\frac{1}{2})}} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\cos \theta}}.$$

Не зменшуючи точності в знаменнику можна замінити  $n + \frac{1}{2}$  на  $n$  і отримаємо асимптотичну формулу для поліномів Лежандра:

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \frac{\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\cos \theta}}. \quad (7.27)$$



# Зміст

<b>1</b>	<b>Основні поняття</b>	<b>3</b>
1.1.	Комплексні числа і дії над ними . . . . .	3
1.2.	Область на комплексній площині . . . . .	5
1.3.	Геометричні поняття . . . . .	8
1.4.	Функції комплексної змінної. . . . .	8
1.5.	Неперервні функції . . . . .	9
1.6.	Диференціювання функції комплексної змінної . . . . .	13
1.7.	Властивості аналітичних функцій . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Інтегрування функцій комплексної змінної</b>	<b>19</b>
2.1.	Інтеграл Коші . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Ряди аналітичних функцій</b>	<b>27</b>
3.1.	Ряди функцій комплексної змінної . . . . .	27
3.2.	Степеневі ряди . . . . .	29
3.3.	Ряд Тейлора . . . . .	31
3.4.	Єдиність визначення аналітичної функції . . . . .	33
3.5.	Ряд Лорана . . . . .	34
3.6.	Особливі точки . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Теорія лишків</b>	<b>40</b>
4.1.	Лишок аналітичної функції в ізольованій особливій точці . . . . .	40
4.2.	Основна теорема теорії лишків . . . . .	43
4.3.	Аналітичне продовження . . . . .	45
4.4.	Обчислення визначених інтегралів . . . . .	45
4.4.1.	Інтеграли вигляду $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ . . . . .	46

4.4.2.	Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ . . . . .	48
4.4.3.	Лема Жордана . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Перетворення Лапласа</b> . . . . .	<b>58</b>
5.1.	Визначення перетворення Лапласа . . . . .	58
5.1.1.	Зображення Лапласа елементарних функцій . . . . .	60
5.2.	Властивості зображень . . . . .	62
5.2.1.	Таблиця зображень . . . . .	69
5.3.	Формула Мелліна . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Варіаційне числення</b> . . . . .	<b>74</b>
6.1.	Постановка задачі варіаційного числення . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Метод перевалу</b> . . . . .	<b>75</b>
7.1.	Вступні зауваження . . . . .	75
7.2.	Метод Лапласа . . . . .	78
7.3.	Метод перевалу . . . . .	82