Проф. Э. Л. АЙНС

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. М. ЭФРОСА

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
ХАРЬКОВ 1939

Библиографическое описание этого издания помещено в „Летописи Укр. печати"

Ответственный редактор — *А. М. Эфрос*
Литредактор — *С. Б. Бенгис*
Техредактор — *О. А. Кадашевич*
Корректор *С. Г. Власова*

ДНТВУ. Уполномоченный Главлита № 683. Сдано в набор 3/VII 1938 г. Подписано к печати 20/XI 1938 г. Формат бумаги 62×94 см.^{2} $^1/_{16}$ Вес метр. стопы 36 кг. На одном печатном листе 65 000 знаков. Объем 45 печатных листов, авторских листов 42,2. Зак. № 133. Тираж 3.000 экз.

Типография Оборонгиза. Киев, Крещатик, 42.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Выпускаемая в русском переводе книга Айнса (E. L. Ince) представляет ценный вклад в нашу математическую литературу. Книга состоит из 21 главы и разделена на две части. В первой части рассматриваются диференциальные уравнения в вещественной области, во второй—в комплексной области. Начинается книга с рассмотрения элементарных методов интегрирования, после чего следуют две главы о существовании и природе решений и непрерывных группах преобразований. Далее после изложения общей теории линейных диференциальных уравнений, автор переходит к алгебраической теории линейных диференциальных систем, теории Штурм-Лиувилля и связанной с ними общей теории граничных проблем. В этих главах с большой полнотой изложены наиболее существенные результаты, полученные в столь важных для физики и техники вопросах, как вопросы теории собственных чисел и решений. Основные работы Штурм-Лиувилля, Биркгоффа и Бохера изложены исчерпывающе. Первые 3 главы второй части посвящены теоремам существования и особенностям нелинейных диференциальных уравнений. Остальные 7 глав содержат чрезвычайно обширный материал по линейным уравнениям в комплексной области. Рассматриваются: решение уравнений при помощи рядов, уравнения с нерегулярными особыми точками, системы уравнений. Кончается книга главами об интегрировании при помощи контурных интегралов и классификацией линейных уравнений второго порядка с рациональными коэфициентами. Классические результаты Пуанкаре, Фукса, Клейна, Фробениуса, Пенлеве, Гамбургера изложены в этой части с достаточной полнотой. Значительное внимание уделено в книге специальным функциям (Ляме, Матье, Бесселя и др.). Целый ряд весьма ценных результатов и методов в этой области (функции Матье) принадлежат автору. В частности, Айнсом составлены прекрасные таблицы функций Матье, вышедшие в 1935 г. в русском издании. В книге приведено огромное количество литературных ссылок, охватывающих все наиболее существенное в области диференциальных уравнений за последние 200 лет. В конце каждой главы приложено большое количество упражнений и задач. По своему содержанию и характеру изложения, книга является одной из наиболее полных и серьезных книг по обыкновенным диференциальным уравнениям в мировой литературе. К некоторому недостатку книги относится краткость и скупость языка, значительно затруднявшая перевод книги. Эта книга рассчитана на студентов старших курсов математических, механических и физических отделений университетов, аспирантов тех же специальностей и на инженеров-теоретиков.

Можно надеяться, что появление этой содержательной книги будет способствовать повышению уровня математической культуры.

А. ЭФРОС.

Харьков 1938 г.

ЧАСТЬ I

Диференциальные уравнения в вещественной области

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

1 · 1. Определения. Термин *aequatio differentialis* или *диференциальное уравнение* был впервые введен Лейбницем (Leibniz) в 1676 г. для обозначения зависимости между диференциалами dx и dy двух переменных x и y. Эта зависимость содержит переменные x и y вместе с другими символами $a, b, c, \ldots$, которые являются постоянными.

Такое ограниченное применение термина было вскоре заменено другим; в настоящее время под диференциальными уравнениями понимаются любые алгебраические или трансцендентные равенства, содержащие диференциалы или производные. Однако при этом подразумевается, что диференциальное уравнение не является тождеством [1].

Диференциальные уравнения классифицируются соответственно числу содержащихся в них переменных. *Обыкновенное* диференциальное уравнение выражает зависимость между независимой переменной (аргументом), зависимой переменной (функцией) и одной или более производными функции. Диференциальное уравнение *в частных производных* содержит одну зависимую и две или более независимых переменных вместе с частными производными зависимой переменной относительно независимых. Диференциальное уравнение *в полных диференциалах* содержит две или более зависимых переменных вместе с их диференциалами или производными относительно некоторой независимой переменной, которая может входить или не входить в уравнение.

Порядок диференциального уравнения определяется порядком высшей входящей в него производной. Если уравнение представлено в виде полинома от производных, то степень, в которую возводится высшая производная, называется *степенью* уравнения. Если в уравнении в обыкновенных или частных производных зависимая переменная и ее производные входят только в первой

---

[1] Примером диференциального тождества является

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^3x}{dy^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

а это в свою очередь эквивалентно

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

степени и не встречаются в более высоких степенях или произведениях, уравнение называется *линейным.* Следовательно коэфициенты линейного уравнения представляют собой постоянные или функции независимой переменной или переменных.

Так, например

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3$$

является обыкновенным линейным уравнением второго порядка;

$$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1$$

— обыкновенное нелинейное уравнение первого порядка первой степени;

$$\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = 3\frac{d^2y}{dx^2}$$

— обыкновенное уравнение второго порядка, которое, при освобождении от иррациональности, возведением в квадрат обоих членов, представляет собой уравнение второй степени;

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

— линейное диференциальное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

— линейное диференциальное уравнение в частных производных второго порядка с тремя независимыми переменными;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

— нелинейное диференциальное уравнение в частных производных второго порядка и второй степени с двумя независимыми переменными;

$$udx + vdy + wdz = 0,$$

где u, v, w — функции x, y, z, — диференциальное уравнение в полных диференциалах первого порядка первой степени, а

$$x^2dx^2 + 2xydxdy + y^2dy^2 - z^2dz^2 = 0$$

— диференциальное уравнение в полных диференциалах первого порядка второй степени.

В случае диференциального уравнения в полных диференциалах, любая из переменных может рассматриваться как независимая, а остальные как зависимые переменные. Так, полагая x независимой переменной, уравнение

$$udx + vdy + wdz = 0$$

может быть переписано в виде

$$u+v\frac{dy}{dx}+w\frac{dz}{dx}=0$$

или в уравнение можно ввести вспомогательную переменную t, а первоначальные переменные рассматривать как функции t, тогда

$$u\frac{dx}{dt}+v\frac{dy}{dt}+w\frac{dz}{dt}=0.$$

1 · 2. Генезис обыкновенного диференциального уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\text{(A)} \qquad f(x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n)=0,$$

где x и y — переменные, а $c_1, c_2,\ldots, c_n$ — произвольные независимые постоянные. Это уравнение служит для определения y как функции x. Так определяется последовательность функций, причем каждая функция соответствует определенному произвольному значению $c_1, c_2,\ldots,c_n$. Можно образовать такое обыкновенное диференциальное уравнение, которое удовлетворилось бы любой из этих функций. Диференцируем заданное уравнение последовательно n раз относительно x. Тогда мы получим n новых уравнений, именно

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y}y^{(n)}=0,$$

где

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Каждое уравнение существенно отличается от предшествующего[1]; из всех $n+1$ уравнений n произвольных постоянных $c_1, c_2,\ldots,c_n$ могут быть исключены алгебраически, после чего получим диференциальное уравнение n-го порядка:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,\ y^{(n)})=0.$$

Из самого способа образования этого диференциального уравнения ясно, что оно удовлетворяется любой функцией $y=\varphi(x)$, определяемой зависимостью (A). Эта зависимость называется *интегралом* диференциального уравнения, а каждая функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая диференциальному уравне-

[1] При этом принимается, конечно, что имеются все частные производные f, и что $\frac{\partial f}{\partial y}$ не равно нулю.

нию, его *решением*[1]. Решение, включающее некоторое число существенно различных произвольных постоянных, равное порядку уравнения, называется *общим решением*[2]. Эта терминология оправдана, как будет показано в главе III, где приводится доказательство, что для заданного значения x, n различным условиям удовлетворяет одно и только одно решение уравнения n-го порядка. Возможность удовлетворения этим n условиям зависит от наличия решения, содержащего n произвольных постоянных.

Было принято, что интеграл содержит n постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Однако, если имеются только n кажущихся постоянных, т. е., если две или больше постоянных могут быть заменены одной постоянной без существенного изменения интеграла, то порядок результирующего диференциального уравнения будет меньше n. Например, предположим, что интеграл имеет вид

$$f\{x, y, \varphi(a, b)\} = 0,$$

тогда он, повидимому, зависит от двух постоянных a и b, но в действительности он зависит только от одной постоянной, именно $c = \varphi(a, b)$. В данном случае результирующее диференциальное уравнение первого, а не второго порядка.

С другой стороны, если интеграл приведен, т. е., если функция $f(x, y, c_1, \ldots, c_n)$ разложена на два множителя, каждый из которых содержит y, то порядок результирующего диференциального уравнения будет меньше n, так как если ни один множитель не содержит всех постоянных, то каждый из них приведет к образованию диференциального уравнения порядка менее n, и возможно, что эти два диференциальных уравнения будут тождественны или что одно из них допускает все решения другого и следовательно удовлетворяется самим интегралом.

Пусть интеграл имеет вид

$$y^2 - (a + b)xy + abx^2 = 0;$$

он может быть приведен и эквивалентен двум уравнениям

$$y - ax = 0, \quad y - bx = 0,$$

каждое из которых, следовательно и интеграл, удовлетворяет диференциальному уравнению

$$y - xy' = 0.$$

---

[1] Вначале применялись термины *интеграл* [Джемс Бернулли (James Bernoulli 1689)] и *частный интеграл* [Эйлер (Euler, Inst. Calc. Int., 1768)]. Термин *решение* был введен Лагранжем (Lagrange 1774) и установлен главным образом благодаря Пуанкаре (Poincaré). Термин *частный интеграл* применяется в настоящее время в очень ограниченном смысле (см. гл. VI).

[2] Известное прежде как *полный интеграл* или *полное интегральное уравнение* (Эйлер). Термин *интегральное уравнение* имеет в настоящее время совсем иной смысл (см. § 3·2), которого и следует придерживаться.

1·20. Диференциальное уравнение семейства конфокальных конических сечений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,$$

где a и b — определенные постоянные, а λ — произвольный параметр, который может принимать все действительные значения. Это уравнение представляет семейство конфокальных конических сечений. Диференциальное уравнение, решением которого оно является, получается исключением λ между ним и производным уравнением

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}+\frac{2yy'}{b^2+\lambda}=0.$$

Из решения и производного уравнения найдем, что

$$a^2+\lambda=\frac{x^2y'-xy}{y'}, \quad b^2+\lambda=y^2-xyy'$$

и, исключая λ, получим

$$a^2-b^2=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xyy',$$

поэтому искомое диференциальное уравнение будет

$$xyy'^2+(x^2-y^2-a^2+b^2)y'-xy=0,$$

это уравнение первого порядка второй степени.

Производную y' можно изобразить символом p. Тогда диференциальное уравнение семейства конфокальных конических сечений можно написать в виде

$$xy(p^2-1)+(x^2-y^2-a^2+b^2)p=0.$$

1·21. Образование уравнений в частных производных исключением произвольных постоянных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, а z — зависимая переменная, определяемая уравнением.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m; z; c_1, c_2, \ldots, c_n)=0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — n произвольных постоянных. К этому уравнению могут быть присоединены m уравнений, полученных диференцированием относительно каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ последовательно, именно

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_m}=0.$$

Если $m \geqslant n$, то для исключения постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеется достаточно уравнений. Если $m < n$, то присоединяются также

$\frac{1}{2}m(m+1)$ вторых производных уравнений; они имеют вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x_r}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x_r^2}=0 \ (r=1,2,\ldots,m),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_s}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_s}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x_r \partial x_s}=0 \quad (r, s=1,2,\ldots,m;\ r\neq s).$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока будет получено достаточное число уравнений для проведения исключения. После этого у нас будет больше уравнений, чем подлежащих исключению постоянных, поэтому решение может привести не к одному уравнению в частных производных, но к системе совместных диференциальных уравнений в частных производных.

1·211. Диференциальное уравнение в частных производных плоскостей и сфер. Рассмотрим случай, когда интегралом является уравнение

$$z=ax+by+c,$$

где a, b, c, — произвольные постоянные. При соответствующем подборе этих постоянных, уравнение может представлять любую плоскость в пространстве, за исключением плоскости, параллельной оси z. Первые производные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=b.$$

Они недостаточны для исключения a, b и c, поэтому составляем вторые производные уравнения, именно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Эти уравнения не содержат произвольных постоянных и представляют следовательно искомые диференциальные уравнения. Обычно пишут

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Таким образом любая плоскость в пространстве, не параллельная оси z, удовлетворяет одновременно трем уравнениям

$$r=0, \ s=0, \ t=0.$$

Далее, рассмотрим уравнение, удовлетворяющее наиболее общим уравнениям сферы вида

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

где a, b, c и r — произвольные постоянные. Первые производные уравнения имеют вид

$$(x-a)+(z-c)p=0, \quad (y-b)+(z-c)q=0,$$

а вторые производные уравнения

$$1+p^2+(z-c)r=0,$$

$$pq+(z-c)s=0,$$

$$1+q^2+(z-c)t=0.$$

При исключении $z-c$ получим искомые уравнения, именно

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

следовательно имеем два независимых уравнения. Пусть λ — значение каждого из членов этих уравнений, тогда

$$\lambda^2(rt-s^2)=1+p^2+q^2>0.$$

Если рассматривать только действительные сферы, то должно быть удовлетворено дополнительное условие

$$rt>s^2.$$

1·22. Свойство якобианов. Покажем, что интеграл дифференциального уравнения в частных производных представляет собой зависимость, в которую входят произвольные функции переменных. Исследование, которое приводит к этому результату, зависит от свойств функциональных детерминантов или *якобианов*.

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются функциями независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим ряд частных производных, расположенных следующим образом

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}.
\end{array}$$

Тогда детерминант порядка p, элементы которого совпадают с элементами p строк и p колонн приведенной схемы, называется *якобианом*[1]. Предположим, что все возможные якобианы построены; тогда, *если якобиан порядка p, например*

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_p} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\dfrac{\partial u_p}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_p}{\partial x_p}
\end{vmatrix},$$

[1] Scott and Mathews, Theory of Determinants, гл. XIII.

не равен нулю для выбранного ряда значений $x_1=\xi_1,\ldots,x_n=\xi_n$ *и если каждый якобиан порядка* $p+1$ *тождественно равен нулю, то функции* $u_1, u_2,\ldots, u_p$ — *независимы, а остальные функции* $u_{p+1},\ldots,u_m$ *могут быть выражены в зависимости от* $u_1,\ldots, u_p$.

Предположим, что для значений $x_1,\ldots, x_n$ в соседстве с $\xi_1,\ldots,\xi_n$ функции $u_1,\ldots, u_p$ не являются независимыми, но существует соотношение

$$\varphi(u_1,\ldots, u_p)=0.$$

Тогда уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial x_1}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_p}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial x_p}=0,$$

удовлетворяются тождественно, и поэтому выражение

$$\frac{\partial(u,\ldots,u_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_p}\\ \ldots\ldots & \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1},\ldots, & \frac{\partial u_p}{\partial x_p}\end{vmatrix}=0$$

обращается в соседстве с $\xi_1,\ldots, \xi_n$ в нуль, что противоречит принятому условию. Следовательно первая часть теоремы, именно, что $u_1,\ldots,u_p$ независимы, верна.

Пусть в $u_{p+1},\ldots,u_m$ переменные $x_1,\ldots,x_p, x_{p+1},\ldots,x_n$ заменены новым рядом независимых переменных $u_1,\ldots, u_p, x_{p+1},\ldots, x_n$. Докажем, что если u_r представляет какую-либо функцию $u_{p+1},\ldots, u_m$, а x_s—любую из переменных $x_{p+1},\ldots, x_n$, то u_r совершенно не зависит от x_s, т. е.

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s}=0.$$

Предположим, что

$$u_1=f_1\ (x_1,\ldots, x_n),\ldots, u_m=f_m(x_1,\ldots, x_n),$$

и пусть вместо $x_1,\ldots, x_p$ будут подставлены их выражения в функции от новых независимых переменных $u_1,\ldots, u_p, x_{p+1},\ldots, x_p$, тогда, диференцируя обе стороны каждого уравнения по x_s, получим

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x_s}+\frac{\partial f_1}{\partial x_s},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0=\frac{\partial f_p}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial f_p}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x_s}+\frac{\partial f_p}{\partial x_s},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s}=\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial f_r}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x_s}+\frac{\partial f_r}{\partial x_s}.$$

$$(r=p+1,\ldots, m).$$

Исключение выражений

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_s}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x_s}$$

дает

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_p}, \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_p}, \frac{\partial f_p}{\partial x_s} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_r}{\partial x_p}, \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_p, f_r)}{\partial (x_1, \ldots, x_p, x_s)} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial (f_1, \ldots, f_p)}{\partial (x_1, \ldots, x_p)}.$$

Поскольку, согласно условию

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_p, f_r)}{\partial (x_1, \ldots, x_p, x_s)} = 0, \quad \frac{\partial (f_1, \ldots, f_p)}{\partial (x_1, \ldots, x_p)} \neq 0,$$

то

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = 0 \quad (r = p+1, \ldots, m;\ s = p+1, \ldots, n).$$

Следовательно каждая из функций $u_{p+1}, \ldots, u_m$ может быть выражена в зависимости от функций $u_1, \ldots, u_p$, что и требовалось доказать.

1·23. Образование диференциального уравнения в частных производных исключением произвольной функции. Предположим, что зависимая переменная z связана с независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ уравнением вида

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

где F — произвольная функция аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые, в свою очередь, являются данными функциями $x_1, \ldots, x_n$ и z. Если вместо z подставить его значение в зависимости от $x_1, \ldots, x_n$, то равенство превращается в тождество. Поэтому, если $D_r u_s$—частная производная u_s по x_r, когда вместо z подставлено его значение, то

$$\begin{vmatrix} D_1 u_1, \ldots, D_n u_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ D_1 u_n, \ldots, D_n u_n \end{vmatrix} = 0.$$

Но

$$D_r u_s = \frac{\partial u_s}{\partial x_r} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_r},$$

поэтому диференциальное уравнение в частных производных, удовлетворяемое z, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

1·231. Диференциальное уравнение поверхности вращения. Уравнение

$$F(z, x^2 + y^2) = 0$$

представляет поверхность вращения, ось которой совпадает с осью z. В обозначениях предыдущего параграфа

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ u_1 = z,\ u_2 = x^2 + y^2,$$

поэтому z удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 2x, & 2y \end{vmatrix} = 0$$

или

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется выражением

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

где φ — произвольная функция его аргументов; оно является поэтому диференциальным уравнением всех поверхностей вращения, имеющих общую ось $x = 0$, $y = 0$.

1·232. Теорема Эйлера об однородных функциях. Пусть

$$z = \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — однородная функция x и y степени n. Функция $\varphi(x, y)$ может быть написана в виде

$$x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

откуда следует, что

$$x^{-n} z = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

В обозначениях § 1·23

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ u_1 = x^{-n} z,\ u_2 = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$F(u_1, u_2) = u_1 - u_2,$$

поэтому z удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{vmatrix} -nx^{-n-1}z + x^{-n}\frac{\partial z}{\partial x}, & x^{-n}\frac{\partial z}{\partial y} \\ -yx^{-2}\psi', & x^{-1}\psi', \end{vmatrix} = 0,$$

которое приводится к

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

Аналогично, если u — однородная функция трех переменных x, y и z степени n, то

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

Эта теорема может быть распространена на любое число переменных.

1·24. Образование диференциального уравнения в полных диференциалах с тремя переменными. Уравнение

$$\varphi(x, y, z) = c$$

представляет семейство поверхностей; предположим, что каждому значению c соответствует только одна поверхность семейства. Теперь пусть (x, y, z) будет точкой на какой-либо поверхности а $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ — соседней точкой на той же поверхности, тогда

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \varphi(x, y, z) = 0.$$

Полагая, что частные производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

существуют и непрерывны, это уравнение можно написать так

$$\left\{\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon_1\right\}\delta x + \left\{\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon_2\right\}\delta y +$$
$$+ \left\{\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} + \varepsilon_3\right\}\delta z = 0,$$

где ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \to 0$, когда δx, δy, $\delta z \to 0$.

Теперь пусть ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю, и вместо δx, δy, δz напишем соответственно dx, dy, dz. Тогда получим диференциальное уравнение в полных диференциалах

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0.$$

Если все три частные производные имеют общий множитель μ, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mu P,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mu Q,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mu R,$$

то, исключив его, приведем уравнение к виду

$$Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

Возможность применения диференциалов dx и т. д. может быть установлена из уравнения с двумя переменными, именно

$$y-f(x)=c.$$

Этот процесс приводит к уравнению в полных диференциалах

$$dy-f'(x)\,dx=0,$$

следовательно частное диференциалов dy, dx является производной dy/dx.

Пример. Интеграл

$$\frac{(x+z)(y+z)}{x+y}=c$$

приводит к диференциальному уравнению в полных диференциалах

$$\frac{y^2-z^2}{(x+y)^2}dx+\frac{x^2-z^2}{(x+y)^2}dy+\frac{2z+x+y}{x+y}dz=0,$$

которое после умножения на $(x+y)^2$ примет вид

$$(y^2-z^2)\,dx+(x^2-z^2)\,dy+(2z+x+y)(x+y)\,dz=0.$$

1·3. Решения обыкновенного диференциального уравнения. Если известно, что обыкновенное диференциальное уравнение было выведено процессом исключения n произвольных постоянных из интеграла, то очевидно оно имеет решение, зависящее от n произвольных постоянных. Возможность получения обыкновенного диференциального уравнения порядка n из такого интеграла не очевидна, поэтому не следует считать, что данное диференциальное уравнение имеет решение, зависящее от n произвольных постоянных. При образовании диференциального уравнения из заданного интеграла необходимо принять некоторые условия диференцируемости и непрерывности производных. Аналогично, в обратной задаче интегрирования (переход от заданного диференциального уравнения к его интегралу) необходимо принять, что соответствующие условия удовлетворены. С чисто теоретической точки зрения, первой возникает проблема получения ряда возможно более простых условий, которые при их удовлетворении обеспечили бы существование решения. Эта проблема будет рассмотрена в главе III, где будет доказана принимаемая здесь без доказательства *теорема существования*, именно, что при удовлетворении ряда возможных условий уравнение порядка n действительно имеет единственное решение, зависящее от n произвольных начальных условий. Из этой теоремы следует, что наиболее общее решение обыкновенного уравнения порядка n содержит n произвольных постоянных.

Однако отсюда не следует, что не существует решения, которое не было бы лишь частным случаем общего решения. Чтобы пояснить это, рассмотрим диференциальное уравнение, полученное исключением c из интеграла

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

и производного уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} p = 0. \qquad \left(p \equiv \frac{dy}{dx}\right).$$

Производное уравнение вообще содержит c. Пусть, например, интеграл решен относительно c, и полученное значение c подставлено в производное уравнение, — тогда производное уравнение становится диференциальным уравнением

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] p = 0,$$

где скобки указывают на исключение c. В общей форме это уравнение может быть написано в виде

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] dy + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] dy = 0.$$

Пусть x, y, и c изменяются одновременно, тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial c} dc = 0.$$

Если c исключить, то это уравнение примет вид

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] dy + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right] dc = 0,$$

поэтому, принимая во внимание предыдущее уравнение,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right] dc = 0.$$

Таким образом могут быть два случая: или c — постоянная, что приводит нас опять к интегралу

$$\varphi(x, y, c) = 0,$$

или

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right] = 0.$$

Последнее соотношение между x и y может представлять или не представлять решения диференциального уравнения; если оно представляет решение и не является частным случаем общего решения (интеграла), оно называется *особым интегралом* (решением).

Рассмотрим, например, интеграл

$$c^2 + 2cy + a^2 - x^2 = 0,$$

где c — произвольная, а a — определенная постоянная. Производное уравнение имеет вид

$$cdy - xdx = 0;$$

после исключения c оно становится диференциальным уравнением

$$[-y + (x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]dy - xdx = 0.$$

Уравнение в полных диференциалах, полученное одновременным изменением x, y, и c, будет

$$(c + y)\,dc + cdy - xdx = 0,$$

или, исключая c

$$(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}dc + [-y + (x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]\,dy - xdx = 0.$$

Таким образом, кроме общего, существует еще и особое решение

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

которое, очевидно, удовлетворяет диференциальному уравнению.

Диференциальное уравнение первого порядка может рассматриваться как удаленное только на одну ступень от его интеграла. Уравнение высшего порядка более удалено от своего интеграла и поэтому его интегрирование является процессом, в котором порядок производных последовательно понижается, причем каждое понижение порядка на единицу сопровождается введением произвольной постоянной. Если данное уравнение порядка n, а при помощи процесса интегрирования получается уравнение порядка $n - 1$, содержащее произвольную постоянную, то оно называется *первым интегралом* данного уравнения.

Пусть дано уравнение вида

$$y'' = f(y),$$

где $f(y)$ не зависит от x. Уравнение может быть проинтегрировано, если оба члена умножить на $2y'$. Следовательно

$$2y'y'' = 2f(y)y'$$

и его первый интеграл равен

$$y'^2 = c + 2\int f(y)\,dy,$$

где c — произвольная постоянная интегрирования.

1·4. Геометрическое значение решений обыкновенного диференциального уравнения первого порядка. Поскольку интеграл обыкновенного диференциального уравнения первого порядка является зависимостью между двумя переменными x и y и параметром c, говорят, что диференциальное уравнение представляет собой семейство плоских кривых, зависящее от одного параметра.

Каждая кривая этого семейства называется *интегральной кривой* диференциального уравнения.

Пусть уравнение имеет вид

$$\frac{\partial y}{dx}=f(x, y)$$

и пусть D — область в плоскости (x, y), в которой функция $f(x, y)$ однозначна и непрерывна, а (x_0, y_0) — точка, лежащая внутри D. Тогда уравнение связывает с (x_0, y_0) соответствующее значение dy/dx, скажем p_0, и определяет таким образом *линейный элемент*[1] (x_0, y_0, p_0), исходящий из точки (x_0, y_0). Выберем на этом линейном элементе соседнюю точку (x_1, y_1) и построим линейный элемент (x_1, y_1, p_1). Продолжая непрерывно этот процесс, получим ломаную линию, которая может рассматриваться как приближение к интегральной кривой, проходящей через (x_0, y_0).

Этот метод приближения к интегральным кривым диференциального уравнения иллюстрируется образованием силовых линий под действием стержневого магнита при помощи железных опилок. На тонкий лист картона, помещенный горизонтально и непосредственно над магнитом, насыпаются железные опилки. Каждая железная частица намагничивается и стремится расположиться в направлении результирующей силы, и если распределению опилок помочь легким постукиванием о картон, то они расположатся приблизительно вдоль силовых линий. Таким образом каждая отдельная железная частица символизирует элемент через ее среднюю точку.

Предположим, что стержневой магнит состоит из двух отдельных полюсов противоположной полярности, расположенных в A и B, и пусть P будет любой точкой на картоне. Тогда, если координаты A, B и P равны соответственно $(-a, 0)$, $(a, 0)$, (x, y), если r и s являются соответственно длинами AP и BP и если X, Y — составляющие напряженности магнитного поля в точке P, то

$$Y=\frac{y}{r^3}-\frac{y}{s^3}, \quad X=\frac{x+a}{r^3}-\frac{x-a}{s^3}.$$

Направление результирующей силы в точке P равно

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$$

$$=\frac{y}{x+a\dfrac{r^3+s^3}{r^3-s^3}},$$

что представляет собой диференциальное уравнение силовых линий, которое имеет решение вида

$$\frac{x+a}{r}-\frac{x-a}{s}=\text{const}.$$

[1] Линейный элемент быть определен с достаточной точностью, как линия, соединяющая точки (x_0, y_0) и $(x_0+\delta x, y_0+\delta y)$, где δx и δy малы, а $\delta y/\delta x=p_0$.

Сообщая соответствующие значения постоянной, можно вычертить силовое поле. Интегральные кривые представляют силовые линии, приближенно изображенные железными опилками.

Поскольку было принято, что $f(x, y)$ непрерывна и однозначна в каждой точке D, — через каждую точку пройдет только одна интегральная кривая. Вне D могут быть точки, в которых $f(x, y)$ не будет непрерывной и однозначной; в таких точках, известных как *особые точки*, поведение интегральных кривых может быть особенным.

Аналогично, если уравнение второго порядка может быть написано в виде

$$y'' = f(x, y, y'),$$

где $f(x, y, y')$ непрерывна и однозначна для некоторого диапазона значений ее аргументов, значение y' в точке (x_0, y_0) может быть выбрано произвольным, в некоторых пределах, и таким образом через точку (x_0, y_0) будет проходить бесконечность (первого порядка) интегральных кривых. Общее решение содержит две произвольные постоянные, поэтому совокупность интегральных кривых образует семейство, зависящее от двух параметров.

Вообще, интегральные кривые обыкновенного уравнения порядка n образуют семейство, зависящее от n параметров, а через каждую неособую точку проходит бесконечность порядка $(n-1)$ интегральных кривых.

1·5. Совместные системы обыкновенных диференциальных уравнений. Часто возникают проблемы, которые приводят к системе совместных диференциальных уравнений с одной независимой и несколькими зависимыми переменными. Так например, предположим, что

$$\varphi(x, y, z, c_1, c_2) = 0,$$

$$\psi(x, y, z, c_1, c_2) = 0$$

являются двумя уравнениями относительно x, y и z, причем каждое из них содержит по две произвольных постоянных c_1 и c_2. Тогда между этими двумя уравнениями и парой уравнений, полученных путем их диференцирования по x, постоянные c_1 и c_2 могут быть исключены, и мы получим в результате два совместных обыкновенных диференциальных уравнения первого порядка

$$\Phi(x, y, y', z, z') = 0,$$

$$\Psi(x, y, y', z, z') = 0.$$

Введением достаточного числа новых переменных можно заменить одно уравнение любого порядка системой совместных уравнений, так, чтобы каждое уравнение содержало одну производную первого порядка. Эта теорема может быть доказана для наиболее важного случая, а именно, для уравнения вида[1]

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x,\ y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

В этом случае вводятся новые переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$, так что

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \ldots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,$$

где $y_1 = y$. Эти уравнения вместе с уравнением

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$$

образуют систему, эквивалентную первоначальному уравнению из n совместных уравнений, каждое из которых первого порядка.

В частности, очевидно, что если первоначальное уравнение линейное, то уравнения эквивалентной системы также будут линейными.

Примеры

1. Найдите обыкновенные диференциальные уравнения, которым удовлетворяют следующие интегралы

(I) $y = Ax^m + Bx^n$, (VI) $y = x^n(A + B\log x)$,

(II) $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$, (VII) $y = e^{mx}(A + Bx)$,

(III) $y = A\cos nx + B\sin nx$, (VIII) $y = (A + Bx)\cos nx + (C + Dx)\sin nx$,

(IV) $y = e^{mx}(A\cos nx + B\sin nx)$, (IX) $y = e^{mx}\{(A+Bx)\cos nx + (C+Dx)\sin nx\}$;

(V) $y = A\,\mathrm{ch}(x/A)$, (X) $y = Ax\cos(n/x + B)$,

где A, B, C, D — произвольные постоянные, а m и n — фиксированные постоянные.

2. Докажите, что если

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

то

$$2y'y''' = 3y''^2,$$

а если $a + d = 0$, то

$$(y - x)y'' = 2y'(1 + y'),$$ [Math. Tripos, I, 1911].

3. Докажите, что если $y^3 - 3ax^2 + x^3 = 0$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0.$$

Покажите, что кривая, заданная этим уравнением, вогнута по всей своей длине к оси x и что имеется точка перегиба при $x = 3a$. [Math. Tripos, I, 1912].

4. Докажите, что если

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} - (4 - 12x)\frac{dy}{dx} - 36y = 0,$$

[1] D'Alembert, Hist. Acad., Berlin, 4 (1748), 289.

то

$$x(1-x)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-\{4-n-(12-2n)x\}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-(4-n)(9-n)\frac{d^n y}{dx^n}=0.$$

Отсюда, пользуясь теоремой Маклорена, докажите, что значение y, исчезающее при $x=0$, таково, что его пятая производная, равная единице при $x=0$, может быть выражена в виде

$$\frac{4!}{9!}\left\{126x^5-84x^6+36x^7-9x^8+x^9\right\}.$$ [Math. Tripos, I, 1915].

5. Покажите, что диференциальное уравнение всех окружностей в одной плоскости имеет вид

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$$

6. Любое коническое сечение, не имеющее асимптоты, параллельной оси y, может быть написано в виде

$$(y-\alpha x-\beta)^2=ax^2+2bx+c.$$

Отсюда покажите, что диференциальное уравнение всех таких конических сечений будет

$$\frac{d^3}{dx^3}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}=0$$

или

$$40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3-45\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}+9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}=0.$$

В частности, покажите, что диферециальное уравнение всех компланарных парабол имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}=0$$

или

$$5\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}=0.$$ [Halphen].

7. Покажите, что если

$$z=3xy-y^2+(y^2-2x)^{\frac{3}{2}},$$

то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

8. Докажите следующее развитие теоремы Эйлера. Если f — однородная функция степени m от x_1, x_2 и однородная степени n от y_1, y_2, то

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)-\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=$$
$$=(n-m)f.$$

9. Докажите, что если семейство интегральных кривых линейного диференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

пересекается линией $x=\xi$, то касательные в точках пересечения пересекаются в одной точке или параллельны.

Для кривых, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-\frac{1}{x^3},$$

покажите, что при изменении ξ геометрическое место точек пересечения касательных представляет собой прямую линию.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2·1. Точные уравнения первого порядка первой степени. Обыкновенное диференциальное уравнение первого порядка первой степени может быть выражено в форме уравнения в полных диференциалах

$$Pdx + Qdy = 0,$$

где P и Q — функции x и y и не содержат p. Если диференциал $Pdx + Qdy$ может быть выражен непосредственно, т. е. без умножения на какой-либо множитель в виде du, где u — функция x и y, то уравнение называется *точным*[1].

Если уравнение

$$Pdx + Qdy = 0$$

точное и имеет общий интеграл вида[2]

$$u = c,$$

то оба выражения для du, именно

$$Pdx + Qdy \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

должны быть тождественны, т. е.

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

если эквивалентное выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$ непрерывно. Следовательно *условие интегрируемости* (А) необходимо. Остается доказать, что это условие достаточно, т. е., если оно удовлетворено, то уравнение точное и его общий интеграл может быть найден в квадратурах.

---

[1] В советской литературе более употребителен термин „диференциальное уравнение в полных диференциалах“, однако, следуя оригиналу, будем писать точное уравнение. *Прим. ред.*

[2] Во всей этой главе c и C обозначают постоянные интегрирования. Любые другие значения этих букв будут очевидны из контекста.

Пусть $u\ (x,\ y)$ определяется выражением

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \varphi(y),$$

где x_0 — произвольная постоянная, а $\varphi\ (y)$ — функция y, которая является в данный момент также произвольной. Тогда $u = c$ будет полным интегралом

$$Pdx + Qdy = 0,$$

если

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

Первое условие удовлетворено; второе определяет $\varphi\ (y)$ следующим образом

$$Q\,(x,\ y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx + \varphi'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx + \varphi'(y)$$

$$= Q\,(x, y) - Q\,(x_0, y_,) + \varphi'(y),$$

следовательно

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q\,(x_0, y)\, dy,$$

где y_0 — произвольно.

Следовательно условие достаточно, потому что уравнение точное и имеет общий интеграл

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q\,(x_0, y)\, dy = c.$$

Постоянные x_0 и y_0 могут быть выбраны по желанию. Вообще имеется только одна произвольная постоянная, так как изменение x_0 или y_0 эквивалентно прибавлению постоянной к левой части интеграла. Произвольность очевидна в отношении y_0; что касается x_0, то она является следствием условия интегрируемости.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{2x - y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2}\, dy = 0.$$

Условие интегрируемости удовлетворено, поэтому общий интеграл будет

$$\int_{x_0}^{x} \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{2y+x_0}{x_0^2+y^2}\,dy = c.$$

Очевидно, преимущественным является условие $x_0 = 0$, так как второй интеграл содержит $\log y$, то y_0 может быть принят равным единице. Тогда

$$\int_0^x \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx + 2\int_1^y \frac{dy}{y} = c,$$

т. е.

$$\left[\log(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right]_{x=0}^{x=x} + 2\log y = c,$$

что может быть приведено к виду

$$\log(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} = c.$$

2·11. Разделение переменных. Частный случай точного уравнения получается, когда P является функцией одного x, а Q — функцией одного y. В этом случае вместо P можно написать X, а вместо Q — Y. Тогда говорят, что уравнение

$$Xdx + Ydy$$

содержит *разделяющиеся переменные*; его общий интеграл имеет вид

$$\int Xdx + \int Ydy = c.$$

Если P может быть представлено в виде произведения функций X от x и Y_1 от y, и аналогично Q в виде произведения X_1 на Y, то говорят, что переменные *разделяются*, так как уравнение

$$\text{(I)} \qquad XY_1dx + X_1Ydy = 0$$

может быть написано в форме

$$\text{(II)} \qquad \frac{X}{X_1}dx + \frac{Y}{Y_1}dy = 0.$$

Однако нужно отметить, что при делении уравнения на X_1Y_1 ряд решений теряется. Если, например, $x = a$ является корнем уравнения $X_1 = 0$, то оно даст решение для уравнения (I), но не обязательно для уравнения (II).

Пример:

$$(x^2+1)(y^2-1)\,dx + xydy = 0.$$

Переменные могут быть отделены следующим образом:

$$\frac{x^2+1}{x}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0.$$

Интегрируем

$$x^2+\log x^2+\log(y^2-1)=c$$

или если $c=\log C$, то

$$y^2=1+C\frac{e^{-x^2}}{x^2}.$$

Кроме того, действительными решениями данного уравнения являются $x=0$, $y=1$, $y=-1$. В общее решение входят только два последних решения.

2·12. Однородные уравнения. Если P и Q являются однородными функциями x и y одной и той же степени n, то уравнение может быть приведено подстановкой[1] $y=vx$ к уравнению с разделяющимися переменными. Так как

$$P(x,y)=x^n P(1,v),\quad Q(x,y)=x^n Q(1,v),$$

то уравнение

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

примет вид

$$\{P(1,v)+v\,Q(1,v)\}\,dx+x\,Q(1,v)\,dv=0$$

или

$$\frac{dv}{\varphi(v)}+\frac{dx}{x}=0,$$

где

$$\varphi(v)=v+\frac{P(1,v)}{Q(1,v)}.$$

Получаем решение вида

$$\int\frac{dv}{\varphi(v)}=\log\frac{c}{x}.$$

Пример:

$$(y^4-2x^3y)\,dx+(x^4-2xy^3)\,dy=0.$$

Пусть $y=vx$, тогда

$$(v^4+v)\,dx-(1-2v^3)\,x\,dv=0$$

или

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-2v^3}{v+v^4}\,dv$$

$$=\left(\frac{1}{v}-\frac{3v^2}{1+v^3}\right)dv,$$

откуда

$$\log x=\log v-\log(1+v^3)+\log c$$

или

$$x(1+v^3)=cv.$$

---

[1] Впервые введено Лейбницем в 1691 г.

Таким образом получим общий интеграл вида

$$x^3+y^3=cxy.$$

Если уравнение

$$Pdx+Qdy=0$$

является однородным и точным, то оно непосредственно интегрируется без приведения к квадратуре, при условии, что его степень однородности n не равна -1; его интеграл может быть записан в виде

$$Px+Qy=c.$$

Пусть $u=Px+Qy$, тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}\\&=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=(n+1)P,\end{aligned}$$

согласно теореме Эйлера (§ 1·232); аналогично пишем выражение для $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(n+1)Q.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\\&=(n+1)(Pdx+Qdy),\end{aligned}$$

поэтому

$$Pdx+Qdy=\frac{d(Px+Qy)}{n+1}.$$

Отсюда, если $n\neq-1$, то общий интеграл будет

$$Px+Qy=c.$$

Пример:

$$x(x^2+3y^2)dx+y(y^2+3x^2)dy=0.$$

Решение:

$$x^4+6x^2y^2+y^4=c.$$

При $n=-1$ интегрирование может быть приведено к квадратуре. Интересно отметить, что однородное уравнение

$$\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}=0$$

является точным, потому что условие интегрируемости, именно

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{Px+Qy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{Px+Qy}\right),$$

приводится к виду

$$Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

что верно, согласно теореме Эйлера, поскольку P и Q однородны и одинаковой степени. Таким образом любое однородное уравнение может быть сделано точным посредством введения *интегрирующего множителя* $1/(Px+Qy)$. Степень однородности этого точного уравнения равна -1, так что интегрирование однородного уравнения может быть вообще проведено в квадратурах.

Уравнение типа

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{Ax+By+C}{ax+by+c}\right),$$

где A, B, C, a, b, c — постоянные, причем $Ab-aB\neq 0$, может быть приведено к однородной форме при помощи линейных преобразований переменных. Пусть

$$x=h+\xi,\quad y=k+\eta,$$

где ξ, η — переменные, а h, k — постоянные, так что

$$Ah+Bk+C=0,$$
$$ah+bk+c=0.$$

Уравнение примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi}=F\left(\frac{A\xi+B\eta}{a\xi+b\eta}\right),$$

где F — однородная функция ξ, η нулевой степени. Постоянные h, k являются определенными, поскольку $Ab-aB\neq 0$.

Если $Ab-aB=0$, пусть η будет новой зависимой переменной, определяемой через

$$\eta=x+By/A=x+by/a,$$

тогда

$$\frac{d\eta}{dx}=1+\frac{b}{a}F\left(\frac{A\eta+C}{a\eta+c}\right).$$

Переменные опять разделяются.

Пример:

$$(3y-7x+7)\,dx+(7y-3x+3)\,dy=0.$$

Подстановка

$$x=\xi+1,\quad y=\eta$$

приводит это уравнение к однородному

$$(3\eta-7\xi)\,d\xi+(7\eta-3\xi)\,d\eta=0.$$

Преобразование $\eta=v\xi$ приводит его к виду

$$(7v-3)\,\xi dv+(7v^2-7)\,d\xi=0$$

или

$$\left(\frac{2}{v-1}+\frac{5}{v+1}\right)dv+\frac{7}{\xi}d\xi=0,$$

откуда

$$(v-1)^2(v+1)^5\xi^7=c,$$

где c — постоянная интегрирования, т. е.

$$(\eta-\xi)^2(\eta+\xi)^5+c.$$

Общий интеграл поэтому будет

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5=c.$$

2·13. Линейные уравнения первого порядка. Наиболее общим линейным уравнением первого порядка является уравнение типа

$$\frac{dy}{dx}+\varphi y=\psi,$$

где φ и ψ — функции одного x. Сначала рассмотрим однородное линейное уравнение[1]

$$\frac{dy}{dx}+\varphi y=0.$$

Его переменные разделяются поэтому

$$\frac{dy}{y}+\varphi dx=0,$$

а решение будет

$$y=ce^{-\int\varphi dx},$$

где c — постоянная.

Подставим теперь в неоднородное уравнение выражение

$$y=ve^{-\int\varphi dx},$$

где v — функция x, введенная вместо постоянной c. Уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dx}e^{-\int\varphi dx}=\psi,$$

откуда

$$v=C+\int\psi e^{\int\varphi dx}dx,$$

[1] Термин *однородное* прилагается к линейному уравнению, если оно не содержит члена, не зависящего от y и ее производных. Это применение термина необходимо различать от его применения в предшествующем параграфе, где уравнение (вообще нелинейное) называлось однородным, если P и Q были однородными функциями x и y одной и той же степени.

Решением общего линейного уравнения будет выражение

$$y = Ce^{-\int \varphi dx} + e^{-\int \varphi dx}\int \psi e^{\int \varphi dx}\, dx,$$

содержащее две квадратуры.

Принятый здесь метод нахождения решения уравнения,— рассматривая параметр или постоянную интегрирования c решения более простого уравнения как переменную и определяя ее таким образом, чтобы удовлетворилось более общее уравнение,— является частным случаем метода *изменения параметров* (вариации произвольных постоянных)[1].

Нужно отметить, что обшее решение линейного уравнения находится в линейной зависимости от постоянной интегрирования C. Диференциальное уравнение, полученное исключением C из уравнения

$$y = Cf(x) + g(x)$$

и производного уравнения

$$y' = Cf'(x) + g'(x),$$

линейно.

Если какое-либо частное решение линейного уравнения известно, то общее решение может быть получено одной квадратурой. Пусть y_1 будет решением, тогда соотношение

$$\frac{dy_1}{dx} + \varphi y_1 = \psi$$

удовлетворится тождественно. При помощи этой зависимости ψ может быть исключена из данного уравнения, которое будет иметь вид

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) + \varphi(y - y_1) = 0.$$

Это уравнение теперь однородно относительно $y - y_1$ и его решение имеет вид

$$y - y_1 = Ce^{-\int \varphi dx},$$

где C — постоянная интегрирования.

Если известны два отдельных частных решения, то общее решение может быть выражено непосредственно через них. Общее решение имеет вид

$$y = Cf(x) + g(x)$$

и можно получить любые два частных решения y_1 и y_2, если произвольной постоянной C придать частные значения C_1 и C_2.

[1] См. § 5-23. Применение этого метода для решения линейных уравнений было впервые введено Дж. Бернулли, (Acta Erud., 1697, стр. 113), но решение в квадратурах было известно Лейбницу несколькими годами раньше.

Таким образом получим

$$y_1 = C_1 f(x) + g(x),$$
$$y_2 = C_2 f(x) + g(x),$$

следовательно

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}.$$

Примеры.

(I) $$y' - ay = e^{mx} \; (a \text{ и } m \text{ — постоянные, } m \neq a).$$

Решением однородного уравнения

$$y' - ay = 0$$

будет $y = Ce^{ax}$. Пусть в первоначальном уравнении

$$y = ve^{ax},$$

где v — функция x, тогда

$$v'e^{ax} = e^{mx}$$

или

$$v = C + \frac{e^{(m-a)x}}{m-a}.$$

Таким образом общее решение примет вид

$$y = Ce^{ax} + \frac{e^{mx}}{m-a}.$$

(II) $$y' - ay = e^{ax}.$$

Решение:

$$y = Ce^{ax} + xe^{ax}.$$

(III) $$y' - \frac{2x}{x^2+1} y = 2x(x^2+1).$$

Решение:

$$y = C(x^2+1) + (x^2+1)^2.$$

(IV) $$y' \cos x + y \sin x = 1.$$

Решение:

$$y = C \cos x + \sin x.$$

2·14. Уравнения Бернулли и Якоби.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \varphi y = \psi y^n,$$

где φ и ψ — функции только x, называется *уравнением Бернулли*[1]. Оно может быть приведено к линейной форме путем замены зависимой переменной. Пусть

$$z = y^{1-n},$$

[1] James Bernoulli, Acta Erud. 1695, 553 (Opera 1, 663). Метод решения был найден Лейбницем, Acta Erud. 1696, 145 [Math. Werke, 5, 329].

тогда

$$\frac{dz}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

и следовательно, если данное уравнение переписать в виде

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + \varphi y^{1-n} = \psi,$$

то оно примет вид

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\varphi z = (1-n)\psi$$

и будет линейным относительно z.

Уравнение Якоби[1]

$$(a_1 + b_1 x + c_1 y)(xdy - ydx) - (a_2 + b_2 x + c_2 y)dy + \\ + (a_3 + b_3 x + c_3 y)dx = 0,$$

где коэфициенты a, b, c — постоянные, тесно связано с уравнением Бернулли. Произведем подстановку

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta,$$

где α, β — постоянные, которые необходимо определить, таким образом, чтобы сделать коэфициенты при $XdY - YdX$, dY и dX отделяющимися и однородными относительно X и Y. Когда эта подстановка будет произведена, то уравнение расположится так, чтобы коэфициент при $XdY - YdX$ был однородным и первой степени

$$(b_1X + c_1Y)(XdY - YdX) - \\ - \{A_2 + b_2X + c_2Y - \alpha(A_1 + b_1X + c_1Y) - A_1X\} dY + \\ + \{A_3 + b_3X + c_3Y - \beta(A_1 + b_1X + c_1Y) - A_1Y\} dX = 0,$$

где

$$A_r = a_r + b_r\alpha + c_r\beta \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Коэфициенты при dY и dX также будут однородными, если α и β так подобраны, что

$$A_2 - \alpha A_1 = 0, \quad A_3 - \beta A_1 = 0$$

или более симметрично, если

$$A_1 = \lambda, \quad A_2 = \alpha\lambda, \quad A_3 = \beta\lambda,$$

т. е. если

$$(\Lambda) \qquad a_1 - \lambda + b_1\alpha + c_1\beta = a_2 + (b_2 - \lambda)\alpha + c_2\beta = a_3 + b_3\alpha + \\ + (c_3 - \lambda)\beta = 0.$$

λ определяется кубическим уравнением

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2 - \lambda, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

[1] Jacobi, J. für Math. 24 (1842) 1 (Ges.Werke 4, 256) См. также уравнение Дарбу, § 2·21.

когда λ таким образом определена, α и β представляют собой решения любых двух уравнений (Λ).

Это уравнение может быть написано так

$$XdY - YdX - \Phi\left(\frac{Y}{X}\right)dY + \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)dX = 0.$$

Подставляя $Y = Xu$, приведем его к уравнению Бернулли

$$\frac{dX}{du} + U_1 X + U_2 x^2 = 0,$$

где U_1 и U_2 — функции одного u.

Ниже (§ 2·21) мы покажем, что если тремя корнями уравнения, определяющего λ, являются λ_1, λ_2 и λ_3 и все они существенно различны[1], то общее решение уравнения Якоби будет вида

$$U^{\lambda_2 - \lambda_3} V^{\lambda_3 - \lambda_1} W^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const},$$

где U, V, W — линейные выражения относительно x и y.

2 · 15. Уравнение Риккати. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \psi y^2 + \varphi y + \chi = 0,$$

где φ_2, φ и χ — функции x, называется *обобщенным уравнением Риккати*[2]. Оно отличается от предшествующих уравнений этого параграфа тем, что в общем случае оно не интегрируется в квадратурах.

Поэтому это уравнение определяет семейство трансцендентных функций, которые существенно отличаются от элементарных трансцендентных функций[3].

Если какое-либо частное решение $y = y_1$ известно, то общее решение может быть получено при помощи двух последовательных квадратур. Пусть

$$y = y_1 + z,$$

тогда уравнение будет

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + \psi(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + \varphi(y_1 + z) + \chi = 0,$$

---

[1] Случай, когда они не различны, рассмотрен Серре (Serret, Calc. Diff. et Int., 2, 431).

[2] Риккати [Riccati, Acta Erud. VIII (1724)], исследовал уравнение $y' + ay^2 = bx^m$, которое связывается обычно с его именем. Обобщенное уравнение было исследовано Даламбером (d'Alembert), см. § 12 · 51.

[3] Элементарными трансцендентными функциями называются функции, которые могут быть получены интегрированием алгебраических функций, и обратные этих функций. Так, логарифмическая функция определяется как $\int_1^x x^{-1}\,dx$; ее обратной является экспоненциальная функция. Из экспоненциальных функций рациональным процессом выводятся тригонометрические и гиперболические функции.

и, поскольку $y=y_1$ является его решением, оно приводится к виду

$$\frac{dz}{dx}+(2y_1\psi+\varphi)z+\psi z^2=0.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения Бернулли; оно приводится к линейному подстановкой

$$z=1/u,$$

после чего наше утверждение об интегрируемости доказано.

Пусть y_1, y_2, y_3 — три отдельных частных решения уравнения Риккати, а y — его общее решение. Тогда

$$u=\frac{1}{y-y_1},\quad u_1=\frac{1}{y_2-y_1},\quad u_2=\frac{1}{y_3-y_1}$$

удовлетворяют одному и тому же линейному уравнению и следовательно

$$\frac{u-u_1}{u_2-u_1}=C,$$

где C — постоянная. Если u, u_1 и u_2 выразить через y, y_1 и y_2, то это соотношение может быть написано в виде

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}=C\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}.$$

Отсюда видно, что общее решение уравнения Риккати может быть выражено через любые три отдельные частные решения, а также, что ангармоническое отношение любых четырех решений постоянно. Формула также показывает, что общее решение является рациональной функцией постоянной интегрирования. Любая функция типа

$$y=\frac{Cf_1+f_2}{Cf_3+f_4},$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — заданные функции x, а C — произвольная постоянная, удовлетворяет уравнению Риккати, что можно легко доказать, исключая C из выражения для y и его производного для y'.

Если ψ равно нулю, то уравнение Риккати может быть приведено к линейному уравнению; если ψ не равно нулю, то уравнение может быть преобразовано в линейное уравнение второго порядка. Пусть v — новая зависимая переменная, определяемая выражением

$$y=v/\psi,$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dx}+v^2+Pv+Q=0,$$

где

$$P=\varphi-\frac{\psi'}{\psi},\quad Q=\psi\chi.$$

Подстановкой

$$v=u'/u$$

приводим уравнение к искомой форме, именно

$$\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu=0.$$

В частности, первоначальное уравнение Риккати, именно

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m,$$

где a и b — постоянные, примет вид[1]

$$\frac{d^2u}{dx^2}-abx^m u=0.$$

2 · 16. Уравнение Эйлера. Весьма важными являются уравнения с разделяющимися переменными вида[2]

$$\frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}+\frac{dy}{Y^{\frac{1}{2}}}=0,$$

где

$$X=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

$$Y=a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3x+a_4.$$

Рассмотрим частное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,$$

решением которого является[3]

$$\arcsin x+\arcsin y=c.$$

Это уравнение имеет также решение

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

Поскольку, как будет показано в главе III, диференциальное уравнение имеет лишь одно явное решение, оба решения должны находиться между собой в определенной зависимости. Эта зависимость выражается уравнением

$$C=f(c).$$

Теперь пусть

$$x=\sin u,\quad y=\sin v,$$

---

[1] Решение этого уравнения может быть выражено в функциях Бесселя (§ 7 · 31).

[2] Euler, Inst. Calc. Int., 1, V, VI.

[3] Функция $\arcsin x$ определяется как $\int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$; $\sin x$ определяется как обратная $\arcsin x$, так что $\sin 0=0$; $\cos x$ определяется как $(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$, при условии, что $\cos 0=1$. Никакие другие свойства тригонометрических функций не используются.

Тогда

$$u + v = c,$$

$$\sin u \cos v + \sin v \cos u = f(c)$$

$$= f(u + v).$$

Пусть

$$v = 0,$$

тогда

$$\sin u = f(u),$$

следовательно

$$\sin u \cos v + \sin v \cos u = \sin(u + v).$$

Таким образом получим формулу сложения для синусоидальной функции.

Аналогично, диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - k^2x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{dy}{(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}(1 - k^2y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

имеет решение

$$\arg \operatorname{sn} x + \arg \operatorname{sn} y = c,$$

где $\arg \operatorname{sn} x$ — обратная эллиптическая функция Якоби[1] — определяется уравнением

$$\arg \operatorname{sn} x = \int_0^x \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}(1 - k^2t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Пусть

$$x = \operatorname{sn} u, \ y = \operatorname{sn} v,$$

тогда

$$u + v = c.$$

Второе и эквивалентное решение может быть найдено следующим образом: согласно определению

$$\frac{dx}{du} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - k^2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

следовательно

$$\frac{d^2x}{du^2} = -(1 + k^2)x + 2k^2x^3.$$

Аналогично

$$\frac{dy}{du} = -\frac{dy}{dv} = -(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}(1 - k^2y^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dv^2} = -(1 + k^2)y + 2k^2y^3,$$

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XXII.

откуда следует, что

$$x\frac{d^2y}{du^2}-y\frac{d^2x}{du^2}=2k^2xy(y^2-x^2),$$

$$x^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2-y^2\left(\frac{dx}{du}\right)^2=(x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2).$$

Следовательно

$$\frac{x\frac{d^2y}{du^2}-y\frac{d^2x}{du^2}}{x\frac{dy}{du}-y\frac{dx}{du}}=-\left(x\frac{dy}{du}+y\frac{dx}{du}\right)\frac{2k^2xy}{1-k^2x^2y^2}.$$

Это уравнение непосредственно интегрируется; получим решение вида

$$\log\left(x\frac{dy}{du}-y\frac{dx}{du}\right)=\mathrm{const}+\log(1-k^2x^2y^2)$$

или

$$x\frac{dy}{dv}+y\frac{dx}{du}=C(1-k^2x^2y^2),$$

т. е.

$$\operatorname{sn}u\operatorname{sn}'v+\operatorname{sn}v\operatorname{sn}'u=f(c)(1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v).$$

Полагая $v=0$, найдем, что $f(u)=\operatorname{sn}u$, следовательно

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{sn}'v+\operatorname{sn}v\operatorname{sn}'u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},$$

что является формулой сложения для эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn}u$.

Тот же процесс интегрирования может быть приложен и к общему уравнению Эйлера[1]. В частности, следует отметить, что при $a_0=0$ линейное преобразование приводит это уравнение к виду

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}+\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}=0.$$

Если $\wp(z)$—эллиптическая функция Вейерштрасса, определяемая уравнением

$$z=\int_{\wp(z)}^{\infty}(4t^3-g_2t-g_3)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

где $x=\wp(u)$, $y=\wp(v)$,—то общим решением уравнения будет

$$u+v=c$$

или

$$\left\{(4x^3+g_2x-g_3)^{\frac{1}{2}}-(4y^3-g_2y-g_3)^{\frac{1}{2}}\right\}^2=$$
$$=(x-y)^2(c+4x+4y).$$

[1] Cayley, Elliptic Functions, XIV.

Таким образом можно показать, что формула сложения для $\wp$ — функции имеет вид

$$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2.$$

2·2. Интегрирующий множитель. Пусть

$$Pdx + Qdy = 0$$

будет диференциальным уравнением, не являющимся точным. Теоретически метод интегрирования такого уравнения состоит в определении функции $\mu(x, y)$ так, чтобы выражение

$$\mu(Pdx + Qdy)$$

было полным диференциалом du. Когда μ найдено, проблема приводится к квадратуре.

Возникает вопрос, существуют ли интегрирующие множители. На основании допущения, что уравнение имеет только одно решение [1], которое зависит от одной произвольной постоянной, докажем, что *существует бесконечное множество интегрирующих множителей.*

Пусть общим решением будет

$$\varphi(x, y) = c,$$

где c — произвольная постоянная, тогда его диференциал будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0$$

или

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0.$$

Поскольку

$$\varphi(x,y) = c$$

является общим решением

$$Pdx + Qdy = 0,$$

соотношение

$$\frac{\varphi_x}{P} = \frac{\varphi_y}{Q}$$

должно обратиться в тождество, откуда следует, что функция μ существует и имеются соотношения

$$\varphi_x = \mu P, \quad \varphi_y = \mu Q.$$

Следовательно

$$\mu(Pdx + Qdy) = d\varphi.$$

[1] Это допущение будет доказано в следующей главе.

Пусть $F(\varphi)$ будет любой функцией φ, тогда выражение

$$\mu F(\varphi)\{Pdx + Qdy\} = F(\varphi)\,d\varphi$$

точное. Следовательно, если μ — любой интегрирующий множитель, приводящий к решению $\varphi = c$, то $\mu F(\varphi)$ также будет интегрирующим множителем. Поскольку $F(\varphi)$ является произвольной функцией φ, существует бесконечная последовательность интегрирующих множителей.

Так как уравнение

$$\mu(Pdx + Qdy) = 0$$

точное, то интегрирующий множитель удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

или

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Таким образом μ удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Непосредственное определение μ зависит от уравнения более сложного характера, чем рассматриваемое обыкновенное линейное уравнение. Однако нужно отметить, что любое частное решение диференциального уравнения в частных производных (не обязательно общее) достаточно для нахождения интегрирующего множителя. Более того, во многих частных случаях диференциальное уравнение в частных производных имеет очевидное решение, которое дает требуемый интегрирующий множитель.

Предположим, что μ — функция одного x, тогда

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Следовательно необходимо, чтобы правый член этого уравнения не зависел от y. В этом случае μ получается непосредственно квадратурой. Предположим также, что Q равно единице, тогда P должно быть линейной функцией y. Таким образом уравнение примет форму

$$dy + (py - q)\,dx = 0,$$

где p и q — функции одного x; поэтому уравнение линейно; интегрирующий множитель определяется уравнением

$$\frac{d\mu}{dx} = p\mu$$

и равен

$$\mu = e^{\int p\,dx}$$

(см. § 2 · 13).

Примером уравнения, в котором интегрирующий множитель может быть легко получен, является

$$\alpha x dy + \beta y dx + x^m y^n (axdy + bydx) = 0.$$

Рассмотрим сначала выражение $\alpha x dy + \beta y dx$; интегрирующий множитель равен $x^{\beta-1} y^{\alpha-1}$, и так как

$$x^{\beta-1} y^{\alpha-1}(\alpha x dy + \beta y dx) = d(x^\beta y^\alpha),$$

то более общее выражение

$$x^{\beta-1} y^{\alpha-1} \Phi(x^\beta y^\alpha)$$

также будет интегрирующим множителем. Аналогично

$$x^{b-m-1} y^{a-n-1} F(x^b y^a)$$

является интегрирующим множителем для $x^m y^n (axdy + bydx)$. Если Φ и F могут быть определены так, чтобы

$$x^{\beta-1} y^{\alpha-1} \Phi(x^\beta y^\alpha) = x^{b-m-1} y^{a-n-1} F(x^b y^a),$$

то интегрирующий множитель первоначального уравнения может быть найден. Пусть

$$\Phi(z) = z^\rho, \quad F(z) = z^r,$$

тогда $x^\lambda y^\mu$ будет интегрирующим множителем, если

$$\lambda = (\rho + 1)\beta - 1 = (r+1)b - m - 1,$$
$$\mu = (\rho + 1)\alpha - 1 = (r+1)a - n - 1.$$

Эти уравнения определяют ρ и r, следовательно и λ и μ, если $a\beta - b\alpha \neq 0$. С другой стороны, если $a = k\alpha$, $b = k\beta$, то первоначальное уравнение примет вид

$$(1 + kx^m y^n)(\alpha x dy + \beta y dx) = 0.$$

Получим интегрирующий множитель вида

$$\frac{x^{\beta-1} y^{\alpha-1}}{1 + kx^m y^n}.$$

2·21. Уравнение Дарбу. Дарбу исследовал следующий тип уравнения[1]

$$Ldy + Mdx + N(xdy - ydx) = 0,$$

где L, M, N — полиномы относительно x и y степени не выше m.

Покажем, что если некоторое число частных решений формы

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ — неприводимый полином, — известно, то уравнение может быть проинтегрировано.

---

[1] Darboux, Bull. Sc. Math. (2), 2 (1878), 72.

Пусть общее решение имеет вид

$$u(x, y) = \text{const},$$

тогда данное уравнение эквивалентно

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0,$$

поэтому

$$L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial u}{\partial y} - N\left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Заменим x на $\frac{x}{z}$ и y на $\frac{y}{z}$, где z — третья независимая переменная, тогда $u\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ будет однородной рациональной функцией x, y, z степени нуль и, согласно теореме Эйлера, (§ 1 · 232)

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Более того, $u\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ удовлетворяет соотношению

$$A(u) \equiv L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial u}{\partial y} + N \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

где L, M, N — однородные полиномы от x, y, z степени m.

Эти соотношения имеют место вследствие того, что

$$u(x, y) = \text{const}$$

является решением данного уравнения; $u\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ однородно степени нуль и удовлетворяет соотношению $A(u) = 0$.

Теперь пусть

$$f(x, y) = 0$$

будет любым частным решением, где $f(x, y)$ — неприводимый полином степени h, и пусть

$$g(x, y, z) = z^h f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Тогда, поскольку g однородно и степени h,

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = hg.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A(g) &= L \frac{\partial g}{\partial x} + M \frac{\partial g}{\partial y} + N \frac{\partial g}{\partial z} \\ &= z^h \left(L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z}\right) + hz^{h-1} fN \\ &= hz^{-1} Ng, \end{aligned}$$

поскольку решением является $f=0$. Это соотношение может быть написано в форме

$$A(g)=Kg,$$

так как $A(g)$ — полином степени $m+h-1$, g — полином степени h, а K — полином степени $m-1$.

Оператор A имеет следующее свойство: если F — любая функция $u, v, w, \ldots$, где $u, v, w, \ldots$ являются функциями x, y, z, то

$$A(F)=\frac{\partial F}{\partial u}A(u)+\frac{\partial F}{\partial v}A(v)+\frac{\partial F}{\partial w}A(w)+\ldots$$

Пусть

$$f_1(x, y)=0,\ f_2(x, y)=0, \ldots, f_p(x, y)=0$$

будут частными решениями данного уравнения, где $f(x\ y)$ — неприводимый полином степени h_r. Пусть

$$g_r(x, y, z)=z^{h_r}f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \qquad (r=1, 2, \ldots, p)$$

Рассмотрим функцию

$$u(x, y, z)=\prod_{r=1}^{p}(g_r)^{\alpha_r},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — искомые постоянные, тогда

$$\begin{aligned} A(u) &= \sum_{r=1}^{p}\frac{\partial u}{\partial g_r}A(g_r) \\ &= \sum \alpha_r g_1^{\alpha_1}\ldots g_r^{\alpha_r-1}\ldots g_p^{\alpha_p}\ldots K_r g_r \\ &= u\sum \alpha_r K_r, \end{aligned}$$

где K_r — полином степени $m-1$ для любого значения r. Аналогично $u(x, y, z)$ является полиномом от x, y, z степени $h_1\alpha_1$, $h_2\alpha_2+\ldots+h_p\alpha_p$. Если $u(x, y, z)$ должно дать искомое решение при $z=1$, оно должно быть полиномом от x, y, z нулевой степени, а также должно удовлетворять соотношению $A(u)=0$, откуда

$$h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\ldots+h_p\alpha_p=0,$$

$$K_1\alpha_1+K_2\alpha_2+\ldots+K_p\alpha_p=0.$$

Каждый полином K_r содержит не больше $\frac{1}{2}m(m+1)$ членов, так что последнее уравнение, являясь тождеством относительно x, y, z, эквивалентно не больше, чем $\frac{1}{2}m(m+1)$ соотношениям между постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Следовательно, между p

неизвестными постоянными α имеется не больше

$$\frac{1}{2}m(m+1)+1$$

уравнений. Поэтому для этих постоянных могут быть даны соответствующие значения, если число p превосходит число уравнений, т. е. если

$$p \geqslant \frac{1}{2}m(m+1)+2.$$

Если $\frac{1}{2}m(m+1)+2$ *частных решений известны, то общее решение может быть получено без квадратур.*

Если $p=\frac{1}{2}m(m+1)+1$, а дискриминант уравнения равен нулю, то мы получим тот же результат. Пусть $p=\frac{1}{2}m(m+1)+1$, а дискриминант не равен нулю. В этом случае постоянные определяются уравнениями

$$h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\ldots+h_p\alpha_p=-m-2,$$

$$K_1\alpha_1+K_2\alpha_2+\ldots+K_p\alpha_p=-\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}.$$

Мы теперь имеем $\frac{1}{2}m(m+1)+1$ неоднородных уравнений, определяющих постоянные α. Это определение постоянных приводит к образованию функции $u(x, y, z)$, так что

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=-(m+2)u,$$

$$A(u)\equiv L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+N\frac{\partial u}{\partial z}=-\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)u.$$

Исключая из этих уравнений $\frac{\partial u}{\partial z}$, получим

$$\left\{L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)u\right\}z-\left\{x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+(m+2)u\right\}N=0.$$

Но, поскольку N однородно и степени m, то

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}+z\frac{\partial N}{\partial z}=mN,$$

следовательно, исключая $\frac{\partial N}{\partial z}$, получим

$$(Lz-Nx)\frac{\partial u}{\partial x}+(Mz-Ny)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(z\frac{\partial L}{\partial x}+z\frac{\partial M}{\partial y}-x\frac{\partial N}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-y\frac{\partial N}{\partial y}-2N\right)u=0.$$

Пусть $z = 1$, тогда $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$(L - Nx)\frac{\partial u}{\partial x} + (M - Ny)\frac{\partial u}{\partial y} + \left\{\frac{\partial (L - Nx)}{\partial x} + \frac{\partial (M - Ny)}{\partial y}\right\} u = 0.$$

Но это точно соответствует условию, что $u(x, y)$ должно быть интегрирующим множителем для уравнения

$$Ldy + Mdx + N(xdy - ydx) = 0.$$

Следовательно если $\frac{1}{2}m(m+1)+1$ частных решений известны, то интегрирующий множитель может быть найден.

Вернемся к уравнению Якоби (§ 2·14)

$$(a_1 + b_1 x + c_1 y)(xdy - ydx) - (a_2 + b_2 x + c_2 y)dy +$$
$$+ (a_3 + b_3 x + c_3 y)\, dx = 0;$$

в этом случае $m = 1$. Уравнение имеет решение линейной формы

$$\alpha x + \beta y + \gamma = \text{const}.$$

$$A(f) \equiv (a_2 z + b_2 x + c_2 y)\frac{\partial f}{\partial x} + (a_3 z + b_3 x + c_3 y)\frac{\partial f}{\partial y} +$$
$$+ (a_1 z + b_1 x + c_1 y)\frac{\partial f}{\partial z} = \lambda f,$$

где λ — постоянная, а $f = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Это приводит к трем уравнениям между α, β, γ, λ, именно

$$\gamma(a_1 - \lambda) + \alpha a_2 + \beta a_3 = 0,\ \gamma b_1 + \alpha(b_2 - \lambda) + \beta b_3 = 0,\ \gamma c_1 + \alpha c_2 +$$
$$+ \beta(c_3 - \lambda) = 0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2 - \lambda, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Допустим, что это уравнение имеет три разных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которым соответствуют три значения f, именно U, V, W, тогда

$$U^i V^j W^k = \text{const}$$

будет общим решением при z равном единице, если

$$i + j + k = 0,$$
$$\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = 0.$$

Достаточно взять $i = \lambda_2 - \lambda_3$, $j = \lambda_3 - \lambda_1$, $k = \lambda_1 - \lambda_2$. Общее решение будет иметь вид

$$U^{\lambda_2 - \lambda_3} V^{\lambda_3 - \lambda_1} W^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{const}.$$

2·3. Ортогональные траектории. Уравнение

$$\Phi(x, y, c) = 0,$$

где c — параметр, представляет семейство плоских кривых. С этим семейством кривых связано второе семейство, именно, семейство *ортогональных траекторий* или кривых, пересекающих каждую кривую данного семейства под прямым углом. Возвращаясь к случаю, приведенному в § 1·4, первое семейство кривых можно рассматривать, как силовые линии данного плоского магнитного или электростатического поля. Семейство ортогональных траекторий будет тогда представлять эквипотенциальные линии в данной плоскости.

Пусть

$$F(x, y, p) = 0$$

будет диференциальным уравнением данного семейства кривых; оно определяет градиент p любой кривой этого семейства, проходящей через точку (x, y). Градиент ϖ ортогональной кривой через (x, y) связан с p соотношением

$$p\varpi = -1,$$

следовательно диференциальное уравнение семейства ортогональных кривых будет иметь вид

$$F\left(x, y, -\frac{1}{p}\right) = 0.$$

Так как диференциальное уравнение данного семейства получается исключением c из двух уравнений

$$\Phi = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

то диференциальное уравнение ортогональных траекторий образуется исключением c из уравнений

$$\Phi = 0,\ p\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Примеры.

(I) Семейство парабол

$$y^2 = 4cx,$$

где c — параметр, — представляет собой интегральные кривые диференциального уравнения

$$2xp = y.$$

Следовательно диференциальное уравнение ортогональных траекторий имеет вид

$$2x + py = 0,$$

а сами траектории являются кривыми

$$2x^2 + y^2 = c^2;$$

они составляют семейство подобных эллипсов, оси которых расположены вдоль координатных осей.

(II) Семейство конфокальных конических сечений

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1,$$

где λ — параметр, — является интегральными кривыми диференциального уравнения

$$(x+py)(y-px)+(a^2-b^2)p=0.$$

Это уравнение не изменяется при подстановке $-p^{-1}$ вместо p, следовательно данное семейство образуется взаимно ортогональными кривыми.

2·31. Изогональные траектории. Изогональной траекторией называется кривая, пересекающая кривые семейства под некоторым определенным углом. Пусть этот угол равен $\operatorname{arc\,tg} m$, тогда, если p и $\tilde{\omega}$ соответственно представляют градиенты кривой данного семейства и траектории в точке их пересечения, то

$$\tilde{\omega}=\frac{p-m}{1+mp}.$$

Если диференциальное уравнение данного семейства имеет вид

$$F(x, y, p)=0,$$

то диференциальное уравнение семейства изогональных кривых будет

$$F\left(x, y, \frac{p-m}{1+mp}\right)=0.$$

Пример. Рассмотрим семейство концентрических окружностей,

$$x^2+y^2=c^2;$$

их диференциальное уравнение имеет вид

$$x+yp=0.$$

Семейство кривых, пересекающих окружности под углом $\operatorname{arc\,tg} m$, дается поэтому уравнением

$$x+\frac{p-m}{1+mp}y=0$$

или

$$(mx+y)p+x-my=0.$$

Это уравнение однородно и дает решение вида

$$\log\sqrt{x^2+y^2}+m\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\text{const}.$$

В полярных координатах уравнение траектории может быть написано так

$$r=Ce^{m\theta};$$

следовательно, кривые являются спиралями.

2 · 32. Конформное отображение поверхности на плоскость. Другим важным приложением диференциальных уравнений первого порядка является их применение для конформного отображения алгебраической поверхности на плоскость. Действительная квадратичная форма

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 \qquad (EG - F^2 \neq 0)$$

представляет собой элемент поверхности. Поскольку она существенно положительна, ее линейные множители

$$adu + bdv, \; a'du + b'dv$$

таковы, что a и b являются комплексными функциями u и v, а a' и b' — соответственно комплексными сопряженными функциями.

Пусть $\mu(u, v)$ будет интегрирующим множителем для $adu + bdv$, тогда сопряженный множитель μ' будет интегрирующим множителем для $a'du + b'dv$.

Если

$$\mu\,(adu + bdv) = dV, \; \mu'\,(a'du + b'dv) = dV',$$

то V и V' будут комплексными сопряженными функциями и

$$\mu\mu'\,dS^2 = dVdV'.$$

Определим x и y как новые переменные уравнений

$$V = x + iy, \; V' = x - iy,$$

и пусть

$$\lambda^2 = \mu\mu',$$

тогда

$$dS^2 = \lambda^2\,(dx^2 + dy^2)$$
$$= \lambda^2\,ds^2.$$

Следовательно поверхность (u, v) может быть конформно отображена на плоскость (x, y)[1].

Пример. Рассмотрим отображение сферы

$$dS^2 = a^2\,du^2 + a^2 \sin^2 u\,dv^2$$

на плоскость

$$dS^2 = a^2\,(du + i \sin u\,dv)\,(du - i \sin u\,dv)$$
$$= a^2 \sin^2 u\,(\operatorname{cosec} u\,du + idv)\;(\operatorname{cosec} u\,du - idv).$$

Пусть

$$\operatorname{cosec} u\,du = dy, \; dv = dx,$$

т. е.

$$y = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,u, \; x = v,$$

тогда

$$dS^2 = 4a\;\operatorname{sech}^2 y\,(dx^2 + dy^2).$$

---

[1] Общую теорию конформных отображений см. Forsyth, Theory of Functions.

Это соответствие между сферой и плоскостью называется проекцией Меркатора[1]. Меридианы на сфере представляются линиями, параллельными оси y на плоскости, а параллели широты — линиями, параллельными оси x. Вся сфера отображается на полосу плоскости, лежащую между $x=-\pi$ и $x=+\pi$. Любая прямая линия на плоскости представляется *локсодромической кривой* на сфере, т. е. кривой, пересекающей все меридианы под одним углом.

2.4. Уравнения первого порядка, не первой степени. Уравнение первого порядка степени m может быть написано в виде

$$(A)\quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)^m + P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + P_{m-1}\frac{dy}{dx} + P_m = 0,$$

где $P_1, \ldots, P_m$ — функции x и y. Теоретически уравнение может быть разложено на множители

$$\left(\frac{dy}{dx} - p_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_2\right)\ldots\left(\frac{dy}{dx} - p_m\right) = 0,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — функции x и y.

Пусть

$$\varphi_r(x, y, c_r) = 0$$

будет общим решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} - p_r = 0;$$

оно является также решением данного уравнения. Если

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

решение данного уравнения, то оно должно удовлетворять одному из уравнений

$$\frac{dy}{dx} - p_r = 0. \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Отсюда следует, что любое решение (A) содержится в решении

$$\varphi_1(x, y, c)\,\varphi_2(x, y, c)\ldots\varphi_m(x, y, c) = 0,$$

которое является общим решением. Имеющаяся произвольная постоянная c достаточна для полного обобщения, потому что частное решение определяется одним из уравнений типа

$$\varphi_r(x, y, c) = 0,$$

где c имеет любое численное значение.

Пример:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (1 + y^2) = 0.$$

---

[1] Гергард Кремер (Gerhard Kremer, по латыни Mercator) опубликовал свою карту мира в 1538 г. Основные математические принципы были впервые объяснены Эдвардом Райтом (Edward Wright) в 1594 г.

После разложения на множители уравнение примет вид

$$\left\{\frac{dy}{dx}-\sqrt{1+y^2}\right\}\left\{\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+y^2}\right\}=0,$$

а оба множителя дают решения

$$y=\operatorname{sh}(c\pm x),$$

где c — постоянная; следовательно общее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{4}(e^{c+x}-e^{-c-x})(e^{c-x}-e^{-c+x}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2c}+e^{-2c}-e^{2x}-e^{-2x}) \\ &= \frac{1}{2}(C-\operatorname{ch}2x), \end{aligned}$$

где: $C=\operatorname{ch}2c$.

2 · 41. Геометрическая трактовка. Диференциальное уравнение

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

можно рассматривать и с геометрической точки зрения. Заменим $\frac{dy}{dx}$ на z и будем рассматривать z как третью прямоугольную координату в пространстве. Тогда уравнение

$$F(x,y,z)=0$$

будет представлять поверхность S.

Пусть

$$y=\varphi(x)$$

будет любым решением диференциального уравнения, тогда два уравнения

$$y=\varphi(x),\ z=\varphi'(x)$$

будут представлять пространственную кривую Γ, которая, поскольку

$$F\{x,\varphi(x),\ \varphi'(x)\}=0,$$

лежит на поверхности S. Решений диференциального уравнения, которые соответствовали бы каждой кривой, лежащей на S, нет, — они соответствуют лишь тем кривым, во всех точках которых удовлетворяется диференциальное соотношение

$$dy-z\,dx=0.$$

Пусть

$$x=x(t),\ y=y(t), z=z(t)$$

будет параметрическим представлением кривой Γ на S, для которой соотношение

$$dy-z\,dx=0$$

удовлетворено. Проекцией Γ на плоскость (x, y) будет кривая C

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

или

$$y = \varphi(x).$$

Поскольку во всех точках кривой Γ уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

принимает вид

$$F\{x, \varphi(x), \varphi'(x)\} = 0,$$

кривая C или

$$y = \varphi(x)$$

будет интегральной кривой уравнения

$$F(x, y, y') = 0.$$

Пусть параметрическим изображением поверхности S будет

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ z = h(u, v),$$

тогда соотношение

$$dy - z dx = 0$$

примет вид

$$\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv - h\left\{\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v}\right\} dv = 0$$

или

$$\frac{dv}{du} = k(u, v).$$

Любое решение этого диференциального уравнения представляет собой зависимость между u и v, которая определяет кривую Γ на поверхности S так, что проекция этой кривой на плоскость (x, y) является интегральной кривой диференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение, которое может быть написано в виде

$$y - g(x, p) = 0.$$

Соответствующая поверхность S может быть параметрически представлена в виде

$$x = x,\ y = g(x, p),\ z = p,$$

и соотношение $dy - z dx = 0$ примет вид

$$p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} p'.$$

Это соответствует диференциальному уравнению вида

$$\frac{dp}{dx} = k(x, p),$$

общим решением которого будет

$$l(x, p, c) = 0,$$

тогда интегральные кривые будут проекциями на плоскость (x, y) пересечения поверхности

$$y - g(x, z) = 0$$

с семейством цилиндрических поверхностей

$$l(x, z, c) = 0$$

следовательно, если исключить p из двух уравнений

$$y = g(x, p), \ l(x, p, c) = 0,$$

получим общее решение данного уравнения.

2·42. Уравнения, в которые x или y явно не входят. Если какое-либо из уравнений

$$F(x, p) = 0, \ F(y, p) = 0$$

может быть решено относительно p, то его можно проинтегрировать в квадратурах. Иногда уравнение легче решить относительно x (или y). Пусть решение имеет вид

$$x = f(p),$$

тогда, диференцируя по y,

$$\frac{1}{p} = f'(p) \frac{dp}{dy},$$

откуда

$$y = c + \int pf'(p)\, dp$$
$$= c + g(p),$$

следовательно уравнения

$$x = f(p), \ y = c + g(p)$$

можно рассматривать как параметрическое представление решения. Решение можно получить исключением p из обоих уравнений.

Если уравнение не содержит x, то его нужно решить относительно y, а затем диференцировать по x. Решение получится в параметрической форме

$$y = f(p), \ x = c + g(p),$$

где

$$g(p) = \int p^{-1} f'(p)\, dp.$$

Более общее уравнение

$$F(x, p) = 0$$

можно выразить параметрически в виде

$$x = u(t), \ p = v(t),$$

тогда, диференцируя по t,

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dy}{dt} = u'(t),$$

откуда

$$y = c + \int v(t)\,u'(t)\,dt.$$

Решение получится путем исключения t из выражений для x и y. Уравнение

$$F(y,\ p) = 0,$$

которое может быть выражено в форме

$$y = u(t),\ \ p = v(t),$$

решается исключением t из

$$y = u(t) \ \text{ и } \ x = c + \int \frac{u'(t)}{v(t)}\,dt.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$p^3 - p^2 + y^2 = 0.$$

Это уравнение может быть представлено параметрически в виде

$$y = t - t^3,\ \ p = 1 - t^2.$$

Диференцируя первое уравнение по t, получим

$$p\frac{dx}{dt} = 1 - 3t^2,$$

откуда

$$x = c + \int \frac{1-3t^2}{1-t^2}\,dt = c + 3t + \log\frac{t-1}{t+1}.$$

Таким образом x и y могут быть представлены в функциях параметра t.

2·43. Уравнения, однородные относительно x **и** y**.** Однородное уравнение степени m относительно x, y может быть написано в виде

$$x^m F\left(\frac{y}{x},\ p\right) = 0.$$

Если оно решается относительно p, то могут образоваться уравнения типа

$$p = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

уже рассмотренные в § 2·12. Следовательно этот случай не представляет для нас ничего нового. Рассмотрим случай, в котором уравнение может быть решено относительно $\frac{y}{x}$.

Так

$$\frac{y}{x} = f(p)$$

или

$$y = xf(p).$$

Диференцируя это уравнение по x, получим

$$p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Пусть p будет независимой переменной, тогда в этом уравнении переменные разделятся и оно будет иметь решение

$$\log cx = \int \frac{f'(p)\,dp}{p - f(p)}$$

или

$$cx = g(p).$$

Эти совместные уравнения

$$y = xf(p), \quad cx = g(p)$$

дают общее решение уравнения.

Пример:

$$y = yp^2 + 2px.$$

Решим это уравнение относительно x

$$2x = y\left(\frac{1}{p} - p\right);$$

диференцируя по y, получим

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} - p - y\left(\frac{1}{p^2} + 1\right)\frac{dp}{dy}$$

или

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y},$$

откуда

$$py = c.$$

Исключая p из первоначального уравнения, получим искомое решение

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

2 44. **Уравнения линейные относительно x и y.** Общим типом уравнения, решение которого может быть получено в параметрической форме диференцированием, является

$$y = x\varphi(p) + \psi(p).$$

Производное уравнение имеет вид

$$p = \varphi(p) + \{x\varphi'(p) + \psi'(p)\}\frac{dp}{dx}.$$

Если x рассматривать как зависимую переменную, а p как независимую, то при $p - \varphi(p) \neq 0$ уравнение может быть написано в виде

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

и будет линейным уравнением в обычном смысле. Его решения содержат две квадратуры; пусть решение будет

$$x = cf(p) + g(p),$$

тогда из первоначального уравнения можно исключить x и получить выражение для y в виде

$$y = cf_1(p) + g_1(p);$$

следовательно общее решение может быть выражено параметрически через p.

Рассмотрим теперь частные значения p, например, p_1, $p_2, \ldots$, для которых

$$p - \varphi(p) = 0;$$

для этих значений p

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

Таким образом возникает некоторый ряд изолированных интегральных кривых вида

$$y = x\varphi(p_1) + \psi(p_1).$$

Они представляют собой прямые линии, так что, если интегральная кривая общего семейства встречается с одной из них, то они будут иметь общую точку перегиба. Прямые линии дают пример особых решений, т. е. решений уравнения, не входящих в общее семейство интегральных кривых, которые не могут быть получены из общего решения путем придания специального значения постоянной интегрирования.

Пример:

$$y = 2px - p^2.$$

Производное уравнение имеет вид

$$p = 2p + 2(x - p)\frac{dp}{dx},$$

откуда, если $p \neq 0$,

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 2.$$

Решение этого линейного уравнения имеет вид

$$x = \frac{c}{p^2} + \frac{2}{3}p,$$

которое вместе с первоначальным уравнением дает искомое решение. С другой стороны, при $p = 0$, получим решение

$$y = 0.$$

2·45. Уравнение Клеро. Уравнение Клеро

$$y = px + \psi(p)$$

[1] Clairaut, Hist. Acad., Paris (1734), 209

не входит в класс уравнений, рассмотренных в предыдущем параграфе, потому что в принятых обозначениях

$$\varphi(p) = p$$

тождественно, следовательно, метод не дает требуемых результатов.

Производное уравнение имеет вид

$$p = p + \{x + \psi'(p)\} \frac{dp}{dx}$$

и удовлетворяется при $p = c$ (постоянной) или

$$x + \psi'(p) = 0.$$

Значение $p = c$ приводит к общему решению

$$y = cx + \psi(c).$$

Далее мы получим частное решение посредством исключения p из уравнений

$$y = px + \psi(p), \; x + \psi'(p) = 0.$$

Оно не содержит произвольных постоянных и не является частным случаем общего решения, следовательно оно будет особым решением.

Известно, что огибающая семейства прямых линий

$$y = cx + \psi(c)$$

получается путем исключения c из этого уравнения и из уравнения

$$0 = x + \psi'(c)$$

и идентична кривой, дающей особое решение. Следовательно в случае уравнения Клеро особое решение представляет огибающую семейства интегральных кривых.

Семейство касательных к кривой

$$y = f(x)$$

удовлетворяет уравнению формы Клеро, так как, если

$$y = ax + \beta$$

является касательной, то

$$ax + \beta = f(x), a = f'(x).$$

Исключая x из этих уравнений, получим соотношение

$$\beta = \psi(\alpha)$$

поскольку на касательной $a = p$ имеем

$$y = px + \psi(p).$$

Пример:

$$y = px + 1/p.$$

Диференцируя, получим

$$p = p + (x - 1/p^2)\frac{dp}{dx},$$

откуда или $p = c$, что дает общее решение

$$y = cx + 1/c$$

или

$$p^2 = 1/x.$$

Особое решение получится путем исключения p из

$$p^2 = 1/x \text{ и } y = px + 1/p$$

и равно

$$y^2 = 4x.$$

2·5. **Принцип двойственности (дуальности).** Существует преобразование, найденное Лежандром (Legendre), при помощи которого между двумя уравнениями первого порядка может быть установлена двойственная зависимость. Пусть X и Y будут новыми переменными, определяемыми соотношениями

$$X = p, \ Y = xp - y$$

и пусть

$$P = \frac{dY}{dX}.$$

Полагая, что $\frac{dp}{dx} \neq 0$, получим

$$dX = dp, \ dY = xdp + pdx - dy$$
$$= xdp$$

следовательно

$$P = x.$$

Аналогично

$$y = xp - Y$$
$$= Xp - Y.$$

Таким образом преобразования

$$X = p, \ Y = xp - y$$

эквивалентны

$$x = P, \ y = XP - Y,$$

следовательно они находятся в обратной зависимости друг к другу[1].

При подстановке любое из уравнений

$$F(x, y, p) = 0, \ F(P, XP - Y, X) = 0$$

может быть преобразовано в другое; в этом смысле между ними

[1] Если (x, y) и (X, Y) рассматривать как точки в плоскости переменных u, v, то геометрическое место точек (x, y) будет полярно-инверсным геометрическим местом точек (X, Y) относительно параболы $u^2 = 2v$, и наоборот.

существует двойственная зависимость. Если одно из этих уравнений может быть проинтегрировано, другое может быть проинтегрировано чисто алгебраическими способами.

Например, пусть

$$\varphi(X, Y)=0$$

будет решением второго уравнения, тогда, диференцируя по X, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\frac{\partial\varphi}{\partial Y}P=0.$$

Теперь X, Y, P может быть исключено из этих двух уравнений и выражений

$$x=P,\ y=XP-Y,$$

что дает решение уравнения

$$F(x, y, p)=0.$$

В частности, уравнение

$$\Phi(xp-y)=x\Psi(p)$$

примет вид

$$\Phi(Y)=P\Psi(X).$$

Переменные X и Y теперь разделяются и уравнение интегрируется в квадратурах.

Пример:

$$(y-px)x=y.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$P=\frac{Y}{Y+X};$$

оно однородно и имеет решение

$$\log Y-\frac{X}{Y}=\text{const}.$$

Диференцируя по X, получим

$$\frac{P}{Y}-\frac{Y-XP}{Y^2}=0,$$

откуда

$$Y=\frac{Y-XP}{P}=-\frac{y}{x},$$

следовательно

$$\frac{X}{Y}=\frac{1}{P}-1=\frac{1}{x}-1.$$

Таким образом решение первоначального уравнения имеет вид

$$\log\left(-\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}=\text{const}$$

или

$$y=cxe^{1/x}.$$

Примечание. В случае уравнения Клеро, условие $\frac{dp}{dx} \neq 0$ нарушено для общего решения; этот метод приводит поэтому только к особому решению.

2·6. Уравнения порядка выше первого. Простейшим диференциальным уравнением общего порядка n будет

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Его решение является процессом n-кратного интегрирования и может быть проведено следующим образом.

Пусть x_0 постоянная, выбранная произвольно, тогда

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_0,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_0(x - x_0) + C_1$$

. . . .

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_0 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1},$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Однако многократный интеграл может быть замещен простым интегралом. Пусть

$$Y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} f(t)\,dt,$$

тогда

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-2} f(t)\,dt,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

откуда

$$\frac{d^n Y}{dx^n} = f(x).$$

Следовательно Y является решением, которое вместе с его первыми $(n-1)$ производными исчезает при $x = x_0$. Общим решением будет

$$Y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt + C_0\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1}.$$

Независимо от этого простого случая и случая линейного уравнения с постоянными коэфициентами, который мы будем рассматривать в главе VI, имеется лишь небольшое число уравнений порядка выше первого, которые поддаются элементарному исследованию. Однако в ряде очень специальных случаев порядок уравнения может быть понижен посредством соответствующих преобразований переменных, комбинируемых с одной или более квадратурами. Основные случаи этого рода мы рассмотрим в трех последующих параграфах.

2·61. Уравнения, не содержащие зависимой переменной. Рассмотрим уравнение

$$F\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

где y и его $k-1$ производных отсутствуют. Преобразование

$$v = \frac{d^k y}{dx^k}$$

приводит это уравнение к уравнению порядка $n-k$, содержащих v. Если это уравнение может быть проинтегрировано и его решение получится вида $v = v(x)$, то остается только проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^k y}{dx^k} = v(x),$$

которое мы разобрали в предыдущем параграфе.

Однако приведенное уравнение чаще имеет решение вида

$$\varphi(x, v) = 0,$$

которое трудно решить относительно v. Чтобы сделать метод практически удобным, необходимо x и v выразить через параметр t следующим образом

$$y^{(k)} = v(t), \quad x = x(t),$$

тогда

$$dy^{(k-1)} = v(t)\,dx = v(t)\,x'(t)\,dt,$$

что после интегрирования дает $y^{(k-1)}$. Этот процесс повторяется k раз до получения искомого решения.

Важным частным случаем является уравнение вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right);$$

такие уравнения интегрируются в квадратурах.

2·62. Уравнения, не содержащие независимой переменной. Если уравнение имеет форму

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

его порядок может быть приведен к $n-1$ заменой переменных. Пусть y — новая независимая переменная, а p — зависимая переменная. Формулы преобразования имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right), \ldots$$

Данное уравнение приводится к уравнению вида

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Предположим, что это уравнение может быть проинтегрировано и что его решение может быть выражено в параметрической форме

$$y = f(t), \quad p = g(t),$$

где f и g — функции вспомогательной переменной t и зависят также от $n-1$ постоянных интегрирования, тогда при помощи квадратуры получим x, выраженное через t

$$x = \int \frac{dy}{p}$$

$$= \int \frac{f'(t)\,dt}{g(t)}.$$

В частности, уравнение второго порядка, не содержащее x, именно

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

преобразуется в уравнение

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

первого порядка.

Уравнение вида

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

приводится подстановкой

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = v$$

к

$$\frac{d^2v}{dx^2} = f(v).$$

сли $\frac{dv}{dx}=p$, то последнее уравнение примет вид

$$p\frac{dp}{dv}=f(v),$$

ткуда

$$p^2=c+\int f(v)\,dv,$$

ледовательно

$$x=\int\{c+\int f(v)\,dv\}^{-\frac{1}{2}}dv.$$

Чтобы получить y, v должно быть выражено через x; решение завершается $n-2$ квадратурами.

2·63. Уравнения, показывающие однородность формы. Рассмотрим два класса уравнений. Первый класс включает уравнения однородные относительно y, y', y'',..., $y^{(n)}$ и содержащие x. Уравнение этого класса, со степенью однородности m, может быть написано в виде

$$y^mF\left(x,\ \frac{y'}{y},\ \frac{y''}{y},\ldots,\ \frac{y^m}{y}\right)=0.$$

Пусть u — новая зависимая переменная, определяемая соотношением

$$y=e^{\int u\,dx},$$

тогда

$$y'=ue^{\int u\,dx},\quad y''=(u'+u^2)e^{\int u\,dx},\ldots,$$

и

$$y^n=U_ne^{\int u\,dx},$$

где U_n — полином от u, u',..., $u^{(n-1)}$. Замена зависимой переменной y на u понижает порядок уравнения n до $(n-1)$.

Второй класс содержит уравнения, однородные относительно y, $xy'x^2$, y'',...,$x^ny^{(n)}$, но не содержащие отдельно x. Уравнение

$$F(y,\ xy',\ x^2y'',\ldots,\ x^ny^{(n)})=0$$

является типичным. Произведем подстановку

$$x=e^t,$$

тогда

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt},\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},\ldots$$

и

$$x^r\frac{d^ry}{dx^r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\ldots\left(\frac{d}{dt}-r+1\right)y.$$

Таким образом преобразованное уравнение примет вид

$$\Phi\left(y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},\ldots,\frac{d^ny}{dt^n}\right)=0$$

и не содержит отдельно x, следовательно оно переходит в уравнение, рассмотренное в § 2 · 62.

Уравнение, соответствующее последнему классу, которое не может быть проинтегрировано более простым методом, имеет вид [1]

$$F\left(y'', y' - xy'', y - xy' + \frac{1}{2}x^2 y''\right) = 0.$$

Производное уравнение будет

$$y''' \cdot \left(F_1 - xF_2 + \frac{1}{2}x^2 F_3\right) = 0,$$

где F_1, F_2, F_3 — частные производные F относительно первого, второго и третьего аргументов соответственно. Оно удовлетворяется $y''' = 0$ или

$$y = A + Bx + \frac{1}{2}Cx^2,$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Это является общим решением первоначального уравнения, если

$$F(C, B, A) = 0.$$

2 · 7. Совместные системы с тремя переменными. До разбора общей теории интегрирования совместных систем диференциальных уравнений рассмотрим простой случай, в котором уравнения интегрируются методами, подробно рассмотренными в предшествующих параграфах этой главы.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta},$$

где ξ, η и ζ — функции x, y и z. Специальным и важным является случай, когда ξ и η не зависят от z. Тогда уравнение

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

содержит только x и y. Предположим, что это уравнение может быть проинтегрировано и имеет решение

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0,$$

где α — постоянная интегрирования. Пусть также это уравнение решено относительно y, тогда

$$y = \varphi(x, \alpha),$$

и пусть ξ_1 и ζ_1 соответствуют ξ и ζ при подстановке $\varphi(x, \alpha)$ вместо y, тогда уравнение

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dz}{\zeta_1}$$

---

[1] Dixon, Phil. Trans. R. S. (A), 186 (1894), 563. Обобщение для любого порядка очевидно. См. также Raffy, Bull. Soc. Math. France, 25 (1897), 71.

не будет содержать y, а его решение

$$\Theta(x, z, \alpha, \beta) = 0,$$

где β — постоянная интегрирования.

Если из обоих решений

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \ \Theta(x, z, \alpha, \beta) = 0$$

исключить α, то решения примут вид

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \ \Psi(x, y, z, \beta) = 0.$$

2·701. Интегрирование совместной линейной системы с постоянными коэфициентами. Система

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta},$$

где

$$\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1,$$

$$\eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2,$$

$$\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3,$$

не была разобрана в предшествующем параграфе. Она может рассматриваться аналогично после линейного преобразования переменных. Для упрощения введем новую переменную t, чтобы

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{t},$$

тогда, независимо от постоянных l, m, n,

$$\frac{dt}{t} = \frac{ldx + mdy + ndz}{l\xi + m\eta + n\zeta}.$$

Пусть l, m, n выбраны так, что

$$la_1 + ma_2 + na_3 = l\rho,$$

$$lb_1 + mb_2 + nb_3 = m\rho,$$

$$lc_1 + mc_2 + nc_3 = n\rho,$$

тогда

$$\frac{dt}{t} = \frac{d(lx + my + nz)}{\rho(lx + my + nz + r)},$$

где $r\rho = ld_1 + md_2 + nd_3$. Этот выбор l, m, n возможен, если ρ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - \rho, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2 - \rho, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Предположим, что корни этого уравнения равны $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$ и соответствующие значения l, m, n, r равны

$$l_i, \ m_i, \ n_i, \ r_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

тогда

$$\frac{dt}{t} = \frac{\lambda_i \, d(l_i x + m_i y + u_i z)}{l_i x + m_i y + n_i z + r_i},$$

откуда

$$t = C_i (l_i x + m_i y + n_i z + r_i)^{\lambda_i},$$

следовательно решение этой системы получится вида

$$C_1 (l_1 x + m_1 y + n_1 z + r_1)^{\lambda_1} = C_2 (l_2 x + m_2 y + n_2 z + r_2)^{\lambda_2} =$$

$$= C_3 (l_3 x + m_3 y + n_3 z + r_3)^{\lambda_3}$$

и будет содержать три постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, две из которых произвольны.

2·71. Эквивалентное диференциальное уравнение в частных производных. Рассмотрим x и y как независимые переменные, а z как зависимую. Пусть p и q будут частными производными z по x и y соответственно, тогда

$$\xi p + \eta q = \zeta$$

будет линейным диференциальным уравнением в частных производных первого порядка; оно называется линейным уравнением Лагранжа. Если

$$z = f(x, y)$$

является решением этого уравнения, то

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = \zeta$$

для всех значений x, y. Это решение представляет поверхность, называемую *интегральной поверхностью* диференциального уравнения в частных производных. Поскольку направляющие косинусы нормали к поверхности $z = f(x, y)$ пропорциональны

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -1,$$

диференциальное уравнение выражает отличительное свойство касательной плоскости к интегральной поверхности.

Рассмотрим теперь систему совместных диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

и примем, что ее решения могут быть выражены относительно постоянных интегрирования так

$$u(x, y, z) = \alpha, \quad v(x, y, z) = \beta.$$

Эти решения представляют семейства кривых в пространстве, зависящие от двух параметров, и называются *характеристиками* системы. Если ξ, η, ζ существуют и однозначны в точке (x_0, y_0, z_0) и по крайней мере одно из них не равно нулю при (x_0, y_0, z_0), то через эту точку будет проходить только одна характеристика.

Покажем теперь, что характеристики совместной диференциальной системы тесно связаны с интегральной поверхностью диференциального уравнения в частных производных. Сначала докажем, что *если интегральная поверхность проходит через* (x_0, y_0, z_0), *то она содержит характеристику, проходящую через эту точку*. Пусть интегральная поверхность, проходящая через (x_0, y_0, z_0), будет выражена через

$$z = f(x, y);$$

полагая, что ξ не исчезает при (x_0, y_0, z_0), рассмотрим диференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi},$$

в котором z заменено на $f(x, y)$. Уравнение определяет y как функцию x и является, следовательно, диференциальным уравнением семейства цилиндров, образующие которых параллельны оси z. Цилиндр через $(x_0, y_0, 0)$ пересекает интегральную поверхность по кривой, проходящей через (x_0, y_0, z_0). Вдоль этой кривой

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{p\,dx + q\,dy}{p\xi + q\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Определенная таким образом кривая является характеристикой, следовательно, теорема доказана. Непосредственное следствие этой теоремы: каждая интегральная поверхность является геометрическим местом характеристик. В частности, при проведении любой нехарактеристической кривой в пространстве, характеристики, проходящие через точки этой кривой, образуют интегральную поверхность.

Обратная теорема также верна, именно, *любая поверхность, являющаяся геометрическим местом характеристических кривых, является интегральной поверхностью диференциального уравнения в частных производных*[1]. Касательная линия к характеристике в любой произвольной точке (x_0, y_0, z_0) дается выражением

$$\frac{x - x_0}{\xi_0} = \frac{y - y_0}{\eta_0} = \frac{z - z_0}{\zeta_0},$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 — значения ξ, η, ζ при (x_0, y_0, z_0). Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) к поверхности огибающей характеристики имеет вид

$$(x - x_0)p_0 + (y - y_0)q_0 = z - z_0,$$

[1] Этот специальный случай может возникнуть, если поверхность имеет касательную плоскость, параллельную оси z, потому что тогда p и q становятся бесконечными и доказательство оказывается несостоятельным.

где p_0 и q_0 — соответственно значения $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ на поверхности при (x_0, y_0, z_0). Поскольку характеристика лежит на поверхности, касательная линия лежит в касательной плоскости, поэтому

$$\xi_0 p_0 + \eta_0 q_0 = \zeta_0.$$

Но (x_0, y_0, z_0) является любой точкой на поверхности; следовательно последняя будет интегральной поверхностью диференциального уравнения в частных производных

$$\xi p + \eta q = \zeta.$$

2 · 72. Образование интегральной поверхности. Совокупность характеристик образует семейство конгруентных кривых, зависящее от двух параметров. Аналогично тому, как плоская кривая образуется выбором, согласно определенному закону, бесконечной совокупности точек из бесконечности (второго порядка) точек на плоскости, так и интегральная поверхность образуется выбором бесконечности конгруентных кривых. Пусть

$$u(x, y, z) = \alpha, \quad v(x, y, z) = \beta$$

будет совокупностью характеристик, из которых выбирается бесконечность первого порядка путем установления некоторой зависимости между α и β, например

$$\Omega(\alpha, \beta) = 0.$$

Следовательно уравнение интегральной поверхности будет иметь вид

$$\Omega(u, v) = 0,$$

и это уравнение, где функция Ω произвольна, является общим решением диференциального уравнения в частных производных.

В теории обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка часто требуется найти интегральную кривую, проходящую через данную точку плоскости. Соответствующая задача в случае диференциального уравнения в частных производных состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через данную (нехарактеристическую) *базисную кривую* в пространстве. Эта проблема в ее общей форме известна как проблема Коши.

Пусть

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

представляет базисную кривую и пусть

$$u(x, y, z) = \alpha, \quad v(x, y, z) = \beta$$

будут характеристиками. Если из этих четырех уравнений исключить x, y, z, то получим соотношение между α и β, показывающее, что характеристики и базисная кривая имеют общие точки. Пусть это соотношение имеет вид

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0,$$

тогда

$$\Phi(u, v) = 0$$

— искомая интегральная поверхность.

Пример. Рассмотрим диференциальное уравнение в частных производных

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Дополнительная диференциальная система имеет вид

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}.$$

Эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} adx + bdy + cdz = 0, \\ xdx + ydy + zdz = 0, \end{cases}$$

следовательно уравнения характеристик должны иметь вид

$$\begin{cases} ax + by + cz = \alpha, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \beta \end{cases}$$

где α и β — произвольные постоянные. Характеристики представляют собой точки пересечения всех сфер, центр которых лежит в начале с плоскостями, параллельными прямой

$$(l) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

т. е. они представляют совокупности окружностей, плоскости которых перпендикулярны к этой прямой и центры которых лежат на ней.

Уравнение интегральных поверхностей имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz)$$

и представляет поверхности вращения с линией (l) в качестве оси симметрии.

Рассмотрим теперь интегральную поверхность, имеющую ось y, которая образована характеристическими кривыми, проходящими через эту же ось. Получим характеристики, для которых α и β таковы, что уравнения

$$ax + by + cz = \alpha, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta, \quad x = 0, \quad z = 0$$

совместные. Условие их совместимости получается исключением y из

$$by = \alpha, \quad y^2 = \beta$$

и поэтому

$$b^2\beta = \alpha^2.$$

Искомой интегральной поверхностью будет

$$b^2(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

или
$$(a^2-b^2)x^2+(c^2-b^2)z^2+2abxy+2bcyz+2cazx=0.$$

2·73. Однородное линейное уравнение в частных производных. Если ζ равно нулю, то уравнение принимает так называемую однородную форму
$$\xi p+\eta q=0.$$

Уравнения характеристик принимают вид
$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{0}.$$

Последнее уравнение сразу же дает
$$z=\alpha,$$

следовательно характеристики являются плоскими кривыми, плоскости которых перпендикулярны к оси z.

Важнейшим является случай, когда ξ и η не зависят от z; уравнение характеристик тогда принимает вид
$$z=\alpha,\ u\ (x,\ y)=\beta$$

и уравнение интегральной поверхности может быть написано в виде
$$z=f(u).$$

Рассмотрим теперь уравнение
$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{df}{dz}=0,$$

где ξ, η, ζ — функции x, y, z. Если
$$f(x,\ y,\ z)=c,$$

где c — постоянная, является решением диференциального уравнения в частных производных, то
$$df\equiv\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$

следовательно $f(x,\ y,\ z)=c$ является решением совместной системы
$$\frac{\partial x}{\xi}=\frac{\partial y}{\eta}=\frac{\partial z}{\zeta}.$$

Обратное также верно, так как, если
$$u(x,\ y,\ z)=a$$

любое решение совместной системы, то
$$du\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0$$

и следовательно

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Предположим, что

$$v(x, y, z) = \beta$$

будет вторым и явным решением совместной системы; оно также будет решением диференциального уравнения в частных производных, так что

$$\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Если любое другое решение

$$w(x, y, z) = \gamma$$

существует, то

$$\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

исключая ξ, η, ζ, получим

$$\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно w является функцией u и v (§ 1·22) и поэтому диференциальное уравнение допускает два независимых решения.

Из трех уравнений

$$u(x, y, z) = \alpha, \quad v(x, y, z) = \beta, \quad w(x, y, z) = \gamma$$

две переменные, например x и y, можно исключить, тогда получим

$$w = \varphi(u, v, z).$$

Теперь

$$0 = \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (u, v, z)} \cdot \frac{\partial (u, v, z)}{\partial (x, y, z)}.$$

Первый детерминант справа равен $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, второй $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}$. Второе выражение не равно нулю, поскольку u и v предполагаются независимыми, следовательно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

т. е. φ независимо от z, или, иначе говоря, w является функцией только u и v.

Общее решение диференциального уравнения в частных производных

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

будет

$$\Omega(u, v) = \text{const},$$

где Ω — произвольная функция его аргументов, а

$$u = \alpha, \quad v = \beta$$

— любые два независимых решения дополнительной системы

$$\frac{\partial x}{\xi} = \frac{\partial y}{\eta} = \frac{\partial z}{\zeta}.$$

Распространение предыдущих выводов на случай n переменных очевидно. Мы получим специальный случай, если ξ, η, ζ будут иметь общий множитель. Результат приравнивания этого множителя нулю дает специальное решение диференциального уравнения в частных производных, которое может быть включено в общее решение.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} + z^2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Дополнительная система

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{z^2}$$

имеет два независимых решения

$$\frac{y}{x} = \alpha, \quad \frac{z-x}{xz} = \beta.$$

Общее решение имеет вид

$$\Omega\left(\frac{y}{x}, \frac{z-x}{xz}\right) = \text{const}.$$

2·8. Диференциальное уравнение в полных диференциалах. Алгебраическое уравнение с тремя переменными вида

$$\varphi(x, y, z) = c,$$

где c — постоянная, приводит к диференциальному уравнению в полных диференциалах

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0.$$

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ имеют общий множитель μ и если

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu R,$$

то диференциальное уравнение в полных диференциалах может быть написано в виде

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

С другой стороны, если P, Q, R — произвольные функции x, y, z, то уравнение в полных диференциалах не обязательно соответствует общему интегралу вида

$$\varphi(x, y, z) = c.$$

Если такой интеграл существует, то P, Q, R должны быть соответственно пропорциональны трем частным производным функции $\varphi(x, y, z)$, что несправедливо в общем случае. Здесь возникает следующая проблема — найти необходимое и достаточное условие интегрируемости данного диференциального уравнения в полных диференциалах, выведенного из интеграла рассмотренного вида.

Необходимо, чтобы функции $\varphi(x, y, z)$ и $\mu(x, y, z)$ были такими, чтобы условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mu R$$

были удовлетворены, тогда[1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),\end{aligned}$$

т. е.

$$\mu\left\{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right\} = Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

и аналогично

$$\mu\left\{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right\} = R\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial z},$$

$$\mu\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right\} = P\frac{\partial\mu}{\partial z} - R\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

Неизвестная μ исключается из этих трех уравнений умножением их на R, P, Q и последующим сложением. Результирующее уравнение

$$P\left\{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right\} + Q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right\} + R\left\{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right\} = 0$$

является необходимым условием интегрируемости[2].

Из данного представления очевидно (это можно легко доказать и независимо), что если λ — функция x, y, z и

$$P_1 = \lambda P, \quad Q_1 = \lambda Q, \quad R_1 = \lambda R,$$

то условие интегрируемости удовлетворяется P_1, Q_1, R_1.

[1] При этом принимается, конечно, что изменение порядка диференцирования допустимо.

[2] Euler, Inst. Calc. Int., 3, (1770), 1.

Докажем теперь, что условие интегрируемости является достаточным, т. е. если оно удовлетворено, то существует решение, содержащее произвольную постоянную. Кроме того, доказательство дает также метод получения решения, если условие интегрируемости удовлетворено.

Допустим, что одна переменная является в данный момент постоянной. Если этой переменной будет z, то уравнение приводится к виду

$$Pdx + Qdy = 0,$$

где P и Q должны рассматриваться как функции x и y, в которые z входит в качестве параметра. Это уравнение имеет решение

$$u(x, y, z) = \text{const},$$

где, если $\lambda(x, y, z)$ — интегрирующий множитель, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda P = P_1, \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda Q = Q_1;$$

но из этого не следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda R = R_1.$$

Пусть

$$R_1 = \lambda R = \frac{\partial u}{\partial z} + S,$$

тогда, согласно предположению,

$$P_1\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right\} + Q_1\left\{\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\right\} + R_1\left\{\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right\} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Это соотношение не удовлетворяется выражением

$$u(x, y, z) = \text{const}$$

и является тождеством. Соответственно S и u, которые рассматривались как функции x и y, находятся в функциональной зависимости. Однако функциональная зависимость между ними содержит также и третью переменную z, таким образом S может быть выражена только через u и z.

Теперь

$$\lambda(Pdx + Qdy + Rdz) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + Sdz$$
$$= du + Sdz.$$

Первоначальное уравнение следовательно эквивалентно

$$du + Sdz = 0.$$

Пусть $\mu(u, z)$ — интегрирующий множитель, тогда

$$\lambda\mu(Pdx + Qdy + Rdz) = \mu(du + Sdz)$$

будет точным диференциалом $d\psi$. Интеграл имеет вид

$$\psi(u, z) = c,$$

если вместо u подставить его значение в функции от x, y, z, то интеграл примет вид

$$\varphi(x, y, z) = c.$$

Аналогично можно доказать, что для того, чтобы уравнение с n переменными

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots + X_ndx_n = 0$$

имело интеграл вида

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд уравнений

$$X_\nu\left\{\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu}\right\} + X_\mu\left\{\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\lambda}\right\} + X_\lambda\left\{\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu}\right\} = 0$$

$$(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

удовлетворялся совместно и тождественно. Общее число таких уравнений равно $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$; из них $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ независимы. Покажем этот процесс интегрирования на следующем примере

$$yz(y + z)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz = 0.$$

В этом случае

$$P = yz(y + z),\ Q = zx(z + x),\ R = xy(x + y),$$

и условие интегрируемости удовлетворено.

Если z рассматривать как постоянную, то уравнение приводится к виду

$$yz(y + z)dx + zx(z + x)dy = 0,$$

и это приведенное уравнение имеет решение

$$u = \frac{(z + x)(z + y)}{xy} = \text{const}.$$

Теперь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z(z + y)}{x^2y} = -\frac{1}{x^2y^2}P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(z + x)}{xy^2} = -\frac{1}{x^2y^2}Q$$

и

$$\lambda = -\frac{1}{x^2y^2}.$$

Аналогично

$$S = \lambda R - \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= -\frac{x+y}{xy} - \frac{2z+x+y}{xy} = -2\frac{x+y+z}{xy}$$
$$= -2\frac{u-1}{z},$$

следовательно

$$\lambda(Pdx + Qdy + Rdz) = du - 2\frac{u-1}{z}dz.$$

Интегрирующий множитель равен $\mu = z^{-2}$, а

$$\lambda\mu(Pdx + Qdy + Rdz) = \frac{dy}{z^2} - \frac{2(u-1)\,dz}{z^3}$$
$$= d\left\{\frac{u-1}{z^2}\right\}.$$

Следовательно общий интеграл имеет вид

$$\frac{u-1}{z^2} = c$$

или, подставляя вместо u его значение в функции от x, y, z,

$$\frac{x+y+z}{xyz} = c.$$

2·81. **Геометрическая интерпретация.** Если R не равно нулю, то диференциальное уравнение в полных диференциалах может быть написано в виде

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

или

$$dz = Udx + Vdy.$$

Поскольку

$$dz = pdx + qdy,$$

диференциальное уравнение в полных диференциалах эквивалентно двум совместным уравнениям в частных производных

$$p = U(x, y, z), \quad q = V(x, y, z).$$

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) к интегральной поверхности, проходящей через (x_0, y_0, z_0), имеет следовательно вид

$$z - z_0 = U_0(x - x_0) + V_0(y - y_0),$$

где U_0 и V_0 — соответственно значения U и V в точке (x_0, y_0, z_0).

Проблема интегрирования эквивалентна поэтому нахождению такой поверхности, у которой направляющие косинусы ее нормали в каждой точке (x, y, z) пропорциональны

$$U(x, y, z),\ V(x, y, z),\ -1.$$

Эта проблема в общем случае неразрешима; чтобы сделать ее разрешимой, должно быть удовлетворено условие интегрируемости

$$\frac{\partial U}{\partial y} + V\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Общее решение каждого из диференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = U,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = V$$

представляет семейство поверхностей таким образом, что через каждую кривую в пространстве проходит только одна поверхность каждого семейства[1]. Их общее решение представляет семейство пространственных кривых

$$u(x, y, z) = \alpha,\quad v(x, y, z) = \beta,$$

зависящее от двух параметров α и β; через каждую точку в пространстве проходит только одна интегральная кривая.

Интегральная поверхность диференциального уравнения в полных диференциалах пересекает каждую кривую этого семейства ортогонально, т. е. касательная плоскость в любой точке P интегральной поверхности должна содержать нормали к P обеих поверхностей $u = \alpha$, $v = \beta$, которые проходят через точку P. Отсюда

$$p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$p\frac{\partial v}{\partial x} + q\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Эти два уравнения определяют

$$p = U(x, y, z),\quad q = V(x, y, z).$$

Они связаны только тогда, когда

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

т. е. если условие интегрируемости

$$\frac{\partial U}{\partial y} + V\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial V}{\partial z}$$

удовлетворено.

[1] Это объясняется тем, что диференциальное уравнение в частных производных имеет только одно решение, удовлетворяющее принятым начальным условиям. Теорема существования принимается здесь без доказательства.

2·82. Метод интегрирования Майера. Метод интегрирования, развитый в § 2·8, зависит от интегрирования двух последовательных диференциальных уравнений с двумя переменными. В методе Майера необходимо только одно интегрирование. Пусть (x_0, y_0) — любая выбранная пара значений (x, y), а z_0 — произвольное значение z, так что четыре производных

$$\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

существуют и непрерывны в соседстве с (x_0, y_0, z_0). Тогда, если уравнение интегрируется, то его решение будет полностью определено начальным значением z_0. Значение z в точке (x, y) может быть получено, следуя от его начального значения z_0, соответственно перемещению точки P прямолинейно в плоскости (x, y) от (x_0, y_0) к (x, y).

Примем, не нарушая общности, что точка (x_0, y_0) является началом. На прямой линии, соединяющей начало с (x, y),

$$y = \varkappa x, \quad dy = \varkappa dx,$$

где $\varkappa$ — постоянная; поэтому уравнение примет вид

$$dz = (U_1 + \varkappa V_1)\, dx,$$

где при подстановке $\varkappa x$ вместо y U_1 и V_1 соответственно равны U и V. Это уравнение с двумя переменными x и z имеет решение вида

$$\varphi(x, z, \varkappa) = \text{const},$$

или, поскольку $z = z_0$ при $x = 0$,

$$\varphi(x, z, \varkappa) = \varphi(0, z_0, \varkappa).$$

Подставляя y/x вместо $\varkappa$, решение

$$\varphi(x, z, y/x) = \varphi(0, z_0, y/x)$$

показывает его зависимость от произвольной постоянной z_0.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$dz = \frac{1 + yz}{1 + xy}\, dx + \frac{x(z - x)}{1 + xy}\, dy;$$

коэфициенты dx и dy непрерывны в соседстве с $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$ так же, как и частные производные.

Пусть

$$y = \varkappa x, \quad dy = \varkappa dx,$$

тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2\varkappa x}{1 + \varkappa x^2}\, z + \frac{1 - \varkappa x^2}{1 + \varkappa x^2};$$

---

[1] Mayer, Math. Ann., 5 (1872), 448.

оно линейно и имеет решение

$$z = x + z_0(1 + \varkappa x^2).$$

Решение данного уравнения имеет поэтому вид

$$z = x + z_0(1 + xy).$$

2 · 83. Проблема Пфаффа. Если условие интегрируемости не удовлетворено, то диференциальное уравнение в полных диференциалах не может быть производным частного интеграла, поэтому такое уравнение считалось не имеющим смысла[1]. Однако дальнейшие исследования показали, что диференциальное уравнение в полных диференциалах эквивалентно двум алгебраическим уравнениям[2], известным как его *интегральные эквиваленты*. Вообще говоря, если условие интегрируемости для всех уравнений не удовлетворено, то диференциальное уравнение в полных диференциалах с $2n$ или $2n-1$ переменными эквивалентно системе, содержащей не более n алгебраических уравнений[3]. Проблема определения интегральных эквивалентов любого данного диференциального уравнения в полных диференциалах известна как проблема Пфаффа. Укажем кратко метод решения в случае трех переменных[4].

Необходимо показать, что диференциальное выражение

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

может быть приведено к виду

$$du + vdw,$$

где u, v, w — функции x, y, z. Обе формы идентичны, если

$$\text{(A)} \qquad P = \frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial w}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Пусть

$$P' = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Q' = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad R' = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тогда

$$P' = \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dw}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$Q' = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$R' = \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

[1] Euler, Inst. Calc. Int., 3(1770), 5.
[2] Monge, Mém. Acad. Sc. Paris (1784), 535.
[3] Pfaff. Abh Akad. Wiss Berlin (1814), 76.
[4] Расширенную трактовку общего случая см. Forsyth, Theory of Differential Equations, Part I; Goursat, Leçons sur le Probleme de Pfaff.

Отсюда следует, что

$$P' \frac{\partial v}{\partial x} + Q' \frac{\partial v}{\partial y} + R' \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$P' \frac{\partial w}{\partial x} + Q' \frac{\partial w}{\partial y} + R' \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Таким образом v и w являются решениями одного и того же линейного диференциального уравнения в частных производных; эквивалентная совместная система имеет вид

$$\frac{dx}{P'} = \frac{dy}{Q'} = \frac{dz}{R'}.$$

Пусть

$$\alpha(x, y, z) = \text{const}, \quad \beta(x, y, z) = \text{const}$$

будут двумя независимыми решениями совместной системы тогда v и w — функции α и β.

Возвратимся к переменной u; так как

$$\left\{P - \frac{\partial u}{\partial x}\right\} P' + \left\{Q - \frac{\partial u}{\partial y}\right\} Q' + \left\{R - \frac{\partial u}{\partial z}\right\} R' =$$
$$= v\left\{P' \frac{\partial w}{\partial x} + Q' \frac{\partial w}{\partial y} + R' \frac{\partial w}{\partial z}\right\} = 0,$$

то

$$P' \frac{\partial u}{\partial x} + Q' \frac{\partial u}{\partial y} + R' \frac{\partial u}{\partial z} = PP' + QQ' + RR'.$$

Выражение

$$PP' + QQ' + RR' = 0$$

дает условие интегрируемости. Вообще u не удовлетворяет тому же диференциальному уравнению в частных производных, что v и w.

w может быть любой функцией α и β. Для простоты предположим

$$w = \alpha,$$

тогда, если между переменными x, y, z имеется соотношение

$$\alpha(x, y, z) = a,$$

где a — постоянная, то диференциальная форма $Pdx + Qdy + Rdz$ приводится к du и следовательно становится точным диференциалом. Таким образом соотношение $\alpha(x, y, z) = a$ применяется для выражения любой переменной, например z, и ее диференциала dz через две другие переменные и их диференциалы, а когда эти выражения подставлены вместо z и dz в $Pdx + Qdy + Rdz$, то последнее становится полным диференциалом $d\varphi(x, y, a/z)$. При замене a на $\alpha(x, y, z)$, этот диференциал становится равным du. Так получаем u, а поскольку u и w известны, вывести v можно алгебраически из уравнений (А). Диференциальное уравнение в полных диференциалах

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

приводится к *канонической форме*

$$du + v dw = 0.$$

Каноническое уравнение может быть удовлетворено различно, например

$$\text{(I)}\ u = \text{const}, \quad w = \text{const}$$

$$\text{(II)}\ u = \text{const}, \quad v = 0.$$

В более общем случае, если $\psi(u, w)$ некоторая произвольная функция u и w, то интегральный эквивалент будет

$$\text{(III)}\ \psi(u, w) = 0, \quad v\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial w} = 0.$$

Зависимость (III) содержит (II), но не содержит (I). В любом случае *интегральный эквивалент состоит из двух алгебраических уравнений.*

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y dx + z dy + x dz = 0.$$

В этом случае

$$P = y,\ Q = z,\ R = x,\ P' = Q' = R' = 1,$$

следовательно

$$PP' + QQ' + RR' \neq 0,$$

т. е. условие интегрируемости не удовлетворено.

Совместная система имеет вид

$$dx = dy = dz;$$

одним решением его является

$$\alpha \equiv x - y = a.$$

Допустим, что $w = \alpha$ и исключим x из данного уравнения, корое тогда примет вид

$$(y + z) dy + (y + a) dz = 0.$$

Это приведенное уравнение непосредственно интегрируется и его решение будет

$$\varphi \equiv \frac{1}{2} y^2 + yz + az = \text{const}.$$

Если заменить a на $x - y$, φ приводится к u, так что

$$u = \frac{1}{2} y^2 + yz + (x - y) z$$

$$= \frac{1}{2} y^2 + xz.$$

Наконец, v получается следующим образом:

$$v\frac{\partial w}{\partial x}=P-\frac{\partial u}{\partial x},$$

т. е.

$$v=y-z.$$

Так

$$ydx+zdy+xdz=du+vdw,$$

где

$$u=\frac{1}{2}y^2+xy,\ v=y-z,\ w=x-y.$$

Следовательно интегральные эквиваленты будут иметь вид

$$\text{(I)}\ \frac{1}{2}y^2+xz=\text{const},\quad x-y=\text{const},$$

$$\text{(II)}\ \frac{1}{2}y^2+xz=\text{const},\quad y-z=0.$$

$$\text{(III)}\ \psi(u,\ w)=0,\ v\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial w}=0.$$

Другие интегральные эквиваленты получаются циклической перестановкой x, y, z.

2·84. Приведение интегрируемого уравнения к канонической форме. Приведение к канонической форме может быть одинаково хорошо произведено и для интегрируемого уравнения, но поскольку

$$PP'+QQ'+RR'=0,$$

u удовлетворяет тому же диференциальному уравнению в частных производных, что v и w, следовательно u, v и w являются функциями α и β.

Отсюда следует, что

$$du+vdw=Ad\alpha+Bd\beta,$$

где A и B — функции только α и β. Если α и β определены, то A и B могут быть выведены алгебраически пз любых двух или трех совместных уравнений

$$P=A\frac{\partial\alpha}{\partial x}+B\frac{\partial\beta}{\partial x},\quad Q=A\frac{\partial\alpha}{\partial y}+B\frac{\partial\beta}{\partial y},\quad R=A\frac{\partial\alpha}{\partial z}+B\frac{\partial\beta}{\partial z}.$$

Таким образом диференциальное уравнение в полных диференциалах преобразуется в обыкновенное уравнение с двумя переменными α и β.

Это приводит к практическому методу решения интегрируемых уравнений, как видно из следующего примера (см. 2·8)

$$yz(y+z)dx+zx(z+x)dy+xy(x+y)dz=0.$$

Здесь

$$P'=2x(z-y),\ Q'=2y(x-z),\ R'=2z(y-x),$$

и условие интегрируемости удовлетворено. Совместная система

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(x-z)} = \frac{dz}{z(y-x)}$$

эквивалентна системе

$$d(x+y+z)=0, \quad \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0$$

и имеет решение

$$\alpha \equiv x+y+z=\text{const}, \quad \beta \equiv xyz=\text{const}.$$

Таким образом данное уравнение приводится к виду

$$A d\alpha + B d\beta = 0,$$

где

$$yz(y+z) = A + Byz,$$

$$zx(z+x) = A + Bzx,$$

$$xy(x+y) = A + Bxy.$$

Отсюда

$$A = -xyz, \quad B = x+y+z,$$

т. е. уравнение принимает вид

$$\alpha d\beta - \beta d\alpha = 0$$

и имеет решение

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv \frac{x+y+z}{xyz} = \text{const}$$

Примеры

1. Проинтегрируйте следующие уравнения:

(I) $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx + (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy = 0$;

(II) $x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}dx + y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dy = 0$;

(III) $(x^2+2xy-y^2)dx - (x^2-2xy-y^2)dy=0$;

(IV) $(y^2-xy)dx - (x^2-xy)dy = 0$;

(V) $x^2ydx + (x^3-y^3)dy = 0$;

(VI) $(x+y)dx - (2x-y-1)dy = 0$;

(VII) $(x+2y+1)dx - (2x+4y+3)dy = 0$;

(VIII) $(2x^2+6xy+y^2)dx + (3x^2+2xy+4y^2)dy = 0$;

(IX) $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$;

(X) $(1+x^2)p + xy = 1$;

(XI) $p + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$;

(XII) $p + y\cos x = e^{2x}$;

(XIII) $xp - ay = x^n$;

(XIV) $xp - y = x^2\sin x$;

(XV) $p + 2xy = xe^{-x^2}$;

(XVI) $p\sin x\cos x - y = \sin^3 x$;

(XVII) $(y^2-xy)dx + (x+1)dy = 0$;

(XVIII) $(y-xp)^2 = 4p$;

(XIX) $y - px + p(p-1) = 0$;

(XX) $xyp^2 + (x^2+y^2)p + xy = 0$;

(XXI) $yp^2 + 2px - y = 0$;

(XXII) $y - (x+5)p + p^3 = 0$;

(XVIII) $(x+1)p^2 - (x+y)p + y = 0$;

(XXIV) $y - 2px + p^2 = 0$.

2. Определите n так, чтобы уравнение

$$\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{(x^2+y^2)^n}(ydx-xdy)=0$$

было точным.

3. Покажите, что уравнение

$$(y^4-2y^2)\,dx+(3xy^3-4xy+y)\,dy=0$$

имеет интегрирующий множитель, который является функцией xy^2, и решите уравнение.

4. Покажите, что $\cos x\cos y$ является интегрирующим множителем уравнения

$$(2x\operatorname{tg} y\sec x+y^2\sec y)\,dx+(2y\operatorname{tg} x\sec y+x^2\sec x)\,dy$$

[Edinburgh, 1915].

и проинтегрируйте полученное выражение.

5. Из соотношения

$$A(x^2+y^2)-2Bxy+C=0$$

выведите диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}}+\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=0,$$

где $c^2=AC(B^2-A^2)$. Выведите теорему сложения для гиперболического косинуса.

6. Покажите, что решением

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}$$

является

$$x^2y^2+2axy(x+y)+a^2(x-y)^2-4(x+y)+4a=0,$$

где a — произвольная постоянная. В какой связи находится полученный результат с теорией эллиптических функций?

7. Найдите кривые, для которых

(I) поднормаль постоянна и равна $2a$;

(II) подкасательная равна удвоенной абсциссе в точке касания;

(III) перпендикуляр из начала к касательной равен абсциссе в точке касания;

(IV) подкасательная равна средней арифметической абсциссы и ординаты;

(V) отрезок нормали на оси x равен радиусу-вектору;

(VI) отрезок касательной на оси y равен радиусу-вектору.

8. P — точка (x, y) на плоской кривой, C — соответствующий центр кривизны, T — точка, в которой касательная в P встречается с осью x. Если линия, проведенная через T паралельно оси y, пересекает пополам PC, покажите, что

$$2yy''=y'^2(1+y'^2),$$

также покажите, что кривая является циклоидой.

[Paris, 1914].

9. Докажите, что каждая кривая, ордината которой рассматривается как функция ее абсциссы, удовлетворяет диференциальному уравнению

$$(xy'-y)^2=a\ (1+y'^2)\ \sqrt{x^2+y^2},$$

где a — постоянная, и имеет следующее свойство: если H — основание перпендикуляра из начала O на касательной в любой точке P кривой, а Q — основание перпендикуляра из H на OP, то P лежит на окружности центра O и радиуса a.

Измените переменные подстановкой

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

и проинтегрируйте полученное уравнение.

[Paris, 1917].

ГЛАВА III

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПРИРОДА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3·1. Постановка проблемы. Уравнения типа

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

решения которых были найдены в предыдущей главе посредством элементарных процессов, интегрируются потому, что они относятся к некоторым простым классам. Однако уравнение рассматриваемого типа не поддается элементарному рассмотрению, и во многих случаях исследователь вынужден обращаться к методу числовых приближений. Здесь возникает теоретический вопрос: существует ли решение в общей форме или при некоторых ограничениях. Исследования в этой области привели к группе теорем, известных как теоремы существования, наиболее важные из которых рассмотрим в настоящей главе[1].

Пусть (x_0, y_0) будет некоторой парой значений действительных переменных (x, y), такой, что в пределах прямоугольной области D, окружающей точку (x_0, y_0) и определяемой неравенствами

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b,$$

$f(x, y)$ является однозначной непрерывной функцией[2] x и y.

Пусть M будет верхней границей $|f(x, y)|$ в области D и пусть h будет меньше, чем a и b/M. Если h меньше a, то на x налагается более строгое ограничение

$$|x-x_0|\leqslant h.$$

Функция $f(x, y)$ должна удовлетворять еще одному условию, именно, если (x, y) и (x, Y) — две точки внутри области D на той же абсциссе, то

$$|f(x, Y)-f(x, y)|<K|(Y-y)|,$$

где K — постоянная. Это известно как условие Липшица[3].

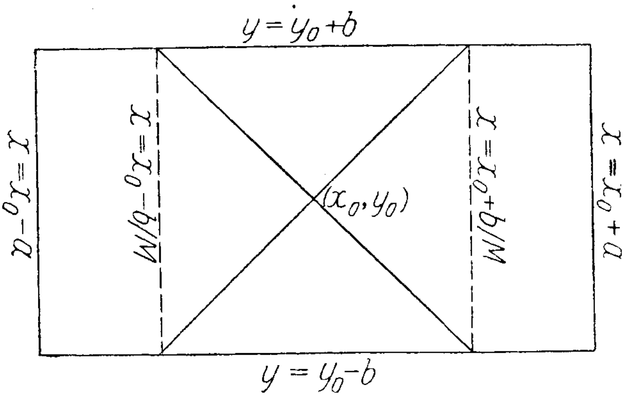
---

[1] См. также главу XII, где этот вопрос рассматривается с точки зрения теории функций комплексного переменного.

[2] $f(x, y)$ является непрерывной функцией x и y в области D, если при заданном произвольно малом и положительном ε, значение δ может быть определено так, что $|f(x+h, y+k)-f(x, y)|<\varepsilon$, при условии, что (x, y) и $(x+h, y+k)$ находятся в области D и $|h|<\delta$, $|k|<\delta$. Важно отметить, что h и k изменяются независимо.

[3] Ниже мы покажем, что необходимо только, чтобы условие Липшица оставалось справедливым в меньшем промежутке $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<M|x-x_0|$.

Если эти условия удовлетворены, то *существует некоторая единственная непрерывная функция x (например y(x), определенная для всех значений x так, что* $|x - x_0| < h$*), которая удовлетворяет диференциальному уравнению и приводится к* y_0 *при* $x = x_0$.



Фиг. 1.

Мы приведем сейчас два совершенно различных доказательства этой теоремы существования, известных соответственно как *метод последовательных приближений* и *метод Коши-Липшица*.

3·2. Метод последовательных приближений[1]. Предположим, что известно решение $y(x)$, которое приводится к y_0 при $x = x_0$. Это решение очевидно удовлетворяет соотношению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left\{t, w(t)\right\} dt,$$

которое является *интегральным уравнением*[2], содержащим зависимую переменную под знаком интеграла. Будем рассматривать функцию $y(x)$ как известную, тогда интегральное уравнение может быть решено методом последовательных приближений.

---

[1] Этот метод, известный повидимому еще Коши, был впервые опубликован Лиувиллем [Liouville, J. de Math., (1), 2 (1838), 19; (1), 3 (1838) 565], который применил его к однородному линейному уравнению второго порядка. Распространения метода на линейное уравнение порядка n даны Каке, [Caqué, J. de Math., (2), 9 (1864), 185], Фуксом (Fuchs, Annali di Mat, (2) 4 (1870), 36 [Ges. Werke, I, 295] и Пеано [Peano, Math. Ann. 32 (1888), 450] В наиболее общей форме метод был разработан Пикаром [Picard, J. de Math., (4), 9 (1893), 217; Traité d'Analyse, 2, 301; (2 изд.): 2, 340] и Бохером [Bocher, Am. J. Math., 24 (1902), 311].

[2] Bôcher, Introduction to the Theory of Integral Equations; Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XI.

Допустим, что x лежит в интервале[1] (x_0, x_0+h) и рассмотрим последовательность функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, определенных следующим образом

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left\{t, y_0\right\} dt,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left\{t, y_1(t)\right\} dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left\{t, y_{n-1}(t)\right\} dt.$$

Докажем теперь, что

(a) с неограниченным ростом n, последовательность функций $y_n(x)$ стремится к пределу, который является непрерывной функцией x;

(b) предельная функция удовлетворяет диференциальному уравнению;

c) найденное таким образом решение принимает значение y_0 при $x = x_0$ и является единственным непрерывным решением, которое обладает этим свойством.

Сначала докажем методом индукции, что если x лежит в рассматриваемом интервале, то $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$. Предположим, что $|y_{n+1}(x) - y_0| \leqslant b$; отсюда следует, что $|f\{t, y_{n-1}(t)\}| \leqslant M$, поэтому

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f\{t, y_{n-1}(t)\}|\, dt, \\ &\leqslant M(x - x_0), \\ &\leqslant Mh, \\ &\leqslant b. \end{aligned}$$

Очевидно

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant b,$$

следовательно

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b$$

для всех значений n. Отсюда следует, что $f\{x, y_n(x)\} \leqslant M$ при $x_0 < x < x_0 + h$.

Аналогично докажем, что

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \frac{MK^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если мы предположим, что $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, то

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| < \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},$$

---

[1] Это ограничение введено исключительно для удобства, оно не является необходимым и будет вскоре исключено.

откуда, согласно условию Липшица,

$$\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left| f\left\{ t, y_{n-1}(t) \right\} - f\left\{ t, y_{n-2}(t) \right\} \right| dt$$

$$< \int_{x_0}^{x} K \left| y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) \right| dt,$$

так что

$$\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| < \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right|^{n-1} dt$$

$$= \frac{MK^{n-1}}{n!} \left| x - x_0 \right|^n.$$

Неравенство, справедливое при $n = 1$, действительно также для всех значений n. Аналогично можно доказать его справедливость при $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0$, следовательно оно верно для $|x - x_0| \leqslant h$.

Отсюда следует, что ряд

$$y_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \{ y_r(x) - y_{r-1}(x) \}$$

абсолютно и равномерно сходится при $|x - x_0| \leqslant h$ и более того — каждый член является непрерывной функцией x. Но

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{r=1}^{n} \{ y_r(x) - y_{r-1}(x) \};$$

следовательно *предельная функция*

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

существует и является непрерывной функцией x в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$[1].

Теперь, если соотношение

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\left\{ t, y_{n-1}(t) \right\} dt$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\left\{ t, y_{n-1}(t) \right\} dt$$

---

[1] Bromwich, Theory of Infinite Series, § 45.

верно, отсюда следует, что $y(x)$ будет решением интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left\{t, y(t)\right\} dt.$$

Законность перемены порядка интегрирования и перехода к пределу может быть доказана следующим образом:

$$\left| \int_{x_0}^{x} \left[f\left\{t, y(t)\right\} - f\left\{t, y_{n-1}(t)\right\}\right] dt \right| < K \int_{x_0}^{x} \left| y(t) - y_{n-1}(t) \right| dt$$

$$< K\varepsilon_n \left| x - x_0 \right| < K\varepsilon_n h,$$

где ε_n не зависит от x и стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Функция $f\{t, y(t)\}$ непрерывна в интервале $x_0 - h \leqslant t \leqslant x_0 + h$, следовательно

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f\left\{t, y(t)\right\} dt$$

$$= f\left\{x, y(x)\right\}.$$

Отсюда следует, что *предельная функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению; она также приводится к y_0, когда x принимает значение x_0.*

Остается доказать, что это решение $y(x)$ единственное. Предположим, что $Y(x)$ яв яется решением, отличным от $y(x)$, удовлетворяющим начальному условию $Y(x_0) = y_0$ и непрерывным в интервале $(x_0, x_0 + h')$, где $h' \leqslant h$, а h' таково, что условие,

$$|Y(x) - y_0| < b$$

удовлетворяется для этого интервала. Тогда, поскольку $Y(x)$ является решением данного уравнения, оно удовлетворяет интегральному уравнению

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left\{t, Y(t)\right\} dt$$

и следовательно

$$Y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f\left\{t, Y(t)\right\} - f\left\{t, y_{n-1}(t)\right\}\right] dt.$$

Пусть $n = 1$, тогда

$$Y(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f\left\{t, Y(t)\right\} - f\left\{t, y_0\right\}\right] dt,$$

и из условия Липшица следует, что

$$|Y(x) - y_1(x)| < Kb(x - x_0).$$

Аналогично при $n = 2$

$$\left| Y(x) - y_2(x) \right| < \left| \int_{x_0}^{x} \left[f\{t, Y(t)\} - f\{t, y_1(t)\} \right] dt \right|$$

$$< K \int_{x_0}^{x} \left| Y(t) - y_1(t) \right| dt$$

$$< K \int_{x_0}^{x} Kb(t - x_0)\, dt = \frac{1}{2} K^2 b\,(x - x_0)^2$$

и в общем случае

$$\left| Y(x) - y_n(x) \right| < \frac{K^n b\,(x - x_0)^n}{n!},$$

откуда

$$Y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$$

для всех значений x в интервале $(x_0,\ x_0 + h')$, поэтому полученное новое решение тождественно предыдущему. Следовательно имеется только одно непрерывное решение диференциального уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям.

3·21. Замечания к методу последовательных приближений. Оба основных допущения, которые были сделаны относительно поведения функции $f(x, y)$ в области D, именно предположение непрерывности и выполнения условия Липшица, совершенно независимы. Возникает вопрос о необходимости этих допущений.

Непрерывность $f(x, y)$ не является необходимой для существования непрерывного решения; предыдущее исследование требует только, чтобы $f(x, y)$ была ограничена и чтобы существовали интегралы типа

$$\int_{x_0}^{x} \left| f\{t, y_n(t)\} \right| dt.$$

В частности, $f(x, y)$ допускает конечное число точек разрыва, причем все они первого рода[1].

Например, диференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - 2x) \text{ при } x > 0,$$

$$= y(2x - 1) \text{ при } x < 0$$

допускает непрерывное решение, удовлетворяющее начальному

[1] Они могут быть дискретными точками или линиями, параллельными оси y; любые другие линии разрывов означают нарушение условия Липшица по всему конечному промежутку. Ми [Mie, Math. Ann., 43 (1893), стр. 553] показал, что решения существуют всегда, когда $f(x, y)$ непрерывна относительно y и прерывна, но интегрируема (в смысле Римана) относительно x.

условию $y=1$ при $x=1$. Это решение имеет вид

$$y=e^{x-x^2} \text{ при } x \geqslant 0,$$

$$=e^{x^2-x} \text{ при } x \leqslant 0$$

и справедливо для всех действительных значений x, более того — оно единственное.

С другой стороны, для обеспечения единственности решения должно быть принято условие Липшица или аналогичное условие. Нетрудно построить уравнение, для которого условие Липшица не удовлетворяется и которое допускает больше одного непрерывного решения, удовлетворяющего начальным условиям [1]. Так например, в уравнении

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}$$

условие Липшица нарушено в области, содержащей линию $y=0$. Уравнение допускает два действительных непрерывных решения, удовлетворяющих начальным условиям $x=0$, $y=0$, именно

$$(1^\circ)\ y=0,$$

$$(2^\circ)\ y=\frac{1}{4}x^2 \text{ при } x \geqslant 0,$$

$$=-\frac{1}{4}x^2 \text{ при } x \leqslant 0.$$

Другой пример дается уравнением

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

где

$$f(x,y)=\frac{4x^3y}{x^4+y^2} \text{ при } x \text{ и } y, \text{ не равных нулю,}$$

$$=0 \text{ при } x=y=0.$$

Легко доказать, что $f(x, y)$ является непрерывной функцией x и y. С другой стороны

$$f(x, Y)-f(x, y)=\frac{4x^3(x^4-yY)}{(x^4+y^2)(x^4+Y^2)}(Y-y).$$

Если $y=px^2$, $Y=qx^2$, то

$$|f(x, Y)-f(x, y)|=4\left|\frac{1-pq}{(1+p^2)+(1+q^2)}\right|\frac{|Y-y|}{|x|},$$

следовательно условие Липшица не удовлетворяется ни в одной области, содержащей начало.

Уравнение допускает решение

$$y=c^2-\sqrt{x^4+c^4},$$

---

[1] Peano, Math. Ann., 37, (1890), 182, Mie, loc. cit.; Perron, Math. Ann. 76 (1915), 471.

где c — произвольная действительная постоянная, следовательно существует бесконечное число решений, удовлетворяющих начальным условиям $x=0$, $y=0$.

Этот вопрос был подробно исследован Осгудом[1], который доказал, что если $f(x, y)$ непрерывна в соседстве с (x_0, y_0), то существует однократная бесконечность решений, удовлетворяющих начальным условиям. Эти решения целиком лежат в пределах площади, ограниченной двумя крайними решениями

$$y = Y_1(x), \quad y = Y_2(x).$$

Для существования и единственности решения необходимо и достаточно, чтобы $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ были тождественны. Это возможно, если удовлетворено условие Липшица, а также, если условие Липшица заменено каким-либо из менее ограничивающих условий

$$|f(x, Y) - f(x, y)| < K_1 |Y - y| \log \frac{1}{|Y-y|},$$

$$|f(x, Y) - f(x, y)| < K_2 |Y - y| \log \frac{1}{|Y-y|} \log\log \frac{1}{|Y-y|},$$

где $K_1, K_2, \ldots$ — постоянные.

Постоянная K, которая входит в условие Липшица, определяет для любого данного значения x быстроту сходимости сравниваемого ряда

$$\sum \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n,$$

и следовательно показывает законность применения ряда

$$y_0 + \sum_{r=1}^{n} \{y_r(x) - y_{r-1}(x)\},$$

являющегося приближением к предельной функции $y(x)$. Таким образом, если K мало, то $y_n(x)$ будет стремиться к пределу $y(x)$ быстрее, чем если бы K было велико. В большинстве встречающихся на практике случаев K является верхней границей

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

в области D. Чтобы воспользоваться этим, рассмотрим семейство кривых

$$f(x, y) = C$$

для всех значений постоянной C. Типичная кривая этого семейства пересекает каждую интегральную кривую в точке, в которой градиент последней равен C. Эти кривые называются

[1] Osgood, Monatshr. Math. Phys. 9 (1898), 331.

изоклинами[1]. Пусть изоклинальные линии будут нанесены для последовательности дискретных значений C, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга (например целых) и пусть будет проведена линия параллельно оси y. Тогда интервалы вдоль этой линии, в которых точки пересечения с изоклинальными линиями густо расположены, соответствуют большим значениям K, в то время, как интервалы, в которых точки пересечения расположены реже, соответствуют меньшим значениям K. Это объясняет, почему метод последовательных приближений наиболее успешно применяется как практический метод вычисления в областях, где изоклинальные линии проходят более или менее параллельно оси y[2].

Метод последовательных приближений приводит к решению, которое, как было показано, сходится в интервале $|x-x_0| \leqslant h$, где h — меньше a и b/M. Но выше было отмечено, что сделанное в самом начале допущение о том, что некоторые условия удовлетворяются по всей области $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$ — было излишне ограничивающим. Если область $|x-x_0| \leqslant k$, $|y-y_0| \leqslant M|x-x_0|$ может быть такой, в которой $f(x, y)$ удовлетворяла бы необходимым условиям в этой области, а M была бы верхней границей $|f(x, y)|$, то k конечно будет не меньше, а может быть даже значительно больше, чем h. Некоторым исследователям[3] удалось расширить область, в которой решение сходится, но общий метод определения точных границ интервала сходимости до настоящего времени еще не найден.

3·22. Изменение начальных условий. Пусть данное начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$ заменено новым условием $y=y_0+\eta$ при $x=x_0$, где $(x_0, y_0+\eta)$ — точка в области D, так что $(\eta) \leqslant \delta$. Тогда вместо последовательности функций

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x),$$

определенных в § 3·2, получим последовательность

$$Y_1(x), \quad Y_2(x), \ldots Y_n(x),$$

определенную следующим образом

$$Y_1(x) = y_0 + \eta + \int_{x_0}^{x} f\{t, y_0+\eta\}\, dt,$$

---

[1] Термин этот был впервые введен Кристалем [Chrystall, Wedderburn, Proc. Roy. Soc. Edin., 24 (1902), 400].

[2] Практические методы приближенных вычислений, основанные на методе последовательных приближений, были предложены и описаны Северини [Severini, Rend. Ist. Lomard. (2), 31 (1898) 657, 950] и Коттоном [Cotton, C. R. Acad. Sc. Paris, 140 (1905), 494; 141 (1905, 177; 146 (1908), 274, 510; Math. Ann. 31 (1908), 107].

[3] Lindelöf, C. R. Acad. Sc. Paris, 118 (1894), 454; J. de Math. 4, (10), 1894, 117; Picard, Traité d'Analyse, 3, 88; (2 nd ed.) 340; см. также § 3·41.

$$Y_2(x) = y_0 + \eta + \int_{x_0}^{x} f\{t,\ Y_1(t)\}\, dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_n(x) = y_0 + \eta + \int_{x_0}^{x} f\{t,\ Y_{n-1}(t)\}\, dt.$$

Существование и единственность решения

$$Y(x) = \lim Y_n(x)$$

получается, как и в предыдущем случае. Теперь

$$\left| Y_1(x) - y_1(x) \right| \leqslant \delta + \left| \int_{x_0}^{x} [f\{t, y_0 + \eta\} - f\{t,\ y_0\}]\, dt \right|$$

$$< \delta + K\delta\, |x - x_0|,$$

$$\left| Y_2(x) - y_2(x) \right| \leqslant \delta + \left| \int_{x_0}^{x} [f\{t,\ Y_1(t)\} - f\{t,\ y_1(t)\}\, dt \right|$$

$$< \delta + K\delta\, |x - x_0| + \frac{1}{2} K^2\delta\, |x - x_0|^2$$

и по индукции

$$|Y_n(x) - y_n(x)| < \delta + K\delta\, |x - x_0| + \ldots + \frac{1}{n!} K^n\delta\, |x - x_0|^n$$

$$< \delta e^{K\,|x-x_0|},$$

так что в пределе

$$|Y(x) - y(x)| \leqslant \delta e^{K\,|x-x_0|},$$

следовательно при $|x - x_0| \leqslant h$ решение равномерно непрерывно при начальном значении y_0. Чтобы показать это, его можно написать

$$y(x, y_0) \text{ или } y(x - x_0, y_0).$$

Более того,

$$\left| \frac{y_n(x, y_0 + \eta) - y_n(x, y_0)}{\eta} \right| < 1 + K\,|x - x_0| + \ldots + \frac{1}{n!} K^n\, |x - x_0|^n,$$

следовательно

$$\left| \frac{\partial y_n(x, y_0)}{\partial y_0} \right| \leqslant 1 + K\,|x - x_0| + \ldots + \frac{1}{n!} K^n\, |x - x_0|^n,$$

откуда можно вывести, что ряд

$$\frac{\partial y(x, y_0)}{\partial y_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\{y_n(x, y_0) - y_{n-1}(x, y_0)\}}{\partial y_0}$$

абсолютно и равномерно сходится; поэтому $y(x, y_0)$ равномерно диференцируется по y_0 при $|x - x_0| \leqslant h$.

Из доказательства, аналогичного предыдущему, видно, что если диференциальное уравнение содержит параметр λ, т. е. если

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \lambda),$$

где функция $f(x, y; \lambda)$ однозначна и непрерывна и удовлетворяют условию Липшица равномерно в области D при $\Lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda_2$, то решение непрерывно относительно λ и равномерно диференцируемо по λ при $|x - x_0| \leqslant h$.

3 · 23. Особые точки. Особая точка может быть определена как точка плоскости (x, y), в которой одно из условий, необходимых для установления теоремы существования, перестает быть справедливым.

Действительно, если для двух начальных значений (x_0, y_0) решение (a) прерывно, (b) не единственное и (c) не существует, то (x_0, y_0) является особой точкой уравнения. Для иллюстрации решения уравнения в особой точке или в соседстве с ней можно привести следующие примеры:

$$(1^\circ) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Условия, необходимые для существования единственного и непрерывного решения, удовлетворяются, за исключением соседства с $x = 0$. Решение, соответствующее двум начальным значениям (x_0, y_0), имеет вид

$$y = \frac{y_0}{x_0} x,$$

где $x_0 \neq 0$. Если $x_0 = 0$ и $y_0 \neq 0$, то решение приводится к виду

$$x = 0.$$

Единственным исключением является случай, когда $x_0 = y_0 = 0$; единственной особой точкой в конечной части плоскости (x, y) является начало. Теперь *каждая* интегральная кривая проходит через начало, которое является *узлом* интегральных кривых

$$(2^\circ) \qquad \frac{dy}{dx} = m\frac{y}{x}.$$

В этом случае также единственной особой точкой является начало. Любой другой точке (x_0, y_0) соответствует решение

$$y = y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^m.$$

Семейство интегральных кривых, соответствующее всем возможным значениям (x_0, y_0) касается оси x в начале, если $m > 1$ и оси y в начале, если $0 < m < 1$. Таким образом, если $m > 0$, каждая интегральная кривая проходит через начало.

С другой стороны, если $m < 0$, например $m = -p$, то решение будет иметь вид

$$yx^p = y_0 x_0^p.$$

Семейство интегральных кривых имеет асимптотами оси x и y. Вырожденная кривая

$$yx^p = 0$$

проходит через начало. Начало называется *седлом*, потому что в соседстве с ним интегральные кривые походят на контуры перевалов через горы.

(3°) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}.$$

Начало является единственной особой точкой; любой другой точке (x_0, y_0) соответствует решение

$$y = \frac{y_0}{x_0} x + x \log\left|\frac{x}{x_0}\right|.$$

Начало является *узлом* интегральных кривых

(4°) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Решение в общем случае имеет вид

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Никакая действительная интегральная кривая, за исключением вырожденной кривой $x^2 + y^2 = 0$, не проходит через начало, которое называется *фокальной точкой* (*фокусом*).

(5°) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Это уравнение наиболее эффективно решается преобразованием к полярным координатам.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

после преобразования оно примет вид

$$\frac{dr}{d\theta} = r.$$

Интегральные кривые образуют семейство логарифмических спиралей

$$r = ce^{\theta}.$$

Каждая кривая семейства проходит через каждую точку плоскости, за исключением начала. Но ни одна интегральная кривая не проходит через начало, которое является *фокусом* каждой кривой семейства.

Нужно отметить, что все эти примеры являются частными случаями общего уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy},$$

которое может быть проинтегрировано методом § 2 · 12. Мы найдем, что с точки зрения поведения интегральных кривых в соседстве с началом уравнение получится одного из трех основных типов

$$\text{I} \quad (b-c)^2+4ad>0,$$

$$\text{II} \quad (b-c)^2+4ad<0,$$

$$\text{III} \quad (b-c)^2+4ad=0.$$

В случае I начало представляет собой узел, если $ad-bc<0$, и седло, если $ad-bc>0$; в случае II начало является фокусом, а в случае III — узлом.

3 · 3. Распространение метода последовательных приближений на систему уравнений первого порядка. Пусть система уравнения имеет вид

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\frac{dy_2}{dx}=f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_m}{dx}=f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

тогда, при указанных ниже условиях, *существует единственная последовательность непрерывных решений этой системы уравнений, которые принимают данные значения* $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ при $x=x_0$. Приведем кратко доказательство этого; метод точно соответствует данному в предыдущем параграфе.

Функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ полагаем однозначными и непрерывными относительно их $m+1$ аргументов, если эти аргументы ограничены в области D, определяемой условиями

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y_1-y_1^0|\leqslant b, \ldots, \quad |y_m-y_m^0|\leqslant b_m$$

Пусть наибольшая из верхних границ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ в этой области равна M; если h меньшее из $a, b|M, \ldots, b_m|M$, то x может быть более ограничен, если это необходимо, условием $|x-x_0|<h$.

Необходимо ввести условие Липшица

$$|f_r(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)-f_r(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)|<K_1|Y_1-y_1|+$$
$$+K_2|Y_2-y_2|+\ldots+K_m|Y_m-y_m|$$

для $r=1, 2, \ldots, m$.

Теперь определим функции $y_1^n(x), y_2^n(x), \ldots, y_m^n(x)$ соотношениями

$$y_r^n(x) = y_r^0 + \int_{x_0}^{x} f_r\left[t, y_1^{n-1}(t), y_2^{n-1}(t), \ldots, y_m^{n-1}(t)\right] dt,$$

тогда методом индукции можно доказать, что

$$\left| y_r^n(x) - y_r^{n-1}(x) \right| < \frac{M(K_1 + K_2 + \ldots + K_m)^{n-1}}{n!} \left| x - x_0 \right|^n,$$

а существование, непрерывность и единственность последовательности решений следует непосредственно. Поскольку диференциальное уравнение порядка m

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

эквивалентно последовательности m уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{m-2}}{dx} = y_{m-1},$$

$$\frac{dy_{m-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{m-1}),$$

отсюда следует, что если f — непрерывно и удовлетворяет условию Липшица в области D, то *уравнение допускает единственное непрерывное решение, которое вместе с ее первыми $m-1$ производными, также являющимися непрерывными, примет произвольную последовательность начальных условий для начального значения $x = x_0$.*

3 · 31. Применение к системе линейных уравнений. Рассмотрим последовательность m линейных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \ldots + p_{im}y_m + r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где коэфициенты p_{ij} и r_i непрерывные функции x в интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

Правый член уравнения поэтому непрерывен для всех значений $y_1, y_2, \ldots, y_m$, когда x меняется в интервале (a, b). Никакие дальнейшие ограничения не нужны; последовательность непрерывных решений

$$y_1(x), \; y_2(x), \ldots, \; y_m(x)$$

существует и является единственной в интервале (a, b).

Если же коэфициенты непрерывны для всех положительных и отрицательных значений x, то последовательность решений будет непрерывна для всех действительных значений x. Это имеет место, например, когда все функции p_{ij} и r_i, представлены в виде полиномов от x.

Допустим, что коэфициенты p_{ij} и r_i, помимо того, что они являются непрерывными функциями x в интервале (a, b), представляют собой еще и аналитические[1] функции параметра λ в области Λ. Модули (p_{ij}) следовательно ограничены.

Пусть K (число, не зависящее от λ) будет их верхней границей.

Тогда интегралы, например

$$y_i^n(x,\lambda) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} \{p_{i1}(t)\, y_1^{n-1}(t,\lambda) + \ldots + p_{im}(t)\, y_m^{n-1}(t,\lambda) + r_i(t)\}\, dt,$$

непрерывны относительно x и аналитические относительно λ.

Аналогично

$$|y_i^n(x,\lambda) - y_i^{n-1}(x,\lambda)| < \frac{M(mK)^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n.$$

Таким образом сравнение ряда

$$y_i^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{y_i^n(x,\lambda) - y_i^{n-1}(x,\lambda)\}$$

со степенным рядом

$$M + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(mK)^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$$

показывает, что функции $y_i^n(x,\lambda)$ стремятся соответственно к пределам $y_i(x,\lambda)$ равномерно относительно (x, λ) при $a \leqslant x \leqslant b$ и λ в области Λ. Следовательно решения $y_i(x,\lambda)$ непрерывны относительно x и являются аналитическими относительно λ. В частности, если коэфициенты являются целыми функциями (или полиномами) от λ, то решения $y_i(x,\lambda)$ будут также целыми функциями λ и могут быть написаны в виде ряда

$$y_i(x,\lambda) = u_{i0} + u_{i1}\lambda + \ldots + u_{ir}\lambda^r + \ldots \qquad (i = 1, 2\ldots, m),$$

который равномерно сходится для всех значений λ при $a < x < b$. Если начальные условия не содержат параметра λ, одно u_{i0} должно удовлетворять соответствующим начальным условиям, в то время как $u_{ij}\,(j > 0)$ приводится к нулю для начального значения x.

Часто для получения решения уравнения или последовательности уравнений, содержащих параметр λ в виде ряда, удобно принять решение в этой форме, а затем продолжать методом неопределенных коэфициентов[2].

---

[1] Неудобно ограничивать разбор действительными значениями λ, так как приходится часто рассматривать мнимые или комплексные значения. Пусть λ будет комплексным числом, ограниченным в области Λ диаграммы Арганда (или в плоскости λ), с коэфициентами аналитическими относительно λ, т. е. λ однозначна, непрерывна и имеет единственную производную (независящую от направления приближения) в каждой точке области Λ.

[2] См. Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste I и II.

3 · 32. Теорема существования для линейного диференциального уравнения *n*-го порядка. Как мы уже указывали выше (§ 1 · 5), линейное диференциальное уравнение

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^n}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=r(x)$$

эквивалентно системе n линейных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\ \frac{dy_1}{dx}=y_2,\ldots,\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=\frac{r(x)}{p_0(x)}-\frac{p_n(x)}{p_0(x)}y-\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}y_1-\ldots-\frac{p_1(x)}{p_0(x)}y_{n-1}.$$

Из предыдущего раздела следует, что *если $p_0(x)$, $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ и $r(x)$ являются непрерывными функциями x в интервале $a\leqslant x\leqslant b$, а $p_0(x)$ не обращается в нуль в любой точке этого интервала, то диференциальное уравнение допускает единственное решение, которое вместе с ее первыми $(n-1)$ производными непрерывно в интервале (a, b) и удовлетворяет начальным условиям*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

где x_0 — точка в интервале (a, b).

Приведем прямое доказательство этой теоремы, но для того, чтобы сократить работу, ограничимся уравнением второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=r,$$

связанным с начальными условиями

$$y(c)=\gamma,\ y'(c)=\gamma',$$

здесь c — внутренняя точка в интервале (a, b), где p, q и r непрерывны.

Предварительно рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=v(x);$$

решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$y=\int\limits_c^x(x-t)\,v(t)dt+\gamma'(x-c)+\gamma,$$

и это решение единственное.

Пусть $y_0(x)$ и $y'_0(x)$ будут непрерывными функциями x в интервале (a, b) и образуем уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=r(x)-qy_0(x)-py'_0(x).$$

Пусть $y = y_1(x)$ будет решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям $y_1(c) = \gamma$, $y_1'(c) = \gamma'$ и следовательно уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(x) - qy_1(x) - py_1'(x),$$

решение которого, удовлетворяющее начальным условиям, обозначим $y_2(x)$.

Продолжая процесс, получим последовательность функций

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$$

непрерывных и диференцируемых в интервале (a, b) так, что

$$y_n(c) = \gamma, \ y_n'(c) = \gamma'.$$

Докажем теперь, что эта последовательность имеет предел и что предельная функция является искомым решением. Напишем

$$u_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x),$$

тогда

$$\frac{d^2u_n(x)}{dx^2} = -qu_{n-1}(x) - pu_{n-1}'(x),$$

и поскольку

$$u_n(c) = 0, \ u_n'(c) = 0,$$

то

$$u_n(x) = \int_c^x \{-q(t)u_{n-1}(t) - p(t)u_{n-1}'(t)\}(x-t)\,dt,$$

$$u_n'(x) = \int_c^x \{-q(t)u_{n-1}(t) - p(t)u_{n-1}'(t)\}\,dt.$$

Коэфициенты $p(x)$ и $q(x)$ конечны в интервале (a, b), так что

$$|p(x)| + |q(x)| \leqslant M;$$

существует такое число A, что

$$|u_1(x)| \leqslant A, \quad |u_1'(x)| \leqslant A.$$

Пусть L будет больше 1 и $b - a$, тогда методом индукции получим

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{AM^{n-1}L^{2n-2}}{(n-1)!},$$

а $|u_n'(x)|$ будет удовлетворять тому же неравенству.

Ряды

$$y_0(x) + \{y_1(x) - y_0(x)\} + \ldots + \{y_n(x) - y_{n-1}(x)\} + \ldots$$

и

$$y_0'(x) + \{y_1'(x) - y_0'(x)\} + \ldots + \{y_n'(x) - y_{n-1}'(x)\} + \ldots$$

поэтому абсолютно и равномерно сходятся в интервале (a, b). Следовательно функции

$$y(x) = \lim y_n(x), \quad y'(x) = \lim y'_n(x)$$

существуют и непрерывны в интервале (a, b). Теперь

$$q(x)y(x) + p(x)y'(x) = q(x)y_0(x) + p(x)y'_0(x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{ q(x)u_n(x) + p(x)u'_n(x) \}$$

$$= r(x) - y''_1(x) - \sum_{n=2}^{\infty} u''_n(x)$$

$$= r(x) - y''(x),$$

поскольку ряд, представляющий $y''(x)$, равномерно сходится в интервале (a, b).

Следовательно, предельная функция $y(x)$ удовлетворяет диференциальному уравнению; остается доказать, что это единственное решение, удовлетворяющее всем указанным условиям. Предположим, что два таких решения $y(x)$ и $Y(x)$ существуют, и пусть

$$v(x) = Y(x) - y(x).$$

Тогда $v(x)$ удовлетворило бы однородному диференциальному уравнению

$$\frac{d^2v}{dx^2} + p(x)\frac{dv}{dx} + q(x)v = 0$$

вместе с начальными условиями

$$v(c) = 0, \quad v'(c) = 0.$$

Это невозможно, потому что $v_1(x)$ и $v_2(x)$ являются любыми двумя явными решениями однородного уравнения, следовательно

$$v_1(x)\{v''_2(x) + p(x)v'_2(x) + q(x)v(x)\} - v_2(x)\{v''_1(x) +$$
$$+ p(x)v'_1(x) + q(x)v_1(x)\} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\{v_1(x)v'_2(x) - v_2(x)v'_1(x)\} + p(x)\{v_1(x)v'_2(x) - v_2(x)v'_1(x)\} = 0$$

линейное диференциальное уравнение первого порядка, общее решение которого имеет вид:

$$v_1(x)v'_2(x) - v_2(x)v'_1(x) = Ce^{-\int_c^x p(x)dx},$$

где C — постоянная, определяемая начальными значениями $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v'_1(x)$, $v'_2(x)$. Это известно как *тождество Абеля*[1].

[1] Abel J. für. Math., 2 (1827), 22 [Œuvres complètes (1839) 1, 93; (1881), 1 251].

Теперь пусть $v_1(x)$ будет решением, удовлетворяющим начальным условиям

$$v_1(c) = v_1'(c) = 0,$$

тогда $C = 0$ и

$$v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = 0$$

тождественно. Если функция $v_1(x)$ не равна нулю, то это тождество может быть написано в виде

$$\frac{v_2'(x)}{v_2(x)} = \frac{v_1'(x)}{v_1(x)};$$

следовательно $v_2(x)$ постоянная, умноженная на $v_1(x)$, откуда решения $v_1(x)$ и $v_2(x)$ не являются независимыми. Это доказывает, что $v_1(x)$ тождественно равно нулю, следовательно решение $y(x)$ единственное.

Если коэфициенты $p(x), q(x), r(x)$ зависят от вещественного параметра λ и являются непрерывными для всех значений x в интервале (a, b), при λ, лежащих между Λ_1 и Λ_2 то можно доказать, что $y(x)$ непрерывная функция от λ, если λ лежит в пределах замкнутого интервала внутри (Λ_1 и Λ_2). Достаточно придать M такое значение, чтобы неравенство

$$|p(x)| + |q(x)| \leqslant M$$

было справедливо для всех значений λ в интервале (Λ_1, Λ_2), тогда последующие неравенства доказывают равномерную сходимость ряда

$$y_0(x) + \{y_1(x) - y_0(x)\} + \ldots + \{y_n(x) - y_{n-1}(x)\} + \ldots$$

и его производной для всех значений x в $a \leqslant x \leqslant b$ и для любого замкнутого интервала λ в интервале (Λ_1, Λ_2). Из этого непосредственно следует существование и равномерная непрерывность предельных функций $y(x)$ и $y'(x)$. Слегка изменив теорему, ее можно распространить на случай комплексного параметра λ.

3·4. Метод Коши-Липшица. Этот метод доказательства существования решений диференциального уравнения или системы уравнений значительно отличается от метода последовательных приближений. Он действительно является улучшением не вполне строгой теоремы существования, данной Коши[1].

---

[1] Первоначальный метод был разработан Коши в его лекциях в École Polytechnique между 1820 и 1830 гг.; он приведен в Sur l'intégration des équations différentielles, Prague, 1835, и в Exercises d'Analyse, 1840, 327 [Œuvres complètes, (2), 11, 399]. В более полной форме он дан Муаньо. [Moigno, Leçons de calcul. 2(1844), 385, 513]. Сущность метода дана была еще Эйлером [Inst. Calc. Int, 1(1766). 493]. Улучшение метода, сделанное Липшицом, дано в Bull. Sc. Math., 10 (1876), 149.

Пусть (x_0, y_0) — начальные значения, которые должны удовлетворяться решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

разделим интервал (x_0, x) на n частей

$$(x_0, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{n-1}, x)$$

таким образом, что

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x,$$

и рассмотрим последовательность $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, определяемую следующим образом

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогда сумма

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1})$$

аналогична сумме, которая приводит к выражению Коши для определенного интеграла. Мы эту сумму сейчас обобщим чтобы показать наиболее близкую возможную аналогию с более общим определением Римана[1].

Рассмотрим треугольник ABC (фиг. 2), образованный тремя прямыми линиями

$$X = x_0 + h,\ Y = y_0 + M(X - x_0),\ Y = y_0 - M(X - x_0),$$

где h — соответствует определению, приведенному в § 3·2. Тогда, если существует непрерывная интегральная кривая, проходящая через вершину A, то она будет лежать ниже AB и выше AC, потому что для любого x при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ градиент интегральной кривой меньше градиента AB и больше градиента AC. Разделим треугольник на полоски линиями $X = x_1$, $X = x_2, \ldots$, $X = x_n$, параллельными BC. Первая из этих полосок представляет собой треугольник Ab_1c_1, вторая, — трапецию $c_1b_1b_2c_2$ и т. д.

Пусть верхняя и нижняя границы функции $f(x, y)$ в треугольнике Ab_1c_1 равны M_1 и m_1, тогда

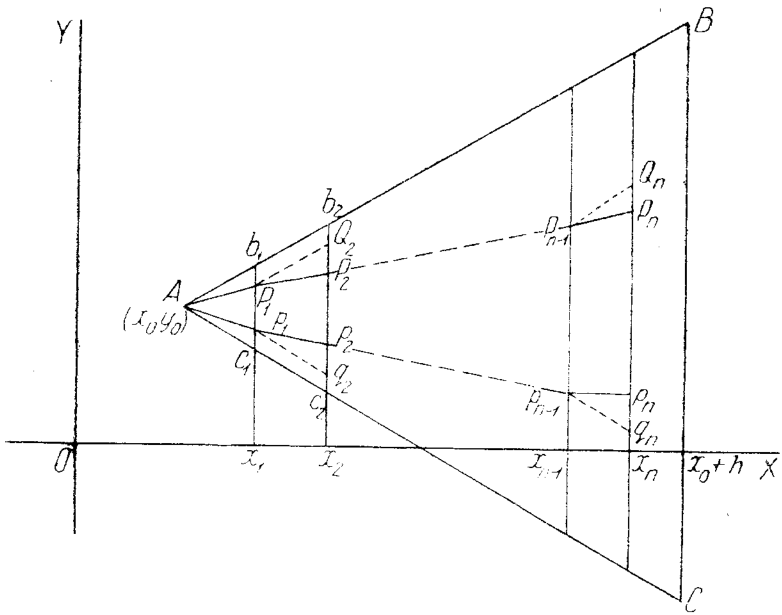
$$-M \leqslant m_1 < M_1 \leqslant M.$$

---

[1] Это обобщение было введено Гурса [Goursat, Cours d'Analyse, 2 (2 изд.), 375]. Обобщение другим методом дано Коттоном [Cotton, Acta Math., 31 (1908), 107].

Предположим что P_1 и p_1 — точки на линии $X = x_1$, ординаты которой равны соответственно $Y_1 = y_0 + M_1(x_1 - x_0)$ и $y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0)$.

Проведем P_1Q_2 и p_1q_2 параллельно AB и AC, соответственно до пересечения с линией $X = x_2$ в точках Q_2 и q_2. Пусть M_2 и m_2 будут верхними и нижними границами функции $f(x, y)$ в трапеции $p_1P_1Q_2q_2$; тогда, поскольку эта трапеция лежит целиком



Фиг. 2.

внутри трапеции $c_1b_1b_2c_2$, отсюда следует, что $-M \leqslant m_2 < M_2 \leqslant M$. Пусть P_2 и p_2 — точки на линии $X = x_2$ с ординатами $Y_2 = Y_1 + M_2x_2 - x_1$, и $y_2 = y_1 + m_2\ (x_2 - x_1)$ соответственно. Процесс будет продолжаться от одной трапеции к следующей до тех пор, пока будут достигнуты точки P_n и p_n на линии $X = x$, ординаты которых

$$Y_n = Y_{n-1} + M_n(x - x_{n-1}) \text{ и } y_n = y_{n-1} + m_n(x - x_{n-1}).$$

Таким образом определены два полигона $AP_1P_2, \ldots, P_n$ и $Ap_1p_2, \ldots, p_n$, которые лежат целиком внутри угла CAB.

Суммы

$$Y_n = y_0 + M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x - x_{n-1})$$

и

$$y_n = y_0 + m_1(x_1 - x_0) + m_2\ (x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x - x_{n-1})$$

соответствуют суммам S_n и s_n в классической теории интегрирования Римана[1]. Чтобы полностью воспользоваться этой аналогией, напишем S_n для Y_n и s_n для y_n. Тогда, если S_ν и s_ν — соответствующие суммы, возникающие из нового способа подразделения той же области (x_0, x) на ν интервалов, то

$$S_n > s_\nu; \quad S_\nu > s_n.$$

При увеличении числа подразделений n или ν введением новых точек подразделения, S_n и S_ν не увеличиваются так же, как и s_n и s_ν не уменьшаются. Пусть нижняя граница S_n и верхняя граница s_n равны соответственно Y и y, тогда

$$S_n \geqslant Y, \quad s_n \leqslant y, \quad Y \geqslant y.$$

Следовательно

$$S_n - s_n = (S_n - Y) + (Y - y) + (y - s_n),$$

и каждый из трех взятых в скобки членов положителен или равен нулю. Отсюда, если доказать, что при $n \to \infty$

$$S_n - s_n \to 0,$$

то

$$S_n \to Y, \quad s_n \to y, \quad Y = y,$$

поскольку Y и y не зависят от n, следовательно

$$\lim S_n \quad \text{и} \quad \lim s_n$$

существуют и равны.

Остается доказать, что при заданном ε можно определить N так, чтобы

$$S_n - s_n < \varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

Это верно, если в ABC

(I) $f(x, y)$ является равномерно непрерывной функцией от x, т. е. при заданном произвольно малом λ число σ, не зависящее от x и y, может быть определено так, что

$$| f(x', y) - f(x'', y) | < \lambda \text{ при } | x' - x'' | < \sigma;$$

принимается, что число подразделений (x_0, x) настолько велико, что длина каждого интервала $x_{r-1} x_r$ меньше σ;

(II) условие Липшица

$$| f(x, y') - f(x, y'') | < K | y' - y'' |$$

удовлетворяется для всех пар точек в треугольнике ABC, лежащих на линиях, параллельных BC.

Пусть при любом данном способе подразделения при заданном значении λ

$$\delta_r = Y_r - y_r,$$

[1] Подробное объяснение метода, кратко рассмотренного здесь, см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 4·11.

тогда

$$\delta_r = \delta_{r-1} + (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1}).$$

Но

$$\begin{aligned} M_r - m_r &= f(x'_r, y'_r) - f(x''_r, y''_r) \\ &= \{f(x'_r, y'_r) - f(x''_r, y'_r)\} + \{f(x''_r, y'_r) - f(x''_r, y''_r)\}, \end{aligned}$$

где (x'_r, y'_r) и (x''_r, y''_r) — координаты любых точек в трапеции $p_{r-1}P_{r-1}Q_rq_r$.

Отсюда следует, что

$$M_r - m_r < \lambda + K\,|\,y'_r - y''_r\,|,$$

но

$$|\,y'_r - y''_r\,| \leqslant \delta_r \leqslant \delta_{r-1} + 2M(x_r - x_{r-1}),$$

следовательно

$$M_r - m_r < \lambda + 2MK(x_r - x_{r-1}) + K\delta_{r-1}.$$

Пусть интервалы взяты настолько малыми, что

$$2MK(x_r - x_{r-1}) < \lambda$$

для $r = 1, 2, \ldots, n$, тогда

$$M_r - m_r < 2\lambda + K\delta_{r-1},$$

откуда

$$\delta_r < \delta_{r-1}\{1 + K(x_r - x_{r-1})\} + 2\lambda(x_r - x_{r-1}),$$

следовательно

$$\begin{aligned} \delta_r + \frac{2\lambda}{K} &< \left(\delta_{r-1} + \frac{2\lambda}{K}\right)\{1 + K(x_r - x_{r-1})\} \\ &< \left(\delta_{r-1} + \frac{2\lambda}{K}\right) e^{K(x_r - x_{r-1})} \\ &< \left(\delta_{r-2} + \frac{2\lambda}{K}\right) e^{K(x_r - x_{r-2})} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &< \frac{2\lambda}{K} e^{K(x_r - x_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta_n + \frac{2\lambda}{K} < \frac{2\lambda}{K} e^{K(x - x_0)}$$

т. е.

$$\begin{aligned} S_n - s_n = \delta_n &< \frac{2\lambda}{K}\{e^{K(x - x_0)} - 1\} \\ &< \frac{2\lambda}{K}\{e^{Kh} - 1\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

при условии, что λ и σ достаточны малы; λ произвольна; поэтому, если n достаточно велико, а каждый интервал достаточно мал, то

$$S_n - s_n < \varepsilon,$$

ε не зависит от x, следовательно число N, не зависящее от x, существует, и это неравенство справедливо для $n > N$ и для всех значений x в интервале $(x_0, x_0 + h)$. *Выражения* S_n *и* s_n *поэтому равномерно стремятся к общему пределу* $F(x)$. Продолжим два полигона $AP_1P_2 \ldots P_n$ и $Ap_1p_2 \ldots p_n$ вправо к линии BC и примем $P(x)$ ординатой точки на верхней дуге, а $Q(x)$ — ординатой соответствующей точки на нижней дуге. Тогда

$$P(x) - Q(x) < \varepsilon.$$

Оба полигона будут стремиться равномерно к предельной кривой Γ, а именно к кривой

$$y = F(x).$$

Но $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны, следовательно непрерывна и $F(x)$ и Γ является также непрерывной кривой.

Любой другой непрерывный полигон, который лежит ниже $AP_1P_2 \ldots$ и выше $Ap_1p_2 \ldots$ имеет ту же предельную кривую Γ. В частности, полигон Λ, угловые точки которого имеют ординаты, определяемые соотношением

$$z_r = z_{r-1} + f(x_{r-1}, z_{r-1})(x_r - x_{r-1}),$$

расположен так, как указано на фиг. 3, и его пределом является кривая Γ. Если (x_r', y_r') будет любой точкой на кривой Γ, лежащей на трапеции $p_{r-1}P_{r-1}P_rp_r$, то разности

$$x_r' - x_{r-1}, \quad | y_r' - z_{r-1} |$$

могут быть сделаны произвольно малыми, подходящим выбором верхней границы

$$x_1 - x_0 \quad x_2 - x_1, \ \ldots, \ x_r - x_{r-1},$$

следовательно

$$| f(x_r', \ y_r') - f(x_{r-1}, \ z_{r-1}) |$$

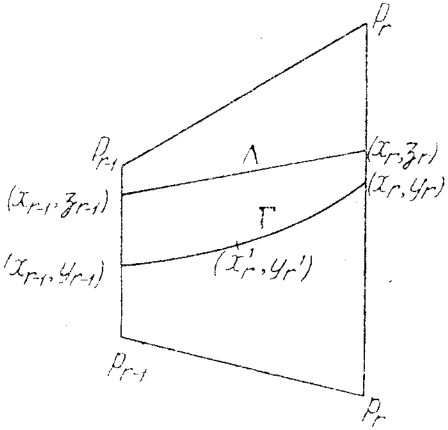
могут быть сделаны произвольно малыми. Далее градиент Γ в точке (x', y') равен $f(x', y')$, и поэтому Γ является интегральной кривой диференциального уравнения. Более того, Γ проходит через точку (x_0, y_0). Таким образом *предельная функция*

$$y = F(x)$$

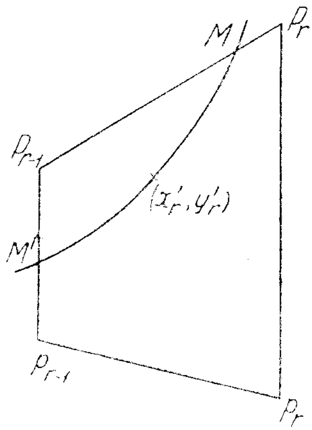
является решением диференциального уравнения и удовлетворяет начальным условиям.

Интегральная кривая Γ является единственной непрерывной интегральной кривой, которая проходит через точку A. Если бы существовала какая-либо другая интегральная кривая, то подразделение интервала $(x_0, x_0 + h)$ можно было бы продолжить до тех пор, пока эта интегральная кривая не пересекла бы какой-либо из полигонов, соответствующих этому способу подразделения. Предположим, например, что она пересекла сторону $P_{r-1}P_r$ в точке M, а M' — точка, в которой она пересекла сторону $p_{r-1}P_{r-1}$ (фиг. 4), тогда градиент хорды $M'M$ был бы равен градиенту кривой в точке (x'_r, y'_r) дуги $M'M$, но градиент интегральной кривой в точке (x'_r, y'_r) равен $f(x'_r, y'_r)$, которая, согласно определению, меньше градиента $P_{r-1}P_r$, что приводит к противоречию.

Следовательно *существует только одно непрерывное решение диференциального уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям.*



Фиг. 3.



Фиг. 4.

3·41. Развитие метода Коши-Липшица. Метод последовательных приближений и метод Коши-Липшица приводят к доказательству существования и единственности непрерывного решения в малом интервале (x_0, x_0+h). Идеальным был бы метод, который давал бы решение, равномерно сходящееся по всему большому интервалу (x_0, x_0+k), в котором решение, определяемое заданными начальными условиями, непрерывно. Преимущество метода Коши-Липшица в том, что он дает решение, сходящееся в максимальном интервале.

Чтобы показать, что это действительно так, предположим, что

$$y = F(x)$$

будет решением, при котором $y_0 = F(x_0)$. Пусть S будет полосой, ограниченной двумя прямыми линиями

$$x = x_0, \quad x = x_0 + k$$

и параллельными кривыми

$$y = F(x) - \eta, \quad y = F(x) + \eta,$$

где η — произвольно малое положительное число. Допустим, что k таково, что $F(x)$ непрерывна в интервале (x_0, x_0+k) и что η настолько мало, что условие Липшица удовлетворяется функцией $f(x, y)$ по всей полосе S.

Предположим, что интервал (x_0, x_0+k) подразделен точками, абсциссы которых следующие

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

где

$$x_n = x_0 + k.$$

Пусть

$$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$$

— соответствующие ординаты интегральной кривой Γ, а

$$y_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$$

— соответствующие угловые точки полигона Λ, определяемые рекуррентной формулой

$$z_r = z_{r-1} + f(x_{r-1}, z_{r-1})(x_r - x_{r-1})$$

с $z_0 = y_0$ (фиг. 3).

Докажем теперь, что если подразделение интервала $(x_0, x+k)$ достаточно мало, то полигон Λ будет проходить целиком внутри полосы S, а если $d_r = |z_r - y_r|$, то $d_r < \varepsilon$, где ε произвольно мало. Допустим, что угловые точки до точки (x_{r-1}, z_{r-1}) и включая ее находятся внутри полосы S, тогда при помощи теоремы о среднем значении

$$y_r = y_{r-1} + f(x'_r, y'_r)(x_r - x_{r-1}),$$

где (x'_r, y'_r) — точка на кривой Γ, лежащая между точками (x_{r-1}, y_{r-1}) и (x_r, y_r).

Следовательно

$$z_r - y_r = z_{r-1} - y_{r-1} + \{f(x_{r-1}, z_{r-1}) - f(x'_r, y'_r)\}(x_r - x_{r-1}),$$

но

$$f(x_{r-1}, z_{r-1}) - f(x'_r, y'_r) = \{f(x_{r-1}, z_{r-1}) - f(x_{r-1}, y_{r-1})\} +$$
$$+ \{f(x_{r-1}, y_{r-1}) - f(x'_r, y'_r)\},$$

и согласно условию Липшица, поскольку обе точки (x_{r-1}, z_{r-1}), (x_{r-1}, y_{r-1}) находятся в S,

$$|f(x_{r-1}, z_{r-1}) - f(x_{r-1}, y_{r-1})| < Kd_{r-1}.$$

Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна в S, она представляет собой также непрерывную функцию x вдоль Γ, и следовательно, если λ имеет произвольное значение, то σ может быть выбрана достаточно малой, так чтобы

$$|f(x_{r-1}, y_{r-1}) - f(x'_r, y'_r)| < 2\lambda, \text{ если } |x_r - x_{r-1}| < \sigma.$$

Таким образом, если подинтервал (x_r, x_{r-1}) достаточно мал, то

$$d_r < d_{r-1} + (x_r - x_{r-1})(2\lambda + Kd_{r-1}),$$

откуда, как и в предыдущем параграфе,

$$\delta_r < \frac{2\lambda}{K}\{e^{K(x_r - x_0)} - 1\}.$$

Следовательно, если λ выбрано так, что

$$2\lambda(e^{Kk} - 1) < K\eta,$$

то по индукции получим

$$| d_1 | < \eta, \ \ldots, \ | d_n | < \eta,$$

т. е. все угловые точки Λ лежат внутри полосы S.

Пусть Λ' обозначает полигон, образованный соединением последовательных точек с абсциссами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интегральной кривой Γ, и пусть $P(x)$ будет ординатой любой точки Λ, а $Q(x)$ — ординатой соответствующей точки Λ'. Тогда, если разница между наибольшим и наименьшим значением $F(x)$ в каждом подинтервале (x_{r-1}, x_r) менее $\frac{1}{2}\varepsilon$, то

$$| Q(x) - F(x) | < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

η — произвольна; пусть $\eta < \frac{1}{2}\varepsilon$, тогда

$$| P(x) - Q(x) | < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

и поскольку

$$P(x) - F(x) = \{P(x) - Q(x)\} + \{Q(x) - F(x)\},$$

отсюда следует, что по всему интервалу $(x_0, x_0 + k)$

$$| P(x) - F(x) | < \varepsilon.$$

Таким образом, *если уравнение имеет решение*

$$y = F(x),$$

непрерывное в интервале $(x_0, x_0 + k)$, а ε — произвольное положительное число, то метод Коши-Липшица определяет, при достаточном числе подразделений, функцию $P(x)$ так, что

$$| P(x) - F(x) | < \varepsilon$$

для

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + k.$$

§ 3·5. Рассмотрение теоремы существования для уравнения не первой степени. Рассмотрим диференциальное уравнение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где функция F полином от $\frac{dy}{dx}$ и однозначна относительно x и y. Пусть (x_0, y_0) будут начальными значениями (x, y), тогда, если уравнение

$$F(x, y, p) = 0$$

имеет некратный корень $p = p_0$ при $x = x_0$, $y = y_0$, то оно будет иметь только один корень

$$p = f(x, y),$$

который приводится к p_0 при $x = x_0$, $y = y_0$, а $f(x, y)$ будет однозначна в соседстве с (x_0, y_0).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по всему прямоугольнику, окружающему точку (x_0, y_0), то уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

будет иметь единственное решение, непрерывное для значений x, достаточно близких к x_0, и удовлетворяющее заданным начальным условиям. Это решение вполне удовлетворяет первоначальному уравнению для тех же значений x, следовательно проблема в данном случае не представляет ничего нового.

С другой стороны, если данное уравнение

$$F(x, y, p) = 0$$

имеет кратный корень $p = p_0$ для $x = x_0$, $y = y_0$, то p будет неоднозначной функцией (x, y) в любой области, содержащей точку (x_0, y_0), следовательно теорема существования неприменима.

Если $p = p_0$ является корнем кратности μ в (x_0, y_0), то

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \ldots = \frac{\partial^{\mu-1} F}{\partial p_0^{\mu-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{\mu} F}{\partial p_0^{\mu}} \neq 0.$$

Таким образом, если

$$x = x_0 + X, \; y = y_0 + Y, \; p = p_0 + P,$$

то уравнение $F(x, y, p) = 0$ примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} X + \frac{\partial F}{\partial y_0} Y + \frac{\partial^{\mu} F}{\partial p_0^{\mu}} \cdot \frac{P^{\mu}}{\mu!} + \ldots = 0.$$

Пусть

$$Y = p_0 X + Y_1,$$

тогда

$$p_0 + P = p = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = p_0 + \frac{dY_1}{aX};$$

следовательно

$$P = \frac{dY_1}{dX}.$$

Поскольку X и P малы, Y_1 высшего порядка, чем X. Таким образом, удерживая только члены низшего порядка

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}+p_0\frac{\partial F}{\partial y_0}\right)X+\frac{\partial^\mu F}{\partial {p_0}^\mu}\cdot\frac{P^\mu}{\mu!}+\ldots=0$$

и принимая

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}+p_0\frac{\partial F}{\partial y_0}\neq 0,$$

получим

$$p^\mu=\left(\frac{dY_1}{dX}\right)^\mu=KX+\ldots,$$

где K — постоянная, не равная нулю.

Из этого следует, что

$$Y_1=K_1X^{1+\frac{1}{\mu}}+\ldots,$$

где K_1 зависит от K и μ и не равно нулю. Таким образом, *если уравнения*

$$F(x,\ y,\ p)=0,\ \frac{\partial F}{\partial p}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{\mu-1}F}{\partial p^{\mu-1}}=0,\ \frac{\partial^\mu F}{\partial^\mu p}\neq 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$$

удовлетворяются совместно при

$$x=x_0,\ y=y_0,\ p=p_0,$$

то решение, которое принимает значение y_0 при $x=x_0$, в соседстве с $(x_0,\ y_0)$ будет

$$y=y_0+p_0(x-x_0)+K_1(x-x_0)^{1+\frac{1}{\mu}}+\ldots;$$

оно является функцией, имеющей μ значений, которые будут равны при $x=x_0$.

Наиболее общим случаем, в котором $F=0$, $F_p=0$ удовлетворяются совместно, является тот, когда $F=0$ имеет *двойной* корень $p=p_0$ для $x=x_0$, $y=y_0$ и $\mu=2$. В этом случае решение имеет вид

$$\{y-y_0-p_0(x-x_0)\}^2=A(x-x_0)^3+\ldots,$$

следовательно *в наиболее общем случае интегральная кривая имеет точку пересечения в $(x_0,\ y_0)$.*

3·51. p-дискриминант и его геометрическое место точек. Триада $(x_0,\ y_0,\ p_0)$, для которой

$$F=0,\ F_p=0,$$

называется *особым линейным элементом*. Соответствующие значения $(x_0,\ y_0)$ должны удовлетворять уравнению, полученному исключением (элиминированием) p из

$$F(x,\ y,\ p)=0,\qquad F_p(x,\ y,\ p)=0.$$

Полученное выражение (результант)[1] называется *р-дискриминантом*[2] диференциального уравнения и обозначается

$$\Delta_p F(x, y, p);$$

кривая, которую определяет уравнение

$$\Delta_p F(x, y, p) = 0,$$

называется *геометрическим местом точек р-дискриминанта* (*p*-discriminant locus).

Принимая, что $x_0 = 0, y_0 = 0$, можем написать диференциальное уравнение в виде

$$F(x, y, p) \equiv U_0 + U_1 (p - p_0) + \ldots + U_m (p - p_0)^m = 0,$$

где коэфициенты могут быть разложены в ряд по возрастающим целым степеням x и y. Поскольку $F(x, y, p)$ второго порядка относительно $p - p_0$ при $x = 0$, $y = 0$, U_0 и U_1 должны быть вида

$$U_0 = \alpha_0 x + \beta_0 y + \ldots, \quad U_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots$$

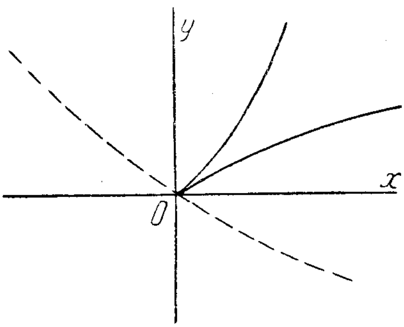
Приближение к p-дискриминанту в начале есть $p = p_0$, так как

$$\alpha_0 x + \beta_0 y = 0.$$

Но интегральная кривая определяется уравнением

$$(y - p_0 x)^2 = Ax^3 + \ldots,$$

следовательно в общем случае она не будет касательной к геометрическому месту точек p-дискриминанта (фиг. 5).



Фиг. 5.

(p-дискриминант показан пуктиром; интегральная кривая, встречающая p-дискриминант в начале — сплошной линией)

Вообще геометрическое место точек р-дискриминанта является геометрическим местом точек пересечения интегральных кривых диференциального уравнения.

[1] Необходимо отметить, что в процессе исключения ни один изменяемый множитель не должен отбрасываться. Следует рекомендовать применение общего метода, например, метод исключения Сильвестра (Sylvester's dialitic method) Cuscott and Mathews, Theory of Determinants, X, § 10.

[2] См. § 3·6.

В точке на геометрическом месте p-дискриминанта уравнение

$$F(x, y, p)=0$$

имеет не меньше двух одинаковых корней p. Это получается вследствие пересечения интегральной кривой в рассматриваемой точке. Если имеется больше двух одинаковых корней p, то имеется и некоторая кратная точка с совпадающими касательными. Предыдущая теорема будет еще более общей, если под термином геометрическое место точек пересечения понимать геометрическое место кратных точек, в которых совпадают касательные.

Однако геометрическое место точек p-дискриминанта не является только геометрическим местом точек пересечения, потому что равные корни p могут появиться и при других обстоятельствах. Наиболее важным является случай, когда последовательные члены семейства интегральных кривых имеют одну и ту же касательную, именно в точках на огибающей семейства интегральных кривых; поэтому p-дискриминант содержит огибающую во всех случаях, когда она существует. Более того, огибающая является интегральной кривой, так как ее линейные элементы совпадают с линейными элементами интегральных кривых в точках соприкосновения. Таким образом огибающая составляется из непрерывных линейных элементов, удовлетворяющих диференциальному уравнению; но линейные элементы на p-дискриминанте являются, согласно определению, особыми; поэтому огибающая называется особой интегральной кривой. Пример, когда огибающая была особым решением, рассмотрен в § 2·44 (уравнение Клеро).

Однако особая интегральная кривая не всегда бывает огибающей; исключительный случай возникает, когда особая интегральная кривая касается каждого члена семейства интегральных кривых в общей для всех кривых точке. В этом случае особая интегральная кривая будет членом общего семейства интегральных кривых; ее можно получить, если параметру семейств придать частное значение. Она называется *частной кривой.*

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$(2x-p)^2+x(y-x)^2(2x-p)-(y-x^2)^3=0,$$

решение которого имеет вид

$$y=x^2+\frac{c^2}{1+cx}.$$

Несмотря на то, что p-дискриминант этого уравнения (c-дискриминант его решения) содержит множитель $y-x^2$, кривая $y=x^2$ не является огибающей. Эта кривая не имеет никакой конечной точки, общей с интегральной кривой, для которой $c \neq 0$, следовательно она является частной кривой, соответствующей $c=0$.

Имеется еще одна возможность, именно: две непоследовательные интегральные кривые имеют общую касательную в точке на геометрическом месте p-дискриминанта. Такая точка называется *точкой совпадения* (tac-point). Общая касательная к интегральным кривым не является касательной к геометрическому месту точек p-дискриминанта, следовательно геометрическое место точек совпадения, как и геометрическое место точек пересечения, за исключением весьма специальных случаев, не будет интегральной кривой диференциального уравнения.

3·52. **c-дискриминант.** Если диференциальное уравнение может быть проинтегрировано, а его решение будет иметь вид

$$\Phi(x, y, c) = 0,$$

то огибающая, если она существует, дается уравнением (так называемое c-дискриминантиое уравнение)

$$\Delta_c \Phi(x, y, c) = 0,$$

которое получается путем исключения c из уравнений

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Как мы сейчас докажем, c-дискриминант дает не только одну огибающую.

Пусть уравнения $\Phi = 0$, $\Phi_c = 0$, решены для x и y; представим c-дискриминант в параметрическом виде

$$x = \varphi(c), \quad y = \psi(c);$$

направление касательной в любой точке геометрического места точек c-дискриминанта будет

$$\psi'(c)/\varphi'(c).$$

Поскольку

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0,$$

касательная в любой точке интегральной кривой $c = c_0$ имеет направление

$$-\frac{\partial \Phi(x, y, c_0)}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \Phi(x, y, c_0)}{\partial y}.$$

Пусть (x_0, y_0) будут координатами точки пересечения обеих кривых

$$\Phi(x, y, c_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = 0;$$

если функции φ и ψ многозначны, пусть они будут так определены, что

$$\varphi(c_0) = x_0, \quad \psi(c_0) = y_0,$$

тогда параметрические уравнения

$$x = \varphi(c), \quad y = \psi(c)$$

будут представлять ветви геометрического места точек c-дискриминанта через (x_0, y_0).

Теперь в любой точке геометрического места c-дискриминанта

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial c}=0,$$

следовательно в точке (x_0, y_0)

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0\varphi'(c_0)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0\psi'(c_0)=0.$$

Таким образом интегральная кривая через (x_0, y_0) и геометрическое место c-дискриминанта имеет общую касательную, если только

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0\neq 0, \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0\neq 0,$$

т. е. если интегральная кривая не имеет особой точки в (x_0, y_0).

Таким образом ветвь геометрического места точек c-дискриминанта через (x_0, y_0) представляет собой огибающую или геометрическое место особых точек. Геометрическое место точек c-дискриминанта разбивается на две отдельных части, одна из которых образует огибающую, а другая — геометрическое место особых точек. В наиболее общем случае особыми являются точки пересечения и узлы, так что геометрическое место c-дискриминанта содержит геометрическое место точек пересечения и узлов.

Геометрические места точек c- и p-дискриминантов имеют общую огибающую, общее геометрическое место точек пересечения, а возможно также и общую частную кривую.

Вследствие того, что явное общее решение уравнения не всегда можно получить, необходимо исследовать критерии для распознавания различных кривых, которые могут возникнуть в геометрическом месте p-дискриминанта, не прибегая к его решению.

3·521. Примеры геометрического места точек дискриминантов. (I) Кривые семейства

$$(y+c)^2 = x(x-\alpha)(x-\beta),$$

где c — параметр семейства, а α и β — постоянные ($\beta > \alpha > 0$), являются интегральными кривыми диференциального уравнения

$$4p^2x(x-\alpha)(x-\beta) = \{3x^2 - 2(\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}^2.$$

Уравнение p-дискриминанта имеет вид

$$x(x-\alpha)(x-\beta) = \{3x^2 - 2(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2 = 0,$$

а уравнение c-дискриминанта

$$x(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Все три линии

$$x=0, \quad x=\alpha, \quad x=\beta$$

являются общими для обоих геометрических мест точек, причем каждая линия касается каждого члена семейства, следовательно все три линии образуют огибающую. Остальная часть геометрического места точек разбивается на две пары совпадающих прямых линий

$$3x=\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2},$$

$$3x=\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}.$$

Они представляют собой геометрические места точек совпадения первое уравнение является геометрическим местом мнимых точек, а второе — действительных точек соприкосновения непоследовательных кривых семейства.

(II) Пусть

$$\beta=\alpha>0;$$

диференциальное уравнение семейства

$$(y+c)^2=x(x-\alpha)^2$$

имеет вид

$$4p^2x=(3x-\alpha)^2;$$

уравнение p-дискриминанта

$$x(3x-\alpha)^2=0,$$

а уравнение c-дискриминанта

$$x(x-\alpha)^2=0.$$

Общее геометрическое место точек $x=0$ является огибающей. Геометрическое место точек p-дискриминанта также содержит линию $x=\frac{1}{3}\alpha$, которая является геометрическим местом точек совпадения, а геометрическое место точек c-дискриминанта содержит линию $x=\alpha$, которая является геометрическим местом узлов.

(III) Пусть

$$\beta=\alpha=0;$$

диференциальное уравнение семейства

$$(y+c)^2=x^3$$

имеет вид

$$4p^2=9x.$$

Геометрическим местом p-дискриминанта является $x=0$, а геометрическим местом c-дискриминанта — $x^3=0$. Каждый член семейства интегральных кривых имеет точку пересечения на оси y, которая является следовательно геометрическим местом точек пересечения.

3·6. Особые решения. Если непрерывная последовательность особых линейных элементов образует интегральную кривую уравнения, то эта интегральная кривая называется особой, а соответствующее решение называется *особым решением*[1]. Поскольку особые линейные элементы существуют, согласно определению, только в точках геометрического места p-дискриминанта, особая интегральная кривая должна быть ветвью геометрического места p-дискриминанта.

Для получения направления касательной в любой точке геометрического места p-дискриминанта, диференцируем уравнение

$$F(x, y, p) = 0$$

по x, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Но в любой точке на геометрическом месте p-дискриминанта

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

следовательно направление касательной определяется из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Поскольку касательная к геометрическому месту p-дискриминанта совпадает с касательной к интегральной кривой

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

для существования особого решения необходимо, чтобы уравнения

$$F(x, y, p) = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial x} + p\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial y} = 0$$

---

[1] Примеры особых решений были впервые даны Бруком Тэйлором (Brook Taylor) в 1715 г. Первые попытки систематической трактовки предмета [Lagrange, Mém. Acad. Sc. Berlin, 1774, (Oeuvres, 4, 5)]; De Morgan, Trans. Camb. Phil. Soc. 9 (1851), 107; Darboux, C. R. Acad. Sc. Paris, 70 (1870), 1331; 71, 267; Bull. Sc. Math, 4. (1873), 158; Mansion, Bull. Acad. Sc. Belg. 34 (1872), 149; Cayley, Mess. Math. 2 (1873), 6; 6 (1877), 23 [(Coll. Math. Papers, 8. 529; 10, 19); Glaisher, ibid., 12, (1882), 1; Hamburger, J. für. Math., 112 (1893), 205], не вполве удовлетворительны. Первая полная трактовка p-дискриминанта дана Кристалем [Trans. Roy. Soc. Edin., 38 (1896), стр. 803]. Следует упомянуть еще статьи: Hill, Proc. London, Math. Soc. (1) 19 (1888), 561; 22 (1891), 216; Hudson, ibid. 33 (1901), 380. Petrovich, Math. Ann. 50 (1898), 103; Bateman, Differential Equations, IV. Теория была распространена на уравнения с трансцендентными коэфициентами, см. Hill Proc London Math. Soc. (2), 17 (1918), 149.

были удовлетворены совместно для непрерывной последовательности значений (x, y).

Предположим, наоборот, что

$$F(x, y, \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0,$$

где λ — параметр, представляют кривую. Диференцируя первое уравнение и упрощая его при помощи второго уравнения, получим направление касательной (p) в любой точке кривой

$$\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x} + p \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0.$$

Воспользовавшись третьим уравнением, получим

$$(p - \lambda) \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, если F_y не равно нулю во всех точках кривой, то

$$\lambda = p,$$

поэтому кривая является интегральной кривой диференциального уравнения

$$F(x, y, p) = 0.$$

Таким образом *условия*

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_x + pF_y = 0$$

вместе с условием $F_y \neq 0$ *достаточны для существования особого решения*[1].

3·61. Условия для геометрического места точек совпадения. Из § 3·5 мы знаем, что если

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

в конечном числе точек ветви геометрического места p-дискриминанта, то ветвь эта является геометрическим местом пересечения кратных точек. В любой точке, в которой

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

две различные интегральные кривые касаются друг друга. Если в обозначениях предыдущего параграфа $\lambda \neq p$, то интегральные кривые не соприкасаются, следовательно они отличаются от

[1] Примеры § 3·521 показывают, что огибающая может существовать при $F_y = 0$.

геометрического места p-дискриминанта или, иначе говоря, получается точка совпадения. Необходимыми условиями для точки совпадения поэтому являются

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0;$$

это означает, что точка совпадения является двойной точкой геометрического места p-дискриминанта.

Чтобы p-дискриминант мог образовать геометрическое место точек совпадения, необходимо, чтобы каждая точка некоторой определенной ветви была двойной, что невозможно, если только эта ветвь не будет двойной линией; поэтому p-дискриминант должен содержать [как и § 3·521 (I) и (II)] квадратичный множитель, который, будучи приравнен нулю, дает уравнение геометрического места точек совпадения.

Отсюда следует: *чтобы p-дискриминант был геометрическим местом точек совпадения, необходимо, чтобы все четыре уравнения*

$$F(x, y, p)=0, \quad F_p=0, \quad F_x=0, \quad F_y=0$$

были удовлетворены для непрерывной последовательности значений (x, y).

Поскольку эти уравнения удовлетворяются в каждой точке геометрического места точек совпадения

$$F_{pp}dp+F_{px}dx+F_{py}dy=0,$$
$$F_{px}dp+F_{xx}dx+F_{xy}dy=0,$$
$$F_{py}dp+F_{xy}dx+F_{yy}dy=0,$$

условие для геометрического места точек совпадения принимает вид

$$\begin{vmatrix} F_{pp}, & F_{px}, & F_{py} \\ F_{px}, & F_{xx}, & F_{xy} \\ F_{py}, & F_{xy}, & F_{yy} \end{vmatrix}=0.$$

3·611. Вывод из симметрии условия для геометрического места точек совпадения. Из симметричности условий для геометрического места точек совпадения следует, что если p-дискриминант уравнения $F(x, y, p)=0$ дает геометрическое место точек совпадения, то это справедливо и для уравнений

$$F(y, x, p)=0, \quad F(x, p, y)=0, \quad F(y, p, x)=0,$$
$$F(p, x, y)=0, \quad F(p, y, x)=0.$$

Однако, в частных случаях геометрическое место точек совпадения может быть приведено к одной точке совпадения.

Рассмотрим, например, уравнение[1]

$$F(x,\ y,\ p) \equiv (x^2 - a^2)\,p^2 - 2xyp - x^2 = 0.$$

Условиями геометрического места точек совпадения являются

$$xp^2 - yp - x = 0, \quad xp = 0, \quad (x^2 - a^2)\,p - xy = 0,$$

откуда

$$x = 0, \quad y = y, \quad p = 0.$$

Геометрическим местом точек совпадения будет $x = 0$. Если

$$F(y,\ x,\ p) \equiv (y^2 - a^2)\,p^2 - 2xyp - y^2 = 0,$$

то

$$x = x, \quad y = 0, \quad p = 0,$$

а геометрическим местом точек совпадения будет $y = 0$. Но в уравнении

$$F(x,\ p,\ y) \equiv (x^2 - a^2)\,y^2 - 2xpy - x^2 = 0$$

условиями являются

$$x = 0, \quad y = 0, \quad p = p,$$

геометрическое место точек совпадения отсутствует, имеется только одна точка совпадения в начале.

3·62. Геометрическое место точек перегиба. Интегральная кривая может рассматриваться как геометрическое место ее точек или как огибающая ее касательных. Аналитические условия для точки пересечения двух кривых в точечных координатах формально тождественны с аналитическими условиями для перегиба в линейных координатах. Вследствие того, что семейство интегральных кривых имеет геометрическое место точек пересечения, оно будет иметь в общем случае также и геометрическое место перегибов.

Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,p + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{dp}{\partial x} = 0$$

и в точке перегиба $\frac{dp}{dx} = 0$, *геометрическое место перегибов дается исключением p из уравнений*

$$F(x,\ y,\ p) = 0, \quad F_x + pF_y = 0.$$

В общем случае $\frac{d^2p}{dx^2}$ является конечной в геометрическом месте перегибов, но

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2p\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + p^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} = 0,$$

следовательно необходимо, чтобы

$$F_p \neq 0.$$

[1] Glaisher, Mess. Math., 12 (1882), 6.

3.7. Разбор специального диференциального уравнения. Рассмотрим уравнение[1]

$$F(x, y, p) \equiv \alpha y + \beta x^2 + \gamma x p + p^2 = 0.$$

Докажем, что если уравнение имеет особое решение (огибающую), то его интегральные кривые будут алгебраическими. Если уравнение решается относительно p, то

$$p = -\frac{1}{2}\{\gamma x \pm \sqrt{\gamma^2 x^2 - 4\beta x^2 - 4\alpha y}\}.$$

Пусть $y = vx^2$, тогда

$$xv' + 2v = \frac{1}{2}\{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta - 4\alpha v}\}$$

и, принимая $\alpha \neq 0$, напишем

$$u^2 = \gamma^2 - 4\beta - 4\alpha v.$$

Уравнение теперь рационально, его переменные разделяются, вследствие чего

$$\frac{u\,du}{\alpha\gamma + \gamma^2 - 4\beta \pm \alpha u - u^2} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Условия $F_p = 0$, $F_x + pF_y = 0$ для особого решения равны соответственно

$$\gamma x + 2p = 0, \ 2\beta x + \gamma p + p\alpha = 0,$$

откуда, исключая p,

$$\alpha\gamma + \gamma^2 - 4\beta = 0.$$

При этом условии, уравнение относительно u и x приводится к

$$\frac{du}{u \pm \alpha} + \frac{dx}{x} = 0$$

и имеет общее решение

$$x(u \pm \alpha)\,\mathrm{const},$$

или

$$\alpha x \pm \sqrt{-\alpha\gamma x^2 - 4\alpha y} = c,$$

где c — параметр семейства интегральных кривых. В рациональной форме решение принимает вид

$$(\alpha x - c)^2 + \alpha(\gamma x^2 + 4y) = 0,$$

а интегральные кривые составляют семейство парабол, огибающая которых является параболой

$$4y + \gamma x^2 = 0.$$

Таким образом, если существует особое решение (огибающая), то интегральные кривые будут алгебраическими. Обратное, однако, неверно. Чтобы получить условие, когда общее решение

[1] Это уравнение является первым приближением, в соседстве с началом, к уравнению $F(x, y, p) = 0$, когда оси так выбраны, что интегральная кривая касается оси x в начале [Chrystal, Trans. Roy. Soc. Edin., 38 (1896), 813].

алгебраическое, напишем уравнение в виде

$$\frac{udu}{(u-\lambda)(u-\mu)}+\frac{dx}{x}=0,$$

где

$$(u-\lambda)(u-\mu)=u^2\pm\alpha u-\alpha\gamma-\gamma^2+4\beta.$$

Пусть

$$2\lambda=\pm\alpha+\sqrt{k},\quad 2\mu=\pm\alpha-\sqrt{k},$$

тогда

$$\alpha^2-k=4(-\alpha\gamma-\gamma^2+4\beta),$$

т. е.

$$k=(\alpha+2\gamma)^2-16\beta).$$

Решение имеет вид

$$\left(\pm\frac{\alpha}{\sqrt{k}}+1\right)\log(u-\lambda)-\left(\pm\frac{\alpha}{\sqrt{k}}-1\right)\log(u-\mu)+\log x^2=\log c^2,$$

откуда

$$\left\{\frac{u-\lambda}{u-\mu}\right\}^{\pm\alpha/\sqrt{k}}(u-\lambda)(u-\mu)x^2=c^2,$$

где

$$u=\pm\sqrt{\gamma^2-4\beta-4\alpha yx^{-2}}.$$

Таким образом (принимая, что α, β и γ — рациональные числа) для того, чтобы общее решение было алгебраическим, необходимо и достаточно чтобы k или

$$(\alpha+2\gamma)^2-16\beta$$

было квадратом рационального числа.

Но если это условие удовлетворено, то условие для огибающей именно

$$\alpha\gamma+\gamma^2-4\beta=0,$$

может быть не удовлетворено. С другой стороны, если это условие удовлетворено, то

$$\begin{aligned}(\alpha+2\gamma)^2-16\beta&=(\alpha+2\gamma)^2-4(\alpha\gamma-\gamma^2)\\&=\alpha^2,\end{aligned}$$

и общее решение является алгебраическим.

Уравнение

$$3y+\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}xp+p^2=0$$

имеет алгебраический интеграл, именно

$$(x^2+12y)c^2-2x(x^2+9y)c+(x^2+3y)^2=0.$$

c- и p-дискриминанты равны y^3 и y соответственно.

Отрицательная половина оси y является геометрическим местом действительных точек пересечения. Правильной огибающей не получается потому, что точка пересечения последовательных кривых одна и та же, именно начало для всех кривых семейства.

Примеры

1. Измените метод последовательных приближений так, чтобы можно было доказать следующую теорему существования: если x_0, y_0, a, b и K имеют значения, принятые в § 3·1, а M — верхняя граница $|f(x, y_0)|$ для значений x в интервале $(x_0, x_0 + a)$, то существует единственное решение уравнения

$$y' = f(x, y),$$

которое приводится к y_0 при $x = x_0$ и непрерывно в интервале $(x_0, x_0 + \rho)$, где ρ — меньшее из двух чисел a и $K^{-1} \log(1 + KbM^{-1})$ [Lindelöf, J. de Math. (4), 10 (1894), 117].

2. Исследуйте поведение вблизи начала решений уравнений

(I) $y' = y^2$; (II) $x^2y' = y$;

(III) $y' = -\dfrac{x + 2x^3}{y + 2y^3}$; (IV) $y' = \dfrac{4x^3y}{x^4 + y^2}$;

(V) $xy' + y^2 = 0$; (VI) $x^2y' + y = x$.

3. Рассмотрите p- и c-дискриминанты уравнений

(I)	$3xy = 2px^2 - 2p^2$,	Интегралы: $(3y + 2c)^2 = 4cx^3$;
(II)	$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$,	$y = c(x - c)^2$;
(III)	$xp^2 - 2yp + 4x = 0$,	$cy = c^2x^2 + 1$;
(IV)	$p^2(2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$,	$y^2 - y^3 = (x - c)^2$;
(V)	$yp^2 - 4xp + y = 0$,	$y^6 - 3x^2y^4 + 2cx(3y^2 - 8x^2) + c^2 = 0$;
(VI)	$8p^3x = y(12p^2 - 9)$,	$3cy^2 = (x + c)^3$.

4. Проинтегрируйте уравнение $(y + px)^2 = 4x^2p$ и рассмотрите дискриминанты.

5. Покажите, что уравнение

$$(1 - x^2)p^2 = 1 - y^2$$

представляет семейство конических сечений, касающихся четырех сторон квадрата.

6. Пусть $\Phi(x, y, c) = 0$ будет общим семейством интегральных кривых, тогда $\Phi(x, y, z) = 0$ будет представлять поверхность, а геометрическое место точек c-дискриминантов — ортогональную проекцию на плоскости x, y кривой пересечения поверхностей

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Рассматривая сечение $\Phi = 0$ плоскостью, параллельной оси z, докажите, что в общем случае

$$\Delta_c \Phi(x, y, c) = EN^2C^3,$$

где $E = 0$ — огибающая, $N = 0$ — геометрическое место узлов, а $C = 0$ — геометрическое место точек пересечения.

[Cayley, Hill, Hudson; Salmon, Higher, Plane Curves, 3 изд., 54].

7. Покажите, что геометрическое место точек перегибов ортогональных траекторий $F(x, y, p) = 0$ является ветвью кривой

$$F(x, y, p) = 0, \quad pF_x - F_y = 0.$$

Разберите случай, когда эта кривая имеет ветвь, общую с

$$F(x, y, p) = 0, \quad F_x - pF_y = 0.$$

[Chrystal]

8. Покажите, что неприводимое диференциальное уравнение первого порядка, являющееся полиномом от x, y и p, степень которого относительно x, y и p не превышает второй, не может иметь геометрического места точек совпадения. [Chrystal]

ГЛАВА IV

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

4·1. Теория диференциальных уравнений Ли. Первоначальные исследования в области диференциальных уравнений были посвящены проблеме интегрирования, т. е. проблеме нахождения способов, при помощи которых отдельные уравнения или классы уравнений могли быть решены непосредственно или приведены к более удобной для решения форме. Затем были исследованы теоремы существования, послужившие критерием для выяснения вопроса о существовании решений уравнений, которые не интегрируются элементарными методами. Таким образом, существует ряд, повидимому, не связанных методов интегрирования, действительных только для отдельных классов уравнений, в то время как теоремы существования показывают, что, за исключением некоторых очень неестественных уравнений, каждое уравнение имеет одно или несколько решений.

Было показано[1], что более старые методы интегрирования основаны на общем принципе, который, в свою очередь, оказался эффективным для нахождения новых методов. Ниже этот объединяющий метод будет объяснен в своей простейшей форме только для уравнений первого порядка с одной независимой и одной зависимой переменной.

4·11. Группа преобразований от одного параметра. Рассмотрим преобразование

$$(\mathrm{T}) \qquad x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y),$$

при помощи которого точка (x, y) переносится к новому положению (x_1, y_1) в той же плоскости и относится к той же паре прямоугольных осей. Если уравнения, представляющие преобразование, решены для x и y через x_1 и y_1:

$$x = \Phi(x_1, y_1), \quad y = \Psi(x_1, y_1),$$

то они представляют собой *обратное* преобразование (T_1), именно операцию переноса точки (x_1, y_1) обратно к своему первоначальному положению (x, y). В результате преобразования T и T_1

[1] Klein and Lie, Math. Ann., 4 (1871), 80; Lie, Forhand, Vid.-Selsk. Christiania (1874). 198; (1875), 1; Math. Ann., 9 (1876), 245; 11 (1877), 464; 24 (1884), 537; 25 (1885), 71 [Lies Ges. Abhandlungen, III, IV]; Lie — Scheffers, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen (1891); Page, Ordinary Differential Equations (1896).

последовательно в любом порядке получим тождественное преобразование

$$x_1 = x, \quad y_1 = y.$$

Рассмотрим совокупность преобразований, включенных в семейство,

$$x_1 = \varphi(x, y; a), \quad y_1 = \psi(x, y; a),$$

где a — параметр, который может непрерывно изменяться в данном интервале[1]. Любое частное преобразование семейства получается при частном значении a. Теперь в общем случае, результат применения двух последовательных преобразований семейства получается не тождественным с результатом применения третьего преобразования семейства, потому что в общем случае a_3 не может быть такой, чтобы

$$\varphi(x, y; a_3) = \varphi\{\varphi(x, y; a_1), \psi(x, y; a_1); a_2\}$$

или, в частности, принимая

$$\varphi(x, y; a) = a - x, \quad \psi(x, y; a) = y,$$

a_3 не может быть такой, чтобы для всех значений x

$$a_3 - x = a_2 - (a_1 - x).$$

Однако, если любые два последовательных преобразования семейства эквивалентны одному преобразованию семейства, то преобразования образуют *конечную непрерывную группу*. Примем, что каждая рассматриваемая группа содержит обратное этим преобразованиям, а также и тождественное преобразование. Преобразования образуют *группу, зависящую от одного параметра* a; обозначим ее G_1.

4·111. *Примеры* G_1.

(a) Группа переносов, параллельных оси x

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y.$$

В результате последовательных преобразований параметров a_1 и a_2 получим

$$x_1 = x + a_1 + a_2, \quad y_1 = y,$$

что представляет собой преобразование параметра $a_1 + a_2$. Обратное преобразование параметра a_1 имеет вид

$$x_1 = x - a_1, \quad y_1 = y;$$

его параметром является $-a_1$.

(b) Группа вращений вокруг начала

$$x_1 = x\cos a - y\sin a, \quad y_1 = x\sin a + y\cos a.$$

[1] Принимается что φ и ψ диференцируемы относительно a в данном интервале.

В результате последовательных преобразований параметров a_1 и a_2 получим

$$x_1 = (x\cos a_2 - y\sin a_2)\cos a_1 - (x\sin a_2 + y\cos a_2)\sin a_1$$
$$= x\cos(a_1 + a_2) - y\sin(a_1 + a_2),$$
$$y_1 = (x\cos a_2 - y\sin a_2)\sin a_1 + (x\sin a_2 + y\cos a_2)\cos a_1$$
$$= x\sin(a_1 + a_2) + y\cos(a_1 + a_2),$$

что представляет собой преобразование параметра $a_1 + a_2$. Обратное преобразование параметра a_1 будет

$$x_1 = x\cos a_1 + y\sin a_1,\quad y_1 = -x\sin a_1 + y\cos a_1;$$

его параметром будет $-a_1$.

(с) Группа

$$x_1 = ax, \qquad y_1 = a^2 y.$$

Преобразования параметров a_1 и a_2 последовательно эквивалентны преобразованию параметра $a_1 a_2$. Обратное преобразование параметра a_1 представляет собой преобразование параметра $1/a_1$.

4·12. Бесконечно малые преобразования. Пусть a_0 будет значением параметра a, соответствующим тождественному преобразованию, так что

$$\varphi(x, y; a_0) = x, \qquad \psi(x, y; a_0) = y,$$

тогда, если ε мало, то при преобразовании

$$x_1 = \varphi(x, y; a_0 + \varepsilon), \quad y_1 = \psi(x, y; a_0 + \varepsilon)$$

x_1 будет бесконечно мало отличаться от x, а y_1 от y; следовательно, это преобразование отличается только на бесконечно малую величину от тождественного преобразования и называется *бесконечно малым преобразованием*. Покажем, что *каждая группа G_1 содержит бесконечно малое преобразование*[1].

Пусть α будет любым фиксированным значением параметра a, а β — параметром соответствующего обратного преобразования. Таким образом

$$x_1 = \varphi(x, y; \alpha), \qquad y_1 = \psi(x, y; \alpha),$$
$$x = \varphi(x_1, y_1; \beta), \qquad y = \psi(x_1, y_1; \beta).$$

Пусть δt будет мало. Рассмотрим преобразование

$$x' = \varphi\{\varphi(x, y; \alpha);\ \psi(x, y; \alpha);\ \beta + \delta t\},$$
$$y' = \psi\{\varphi(x, y; \alpha),\ \psi(x, y; \alpha);\ \beta + \delta t\}.$$

[1] Ниже мы докажем, что G_1 никогда не содержит больше одного бесконечно малого преобразования.

Согласно теореме конечных приращений, если θ_1 и θ_2 положительны и меньше единицы, то

$$\begin{aligned} x' &= \varphi\{\varphi(x, y; \alpha), \quad \psi(x, y; \alpha); \beta\} + \frac{\partial\varphi\{\varphi(x, y; \alpha), \psi(x, y; \alpha); \beta + \theta_1\delta t\}}{\partial\beta}\delta t \\ &= x + \xi(x, y; \alpha)\delta t, \\ y' &= \psi\{\varphi(x, y; \alpha), \quad \psi(x, y; \alpha); \beta\} + \frac{\partial\psi\{\varphi(x, y; \alpha), \psi(x, y; \alpha); \beta + \theta_2\delta t\}}{\partial\beta}\delta t \\ &= y + \eta(x, y; \alpha)\delta t, \end{aligned}$$

где $\xi(x, y; \alpha)$, $\eta(x, y; \alpha)$ не исчезают тождественно и независимы от δt, если члены второго и высших порядков не принимаются во внимание. Эти уравнения представляют бесконечно малые преобразования, поэтому каждая группа G_1 с двумя переменными содержит бесконечно малое преобразование; этот метод очевидно применим (с тем же результатом) также к любому числу переменных.

Геометрически, бесконечно малые преобразования представляют малые смещения длины

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,\delta t$$

в направлении θ, где

$$\cos\theta = \xi/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \sin\theta = \eta/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Две группы преобразований называются *подобными*, если они могут быть выведены одна из другой при помощи изменения переменных и параметра. Ниже мы покажем, что каждая группа G_1 с двумя переменными аналогична группе переносов. Чтобы доказать эту теорему, напишем уравнения бесконечно малого преобразования в виде

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t, \qquad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t,$$

тогда конечные уравнения группы могут быть найдены интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = dt.$$

Решения могут быть выражены в виде

$$F_1(x, y) = C_1, \quad F_2(x, y) = C_2 + t,$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Пусть $t = 0$ соответствует тождественному преобразованию, тогда

$$F_1(x_1, y_1) = F_1(x, y), \quad F_2(x_1, y_1) = F_2(x, y) + t.$$

Предположим, что $u = F_1(x, y)$, $v = F_2(x, y)$ — новые переменные, тогда

$$u_1 = u, \quad v_1 = v + t.$$

Таким образом данная группа приведена к группе переносов.

Ясно, что эта группа имеет только одно бесконечно малое преобразование, именно $\delta u = 0$, $\delta v = \delta t$. Поскольку ξ и η определяются через u и v, первоначальная группа G_1 имеет только одно бесконечно малое преобразование.

4·121. Примеры. (a) Тождественное преобразование группы вращения, определяемое формулами

$$x_1 = x\cos a - y\sin a, \quad y_1 = x\sin a + y\cos a,$$

дается при $a = 0$, следовательно будет бесконечно малое преобразование

$$x_1 = x\cos\delta t - y\sin\delta t, \quad y_1 = x\sin\delta t + y\cos\delta t$$

или, заменив $\cos\delta t$ и $\sin\delta t$ приближенными значениями для малых δt, получим

$$x_1 = x - y\delta t, \quad y_1 = y + x\delta t.$$

Это преобразование представляет вращение в положительном направлении на малый угол δt.

(b) Уравнения

$$x_1 = ax, \quad y_1 = a^2 y$$

определяют группу; тождественное преобразование соответствует $a = 1$. Поэтому бесконечно малое преобразование будет

$$x_1 = (1 + \delta t)x, \quad y_1 = (1 + \delta t)^2 y$$

или, ограничиваясь малыми величинами первого порядка, получим

$$x_1 = x + x\delta t, \quad y_1 = y + 2y\delta t.$$

Для приведения этой группы к группе переноса, необходимо решить уравнения

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = dt,$$

откуда

$$\frac{y_1}{x_1^2} = \frac{y}{x^2}, \quad \log x_1 = \log x + t.$$

Искомыми новыми переменными поэтому будут

$$u = y/x^2, \quad v = \log x.$$

4·13. Обозначения для бесконечно малых преобразований. Рассмотрим изменение некоторой функции $f(x,y)$ если к переменным x, y применено бесконечно малое преобразование

$$x_1 = x + \delta x = x + \xi(x, y)\delta t,$$
$$y_1 = y + \delta y = y + \eta(x, y)\delta t.$$

Изменение значения $f(x, y)$ равно

$$\begin{aligned}\delta f(x, y) &= f(x_1, y_1) - f(x, y),\\ &= f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y),\\ &= \left\{\xi(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right\}\delta t,\end{aligned}$$

удерживая только малые величины первого порядка. Если, наоборот, приращение $\delta f(x,y)$, которое данная функция $f(x,y)$ принимает при бесконечно малом преобразовании группы G_1 известно, то $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ известны, следовательно, известно и само бесконечно малое преобразование. Таким образом *бесконечно малое преобразование может быть полностью представлено выражением*

$$Uf \equiv \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Так, например, символ

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

представляет собой бесконечно малое вращение

$$x_1 = x - y\,\delta t,\ y_1 = y + x\,\delta t.$$

В частности

$$Ux = \xi(x,y),\ Uy = \eta(x,y),$$

так что

$$Uf = Ux \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Uy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Очевидно, если в группе G_1, действующей на переменные x, y заменить эти переменные на x', y', где x', y' — любые функции x, y — то свойство группы удерживается.

Далее

$$\frac{\partial f(x',y')}{\partial x} = \frac{\partial f(x',y')}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f(x',y')}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x',y')}{\partial y} = \frac{\partial f(x',y')}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f(x',y')}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} Uf(x',y') &= \xi(x',y')\left\{\frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x}\right\} + \\ &+ \eta(x',y')\left\{\frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y}\right\} \\ &= Ux' \cdot \frac{\partial f}{\partial x'} + Uy' \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}. \end{aligned}$$

Теперь пусть конечные уравнения группы G_1 будут

$$x_1 = \varphi(x,y;\ t),\ y_1 = \psi(x,y;\ t)$$

и пусть $t = 0$ дает тождественное преобразование, тогда функция $f(x_1,y_1)$ может рассматриваться как функция x, y и t; фиксируя x и y, разложим функцию в ряд Маклорена по t так, что

$$f(x_1,y_1) = f_0 + f_0' t + \frac{1}{2} f_0'' t + \cdots,$$

где

$$f_0 = [f(x_1, y_1)]_{t=0} = f(x, y),$$

$$f_0' = \left[\frac{df(x_1, y_1)}{dt}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial t}\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{dx_1}\xi(x_1, y_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}\eta(x_1, y_1)\right]_{t=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\xi(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}\eta(x, y) = Uf(x, y),$$

$$f_0'' = \left[\frac{d^2 f(x_1, y_1)}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[\left\{\xi(x_1, y_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta(x_1, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}\right\}^2 f(x_1, y_1)\right]_{t=0}$$

$$= U^2 f(x, y).$$

. . . .

Следовательно разложение $f(x_1, y_1)$ имеет вид

$$f(x_1, y_1) = f(x, y) + \frac{t}{1!}Uf + \frac{t^2}{2!}U^2 f + \ldots,$$

где $U^n f$ — результат n-кратного воздействия оператора

$$U \equiv \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

на $f(x, y)$.

В частности

$$x_1 = x + \frac{t}{1!}Ux + \frac{t^2}{2!}U^2 x + \ldots,$$

$$y_1 = y + \frac{t}{1!}Uy + \frac{t^2}{2!}U^2 y + \ldots,$$

представляют собой конечные уравнения группы. Можно легко доказать, что рассматривая x и y как фиксированные величины, к которым приводятся x_1 и y_1 при $t = 0$, эти уравнения дают решение совместной системы

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1)} = dt.$$

Поэтому бесконечно малое преобразование определяет группу, которая может соответственно рассматриваться как группа Uf.

4.131. Примеры получения конечных уравнений из бесконечно малых преобразований.

(а) Дано бесконечно малое преобразование

$$Uf \equiv -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Необходимо найти соответствующую группу G_1. Можно доказать, что

$$Ux = -y, \quad Uy = x,$$

$$U^2 x = -x, \quad U^2 y = -y,$$

$$U^3 x = y, \quad U^3 y = -x,$$

$$U^4 x = x, \quad U^4 y = y,$$

. . . .

Таким образом U является циклическим оператором периода 4 относительно x и y. Отсюда следует, что

$$x_1 = x - \frac{t}{1!}y - \frac{t^2}{2!}x + \frac{t^3}{3!}y + \frac{t^4}{4!}x - \dots$$
$$= x\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) - y\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \dots\right)$$
$$= x\cos t - y\sin t,$$
$$y_1 = y + \frac{t}{1!}x - \frac{t^2}{2!}y - \frac{t^3}{3!}x + \frac{t^4}{4!}y + \dots$$
$$= x\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \dots\right) + y\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right)$$
$$= x\sin t + y\cos t.$$

Таким образом G_1 является группой вращения.

(b) Аналогично, если

$$Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},$$

то мы найдем, что

$$x_1 = x + \frac{t}{1!}x + \frac{t^2}{2!}x + \frac{t^3}{3!}x + \dots = xe^t,$$
$$y_1 = y + \frac{t}{1!}y + \frac{t^2}{2!}y + \frac{t^3}{3!}y + \dots = ye^t.$$

Если вместо e^t подставить новый параметр a, то уравнения примут вид

$$x_1 = ax, \quad y_1 = ay$$

и определят группу равномерных усилений.

4·2. Функции, инвариантные относительно данной группы. Предположим, как и выше, что конечные уравнения группы

$$x_1 = \varphi(x, y;\ t), \quad y_1 = \psi(x, y;\ t)$$

таковы, что тождественные преобразования соответствуют $t = 0$, и пусть

$$Uf \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

обозначает бесконечно малое преобразование группы.

Функция $\Omega(x, y)$ называется инвариантной, если x_1, y_1, образуются из x, y операциями данной группы

$$\Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y)$$

для всех значений t.

Разложение $\Omega(x_1, y_1)$ по степеням t может быть представлено в виде

$$\Omega(x, y) + \frac{t}{1!} U\Omega + \frac{t^2}{2!} U\{U\Omega\} + \frac{t^3}{3!} U^2\{U\Omega\} + \ldots$$

Следовательно, если функция $\Omega(x,y)$ инвариантна относительно группы, то это выражение должно быть равно $\Omega(x, y)$ для всех значений t в данном интервале. Для этого *необходимо и достаточно, чтобы $U\Omega$ было тождественно равно нулю,* т. е.

$$\xi \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial\Omega}{\partial y} \equiv 0.$$

Функция $z = \Omega(x, y)$ является поэтому решением диференциального уравнения в частных производных

$$\xi \frac{\partial z}{\partial x} + \eta \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

следовательно,

$$\Omega(x, y) = \text{const}$$

является решением эквивалентного обыкновенного диференциального уравнения

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}.$$

Так как это уравнение имеет только одно решение, зависящее от одной произвольной постоянной, то каждая группа G_1 с двумя переменными имеет только один независимый инвариант. Иначе говоря, существует один инвариант, через который могут быть выражены другие инварианты.

4.201. Инварианты группы вращений. Бесконечно малое преобразование группы G_1 вращений имеет вид

$$Uf \equiv -y \frac{df}{dx} + x \frac{df}{dy}.$$

Уравнение, определяющее Ω, будет

$$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0;$$

оно имеет решение $x^2 + y^2 = \text{const}$, откуда

$$\Omega(x, y) = x^2 + y^2.$$

Геометрически очевидно, что окружности, центры которых находятся вначале, инвариантны относительно группы. Для аналитической проверки этого заметим, что конечные уравнения группы имеют вид

$$x_1 = x\cos t - y\sin t, \quad y_1 = x\sin t + y\cos t,$$

тогда

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, y_1) &= x_1^2 + y_1^2 = (x\cos t - y\sin t)^2 + (x\sin t + y\cos t)^2 \\ &= x^2 + y^2 = \Omega(x, y)\end{aligned}$$

независимо от значения t. Следовательно инвариантность $x^2 + y^2$ установлена. Любой другой инвариант относительно группы должен быть функцией x^2+y^2 и, наоборот, любая функция x^2+y^2 инвариантна относительно группы.

4·21. Инвариантные точки, кривые и семейства кривых. Если в любой точке плоскости (x, y) функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ равны нулю, то эта точка является фиксированной относительно бесконечно малого преобразования

$$Uf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

и, следовательно, является фиксированной относительно всех преобразований группы. Такие точки называются *абсолютно инвариантными* относительно группы.

Точка (x_0, y_0), не инвариантная относительно группы, переносится при помощи бесконечно малого преобразования к соседней точке $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y_0)$ так, что

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\eta}{\xi}.$$

Если бесконечно малое преобразование повторять неопределенное число раз, то точка P, первоначально совпадающая с точкой (x_0, y_0), опишет кривую, являющуюся одной из интегральных кривых уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\eta}{\xi}.$$

Семейство интегральных кривых

$$\Omega(x, y) = \text{const}$$

таково, что каждая кривая инвариантна относительно группы.

Семейство кривых может быть также инвариантно в том смысле, что каждая кривая преобразуется в другую кривую того же семейства при соответствующих операциях над группой. Таким образом семейство кривых может быть инвариантным в целом, хотя отдельные кривые семейства могут не быть инвариантными относительно группы. Пусть

$$\Omega(x, y) = \text{const}$$

будет таким семейством кривых. Если при любом преобразовании группы (x, y) переходит в (x_1, y_1), то

$$\Omega(x_1, y_1) = \text{const}$$

должно представлять то же семейство кривых. Но

$$\Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y) + \frac{t}{1!}U\Omega + \frac{t^2}{2!}U^2\Omega + \ldots,$$

поэтому, если оба семейства кривых

$$\Omega(x_1, y_1) = \text{const}, \quad \Omega(x, y) = \text{const}$$

тождественны, то выражение

$$\frac{t}{1!} U\Omega + \frac{t^2}{2!} U^2\Omega + \ldots$$

должно быть постоянно для любого фиксированного значения t, т. е. для каждой кривой семейства

$$U\Omega = \text{const}.$$

Таким образом для того, чтобы $\Omega(x, y) = \text{const}$ представляло семейство кривых, инвариантных в целом относительно группы, необходимо и достаточно, чтобы $U\Omega = \text{const}$ представляло то же семейство кривых, т. е. $U\Omega$ должно быть некоторой функцией Ω, например $F(\Omega)$. Если $F(\Omega) = 0$, то отдельные кривые семейства инвариантны.

Так, например, относительно группы вращения

$$x_1 = x\cos t - y\sin t, \quad y_1 = y\cos t + x\sin t,$$

семейство прямых линий

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

принимает вид

$$\frac{y}{x} = \beta,$$

где α и β — параметры семейств, но

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y\cos t + x\sin t}{x\cos t - y\sin t} = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) t + \left(\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}\right) t^2 + \ldots.$$

Если семейство $\frac{y}{x} = \alpha$ инвариантно, то семейство

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \gamma$$

должно быть тождественно ему. Это в действительности и наблюдается. Параметры α и γ связаны зависимостью

$$\gamma = \alpha^2 + 1.$$

Теперь

$$\Omega = \frac{y}{x}, \quad U\Omega = -y\frac{\partial\Omega}{\partial x} + x\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{y^2}{x^2} + 1 = \Omega^2 + 1.$$

Это является формой, которая принимает в данном случае условие $U\Omega = F(\Omega)$.

4 · 3. Распространение на случай n переменных. Группа G_1 с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется преобразованиями

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

может быть доказано, как и выше, что она эквивалентна единственному бесконечно малому преобразованию

$$Uf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Пусть t — параметр группы, при котором бесконечно малое преобразование имеет вид

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда, если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция, диференцируемая любое число раз относительно ее аргументов, то

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{t}{1!}UF + \frac{t^2}{2!}U^2F + \ldots.$$

Будем рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты точки в пространстве n измерений, а t как параметр, не зависящий от этих координат; t можно рассматривать, например, как время. С изменением t, точка $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ опишет траекторию, начинающуюся в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждая траектория очевидно будет инвариантной относительно группы.

Как и выше, для того, чтобы функция $\Omega(x_1, x_2, x_n)$ была инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы $U\Omega$ была тождественна равна нулю. Кривая $\Omega = 0$ является траекторией и следовательно инвариантна, если $U\Omega = 0$. Семейство кривых

$$\Omega = \text{const}$$

инвариантно, если $U\Omega$ — определенная функция Ω.

Наконец, уравнение

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

инвариантно, если $U\Omega$ равна нулю или тождественна $\Omega = 0$. В первом случае уравнение $\Omega = \alpha$ инвариантно, а в последнем случае не инвариантно для всех значений постоянной α.

В качестве примеров инвариантных уравнений могут быть приведены следующие.

(a) Уравнение $\Omega \equiv x^2 + y^2 - c^2 = 0$, где c — любая постоянная, инвариантно относительно группы вращения, так как

$$U\Omega = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2 - c^2) = -2yx + 2xy = 0.$$

(b) Уравнение $\Omega \equiv y - x = 0$ инвариантно относительно группы

$$Uf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},$$

так как

$$U\Omega = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)(y - x) = -x + y = \Omega.$$

С другой стороны, уравнение $y - x + c = 0$, где c — любая не равная нулю постоянная, не инвариантно относительно группы.

4 · 4. Определение всех уравнений, допускающих данную группу. Говорят, что уравнение *допускает* данную группу, если оно инвариантно относительно этой группы. Пусть группой будет

$$Uf \equiv \xi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

и пусть

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

будет уравнением, допускающим группу, при которой $U\Omega = 0$. Примем, что Ω не является множителем, общим для всех функций $\xi_1, \ldots, \xi_n$; пусть ξ_n, например, не равна нулю при $\Omega = 0$, тогда, если

$$Vf \equiv \frac{\xi_1}{\xi_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$V\Omega = 0$, и следовательно Ω инвариантна относительно группы Vf.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — независимый ряд решений диференциального уравнения в частных производных

$$Vf = 0;$$

поскольку они являются также решениями $Uf = 0$, они являются и функциями первоначальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Присоединим к $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ функцию x_n; полученные таким образом функции ряда также независимы, так как в противном случае существовала бы зависимость вида

$$x_n = W(y_1 y_2, \ldots, y_{n-1})$$

и следовательно x_n было бы решением линейного диференциального уравнения в частных производных $Vf = 0$, которое очевидно неверно.

С другой стороны $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ могут быть выражены через n переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ и x_n. Пусть при этом изменении переменных инвариантное уравнение $\Omega = 0$ примет вид

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n) = 0.$$

Кажется, что Ψ должно содержать x_n; в действительности это неверно, так как если α — любая постоянная, то

$$V\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n)$$

$$= V\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \alpha) + \frac{\partial}{\partial x_n}\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n).$$

Поскольку $V\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \alpha)$ тождественно равно нулю и $V\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n) = 0$ тождественно или согласно уравнению $\Psi = 0$, отсюда следует, что

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} = 0,$$

т. е. что Ψ существенно независимо от x_n. Таким образом Ψ и соответственно Ω могут быть выражены только через y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Следовательно, если уравнение $\Omega = 0$ инвариантно, то Ω *может быть выражено через $n-1$ независимых решений диференциального уравнения в частных производных* $Uf = 0$. Иначе говоря, каждое инвариантное уравнение $\Omega = 0$ является частным интегралом уравнения $Uf = 0$.

В частности, если u и v — два независимых решения уравнения

$$Uf(x, y, z) \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

то наиболее общим решением, инвариантным относительно группы Uf, будет

$$\Omega(u, v) = 0$$

или

$$v - F(u) = 0.$$

4·5. Расширенная группа. Пусть

$$x_1 = \varphi(x, y; a), \quad y_1 = \psi(x, y; a)$$

определяют группу G_1 с двумя переменными. Будем рассматривать диференциальный коэфициент p как третью переменную, которая, относительно группы, превращается в p_1, где

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\psi}{d\varphi}$$

$$= \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} p}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} p} = \chi(x, y, p; a).$$

Пусть α и β — два частных значения a, так что

$$x_1 = \varphi(x, y; \alpha), \quad y_1 = \psi(x, y; \alpha),$$

$$x_2 = \varphi(x_1, y_1; \beta), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1; \beta),$$

тогда результирующее преобразование

$$x_2 = \varphi(x, y; \gamma), \quad y_2 = \psi(x, y; \gamma)$$

будет результатом исключения x_1, y_1 из уравнений двух составляющих преобразований. Аналогично

$$p_2 = \frac{d\psi(x, y; \gamma)}{d\varphi(x, y; \gamma)}$$

будет результатом исключения y_1 из

$$p_1 = \frac{d\psi(x, y; \alpha)}{d\varphi(x, y; \alpha)}, \quad p_2 = \frac{d\psi(x_1, y_1; \beta)}{d\varphi(x_1, y_1; \beta)}.$$

Таким образом в общем случае, преобразования

$$x_1 = \varphi(x, y; a), \quad y_1 = \psi(x, y; a), \quad p_1 = \chi(x, y, p; a),$$

действующие на линейный элемент (x, y, p), образуют группу, которая называется *расширенной группой*.

Конечные уравнения данной группы могут быть представлены в виде

$$x_1 = x + \frac{t}{1!}\xi(x, y) + \frac{t^2}{2!}\left(\xi\frac{\partial\xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \dots,$$

$$y_1 = y + \frac{t}{1!}\eta(x, y) + \frac{t^2}{2!}\left(\xi\frac{\partial\eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \dots,$$

следовательно,

$$p_1 = \frac{dy + t\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy\right) + \dots}{dx + t\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy\right) + \dots}$$

$$= p + t\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)p - \frac{\partial\xi}{\partial y}p^2\right\}\dots$$

$$= p' + t\zeta(x, y, p) + \dots .$$

Если функция $\zeta(x, y, p)$ определена таким образом, то бесконечно малое преобразование расширенной группы будет:

$$U'f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Группа может быть расширена аналогично, полагая высшие производные y'', ..., $y^{(n)}$ новыми переменными.

4 · 6. Интегрирование диференциального уравнения первого порядка с двумя переменными. Выше (§ 2 · 1) мы показали, что точное диференциальное уравнение первого порядка с двумя переменными непосредственно интегрируется в квадратурах. Если уравнение не является точным, то для его интегрирования необходимо прежде всего определить интегрирующий множитель. Покажем, что если уравнение инвариантно относительно известной группы, то интегрирующий множитель может быть найден, по крайней мере, теоретически, и уравнение интегрируется в квадратурах.

Предположим, что диференциальное уравнение

$$F(x, y, p) = 0$$

инвариантно относительно расширенной группы

$$U'f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial p}.$$

выведенной из

$$Uf \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

тогда необходимое и достаточное условие для этой инвариантности удовлетворено, именно, что выражение $U'F$ равно нулю само или согласно уравнению $F=0$.

Допустим, что нам нужно определить и проинтегрировать наиболее общее диференциальное уравнение, допускающее данную группу $U'f$. Следовательно нужно определить два независимых решения диференциального уравнения в частных производных

$$U'f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial p} = 0 ,$$

которое зависит от нахождения двух явных решений совместной системы

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dp}{\zeta} .$$

Пусть $u=\alpha$ будет решением уравнения

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

тогда, поскольку ξ и η не зависят от p, u также не будет зависеть от p. Пусть $v=\beta$ будет решением

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dp}{\zeta} ,$$

отличным от $u=\alpha$; очевидно v должно содержать p. Если $H(u)$ — произвольная функция u, то $f=v-H(u)$ удовлетворяет диференциальному уравнению $Uf=0$, т. е.

$$U'\{v-H(u)\}=0 .$$

Следовательно

$$v-H(u)=0$$

будет наиболее общим обыкновенным диференциальным уравнением первого порядка, инвариантным относительно U'.

Покажем, что если u известно, то v может быть определено в квадратурах. Известно, что любая группа может быть приведена к группе переноса. Пусть изменение переменных с значения (x, y) к (x_1, y_1) приведет Uf к группе переносов, параллельной оси y_1, именно U_1f, тогда

$$U_1f \equiv U(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + U(y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1} ,$$

откуда следует, что

$$U(x_1)=0, \quad U(y_1)=1 .$$

Таким образом x_1, y_1 определяются как функции x, y при помощи уравнений

$$\xi\frac{\partial x_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial x_1}{\partial y} = 0 , \quad \xi\frac{\partial y_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial y_1}{\partial y} = 1 .$$

Первое уравнение имеет решение

$$x_1 = u(x, y),$$

второе уравнение эквивалентно совместной системе

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{\partial y_1}{1}.$$

Одним решением этой системы является

$$u(x, y) = \alpha.$$

Если это решение применить для исключения x из уравнения

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} = \eta(x, y),$$

то y_1 получится в функции от x и α в квадратурах. Исключая α, получим y_1 в функции от x и y. Таким образом необходимое изменение переменных найдено.

Можно показать, что $U_1' f$, являясь расширенной группой U_1, f, тождественна $U_1 f$. Наиболее общее уравнение, инвариантное относительно $U_1' f$, находится решением совместной системы

$$\frac{\partial x_1}{0} = \frac{\partial y_1}{1} = \frac{\partial p_1}{0}.$$

Поскольку двумя решениями этой системы являются

$$x_1 = \text{const}, \; p_1 = \text{const},$$

то наиболее общее инвариантное диференциальное уравнение первого порядка может быть написано в виде

$$p_1 = \Phi(x_1)$$

и интегрируется в квадратурах. В первоначальных переменных это уравнение имеет форму

$$v = H(u),$$

но поскольку $x_1 = u$, p_1 — функция одного v, а так как H — произвольно, мы не потеряем в общности, если примем $p_1 = v$.

Таким образом, *если одно решение уравнения*

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

известно, то можно построить наиболее общее диференциальное уравнение первого порядка, инвариантное относительно группы

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

и это уравнение может проинтегрироваться в квадратурах.

4·61. Интегрирование диференциального уравнения, инвариантного относительно группы G. Пусть данное диференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

и пусть

$$\varphi(x, y) = c$$

будет его решением, тогда $\varphi(x, y)$ будет интегралом диференциального уравнения в частных производных

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Примем, что по крайней мере для одного значения c интегральная кривая $\varphi(x, y) = c$ не инвариантна относительно группы. Однако интегральные кривые, как семейство, инвариантны, так что

$$U\varphi(x, y) \equiv \xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F(\varphi),$$

где $F(\varphi)$ — определенная функция φ не равная тождественно нулю. Если Φ функция одного φ, то семейство кривых $\Phi = C$ тождественно семейству $\varphi = c$. Пусть

$$\Phi = \int\frac{d\varphi}{F(\varphi)},$$

тогда

$$U\Phi = U\varphi\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi} = 1.$$

Таким образом Φ является интегралом двух диференциальных уравнений в частных производных

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0,$$

$$\xi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 1,$$

откуда найдем, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{-Q}{P\eta - Q\xi}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{P}{P\eta - Q\xi},$$

следовательно

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy$$

$$= \frac{Pdy - Qdx}{P\eta - Q\xi}.$$

Таким образом $\frac{1}{P\eta - Q\xi}$ *является интегрирующим множителем для диференциального уравнения*

$$Pdy - Qdx = 0.$$

Решение уравнения

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$$

поэтому будет

$$\int \frac{Pdy-Qdx}{P\eta-Q\xi}=K,$$

где K — постоянная.

Если каждая отдельная интегральная кривая инвариантна относительно группы, то выражение $U\varphi$ тождественно равно нулю, т. е.

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

следовательно

$$P\eta-Q\xi=0.$$

Бесконечно малое преобразование принимает форму

$$Uf\equiv\rho(x,y)\left\{P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}\right\},$$

и, наоборот, если оно имеет эту форму, то из нее нельзя получить интегрирующего множителя уравнения

$$Pdy-Qdx=0.$$

Такой интегрирующий множитель называется *тривиальным* относительно рассматриваемого уравнения.

4 · 62. Диференциальное уравнение первого порядка, инвариантное относительно группы переносов. Исследуем наиболее общие диференциальные уравнения, инвариантные относительно частных групп элементарного характера. Сначала рассмотрим группу G_1 переносов параллельных оси x

$$Uf\equiv\frac{\partial f}{\partial x}.$$

В данном случае расширенная группа $U'f$ тождественна Uf. Следовательно рассматриваемая совместная система

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dp}{0}$$

имеет решения

$$y=\text{const},\quad p=\text{const}.$$

Наиболее общим диференциальным уравнением, инвариантным относительно группы, поэтому будет

$$p=F(y),$$

где F — произвольно.

Аналогично, наиболее общим уравнением, инвариантным относительно

$$Uf\equiv\frac{\partial f}{\partial y},$$

будет

$$p = F(x).$$

В этих двух случаях переменные разделяются.

Общая группа переносов имеет вид

$$Uf \equiv \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

где a и b — постоянные. $U'f$ снова тождественно Uf. Совместная система имеет вид

$$adx = -bdy = \frac{dp}{0},$$

следовательно наиболее общим диференциальным уравнением относительно группы является

$$p = F(ax + by);$$

оно может быть проинтегрировано, полагая $ax + by$ новой независимой переменной.

4·63. Диференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно афинной группы[1]

$$Uf \equiv x \frac{\partial f}{\partial x}.$$

В данном случае $\xi = x$, $\eta = 0$, $\zeta = -p$, следовательно распространенная группа имеет вид

$$U'f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Совместная система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dp}{-p}$$

имеет решения

$$xp = \text{const}, \quad y = \text{const}.$$

Наиболее общим уравнением, допускающим группу, поэтому будет

$$xp = F(y).$$

Аналогично найдено, что общее диференциальное уравнение, допускающее афинную группу

$$Uf \equiv y \frac{\partial f}{\partial y},$$

---

[1] *Афинное преобразование* представляет собой проективную коллинеацию, преобразующую эвклидову плоскость в самое себя. Оно сохраняет параллельность прямых линий и может быть представлено в виде

$$x_1 = ax + by + c, \qquad y_1 = a'x + b'y + c'. \qquad (ab' - a'b \neq 0).$$

Афинной группой называется группа таких преобразований; она является группой от одного параметра, если a, b, c, a' b' c' — функции от одного параметра (Euler, 1748; Klein, Erlanger Programm, 1872).

меет вид

$$p = yF(x).$$

В обоих случаях переменные разделяются.

4·64. Диференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно группы усиления [1].

$$Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Здесь $p = 0$, а $U'f$ тождественно с Uf. Совместная система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dp}{0}$$

имеет решения

$$p = \text{const}, \quad \frac{y}{x} = \text{const},$$

следовательно инвариантное диференциальное уравнение общей формы будет

$$p = F\left(\frac{y}{x}\right);$$

оно является *однородным* (§ 2·12).

Если уравнение написано в виде

$$dy - F\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0,$$

то его интегрирующим множителем будет

$$y - xF\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример:

$$(y^4 - 2x^3y)\,dx + (x^4 - 2xy^3)\,dy = 0.$$

Интегрирующим множителем будет

$$(y^4 - 2x^3y)\,x + (x^4 - 2xy^3)\,y = -(x^4y + xy^4),$$

теперь

$$\frac{(y^4 - 2x^3y)\,dx + (x^4 - 2xy^3)\,dy}{x^4y + xy^4} = \frac{d(x^4y + xy^4)}{x^4y + xy^4} - 2\,\frac{d(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3},$$

поэтому решением будет

$$\frac{x^4y + xy^4}{(x^3 + y^3)^2} = \text{const}$$

или

$$x^3 + y^3 = cxy.$$

Рассмотрим теперь более общую группу

$$Uf \equiv \frac{x}{a}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{b}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

---

[1] Или группы перспективных преобразований.

Распространенной группой является

$$U'f \equiv \frac{x}{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{b} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{a-b}{ab} p \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Совместная система

$$\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y} = \frac{abdp}{(a-b)p}$$

имеет решения

$$y^b = \alpha x^a, \quad p = \beta x^{\frac{a}{b} - 1},$$

где α и β — постоянные. Типичное инвариантное диференциальное уравнение имеет следовательно вид

$$p = x^{\frac{a}{b} - 1} F\left(\frac{y^b}{x^a}\right).$$

Приведем частные примеры:

(I) $Uf \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$.

Уравнение: $xdy = F(xy)\, ydx$,

Интегрирующий множитель: xy.

(II) $Uf \equiv 2x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial x}$,

Уравнение: $ydy = F\left(\frac{y^2}{x}\right) dx$,

Интегрирующий множитель:

$$\frac{1}{y^2 - xF\left(\frac{y^2}{x}\right)}.$$

(III) $Uf \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial x}$.

Уравнение: $dy = xF\left(\frac{y}{x^2}\right) dx$,

Интегрирующий множитель:

$$\frac{1}{y - x^2 F\left(\frac{y}{x^2}\right)}.$$

Аналогично

(IV) $Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$.

Уравнение: $p = \frac{y}{x} + xF\left(\frac{y}{x}\right)$.

Интегрирующий множитель:

$$dx/xF\left(\frac{y}{x}\right).$$

(V) $Uf \equiv x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}$.

Уравнение: $xp - y = F\left(\frac{y}{x}\right)$

Интегрирующий множитель:

$$dx/x^2 F\left(\frac{y}{x}\right).$$

4 · 65. Диференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно группы вращения

$$Uf \equiv -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Распространенной группой является

$$U'f \equiv -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Первое уравнение совместной системы

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dp}{1+p^2}$$

имеет решение

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

где α — постоянная. Последнее уравнение может быть написано в виде

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2-y^2}} = \frac{dp}{1+p^2};$$

его решением будет

$$\arcsin\frac{y}{\alpha} - \operatorname{arc\,tg} p = \beta$$

где β — вторая постоянная. Это решение эквивалентно

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}} - \operatorname{arc\,tg} p = \beta$$

или

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg} p = \beta$$

поэтому может быть написано в виде

$$\frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x}p} = \operatorname{tg}\beta.$$

Наиболее общим диференциальным уравнением, допускающим группу, будет поэтому

$$\frac{xp-y}{x+yp} = F(x^2+y^2).$$

Если это уравнение написать в виде

$$(x - yF)\,dy - (y + xF)\,dx = 0,$$

то оно допустит интегрирующий множитель

$$\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Примеры

(I)
$$Uf \equiv y \frac{\partial f}{\partial x}$$

Уравнение:
$$\frac{xp - y}{p} = F(y)$$
$$\text{или } \{x - F(y)\}\, dy - y dx = 0 .$$

Интегрирующий множитель: $\frac{1}{y^2}$.

(II)
$$Uf \equiv x \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Уравнение: $xp - y = F(x)$

или
$$x dy - \{y + F(x)\}\, dx = 0 .$$

Интегрирующий множитель: $\frac{1}{x^2}$.

4·66. Диференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно группы

$$Uf \equiv e^{\int \varphi(x)\, dx} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Распространенной группой является

$$U'f \equiv e^{\int \varphi(x)\, dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial p} \right\}.$$

Совместная система имеет вид

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dp}{\varphi(x)};$$

одним решением ее является

$$x = \alpha,$$

где α — постоянная. Вследствие этого решения, последнее уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{1} = \frac{dp}{\varphi(\alpha)},$$

откуда

$$p - y\varphi(\alpha) = \beta,$$

где β — вторая постоянная. Инвариантным уравнением поэтому будет

$$p - y\,\varphi(x) = F(x),$$

т. е. линейное уравнение первого порядка. Если его написать в виде

$$dy - \{y\varphi(x) + F(x)\}\, dx = 0,$$

то оно будет иметь интегрирующий множитель

$$e^{-\int \varphi(x)\, dx}.$$

4·7. Интегральные кривые, инвариантные относительно группы уравнения. Семейство интегральных кривых инвариантно в целом относительно любой группы, которую это диференциальное уравнение допускает, но если эта группа не тривиальна, то все отдельные кривые семейства не инвариантны относительно группы. Однако отдельные интегральные кривые могут быть инвариантными, поэтому важно отметить специальные свойства этих кривых.

Если

$$\Omega(x, y, p) = 0$$

диференциальное уравнение, инвариантное относительно группы

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

и если любая интегральная кривая также инвариантна относительно группы, то ее градиент в любой точке (x, y) будет равен η/ξ. Отсюда любая интегральная кривая находится подстановкой η/ξ вместо p в самом диференциальном уравнении; все такие кривые, если они существуют, входят в уравнение:

$$\Omega\left(x, y, \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Это уравнение может содержать кривые, инвариантные относительно группы, и иметь решения диференциального уравнения, не являющиеся частными интегральными кривыми. Можно привести пример, когда интегральные кривые имеют огибающую; сама огибающая, инвариантная относительно группы, преобразующей семейство интегральных кривых в самое себя, имеет уравнение, удовлетворяющее диференциальному уравнению, но не является частной интегральной кривой. Уравнение такой кривой будет особым решением диференциального уравнения.

Пример. Диференциальное уравнение

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$$

допускает группу

$$Uf \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + 3y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если особое решение существует, то оно получается подстановкой $3y/x$ вместо p в диференциальное уравнение, которое принимает вид

$$27y^3 - 4x^3y^2 = 0,$$

откуда $y = 0$ или $27y = 4x^3$.

Общим решением уравнения будет

$$y = c(x - c)^2,$$

таким образом $y = 0$ будет частным решением, а $27y = 4x^3$ будет уравнением огибающей.

Примеры

1. Найдите общие диференциальные уравнения первого порядка, инвариантные относительно группы

$$\text{(I)}\ Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \text{(III)}\ Uf \equiv ax\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\text{(II)}\ Uf \equiv y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \text{(IV)}\ Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + ay\frac{\partial f}{\partial y},$$

и определите соответствующие интегрирующие множители.

2. Покажите, что каждое из уравнений

$$\text{(I)}\ 2xyp + x - y^2 = 0, \qquad \text{(IV)}\ p^2 - x^3 - y = 0,$$

$$\text{(II)}\ xp - y - x^m = 0, \qquad \text{(V)}\ p^4 - 4y(xp - 2y)^2 = 0,$$

$$\text{(III)}\ y + xp - x^4p^2 = 0, \qquad \text{(VI)}\ p^2 - 2x^3p - 4x^2y = 0$$

допускает группу вида

$$Uf \equiv ax\frac{\partial f}{\partial x} + by\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Проинтегрируйте уравнения и найдите особые решения.

3. Покажите, что если

$$U^{(n)}f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'} + \ldots + \eta^{(n)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$$

является n раз расширенной группой

$$Uf \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

то

$$\eta^{(r)} = \frac{d\eta^{(r-1)}}{dx} - y^{(r)}\frac{d\xi}{dx} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

4. Докажите, что если $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$ (α, β, γ постоянные) — независимые решения системы

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta'} = \frac{dy''}{d\eta''},$$

при которой u содержит только x и y, v содержит y', но не содержит y'', а w содержит y'', то наиболее общее диференциальное уравнение второго порядка, инвариантное относительно дважды расширенной группы

$$U''f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'} + \eta''\frac{\partial f}{\partial y''},$$

будет

$$w = \Phi(u, v),$$

где Φ — произвольная функция аргументов.

Докажите, что если $w \equiv dv/du$, то мы не потеряем в общности, следовательно уравнение второго порядка $w = \Phi(u, v)$ будет эквивалентно уравнению первого порядка

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u, v).$$

Проверьте эту теорему для следующих групп и соответствующих инвариантных диференциальных уравнений и покажите в каждом отдельном случае, как может быть получен первый интеграл

$$\text{(I)}\quad Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad y'' = F(y, y');$$

$$\text{(II)}\quad Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad y'' = F(x, y');$$

$$\text{(III)}\quad Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad xy'' = y'F(y, xy');$$

$$\text{(IV)}\quad Uf \equiv y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad y'' \equiv yF(x, y'/y);$$

$$\text{(V)}\quad Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad xy'' = F(y/x, y');$$

$$\text{(VI)}\quad Uf \equiv \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x).$$

(Page, Ordinary Differential Equations, IX).

ГЛАВА V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5·1. Свойства линейного диференциального оператора. Наиболее общее линейное диференциальное уравнение типа

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{du}{dx}+p_n(x)y=r(x)$$

может быть переписано символически в виде[1]

$$\text{(A)}\qquad L(y)\equiv\{p_0D^n+p_1D^{n-1}+\ldots+p_{n-1}D+p_n\}y=r(x).$$

Примем, что коэфициенты p_0, $p_1,\ldots,p_n$ и функция $r(x)$ непрерывные однозначные функции x в пределах интервала $a\leqslant x\leqslant b$ и что p_0 не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, тогда основная теорема существования § 3 показывает, что существует единственное непрерывное решение $y(x)$, допускающее данное значение y_0 в любой точке x_0 в пределах интервала (a, b), первые $n-1$ производных которого непрерывны и принимают соответственно значения y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ при x_0.

Выражение

$$L\equiv p_0D^n+p_1D^{n-1}+\ldots+p_{n-1}D+p_n$$

называется *линейным диференциальным оператором порядка n*. Диференциальное уравнение

$$\text{(B)}\qquad L(u)=0$$

называется *однородным уравнением*, соответствующим (A); называется оно так потому, что $L(u)$ является однородной линейной формой относительно u, u', ..., $u^{(n)}$.

Следующие элементарные теоремы ясно показывают природу оператора L.

I. *Если* $u=u_1$ — *решение однородного уравнения* (B), *то* $u=Cu_1$, *также является решением, где* C — любая произвольная постоянная.

---

[1] Понятие символического оператора было впервые введено Бриссоном [Brisson, J. Ec. Polyt. (1) Cah., 14 (1808), 197]. Его применение было расширено Коши.

Это следует из того, что

$$D^r C u_1 = C D^r u_1,$$

так как тогда

$$L(C_1 u_1) = \sum_{r=0}^{n} p_r D^{n-r} C u_1$$

$$= C \sum_{r=0}^{n} p_r D^{n-r} u_1 = C L(u_1) = 0.$$

II. *Если $u = u_1, u_2, \ldots, u_m$ — m решений однородного уравнения* (B), *то $u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_m u_m$ также будет решением, где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — произвольные постоянные.*

Аналогично это следует из того, что

$$D^r \{C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_m u_m\} = C_1 D^r u_1 + C_2 D^r u_2 + \ldots + C_m D^r u_m.$$

Если n линейнонезависимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ однородного уравнения известны[1], то решение

$$u(x) = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

содержащее n произвольных постоянных, является полным интегралом однородного уравнения. Постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ могут быть определены только единственным образом, так что

$$\text{(C)} \qquad u(x_0) = y_0, \quad u'(x_0) = y_0', \ldots, \; u^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

III. *Пусть $y = y_0(x)$ — любое решение неоднородного уравнения* (A), *тогда если $u(x)$ — полный интеграл* (B), *то $y = y_0(x) + u(x)$ будет наиболее общим решением* (A)[2].

Поскольку оператор D^r дистрибутивен, L также дистрибутивно, т. е.

$$L\{y_0(x) + u(x)\} = L\{y_0(x)\} + L\{u(x)\} = r(x),$$

так как

$$L\{y_0(x)\} = r(x), \quad L\{u(x)\} = 0.$$

Но решение

$$y = y_0(x) + u(x)$$

содержит n произвольных постоянных и является следовательно наиболее общим решением (A).

Если $u(x)$ так подобрано, что удовлетворяет условиям (C), а $y_0(x)$ таково, что

$$y_0(x_0) = y_0'(x_0) = \ldots = y_0^{(n-1)}(x) = 0,$$

[1] Условия для линейной независимости см. § 5·2.

[2] d'Alembert, Misc. Taur., 3 (1762—65), 381.

а это возможно при условии, если $r(x)$ не равно тождественно нулю, то решение

$$y = y_0(x) + u(x)$$

удовлетворяет также условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}(x) = y_0^{(n-1)}.$$

Это общее решение (А) может рассматриваться как состоящее из двух частей, именно:

1°. Из полного интеграла соответствующего однородного уравнения, имеющего форму

$$u(x) = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

и содержащего n произвольных постоянных, — оно называется иногда *дополнительной функцией.*

2°. *Из частного интеграла,* который не содержит произвольной постоянной и может быть частным решением (А). Возможно, что решение (А) вместе с его первыми $n-1$ производными обращается в нуль в точке x_0 в интервале (a, b).

Так, если рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x,$$

то дополнительной функцией будет $A \cos x + B \sin x$, где A и B — произвольные постоянные; частный интеграл равен $y = x$. Общее решение поэтому

$$y = A \cos x + B \sin x + x.$$

Любое специальное решение получится, если придать A и B определенные числовые значения.

5 · 2. Вронскиан. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будут n решениями однородного уравнения порядка

$$L(u) = 0,$$

тогда наиболее общим решением или полным интегралом этого уравнения будет

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

при условии, что решения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ линейно независимы. Получим условия, что n функций

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x),$$

которые приняты диференцируемыми $n-1$ раз в интервале (a, b), линейнонезависимы.

Если эти n функций не являются линейно независимыми, то постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ могут быть определены таким образом, что

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n = 0$$

тождественно. Поскольку это соотношение удовлетворяется тождественно в интервале (a, b) оно может быть $n-1$ раз диференцируемо в этом интервале, так что

$$C_1 u_1' + C_2 u_2' + \ldots + C_n u_n' + 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1 u_1^{(n-1)} + C_2 u_2^{(n-1)} + \ldots + C_n u_n'^{(n-1)} = 0.$$

Таким образом мы получили n уравнений, определяющих постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Если эти уравнения совместны, то

$$\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \begin{vmatrix} u_1, & u_2, \ldots, & u_n \\ u_1' & u_2', \ldots, & u_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)}, & u_2^{(n-1)}, \ldots, & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Этот детерминант называется *вронскианом*[1] функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Его тождественное обращение в нуль является необходимым условием для линейной зависимости $u_1, u_2, \ldots, u_n$; поэтому *его неравенство нулю достаточно для линейной независимости* $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Предположим, наоборот, что Δ тождественно равно нулю. Может случиться, что вронскиан меньшего числа функций, например, $u_1, u_2, \ldots, u_k$, также будет тождественно равен нулю. Докажем, что если $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — решения диференциального уравнения, то они линейно зависимы.

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_k(x)$ — функции, первые $k-1$ производных которых конечны в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ и такие, что их вронскиан равен нулю в интервале (a, b). Тогда, если вронскиан $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_{k-1}(x)$ не обращается тождественно в нуль, то существует тождественная зависимость вида

$$u_k(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_{k-1} u_{k-1}(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ — постоянные[2]. Чтобы доказать эту теорему, обозначим миноры элементов последней строки вронскиана

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, \ldots, & u_k \\ u_1', & u_2', \ldots, & u_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(k-1)}, & u_2^{(k-1)}, \ldots, & u_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

соответственно через $U_1, U_2, \ldots U_k$, тогда получим k тождеств

$$U_1 u_1^{(r)} + U_2 u_2^{(r)} + \ldots + U_k u_k^{(r)} \qquad (r = 0, 1, \ldots, k-1)$$

---

[1] Введено Г. Вронским (H. Wronski) в 1821 г. Тождественное обращение вронскиана в нуль не является достаточным условием для линейной зависимости n функций. См. Peano, Mathesis, 6 (1889), 75, 110; Rend. Accad. Lincei (5), 6 (1897), 413; Bortolotti, ibid., 7 (1893), 45; Vivanti, ibid., 7, 194; Bôcher, Trans. Am. Math. Soc. 2 (1901), 139; Curtiss, Math. Ann. 65 (1908), 282.

[2] Frobenius, J. für Math., 76 (1873), 238.

Если мы каждое из первых $k-1$ этих тождеств продиференцируем, а следующее тождество вычтем из результата, то получим

$$U_1'u_1^{(r)}+U_2'u_2^{(r)}+\ldots+U_k'u_k^{(r)}=0 \quad (r=0, 1\ldots, k-2).$$

Умножим r-ое из этих $k-1$ тождеств на сомножитель $u_1^{(r-1)}$ в детерминанте U_k и сложим произведения, тогда

$$U_1'U_k-U_k'U_1=0,$$

и поскольку U_k не рàвно тождественно нулю в интервале (a, b), то

$$U_1=-c_1U_k.$$

Аналогично можно доказать, что

$$U_2=-c_2U_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$U_{k-1}=-c_{k-1}U_k.$$

Поэтому из тождества

$$U_1u_1+U_2u_2+\ldots+U_ku_k=0$$

следует

$$U_k\{-c_1u_1-c_2u_2-\ldots-c_{k-1}u_{k-1}+u_k\}=0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь пусть $u_1, u_2,\ldots, u_n$ будут таковы, что их первые $(n-1)$ производных конечны в интервале (a, b) и ни одно не равное нулю выражение вида

$$g_1u_1+g_2u_2+\ldots+g_nu_n,$$

где $g_1, g_2,\ldots,g_n$ — постоянные, не обращается в нуль вместе с его первыми $(n-1)$ производными ни в одной точке интервала (a, b). Если вронскиан $u_1, u_2,\ldots, u_n$ обращается в нуль в любой точке p интервала (a, b), то эти функции будут линейно зависимы[1], так как обращение в нуль вронскиана для $x=p$ означает, что постоянные $c_1, c_2,\ldots,c_n$, не все равные нулю, могут быть найдены таким образом, что

$$c_1u_1^{(r)}(p)+c_2u_2^{(r)}(p)+\ldots+c_nu_n^{(r)}(p)=0 \qquad (r=0, 1,\ldots,n-1),$$

т. е. функция

$$c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\ldots+c_nu_n(x)$$

обращается в нуль вместе с ее первыми $n-1$ производными при $x=p$ и следовательно тождественно равна нулю. Таким образом теорема доказана.

Пусть $u_1, u_2,\ldots,u_k$ — функции x, которые в любой точке интервала (a, b) имеют конечные производные до $n-1$ порядка

[1] Эта и следующая теорема были даны Бохером, loc. cit.

$(n > k)$. Далее ни одна функция вида

$$g_1 u_1 + g_2 u_2 + \ldots + g_k u_k,$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — постоянные не исчезает вместе с ее первыми $n-1$ производными ни в одной точке интервала (a, b). Тогда, если вронскиан $u_1, u_2, \ldots, u_k$ обращается в нуль тождественно, то функции линейно зависимы.

Чтобы доказать это, рассмотрим первый случай, когда вронскиан $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ не равен нулю в интервале (a, b). Пусть p будет точкой интервала, где вронскиан не обращается в нуль. Тогда, поскольку вронскиан непрерывен, он не обратится в нуль в непосредственном соседстве с p, а из того, что было уже сказано выше, следует, что постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_k$ будут таковы, что функция

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_k u_k,$$

будет равна нулю в соседстве с p. Поэтому первые $n-1$ производных этой функции также обратятся в нуль в соседстве с p, и следовательно, согласно условию, функция должна быть тождественно равна нулю.

Рассмотрим теперь общий случай. Предположим, что вронскиан $u_1, u_2, \ldots, u_m$ обращается тождественно в нуль при $(1 < m < k)$, в то время как вронскиан $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ не обращается тождественно в нуль в интервале (a, b). Отсюда следует, что $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы и следовательно теорема доказана.

Эти теоремы могут быть приложены к решениям

$$u_1(x), \ u_2(x), \ldots, \ u_n(x)$$

диференциального уравнения. Так как любое решение, которое вместе с ее первыми $n-1$ производными обращается в нуль в любой точке интервала (a, b), тождественно равно нулю, отсюда следует:

I. Если вронскиан $u_1, u_2, \ldots, u_n$ равен нулю в любой точке (a, b), то эти n решений линейнозависимы.

II. Если вронскиан k решений $u_1, u_2, \ldots, u_k (k < n)$ равен нулю в интервале (a, b), то эти k решений также линейно зависимы.

Если $v_1, v_2, \ldots, v_n$ выведены из $u_1, u_2, \ldots, u_n$ при помощи линейного преобразования

$$v_r = a_{r1} u_1 + a_{r2} u_2 + \ldots + a_{rn} u_n \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то легко показать, что

$$\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = A\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где A — детерминант $|a_{rs}|$. Следовательно выражение $\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ не равно нулю, поэтому $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно независимы, при условии (1°), что детерминант A не равен нулю, т. е. преобразование обыкновенное, и (2°), что $u_1, u_2, \ldots, u_n$ линейно независимы.

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ представляют n линейно независимых решений уравнения

$$L(u) = 0,$$

тогда вронскиан $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ может быть выражен в простой форме, которую мы сейчас получим:

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, \ldots, & u_n \\ u_1', & u_2', \ldots, & u_n' \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ u_1^{(n-2)}, & u_2^{(n-2)}, \ldots, & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n)}, & u_2^{(n)}, \ldots, & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

так как все другие детерминанты, возникающие при диференцировании, имеют по два одинаковых ряда, и поэтому обращаются в нуль. Поскольку

$$p_0 u_r^{(n)} = -p_1 u_r^{(n-1)} - \ldots - p_{n-1} u_r' - p_n u_r,$$

отсюда следует (после небольших преобразований), что

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{p_1}{p_0}\Delta$$

или

$$\Delta = \Delta_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{p_1}{p_0}\,dx\right\}, \qquad \left[\exp x = e^x\right],$$

где Δ_0 — значение, к которому Δ приводится при $x = x_0$. Это соотношение называется *тождеством Абеля* (§ 3·32). Оно показывает, что если $p_0(x)$ не обратится в нуль в интервале (a, b), а Δ_0 исчезает при x_0, то Δ тождественно равна нулю. Если Δ_0 не равна нулю, то Δ не будет равна нулю нигде, за исключением особой точки, т. е. точки, в которой p_1/p_0 становится бесконечным. Такие точки исключаются, полагая, что коэфициенты $L(u)$ непрерывны, а p_0 не обращается в нуль в интервале (a, b).

5·21. Фундаментальная последовательность решений. Некоторая линейно независимая последовательность n решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ уравнения

$$L(u) = 0$$

образует так называемую *фундаментальную последовательность*, или *фундаментальную систему*[1]. Чтобы данная последовательность n решений была фундаментальной, вронскиан n решений

[1] Термин *фундаментальная система* был введен Фуксом [Fuchs, J. für Math., 66 (1866), 126 (Ges. Math. Werke, I, 165)].

не должен быть равен нулю. Общее решение уравнения будет иметь вид[1]

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

и не может обратиться в нуль, если все постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не будут равны нулю.

Очевидно, существует бесконечное число возможных фундаментальных последовательностей решений, но одна частная последовательность имеет большое значение вследствие ее простоты.

Пусть при $u_1(x)$

$$u_1(x_0) = 1, u_1'(x_0) = u_1''(x_0) = \ldots = u_1^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Определим $u_r(x)$, где $r = 2, 3, \ldots, n$, как частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(r-2)}(x_0) = 0,$$

$$u^{(r-1)}(x_0) = 1,$$

$$u^{(r)}(x_0) = u^{(r+1)}(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ образуют фундаментальную последовательность; значение их вронскиана при $x = x_0$ равно единице.

Единственное решение

$$L(u) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_0) = y_0, u'(x_0) = y_0', \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

имеет вид

$$u(x) = y_0 u_1(x) + y_0' u_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} u_n(x).$$

Любая фундаментальная последовательность решений

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$$

может быть переписана так

$$u_1(x) = v_1, u_2(x) = v_1 \int v_2\, dx, u_3(x) = v_1 \int v_2 \int v_3 (dx)^2,$$

и в общем случае

$$u_r(x) = v_1 \int v_2 \int \ldots \int v_r (dx)^{r-1},$$

где

$$v_r = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{v_{r-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{v_{r-2}} \cdot \frac{d}{dx} \ldots \frac{1}{v_2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{u_r}{u_1}\right)\right\}\right].$$

Однородное диференциальное уравнение, имеющее фундаментальную последовательность решений в виде n функций

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

[1] Lagrange, Misc.Taur., 3 (1762—65), 181 [Œuvres, 1, 473].

получается исключением n произвольных постоянных C из $n+1$ уравнений

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$
$$u' = C_1 u_1' + C_2 u_2' + \ldots + C_n u_n',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(n)} = C_1 u_1^{(n)} + C_2 u_2^{(n)} + \ldots + C_n u_n^{(n)},$$

поэтому

$$\Delta(u, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

где Δ — вронскиан $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$. При разложении детерминанта коэфициент $u^{(n)}$ равен $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ но не равен нулю, поскольку $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют фундаментальную последовательность.

Можно написать

$$L(u) \equiv \frac{\Delta(u, u_1 u_2, \ldots, u_n)}{\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = 0,$$

так что коэфициент при $u^{(n)}$ в $L(u)$ равен единице.

Уравнение получается вида

$$L(u) \equiv \frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{du}{dx} + p_n u = 0,$$

где

$$p_r = -\Delta_r/\Delta,$$

а Δ_r получается из Δ подстановкой $u_1^{(n)}$ вместо $u_1^{(n-r)}$, $u_2^{(n)}$ вместо $u_2^{(n-r)}$ и т. д.

Чтобы выразить оператор L в виде произведения n операторов первого порядка, напишем

$$U_r = \Delta(u, u_1, u_2, \ldots, u_r),$$
$$\Delta_r = \Delta(u_1, u_2, \ldots, u_r) \qquad (\Delta_0 = 1),$$

тогда[1]

$$L(u) = \frac{U_n}{\Delta_n} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-1} U_n}{\Delta_n^2}$$
$$= -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{U_{n-1}}{\Delta_n}\right) = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_n} \cdot \frac{U_{n-1}}{\Delta_{n-1}}\right).$$

Повторяя этот процесс, найдем, что

$$L(u) = (-1)^n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{\Delta^2_{n-1}}{\Delta_n \Delta_{n-2}} \cdot \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \cdot \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2 \Delta_0} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{\Delta_0}{\Delta_1} u,$$

где каждый диференциальный оператор действует на все последующие.

---

[1] $U_r \Delta_{r-1} = U_{r-1} \Delta_r' - U'_{r-1} \Delta_r$ доказывается частичным разложением детерминантов.

Если фундаментальную последовательность рассматривать в виде

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_1 \int v_2 dx, \ldots,\ u_n = v_1 \int v_2 \int \ldots \int v_n\, (dx)^{n-1},$$

то уравнение примет вид[1]

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{v_n dx} \cdot \frac{d}{v_{n-1} dx} \cdots \frac{d}{v_2\, dx} \cdot \frac{u}{v_1} = 0.$$

Символически уравнение $L(u) = 0$ может быть написано так[2]

$$L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1 (u) = 0,$$

символ L_i представляет оператор $D - \alpha_i$, где

$$\alpha_i = \frac{d}{dx} \log \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} = \frac{d}{dx} \log (v_1,\ v_2, \ldots, v_i).$$

Это следует из того, что

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta_{i-1}\, z}{\Delta_i} \right) = \frac{dz}{dx} - z \frac{d}{dz} \log \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \cdot$$

Необходимо отметить, что порядок последовательности множителей $(D - \alpha_i)$ должен быть сохранен, так как неверно, что для любых двух индексов i и j

$$(D - \alpha_i)(D - \alpha_j) = (D - \alpha_j)(D - \alpha_i).$$

Иначе говоря, множители диференциального оператора в общем не коммутативны.

5 · 22. Понижение порядка уравнения. Если r независимых решений уравнения порядка n

$$L(u) = 0$$

известны, то порядок уравнения может быть приведен $k\ n - r$. Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_r$$

будут известными решениями и пусть

$$v_1 = u,\ v_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_1}{u_2}\right),\quad v_3 = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{v_2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{u_3}{v_1}\right)\right\}$$

и т. д., как и раньше. Тогда, поскольку известно, что уравнение имеет форму

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{v_n\, dx} \cdots \frac{d}{v_{r+1} dx} \cdot \frac{d}{v_r\, dx} \cdots \frac{d}{v_2\, dx} \cdot \frac{u}{v_1} = 0,$$

---

[1] Frobenius, J. für Math., 76 (1873), 264; 77 (1874), 256.

[2] Floquet, Ann. Éc. Norm., (2) 8 (1879), 49.

оно может быть написано в виде

$$P(v)=0,$$

где

$$(A)\qquad v=\frac{d}{v_r\,dx}\cdot\frac{d}{v_{r-1}dx}\cdots\frac{d}{v_2\,dx}\cdot\frac{u}{v_1},$$

а P — линейный оператор порядка $n-r$.

Если некоторое решение $P(v)=0$ известно, то соответствующее значение u может быть получено из выражения (A) посредством r квадратур.

Приведем пример уравнения второго порядка

$$(B)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0.$$

Предположим, что одно решение этого уравнения известно; обозначим его y_1 и напишем

$$y=y_1\int u\,dx,$$

тогда

$$y_1''\int u\,dx+2y_1'u+y_1u'+p\left\{y_1'\int u\,dx+y_1u\right\}+qy_1\int u\,dx=0,$$

что приводится к

$$y_1u'+(2y_1'+py_1)u=0.$$

Это является линейным уравнением первого порядка относительно u, решение которого имеет вид

$$u=Cy_1^{-2}e^{-\int p\,dx}$$

и поэтому оба независимых решения (B) будут

$$y_1\ \text{и}\ y_1\int\left\{y_1^{-2}e^{-\int p\,dx}\right\}dx.$$

5 · 23. Решение неоднородного уравнения. Рассмотрим общее уравнение

$$(A)\qquad L(y)=r(x),$$

при условии, что фундаментальная последовательность решений $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ приведенного уравнения

$$L(u)=0$$

известна.

Тогда общее решение приведенного уравнения будет иметь вид

$$u=C_1u_1+C_2u_2+\ldots+C_nu_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Теперь, так же, как и в случае линейных уравнений первого порядка (§ 2 · 13), для определения общего решения рассматриваемого уравнения может быть приложен метод *вариации параметров*[1]. Пусть

$$y = V_1 u_1 + V_2 u_2 + \ldots + V_n u_n,$$

где V_1, $V_2, \ldots, V_n$ — неопределенные функции, x удовлетворяет уравнению (A). Задача — найти функции V. Поскольку само диференциальное уравнение эквивалентно единственному соотношению между функциями V и $r(x)$, то ясно, что $n-1$ других соотношений могут быть установлены при условии их взаимной совместности. Последовательность $n-1$ соотношений будет

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} V_1' u_1 + V_2' u_2 + \ldots + V_n' u_n = 0, \\ V_1' u_1' + V_2' u_2' + \ldots + V_n' u_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_1' u_1^{(n-2)} + V_2' u_2^{(n-2)} + \ldots + V_n' u_n^{(n-2)} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} y' &= V_1 u_1' + V_2 u_2' + \ldots + V_n u_n', \\ y'' &= V_1 u_1'' + V_2 u_2'' + \ldots + V_n u_n'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= V_1 u_1^{(n-1)} + V_2 u_2^{(n-1)} + \ldots + V_n u_n^{(n-1)}, \end{aligned}$$

в то время как

$$\begin{aligned} y^{(n)} = {} & V_1 u_1^{(n)} + V_2 u_2^{(n)} + \ldots + V_n u_n^{(n)} + \\ & + V_1' u_1^{(n-1)} + V_2' u_2^{(n-1)} + \ldots + V_n' u_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом выражение

$$y = V_1 u_1 + V_2 u_2 + \ldots + V_n u_n$$

удовлетворяет диференциальному уравнению

$$L(y) = r(x),$$

где коэфициент при y^n принят равным единице, если

$$\text{(C)} \qquad V_1' u_1^{(n-1)} + V_2' u_2^{(n-1)} + \ldots + V_n' u_n^{(n-1)} = r(x).$$

Поскольку решения $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ образуют фундаментальную последовательность, n уравнений (B) и (C) достаточны для определения V_1', $V_2', \ldots, V_n'$ исключительно через u_1, $u_2, \ldots, u_n$ и $r(x)$. Тогда V_1, $V_2, \ldots, V_n$ получаются в квадратурах.

В частности, если уравнение второго порядка, то

$$V_1 = -\int \frac{u_2(x)}{\Delta(u_1, u_2)} r(x)\, dx, \quad V_2 = \int \frac{u_1 x}{\Delta(u_1, u_2)} r(x)\, dx,$$

где $\Delta(u_1, u_2)$ — вронскиан u_1 и u_2.

5·3. Сопряженное уравнение. Понятие интегрирующего множителя, которое играет такую большую роль в теории линей-

---

[1] Lagrange, Nouv. Mém. Acad. Berlin, 5 (1774), 201; 6 (1775), 190 [Œuvres, 4, 9, 159].

ных уравнений первого порядка, может быть использовано в теории линейных уравнений высшего порядка и приводит к важным результатам.

Пусть

$$\text{(A)}\qquad L(u) \equiv p_0 \frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{du}{dx} + p_n u$$

и пусть функция v предположена такой, что $vL(u)\,dx$ будет полным диференциалом, тогда формула

$$U^{(r)} = V \frac{d}{dx}\{U^{(r-1)}V - U^{(r-2)}V' + \ldots + (-1)^{r-1} UV^{(r-1)}\} + + (-1)^r UV^{(r)},$$

приложенная к $vL(u)$ в ее распространенной форме, дает

$$\text{(B)}\ vL(u) = \frac{d}{dx}\{u^{(n-1)} p_0 v - u^{(n-2)}(p_0 v)' + \ldots + (-1)^{n-1} u\,(p_0 v)^{(n-1)}\} +$$
$$+ \frac{d}{dx}\{u^{(n-2)} p_1 v - u^{(n-3)}(p_1 v)' + \ldots + (-1)^{n-2} u\,(p_1 v)^{(n-2)}\} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{d}{dx}\{u' p_{n-2} v - u\,(p_{n-2} v)'\} +$$
$$+ \frac{d}{dx}(u p_{n-1} v) + u\bar{L}(v),$$

где

$$\text{(C)}\qquad \bar{L}(v) = (-1)^n \frac{d^n (p_0 v)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 v)}{dx^{n-1}} + \ldots - - \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v.$$

Диференциальное выражение $\bar{L}(v)$ называется сопряженным с $L(u)$, а

$$\bar{L}(v) = 0$$

также называется *сопряженным уравнением*[1], соответствующим

$$L(u) = 0.$$

Соотношение (B) может быть выражено в форме

$$vL(u) - u\bar{L}(v) = \frac{d}{dx}\{P(u, v)\};$$

оно называется *тождеством Лагранжа*. Выражение $P(u, v)$,

[1] Lagrange, Misc. Taur., 3 (1762—65), 179 [Œuvres, 1, 471]. Термин был впервые введен Фуксом [J. für Math]., 76 (1873), 183 [Ges. Math. Werke, 1, 422].

линейное и однородное относительно

$$u, u', \ldots, u^{(n-1)}$$

и

$$v, v', \ldots, v^{(n-1)},$$

называется *билинейной последовательностью.*

Чтобы v могло быть интегрирующим множителем для $L(u)$, необходимо и достаточно, чтобы v удовлетворяло сопряженному уравнению $\bar{L}(v)=0$. Если v — решение этого уравнения, то уравнение

$$L(u)=0$$

приводится к линейному уравнению порядка $n-1$

$$P(u, v)=C,$$

где C — произвольная постоянная.

Если r независимых решений сопряженного уравнения, например

$$v_1, v_2, \ldots, v_r,$$

известны, то мы получим r независимых уравнений

$$P(u, v_1)=C_1, \quad P(u, v_2)=C_2, \ldots, P(u, v_r)=C_r,$$

каждое порядка $n-1$. Из этих r уравнений можно исключить $r-1$ значений $u^{(n-1)}, u^{(n-2)}, \ldots, u^{(n-r+1)}$; уравнение, полученное путем исключения будет линейным уравнением порядка $n-r$, коэфициенты которого содержат r произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_r$. В частности, если $r=n$, то все производные $u^{(n-1)}, u^{(n-2)}, \ldots, u'$ будут исключены, и в результате мы получим выражение для u через $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Иначе говоря, уравнение полностью интегрируется.

Докажем теперь, что соотношение между $L(u)$ и $\bar{L}(v)$ обратимо, т. е. если $\bar{L}(v)$ является сопряженным с $L(u)$, то $L(u)$ сопряженное с $\bar{L}(v)$. Предположим, что этого нет и пусть $L_1(u)$ будет сопряженным с $\bar{L}(v)$. Тогда существует функция $P_1(u, v)$ такая, что

$$vL_1(u)-u\bar{L}(v)=\frac{d}{dx}\{P_1(u, v)\},$$

но

$$vL(u)-u\bar{L}(v)=\frac{d}{dx}\{P(u, v)\},$$

следовательно

$$v\{L_1(u)-L(u)\}=\frac{d}{dx}\{P_1(u, v)-P(u, v)\}.$$

$P_1(u, v)-P(u, v)$ является однородным и линейным относительно $v, v', \ldots, v^{(n-1)}$, но $v\{L_1(u)-L(u)\}$ не содержит $v^{(n)}$ и поэтому коэфициент при $v^{(n-1)}$ в $P(u, v)-P_1(u, v)$ равен нулю.

Рассуждение может быть повторено; оно показывает, что $P_1(u, v) - P(u, v)$ тождественно равно нулю, следовательно $L_1(u)$ тождественно $L(u)$.

Если уравнение тождественно своему сопряженному уравнению, то оно называется *самосопряженным*[1].

Разложим $L(u)$ на множители так же, как и в предыдущем параграфе

$$L(u) \equiv \frac{d}{v_{n+1}\,dx}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1},$$

тогда поскольку [2]

$$\int vL(u)\,dx = \frac{v}{v_{n+1}}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-1}x}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1} -$$
$$-\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-1}\,dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}\right)dx,$$

$$\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-1}\,dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}\right)dx =$$
$$= \left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-1}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-2}dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}\right) -$$
$$-\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-1}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-2}\,dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}\right)dx$$

и т. д.; если

$$P(u, v) = \frac{v}{v_{n+1}}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-1}dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2\,dx}\cdot\frac{u}{v_1} -$$
$$-\left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-1}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-2}dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}\right) +$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot +$$
$$+(-1)^{n-2}\left(\frac{d}{v_3 dx}\cdot\frac{d}{v_4 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\left(\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}\right) +$$
$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{d}{v_3 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}}\right)\frac{u}{v_1}$$

и

$$\overline{L}(v) = (-1)^n\frac{d}{v_1 dx}\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+1}},$$

---

[1] Один из первых примеров самосопряженного уравнения дан Якоби [Jacobi, J. für Math. 17 (1837), 71 (Werke, 4, 44)], который доказал, что если порядок оператора равен $2m$, то оператор будет $P\overline{P}$, где P и $\overline{P}$ — сопряженные операторы порядка m. См. также Jacobi, J. für Math. 32 (1846), 189 (Werke, 2, 127); Hesse, ibid. 54 (1857), 230.

[2] Frobenius, J. für Math., 76 (1873), 264. Thomé, ibid., 76, 277; Frobenius, ibid. 77 (1874), 257; 80 (1875), 328.

то

$$vL(u) = \frac{d}{dx}\Big\{P(u,\ v)\Big\} + u\bar{L}(v).$$

В частности, если выражение $L(u)$ самосопряженное, то

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \pm v_1, \\ v_n &= \pm v_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Таким образом, если $L(u)=0$ — самосопряженное линейное диференциальное уравнение четного порядка $2m$, то оно может быть написано в виде [1]

$$\frac{d}{v_1 dx}\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_m dx}\cdot\frac{d}{v_{m+1}dx}\cdot\frac{d}{v_m dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}=0$$

или

$$P\bar{P}(u)=0,$$

где P — диференциальный оператор

$$\frac{d}{v_1 dx}\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_m dx}\cdot\frac{1}{\frac{1}{v^{2}_{m+1}}},$$

а $\bar{P}$ — сопряженный оператор.

Аналогично, если уравнение $L(u)=0$ самосопряженное и нечетного порядка $2m-1$, то оно может быть написано в виде

$$\frac{d}{v_1 dx}\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_m dx}\cdot\frac{d}{v_m dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}=0$$

или

$$P\frac{d}{dx}\bar{P}(u)=0,$$

где P — оператор

$$\frac{d}{v_1 dx}\cdot\frac{d}{v_2 dx}\cdot\ldots\cdot\frac{d}{v_{m-1}dx}\cdot\frac{1}{v_m},$$

а $\bar{P}$ — ему сопряженный оператор.

5·4. Решения, общие для двух линейных диференциальных уравнений. Если известно a priori что уравнение

$$L(u)=0$$

имеет решения, общие с другим однородным линейным уравнением низшего порядка, то порядок первого уравнения может быть понижен, даже если общие решения и не даны в явной форме. Пусть

$$\begin{aligned} L &\equiv p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_{n-1} D + p_n \\ L_1 &\equiv q_0 D^m + q_1 D^{m-1} + \ldots + q_{m-1} D + q_m \end{aligned}$$

---

[1] Frobenius, ibid., 85 (1878), 192.

будут операторами порядка $m (m < n)$. Рассмотрим третий оператор

$$R_1 = r_0 D^{n-m} + r_1 D^{n-m-1} + \ldots + r_{n-m-1} D + r_{n-m},$$

где коэфициенты r должны быть такими, чтобы можно было максимально понизить порядок оператора

$$L - R_1 L_1.$$

Выбором коэфициентов r так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$p_0 = r_0 q_0,$$

$$p_1 = r_1 q_0 + r_0 \{(n-m) q_0' + q_1\},$$

$$p_2 = r_2 q_0 + r_1 \{(n-m-1) q_0' + q_1\} +$$

$$+ r_0 \left\{\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1) q_0'' + (n-m) q_1' + q_2\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n-m} = r_{n-m} q_0 + r_{n-m-1} \{q_0' + q_1\} + r_{n-m-2} \{q_0'' + 2q_1' + q_2\} + \ldots$$

можно определить оператор $L - R_1 L_1$ через $D^m, D^{m+1}, \ldots, D^n$. Эти соотношения достаточны для последовательного определения $r_0, r_1, \ldots, r_{n-m}$ после чего выражение $L - R_1 L_1$ приводится к оператору порядка не выше $m-1$.

Необходимо отметить, что функции r выводятся из функций p и q рациональными процессами сложения, вычитания, умножения, деления и диференцирования, следовательно если коэфициенты L и L_1 рациональные функции x, то коэфициенты R_1 также будут рациональными функциями.

Так

$$L = R_1 L_1 + L_2,$$

где L_2 — оператор, аналогичный L и L_1, но порядка не выше $m-1$. Рассмотрим случай, когда уравнения

$$L(u) = 0, \quad L_1(u) = 0$$

имеют общее решение. Это решение будет также удовлетворять уравнению

$$L_2(u) = 0.$$

Если бы каждое решение $L_1(u) = 0$ было решением $L(u) = 0$, а L_2 не было бы тождественно равно нулю, то уравнение $L_2(u) = 0$, порядок которого не выше $m-1$, удовлетворялось бы m решениями $L_1(u) = 0$, что невозможно. L_2 было бы поэтому тождественно равно нулю, а L могло быть разложено на произведение $R_1 L_1$. Обратное также верно.

С другой стороны, если бы $L_1(u) = 0$ имело решения, не принадлежащие $L(u) = 0$, то L_2 не было бы тождественно равно нулю. Операторы R_2 и L_3, где порядок L_3 меньше порядка L_2, существуют таким образом, что

$$L_1 = R_2 L_2 + L_3$$

и

$$L_{\nu-1} = R_\nu L + L_{\nu+1}.$$

В этом последнем уравнении $L_{\nu+1}$ тождественно равно нулю или является оператором нулевого порядка, так как в любом другом случае процесс мог быть продлен еще на одну ступень.

В первом случае каждое решение $L_\nu(u) = 0$ является решением $L_{\nu-1}(u) = 0$, следовательно также и

$$L_{\nu-2}(u) = 0, \ldots, L_1(u) = 0, L(u) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L &= R_1(R_2L_2 + L_3) + L_2 \\ &= (R_1R_2 + 1)L_2 + R_1L_3 \\ &= (R_1R_2R_3 + R_1 + R_3)L_3 + (R_1R_2 + 1)L_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \mathbf{R}L_\nu, \end{aligned}$$

следовательно L разложено рациональными процессами на произведение двух операторов.

Если мы изменим зависимую переменную

$$v = L_\nu(u),$$

то уравнение $L(u) = 0$ примет вид

$$\mathbf{R}(v) = 0,$$

где $\mathbf{R}$ — оператор порядка $n - k$, если k порядок L_ν.

Пусть $v = V$ будет наиболее общим решением, содержащим $n - k$ произвольных постоянных для $\mathbf{R}(v) = 0$, тогда общее решение

$$L(u) = 0$$

получится полным решением неоднородного уравнения

$$L_\nu(u) = V;$$

это решение будет содержать n произвольных постоянных.

Во втором случае $L_{\nu+1}$ — функция x или постоянная, не равная нулю. Это показывает, что

$$L_{\nu-1}(u) = 0, \quad L_\nu(u) = 0$$

не имеют общего решения, не равного тождественно нулю.

Если уравнение с рациональными коэфициентами не имеет решения, общего с любым другим уравнением низшего порядка, коэфициенты которого также рациональны, то оно называется *неприводимым*. Эти рассуждения могут быть значительно развиты, применяя понятие области рациональности. Независимая переменная x и некоторая иррациональная или трансцендентная функция x берутся как элементы или основания области $[R]$. Тогда любая функция, выведенная при помощи рациональных процессов[1] из этих элементов, будет рациональной в области $[R]$. Если уравнение, коэфициенты которого рациональны в $[R]$, не имеет решения, общего с уравнением низшего порядка, коэфициенты которого также рациональны в $[R]$, то уравнение неприводимо в области $[R]$.

5·5. Коммутативные линейные операторы. Любое диференциальное уравнение типа

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2p\frac{dy}{dx}+qy=0$$

может быть разложено на множители и выражено в виде

$$\{D+\alpha_2(x)\}\{D+\alpha_1(x)\}y=0,$$

так как необходимо только определить функции α_1 и α_2 при помощи уравнений

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(x)=2p,\ \alpha_1(x)\alpha_2(x)+\alpha'_1(x)=q;$$

которые могут быть, по крайней мере теоретически, решены[2]. Данное уравнение поэтому удовлетворяется общим решением

$$\{D+\alpha_1(x)\}y=0,$$

но не удовлетворяется, за исключением очень специальных случаев, общим решением

$$\{D+\alpha_2(x)\}y=0.$$

Оно будет удовлетворено общим решением последнего уравнения так же, как и решением первого уравнения, если оба оператора

$$D+\alpha_1(x) \text{ и } D+\alpha_2(x)$$

будут *коммутативны*, т. е. если

$$\{D+\alpha_1(x)\}\{D+\alpha_2(x)\} \text{ и } =\{D+\alpha_2(x)\}\{D+\alpha_1(x)\} \text{ и}$$

независимо от значения диференцируемой функции u. Для того, чтобы операторы были коммутативны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha'_2(x)=\alpha'_1(x)$$

или

$$\alpha_2(x)=\alpha_1(x)+A,$$

где A — произвольная постоянная. Диференциальное уравнение поэтому будет иметь вид

$$(P+A)Py=0,$$

[1] Рациональные процессы содержат также и диференцирование.

[2] Cayley, Quart. J. Math., 21 (1886), 331 [Coll. Math. Papers, 12, 403].

где P — оператор $D+\alpha_1(x)$. Уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2p\frac{dy}{ax}+(p^2+p'-a^2)y=0,$$

где a произвольная постоянная, может быть разложено на множители

$$(D+p-a)(D+p+a)y=0,$$

и полностью интегрируется.

Нетрудно доказать, что оператор

$$D+\alpha(x)$$

можно переставлять с оператором второго порядка

$$D^2+2pD+q,$$

если только последний может быть выражен в виде

$$\{D+\alpha(x)+A_1\}\{D+\alpha(x)+A_2\},$$

где A_1 и A_2 — постоянные. Вообще, если P и Q — операторы порядка m и n соответственно, то P и Q коммутативны, если

$$P=\{D+\alpha(x)+A_1\}\ldots\{D+\alpha(x)+A_m\},$$

$$Q=\{D+\alpha(x)+A_{m+1}\}\ldots\{D+\alpha(x)+A_{m+n}\},$$

но это условие, хотя и достаточное, но не обязательно. Так операторы

$$D^2-2x^{-2}$$

и

$$D^3-3x^{-2}D+3x^{-3}$$

коммутативны, но не могут быть выражены в форме произведения. Поэтому возникает проблема определения необходимого и достаточного условия для того, чтобы операторы P и Q можно было переставлять, если эти два оператора не могут быть сами выражены в виде полиномов от диференциального оператора R низшего порядка.

5·51. Условия коммутативности[1]. Допустим, что P и Q — линейные операторы порядка m и n, тогда, если P и Q коммутативны, а h — произвольная постоянная, то

$$(P-h)Q=Q(P-h).$$

Следовательно, если

$$y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m$$

фундаментальная последовательность решений уравнения

(A) $$P(y)-hy=0,$$

[1] Burchnall and Chaundy, Proc. London Math. Soc. (2), 21.

то

$$Q(y_1),\ Q(y_2), \dots,\ Q(y_n)$$

также являются решениями (А) и существуют соотношения вида

$$\begin{aligned}
Q(y_1) &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m,\\
Q(y_2) &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Q(y_m) &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mm}y_m.
\end{aligned}$$

Пусть

$$Y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_my_m$$

тогда

$$Q(Y) = kY,$$

при условии, что k и постоянные c удовлетворяют уравнениям

$$kc_r = a_{r1}c_1 + a_{r2}c_2 + \dots + a_{rm}c_m \qquad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Чтобы эти уравнения были совместны, необходимо, чтобы k было определено соотношением

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k, & a_{12}, \dots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}-k, \dots, & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, \dots, & a_{mm}-k \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом соответственно каждому h существуют m значений постоянной k (не обязательно явных), так что уравнения

$$\text{(A)} \qquad P(y) - hy = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad Q(y) - ky = 0$$

имеют общее решение.

Соответственно каждому k в выражении (В), существуют n значений h в выражении (А) таким образом, что (А) и (В) имеют общее решение. Так, если (А) и (В) имеют общее решение, то h и k относятся друг к другу согласно алгебраическому уравнению

$$F(h, k) = 0$$

степени n относительно h и степени m относительно k. Это выражение может быть получено исключением

$$y,\ y', \dots,\ y^{(m+n-1)}$$

из $m+n$ уравнений

$$\begin{aligned}
P(y) - hy &= 0, & Q(y) - ky &= 0,\\
DP(y) - hy' &= 0, & DQ(y) - ky' &= 0,\\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\\
D^{n-1}P(y) - hy^{(n-1)} &= 0, & D^{m-1}Q(y) - ky^{(m-1)} &= 0.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$P(y)-hy=0,\ Q(y)-ky=0,$$

то

$$F(P,\ Q)y=F(h,\ k)y=0,$$

и следовательно y является решением уравнения

$$L(y)\equiv F(P,\ Q)y=0$$

порядка mn.

Пусть числа

$$h_1, h_2, \ldots,\ h_r$$

будут независимыми и пусть

$$Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_r$$

будут общими решениями

$$P(y)-hy=0,\ Q(y)-ky=0$$

для данных значений h и соответствующих значений k. Эти функции $Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_r$ линейно независимы, так как если бы существовала тождественная зависимость типа

$$C_1 Y_1+C_2 Y_2+\ldots+C_r Y_r=0,$$

то, действуя на левую часть этого тождества при помощи P, $P^2, \ldots,\ P^{r-1}$, мы получили бы соотношения

$$C_1 h_1 Y_1+C_2 h_2 Y_2+\ldots+C_r h_r Y_r=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_1 h_1^{r-1} Y_1+C_2 h_2^{r-1} Y_2+\ldots+C_r h_r^{r-1} Y_r=0.$$

Но эти соотношения не являются совместными, если только C_1, $C_2, \ldots,\ C_r$ не равны нулю. Это верно, независимо от числа выбранных независимых чисел h.

Таким образом существует неограниченная последовательность линейно независимых функций $Y_1, Y_2, \ldots$, удовлетворяющих уравнению

$$F(P, Q)y=0.$$

Но порядок этого уравнения равен mn, и следовательно оно не может обладать более чем mn линейно независимыми решениями. Отсюда следует, что

$$F(P, Q)=0$$

тождественно.

Это приводит к основной теореме, что, *если P и Q являются коммутативными операторами порядка m и n соответственно, то они тождественно удовлетворяют алгебраическому соотношению вида*

$$F(P, Q)=0$$

степени n относительно P и *степени m относительно Q.*

Так например, если

$$P \equiv D^2 - 2x^{-2},$$

$$Q \equiv D^3 - 3x^{-2}D + 3x^{-3},$$

то

$$P^3 \equiv Q^2$$

и уравнения

$$(P-h)y = 0, \ (Q-k)y = 0$$

имеют общие решения, если

$$h^3 - k^2 = 0.$$

Примеры

1. Если уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

преобразовано подстановкой $x = Q(\xi)$ в

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + p\frac{dy}{d\xi} + qy = 0,$$

докажите, что

$$\left\{2PQ + \frac{dQ}{dx}\right\}Q^{-\frac{3}{2}} = \left\{2pq + \frac{dq}{dx}\right\}q^{-\frac{3}{2}}$$

и проинтегрируйте уравнение

$$(x^3 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + n^2x^3y = 0.$$

2. Докажите, что x^3 и x^{-2} являются решениями

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{6}{x^2}y = 0$$

и получите частный интеграл

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{6}{x^2}y = x\log x.$$

3. Проинтегрируйте уравнение

$$x^2(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2-x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^2$$

при условии, что приведенное уравнение имеет частное решение вида $y = x^n$.

4. Покажите, что любое однородное самосопряженное уравнение порядка $2m$ может быть написано в виде

$$\frac{d^m}{dx^m}\{A_0y^{(m)}\} + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\{A_1y^{(m-1)}\} + \ldots + A_my = 0.$$

Исследуйте соответствующую теорему для уравнения порядка $2m+1$. [Bertand, Hesse].

5. Докажите, что если общее решение $u = u(x)$ уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \{\varphi(x) + h\}u$$

известно для всех значений h, и любое частное решение для частного значения

$h = h_1$ равно $u = f(x)$, то общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ f(x) \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{f(x)}\right) + h - h_1 \right\} y$$

для $h \neq h_1$ имеет вид

$$y = u'(x) - u(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

[Darboux, C. R. Acad. Sc. Paris, 94 (1882), 1456; Théorie des Surfaces, II, 210].

6. Принимая начальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = hu$$

при $h_1 = 0$, проинтегрируйте уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{2}{x^2} + h \right\} y.$$

Повторяя процесс, проинтегрируйте

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{m(m-1)}{x^2} + h \right\} y,$$

[Darboux]

где m — целое число.

7. Принимая то же начальное уравнение, но при $h_1 = -1$, проинтегрируйте

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{m(m-1)}{\sin^2 x} + \frac{n(n-1)}{\cos^2 x} + h \right\} y,$$

[Darboux].

где m и n — целые числа.

ГЛАВА VI

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

6·1. Линейный оператор с постоянными коэфициентами. Однородное линейное диференциальное уравнение с постоянными коэфициентами

$$(A) \qquad A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

— первое уравнение общего типа, которое было полностью решено[1]. Но, независимо от его исторического значения, уравнение имеет ряд важных практических приложений и представляет теоретический интерес вследствие простоты своего общего решения. Соответствующее неоднородное уравнение[2]

$$(B) \qquad A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

также имеет ряд важных приложений.

Предположим, что A_0 не равно нулю; остальные коэфициенты могут быть равны нулю. Уравнение (A), может быть переписано в виде[3]

$$F(D)y \equiv (A_0 D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots + A_{n-1} D + A_n) y = 0,$$

и имеет оператор, который может быть разложен на множители

$$A_0 (D - a_1)(D - a_2) \ldots (D - a_n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные, именно корни алгебраического уравнения

$$(C) \qquad A_0 \xi^n + A_1 \xi^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \xi + A_n = 0.$$

Множители

$$D - a_1, \; D - a_2, \; \ldots, \; D - a_n$$

коммутативны; отсюда следует, что данное однородное урав-

---

[1] Это решение было известно Эйлеру и Даниэлю Бернулли еще в 1739 г. Впервые опубликовано Эйлером [Misc. Berol, 7 (1743), 193].

[2] D'Alembert, Misc, Taur., 3 (1762—65), 381.

[3] Обозначение $F(D)$ было введено Коши, см. Exercises math., 2 (1827), 159 [Œuvres (2) 7, 198].

нение удовлетворяется решением каждого из уравнений первого порядка

$$(D-a_1)y=0,\ (D-a_2)y=0,\ \ldots,\ (D-a_n)y=0.$$

6·11. Решение однородного уравнения. Пусть y_r будет общим решением

$$(D-a_r)y=0,$$

тогда

$$y_r=C_re^{a_rx},$$

следовательно общее решение (А) будет иметь вид

$$y=C_1e^{a_1x}+C_2e^{a_2x}+\ldots+C_ne^{a_nx},$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ — произвольные постоянные; $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ приняты неравными. Случай, когда алгебраическое уравнение (C) имеет одинаковые корни, мы сейчас рассматривать не будем.

Предположим, что коэфициенты $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ — вещественны, так что $a_1,\ \ldots,\ a_n$ будут вещественными или сопряженными мнимыми числами. Приведенное решение соответствует случаю, когда $a_1,\ \ldots,\ a_n$ вещественны, но требует некоторого изменения при одной или больше пар сопряженных комплексных величин. Например, пусть a_r и a_s будут сопряженными комплексными числами

$$a_r=\alpha+i\beta,\ a_s=\alpha-i\beta,$$

тогда

$$C_re^{a_rx}+C_se^{a_sx}$$

может быть написано в виде

$$\begin{aligned}C_re^{(\alpha+i\beta)x}+C_se^{(\alpha-i\beta)x}&=e^{\alpha x}\{C_r(\cos\beta x+i\sin\beta x)+\\&\quad+C_s(\cos\beta x-i\sin\beta x)\}\\&=e^{\alpha x}\{C_r'\cos\beta x+C_s'\sin\beta x\},\end{aligned}$$

где

$$C_r'=C_r+C_s,\ C_s'=i(C_r-C_s).$$

Число произвольных постоянных останется поэтому прежним. В виде примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}-15y=0.$$

Корни

$$\xi^3+\xi^2-7\xi-15=0$$

равны

$$3,\ -2+i,\ -2-i,$$

следовательно общее решение будет иметь вид

$$y=C_1e^{3x}+e^{-2x}(C_2\cos x+C_3\sin x).$$

6·12. Кратные множители. Пусть оператор

$$A_0D^n + A_1D^{n-1} + \ldots + A_{n-1}D + A_n$$

будет иметь кратный множитель, например

$$(D-a)^p.$$

тогда общее решение

$$(D-a)^p y = 0$$

будет включено в общее решение (A). Одно решение, соответствующее этому множителю, известно, именно

$$y = Ce^{ax},$$

где C — постоянная. Чтобы найти общее решение, применяют метод вариации параметров. Напишем

$$y = e^{ax}V,$$

где V — искомая функция, тогда

$$\begin{aligned}(D-a)^p e^{ax}V &= (D-a)^{p-1}e^{ax}DV \\ &= (D-a)^{p-2}e^{ax}D^2V \\ &= \ldots = e^{ax}D^pV,\end{aligned}$$

Следовательно $y = e^{ax}V$ будет решением

$$(D-a)^p y = 0,$$

если V — решение

$$D^pV = 0,$$

отсюда V — произвольный полином от x степени $p-1$. Таким образом искомое решение будет иметь вид

$$y = (C_1 + C_2x + \ldots + C_px^{p-1})e^{ax}$$

и содержит p произвольных постоянных.

Наконец, при двух сопряженных мнимых числах в множителе, повторяемом p раз, например

$$(D-\alpha+i\beta)^p(D-\alpha-i\beta)^p,$$

соответствующее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned}y = (C_1 + C_2x + \ldots + C_px^{p-1})e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ + (C_1' + C_2'x + \ldots + C_p'x^{p-1})e^{\alpha x}\sin\beta x),\end{aligned}$$

при соответствующем числе $2p$ произвольных постоянных.

Так, общим решением

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

будет

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

6·13. Дополнительная функция. Дополнительная функция любого линейнего уравнения была определена как общее решение соответствующего однородного уравнения. Теперь, когда все случаи, которые могут возникнуть при постоянных коэфициентах, были рассмотрены, важно определить, является ли полученное решение наиболее общим.

Сначала рассмотрим случай, когда

$$y=C_1e^{a_1x}+C_2e^{a_2x}+\ldots+C_ne^{a_nx}$$

и числа a_1, a_2, ..., a_n, которые могут быть вещественными или комплексными, различны. Если

$$s=a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

то вронскиан решения будет иметь вид

$$e^{sx}\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots, & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & \ldots, & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=e^{sx}\prod(a_i-a_j);$$

он не может быть равен нулю, поскольку $a_i\neq a_j$, Полученные n функций

$$e^{a_1x},\ e^{a_2x},\ \ldots,\ e^{a_nx}$$

поэтому линейно-независимы, а

$$y=C_1e^{a_1x}+C_2e^{a_2x}+\ldots+C_ne^{a_nx}$$

является общим решением.

Рассмотрим теперь крайний случай, когда все значения a равны, тогда

$$y=(C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1})\,e^{ax}.$$

Если для любых частных значений постоянных C y тождественно равен нулю, то выражение $C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1}$ также будет тождественно равно нулю, что возможно только при $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$. В этом случае решение также будет общим.

В любом другом случае решение получится вида

$$P_1e^{a_1x}+P_2e^{a_2x}+\ldots+P_me^{a_mx},$$

где P_1, P_2, ..., P_m — полиномы от x, а числа a_1, a_2, ..., a_m —

различны. Покажем, что функция такого рода не может быть тождественно равна нулю, если только полиномы P не равны тождественно нулю. Примем, что

$$P_1 e^{a_1 x} + P_2 e^{a_2 x} + \ldots + P_m e^{a_m x} = 0$$

тождественно. Пусть

$$b_k = a_k - a_1,$$

тогда тождество может быть написано в виде

$$P_1 + P_2 e^{b_2 x} + \ldots + P_m e^{b_m x} = 0.$$

Пусть r_1 будет степенью полинома P_1, тогда, если тождество продиференцировать $r_1 + 1$ раз, оно примет вид

$$Q_2 e^{b_2 x} + \ldots + Q_m e^{b_m x} = 0,$$

где $Q_2, \ldots, Q_m$ — полиномы, степени которых равны степеням $P_2, \ldots, P_m$ соответственно, а числа $b_2, \ldots, b_m$ неравны. Если мы этот процесс будем продолжать, то достигнем ступени, при которой

$$R_m e^{r_m x} = 0$$

тождественно, где R_m — полином, степень которого равна степени P_m. Отсюда, R_m должен тождественно обратиться в нуль, что невозможно. Следовательно

$$P_1 e^{a_1 x} + P_2 e^{a_2 x} + \ldots + P_m e^{a_m x}$$

не равно тождественно нулю.

Исследование дополнительной функции может поэтому считаться полным.

6·14. Кратные множители как предельный случай. Весьма хороший метод решения, когда оператор

$$A_0 D^n + A_1 D^{n-1} + \ldots + A_{n-1} D + A_n,$$

имеет кратный множитель, принадлежит Д'аламберу[1]. Так как применение этого метода не ограничивается случаем, когда коэфициенты постоянны, допустим, что уравнение имеет вид

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0,$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ зависят от некоторых параметров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu,$$

и возможно также и от x.

Пусть функция $f(x, r)$ для некоторых значений r, зависящих от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ будет удовлетворять уравнению и

[1] Hist. Acad. Berlin, 1748, 283.

пусть

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_\nu$$

будет последовательностью значений r, выбранных таким образом, что функции

$$f(x,\ r_1),\ f(x,\ r_2),\ \ldots,\ f(x,\ r_\nu)$$

в общем случае независимы. Эти функции представляют собой следовательно последовательность ν частных решений уравнения. Для частных значений $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu$ два или больше значений r, например r_1 и r_2, и соответствующие функции $f(x,\ r_1)$ и $f(x,\ r_2)$ будут равны, поэтому число решений уравнения, представленного функциями $f(x,\ r)$, уменьшится. В данном случае предельное значение

$$\frac{f(x,\ r_2)-f(x,\ r_1)}{r_2-r_1},$$

если предел существует, будет решением уравнения. Этот предел имеет вид

$$\left[\frac{\partial f(x,\ r)}{\partial r}\right]_{r=r_1}.$$

Случай, когда r_1, r_2, и r_3 равны, может рассматриваться аналогично. Функция

$$\left\{\frac{f(x,\ r_3)-f(x,\ r_2)}{r_3-r_2}-\frac{f(x,\ r_2)-f(x,\ r_1)}{r_2-r_1}\right\}\Big/(r_2-r_1)$$

удовлетворяет уравнению, и если существует предел этого выражения, т. е.

$$\left[\frac{\partial^2 f(x,\ r)}{\partial r^2}\right]_{r=r_1},$$

то он будет решением уравнения.

Вообще, если для частных значений параметров $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu$

$$r_1=r_2=\ldots=r_\mu,$$

то уравнение имеет μ решений

$$f(x,\ r_1)\left[\frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\right]_{r=r_1},\ \ldots,\ \left[\frac{\partial^{\mu-1} f(x,\ r)}{\partial r^{\mu-1}}\right]_{r=r_1}.$$

Рассмотрим уравнение

$$(D^2+1)^2 y=0.$$

Заменим его более общим уравнением

$$(D^2+\alpha^2)(D^2+\beta^2)y=0;$$

последнее уравнение при $\alpha^2\neq\beta^2$ имеет общее решение

$$y=A_1\cos\alpha x+A_2\cos\beta x+A_3\sin\alpha x+A_4\sin\beta x.$$

При $\alpha=\beta=1$ это решение перестает быть общим и приводится к

$$y=C_1\cos x+C_3\cos x,$$

но функции

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\cos\alpha x\right]_{\alpha=1}=-x\sin x,\quad \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin\alpha x\right]_{\alpha=1}=x\cos x$$

являются частными решениями, которые не могут быть получены ни при каких значениях C_1 и C_3. Следовательно общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

6·2. Неоднородное уравнение. Определение частного интеграла неоднородного уравнения зависит от свойств операторов, обратных D, $D-a$ и т. д., так как задача состоит в определении значения выражений[1]

$$(D-a_1)^{-1}\ldots(D-a_n)^{-1}f(x).$$

Оператор, обратный D, равен D^{-1} и представляет операцию простого неопределенного интегрирования; аналогично D^{-p} является операцией p-кратного интегрирования. Нужно теперь найти значение операторов $(D-a)^{-1}$ и $(D-a)^{-p}$, где a — постоянная, не равная нулю.

Чтобы сделать эти операторы возможно более определенными, исключим вводимый ими элемент произвольности. Так же как воздействие оператором D^{-1} вводит произвольную аддитивную постоянную, а (в более общем случае) воздействие оператором D^{-p} вводит произвольный элемент $C_1+C_2x+\ldots+$ $+C_px^{p-1}$, так и $(D-a)^{-1}$ вводит произвольный элемент Ce^{ax}, а $(D-a)^{-p}$ вводит $e^{ax}(C_1+C_2x+\ldots+C_px^{p-1}.)$ Эти выражения входят в дополнительную функцию, поэтому они не будут рассматриваться при определении частного интеграла.

Если $f(x)$ — функция простого типа, то эффект воздействия на $f(x)$ оператором $(D-a)^{-1}$ или $(D-a)^{-p}$ получается следующий[2].

1°. Пусть

$$f(x)=e^{kx},\quad k=\text{const}.$$

Воздействуем на обе стороны тождества

$$(D-a)e^{kx}=(k-a)e^{kx}$$

[1] Lobatto, Théorie des caractéristiques (Amsterdam, 1837); Boole, Camb. Math. J., 2 (1841), 114.

[2] Ниже оператор D непосредственно воздействует на функции независимого переменного x, что в общем случае недопустимо. Прим. ред.

оператором $(D-a)^{-1}(k-a)^{-1}$, получим

$$(D-a)^{-1} e^{kx} = (k-a)^{-1} e^{kx}$$

если $k \neq a$. Случай $k=a$ будет разобран ниже.

Аналогично

$$(D-a)^{-1} \ldots (D-a_p)^{-1} e^{kx} = (k-a_1)^{-1} \ldots (k-a_p)^{-1} e^{kx},$$

при условии, что $a_1 \ldots, a_p$ отличны от k. В частности

$$(D-a)^{-p} e^{kx} = (k-a)^{-p} e^{kx}.$$

Если $F(D)$ — полином от D, так что $F(k) \neq 0$, то

$$F^{-1}(D) e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)},$$

где $F^{-1}(D)$ — оператор, обратный $F(D)$.

2°. Пусть

$$f(x) = e^{kx} \varphi(x).$$

В тождестве

$$(D-a) e^{kx} X = e^{kx}(D+k-a) X,$$

где X — произвольная функция от x, напишем

$$(D+k-a) X = \varphi(x),$$

тогда

$$(D-a) e^{kx}(D+k-a)^{-1} \varphi(x) = e^{kx} \varphi(x),$$

следовательно

$$(D-a)^{-1} e^{kx} \varphi(x) = e^{kx}(D+k-a)^{-1} \varphi(x).$$

Аналогично можно доказать, что в общем случае

$$(D-a_1)^{-1} \ldots (D-a_p)^{-1} e^{kx} \varphi(x) = e^{kx}(D+k-a_1)^{-1} \ldots$$
$$\ldots (D+k-a_p)^{-1} \varphi(x)$$

или

$$F^{-1}(D) e^{kx} \varphi(x) = e^{kx} F^{-1}(D+k) \varphi(x).$$

В частности, принимая $k = a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a$, $\varphi(x) = 1$, получим

$$(D-a)^{-p} e^{ax} = e^{ax} D^{-p} \cdot 1$$
$$= e^{ax} \frac{x^p}{p!},$$

следовательно специальный случай учтен

3°. Пусть

$$f(x) = \sin ax.$$

Если $F(D)$ — четный полином от D, напишем $F(D) = \Phi(D^2)$ так, чтобы $\Phi(D^2)$ был полиномом от D^2, тогда

$$\Phi(D^2)\sin ax = \Phi(-a^2)\sin ax,$$

откуда

$$F^{-1}(D)\sin ax = \frac{\sin ax}{\Phi(-a^2)}.$$

В наиболее общем случае полином $F(D)$ нечетный; если он имеет четный полиномиальный множитель $G(D)$, то $F(D) = G(D)H(D)$, тогда

$$F^{-1}(D)\sin ax = \frac{1}{G(D)H(D)}\sin ax$$

$$= \frac{H(-D)}{G(D)H(D)H(-D)}\sin ax.$$

Теперь $G(D)H(D)H(-D)$ — четный полином от D и может быть выражен через $K(D^2)$ следующим образом:

$$F^{-1}(D)\sin ax = \frac{H(-D)}{K(D^2)}\sin ax$$

$$= \frac{H(-D)}{K(-a^2)}\sin ax,$$

следовательно $F^{-1}(D)\sin ax$ и аналогично $F^{-1}(D)\cos ax$ могут быть вычислены при условии, что $K(-a^2)\neq 0$.

Комбинируя данный случай с предыдущим, можно вычислить частные интегралы вида

$$F^{-1}(D)e^{kx}\sin ax, \quad F^{-1}(D)e^{kx}\cos ax.$$

Пример:

$$(3D^2+2D-8)y = 5\cos x.$$

Частным интегралом является

$$y = \frac{5}{3D^2+2D-8}\cos x$$

$$= \frac{5(3D^2-2D-8)}{(3D^2+2D-8)(3D^2-2D-8)}\cos x$$

$$= \frac{5(3D^2-2D-8)}{9D^4-52D^2+64}\cos x$$

$$= \frac{5(3D^2-2D-8)}{9+52+64}\cos x$$

$$= \frac{1}{25}\left\{(3D^2-8)-2D\right\}\cos x = \frac{1}{25}(2\sin x - 11\cos x).$$

4°. Пусть

$$f(x) = x^n.$$

тогда

$$(D-a)\,x^n = nx^{n-1} - ax^n,$$

$$(D-a)\,\frac{n}{a}\,x^{n-1} = \frac{n(n-1)}{a}\,x^{n-2} - nx^{n-1},$$

$$(D-a)\,\frac{n(n-1)}{a^2}\,x^{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{a^2}\,x^{n-3} - \frac{n(n-1)}{a}\,x^{n-2},$$

. . . .

$$(D-a)\,\frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2}{a^{n-1}}\,x = \frac{n!}{a^{n-1}} - \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2}{a^{n-2}}\,x,$$

$$(D-a)\,\frac{n!}{a^n} = -\,\frac{n!}{a^{n-1}}.$$

Отсюда

$$(D-a)\left(x^n + \frac{n}{a}\,x^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{a^n}\right) = -ax^n,$$

следовательно

$$(D-a)^{-1}\,x^n = -\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\,a^{n-r+1}}\,x^r.$$

Этот результат может быть получен формальным разложением оператора $(D-a)^{-1}$ по возрастающим степеням D. Отсюда следует, что если X — полином от x степени n, то

$$F^{-1}(D)\,X = (a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n)\,X,$$

где

$$a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n$$

первые $n+1$ членов $F^{-1}(D)$.

Обратный диференциальный оператор $F^{-1}(D)$ может быть разложен на простейшие дроби как выражение, обратное полиному. Следовательно указанного достаточно для определения частного интеграла в случаях, когда функция $f(x)$ является суммой членов или произведений членов вида x^n, и e^{kx}, $\sin ax$ и $\cos ax$. Члены, содержащие синусы и косинусы, могут быть выражены также в экспоненциальной форме.

6·21. Определение частного интеграла в квадратурах. Если функция $f(x)$ такова, что $f(x)$ и $e^{-ax}f(x)$ интегрируются, то частный интеграл может быть определен в квадратурах. Предположим, что $F(D)$ не имеет кратных множителей. Тогда оператор $F^{-1}(D)$ может быть разложен на простейшие дроби

$$F^{-1}(D) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{D-a_r}.$$

Частный интеграл получается вида

$$y = \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{D - a_r} f(x)$$

$$= \sum a_r (D - a_r)^{-1} e^{a_r x} \{ e^{-a_r x} f(x) \}$$

$$= \sum a_r e^{a_r x} D^{-1} \{ e^{-a_r x} f(x) \}$$

$$= \sum a_r e^{a_r x} \int e^{-a_r x} f(x) \, dx$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_r \int^{x} e^{a_r (x-t)} f(t) \, dt.$$

Нижний предел интегрирования может быть произвольным, так как член, полученный при постоянном нижнем пределе интегрирования, равен постоянной, умноженной на $e^{a_r x}$, и следовательно входит в дополнительную функцию.

Рассмотрим случай, когда $F(D)$ содержит множитель $(D - a)^p$. Часть выражения $F^{-1}(D)$ в простейших дробях, соответствующая этому кратному множителю, имеет вид

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{\beta_r}{(D - a)^r},$$

и соответствующим добавочным выражением к частному интегралу будет

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{\beta_r}{(D - a)^r} f(x) = \sum \beta_r (D - a)^{-r} e^{ax} \{ e^{-ax} f(x) \}$$

$$= \sum \beta_r e^{ax} D^{-r} \{ e^{-ax} f(x) \}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \beta_r \int^{x} \int^{t} \dots \int^{t} e^{a(x-t)} f(t) \, dt .$$

Пример:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = 16x^2 e^{2x^2}.$$

Дополнительной функцией будет $Ae^{2x} + Be^{-2x}$, частный интеграл может быть написан в виде

$$y = 4 \left(\frac{1}{D - 2} - \frac{1}{D + 2} \right) x^2 e^{2x^2}$$

$$= 4e^{2x} \int_{-\frac{1}{2}}^{x} t^2 e^{2t^2 - 2t} dt - 4e^{-2x} \int_{\frac{1}{2}}^{x} t^2 e^{2t^2 + 2t} dt.$$

Нижние пределы интегрирования выбраны такими, чтобы возможно больше упростить частный интеграл. Интегрируя по частям, получим

$$y = e^{2x^2}.$$

6·3. Линейное уравнение Эйлера. Уравнение типа

$$A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x),$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — постоянные, называется уравнением Эйлера[1]. Оно может быть преобразовано в линейное уравнение с постоянными коэфициентами подстановкой $x = e^z$, тогда

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy,$$

где D обозначает $\frac{d}{dz}$, и аналогично

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} = D(D-1)y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)\ldots(D-n+1)y;$$

уравнение таким образом приводится к виду

$$F(D)\,y \equiv (A_0 D^n + A_1' D^{n-1} + \ldots + A_{n-1}' D + A_n)\, y = f(e^z)$$

и может быть решено приведенными выше способами.

Простой множитель $(D - a)$ оператора $F(D)$ приводит к члену дополнительной функции вида

$$Ce^{az} = Cx^a,$$

в то время как кратный множитель $(D - a)^p$ приводит к

$$\begin{aligned} y &= e^{az}(C_1 + C_2 z + \ldots + C_p z^{p-1}) \\ &= x^a \{C_1 + C_2 \log x + \ldots + C_p (\log x)^{p-1}\}. \end{aligned}$$

Это решение особенно важно; оно может быть получено и при помощи метода Даламбера. Так как $y = x^a$ — решение однородного уравнения, соответствующее p-кратному множителю отно-

[1] Его общее решение было известно Джону Бернулли еще в 1700 г. Исследование этого уравнения Эйлером было проведено приблизительно в 1740 г.; опубликовано в Inst. Calc. Int. (1769), 2, 483. Более позднее исследование проведено Коши; см. также Мальмштен [Malmsten, J. für Math., 39, (1850), 99].

сительно $F(D)$, то

$$y_1 = \left\{\frac{d}{d\alpha} x^\alpha\right\}_{\alpha=a} = \left\{\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha \log x}\right\}_{\alpha=a} = x^a \log x,$$

. . . .

$$y_{p-1} = \left\{\frac{d^{p-1}}{d\alpha^{p-1}} x^\alpha\right\}_{\alpha=a} = x^a (\log x)^{p-1}$$

также являются решениями однородного уравнения.

Аналогично, уравнения типа[1]

$$\sum_{r=0}^{n} A_r (ax+b)^{n-r} \frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}} = f(x)$$

(где a, b, A_r $(a \neq 0)$ — постоянные) можно решить подстановкой $ax+b=e^z$.

Частный интеграл может быть получен в квадратурах методом, аналогичным принятому для уравнения с постоянными коэфициентами.

Пусть ϑ обозначает оператор $x\frac{d}{dx}$, тогда, поскольку[2]

$$x^m \frac{d^m}{dx^m} = \vartheta(\vartheta-1)\ldots(\vartheta-m+1),$$

оператор

$$A_0 x^n \frac{d^n}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} x \frac{d}{dx} + A_n$$

может быть написан в виде

$$F(\vartheta) \equiv A_0 \vartheta^n + A_1' \vartheta^{n-1} + \ldots + A_{n-1}' \vartheta + A_n,$$

а функция $F(\vartheta)$ может быть разложена на линейные множители

$$F(\vartheta) = A_0(\vartheta - a_1)(\vartheta - a_2)\ldots(\vartheta - a_n).$$

Теперь

$$x^m \frac{d^m}{dx^m} x^\mu = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)x^\mu,$$

так что

$$F(\vartheta)x^\mu = x^\mu F(\mu).$$

Следовательно если a таково, что $F(a)=0$, то

$$y = Ax^a$$

является решением однородного уравнения

$$F(\vartheta)y = 0.$$

---

[1] Lagrange, Misc. Taur., 3 (1762—65), 190 (Œuvres, I, 481).

[2] Если $x=e^z$, $\vartheta = x\frac{d}{dx}$ и $D=\frac{d}{dz}$, то $\vartheta \equiv D$.

Так же, если X является функцией от x, то

$$\vartheta x^{\mu} X = x(x^{\mu} X' + \mu x^{\mu-1} X)$$
$$= x^{\mu}(\vartheta + \mu) X$$

и

$$\vartheta^m x^{\mu} X = x^{\mu}(\vartheta + \mu)^m X,$$

откуда следует, что

$$F(\vartheta) x^{\mu} X = x^{\mu} F(\vartheta + \mu) X.$$

Подставляя $\varphi(x)$ вместо $F(\vartheta + \mu) X$ и воздействуя оператором $F^{-1}(\vartheta)$ на обе стороны этого тождества, получим

$$F^{-1}(\vartheta) x^{\mu} \varphi(x) = x^{\mu} F^{-1}(\vartheta + \mu) \varphi(x).$$

Если $F(\vartheta)$ не имеет кратных множителей, то обратный оператор $F^{-1}(\vartheta)$ может быть разложен на простейшие дроби

$$F^{-1}(\vartheta) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{\vartheta - a_r},$$

так как $\sum \alpha_r (\vartheta - a_r)^{-1}$, будучи умножено на $F(\vartheta)$, равно единице. Частное решение неоднородного уравнения следовательно будет

$$y = \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{\vartheta - a_r} f(x)$$
$$= \sum \frac{\alpha_r}{\vartheta - a_r} x^{a_r} \{x^{-a_r} f(x)\}$$
$$= \sum \alpha_r x^{a_r} \vartheta^{-1} \{x^{-a_r} f(x)\}$$
$$= \sum_{r=1}^{n} \alpha_r x^{a_r} \int^{x} t^{-1-a_r} f(t)\, dt.$$

Если $F(\vartheta)$ имеет кратный множитель, например $(\vartheta - a)^p$, то соответствующая часть рациональной дроби $F^{-1}(\vartheta)$ получится вида

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{\beta_r}{(\vartheta - a)^r}.$$

Соответствующими членами частного интеграла будут

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{\beta_r}{(\vartheta - a)^r} f(x) = \sum \frac{\beta_r}{(\vartheta - a)^r} x^{a} \{x^{-a} f(x)\}$$

$$= \sum \beta_r x^a \vartheta^{-r} \{x^{-a} f(x)\}$$

$$= \sum \beta_r x^a \vartheta^{-r+1} \int^x t^{-1-a} f(t)\, dt$$

$$= \sum \beta_r x^a \vartheta^{-r+2} \int^x t^{-1} \int^t t^{-1-a} f(t)\, dt^2$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \beta_r x^a \int^x t^{-1} \int^t \ldots t^{-1} \int^t t^{-1-a} f(t)\, dt^r.$$

Пример:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - 4y = 2x^2.$$

Это уравнение может быть переписано так:

$$(\vartheta - 2)^2 y = 2x^2;$$

дополнительной функцией будет

$$y = Ax^2 + \beta x^2 \log x.$$

Частный интеграл получится вида

$$y = \frac{1}{(\vartheta - 2)^2} 2x^2 = 2x^2 \vartheta^{-2} \cdot 1$$

$$= 2x^2 \vartheta^{-1} \int_1^x t^{-1}\, dt = 2x^2 \vartheta^{-1} \log x$$

$$= 2x^2 \int_1^x t^{-1} \log t\, dt = (x \log x)^2.$$

6·4. Системы совместных линейных уравнений с постоянными коэфициентами. Выше (§ 1·5) мы отметили, что одно линейное диференциальное уравнение может быть заменено системой совместных уравнений порядка ниже n, в частности системой n совместных уравнений первого порядка. Возникает вопрос: является ли система совместных линейных уравнений эквивалентной одному линейному уравнению, в том смысле, что общее решение системы содержит такое же число произвольных постоянных, что и полное решение одного уравнения. Этот вопрос мы здесь разберем, предположив, что рассматриваемые уравнения имеют постоянные коэфициенты[1]. Такие уравнения встречаются во многих задачах динамики и имеют следовательно и теоретический и практический интерес.

---

[1] Первоначальное рассмотрение проблемы, проведенное Якоби, было недостаточным; тщательное исследование эквивалентности двух систем совместных линейных уравнений было проведено Кристалем. Trans. Roy. Soc. Edin., 38 (1895), 163.

Суть проблемы станет ясной, если рассмотреть систему трех однородных линейных уравнений с тремя зависимыми переменными

$$F_{11}(D)y_1 + F_{12}(D)y_2 + F_{13}(D)y_3 = 0,$$
$$F_{21}(D)y_1 + F_{22}(D)y_2 + F_{23}(D)y_3 = 0,$$
$$F_{31}(D)y_1 + F_{32}(D)y_2 + F_{33}(D)y_3 = 0,$$

где $F_{rs}(D)$ — полиномы относительно оператора D с постоянными коэфициентами, а x — независимая переменная.

Переменная y_3 может быть исключена из этих уравнений процессом, аналогичным алгебраическому исключению, как если бы операторы $F_{rs}(D)$ были постоянными. В результате получим

$$\begin{vmatrix} F_{11}(D), & F_{12}(D), & F_{13}(D) \\ F_{21}(D), & F_{22}(D), & F_{23}(D) \\ F_{31}(D), & F_{32}(D), & F_{33}(D) \end{vmatrix} y_1 = 0$$

или

$$F(D)y_1 = 0.$$

Это уравнение существует, если $F(D)$ не равно нулю, т. е. если все три уравнения данной последовательности действительно различны. Аналогично

$$F(D)y_2 = 0,$$
$$F(D)y_3 = 0.$$

Выражение $F(D)$ может быть постоянным, тогда единственно возможным решением будет

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

или, иначе говоря, уравнения несовместимы. В общем случае $F(D)$ является полиномом от D степени m. Пусть множителями $F(D)$ будут

$$D - a_1, \quad D - a_2, \ldots, \quad D - a_m$$

и предположим, что $a_1 a_2, \ldots, a_m$ все различны. Решение $F(D)y_1 = 0$ будет иметь вид

$$y_1 = C_{11}e^{a_1 x} + C_{12}e^{a_2 x} + \ldots + C_{1m}e^{a_m x}$$

и, аналогично, решениями $F(D)y_2 = 0$ и $F(D)y_3 = 0$ будут

$$y_2 = C_{21}e^{a_1 x} + C_{22}e^{a_2 x} + \ldots + C_{2m}e^{a_m x},$$
$$y_3 = C_{31}e^{a_1 x} + C_{32}e^{a_2 x} + \ldots + C_{3m}e^{a_m x}$$

соответственно. Всего в эти решения входят $3m$ постоянных, но эти постоянные не все независимы. Так как y_1, y_2, y_3 должны удовлетворять данной системе, то эти постоянные связаны соотношениями

$$C_{1r}F_{11}(a_r)+C_{2r}F_{12}(a_r)+C_{3r}F_{13}(a_r)=0,$$
$$C_{1r}F_{21}(a_r)+C_{2r}F_{22}(a_r)+C_{3r}F_{23}(a_r)=0,$$
$$C_{1r}F_{31}(a_r)+C_{2r}F_{32}(a_r)+C_{3r}F_{33}(a_r)=0$$

($r=1,\ 2,\dots,m$), и если этих уравнений достаточно для определения всех отношений $C_{1r}:C_{2r}:C_{3r}$, то число постоянных уменьшится до m. Порядок системы, равный числу независимых постоянных в его общем решении, всегда равен порядку *характеристического детерминанта* $F(D)$, однако сделанные допущения не всегда действительны. Трудность заключается в том, что если y_1, y_2, y_3 образуют общее решение системы, то может случиться, что ни одна из функций y_1, y_2, y_3 не будет удовлетворять *характеристическому уравнению*

$$F(D)\,y=0.$$

Перейдем к строгому доказательству теоремы, что *порядок системы равен порядку характеристического уравнения.* Сначала установим необходимое и достаточное условие для эквивалентности двух систем линейных уравнений, не обязательно однородных и с постоянными коэфициентами.

В виде примера рассмотрим систему

$$U\equiv(D^2+1)y_1+(D^2+D+1)y_2=x,$$
$$V\equiv Dy_1+(D+1)y_2=e^x;$$

Ее характеристический детерминант приводится к постоянной, откуда следует, что решение системы не должно содержать произвольных постоянных. Рассмотрим производную систему

$$U-DV=x-e^x,$$
$$DU-(D^2+1)V=1-2e^x.$$

Эта система приводится к

$$y_1+y_2=x-e^x,$$
$$-y_2=1-2e^x,$$

откуда

$$y_1=1+x-3e^x,\quad y_2=2e^x-1.$$

Это является решением данной системы. Исследование показывает, что если детерминант системы множителей, равный в этом случае

$$\begin{vmatrix} 1, & -D \\ D, & -D^2-1 \end{vmatrix},$$

постоянный, то данная система и производная система *эквива-*

ленты и имеют одинаковые решения. Следовательно, в этом случае общее решение не имеет произвольных постоянных.

6·41. Условия эквивалентности двух систем линейных уравнений. Пусть

$$F_{r1}(D)\,y_1 + F_{r2}(D)\,y_2 + \ldots + F_{rn}(D)\,y_n = f_r(x)$$
$$(r = 1,\ 2, \ldots,\ m),$$
$$G_{r1}(D)\,y_1 + G_{r2}(D)\,y_2 + \ldots + G_{rn}(D)\,y_n = g_r(x)$$
$$(r = 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

будут двумя системами линейных уравнений с n зависимыми переменными

$$y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n,$$

где $n \geqslant m$. Предположим, что m уравнений каждой последовательности линейно-независимы, а операторы $F(D)$ и $G(D)$ — полиномы от D с постоянными коэфициентами. Обе системы могут быть выражены соответственно в виде

$$\text{(U)} \qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \ldots,\ U_m = 0,$$
$$\text{(V)} \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \ldots,\ V_m = 0.$$

Если каждое решение (U) удовлетворяет (V), то система (V) называется *производной* от системы (U). В этом случае любое уравнение (V) может быть получено воздействием на уравнения (U) полиномов от D и сложением полученных результатов. Так

$$V_1 = \delta_{11}U_1 + \ldots + \delta_{1m}U_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_m = \delta_{m1}U_1 + \ldots + \delta_{mm}U_m.$$

Последовательность операторов δ_{rs}, при помощи которой система (V) выводится из системы (U), называется системой множителей, а детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11}, & \ldots, & \delta_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \delta_{m1}, & \ldots, & \delta_{mm} \end{vmatrix}$$

ее *модулем.* Δ не может быть равен нулю, так как уравнения (V) линейно-независимы.

Если (V) — производная система от (U) и каждое решение (V) удовлетворяет (U), то системы называются *эквивалентными. Докажем, что для того, чтобы две системы были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их модуль был постоянным.*

Пусть детерминант

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11}, & \ldots, & \Delta_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \Delta_{m1}, & \ldots, & \Delta_{mm} \end{vmatrix}$$

будет обратным Δ, тогда $U_1, \dots U_m$ могут быть выражены через $V_1, \dots, V_m$ в виде[1]

$$\Delta U_1 = \Delta_{11} V_1 + \dots + \Delta_{m1} V_m,$$
$$\Delta U_m = \Delta_{1m} V_1 + \dots + \Delta_{mm} V_m,$$

отсюда любое решение (V) удовлетворяет системе

$$\Delta U_1 = 0, \dots, \Delta U_m = 0.$$

Следовательно, если Δ — постоянная, то каждое решение (V) удовлетворяет (U). Указанное условие поэтому является достаточным. Чтобы доказать, что оно необходимо, примем, что система (U) — производная от системы (V). Тогда будет существовать последовательность полиномов от D, например δ_{rs}, таким образом, что

$$U_1 = \delta'_{11} V_1 + \dots + \delta'_{1m} V_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$U_m = \delta'_{m1} V_1 + \dots + \delta'_{mm} V_m$$

Замещая значения $V_1, \dots, V_m$ через $U_1, \dots, U_m$, найдем, что

$$U_r = \delta'_{r1}(\delta_{11} U_1 + \dots + \delta_{1m} U_m) + \dots + \delta'_{rm}(\delta_{m1} U_1 + \dots + \delta_{mm} U_m) \qquad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Но $U_1 \dots, U_m$ линейно-независимы, следовательно

$$\delta'_{r1}\delta_{1s} + \dots + \delta'_{rm}\delta_{ms} = 0 \qquad (r \neq s),$$
$$\delta'_{r1}\delta_{1r} + \dots + \delta'_{rm}\delta_{mr} = 1.$$

Для каждого значения r для определения $\delta'_{r1}, \dots, \delta'_{rm}$ имеется m уравнений; их решение будет

$$\delta'_{r1} = \Delta_{1r}/\Delta, \dots, \delta'_{rm} = \Delta_{mr}/\Delta,$$

следовательно, если Δ' — модуль системы множителей δ'_{rs}, то

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \delta'_{11}, \dots, \delta'_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ \delta'_{m1}, \dots, \delta'_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{11}, \dots, \Delta_{m1} \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_{1m}, \dots, \Delta_{mm} \end{vmatrix} \div \Delta^m$$
$$= \Delta^{m-1}/\Delta^m = 1/\Delta,$$

где Δ и Δ' — полиномы от D. Тождество

$$\Delta\Delta' = 1$$

не может быть удовлетворено, если Δ и Δ' не зависят от D т. е. если Δ и Δ'—постоянные. Следовательно это условие является необходимым и достаточным.

---

[1] Scott and Mathews, Theory of Determinants, VI и XI.

6·42. Другая форма условий эквивалентности. Приведенная форма теоремы эквивалентности полностью содержит систему множителей; другая форма этой теоремы, не требующая непосредственного вычисления системы множителей, может быть выведена следующим образом. Поскольку

$$U_r \equiv F_{r1}(D)\,y_1 + \ldots + F_{rn}(D)\,y_n - f_r(x),$$

$$V_r \equiv G_{r1}(D)\,y_1 + \ldots + G_{rn}(D)\,y_n - g_r(x)$$

и

$$V_r = \delta_{r1} U_1 + \ldots + \delta_{rm} U_m,$$

то, сравнивая операторы от $y_1, \ldots, y_n$ и подставляя F_{rs} и G_{rs} вместо $F_{rs}(D)$ и $G_{rs}(D)$, получим

$$G_{r1} = \delta_{r1} F_{11} + \ldots + \delta_{rm} F_{m1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_{rn} = \delta_{r1} F_{1n} + \ldots + \delta_{rm} F_{mn},$$

$$g_r(x) = \delta_{r1} f_1(x) + \ldots + \delta_{rm} f_m(x).$$

Из этих уравнений получим

$$\begin{pmatrix} G_{11}, \ldots, & G_{1n}, & g_1 \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ G_{m1}, \ldots, & G_{mn}, & g_m \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_{11}, \ldots, & F_{1n}, & f_1 \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ F_{m1}, \ldots, & F_{mn}, & f_m \end{pmatrix}$$

в том смысле, что каждый детерминант[1] порядка m, столбцы которого являются столбцами первой матрицы, равен соответствующему детерминанту второй матрицы, умноженному на постоянную Δ. Это условие необходимо и достаточно для эквивалентности систем.

В частности, если имеется столько же уравнений, сколько независимых переменных, именно n, то

$$\begin{vmatrix} G_{11}, \ldots, & G_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ G_{n1}, \ldots, & G_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} F_{11}, \ldots, & F_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ F_{n1}, \ldots, & F_{nn} \end{vmatrix}$$

Поэтому *для того, чтобы две однородные системы n уравнений с n независимыми переменными были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы детерминанты операторов обеих систем были равны, будучи умножены на постоянную.* Если системы не однородны, то это условие является также и необходимым; остальные требования, необходимые для достаточной последовательности условий, легко могут быть найдены.

---

[1] Нужно отметить, что при вычислении детерминантов, содержащих $f(x)$ и $g(x)$, операторы F и G умножаются на $f(x)$ и $g(x)$, а не воздействуют на них. Так, общий член разложения детерминанта первой матрицы равен

$$g_1(x)\, G_{21}\, G_{34}\, G_{42}, \ldots, \text{ а не } G_{21}\, G_{34}\, G_{42} \ldots g_1(x).$$

6·5. Приведение системы линейных уравнений к эквивалентной диагональной системе. Система линейных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
H_{11}(D)y_1 + H_{12}(D)y_2 + H_{13}(D)y_3 + \ldots + H_{1n}(D)y_n &= h_1(x),\\
H_{22}(D)y_2 + H_{23}(D)y_3 + \ldots + H_{2n}(D)y_n &= h_2(x),\\
H_{33}(D)y_3 + \ldots + H_{3n}(D)y_n &= h_3(x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
H_{nn}(D)y_n &= h_n(x),
\end{aligned}
$$

где первое уравнение содержит y_1, второе уравнение содержит y_2, но не содержит y_1, третье уравнение содержит y_3, но не содержит y_1 и y_2, а последнее уравнение содержит только y_n, — называется *диаганальной системой*[1]. Операторы $H_{11}(D)$, $H_{22}(D)$, $\ldots$, $H_{nn}(D)$ называются *диагональными коэфициентами*. Каждая зависимая переменная связана только с одним диагональным коэфициентом; форма этой связи называется *диагональным порядком*.

Докажем теперь, что *каждая система детерминантов линейных уравнений с постоянными коэфициентами может быть приведена к эквивалентной диагональной системе, в которой зависимые переменные имеют определенный диагональный порядок*. Предположим, что диагональный порядок является порядком возрастающих индексов, как в приведенной выше схеме.

В качестве предварительной леммы докажем, что если

$$
\begin{aligned}
U_1 &\equiv F_{11}(D)y_1 + \ldots + F_{1n}(D)y_n - f_1(x) = 0,\\
U_2 &\equiv F_{21}(D)y_1 + \ldots + F_{2n}(D)y_n - f_2(x) = 0
\end{aligned}
$$

— два уравнения, содержащие некоторую зависимую переменную, например y_1, то они могут быть заменены эквивалентной парой уравнений, одно из которых не содержит y_1. Если такая эквивалентная пара уравнений существует, то она будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
LU_1 + MU_2 &= 0,\\
L'U_1 + M'U_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

где L, M, L', M' — полиномы от D с постоянными коэфициентами, так что

$$LM' - L'M$$

будет постоянной. Пусть Γ будет наибольшим делителем $F_{11}(D)$ и $F_{21}(D)$, тогда

$$F_{11}(D) = \Gamma\Phi,\quad F_{21}(D) = \Gamma\Psi$$

где Φ и Ψ — полиномы от D, не имеющие общего множителя Пусть

$$L = \Psi,\quad M = -\Phi,$$

---

[1] Обычно диагональной системой называют систему вида: $H_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ h_i, & i = k \end{cases}$ Прим. ред.

тогда в

$$LU_1 + MU_2$$

не будет члена, содержащего y_1. Поскольку L и M являются взаимно простыми относительно D, полиномы L' и M' могут быть определены[1] таким образом, что

$$LM' - L'M$$

будет постоянной, не равной нулю. Следовательно лемма установлена.

Теперь, пусть данная система

$$U_1 = 0, \ldots, U_n = 0$$

будет расположена таким образом, что любые уравнения, не содержащие y_1, будут находиться в конце системы. Пусть $U_r = 0$ будет последним уравнением, содержащим y_1, тогда $U_{r-1} = 0$ и $U_r = 0$, могут быть заменены эквивалентной парой уравнений $U'_{r-1} = 0$ и $U'_r = 0$, второе из которых не содержит y_1. Аналогично, $U_{r-2} = 0$ и $U'_{r-1} = 0$ могут быть заменены эквивалентной парой $U'_{r-2} = 0$ и $U''_{r-1} = 0$, из которых второе не содержит y_1. Этот процесс может быть продолжен до приведения к эквивалентной системе

$$V_1 = 0, \ldots, V_n = 0,$$

где только V_1 содержит y_1. V_1 должно содержат y_1, поскольку первоначальная система является определенной. Исключая $V_1 = 0$, получим систему

$$V_2 = 0, \ldots, V_n = 0,$$

которая содержит все остальные переменные $y_2, \ldots, y_n$; она решается аналогично относительно y_2 и может быть приведена к системе

$$W_2 = 0, \ldots, W_n = 0,$$

где только W_2 содержит y_2, Процесс повторяется до достижения конечной диагональной системы.

6·501. Пример приведения к диагональной системе. Рассмотрим однородную систему

$$\begin{aligned} (D+1)y_1 + Dy_2 + (D+1)\,y_3 &= 0, \\ (D-1)y_1 + Dy_2 + (D-1)\,y_3 &= 0, \\ y_1 + y_2 + Dy_3 &= 0. \end{aligned}$$

При помощи системы множителей

$$\begin{pmatrix} -1, & D & \\ -1, & D-1 & \end{pmatrix}$$

---

[1] Chrystal, Algebra, I. VI. § 11.

последние два уравнения могут быть замещены двумя эквивалентными уравнениями, одно из которых не содержит y_1, таким образом система примет вид

$$
\begin{aligned}
(D+1)y_1 = D^2y_2 + (D+1)y_3 &= 0,\\
y_1 + 0y_2 + (D^2 - D + 1)y_3 &= 0,\\
-y_2 + (D^2 - 2D + 1)y_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Воздействуя на первые два уравнения этой эквивалентной последовательности системой множителей

$$
\begin{pmatrix} -1, & D \\ -1, & D+1 \end{pmatrix},
$$

последовательность уравнений примет вид

$$
\begin{aligned}
-y_1 - D^2y_2 + (D^3 - D^3 - 1)y_3 &= 0,\\
-D^2y_2 + (D^3 - D)y_3 &= 0,\\
-y_2 + (D^2 - 2D + 1)y_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Наконец, применяя систему множителей

$$
\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & D^2 \end{pmatrix}
$$

к последней паре уравнений, получим диагональную систему

$$
\begin{aligned}
-y_1 - D^2y_2 + (D^3 - D^2 - 1)y_3 &= 0,\\
-y_2(D^2 - 2D + 1)y_3 &= 0,\\
(D^4 - 3D^3 + D^2 + D)y_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Последнее уравнение легко решить относительно y_3, после чего второе и первое уравнения дадут соответственно y_2 и y_1.

6·51. Свойства диагональной системы. Доказательство фундаментальной теоремы. Пусть $U_1 = 0, \ldots, U_n = 0$ будет диагональной системой. Очевидно произведение диагональных коэфициентов будет ее детерминантом. Это произведение равно постоянной, умноженной на детерминант системы, эквивалентной данной диагональной системе.

Диагональная система может быть решена непрерывным приложением методов, приведенных в предыдущих параграфах настоящей главы, для решения отдельных линейных уравнений с постоянными коэфициентами. Пусть ω_r будет степенью диагонального коэфициента y_r в D. Последнее уравнение системы дает общее значение для y_n, с определенным числом ω_n произвольных постоянных. Если мы подставим значение для y_n в предпоследнее уравнение и решим это уравнение для y_{n-1}, то мы введем некоторое число ω_{n-1} дополнительных произвольных постоянных. Этот процесс затем повторяется; в общем случае выражение для y_r введет ω_r *новых* произвольных постоянных, в дополнение к некоторым или ко всем произвольным постоянным, которые входят в уравнение для y_r, вследствие того, что это уравнение может содержать полученные ранее выражения для $y_{r+1}, \ldots, y_n$.

Поскольку ω_r постоянных, введенных процессами интегрирования относительно y_r, являются новыми постоянными, совершенно отличными от постоянных, содержащихся в $y_{r+1}, \ldots, y_n$, общее решение системы будет содержать $\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_n$ постоянных, ни одна из которых не будет лишней. Общее число независимых произвольных постоянных в полном решении системы следовательно равно степени ее детерминанта.

Отсюда следует основная теорема, которую нужно было установить, именно, что *порядок любой определенной системы линейных уравнений с постоянными коэфициентами равен порядку характеристического уравнения.*

6·52. Эквивалентные диагональные системы. Пусть $L_{r+1} \ldots, L_n$ будут полиномами от D с постоянными коэфициентами, тогда любая последовательность решений $U_{r+1} = 0, \ldots, U_n = 0$ будет удовлетворять уравнению

$$L_{r+1}\, U_{r+1} + \ldots + L_n U_n = 0.$$

Следовательно, если выражение вида $L_{r+1} U_{r+1} + \ldots + L_n U_n$ прибавить к левому члену любого уравнения $U_r = 0$, то измененная система будет иметь все решения старой системы. Однако диагональные коэфициенты результирующей системы точно соответствуют диагональным коэфициентам первоначальной системы. На эквивалентность диагональной системы этот процесс следовательно не влияет, но он более простой.

Если диагональный порядок зависимых переменных известен, то диагональные коэфициенты могут быть определены единственным образом, однако недиагональные коэфициенты не могут быть так определены. Более того, диагональный коэфициент любой переменной определяется единственным образом, если совокупность переменных, которые следуют в диагональном порядке, известна. Так, пусть за переменной y_r следует в любом порядке $n - r$ переменных — $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Предположим, что диагональный коэфициент y_r и последующие переменные имеют вид

$$K_r,\ K_{r+1}, \ldots, K_n$$

в одном порядке и

$$K'_r,\ K'_{r+1}, \ldots, K'_n$$

в другом, тогда поскольку обе системы эквивалентны,

$$K_r K_{r+1} \ldots K_n = K'_r K'_{r+1} \ldots K'_n.$$

Но в обоих случаях последние $n - r$ уравнений, с переменными

$y_{r-1}, \ldots, y_n$, образуют эквивалентные системы, следовательно

$$K_{r+1} \ldots K_n = K'_{r+1} \ldots K'_n,$$

откуда

$$K_r = K'_r,$$

т. е. диагональный коэфициент y_r остается неизменным, если последовательность переменных, следующих за y_r, остается неизменной.

Предположим, что y_r содержит в полном решении ν_r произвольных постоянных; тогда, если диагональная система расположена таким образом, что y_r встречается в последнем уравнении, то диагональный коэфициент y_r будет степени ν_r от D.

Пусть система будет преобразована таким образом, что y_r будет встречаться в качестве диагонального члена в предпоследнем уравнении. Поскольку полное решение y_r все еще содержит ν_r произвольных постоянных, степень диагонального коэфициента y_r не будет превышать ν_r; в действительности она может быть меньше ν_r на степень диагонального коэфициента последнего уравнения системы.

Степень диагонального коэфициента y_r может быть еще более понижена преобразованием системы, при котором y_r должно входить в диагональный член третьего с конца уравнения так, чтобы диагональный коэфициент для любой данной переменной был наименьший, если эта переменная первая в диагональном порядке; он увеличивается при продвижении переменной в диагональном порядке и достигает максимума при последней переменной.

Если переменная последняя в диагональном порядке, то степень ее диагонального коэфициента равна общему числу произвольных постоянных в полном выражении для этой переменной; если переменная первая в диагональном порядке, то степень ее диагональных коэфициентов равна числу произвольных постоянных, которые входят только в нее. Диагональные коэфициенты в этих двух случаях имеют следовательно большое значение; ниже мы приведем правила для вычисления диагональных коэфициентов любой частной переменной, когда переменная занимает первое или последнее место в диагональном порядке.

Пусть данной системой будет

(U) $$U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ \ldots U_n = 0,$$

где

$$U_r = F_{r1} y_1 + \ldots + F_{rn} y_n - f_r(x),$$

и пусть

(V) $$V_1 = 0,\ V_2 = 0,\ \ldots,\ V_n = 0,$$

где

$$V_r = H_{rr} y_r + \ldots + H_{rn} y_n - h_r(x)$$

— эквивалентная диагональная система. Пусть

$$\begin{pmatrix} \delta_{11}, \ldots, \delta_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}, \ldots, \delta_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta'_{11}, \ldots, \delta'_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta'_{n1}, \ldots, \delta'_{nn} \end{pmatrix}$$

будут системами множителей, которые преобразуют (U) в (V) и (V) в (U) соответственно. Поскольку

$$V_1 = \delta_{11} U_1 + \ldots + \delta_{1n} U_n,$$

отсюда следует, что

$$H_{11} = \delta_{11} F_{11} + \ldots + \delta_{1n} F_{n1},$$

а поскольку

$$U_r = \delta'_{r1} V_1 + \ldots + \delta'_{rn} V_n \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

то

$$F_{r1} = \delta'_{r1} H_{11} \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

Следовательно H_{11} должен быть общим множителем относительно D в

$$F_{11}, \ldots, F_{n1}.$$

Отсюда, независимо от постоянного множителя, H_{11} должен быть наибольшим общим множителем $F_{11}, \ldots, F_{n1}$. Это является правилом для вычисления диагонального коэфициента y_1 (когда он первый в диагональном порядке). Диагональный коэфициент y_r должен быть постоянным, кратным наибольшему общему множителю γ_r

$$F_{1r}, \ldots, F_{nr}.$$

H_{nn}, т. е. диагональный коэфициент y_n (когда он последний в диагональном порядке) вычисляется следующим образом. Поскольку

$$V_n = \delta_{n1} U_1 + \ldots + \delta_{nn} U_n,$$

отсюда следует, сравнивая коэфициенты при $y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$, что

$$\begin{gathered} \delta_{n1} F_{11} + \ldots + \delta_{nn} F_{n1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1} F_{1n-1} + \ldots + \delta_{nn} F_{n,\,n-1} = 0, \\ \delta_{n1} F_{1n} + \ldots + \delta_{nn} F_{nn} = H_{nn}. \end{gathered}$$

Предположим, что G_{rs} будет сомножителем F_{rs} в характеристическом детерминанте

$$F = \begin{bmatrix} F_{11}, \ldots, F_{n1} \\ \cdots\cdots \\ F_{1n}, \ldots, F_{nn} \end{bmatrix},$$

а Γ_n будет наибольшим общим множителем $G_{1n} \ldots, G_{nn}$ и

$$G_{1n} = G'_{1n} \Gamma_n, \ldots, G_{nn} = G'_{nn} \Gamma_n.$$

Отсюда

$$\delta_{n1} = \lambda G'_{1n}, \ldots, \delta_{nn} = \lambda G'_{nn}$$

где λ определяется соотношением

$$F\lambda = \Gamma_n H_{nn},$$

и, поскольку $G'_{1n}, \ldots, G'_{nn}$ взаимно простые числа, λ — постоянная или полином от D.

Так как обе системы эквивалентны, то модуль

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}, \ldots, \delta_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_{n1}, \ldots, \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

должен быть постоянным. Этот детерминант очевидно имеет множитель λ, поэтому λ — постоянная.

Отсюда следует, что

$$H_{nn} = \lambda (F_{1n} G'_{1n} + \ldots + F_{nn} G'_{1n})$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma_n} (F_{1n} G_{1n} + \ldots + F_{nn} G_{nn}) = \frac{\lambda F}{\Gamma_n}.$$

В более общем случае, когда член y_r последний в диагональном порядке, его диагональный коэфициент будет постоянным множителем F/Γ_r, F — характеристический детерминант системы, Γ_r — наибольший общий множитель

$$G_{1r}, \ldots, G_{nr},$$

а G_{mr} — минор F_{mr} в характеристическом детерминанте.

Диференциальные уравнения, определяющие отдельно $y_1, \ldots, y_n$ имеют вид

$$\frac{F}{\Gamma_1} y_1 = \frac{G_{11}}{\Gamma_{11}} f_1(x) + \ldots + \frac{G_{n1}}{\Gamma_1} f_n(x),$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$\frac{F}{\Gamma_n} y_n = \frac{G_{1n}}{\Gamma_n} f_1(x) + \ldots + \frac{G_{nn}}{\Gamma_n} f_n(x).$$

Необходимо отметить, что эта последовательность уравнений полностью определяет $y_1, \ldots, y_n$.

6·53. Простые диагональные системы. Первообразные[1] системы. Из общего числа зависимых переменных некоторые переменные могут целиком определиться недиференциальными уравнениями, следовательно они не содержат произвольных постоянных.

Если это имеет место, то можно предположить, что рассматриваемые переменные устранены из системы и замещены там, где они встречаются, их действительными значениями; тогда система не будет содержать зависимой переменной, которая бы могла быть определена без интегрирования диференциального уравнения.

[1] Термин *первообразный* следует понимать в алгебраическом смысле Прим. ред.

Предположим, что в ограниченном таким образом решении имеется только одно диференциальное уравнение. Это уравнение должно быть последним уравнением системы, так как в противном случае последняя зависимая переменная в диагональном порядке была бы определена недиференциальным уравнением. Пусть последней переменной будет y_n, которая может быть определена из уравнения

$$H_{nn} y_n = 0,$$

порядок которого равен порядку системы, так что выражение для y_n будет содержать все произвольные постоянные полного решения системы. Остальные диагональные коэфициенты $H_{n-1,\, n-1}, \ldots, H_{11}$ будут постоянные; соответствующие переменные $y_{n-1}, \ldots, y_1$ зависят от некоторых или всех постоянных, входящих в выражение для y_n, но не содержащих кроме них никаких других произвольных постоянных. Такая система называется *простой диагональной системой.*

Рассмотрим условия, при которых любая данная система может быть приведена к простой диагональной системе.

Если F — детерминант данной системы, то

$$F = H_{11} H_{22} \ldots H_{nn},$$

и поскольку операции, при помощи которых $H_{11}, H_{22}, \ldots, H_{nn}$ получаются из коэфициентов первоначальной системы, являются рациональными, отсюда следует, что $H_{11}, H_{22}, \ldots, H_{nn}$ будут также рациональными относительно коэфициентов F_{rs} начальной системы. Следовательно, если F не имеет множителя низшего порядка относительно D, то $H_{11}, \ldots, H_{n-1,\, n-1}$ приводятся к постоянным, а эквивалентная диагональная система будет простой.

Как и выше, пусть G_{rs} обозначает сомножитель F_{rs} характеристического детерминанта F. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} G_{11}, \ldots, G_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ G_{n1}, \ldots, G_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что составные элементы любого столбца являются взаимно простыми *(первообразный столбец)*. Тогда, в обозначениях предыдущего параграфа, Γ_r — постоянная, и следовательно, если y_r последняя по порядку в эквивалентной диагональной системе зависимая переменная, то коэфициент y_r в последнем уравнении диагональной системы будет постоянным множителем самого F. Полученная диагональная система является простой. Таким образом *для каждого первообразного столбца в обратной матрице данной системы может быть образована эквивалентная диагональная система, в которой соответствующая переменная будет последней в диагональном порядке.*

В частности, если каждый столбец обратной матрицы будет первообразным, то каждая эквивалентная диагональная система будет простой, а выражение для каждой зависимой переменной будет содержать все произвольные постоянные.

Система, каждый столбец характеристического детерминанта которой является первым, называется *первообразной системой*. Любая данная система может быть преобразована в простую систему, для которой γ_r — наибольший общий множитель $F_{1r}, \ldots, F_{nr}$; необходимо ввести только новые зависимые переменные u_1, $u_2, \ldots, u_n$, где

$$u_1 = \gamma_1 y_1, \ldots, u_n = \gamma_n y_n.$$

Характеристическим свойством первообразной системы является то, что в любой эквивалентной диагональной системе первое уравнение недиференциальное.

Однородная система

$$(D^2 - 1) y_1 + D^3 y_2 + (D+1) y_3 = 0,$$
$$(D - 1)^2 y_1 + D^2 y_2 + (D - 1) y_3 = 0,$$
$$(D - 1) y_1 + D y_2 + D y_3 = 0$$

приводится преобразованием

$$u_1 = (D - 1) y_1, \quad u_2 = D y_2, \quad u_3 = y_3$$

к первообразной системе

$$(D + 1) u_1 + D^2 u_2 + (D + 1) u_3 = 0,$$
$$(D - 1) u_1 + D u_2 + (D - 1) u_3 = 0,$$
$$u_1 + u_2 + D u_3 = 0,$$

приведение которой к эквивалентной диагональной форме было произведено в § 6·501.

Пример:

$$(2D - 2) y_1 + (D^3 - D + 2) y_2 = e^{-x},$$
$$(D^3 + 3D^2 + 5D - 1) y_1 + (-3D^2 - 4D + 1) y_2 = 0.$$

Характеристическим детерминантом является

$$\begin{vmatrix} 2D - 2, & D^3 - D + 2 \\ D^3 + 3D^2 + 5D - 1, & -3D^2 - 4D + 1 \end{vmatrix},$$

а характеристическое уравнение имеет вид

$$D (D + 1)^3 (D^2 + 1) y = 0.$$

Обратная матрица получается в виде

$$\begin{pmatrix} -3D^2 - 4D + 1, & -D^3 - 3D^2 - 5D + 1 \\ -D^3 + D - 2, & 2D - 2 \end{pmatrix},$$

причем оба ее столбца являются простыми. Таким образом в любой эквивалентной диагональной системе первое уравнение является недиференциальным, а так как в систему входят только два уравнения, то система следовательно будет простой. Система множителей

$$\begin{pmatrix} L & , & M \\ D^3+3D^2+5D-1, & & -2D+2 \end{pmatrix}$$

преобразует данную систему в эквивалентную диагональную систему, в которой y_2 будет последним в диагональном порядке, если L и M выбраны таким образом, что

$$L(2D-2)+M(D^3+3D^2+5D-1)$$

— постоянная величина.

L и M легко определяются следующим образом. Пусть

$$u=2D-2, \quad v=D^3+3D^2+5D-1,$$

тогда, исключая D^3, получим

$$D^2u-2v=-8D^2-10D+2,$$

исключая D^2 из выражений для D^2u-2v и u, получим

$$(D^2+4D)u-2v=-18D+2$$

и, наконец, исключая D из этого выражения и выражения для u, получим

$$(D^2+4D+9)u-2v=-16.$$

Таким образом L и M должны иметь следующие значения:

$$L=D^2+4D+9, \ M=-2.$$

Система множителей

$$\begin{pmatrix} D^2+4D+9 & , & -2 \\ D^3+3D^2+5D-1, & & -2D+2 \end{pmatrix}$$

приводит данную систему к эквивалентной диагональной системе

$$-16y_1+(D^5+4D^4+8D^3+4D^2+7D+16)y_2=6e^{-x},$$

$$D(D+1)^3(D^2+1)y_2=-4e^{-x}.$$

Общее решение уравнения для y_2 имеет вид

$$y_2=C_1+(C_2+C_3x+C_4x^2)e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x+\frac{1}{3}x^3e^{-x}.$$

Поскольку уравнение для y_1 не является диференциальным, получим

$$y_1 = C_1 + \frac{1}{4}\,\{(2C_2 + 3C_3 - 3C_4) + (2C_3 + 6C_4)\,x + 2C_4x^2\}\,e^{-x} +$$
$$+ C_5\cos x + C_6\sin x - \frac{1}{8}\left(1 + 6x - 6x^2 - \frac{4}{3}x^3\right)e^{-x}.$$

6·6. Поведение в бесконечности решений линейной диференциальной системы с ограниченными коэфициентами. Здесь удобно расширить цели исследования для того, чтобы рассмотреть поведение решений систем при больших значениях независимой переменной. Коэфициенты этих систем ограничены и не являются обязательно постоянными[1].

Примем следующую лемму. Пусть $f(x)$ будет функцией, ограниченной при $x_0 < x < \infty$ и пусть λ_1 и λ_2 будут такими двумя вещественными числами, что $e^{\lambda_1 x}f(x)$ стремится к нулю, а $e^{\lambda_2 x}f(x)$ не стремится к нулю при $x \to \infty$. Тогда в интервале (λ_1, λ_2) будет существовать число $\lambda_0 \leqslant \lambda_2$ таким образом, что если ε — малое положительное число, то $e^{(\lambda_0 - \varepsilon)x}f(x)$ стремится к нулю, а $e^{(\lambda_0 + \varepsilon)x}f(x)$ стремится к бесконечности, когда $x \to \infty$[2]. Аналогично, если

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x)$$

— функции, определяемые в интервале (x_0, ∞), а λ_1 и λ_2 таковы, что каждое произведение $e^{\lambda_1 x}f_r(x)$ стремится к нулю, в то время как не все произведения $e^{\lambda_2 x}f_r(x)$ стремятся к нулю, когда $x \to \infty$, то будет существовать некоторое число $\lambda_0\,(\lambda_1 < \lambda_0 \leqslant \lambda_2)$ такое, что каждое произведение $e^{(\lambda_0 - \varepsilon)x}f_r(x)$ стремится к нулю, хотя, по крайней мере, одно из произведений $e^{(\lambda_0 + \varepsilon)x}f_r(x)$ не ограничено. Число λ_0 называется *характеристическим* числом системы рассматриваемых функций.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n,$$

где все коэфициенты a — вещественные функции x, ограниченные в интервале (x_0, ∞). Пусть

$$y_r = e^{\lambda x}v_r,$$

---

[1] Ляпунов, Comm. Math. Soc., Харьков (1892); Ann, Fac. Sc. Toulouse (2), 9 (1908).

[2] Эта теорема доказывается повторным подразделением интервала (λ_1, λ_2).

где λ — произвольное вещественное число, тогда

$$\frac{dv_1}{dx} = (a_{11} - \lambda) v_1 + a_{12} v_2 + \ldots + a_{1n} v_n,$$
$$\frac{dv_2}{dx} = a_{21} v_1 + (a_{22} - \lambda) v_2 + \ldots + a_{2n} v_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dv_n}{dx} = a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) v_n.$$

Если эти уравнения умножить соответственно на $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а затем сложить вместе, то результирующее уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \frac{d\left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right)}{dx} = (a_{11} - \lambda) v_1^2 + (a_{22} - \lambda) v_2^2 + \ldots +$$
$$+ (a_{nn} - \lambda) v_n^2 + \sum a_{rs} v_r v_s.$$

Если λ достаточно велико, то квадратическая форма в правой части этого уравнения будет определенной и отрицательной, и следовательно, если для λ возьмем достаточно большое положительное число α, то получим

$$\frac{d\left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right)}{dx} < 0$$

для всех значений x в интервале (x, ∞). Таким образом положительная функция $v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$ уменьшается с увеличением x, следовательно $v_1, v_2, \ldots, v_n$ строго ограничены; отсюда имеем, что

$$y_1 e^{-\alpha x}, \; y_2 e^{-\alpha x}, \ldots, \; y_n e^{-\alpha x}$$

ограничены в интервале $x_0 < x < \infty$; очевидно, α может быть такой, чтобы предельное значение каждого произведения равнялось нулю.

Аналогично, если $\lambda = -\beta$, где β — достаточно большое положительное число, то

$$\frac{d\left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right)}{dx} > 0,$$

следовательно предельное значение $v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$ не равно нулю.

Таким образом, по крайней мере один из членов

$$y_1 e^{\beta x}, \; y_2 e^{\beta x}, \ldots, \; y_n e^{\beta x}$$

не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Отсюда следует, что *любая система решений*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

не равных тождественно нулю, допускает характеристическое число λ, а также, что *существует такое вещественное число* $\varkappa$, *что*

$$y_1 e^{\varkappa x},\ y_2 e^{\varkappa x}, \ldots,\ y_n e^{\varkappa x}$$

стремятся совместно к нулю при $x \to 0$.

Соответствующая теорема для одного линейного диференциального уравнения порядка n может быть выражена следующим образом: *если коэфициенты* p_r *уравнения*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

ограничены в интервале $(0, \infty)$, *то существует число* $\varkappa$ *таким образом, что, если* y — *любое решение уравнения, то все*

$$y e^{\varkappa x},\ y' e^{\varkappa x}, \ldots,\ y^{(n-1)} e^{\varkappa x}$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Примеры

1. Проинтегрируйте следующие уравнения

(I) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = \sin x$;

(II) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = e^x \cos 3x$;

(III) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - y = \operatorname{ch} x$;

(IV) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = x + 2e^x$;

(V) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4y = e^x \sin 2x \cos x$;

(VI) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$;

(VII) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = x \cos mx$;

(VIII) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} - 4y = e^{2x} + e^{3x}$;

(IX) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$;

(X) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = 24x^2$;

(XI) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + n^2 y = x^m$;

(XII) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6x\dfrac{dy}{dx} + 6y = x(1 - x)$.

2. Найдите решение уравнения

$$\frac{d^4y}{dx^4} + m^4 y = 0,$$

которое удовлетворяло бы условиям

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ при } x = l.$$

3. Докажите, что частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = m^2 f(x)$$

имеет вид

$$y = m \sin mx \int_0^x f(x) \cos mx\, dx - m \cos mx \int_0^x f(x) \sin mx\, dx \quad \text{[Fourier]}.$$

4. Проинтегрируйте системы

(I) $\dfrac{dx}{dt} + ax - by = e^t, \quad \dfrac{dy}{dt} - ay + bx = e^t \qquad (a^2 - b^2 = 1);$

(II) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2y = 0, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} - n^2x = 0;$

(III) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2k\dfrac{dy}{dt} + n^2x = 0, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2k\dfrac{dx}{dt} + n^2y = 0;$

(IV) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + n\dfrac{dy}{dt} = a \cos nt, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} - n\dfrac{dx}{dt} = 0.$

5. Решите систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3x - 4y + 3 = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + x + y + 5 = 0,$$

при условии, что при $t = 0$

$$x = y = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0.$$

6. Проинтегрируйте систему

$$x\frac{d^2x}{dt^2} - y\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + x + y = 0. \quad \text{[Edinburgh, 1909]}.$$

7. Приведите к диагональным системам и проинтегрируйте

$$\text{(I)} \begin{cases} (D^2 - 1)\,x + Dy = e^t, \\ Dx + (D^2 + 1)\,y = 0; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} (D^2 - 1)x + 2(D + 1)\,y + (D + 1)\,z = 2e^t, \\ (D - 1)^2x + 4Dy + (D - 3)\,z = 0, \\ (3D - D^3)\,x - 2Dy - (D - 1)\,z = 0, \end{cases}$$

где

$$D \equiv \frac{d}{dt}.$$

ГЛАВА VII

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ФОРМЕ

7·1. Недостаточность элементарных методов. Кроме уравнений с постоянными коэфициентами и уравнений, которые могут быть получены из них путем замены независимой переменной, неизвестны линейные уравнения порядка n, которые могли быть точно проинтегрированы в элементарных функциях. Если возникает уравнение, которое не может быть приведено к одному из общих типов, рассмотренных в главе VI, то почти всегда решение может быть выражено в неопределенной форме, т. е. в виде бесконечного ряда, бесконечной непрерывной дроби или определенного интеграла. Таким образом в большинстве случаев уравнения, возникающие при решении задач прикладной математики, которые не могут быть приведены к уравнениям с постоянными коэфициентами, имеют в качестве своих решений новые трансцендентные функции. Следует отметить, что трансцендентные функции могут быть подразделены на два класса: 1) на функции, которые являются решениями обыкновенных диференциальных уравнений (например, функции Бесселя), и 2) на функции, которые не удовлетворяют обыкновенным диференциальным уравнениям конечного порядка (например, дзета-функции Римана).

В настоящей главе мы будем рассматривать процесс выражения решения линейного диференциального уравнения в виде бесконечного ряда или непрерывной дроби. Решения в виде определенных интегралов мы рассмотрим в следующей главе.

В главе III было доказано, что если все коэфициенты уравнения

$$L(y) \equiv p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = 0$$

конечны, однозначны и непрерывны в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, то единственными особыми точками, которые могут встретиться в пределах этого интервала, будут корни коэфициента $p_0(x)$.

С точки зрения задачи разложения решений уравнения в бесконечные ряды, различие между обыкновенными и особыми точками является основным. Ниже мы постараемся объяснить различие между решениями, относящимися к обыкновенной точке, и решениями, относящимися к особой точке.

7·2. Решения, относящиеся к обыкновенной точке. Фундаментальные теоремы существования показывают, что если x_0 — не особая точка диференциального уравнения, то существует единственное решение $y(x)$ такое, что оно и его первые $n-1$ производных принимают ряд произвольных значений

$$y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$$

при $x=x_0$, и $y(x)$ может быть разложено в ряд Тэйлора, который сходится в некотором интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$. Известно также, что если $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ — частные решения, определяемые условиями

$$Y_1(x_0)=1,\ Y_1'(x_0)=0, \ldots,\ Y_1^{(n-1)}(x_0)=0,$$

$$Y_2(x_0)=0,\ Y_2'(x_0)=1, \ldots,\ Y_2^{(n-1)}(x_0)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_n(x_0)=0,\ Y_n'(x_0)=0, \ldots,\ Y_n^{(n-1)}(x_0)=1,$$

то

$$y(x)=y_0 Y_1(x)+y_0' Y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)} Y_n(x).$$

Следовательно, чтобы образовать общее решение уравнения или частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, достаточно вывести n фундаментальных решений $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$. Для выражения $Y_{r+1}(x)$ характерно, что его общий член равен $(x-x_0)^r/r!$ и что оно не содержит членов $(x-x_0)^{r+1}$, $(x-x_0)^{r+2}, \ldots, (x-x_0)^{n-1}$. Однако удобнее принять коэфициент общего члена равным единице и постараться удовлетворить уравнению рядом вида

$$y_{r+1}(x)=(x-x_0)^r\left\{1+a_{r1}(x-x_0)+\ldots+a_{r\nu}(x-x_0)^\nu+\ldots\right\}.$$

Поскольку

$$y_{r+1}^{(s)}(x_0)=0 \qquad (s<r),$$

$$y_{r+1}^{(r)}(x_0)=r!,$$

вронскиан последовательности решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ не обращается тождественно в нуль, следовательно, последовательность фундаментальна.

Метод решения состоит в подстановке ряда в левую часть диференциального уравнения, расположении полученного выражения по возрастающим степеням $x-x_0$ и в последующем приравнивании нулю коэфициентов последовательных степеней $x-x_0$. После этого между коэфициентами $a_{r1}, a_{r2}, \ldots a_{r\nu}, \ldots$, получится последовательность линейных алгебраических соотношений (рекуррентных). Таким образом коэфициенты определяются алгебраически.

7·201. Уравнение Вебера. В уравнении Вебера[1]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)y=0$$

точка $x=0$ является обыкновенной точкой, и оба фундаментальных решения могут быть разложены по возрастающим степеням x. Однако более выгодно сделать предварительное преобразование

$$y=e^{-\frac{1}{4}x^2}v,$$

где новая зависимая переменная удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2v}{dx^2}-x\frac{dv}{dx}+nv=0.$$

Теперь, если мы примем v в форме

$$v=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^2+\ldots,$$

то оба фундаментальных решения v_1 и v_2 получатся при условии

$$a_0=1,\ a_1=0 \text{ или } a_0=0,\ a_1=1.$$

Рекуррентное соотношение, которому должны удовлетворять коэфициенты, будет

$$(r+1)(r+2)a_{r+2}=(r-n)a_r, \qquad (r=0,1,2,\ldots),$$

следовательно

$$v_1=1-\frac{n}{2!}x^2+\frac{n(n-2)}{4!}x^4-\frac{n(n-2)(n-4)}{6!}x^6+\ldots,$$

$$v_2=x-\frac{n-1}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)}{5!}x^5-\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{7!}x^7+\ldots$$

Обычные признаки показывают, что эти ряды сходятся для всех конечных значений $|x|$.

7·21. Решения, относящиеся к особой точке. Пусть точка x_0, которую для удобства примем началом, не будет обыкновенной точкой. Тогда можно предположить, что имеется решение вида

$$y=x^r(a_0+a_1x+\ldots+a_\nu x^\nu+\ldots) \qquad (a_0\neq 0),$$

хотя в этом случае r может и не быть положительным целым числом.

---

[1] Weber, Math. Ann., I (1869), 29. Уравнение относительно v было ранее исследовано Эрмитом, C. R. Acad. Sc. Paris, 58 (1864), 93, 266 (Œuvres II, 293). Функции определяемые этим уравнением, были стандартизованы Уиттекером, Proc. London Math. Soc. (1), 35 (1903), 417. См. также Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 16·5—16·7.

Для исследования возможности существования таких решений, подставим ряд вместо y в $L(y)$ и приравняем нулю коэфициент члена наименьшей степени x. Этот коэфициент будет или независимым от r или полиномом $P(r)$ от r, степень которого не будет превышать порядка уравнения[1]. В первом случае решение рассматриваемого типа не существует, и особенность $x = 0$ называется *нерегулярной*. В последнем случае, если $P(r)$ степени n, особенность называется *регулярной*, а если степень $P(r)$ меньше n — *нерегулярной*. Примем, что в данном случае особенность регулярная; тогда уравнение

$$P(r) = 0,$$

которое называется определяющим уравнением, будет иметь n корней, из которых все или несколько могут быть равны. Если уравнение привести к виду

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0,$$

то, чтобы $P(r)$ могло быть степени n, необходимо и достаточно, чтобы[2]

$$p_r = O(x^{-r}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Корни определяющего уравнения известны как *показатели*, относящиеся к рассматриваемой особой точке. В качестве общего принципа, который будет доказан несколько ниже при помощи теории комплексных переменных (см. главу XV), можно указать, что если показатели являются разными и ни один из них не отличается от другого на целое число, то существует n линейно-независимых решений рассматриваемого типа[3]. Если же два или больше показателей равны или различаются на целое число, то число решений рассматриваемого типа в общем случае меньше n, а остальные решения фундаментальной последовательности имеют менее простой характер.

7 · 22. Точка в бесконечности как регулярная особая точка. Вопрос о том, является ли какая-либо конечная особенность регулярной или нерегулярной, может быть разрешен почти сразу; определить природу точки в бесконечности немного труднее. Преобразование

$$x = z^{-1}$$

---

[1] Очевидно, $P(r)$ не будет зависеть от коэфициентов $a_1, a_2, \ldots$, и будет содержать a_0 в качестве множителя.

[2] Символ $O(x^{-r})$ будет часто встречаться ниже. Он определяется следующим образом: если функция $f(x)$ такова, что при $x \to 0$ (или ∞), $|x^r f(x)| < K$, где K — положительное число, независящее от x и неравное нулю, то говорят, что $f(x)$ порядка x^{-r} или $f(x) = O(x^{-r})$. Вообще, из контекста будет ясно, имеет ли место предельный процесс для $x \to 0$ или для $x \to \infty$. Если $\lim |x^r f(x)| = 0$, то все определяется выражением $f(x) = O(x^{-r})$.

Точное доказательство, что $p_r = O(x^{-r})$ — необходимое и достаточное условие для регулярной особенности, будет дано ниже (§ 15·3).

[3] Решение в виде ряда.

переносит точку в бесконечности к началу, и критерии для обыкновенной точки регулярной и нерегулярной особенности могут быть приложены непосредственно.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0;$$

после преобразования подстановкой $x = z^{-1}$ оно примет вид

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2}\right\}\frac{dy}{dz} + \frac{q(z^{-1})}{z^4}y = 0.$$

Если первоначальное уравнение имело обыкновенную точку в бесконечности, то преобразованное уравнение будет иметь обыкновенную точку в начале, поэтому условия

$$\frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} = O(1),$$

$$\frac{q(z^{-1})}{z^4} = O(1)$$

должны быть верны при $z \to 0$. Соответствующими условиями для первоначального уравнения будут

$$p(x) = \frac{2}{x} + O(x^{-2}),$$

$$q(x) = O(x^{-4})$$

при $x \to \infty$.

Условия для регулярной особенности имеют вид

$$\frac{2}{z} - \frac{p(z^{-1})}{z^2} = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{q(z^{-1})}{z^4} = O\left(\frac{1}{z^2}\right)x$$

при $z \to 0$, и

$$p(x) = O(x^{-1}),$$

$$q(x) = O(x^{-2}),$$

при $x \to \infty$. Пусть

$$p(x) = p_0 x^{-1} + O(x^{-2}),$$

$$q(x) = q_0 x^{-2} + O(x^{-3}),$$

тогда определяющее уравнение, относящееся к особенности $z = 0$, будет иметь вид

$$r^2 + (1 - p_0)r + q = 0;$$

его корнями будут α и β. В общем случае, при α и β неравных и не различающихся на целое число, будут существовать два решения первоначального уравнения, относящиеся к особенности $x=\infty$, именно

$$y_1 = x^{-\alpha}(1 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots),$$
$$y_2 = x^{-\beta}(1 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \ldots),$$

и эти разложения будут сходиться для достаточно больших значений $|x|$.

Необходимо отметить, что показатели, относящиеся к точке в бесконечности, будут равны α, β, а не $-\alpha, -\beta$.

Для иллюстрации приведенных общих принципов рассмотрим особо важное уравнение, известное как гипергеометрическое.

7·23. Гипергеометрическое уравнение. Гипергеометрическое уравнение[1]

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

имеет три особых точки: $x=0$, $x=1$ и $x=\infty$. Показатели, относящиеся к $x=0$, равны 0 и $1-\gamma$, относящиеся к $x=1$ равны 0 и $\gamma-\alpha-\beta$, а относящиеся к $x=\infty$ равны α и β. Чтобы показать это, наиболее общее решение уравнения может быть написано в символической форме, данной Риманом[2]

$$y = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & x \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix};$$

правая часть этого соотношения называется P-функцией Римана.

Решение, относящееся к особенностям $x=0$ и показателю 0, может быть разложено в ряд

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

и обозначается через $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$. Можно показать, что ряд сходится при $|x|<1$ для всех конечных значений α и β и для всех конечных значений γ, за исключением отрицательных целых чисел, и расходится при $|x|>1$. Если α, β и γ вещественны, то ряд сходится при $x=1$ и $\gamma>\alpha+\beta$ и расходится при $\gamma \leqslant \alpha+\beta$; ряд сходится также при $x=-1$, если $\gamma+1>\alpha+\beta$, и расходится, если $\gamma+1 \leqslant \alpha+\beta$.

Рассмотрим решение, относящееся к особенности $x=0$, с показателем $1-\gamma$. Принимая решение в виде ряда

$$y = x^{1-\gamma}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots),$$

найдем, что

$$(\nu+1)(\nu-\gamma+2)a_{\nu+1} = (\nu+\alpha-\gamma+1)(\nu+\beta-\gamma+1)a_\nu$$

---

[1] Gauss, Comm. Gott., 2 (1813) [Werke, 3, 123, 207]. Подробное исследование гипергеометрического уравнения см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XIV; там же дана библиография.

[2] Riemann, Abh. Ges. Wiss. Gött., 7 (1857) [Math. Werke, 2 изд., 67].

для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, при $a_0 = 1$. Отсюда получим

$$y = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x).$$

Аналогично найдем два решения, соответствующие особенности $x = 1$,

$$y = F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - x),$$

$$y = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x),$$

и два решения, соответствующие точке в бесконечности

$$y = x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; x^{-1}),$$

$$y = x^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; x^{-1}).$$

Интервал сходимости ряда относительно $1-x$ равен $0 < x < 2$, а ряда по степеням x^{-1} равен $|x| > 1$. Таким образом мы получили шесть решений[1]; так как не больше двух решений могут быть линейно-независимы, то между всеми решениями должна существовать линейная зависимость.

7·231. Линейная зависимость между решениями в виде ряда. Сначала докажем, что если $\gamma > \alpha + \beta$ и γ не являются отрицательными и целыми числами, то

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Поскольку при $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ удовлетворяет тождеству

$$\{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} F'(\alpha, \beta; \gamma; x) =$$
$$= \alpha\beta F(\alpha, \beta; \gamma; x) - x(1 - x) F''(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

и поскольку, как может быть проверено на самом ряде, $F''(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ является конечной величиной, то отсюда следует, что

$$(\gamma - \alpha - \beta - 1) F'(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \alpha\beta F(\alpha, \beta; \gamma; 1).$$

Сравнением коэфициентов одинаковых членов можно также показать, что

$$F(\alpha, \beta; \gamma + 1; x) - F(\alpha, \beta; \gamma; x) = -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma + 1)} F(\alpha + 1, \beta + 1; \gamma + 2; x)$$
$$= -\frac{x}{\gamma} F'(\alpha, \beta; \gamma + 1; x),$$

следовательно

$$F(\alpha, \beta; \gamma + 1; 1) - F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = -\frac{1}{\gamma} F'(\alpha, \beta; \gamma + 1; 1)$$
$$= -\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} F(\alpha, \beta; \gamma + 1; 1).$$

[1] Kummer, J. für Math., 15 (1836), 39, 127. См. также Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, loc. cit.

Таким образом мы получим

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)} F(\alpha, \beta; \gamma+1; 1).$$

Повторным применением этой формулы найдем, что

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1)=\lim_{n\to\infty}\left\{\prod_{r=0}^{n-1}\frac{(\gamma-\alpha+r)(\gamma-\beta+r)}{(\gamma+r)(\gamma-\alpha-\beta+r)} F(\alpha, \beta; \gamma+n; 1)\right\}.$$

Но согласно хорошо известной теореме [1], предельное значение бесконечного произведения равно

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

и поскольку

$$F(\alpha, \beta; \gamma+n; 1)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma+n}U_n,$$

где U_n — сходящийся ряд, положительный и уменьшающийся с увеличением n, то

$$\lim F(\alpha, \beta; \gamma+n; 1)=1,$$

и следовательно теорема доказана.

Поскольку любое решение может быть линейно выражено двумя независимыми решениями, мы получим тождественное соотношение вида

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x)=AF(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-x)+$$
$$+B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x),$$

где A и B—подлежащие определению постоянные.

Чтобы все ряды сходились в общем интервале $0\leqq x\leqq 1$, примем, что [2]

$$1>\gamma>\alpha+\beta.$$

Принимая последовательно $x=1$ и $x=0$, получим

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1)=A,$$

$$1=AF(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1)+BF(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1).$$

Отсюда получим значения A и B. Результирующее соотношение будет иметь вид

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\Gamma(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-x)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x)\cdot$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 12 — 13.

[2] Это строгое ограничение несущественно для результата; оно лишь присуще данному методу.

7·232. Случай, когда разность показателей является целым числом. Оба решения, соответствующие особенности $x = 0$, именно

$$y_1 = F(\alpha, \beta; \gamma; x), \quad y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1; \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x),$$

независимы, если разность показателей $1 - \gamma$ не равна нулю или отрицательному целому числу. При $\gamma = 1$ оба решения тождественны, при $\gamma = 2, 3, 4, \ldots$, решение y_2 становится неверным, вследствие обращения в нуль знаменателя в коэфициентах бесконечного числа членов ряда. Тем не менее, решение y_2 имеет смысл при $\gamma = m$ (m — положительное целое число), если умножить его на соответствующий постоянный множитель. Рассмотрим решение

$$\frac{(2-\gamma)\ldots(m-\gamma)\cdot(m-1)!}{(\alpha-\gamma+1)\ldots(\alpha-\gamma+m-1)(\beta-\gamma+1)\ldots(\beta-\gamma+m-1)}\, y_2.$$

Это решение остается конечным при γ, равной m, первые $m - 1$ членов разложения ряда обращаются в нуль и остается решение

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,m}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,m(m+1)}x^2 + \ldots = F(\alpha, \beta; m; x).$$

Таким образом, если γ — положительное целое число или нуль, то оба решения y_1 и y_2 будут практически одинаковы. Общий метод[1] получения другого решения, существенно отличный от приведенного выше, будет рассмотрен в главе XVI. Приведем простой пример, иллюстрирующий общий случай.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2}\right\}y = 0.$$

$x = 0$ является регулярной особой точкой, которой соответствует определяющее уравнение

$$\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

корни которого равны. Одно решение получается непосредственно, именно

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^2\cdot 8^2} + \ldots\right);$$

второе решение получается подстановкой

$$y = y_1 v,$$

где v — новая зависимая переменная. Уравнение для v, именно

$$y_1 v'' + 2y_1' v' = 0,$$

[1] Lindelöf, Acta Soc. Sc. Fenn., 19 (1893), 15.

имеет решение

$$v=\int\frac{dx}{\{y_1(x)\}^2}=\int\frac{dx}{x\left\{1+\frac{1}{8}x^2+O(x^4)\right\}}$$

$$=\int\left\{x^{-1}-\frac{1}{8}x+O(x^3)\right\}dx=\log x-\frac{1}{16}x^2+O(x^4).$$

Следовательно второе решение y_2 будет иметь вид

$$y_2=y_1\log x-x^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{16}x^2+O(x^4)\right\}.$$

7·24. Уравнение Лежандра. Диференциальное уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0,$$

называемое уравнением Лежандра, имеет большое значение в физических задачах; его решения известны как функции Лежандра[1]. Уравнение имеет регулярные особенности в точках ± 1 и в бесконечности и определяется схемой

$$y=P\left\{\begin{matrix}-1 & \infty & +1 & \\ 0 & n+1 & 0 & x \\ 0 & -n & 0 & \end{matrix}\right\}.$$

или эквивалентной схемой

$$y=P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & n+1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x \\ 0 & -n & 0 & \end{matrix}\right\}.$$

Наиболее удобным является решение, расположенное по убывающим степеням x и соответствующее особенности в бесконечности. Уравнение удовлетворяется двумя рядами

$$y_1=x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots,$$

$$y_2=x^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}x^{-n-3}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}x^{-n-5}+\ldots,$$

которые сходятся при $|x|>1$.

Пусть n будет целым числом (так как никаких дальнейших ограничений этим не вводится, будем рассматривать n, как положительное целое число)[2]. В этом случае решение y_1 будет полиномом степени n, а после умножения на

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

---

[1] Legendre, Mém., Acad. Sc., Paris, 10 (1785); см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XV.

[2] В общем случае, при n вещественном, достаточно рассматривать значения $n\geqq-\frac{1}{2}$.

будет обозначаться $P_n(x)$. Этот специальный выбор множителя должен быть сделан так, чтобы для всех значений n выражение $P_n(1)=1$. Определенные таким образом полиномы называются полиномами Лежандра; они играют основную роль в теории сферических функций.

Первые шесть полиномов Лежандра имеют вид

$$P_0(x)=1;\ P_1(x)=x;\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1);\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);\ P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

Можно доказать непосредственно, что если n — положительное целое число, то

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Этот результат известен как *формула Родрига.*

Рассмотрим теперь второй ряд y_2; поскольку этот ряд не заканчивается при $n>-1$, нет оснований ограничивать n целым числом. Это решение в виде ряда, при умножении на[1]

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

обозначается $Q_n(x)$. Сравнением ряда y_2 с гипергеометрическим рядом относительно x^{-2} легко доказать, что при $x>1$

$$Q_n(x)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}x^{-n-1}F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}n+1;\ n+\frac{3}{2};\ x^{-2}\right).$$

Определенная таким образом функция $Q_n(x)$ может быть принята в качестве второго стандартного решения уравнения Лежандра и известна как функция Лежандра второго рода.

---

[1] На основании формулы удвоения, для гамма-функции

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z)$$

этот множитель может быть выражен в виде

$$2^n\{\Gamma(n+1)\}^2/\Gamma(2n+2),$$

а при n положительном целом числе он приобретает значение

$$\frac{2^n\{n!\}^2}{(2n+1)!}.$$

Ряд y_1 не будет существенно отличаться от y_2, когда $2n$ равно -1 или любому положительному нечетному целому числу, поэтому он не подходит в качестве стандартного решения. Теперь из второй схемы, при помощи которой может быть определено уравнение Лежандра, непосредственно следует, что гипергеометрический ряд

$$F\left(n+1, -n; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x\right)$$

удовлетворяет уравнению Лежандра и принимает значение 1 при $x = 1$. Более того, он является полиномом при n целом, и поскольку при $n \geqslant 0$ только одно решение $P_n(x)$ является полиномом, отсюда следует, что

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x\right).$$

Это решение действительно для всех значений n и соответственно принимается в качестве стандартного. Так как гипергеометрическая функция была определена только как ряд, который сходится при $-1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x < 1$, отсюда следует, что если n не является целым числом, то разложение в виде ряда $P_n(x)$ имеет смысл только в интервале $-1 < x < 3$. Таким образом решения в виде рядов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ существуют в общем интервале $1 < x < 3$ [1].

7·241. Второе решение, когда n целое число. Поскольку показатели, относящиеся к особенностям $x = \pm 1$ равны, дополнительное решение к $y = P_n(x)$ должно содержать логарифмические члены. Пусть предполагаемым решением будет

$$y = uP_n(x) - v,$$

тогда

$$\{(1-x^2)u'' - 2xu'\} P_n(x) + 2(1-x^2)u'P_n'(x) - \\ - \{(1-x^2)v'' - 2xv' + n(n+1)v\} = 0,$$

и u будет таким, что

$$(1-x^2)u'' - 2xu' = 0$$

или

$$(1-x^2)u' = -1.$$

Число -1 в качестве постоянной интегрирования взято для того, чтобы облегчить последующее отождествление полученного решения, тогда

$$u = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1},$$

и v определяется уравнением

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + n(n+1)v = 2P_n'(x).$$

[1] Представление решений в форме определенных интегралов расширяет области их применимости.

Отсюда непосредственно можно показать, что

$$P'_n(x) - P'_{n-2}(x) = (2n-1)\,P_{n-1}(x),$$

следовательно

$$P'_n(x) = (2n-1)\,P_{n-1}(x) + (2n-5)\,P_{n-3}(x) + (2n-9)\,P_{n-5}(x) + \ldots;$$

последний член ряда равен $3P_1(x)$ или $P_0(x)$, в зависимости от того, является ли n четным или нечетным. Соответственно v может быть определено из уравнения

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\,v'\} + n(n+1)\,v = 2\sum_{r=1}^{N}(2n-4r+3)\,P_{n-2r+1}(x),$$

где N равно $\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n+1)$, в зависимости от того, является ли n четным или нечетным. Но частное решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\,w'\} + n(n+1)\,w = 2\,(2n-4r-3)\,P_{n-2r+1}(x)$$

имеет вид

$$w = \frac{2n-4r+3}{(2r-1)(n-r+1)}\,P_{n-2r+1}(x),$$

следовательно

$$v = \sum_{r=1}^{N}\frac{2n-4r+3}{(2r-1)(n-r+1)}\,P_{n-2r+1}(x).$$

Таким образом искомым решением будет

$$\frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{x+1}{x-1} - \left\{\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3\cdot(n-1)}P_{n-3}(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{2n-9}{5\cdot(n-2)}P_{n-5}(x) + \ldots\right\};$$

последний член равен

$$\frac{3}{(n-1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)}P_1(x) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}P_0(x),$$

соответственно тому, будет ли n четным или нечетным. Решение очевидно действительно для всех значений x при $|x| > 1$.

Обозначим полученное решение $S_n(x)$; тогда, поскольку $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — явные решения,

$$S_n(x) = AP_n(x) + BQ_n(x),$$

где A и B — постоянные. Для больших значений $|x|$

$$P_n(x) = O(x^n), \qquad Q_n(x) = O(x^{-n-1}),$$

и поскольку

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots,$$

$S_n(x)$ не больше $O(x^{n-1})$. Следовательно $A=0$, а $S_n(x)$ равна постоянной, умноженной на $Q_n(x)$, тогда

$$BQ_n(x)=S_n(x)$$
$$=\frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{x+1}{x-1}-R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — полином степени $n-1$.

Разделим обе части уравнения на $P_n(x)$ и продиференцируем относительно x, тогда

$$B\frac{d}{dx}\left\{\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right\}=\frac{-1}{x^2-1}-\frac{T_n(x)}{\{P_n(x)\}^2},$$

где $T_n(x)$ — полином степени $2n-2$ (максимум).

Поскольку

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2Q_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dQ_n(x)}{dx}+n(n+1)Q_n(x)=0,$$

то умножением этих уравнений соответственно на $Q_n(x)$ и на $P_n(x)$ и вычитанием одного из другого получим

$$(x^2-1)\left\{Q_n(x)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-P_n(x)\frac{d^2Q_n(x)}{dx}\right\}+$$
$$+2x\left\{Q_n(x)\frac{dP_n(x)}{dx}-P_n(x)\frac{dQ_n(x)}{dx}\right\}=0,$$

откуда, интегрируя, получим

$$(x^2-1)\left\{Q_n(x)\frac{dP_n(x)}{dx}-P_n(x)\frac{dQ_n(x)}{dx}\right\}=C,$$

где C — подлежащая определению постоянная. Теперь, так как общие члены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ соответственно равны

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n \quad \text{и} \quad \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{-n-1},$$

то мы найдем, что $C=1$. Следовательно

$$Q_n(x)\frac{dP_n(x)}{dx}-P_n(x)\frac{dQ_n(x)}{dx}=\frac{1}{x^2-1}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right\}=\frac{1}{(1-x^2)\{P_n(x)\}^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{B}{(1-x^2)\{P_n(x)\}^2}=\frac{1}{1-x^2}-\frac{T_n(x)}{\{P_n(x)\}^2}$$

или

$$B = \{P_n(x)\}^2 + (x^2 - 1)\, T_n(x).$$

Пусть $x = 1$, тогда, поскольку $P_n(1) = 1$, а $T_n(1)$ конечно, $B = 1$.

Следовательно

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - \sum_{r=1}^{N} \frac{2n - 4r + 3}{(2r-1)(n-r+1)} P_{n-2r+1}(x).$$

В частности

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}; \quad Q_1(x) = \frac{1}{2} x \log \frac{x+1}{x-1} - 1;$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2} P_2(x) \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2} x; \qquad =$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{2} P_3(x) \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}.$$

7·3. Точка в бесконечности как нерегулярная особая точка. Часто встречаются уравнения, решения которых нерегулярны в бесконечности; в качестве примера таких уравнений можно привести линейные уравнения с постоянными коэфициентами. Изучение поведения решений таких уравнений для численно больших значений x является поэтому достаточно важной задачей, которая может быть разрешена только при помощи теории функций комплексной переменной[1].

Однако можно дать довольно грубые указания относительно поведения решений, нерегулярных в бесконечности, применение которых, несмотря на их неточность, имеет некоторую ценность.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0,$$

где хотя бы одно из условий для регулярной особенности в бесконечности, именно

$$p(x) = O(x^{-1}), \quad q(x) = O(x^{-2})$$

при $x \to \infty$ нарушено. Предположим, что коэфициенты $p(x)$ и $q(x)$ могут быть разложены в ряд по убывающим степеням x

$$p(x) = p_0 x^{\alpha} + \ldots, \quad q(x) = q_0 x^{\beta} + \ldots$$

Тогда, поскольку точка в бесконечности нерегулярна, одно или оба неравенства

$$\alpha > -1, \quad \beta > -2$$

должны быть удовлетворены.

---

[1] См. гл. XVII — XIX.

Рассмотрим возможность удовлетворить уравнению при помощи функции, которая для больших значений x имеет вид

$$x^\sigma e^{P(x)} v(x),$$

где $P(x)$ — полином от x, а $v(x) = O(1)$ при $x \to \infty$. Пусть λx^ν будет общим членом $P(x)$, тогда, подставляя приведенное выше выражение в уравнение и вычитая преобладающую часть каждого члена, получим

$$\lambda^2\nu^2 x^{2\nu-2} + p_0 \lambda\nu x^{\nu+\alpha-1} + q_0 x^\beta = 0.$$

Следовательно ν дается уравнением

$$\nu = \alpha + 1 \quad \text{или} \quad 2\nu = \beta + 2,$$

в зависимости от того, какое из них дает большее значение ν. Так как 2ν — положительное целое число, то для упрощения предположим, что ν также положительное целое число.

Примем решение вида

$$y = e^{\lambda x^\nu + \mu x^{\nu-1} + \ldots + \omega x} x^\sigma v(x),$$

где

$$v(x) = 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

а постоянные $\lambda, \mu, \ldots, \omega, \sigma, a_1, a_2, \ldots$ определяются последовательно.

Когда решение этого типа существует, оно называется нормальным и имеет значение ν. К сожалению, если ряд $v(x)$ не заканчивается, он расходится в общем случае и решение поэтому неверно. Тем не менее можно показать, что хотя ряд и расходится, все же он является асимптотическим [1], и, следовательно, имеет значение для практических вычислений. Теперь при помощи метода последовательных приближений покажем практическое значение расходящихся рядов, причем приведем пример из теории функций Бесселя.

7·31. Асимптотическое разложение решений. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

где p и q — вещественны и ограничены на бесконечности. Разложим p и q в сходящийся ряд

$$p(x) = p_0 + p_1 x^{-1} + p_2 x^{-2} + \ldots,$$
$$q(x) = q_0 + q_1 x^{-1} + q_2 x^{-2} + \ldots$$

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. VIII.

При подстановке $y = e^{\lambda x} v$ уравнение преобразуется в

$$\frac{d^2v}{dx^2} + (2\lambda + p)\frac{dv}{dx} + (\lambda^2 + \lambda p + q)v = 0;$$

если λ — корень уравнения

$$\lambda^2 + \lambda p_0 + q_0 = 0,$$

то постоянный член коэфициента v обратится в нуль, а уравнение примет вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} + (\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 x^{-1} + \ldots)\frac{dv}{dx} + (\rho_1 x^{-1} + \rho_2 x^{-2} + \ldots)v = 0.$$

Пусть

$$v = x^{\beta} u,$$

тогда, если

$$\tilde{\omega}_0 \beta + \rho_1 = 0,$$

член, содержащий x^{-1} в коэфициенте v исчезает.

Главный член коэфициента $\frac{dv}{dx}$ равен $\tilde{\omega}_0$ и вещественен при λ вещественном. Предположим, что $\tilde{\omega}_0$ отрицательна[1], тогда при умножении независимой переменной на положительное число $(-\tilde{\omega}_0)^{-1}$ вместо $\tilde{\omega}_0$ получим -1.

Таким образом уравнение примет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left\{-1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right\}\frac{du}{dx} + \left\{\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right\}u = 0.$$

Найдем решение, принимающее значение η при $x = +\infty$. Положим $u_1 = \eta$ и определим последовательность функций (u_n) из соотношений

$$\frac{d^2u_2}{dx^2} - \frac{du_2}{dx} = -\left\{\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right\}\frac{du_1}{dx} - \left\{\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right\}u_1,$$

. . . .

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} - \frac{du_n}{dx} = -\left\{\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right\}\frac{du_{n-1}}{dx} - \left\{\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right\}u_{n-1}$$

. . . .

тогда[2]

$$u_n = \eta + \int_x^{\infty}(e^{x-t} - 1)\left\{\frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \ldots\right\}\frac{du_{n-1}(t)}{dt}\,dt +$$

---

[1] Разберите случаи, когда $\tilde{\omega}_0$ положительный коэфициент, а λ мнимый. Пример последнего дан в следующем параграфе.

[2] Решение

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} = -f(x),$$

которое приводится к η при $x = +\infty$, имеет вид

$$u = \eta + \int_x^{\infty}(e^{x-t} - 1)f(t)\,dt,$$

при условии существования интеграла.

$$+\int_x^\infty (e^{x-t}-1)\left\{\frac{b_2}{t^2}+\frac{b_3}{t^3}+\ldots\right\} u_{n-1}(t)\,dt$$

$$=\eta+\int_x^\infty e^{x-t}\left\{\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t^2}+\ldots\right\} u_{n-1}(t)\,dt+$$

$$+\int_x^\infty \left\{\frac{\beta_2}{t^2}+\frac{\beta_3}{t^3}+\ldots\right\} u_{n-1}(t)\,dt,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_2, \beta_3, \ldots$ могут быть выражены через $a_1, a_2, \ldots, b_2, b_3, \ldots$.

Отсюда следует, что

$$u_n-u_{n-1}=\int_x^\infty e^{x-t}\left\{\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t^2}+\ldots\right\}\left\{u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)\right\}dt+$$

$$+\int_x^\infty \left\{\frac{\beta_2}{t^2}+\frac{\beta_3}{t^3}+\ldots\right\}\left\{u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)\right\}dt.$$

Предположим, что $|u_{n-1}-u_{n-2}|$ ограничен для $x>a$, и его верхняя граница равна M_{n-1}, тогда $|u_n-u_{n-1}|$ будет ограничена в том же интервале, а его верхняя граница M_n удовлетворит неравенству

$$M_n<\frac{K}{x}M_{n-1},$$

где K — постоянная, независимая от n. M_2 ограничено для достаточно больших значений x, следовательно неравенство верно для всех значений n. Сравнивая, получим, что ряд

$$u=u_1+(u_2-u_1)+\ldots+(u_n-u_{n-1})+\ldots$$

сходится для достаточно больших значений x. Более того, его сумма является решением диференциального уравнения относительно u.

Теперь

$$u_2-u_1=\int_x^\infty e^{x-t}\left\{\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t^2}+\ldots\right\}\eta\,dt+\int_x^\infty\left\{\frac{\beta_2}{t^2}+\frac{\beta_3}{t^3}+\ldots\right\}\eta\,dt$$

$$=\frac{A_1^1}{x}+\frac{A_2^1}{x^2}+\ldots+\frac{A_{m-1}^1}{x^{m-1}}+\frac{A_m^1+\varepsilon_1}{x^m},$$

где $\varepsilon_1\to 0$ при $x\to\infty$.

Аналогично

$$u_3-u_2=\frac{A_2^2}{x^2}+\ldots+\frac{A_{m-1}^2}{x^{m-1}}+\frac{A_m^2+\varepsilon_2}{x^m},$$

и, наконец, если $m > n$,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{A_{n-1}^{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}^{n-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m^{n-1} + \varepsilon_{n-1}}{x^m},$$

где $\varepsilon_{n-1} \to 0$ при $x \to \infty$.

Следовательно

$$u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) =$$

$$= \eta + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{C_m + \varepsilon}{x^m},$$

где $\varepsilon \to 0$ при $x \to \infty$. С другой стороны

$$|(u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + \ldots|$$

$$< M_n\left(\frac{K}{x} + \frac{K^2}{x^2} + \ldots\right) < \frac{H}{x^n},$$

где H — постоянная для достаточно больших значений x

Отсюда следует, что

$$u = \eta + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{C_n + \gamma_n}{x^n},$$

где $\gamma_n \to 0$ при $x \to \infty$.

Следовательно данное диференциальное уравнение допускает решение вида

$$y = e^{\lambda x} x^{\sigma}\left\{\eta + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{C_n + \gamma_n}{x^n}\right\}.$$

Ряд $\Sigma C_r x^{-r}$ может быть конечным; в этом случае представление точно. Но если ряд не конечный, то он обычно расходится [1]. При m фиксированном и S_m, обозначающем сумму ряда

$$e^{\lambda x} x^{\sigma}\left\{\eta + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_m}{x^m}\right\},$$

если ε произвольно мало, то

$$|x^m (y - S_m)| < \varepsilon$$

для достаточно больших значений $|x|$. Следовательно ряд дает асимптотическое представление решения, а знак равенства заменяется знаком асимптотической эквивалентности

$$y \sim e^{\lambda x} x^{\sigma}\left\{\eta + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots\right\}.$$

[1] Это может быть доказано рассмотрением уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \frac{\beta}{x^2} y = 0.$$

7·32. Уравнение Бесселя. Если n не целое число, то уравнение Бесселя[1]

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

удовлетворяется двумя независимыми решениями

$$y_1 = J_n(x), \quad y_2 = J_{-n}(x),$$

где

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 1!\cdot(n+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot 2!\cdot(n+2)} - \ldots\right\}.$$

Если n целое число, то эти два решения перестают быть независимыми. Второе решение, когда n целое число, логарифмического типа[2].

Рассмотрим решения, соответствующие нерегулярной особенности в бесконечности[3]. Подстановкой

$$y = x^{-\frac{1}{2}}u$$

исключим из уравнения второй член, после чего оно примет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left\{1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}\right\}u = 0.$$

Для больших значений $|x|$ это уравнение переходит в $u'' + u = 0$, что предполагает подстановку[4]

$$u = e^{ix}v.$$

Уравнение теперь принимает вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 2i\frac{dv}{dx} + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}v = 0;$$

формально оно удовлетворяется рядом по убывающим степеням x, именно

$$1 - \frac{\frac{1}{4} - n^2}{2x}i - \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)}{2^2\cdot 2!\cdot x^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)\left(\frac{25}{4} - n^2\right)}{2^3\cdot 3!\cdot x^3}i +$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)\left(\frac{25}{4} - n^2\right)\left(\frac{49}{4} - n^2\right)}{2^4\cdot 4!\cdot x^4} - \ldots.$$

Этот ряд расходится для всех значений x, но он асимптотического типа. Так, если $|x|$ велик, то первые члены быстро уменьшаются с увеличением степени и, как будет показано ниже, можно получить важный метод для вычисления $J_n(x)$ при x большом.

---

[1] Bessel, Abh. Acad. Wiss. Berlin, 1824, 34. Исторический обзор и связанные уравнения см. Watson, Bessel, Functions, I.

[2] Это решение будет полностью приведено ниже (§ 16-32).

[3] Подробно см. Watson Bessel Functions, VII.

[4] Другой метод решения при $n = 0$, см. Stokes, Trans. Camb. Phil. Soc., 9 (1850), 182; [Math. and. Phys. Papers, 2, 350].

Комбинируя полученный ряд с рядом, полученным подстановкой $-i$ вместо i, получим два асимптотических соотношения

$$y_1 \sim x^{-\frac{1}{2}}(U \cos x + V \sin x),$$

$$y_2 \sim x^{-\frac{1}{2}}(U \sin x - V \cos x),$$

где U и V — соответственно четный и нечетный ряды

$$1 - \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)}{2^2 \cdot 2! \cdot x^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)\left(\frac{25}{4} - n^2\right)\left(\frac{49}{4} - n^2\right)}{2^4 \cdot 4! \cdot x^4} - \ldots$$

и

$$\frac{\frac{1}{4} - n^2}{2x} - \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)\left(\frac{25}{4} - n^2\right)}{2^3 \cdot 3! \cdot x^3} + \ldots$$

Связь между функцией $J_0(x)$ и соответствующим асимптотическим рядом может быть выведена из соотношения[1]

$$\pi J_0(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos\theta)\, d\theta.$$

Пусть

$$J_0(x) = Ay_1 + By_2,$$

тогда при $x \to \infty$

$$\lim x^{\frac{1}{2}} J_0(x) = A \cos x + B \sin x,$$

$$\lim x^{\frac{1}{2}} J_0'(x) = -A \sin x + B \cos x.$$

Таким образом

$$A = \lim x^{\frac{1}{2}} \{ J_0(x) \cos x - J_0'(x) \sin x \}$$

$$= \lim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \{ \cos x \cos(x \cos\theta) + \sin x \cos\theta \sin(x \cos\theta) \}\, d\theta$$

$$= \lim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(2x \sin^2 \frac{1}{2}\theta\right) \cos^2 \frac{1}{2}\theta\, d\theta +$$

$$+ \lim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(2x \cos^2 \frac{1}{2}\theta\right) \sin^2 \frac{1}{2}\theta\, d\theta.$$

Пусть

$$\sqrt{2x} \sin \frac{1}{2}\theta = \varphi,$$

---

[1] Эквивалентное соотношение будет установлено в следующей главе (§ 8·22).

тогда

$$\lim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(2x\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)\cos^2\frac{1}{2}\theta\, d\theta =$$

$$= \lim \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\sqrt{2x}} \left(1-\frac{\varphi^2}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}.$$

Второй интеграл имеет тот же предел, следовательно

$$A = \pi^{-\frac{1}{2}}.$$

Аналогично $B = \pi^{-\frac{1}{2}}$, откуда

$$J_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left(1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^6\cdot 2!\cdot x^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^{12}\cdot 4!\cdot x^4} - \ldots\right)\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1^2}{2^3\cdot x^3} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^9\cdot 3!\cdot x^3} + \ldots\right)\sin\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}.$$

7·321. Применение асимптотического ряда для числовых вычислений. Значение асимптотического ряда может быть проиллюстрировано вычислением частных значений $J_0(x)$. Если для вычисления $J_0(2)$ применять ряд по возрастающим степеням

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^6} - \frac{x^6}{2^8\cdot 3^2} + \frac{x^8}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 4^2} - \frac{x^{10}}{2^{12}\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2} + \ldots,$$

а последним взять член с x^{16}, то

$$J_0(2) = 0{,}22389077914$$

с точностью до одиннадцатого знака. Но если $x=6$, а члены взяты до x^{20} включительно, то

$$J_0(6) = 0{,}15067$$

с точностью только до четвертого знака; последний член имеет значение 0,00026, что влияет на четвертый знак. Таким образом даже для относительно небольших значений x ряд по возрастающим степеням непригоден для практических вычислений.

Рассмотрим теперь асимптотическое представление $J_0(6)$

$$J_0(6) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\{(\sin 6 + \cos 6)\,U + (\sin 6 - \cos 6)\,V\},$$

где

$$U = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^6 \cdot 2! \cdot 6^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^{12} \cdot 4! \cdot 6^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2}{2^{18} \cdot 6! \cdot 6^6} + \ldots$$

$$= 1 - 0{,}00195 + 0{,}00009 - 0{,}00001 + \ldots$$

$$= 0{,}99812,$$

а

$$V = \frac{1^2}{2^3 \cdot 6} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^9 \cdot 3! \cdot 6^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{2^{15} \cdot 5! \cdot 6^5} - \ldots$$

$$= 0{,}02083 - 0{,}00034 + 0{,}00003$$

$$= 0{,}02052.$$

Поскольку $2\pi - 6 = 0{,}28318$, по таблицам Барроу найдем:

$$\sin 6 = 0{,}27941,\ \cos 6 = 0{,}96017, \text{ следовательно}$$

$$J_0(6) = 0{,}23033\ (0{,}67948 - 0{,}02544)$$

$$= 0{,}15064,$$

с точностью до пятого знака. Таким образом при помощи асимптотического ряда более правильный результат получится значительно быстрее, чем при применении сходящегося ряда по возрастающим степеням.

7·322. Большие корни функций Бесселя. Можно доказать, как в § 7·32, что

$$J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{U_n \cos\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + V_n \sin\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right\},$$

где

$$U_n = 1 - \frac{\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\left(\frac{9}{4} - n^2\right)}{8x^2} + \ldots,$$

$$V_n = \frac{\frac{1}{4} - n^2}{2x} - \ldots$$

Следовательно ξ — корень $J_n(x)$, где ξ определяется соотношением

$$\operatorname{ctg}\left(\xi - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sim \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2\xi} - \ldots$$

Если корень ξ имеет большое абсолютное значение, а n не очень велико, то ξ приближенно определяется уравнением

$$\operatorname{ctg}\left(\xi - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$$

или

$$\xi = \left(\frac{1}{2} n \pm m - \frac{1}{4}\right)\pi,$$

где m велико[1].

Отсюда непосредственно следует, что большие корни последовательных функций Бесселя отделены друг от друга[2], т. е. между двумя большими корнями $J_n(x)$ лежит только один корень $J_{n+1}(x)$.

7·323. Дальнейшее рассмотрение применения асимптотических рядов. Диференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$$

формально удовлетворяется рядом:

$$\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \ldots,$$

который очевидно расходится для всех значений x.

Уравнению удовлетворяет частный интеграл

$$y = e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{x} x^{-1} e^x\, dx,$$

который сходится при x отрицательном.

Повторным интегрированием по частям найдем

$$e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{x} x^{-1} e^x\, dx = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{n!}{x^{n+1}} + R_n,$$

где

$$R_n = (n+1)!\, e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{x} x^{-n-2} e^x\, dx$$

Тепер при $x < 0$

$$|R_n| < (n+1)!\, e^{-x}\, |x^{-n-2}| \int\limits_{-\infty}^{x} e^x dx = \left|\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right|.$$

Следовательно ошибка, заключающаяся в том, что рассматриваются первые n членов ряда, численно меньше члена $(n+1)$. Поэтому ряд является асимптотическим и может быть использован для вычисления интеграла.

Функция, определяемая интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\, dx,$$

---

[1] Метод введен Стоксом [Stokes, Trans. Camb. Phil. Soc. 9 (1850), 184]; [Math. and Phys. Papers, 2, 352]. Полную разработку метода см. Watson, Bessel Functions § 15·53.

[2] Эта теорема верна для всех корней. Общая проблема распределения корней решения диференциального уравнения второго порядка будет рассмотрена в главе X.

называется экспоненциал-интегральной функцией и обозначается $Ei(x)$.

7·4. Уравнения с периодическими коэфициентами; уравнение Матье. Если коэфициенты диференциального уравнения однозначны, непрерывны и периодические, например, с периодом π, то общее решение не обязательно должно также иметь период π. Уравнение может не допускать (и обычно не допускает) такого периодического решения.

Так, уравнение

$$\frac{dy}{dx} + (a + b\cos 2x)\,y = 0$$

не имеет периодического решения, если только a не равно нулю, и хотя уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

всегда имеет периодическое общее решение, период не равен π, если только n не четное целое число.

Общий случай мы рассмотрим несколько ниже (см. гл. XV); здесь мы разберем частное уравнение, имеющее ряд важных практических приложений, именно, уравнение Матье[1]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a - 2\theta\cos 2x)\,y = 0.$$

Это уравнение не имеет конечных особых точек, следовательно его решения действительны для всех конечных значений x. Более того, если $G(x)$ — решение, не четное и не нечетное, то $G(-x)$ будет независимым решением

$$\frac{1}{2}\{G(x) + G(-x)\}$$

— четным решением, не равным тождественно нулю, а

$$\frac{1}{2}\{G(x) - G(-x)\}$$

— нечетным решением, не равным тождественно нулю. Таким образом достаточно рассмотреть только четные или нечетные решения. Теперь, если бы уравнение имело два независимых четных решения, то не существовало бы решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(0) = 0,\ y_0'(0) = 1,$$

а это противоречит условию, что начало является обыкновенной точкой. Таким образом два независимых четных решения и аналогично два независимых нечетных решения не могут су-

[1] Mathieu, J. de Math. (2), 13 (1868), 146; Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XIX; Humbert, Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu.

ществовать. Следовательно одно фундаментальное решение должно быть четным, а другое нечетным.

Допустим, что четное периодическое решение с периодом 2π существует и допускает разложение[1]

$$C_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x.$$

Подставляя этот ряд в уравнение и сравнивая коэфициенты аналогичных членов, получим последовательность рекуррентных соотношений, связывающих коэфициенты c_r, именно

$$(a-1-\theta)c_0 - \theta c_1 = 0,$$
$$\{(2r+1)^2 - a\}c_r + \theta(c_{r+1} + c_{r-1}) = 0 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эти уравнения должны быть совместными; условием их совместности будет

$$\Delta(a,\theta) \equiv \begin{vmatrix} a-1-\theta, & -\theta & 0, & 0, & \ldots \\ -\theta & a-9 & -\theta, & 0, & \ldots \\ 0, & -\theta & a-25, & -\theta, & \ldots \\ 0, & 0, & -\theta, & a-49, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом для того, чтобы периодическое решение рассмотренного типа существовало, постоянная a должна иметь одно из значений, определяемых определяющим уравнением[2]

$$\Delta(a,\theta) = 0.$$

Эти значения называются *характеристическими*; когда a определенно, коэфициенты c_r могут быть получены из рекуррентных соотношений, и определяются единственным образом, независимо от постоянного множителя.

Пусть a_n будет корнем определяющего уравнения, которое приводится к n^2 при $\theta = 0$. Можно доказать, что

$$a_1 = 1 + \theta + O(\theta^2),$$
$$a_3 = 9 + \frac{\theta^2}{16} + O(\theta^3),$$
$$a_n = n^2 + \frac{\theta^2}{2(n^2-1)} + O(\theta^4), \qquad (n = 5, 7, 9, \ldots).$$

[1] Диференциальное уравнение не имеет конечных особых точек, поэтому (§§ 3·32, 12·22) его решение не имеет конечной особенности, а разложение сходится для всех значений x. См. также Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 9·11.

[2] В данном случае детерминант не сходится; однако умножением каждого ряда на соответствующий множитель его можно сделать абсолютно сходящимся, см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 2·81.

Можно также доказать, что если $a = a_{2n+1}$ и $c_n = 1$, то

$$c_{n-1} = \frac{\theta}{8n} + O(\theta^2), \quad c_{n-2} = \frac{\theta^2}{64n(2n-1)} + O(\theta^3),$$

$$c_{n-r} = \frac{(2n-r)!\,\theta^r}{2^{2r}\,r!\,(2n)!} + O(\theta^{r+1}),$$

$$c_{n+1} = -\frac{\theta}{8(n+1)} + O(\theta^2), \quad c_{n+2} = \frac{\theta^2}{64(n+1)(2n+3)} + O(\theta^3),$$

$$c_{n+r} = (-1)^r \frac{(2n+1)!\,\theta^r}{2^{2r}\,r!\,(2n+r+1)!} + O(\theta^{r+1});$$

это, по крайней мере для малых значений $|\theta|$, подтверждает сходимость ряда.

Аналогично, решение типа

$$S_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c'_r \sin(2r+1)x$$

существует, где a — корень уравнения

$$\Delta(a, -\theta) = 0.$$

Рекуррентные соотношения, из которых определяются коэфициенты c'_r, будут

$$(a - 1 + \theta)\,c'_0 - \theta c'_1 = 0,$$

$$\{(2r+1)^2 - a\}\,c'_r + \theta\,(c'_{r+1} + c'_{r-1}) = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Для соответствующих значений a существуют также решения периода π вида

$$C_e(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos 2rx,$$

$$S_e(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c'_r \sin 2rx.$$

Рекуррентные соотношения в этих случаях равны соответственно

$$ac_0 - \theta c_1 = 0,$$

$$(4r^2 - a)\,c_r + \theta\,(c_{r+1} + c_{r-1}) = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(a - 4)\,c'_1 - \theta c'_2 = 0,$$

$$(4r^2 - a)\,c'_r + \theta\,(c'_{r+1} + c'_{r-1}) = 0, \quad (r = 2, 3, 4, \ldots).$$

Таким образом имеется четыре различных типа решений уравнения Матье с периодом π и 2π; эти решения, умноженные на соответствующие множители, известны как *функции Матье*. Функция Матье, которая приводится к $\cos mx$ при $\theta = 0$ и в которой коэфициент при $\cos mx$ равен единице, обозначается $ce_m(x)$. Аналогично, функция, которая приводится к $\sin mx$ при $\theta=0$ и в которой коэфициент при $\sin mx$ равен единице, обозначается $se_m(x)$. Так

$$ce_{2n+1}(x) \text{ типа } C_0(x),$$

$$ce_{2n}(x) \text{ типа } C_e(x),$$

$$se_{2n+1}(x) \text{ типа } S_0(x),$$

$$se_{2n}(x) \text{ типа } S_e(x).$$

7·41. Несуществование одновременных периодических решений. Пусть a будет таким, при котором уравнение Матье имеет периодические решения типа $C_0(x)$. Тогда возникает вопрос, возможно ли при каких-либо условиях, чтобы второе решение, а следовательно и общее решение, было периодическим. Если y_1 и y_2 — независимые решения уравнения

$$y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}-y_2\frac{d^2y_1}{ax^2}=0$$

и следовательно

$$y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}=\text{const},$$

то отсюда следует, что если y_1 типа $C_0(x)$, то y_2 типа $S_0(x)$, а не $S_e(x)$. Если уравнение допускает и решение $C_0(x)$ и решение $S_0(x)$, то уравнения

$$(a-1-\theta)\,c_0-\theta c_1=0,$$

$$(a-1+\theta)\,c_0'-\theta c_0'=0,$$

$$\{(2r+1)^2-a\}\,c_r+\theta\,(c_{r+1}+c_{r-1})=0,$$

$$\{(2r+1)^2-a\}\,c_r'+\theta\,(c_{r+1}'+c_{r-1}')=0$$

($r=1,2,3,\ldots$) должны быть совместно удовлетворены. Покажем, что это невозможно.

Исключив a из первых двух уравнений, найдем

$$c_0c_1'-c_0'c_1=2c_0c_0'$$

или

$$\begin{vmatrix} c_0, & c_1 \\ c_0', & c_1' \end{vmatrix}=2c_0c_0'.$$

Последние два уравнения дают

$$c_r(c_{r+1}'+c_{r-1}')=c_r'(c_{r+1}+c_{r-1})$$

или

$$\begin{vmatrix} c_r, & c_{r+1} \\ c_r', & c_{r+1}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{r-1}, & c_r \\ c_{r-1}', & c_r' \end{vmatrix},$$

откуда для всех значений r

$$\begin{vmatrix} c_r, & c_{r+1} \\ c'_r, & c'_{r+1} \end{vmatrix} = 2c_0c'_0 .$$

Но если c_0 равно нулю, а θ не равно нулю, то остальные коэфициенты c_n будут равны нулю, и решение будет тождественно равно нулю. Поэтому c_0 и c'_0 не равны нулю. Но для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы

$$c_r \to 0 \text{ при } r \to \infty,$$

что приводит к противоречию. Таким образом, за исключением случая, когда $\theta = 0$, решения типа $C_o(x)$ и $S_o(x)$ не могут существовать одновременно. То же можно отнести и к решениям типа $C_e(x)$ и $S_e(x)$.

7·42. Природа второго решения. Таким образом мы доказали, что если одно решение y_1 имеет период π или 2π, то второе решение y_2 будет определенно непериодическим. Сейчас мы определим общий характер этого второго решения. Так как

$$y_1y'_2 - y_2y'_1 = C,$$

где C — постоянная, то

$$y_2 = Cy_1 \int \frac{dx}{y_1^2} .$$

Теперь пусть

$$y_1 = C_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x,$$

тогда

$$y_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} e_r \cos 2rx,$$

и поскольку y_1 не равна нулю при $x = 0$,

$$y_1^{-2} = \sum_{r=0}^{\infty} g_r \cos 2rx.$$

Последний ряд сходится по крайней мере для достаточно малых значений x.

Следовательно

$$y_2 = C\left\{\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x\right\}\left\{g_0x + \sum_{r=1}^{\infty} h_r \sin 2rx\right\},$$

где, поскольку известно, что функция y_2 не периодическая, g_0 не равна нулю, и следовательно при соответствующем выборе C

$$y_2 = xC_0(x) + S'_0(x),$$

где $S'_0(x)$ — ряд того же типа, что и $S_0(x)$.

Таким образом $y_2(x)$ является не периодическим, но квазипериодическим и

$$y_2(x+2\pi) = y_2(x) + 2\pi y_1(x).$$

Природа второго решения, когда первое решение типа $S_0(x)$, $C_e(x)$, $S_e(x)$, может быть исследована аналогично[1].

7·5. Связь между диференциальными уравнениями и непрерывными дробями. Частный метод решения диференциальных уравнений, который мы сейчас рассмотрим, имеет преимущество: он прямой и не такой искусственный, как метод решения в виде рядов. Однако он ограничен, так как применим только к линейным уравнениям второго порядка[2].

Не теряя в общности, можно принять, что рассматриваемое уравнение имеет вид

$$y = Q_0 y' + P_1 y'',$$

где Q_0 и P_1 — функции от x. После диференцирования уравнение примет вид

$$y' = Q_1 y'' + P_2 y''',$$

где

$$Q_1 = \frac{Q_0 + P_1'}{1 - Q_0'}, \quad P_2 = \frac{P_1}{1 - Q_0'}.$$

Этот процесс повторяется неограниченно, причем получается последовательность соотношений

$$y^{(n)} = Q_n y^{(n+1)} + P_{n+1} y^{(n+2)},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$, и

$$Q_n = \frac{Q_{n-1} + P_n'}{1 - Q_{n-1}'}, \quad P_{n+1} = \frac{P_n}{1 - Q_{n-1}'}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\frac{y}{y'} &= Q_0 + P_1 / \frac{y'}{y''} \\ &= Q_0 + \cfrac{P_1}{Q_1 + P_2 / \frac{y''}{y'''}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= Q_0 + \frac{P_1}{Q_1 +} \, \frac{P_2}{Q_2 +} \cdots + \frac{P_n}{Q_n + R_n},\end{aligned}$$

где

$$R_n = P_{n+1} / \frac{y^{(n+1)}}{y^{(n+2)}}.$$

---

[1] Общее решение, когда a не характеристическое число, может быть показано в различных формах; см., например, Whittaker, Proc. Edin. Math. Soc., 32 (1914), 75.

[2] Этот метод был впервые применен Эйлером для решения диференциального уравнения Риккати.

Здесь нужно рассмотреть непрерывную дробь[1]

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{Q_0}+\frac{P_1}{Q_1}+\frac{P_2}{Q_2}+\cdots+\frac{P_n}{Q_n}+\cdots;$$

если эта дробь конечна, то она будет логарифмической производной решения уравнения; если она не конечна, то возникает вопрос о ее сходимости. Этот вопрос разрешается следующей основной в теории непрерывных дробей теоремой[2]. *Непрерывная дробь* (A) *сходится и имеет значение* y'/y, если $y \neq 0$ и (I) $P_n \to P$, $Q_n \to Q$ при $n \to \infty$, (II) корни ρ_1 и ρ_2 *уравнения* $\rho^2 = Q\rho + P$ *имеют неравные модули* и (III), *если* $|\rho_2| < |\rho_1|$, то

$$\lim |y^{(n)}|^{\frac{1}{n}} < |\rho_2|^{-1}$$

при условии, что $|\rho_2| \neq 0$.

При $|\rho_2| = 0$ последнее условие заменяется условием конечности предела.

7·501. Пример конечной непрерывной дроби. В случае уравнения

$$y = \frac{x}{m}y' + \frac{1}{m}y'',$$

где m — положительное целое число, производные уравнения будут

$$y^{(n)} = \frac{x}{m-n}y^{(n+1)} + \frac{1}{m-n}y^{(n+2)} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots m-1),$$

$$0 = xy^{(m+1)} + y^{(m+2)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{x} + \frac{m-1}{x} + \frac{m-2}{x} + \cdots + \frac{1}{x}.$$

Поскольку эта непрерывная дробь конечна, она может быть точно вычислена последовательным нахождением подходящих дробей[3], и мы найдем, что

$$\frac{y'}{y} = \frac{mx^{m-1} + (m-2)a_1x^{m-3} + (m-4)a_2x^{m-5} + \ldots}{x^m + a_1x^{m-2} + a_2x^{m-4} + \ldots},$$

где

$$a_r = \frac{n!}{2^r r!(n-2r)!}.$$

Следовательно можно непосредственно доказать, что уравнение имеет решение в виде полинома

$$y = x^m + a_1x^{m-2} + a_2x^{m-4} + \ldots$$

---

[1] Аналогичная непрерывная дробь может быть получена не диференцированием, а интегрированием.

[2] Доказательство этой теоремы см. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, § 5'.

[3] Chrystal, Algebra, II, XXXIV.

7·51. Функция ${}_1F_1(\alpha;\ \gamma;\ x)$ и присоединенная непрерывная дробь. Функция [1]

$$ {}_1F_1(\alpha;\ \gamma;\ x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!\,(\gamma)_r} x^r, $$

где

$$ (\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1) $$

является решением уравнения

$$ \alpha y = (\gamma - x) y' + x y'', $$

когда γ не целое число; независимым вторым решением будет

$$ x^{1-\gamma}{}_1F_1(\alpha-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ x). $$

Ряд заканчивается, когда α равна нулю или отрицательному целому числу; этот случай не представляет ничего нового и мы не будем его рассматривать. Если ряд умножить на $1/\Gamma(\gamma)$, то его коэфициенты будут всегда конечны, а функция обратится в нуль, только если $\gamma-\alpha$ и α будут равны нулю или отрицательному целому числу.

Пусть

$$ Y = \frac{{}_1F_1(\alpha;\ \gamma;\ x)}{\Gamma(\gamma)}, $$

тогда

$$ Y^{(n)} = \frac{\gamma - x + n}{\alpha + n} Y^{(n+1)} + \frac{x}{\alpha+n} Y^{(n+2)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). $$

Все производные $Y^{(n)}$ не могут обратиться в нуль, так как если бы $Y^{(m+1)}$ и $Y^{(m+2)}$ должны были обратиться в нуль при $x = x_0$, то из приведенного соотношения следовало бы, что $Y^{(m)}$, $Y^{(m-1)}$ и, наконец, само Y превратилось бы в нуль при $x = x_0$. Таким образом Y обратилось бы в нуль тождественно, что, за исключением специальных случаев, неверно.

Можно показать непосредственно, что

$$ Y'(\alpha;\ \gamma;\ x) = \alpha Y(\alpha+1;\ \gamma+1;\ x), $$

---

[1] Эта функция была впервые рассмотрена Куммером [Kummer, J. für Math., 15 (1836), 139]; обозначения введены Барнсом [Barnes, Trans. Camb. Phil. Soc., 20 (1906), 253]. Конфлюэнтные гипергеометрические функции родственны им; в обозначениях Уиттекера

$$ M_{k,\,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+m-k;\ 2m+1;\ x\right); $$

см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XVI. Функции Бесселя являются частными случаями, действительно

$$ J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n e^{-ix}}{\Gamma(n+1)} \cdot {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};\ 2n+1;\ 2ix\right). $$

и в общем случае

$$Y^{(n)}(\alpha;\gamma;x)=(\alpha)_n Y(\alpha+n;\gamma+n;x)$$

$$=\frac{(\alpha)_n}{\Gamma(\gamma+n)}\left\{1+\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{(\gamma+n)(\gamma+n+1)}\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots\right\}.$$

Пусть m будет положительным целым числом

$$m>|\alpha|,\quad m>2|\gamma|,$$

тогда, если $n\geqslant m$, то

$$\left|\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\right|\leqslant\frac{n+|\alpha|}{n-|\gamma|}$$

$$\frac{n+m}{n-\frac{1}{2}m}<\frac{2n}{\frac{1}{2}n}=4$$

и, а fortiori, если $r\geqslant 1$, то

$$\left|\frac{\alpha+n+r}{\gamma+n+r}\right|<4.$$

Следовательно при $n\geqslant m$

$$|Y^{(n)}|=\left|\frac{(\alpha_m)}{\Gamma(\gamma+m)}\right|\cdot\left|\frac{(\alpha+m)\ldots(\alpha+n-1)}{(\gamma+m)\ldots(\gamma+n-1)}\right|\cdot\left|1+\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\cdot\frac{x}{1!}+\ldots\right|$$

$$<\left|\frac{(\alpha)_m}{\Gamma(\gamma+m)}\right|\cdot 4^{n-m}\left(1+\frac{|4x|}{1!}+\frac{|4x|^2}{2!}+\ldots\right)$$

$$=\left|\frac{(\alpha)_m}{\Gamma(\gamma+m)}\right|4^{n-m}e^{4|x|},$$

поэтому $|Y^{(n)}|^{1/n}$ конечно. Но уравнение для ρ имеет вид

$$\rho^2=\rho,$$

и $\rho_2=0$. Отсюда следует, что непрерывная дробь[1]

$$\frac{1}{\frac{\gamma-x}{\alpha}}+\frac{\frac{x}{\alpha}}{\frac{\gamma-x+1}{\alpha+1}}+\frac{\frac{x}{\alpha+1}}{\frac{\gamma-x+2}{\alpha+2}}+\ldots$$

или

$$\frac{\alpha}{\gamma-x}+\frac{(\alpha+1)x}{\gamma-x+1}+\frac{(\alpha+2)x}{\gamma-x+2}+\cdots$$

сходится и равна

$$\frac{d}{dx}\{\log{}_1F_1(\alpha;\gamma;x)\}$$

для всех значений x, для которых последняя функция конечна.

[1] Perron, Rend. Circ. Mat. Palermo, 29 (1910), 124.

Гипергеометрическое уравнение может рассматриваться примерно аналогично, но полученные результаты будут далеко не такими простыми, как в приведенном выше случае. Для действительных значений x непрерывная дробь

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)}{\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x}+\cdots+$$
$$+\frac{(\alpha+r)(\beta+r)\,x(1-x)}{\gamma+r-(\alpha+\beta+2r+1)x}+\cdots$$

сходится к значению $\frac{d}{dx}\log F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x)$ при $x<\frac{1}{2}$ и к значению $\frac{d}{dx}\log F(\alpha,\ \beta;\ \alpha+\beta-\gamma+1;\ 1-x)$ при $x>\frac{1}{2}$ [1].

7·511. Непрерывные дроби и функции Лежандра. Можно доказать, что если y_n — функция Лежандра $Q_n(x)$ порядка n, то [2]

$$y_1-xy_0+1=0,$$
$$(n+2)y_{n+2}-(2n+3)xy_{n+1}+(n+1)y_n=0 \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$

Эти рекуррентные соотношения приводят к бесконечной непрерывной дроби

$$y_0=\frac{1}{x}-\frac{1^2}{3x}-\frac{2^2}{5x}-\frac{3^2}{7x}-\cdots,$$

сходимость и значение которой мы сейчас исследуем.

Поскольку при $n\to\infty$

$$\frac{2n+3}{n+1}x\to 2x,\qquad \frac{n+2}{n+1}\to 1$$

уравнение относительно ρ будет иметь вид

$$\rho^2=2x\rho-1$$

и

$$\rho_2=x-\sqrt{x^2-1}.$$

Непрерывная дробь следовательно сходится и будет иметь значение y_0 при

$$\lim\left|y_n\right|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right|=\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

Поскольку

$$Q_n(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{-n-1}+O(x^{-n-3}),$$

$$\lim\left|Q_{n+1}(x)\right|=\frac{1}{2x},$$

[1] Jnce, Proc. London Math. Soc. (2), 18 (1919), 236.

[2] Эти рекуррентные соотношения удовлетворяются также $y_n=P_n(x)$, за исключением первого, которое очевидно не удовлетворяется.

следовательно[1]

$$\lim \left| Q_n(x) \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2|x|}.$$

Таким образом, когда

$$\left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| > \frac{1}{2|x|}$$

или когда $(x) > 1$, y_0 может быть отождествлено с $Q_0(x)$, и следовательно

$$Q_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{1^2}{3x} - \frac{2^2}{5x} - \frac{3^2}{7x} - \cdots$$

Теперь (§ 7·241), поскольку

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R_n(x) \\ &= P_n(x)\, Q_0(x) - R_n(x), \end{aligned}$$

где R_n — полином степени $n-1$,

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{P_n(x)} &= Q_0(x) - \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} \\ &= Q_0(x) + O(x^{-2n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что свернутыми выражениями непрерывной дроби для $Q_0(x)$ будут

$$\frac{R_1(x)}{P_1(x)},\ \frac{P_2(x)}{P_2(x)},\ \ldots,\ \frac{P_n'(x)}{P_n(x)},\ \ldots$$

Этот результат дает практический метод вычисления полиномов $R_n(x)$.

Примеры

1. Найдите ряд, удовлетворяющий диференциальному уравнению

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = my.$$

Докажите, что если $f(m)$ — решение этого уравнения, которое приводится к единице при $x = 0$, то для всех значений x

$$f(m_1)\, f(m_2) = f(m_1 + m_2).$$

2. Докажите, что функция

$$O_n(x) = \frac{2^{n-1}\, n!}{x^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2\cdot(2n-2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2n-2)\,(2n-4)} + \cdots \right\}$$

---

[1] Bromwich, Infinite Series (приложение I, стр. 421).

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{3}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left\{1-\frac{n^2-1}{x^2}\right\}y=\frac{1}{x},$$ когда n — четное положительное целое число,

$$=\frac{n}{x^2},$$ когда n — нечетное положительное целое число. [Edinburgh, 1912].

3. Найдите два независимых ряда по возрастающим степеням x, удовлетворяющих диференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0.$$

Докажите, что это уравнение удовлетворяется также асимптотическим разложением вида

$$e^{\mu}x^{-\frac{1}{4}}v,$$

где $\mu=\frac{2}{3}ix^{\frac{3}{2}}$, а v — ряд по убывающим степеням $x^{\frac{3}{2}}$. [Edinburgh, 1914].

4. Покажите, что гипергеометрическому уравнению удовлетворяют функции

$$\text{(I)}\quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x),$$

$$\text{(II)}\quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta;\ 2-\gamma;\ x).$$

Преобразуйте это уравнение, принимая последовательно в качестве новых независимых переменных

$$z=1-x,\quad z=1/x,\quad z=1/(1-x),\quad z=x/(x-1),\quad z=(x-1)/x,$$

и напишите четыре решения для каждого из полученных уравнений. Покажите, что совокупность двадцати четырех решений может быть подразделена на шесть классов так, чтобы члены каждого класса были равны или являлись постоянными, кратными друг другу. [Kummer].

5. Докажите, что при m положительном целом числе и $-1<x<1$ присоединенное уравнение Лежандра

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0$$

удовлетворяется *присоединенными функциями Лежандра*

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m},\quad Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m}.$$

[Ferrers].

Найдите ряд по убывающим степеням, который удовлетворял бы этому уравнению.

6. Покажите, что если $C_\nu^\mu(x)$ коэфициент h^ν разложения $(1-2xh+h^2)^{-\mu}$ по возрастающим степеням h, то $C_\nu^\mu(x)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{(2\mu-1)x}{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\nu(\nu+2\mu)}{x^2-1}y=0,$$

и выразите $C_\nu^\mu(x)$ в виде присоединенной функции Лежандра.

7. Докажите, что диференциальное уравнение для $C_\nu^\mu(x)$ определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ 0 & \nu+2\mu & 0 & x \\ \frac{1}{2}-\mu & -\nu & \frac{1}{2}-\mu & \end{matrix}\right\}.$$

8. Докажите, что диференциальное уравнение

$$(1-x)x^2\frac{d^3y}{dx^3}+\{\theta+\varepsilon+1-(\alpha+\beta+\gamma+3)x\}x\frac{d^2y}{dx^2}+$$

$$+\{\theta\varepsilon-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1)x\}\frac{dy}{dx}-\alpha\beta\gamma=0$$

удовлетворяется функцией ${}_3F_2(\alpha, \beta, \gamma; \theta, \varepsilon; x)$, которая может быть разложена в ряд

$$1+\frac{\alpha\beta\gamma}{1!\,\theta\varepsilon}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)\cdot\gamma(\gamma+1)}{2!\,\theta(\theta+1)\cdot\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2+\ldots$$

9. Докажите, что если n не целое число, то

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{J_{-n}(x)}{J_n(x)}\right\}=\frac{-2\sin n\pi}{\pi x\{J_n(x)\}^2},$$

$$J_n(x)J_{1-n}(x)+J_{n-1}(x)J_{-n}(x)=\frac{2\sin n\pi}{\pi x}.$$ [Lommel].

10. Покажите, что если n — половина нечетного целого числа, то функция Бесселя допускает решение в конечной форме,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x,$$

$$J_{k+\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^k(2x)^{k+\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d^k}{d(x^2)^k}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

и получите общее решение для каждого случая.

11. Покажите, что общее решение уравнения

$$4\frac{d^2y}{dx^2}+9xy=0$$

может быть выражено в виде

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+Bx^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

12. Покажите, что уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left\{n^2-\frac{m(m+1)}{x^2}\right\}y=0$$

может быть проинтегрировано в функциях Бесселя, и что если m — положительное целое число, то оно допускает общее решение

$$y = x^{m+1}\left\{x^{-1}\frac{d}{dx}\right\}^m\left\{\frac{Ae^{nx}+Be^{-nx}}{x}\right\},$$

где A и B — произвольные постоянные.

13. Найдите решения в виде рядов (асимптотических) по возрастающим и убывающим степеням для конфлюэнтного гипергеометрического уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right\}y=0$$

и покажите, что при $k=0$ решение будет иметь вид

$$y = x^{\frac{1}{2}} J_n\left(\frac{1}{2}ix\right).$$

14. Докажите, что если $W_{k,m}(x)$ — решение конфлюэнтного гипергеометрического уравнения, то функция

$$x^{\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\, -\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

удовлетворяет уравнению Вебера

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)y=0.$$

Решения этого уравнения известны как функции Вебера-Эрмита или функции параболического цилиндра и обозначаются $D_n(x)$.

Проверьте асимптотическое соотношение

$$D_n(x)\sim e^{-\frac{1}{4}x^2}x^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4x^4}-\dots\right\}$$

и покажите, что $D_{-n-1}(ix)$ — независимое решение.

15. Рассмотрением диференциального уравнения

$$\alpha y = -xy'+y''$$

покажите, что при $\alpha>0$, $x>0$

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha+1}{x}+\frac{\alpha+2}{x}+\frac{\alpha+3}{x}+\dots=\frac{\int\limits_0^\infty e^{-xt-\frac{1}{2}t^2}t^{\alpha}dt}{\int\limits_0^\infty e^{-xt-\frac{1}{2}t^2}t^{\alpha-1}d}.$$

16. Докажите, что подстановка $y=e^x u$ преобразует уравнение

$$\alpha y=(\gamma-x)y'+xy''$$

в

$$(\alpha-\gamma)u=(\gamma+x)u'+xu''.$$

а отсюда докажите, что

$$\frac{\alpha x}{\gamma - x} + \frac{(\alpha+1)\,x}{\gamma - x + 1} + \frac{(\alpha+2)\,x}{\gamma - x + 2} + \cdots =$$

$$= x - \frac{(\gamma-\alpha)\,x}{\gamma + x} - \frac{(\gamma-\alpha-1)\,x}{\gamma + x + 1} - \frac{(\gamma-\alpha-2)\,x}{\gamma + x + 2} - \cdots$$

[Perron].

17. Покажите, что если $D_n(x)$ — функция Вебера-Эрмита, то

$$\frac{D'_n(x)}{D_n(x)} = \frac{n}{x} - \frac{n-1}{x} - \frac{n-2}{x} - \cdots,$$

$$\frac{D'_{-n-1}(ix)}{D_{-n-1}(ix)} = x - \frac{n+1}{x} - \frac{n+2}{x} - \frac{n+3}{x} - \cdots$$

ГЛАВА VIII

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

8·1. Общий принцип. Нам нужно получить определенный интеграл вида

$$\text{(A)} \qquad y(x) = \int_\alpha^\beta K(x, t), v(t)\, dt,$$

где x входит в качестве параметра, удовлетворяющего заданному диференциальному уравнению

$$\text{(B)} \qquad L_x(y) = 0.$$

В определенный интеграл входят три независимых элемента, которые должны быть выбраны в зависимости от условий:

(I) функция $K(x, t)$, называемая *ядром* определенного интеграла,

(II) функция $v(t)$,

(III) пределы интегрирования α и β.

Допустим, что ядро $K(x, t)$ удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных вида[1]

$$\text{(C)} \qquad L_x(K) = M_t(K),$$

где M_t — линейный диференциальный оператор, содержащий только t и $\frac{\partial}{\partial t}$.

Тогда, если оператор L_x можно применить к определенному интегралу $y(x)$, то[2]

$$L_x\{y(x)\} = \int_\alpha^\beta L_x\{K(x, t)\}\, v(t)\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta M_t\{K(x, t)\}\, v(t)\, dt.$$

Пусть $\overline{M}_t$ будет оператором, присоединенным к M_t, тогда из тождества Лагранжа (§ 5·3), которое в данном случае имеет

[1] Bateman, Trans. Camb. Phil. Soc., 21 (1909), 171.
[2] Это допущение принято во всей этой главе.

вид[1]

$$v(t)\,M_t\{K(x,\ t)\} - K(x,\ t)\,\overline{M}_t\{v(t)\} = \frac{\partial}{\partial t}P\{K,\ v\},$$

следует

$$L_x\{y(x)\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} K(x,\ t)\,\overline{M}_t(v)\,dt + \Big[P\{K, v\}\Big]_{t=\alpha}^{t=\beta}.$$

Чтобы интеграл (A) мог быть решением уравнения (B), правый член этого уравнения должен быть равен нулю. Это имеет место во-первых, если $v(t)$ — решение уравнения

$$\overline{M}_t(v) = 0,$$

и, во-вторых, если пределы интегрирования выбраны такими при которых

$$\Big[\,P\{K,\ v\}\,\Big]_{t=\alpha}^{t=\beta} = 0$$

тождественно.

Этот метод допускает значительное обобщение. Так, например, предположим, что ядро $K(x,\ t)$ не удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных (C), но обе функции $K(x,\ t)$ и $\varkappa(x,\ t)$ могут быть такими, что

$$L_x\{K(x,\ t)\} = M_t\{\varkappa(x,\ t)\};$$

в этом случае

$$L_x\{y(x)\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varkappa(x,\ t)\,\overline{M}_t(v)\,dt + \Big[P\{\varkappa, v\}\Big]_{t=\alpha}^{t=\beta}.$$

Теперь необходимо найти функцию $v(t)$ и пределы интегрирования α и β.

8·2. Преобразование Лапласа. Если m — самая большая степень любого коэфициента в операторе L_x, а сам оператор порядка n, то L_x можно написать в распространенной форме

$$\text{(A)}\qquad L_x \equiv \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs}x^s\,\frac{\partial^r}{\partial x^r}$$

где коэфициенты a_{rs} — постоянные.

Рассмотрим вместе с L_x оператор

$$\text{(B)}\qquad M_t \equiv \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs}t^r\,\frac{\partial^s}{\partial t^s},$$

тогда

$$L_x(e^{xt}) \equiv M_t(e^{xt}),$$

[1] Билинейная последовательность $P\{K,\ v\}$ содержит здесь x в качестве параметра.

так как каждый член этого тождества равен

$$e^{xt}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs}x^s t^r.$$

Следовательно уравнение

$$L_x(y)=0$$

удовлетворяется определенным интегралом

$$\text{(C)}\qquad y(x)=\int_{\alpha}^{\beta} e^{xt}v(t)\,dt,$$

при условии, что $v(t)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\text{(D)}\qquad \overline{M}_t(v)=0$$

и что пределы интегрирования выбраны так, что

$$\left[P\{e^{xt}, v\}\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=0$$

тождественно.

Уравнение (D) называется *преобразованием Лапласа* выражения $L_x(y)=0$, e^{xt} — ядро преобразования $v(t)$ в $y(x)$. Целесообразность этого метода для получения явного решения данного уравнения зависит главным образом от легкости получения решения (D). В частном и очень специальном случае, когда $m=1$, т. е. когда коэфициенты данного уравнения линейны относительно x, преобразование Лапласа представляет собой линейное уравнение первого порядка и следовательно может быть проинтегрировано в квадратурах[1].

Важная обратная зависимость[2] существует между уравнениями $L_x(y)=0$ и $\overline{M}_t(v)=0$; первое представляет собой преобразование Лапласа последнего, причем ядро этого преобразования равно e^{-xt}. Это следует непосредственно из тождества

$$\overline{L}_x(e^{-xt})=\overline{M}_t(e^{-xt}).$$

Поскольку

$$\overline{L}_x(u)\equiv\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}(-1)^r a_{sr}\frac{d^r(x^s u)}{dx^r},$$

$$\overline{M}_t(v)\equiv\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s a_{sr}\frac{d^s(t^r v)}{dt^s},$$

достаточно доказать, что

$$(-1)^r\frac{d^r(x^s e^{-xt})}{dx^r}=(-1)^s\frac{d^s(t^r e^{-xt})}{dt^s},$$

[1] См. пример 1, в конце главы.

[2] Petzval, Integration der linearen Differentialgleichungen, 1 (Vienna, 1851), 472.

а это верно, поскольку каждый член уравнения равен

$$e^{-x}\left\{x^s t^r - rsx^{s-1}t^{r-1} + \frac{r(r-1)s(s-1)}{2!}x^{s-2}t^{r-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{r(r-1)(r-2)s(s-1)(s-2)}{3!}x^{s-3}t^{r-3} + \ldots\right\}.$$

Отсюда следует, что если γ и δ соответственно выбраны, то

$$v(t) = \int_\gamma^\delta e^{-xt}y(x)\,dx \tag{E}$$

будет решением (D). Зависимость между (C) и (E) дает пример *обращения* определенного интеграла, т. е. определения неизвестной функции $v(t)$ в виде интеграла, таким образом, чтобы определенный интеграл представлял функцию $y(x)$, которая предположена известной.

8·201. Пример, иллюстрирующий преобразование Лапласа. Пусть

$$L_x(y) \equiv x\frac{d^2y}{dx^2} + (p+q+x)\frac{dy}{dx} + py = 0,$$

тогда

$$M_t(u) \equiv t(t+1)\frac{du}{dt} + \{p + (p+q)t\}u,$$

$$\overline{M}_t(v) \equiv -t(t+1)\frac{dv}{dt} + \{p - 1 + (p+q-2)t\}v$$

и

$$vM_t(u) - u\overline{M}_t(v) = \frac{d}{dt}[t(t+1)uv].$$

Уравнение $\overline{M}_t(v) = 0$ имеет решение

$$v(t) = t^{p-1}(t+1)^{q-1},$$

поэтому интеграл типа

$$y^{(x)} = \int_\alpha^\beta e^{xt}t^{p-1}(t+1)^{q-1}\,dt$$

будет удовлетворять уравнению $L_x(y) = 0$ при условии, чтобы α и β были выбраны так, что

$$\left[e^{xt}t^p(t+1)^q\right]_{t=\alpha}^{t=\beta} = 0$$

тождественно.

Вместо t удобно написать $-t$; тогда интеграл

$$y(x) = \int_\alpha^\beta e^{-xt}t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

будет удовлетворять $L_x(y)=0$, если α и β таковы, что

$$\left[e^{-xt}t^p(1-t)^q\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

тождественно обращается в нуль. Соответствующие пары значений будут иметь вид

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & \alpha=0, & \beta=1 & (p>0, \quad q>0), \\ \text{(II)} & \alpha=0, & \beta=\infty & (x>0, \quad p>0), \\ \text{(III)} & \alpha=1, & \beta=\infty & (x>0, \quad q>0), \\ \text{(IV)} & \alpha=-\infty, & \beta=0 & (x<0, \quad p>0), \\ \text{(V)} & \alpha=-\infty, & \beta=1 & (x<0, \quad q>0). \end{array}$$

Следовательно искомые значения α и β всегда существуют, за исключением случая, когда p и q отрицательны. В частности, когда p, q и x все положительны, общее решение $L_x(y)=0$ может быть написано в виде

$$y=A\int_0^1 e^{-xt}t^p(1-t)^q\,dt+B\int_1^\infty e^{-xt}t^p(1-t)^q\,dt,$$

где A и B — произвольные постоянные.

8·21. Определение пределов интегрирования. Уравнение $\overline{M}(v)=0$, которое служит для определения $v(t)$, порядка m; его общее решение имеет вид

$$v=C_1v_1(t)+C_2v_2(t)+\ldots+C_mv_m(t),$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_m$ образуют фундаментальную последовательность решений, а постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — произвольные. Эти постоянные и пределы интегрирования α и β должны быть определены таким образом, чтобы выражение

$$\left[P\{K,v\}\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

обратилось в нуль.

Из билинейной формы (§ 5·3) видно, что для этого достаточно определить постоянные $C_1, \ldots, C_m$, α и β так, чтобы

$$v(t), v'(t), \ldots, v^{(m-1)}(t)$$

обратились в нуль при $t=\alpha$ и $t=\beta$. Это может иметь место только в том случае, если α и β — особые точки $\overline{M}(v)=0$. Но если α и β — особые точки и решение $v(t)$ существует так, что показатель, относящийся к каждой из этих точек, больше $m-1$, то билинейная форма обратится в нуль при α и β, и следовательно пределы интегрирования могут быть приняты равными α и β. Этот случай, показанный на примере предыдущего параграфа, имеет практическое значение. Каждая независимая пара пределов, если они существуют, приводит к независимому частному решению уравнения. В некоторых случаях число определенных интегралов достаточно для получения общего решения, в других — можно получить только частное решение.

8·22. Представление функций Бесселя в виде определенных интегралов. Вместо e^{xt}, в качестве ядра определенного интеграла может быть принята функция

$$K(x,t) = e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})}$$

Функции $e^{\frac{1}{2}xt}$ и $e^{-\frac{1}{2}xt^{-1}}$ могут быть разложены соответственно в ряды по возрастающим степеням xt и xt^{-1}, которые абсолютно сходятся для всех значений x и для всех значений t, не равных нулю. Двойной ряд, представляющий их произведение, поэтому сходится для тех же значений x и t и имеет вид

$$e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{r+s}\, t^{r-s}}{2^{r+s}\, r!\, s!}.$$

При $n>0$ коэфициент t^n получается выбором членов двойного ряда, для которых $r = n + s$. Эти члены образуют бесконечный ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\, x^{n+2s}}{2^{n+2s}(n+s)!\, s!} = J_n(x),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя порядка n. Аналогично, коэфициент t^{-n} равен $(-1)^n J_n(x)$, так что

$$e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\{t^n + (-1)^n t^{-n}\} J_n(x).$$

При $t = e^{i\theta}$ это соотношение принимает вид

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos 2m\theta + 2i\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\theta.$$

Разделяя вещественные и мнимые части, получим следующие два выражения

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos 2m\theta,$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(x)\sin 2m-1)\theta.$$

Подставляя $\frac{1}{2}\pi - \theta$ вместо θ, получим

$$\cos(x\cos\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(x)\cos 2m\theta,$$

$$\sin(x\cos\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} J_{2m-1}(x)\cos(2m-1)\theta.$$

Из первого из этих четырех соотношений следует, что

$$\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta = \pi J_n(x) \quad \text{при } n \text{ четном,}$$
$$= 0 \qquad \text{при } n \text{ нечетном.}$$

Из второго соотношения следует, что

$$\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta = \pi J_n(x) \quad \text{при } n \text{ нечетном,}$$
$$= 0 \qquad \text{при } n \text{ четном.}$$

Складывая, получим, что если n — любое целое положительное число или нуль, то

$$\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta = \pi J_n(x).$$

Следовательно обыкновенная функция Бесселя с целым индексом может быть выражена в виде определенного интеграла[1].

8·3. Ядро $K(x-t)$. Рассмотрим возможность удовлетворить линейному диференциальному уравнению типа Лапласа

$$L_x(y) \equiv \left\{xF\left(\frac{d}{dx}\right) + G\left(\frac{d}{dx}\right)\right\}y = 0$$

при помощи определенного интеграла вида[2]

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x-t)\, v(t)\, dt.$$

Очевидно, $K(x-t)$ будет удовлетворять диференциальному уравнению в частных производных вида

$$\text{(A)} \qquad \left\{xF\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}K = \left\{tF\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right) + H\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\}K$$

при условии, что $K(z)$, рассматриваемя как функция одной переменной z, удовлетворяет обыкновенному линейному уравнению

$$\left\{zF\left(\frac{d}{dz}\right) + G\left(\frac{d}{dz}\right) - H\left(\frac{d}{dz}\right)\right\}K(z) = 0,$$

[1] Bessel. Abh. Akad. Wiss. Berlin., 1824, 34.

[2] Caillér, Bull. Sc. Math., 34(1899), 26; см. также Mellin Acta, Soc. Sc. Fenn., 21(1896), № 6.

Следовательно, если $v(t)$ — решение уравнения

$$F\left(\frac{d}{dt}\right) tv + H\left(\frac{d}{dt}\right) v = 0,$$

левый член которого является присоединенным выражением правого члена (A), и если пределы интегрирования могут быть соответствующим образом выбраны, то данное уравнение будет иметь решение, которое может быть выражено в виде определенного интеграла указанного типа.

8·31. Преобразование Эйлера. Часто встречается ядро типа, рассмотренного в предыдущем параграфе

$$K(x-t) = (x-t)^{-\nu-1} .$$

Преобразование, ядром которого является $(x-t)^{-\nu-1}$, применимо к любому линейному диференциальному уравнению, где коэфициент $y^{(r)}$ — полином от x степени r. Такое уравнение может быть всегда написано в виде

$$\begin{aligned} L_x(y) \equiv G_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \mu G_0'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2} G_0'' x \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots \\ - G_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (\mu+1)\,G_1'(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots \\ + G_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots \\ - \ldots = 0 \end{aligned}$$

или

$$\Gamma_0(y) - \Gamma_1(y) + \Gamma_2(y) - \ldots \pm \Gamma_p(y) = 0,$$

где

$$\Gamma_r(y) = \sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s \frac{(\mu+r)\ldots(\mu+r+s-1)}{s!} G_r^{(s)}(x)\frac{d^{n-r-s}y}{dx^{n-r-s}}.$$

В этих выражениях G_r — полином степени $n-r$, а μ—постоянная. Принимается, что $p+1$ полиномов $G_0 \ldots G_p$ достаточно.

Подставляя $-\nu = n+\mu$ в ядро $K(x-t)$, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_r\{(x-t)^{n+\mu-1}\} = \sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s\frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(\mu+r)}{s!}G_r^{(s)}(x)(x-t)^{\mu+r+s-1} \\ = (n+\mu-1)\ldots(\mu+r)(x-t)^{\mu+r-1}\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s\frac{(x-t)^s G_r^{(s)}(x)}{s!} \\ = (n+\mu-1)\ldots(\mu+r)(x-t)^{\mu+r-1}G_r(t), \end{aligned}$$

следовательно

$$L_x\{(x-t)^{n+\mu-1}\} = A\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(x-t)^{\mu+r-1}}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)}G_r(t),$$

где

$$A = (n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(\mu+1)\mu.$$

Теперь, если

$$M_t(u) \equiv G_0(t)\frac{d^p u}{dt^p} + G_1(t)\frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}} + \ldots + G_p(t)u,$$

то

$$M_t\{(x-t)^{p+\mu-1}\} = \sum_{r=0}^{p}(-1)^{p-r}(p+\mu-1)(p+\mu-2)\ldots$$
$$\ldots(\mu-r)(x-t)^{\mu+r-1}G_r(t)$$
$$= B\sum_{r=0}^{p}(-1)^r\frac{(x-t)^{\mu+r-1}}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)}G_r(t),$$

где

$$B = (-1)^p(p+\mu-1)(p+\mu-2)\ldots(\mu+1)\mu,$$

следовательно

$$L_x\{(x-t)^{n+\mu-1}\} = CM_t\{(x-t)^{p+\mu-1}\},$$

где $C = A/B$.

Если

$$y(x) = \int_\alpha^\beta (x-t)^{n+\mu-1}v(t)\,dt,$$

то

$$L_x(y) = \int_\alpha^\beta L_x\{(x-t)^{n+\mu-1}\}v(t)\,dt$$
$$= C\int_\alpha^\beta M_t\{(x-t)^{p+\mu-1}\}v(t)\,dt$$

и, как в общем случае, $v(t)$ должно быть выбрано так, чтобы подынтегральное выражение было полным диференциалом, после чего должны быть установлены пределы интегрирования. Определение $v(t)$ включает решение уравнения

$$\overline{M}_t(v) = 0,$$

известное как *преобразование Эйлера* $L_x(y) = 0$. При $p = 1$ преобразование Эйлера представляет собой линейное уравнение первого порядка, а $v(t)$ может быть точно определено[1].

[1] Полное исследование будет приведено в § 18·4.

8·311. Пример преобразования Эйлера. Приведем случай уравнения Лежандра (§ 7·24).

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0.$$

В обозначениях предыдущего параграфа

$$G_0(x)=1-x^2,$$

$$\mu G_0'(x)+G_1(x)=2x,$$

$$\frac{1}{2}\mu(\mu+1)G_0''(x)+(\mu+1)G_1'(x)+G_2(x)=n(n+1).$$

Эти соотношения удовлетворяются

$$G_1(x)=2(\mu+1)x,\quad G_2(x)=0,$$

при условии

$$\mu=n-1 \quad \text{или} \quad \mu=-n-2.$$

В данном случае $p=1$ и уравнение $M_t(u)=0$ принимает вид

$$(1-t^2)\frac{du}{dt}+2(\mu+1)tu=0.$$

Присоединенное уравнение

$$\overline{M}_t(v)\equiv(1-t^2)\frac{dv}{dt}-2(\mu+2)tv=0$$

имеет решение

$$v(t)=(1-t^2)^{-\mu-2}.$$

Пределы интегрирования α и β должны быть выбраны так чтобы

$$\left[(x-t)^{\mu}(1-t^2)^{-\mu-1}\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=0$$

тождественно. При $\mu=-n-2$, $n+1>0$ и $|x|>1$ это условие удовлетворяется $\alpha=-1$, $\beta=+1$. Отсюда определенный интеграл

$$y(x)=\int\limits_{-1}^{+1}(x-t)^{-n-1}(1-t^2)^n dt$$

удовлетворяет уравнению Лежандра. Если $Q_n(x)$ — функция Лежандра второго рода[1], то

$$Q_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\int\limits_{-1}^{1}(x-t)^{-n-1}(1-t^2)^n dt.$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 15·3.

8·32. Интегралы Лапласа. Изменяя порядок интегрирования, можно получить интегральное выражение для функции Лежандра $P_n(x)$ аналогично интегралу предыдущего параграфа, представляющему $Q_n(x)$. Однако это не может быть проведено без помощи комплексных переменных, и будет поэтому рассмотрено нами ниже (§ 18·5). Ввиду важности полиномов Лежандра мы здесь приведем простой метод, при помощи которого они могут быть выражены в виде определенных интегралов.

Рассмотрим ветвь функции

$$(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}},$$

равную $+1$ при $h=0$. При $|h|$, меньшем какого-либо из выражений $|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}|$ и $|x-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}|$, функция может быть разложена в степенной ряд относительно h

$$P_0(x)+hP_1(x)+h^2P_2(x)+\ldots,$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)\ldots$ — полиномы от x, которые являются полиномами Лежандра.

Уравнение

$$v=x+\frac{1}{2}h(v^2-1)$$

имеет корень

$$v=\frac{1-\sqrt{1-2xh+h^2}}{h},$$

который приводится к x при $h=0$ и который при $|h|$ достаточно малом может быть представлен в виде ряда

$$v=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\cdot\left(\frac{\partial^n v}{\partial h^n}\right)_0.$$

Легко доказать, что

$$\frac{\partial v}{\partial h}=\frac{1}{2}(v^2-1)\frac{\partial v}{\partial x}$$

и что если $\varphi(v)$ — любая функция v, то

$$\frac{\partial}{\partial h}\left\{\varphi(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\varphi(v)\frac{\partial v}{\partial h}\right\}.$$

Предположим, что для некоторого целого значения n

$$\frac{\partial^n v}{\partial h^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{\frac{1}{2^n}(v^2-1)^n\frac{\partial v}{\partial x}\right\},$$

тогда

$$\frac{\partial^{n+1}v}{\partial h^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\,\partial h}\left\{\frac{1}{2^n}(v^2-1)^n\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left\{\frac{1}{2^n}(v^2-1)^n\frac{\partial v}{\partial h}\right\}$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left\{\frac{1}{2^{n+1}}(v^2-1)^{n+1}\frac{\partial v}{\partial x}\right\},$$

Таким образом, поскольку соотношение верно при $n=1$, оно верно для всех значений n.

Пусть $h=0$, так что $v=x$, тогда

$$\left[\frac{\partial^n v}{\partial h^n}\right]_0 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{1}{2^n}(x^2-1)^n\right\},$$

следовательно

$$v = \frac{1-\sqrt{(1-2xh+h^2)}}{h} = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{1}{2^n}(x^2-1)^n\right\}.$$

Так

$$\frac{dv}{dx} = (1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!},\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{2^n}(x^2-1)^n\right\},$$

следовательно

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{ax^n}(x^2-1)^n,$$

а $P_n(x)$ является, по формуле Родрига (§ 7·24), полиномом Лежандра.

Теперь, поскольку при $|b|<|a|$

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

отсюда следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}h^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1-hx-h\sqrt{x^2-1}\cos t}.$$

Этот интеграл абсолютно и равномерно сходится для достаточно малых значений $|h|$; разлагая интеграл в ряд по возрастающим степеням h и сравнивая коэфициенты при h^n, получим полином Лежандра в виде интеграла Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{x+\sqrt{x^2-1}\cos t\}^n\,dt.$$

Аналогичными интегралами будут

$$Q_n(x)=\int_0^{\infty}\{x+\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{ch}t\}^{-n-1}\,dt,$$

$$P_n^m(x)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{\pi}\int_0^{\pi}\{x+\sqrt{x^2-1}\cos t\}^n\cos mt\,dt,$$

$$Q_n^m(x)=(-1)_n^m(n-1)\ldots(n-m+1)\int_0^{\infty}\{x+\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{ch}t\}^{-n-1}\operatorname{ch}mt\,dt.$$

8·4. Преобразование Меллина. Решение при помощи определенных интегралов, в которых ядро является функцией произведения xt, были подробно исследованы Меллином[1]. Такие решения могут быть получены, если рассматриваемое диференциальное уравнение имеет вид

(A)
$$L_x(y)\equiv x^nF\left(x\frac{d}{dx}\right)y+G\left(x\frac{d}{dx}\right)y=0.$$

Пусть H будет полиномом аргумента этого уравнения, а $K(z)$ — любым решением обыкновенного диференциального уравнения

$$z^nF\left(z\frac{d}{dz}\right)K-H\left(z\frac{d}{dz}\right)K=0,$$

тогда $K(xt)$ будет удовлетворять диференциальному уравнению в частных производных

$$\left\{x^nF\left(x\frac{d}{dx}\right)+G\left(x\frac{d}{dx}\right)\right\}K=\left\{G\left(t\frac{d}{dt}\right)+t^{-n}H\left(t\frac{d}{dt}\right)\right\}K$$

или

$$L_xK=M_tK.$$

Интеграл

$$y=\int_{\alpha}^{\beta}K(xt)v(t)\,dt$$

удовлетворяет (A) при условии, что $v(t)$ — решение

$$\overline{M_t}(v)=0,$$

где M_t — оператор, присоединенный к M_t, и при условии соответствующих пределов интегрирования α и β.

8·41. Приложение преобразования Меллина к гипергеометрическому уравнению. В качестве примера возьмем гипергеометрическое уравнение

(A)
$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\frac{dy}{dx}-aby=0,$$

[1] Mellin, Acta Soc. Sc. Fenn., 21(1896), 6, 39.

которое после умножения на x может быть переписано в виде

$$L_x(y) \equiv x\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 + (a+b)\,x\frac{d}{dx} + ab\right\} y -$$
$$-\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 + (c-1)\,x\frac{d}{dx}\right\} y = 0.$$

Пусть

$$M_t \equiv t(1-t)\frac{d^2}{dt^2} + (e-c)\frac{d}{dt} =$$
$$= -\left\{\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 + (c-1)\,t\frac{d}{dt}\right\} + t^{-1}\left\{\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 + (e-1)\,t\frac{d}{dt}\right\},$$

где постоянная e произвольна. $K(xt)$ удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных

$$L_x(K) = M_t(K)$$

при условии, что $u = K(z)$ — решение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{e-(a+b+1)\,z\}\frac{du}{dz} - abu = 0.$$

Уравнение

$$\overline{M}_t(v) = 0$$

удовлетворяется

$$v(t) = t^{e-1}(1-t)^{c-e-1},$$

и пределы интегрирования должны быть определены так, чтобы

$$\left[t^e(1-t)^{c-e}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_\alpha^\beta$$

тождественно обратилось в нуль. Если $u = F(a, b; e; xt)$, то это условие удовлетворяется при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, если $e > 0$, $c > e$. Следовательно при этих условиях

$$y(x) = \int_0^1 F(a,\ b;\ e;\ xt)\,t^{e-1}(1-t)^{c-e-1}dt$$

удовлетворяет (A). Теперь

$$y(0) = \int_0^1 t^{e-1}(1-t)^{c-e-1}dt = \frac{\Gamma(e)\,\Gamma(c-e)}{\Gamma(c)}$$

$$y'(0) = \frac{ab}{e}\int_0^1 t^e(1-t)^{c-e-1}dt = \frac{ab}{e}\,\frac{\Gamma(e+1)\,\Gamma(c-e)}{\Gamma(c+1)}$$
$$= \frac{ab}{c}\cdot\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(c-e)}{\Gamma(c)}.$$

Но эти начальные условия определяют единственное решение

$$\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(c-e)}{\Gamma(c)}F(a,\ b;\ c;\ x),$$

следовательно

$$\int_0^1 F(a,\ b;\ e;\ xt)\, t^{e-1}(1-t)^{c-e-1}dt = \frac{\Gamma(e)\,\Gamma(c-e)}{\Gamma(c)} F(a,\ b;\ c;\ x).$$

В частности, пусть $e=b$, тогда, поскольку

$$F(a,\ b;\ b;\ xt) = (1-xt)^{-a},$$

отсюда следует, что

$$\int_0^1 (1-xt)^{-a} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}dt = \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a,\ b;\ c;\ x),$$

если $b>0$ и $c>b$.

8·42. Получение определенного интеграла при помощи гипергеометрического ряда. Используя свойства гамма- и бета- функций, можно легко преобразовать выражение в виде ряда для гипергеометрической функции в эквивалентный определенный интеграл. Поскольку

$$b(b+1)\ldots(b+r-1) = \Gamma(b+r)/\Gamma(b),$$

$$F(a,\ b;\ c;\ x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+r-1)\cdot b(b+1)\ldots(b+r-1)}{r!\,c(c+1)\ldots(c+r-1)} x^r$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \left\{ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum \frac{a(a+1)\ldots(a+r-1)}{r!} \cdot \frac{\Gamma(b+r)}{\Gamma(c+r)} x^r \right\}.$$

Теперь

$$\frac{\Gamma(b+r)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+r)} = B(b+r,\ c-b)$$

$$= \int_0^1 t^{b+r-1}(1-t)^{c-b-1}dt,$$

при условии, что вещественные части $b+r$ и $c-b$ положительные, следовательно

$$F(a,\ b;\ c;\ x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+r-1)}{r!} x^r \int_0^1 t^{b+r-1}(1-t)^{c-b-1}dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum \frac{a(a+1)\ldots(a+r-1)}{r!} x^r t^r dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt.$$

Проведенное изменение порядка суммирования и интегрирования имеет смысл, когда гипергеометрический ряд равномерно сходится, т. е. если $|x| \leqslant \rho < 1$. Представление функции в виде определенного интеграла имеет смысл для всех значений x, но для компенсации этого увеличения области применимости должны быть наложены ограничения на b и c.

Порядок интегрирования можно изменить так, чтобы интеграл представлял независимое решение диференциального уравнения.

8·5. Решение при помощи двойных интегралов. Во многих случаях, когда попытки удовлетворить данному линейному диференциальному уравнению при помощи определенного интеграла типа (§ 8·1, А) безуспешны, можно решить задачу при помощи кратного интеграла. Метод, основанный на преобразовании Лапласа, практически бесполезен, если преобразованное уравнение не первого порядка; возможность решить уравнение соответственно ограничивается. В настоящем параграфе мы кратко изложим метод решения диференциального уравнения при помощи двойного интеграла, а в следующем параграфе подробно разберем соответствующий пример.

Пусть $L_x(y)=0$ будет данным уравнением и предположим, что функция $K(x;\ s,\ t)$ такая, при которой

$$L_xK(x;\ s,\ t)=M_{s,\,t}K(x;\ s,\ t), \tag{A}$$

где $M_{s,\,t}$ — диференциальный оператор в частных производных второго порядка типа

$$M_{s,\,t}\equiv a\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}+b\frac{\partial}{\partial s}+c\frac{\partial}{\partial t}+d, \tag{B}$$

и a, b, c и d — функции s и t. Как правило, такие соотношения могут быть получены только подбором; общий метод их получения неизвестен.

Рассмотрим двойной интеграл

$$y(x)=\int\int K(x;\ s,\ t)\,w(s,\ t)\,ds\,dt, \tag{C}$$

где функция $w(s,\ t)$ и область интегрирования пока не указаны. Принимая возможность диференцирования под знаком интеграла достаточное число раз относительно x, получим

$$\begin{aligned}L_xy(x)&=\int\int L_xK(x;\ s,\ t)\,w(s,\ t)\,ds\,dt,\\&=\int\int M_{s,\,t}K(x;\ s,\ t)\,w(s,\ t)\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям

$$\int\int aw\,\frac{\partial^2K}{\partial s\,\partial t}\,ds\,dt=\left[\int aw\left(\frac{\partial K}{\partial s}\,ds+\frac{\partial K}{\partial t}\,dt\right)-Kaw\right]+$$
$$+\int K\int\frac{\partial^2(aw)}{\partial s\,\partial t}\,ds\,dt,$$

$$\int\int bw\,\frac{\partial K}{\partial s}\,ds\,dt=\left[\int bwK\,dt\right]-\int\int K\,\frac{\partial(bw)}{\partial s}\,ds\,dt,$$

$$\int\int cw\,\frac{\partial K}{\partial t}\,ds\,dt=\left[\int cwK\,ds\right]-\int\int K\,\frac{\partial(c\cdot w)}{\partial t}\,ds\,dt,$$

поэтому

$$L_x y(x) = \int\int K(x;\ s,\ t)\,\overline{M}_{s,\,t}(w)\,ds\,dt + [P\{K,\ w\}],$$

где

(D) $$\overline{M}_{s,\,t} \equiv \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\,a - \frac{\partial}{\partial s}\,b - \frac{\partial}{\partial t}\,c + d$$

— диференциальный оператор в частных производных, присоединенный к (B), а $P\ \{K,\ w\}$ — выражение, аналогичное билинейной форме.

Тогда $w(s,\ t)$ должно быть определено, как решение диференциального уравнения в частных производных

(E) $$\overline{M}_{s,\,t}(w) = 0.$$

Таким образом решение задачи зависит от высшей области анализа, именно от теории диференциальных уравнений в частных производных. Но в большинстве случаев, имеющих практическое значение, $w(s,\ t)$ имеет особую форму $u(s)\,v(t)$, и одно уравнение в частных производных (E) замещается парой обыкновенных уравнений, каждое первого порядка

$$\alpha\,\frac{du}{ds} + \beta = 0, \qquad \gamma\,\frac{dv}{dt} + \delta = 0,$$

где α и β — функции только s, а γ и δ — функции только t.

Когда $w(s,\ t)$ определено, остается выбрать область интегрирования так, чтобы интеграл (C) существовал, а выражение $[P\{K,\ w\}]$ тождественно обратилось в нуль.

8·501. Пример решения при помощи двойного интеграла. Рассмотрим уравнение

$$L_x(y) \equiv (x^2 - 1)\,\frac{d^2y}{dx^2} + (a + b + 1)\,x\,\frac{dy}{dx} + aby = 0.$$

Это уравнение решается при помощи простого преобразования Лапласа, так как первый коэфициент — второй степени. Однако оно может быть решено при помощи двойного интеграла, ядро которого равно e^{xst},— форма, соответствующая ядру Лапласа e^{xt}. В данном случае

$$L_x e^{xst} = \{x^2s^2t^2 - s^2t^2 + (a + b + 1)\,xst + ab\}\,e^{xst}$$
$$= \left\{\left(s\,\frac{\partial}{\partial s} + a\right)\left(t\,\frac{\partial}{\partial t} + b\right) - s^2t^2\right\}e^{xst} = M_{s,\,t}(e^{xst}).$$

Множитель $w(s,\ t)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\overline{M}_{s,\,t}(w) \equiv \left\{\left(s\,\frac{\partial}{\partial s} - a + 1\right)\left(t\,\frac{\partial}{\partial t} - b + 1\right) - s^2t^2\right\}w = 0,$$

и этого достаточно, чтобы написать

$$w(s,\ t) = u(s)\,v(t),$$

где

$$s\frac{du}{ds}-(a-1)u=-s^2u,$$

откуда

$$u(s)=e^{-\frac{1}{2}s^2}s^{a-1}$$

и

$$t\frac{dv}{dt}-(b-1)v=-t^2v,$$

откуда

$$v(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}t^{b-1}.$$

Областью интегрирования может быть взят квадрант $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, при условии, что a и b — числа, вещественные части которых положительны.

Отсюда следует, что решением данного уравнения будет

$$y_1=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{xst-\frac{1}{2}(s^2-t^2)}s^{a-1}t^{b-1}\,ds\,dt$$

и аналогично

$$y_2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xst-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}s^{a-1}t^{b-1}\,ds\,dt$$

являются решениями данного уравнения.

8·502. Связь между двойным интегралом и решениями в виде рядов. Двойные интегралы, удовлетворяющие диференциальному уравнению предыдущего параграфа, могут быть легко выведены из решения в виде ряда, если воспользоваться следующим свойством гамма-функции[1]

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

Двумя решениями в виде рядов четных и нечетных функций x соответственно будут

$$Y_1=1+\frac{ab}{2!}x^2+\frac{a(a+2)\cdot b(b+2)}{4!}x^4+$$
$$+\frac{a(a+2)(a+4)\cdot b(b+2)(b+4)}{6!}x^6+\ldots,$$

---

[1] Вспомним, что

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}\,du$$
$$=2^{1-z}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}t^{2z-1}\,dt,\ \text{принимая}\ u=\frac{1}{2}t^2.$$

$$Y_2 = x + \frac{(a+1)(b+1)}{3!} x^3 + \frac{(a+1)(a+3)\cdot(b+1)(b+3)}{5!} x^5 + \ldots,$$

где порядок образования коэфициента очевиден.

Далее

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b\right)Y_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b\right) +$$

$$+ 2^2 \frac{\frac{1}{2}a\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\frac{1}{2}b\Gamma\left(\frac{1}{2}b\right)}{2!} x^2 +$$

$$+ 2^4 \frac{\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}a+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}b+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b\right)}{4!} x^4 + \ldots$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b\right) + \frac{2^2\Gamma\left(\frac{1}{2}a+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b+1\right)}{2!} x^2 +$$

$$+ \frac{2^4\Gamma\left(\frac{1}{2}a+2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b+2\right)}{4!} x^4 + \ldots$$

$$= 2^{2-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}\left\{s^{a-1}t^{b-1} + \frac{s^{a+1}t^{b+1}x^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{s^{a+3}t^{b+3}x^4}{4!} + \ldots\right\} ds\,dt$$

$$= 2^{2-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)} s^{a-1} t^{b-1}\,\mathrm{ch}\,(xst)\,ds\,dt$$

$$= 2^{1-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}(y_1+y_2),$$

и аналогично можно доказать, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)Y_2 =$$

$$= 2^{1-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)} s^{a-1}t^{b-1}\,\mathrm{sh}\,(xst)\,ds\,dt,$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}(y_1-y_2).$$

Ряды Y_1 и Y_2 сходятся для любых значений a и b, когда $|x| < 1$; соответствующие интегралы существуют для всех значений x, когда вещественные части a и b положительные. Таким образом увеличение области применения решения достигается за счет ограничений, наложенных на параметры a и b,

8·6. Периодические преобразования. Предположим, что в интеграле

$$\text{(A)} \qquad y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)\, v(t)\, dt$$

ядро $K(x, t)$ удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных

$$\text{(B)} \qquad L_x(K) = \overline{L_t}(K).$$

Тогда, если диференцирование под знаком интеграла допустимо и если A — произвольная постоянная, то

$$L_x(y) + A_y = \int_{\alpha}^{\beta} \{L_x(K) + AK\}\, v(t)\, dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{\overline{L_t}(K) + AK\}\, v(t)\, dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)\{L_t(v) + Av\}\, dt + [P\{K, v\}]_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

Таким образом, если для любой выбранной постоянной A функция $v(t)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\text{(C)} \qquad L_t(v) + Av = 0,$$

а пределы интегрирования выбраны так, чтобы проинтегрированная часть была тождественно равна нулю, то определенный интеграл будет удовлетворять уравнению

$$\text{(D)} \qquad L_x(y) + Ay = 0$$

для того же значения A.

Решение уравнений вида (C) и (D) часто разделяют на две части, включающие не только формальное определение функции, удовлетворяющей уравнению вместе с последовательностью начальных условий, относящихся к данной точке, но также и определение постоянной A так, чтобы другие условия были удовлетворены. Такие условия могут быть введены, полагая решение чисто периодическим (с данным периодом) или имеющим нуль в точке, отличной от точки, к которой относятся начальные условия.

Допустим, что такие условия наложены на решение (C) и что такое решение существует только для последовательности дискретных значений A, а когда оно существует, то определяется единственным образом, независимо от произвольного постоянного множителя. Наложим точно такую же последовательность условий на ядро $K(x, t)$, рассматриваемое как функция переменной x с t в качестве параметра[1]. Тогда, если определенная таким образом зависимость $v_r(t)$ соответствует *характеристическому* значению A_r, то

$$y_r(x) = \int_\alpha^\beta K(x, t)\, v_r(t)\, dt)$$

будет удовлетворять уравнению (D) для параметра A_r, а также всем начальным условиям, наложенным на $v_r(t)$. Но $y_r(x)$ при этих ограничениях единственное и является кратным $v_r(x)$. Если $v_r(x) = \lambda_r y_r(x)$, то $y_r(x)$ будет удовлетворять однородному интегральному уравнению[2]

$$y(x) = \lambda \int_\alpha^\beta K(x, t)\, y(t)\, dt,$$

где λ имеет *характеристическое* значение λ_r.

8·601. Решение при помощи интегрального уравнения. Пусть данное уравнение будет иметь вид

$$L_x(y) + Ay \equiv (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \{n - m - (m+n)x\}\frac{dy}{dx} +$$
$$+ \{A - p(m-n)x + p^2x^2\}y = 0,$$

где m, n и p — постоянные; а $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. Для некоторых дискретных характеристических значений A существует единственное решение, независимое от постоянного множителя и конечно в соседстве с особыми точками $x = \pm 1$. Ядро $K(x, t)$, удовлетворяющее уравнению $L_x(K) = \overline{L}_t(K)$ и конечное для всех значений t, за исключением $t = \pm 1$ в соседстве с $x = \pm 1$, равно $e^{pxt}(1+t)^{m-1}(1-t)^{n-1}$. Теперь

$$\frac{\partial P\{K, v\}}{\partial t} = v(t)\,\overline{L}_t(K) - K(x, t)\, L(v)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big[1 - t^2)v\frac{\partial K}{\partial t} - K\frac{\partial}{\partial t}\{(1-t^2)v\} +$$
$$+ \{n - m - (m+n+4)t\}Kv\Big].$$

Если $v(t)$ — конечно в соседстве с $t = \pm 1$, то выражение в квадратных скобках тождественно обратится в нуль в этих

---

[1] Принимается возможность определения $K(x, t)$ для удовлетворения условий тождественно относительно t.

[2] Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), 4 (1907) 90, 461; Trans. Camb. Phil. Soc., 21 (1909), 187; Ince, Proc. Roy. Soc. Edin., 42 (1922), 43.

точках, если $n > 0$, $m > 0$. Следовательно решения данного уравнения будут удовлетворять интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} e^{pxt} (1 + t)^{m-1} (1 - t)^{n-1} y(t)\, dt.$$

Примеры

1. Покажите, что диференциальное уравнение

$$x\varphi(D) y + \psi(D) y = 0,$$

где φ и ψ — полиномы с постоянными коэфициентами, удовлетворяется

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{xt + \int \psi(t) \chi(t)\, dt} \chi(t)\, dt,$$

где $\chi(t)$ обратна $\varphi(t)$, а α и β выбраны так, что для всех значений x

$$\left[e^{xt + \int \psi(t) \chi(t)\, dt}\right]_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

2. Напишите общее решение уравнения

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta)(1 + x) \frac{dy}{dx} + \alpha\beta x y = 0$$

в интегральной форме (I) для положительных и (II) для отрицательных значений x.

3. Покажите, что наиболее общее решение

$$\frac{d^n y}{dx^n} - xy = a,$$

где a — постоянная, будеть иметь вид

$$y = \sum_{r=0}^{n} a_r \omega^r \int_0^{\infty} \exp\left\{\omega^r x t - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right\} dt,$$

где $\omega^{n+1} = 1$, а постоянные A_r связаны соотношением

$$\sum_{r=0}^{n} A_r = a.$$

4. Докажите, что уравнение

$$x \frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$$

имеет частное решение

$$y = \int_0^{\infty} \sin(x/v)\, e^{-\frac{1}{2} v^2} v\, dv,$$

а уравнение

$$x\frac{d^3y}{dx^3}+y=0$$

имеет частное решение

$$y=\int_0^{\infty} e^{-x/v-\frac{1}{2}v^2}\,v\,dv,$$

где $x>0$. Какое требуется изменение при $x<0$?

[Petzval].

Выведите общее решение для каждого уравнения.

5. Покажите, что уравнение

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+(x+a)\,y=0$$

имеет решение, конечное в начале

$$y=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\left(x\cos\theta+a\log\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\right)dt,$$

когда a вещественное. [Sharpe, Mess. Math. X].

6. Докажите, что

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2m\frac{dy}{dx}+xy=0$$

удовлетворяется

$$y=\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{m-1}\cos xt\,dt$$

и выведите разложение в виде ряда для этого решения.

7. Докажите, что в обозначениях главы VII, пример 8

$${}_3F_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \theta,\ \varepsilon;\ x)=$$

$$=\frac{\Gamma(\theta)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\theta-\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varepsilon-\gamma)}\int_0^1\int_0^1(1-xst)^{-\alpha}s^{\beta-1}(1-$$

$$-s)^{\theta-\beta-1}\,t^{\gamma-1}(1-t)^{\varepsilon-\gamma-1}\,ds\,dt$$

и выразите общее решение уравнения ${}_3F_2$ при помощи двойных интегралов.

8. Докажите, что частный интеграл

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_2\right)y=f(x)$$

равен

$$y=\int_0^1\int_0^1 f(stx)\,s^{\alpha_1-1}\,t^{\alpha_2-1}\,ds\,dt$$

и получите соответствующий результат для уравнения порядка n

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_2\right)\dots\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_n\right)=f(x).$$

9. Докажите, что если $P_m(x)$ — полином Лежандра, а $Q_m(x)$ — соответствующая функция Лежандра второго рода, то

$$Q_m(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(t)}{x-t}\,dt,$$

и выведите по индукции, что если m и n — положительные целые числа и $m \geqslant n$, то

$$P_n(x)\,Q_m(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)\,P_m(t)}{x-t}\,dt.$$

10. Найдите диференциальное уравнение четвертого порядка, которому удовлетворяют

$$P_n(x)\,P_m(x),\ P_n(x)\,Q_m(x),\ P_m(n)\,Q_n(x),\ Q_m(x)\,Q_n(x)$$

и докажите, что оно преобразуется само в себя при помощи преобразования Эйлера

$$f(x) = \int \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt.$$

Найдите общий тип уравнения порядка n, инвариантного относительно этого преобразования.

11. Покажите, что соотношение

$$f(x) = \int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

может быть заменено соотношениями

$$u(s) = \int_0^\infty e^{-st} K(t)\,dt;\ v(s) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)\,dt;\ u(s)\,v(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

[Borel].

Отсюда докажите, что если $J_n(x)$ — функция Бесселя, то

$$\int_0^x J_m(x-t)\,J_n(t)\,t^{-1}\,dt = n^{-1}\,J_{m+n}(x).$$

12. Докажите, что ядро $K(xt)$ удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных

$$\left\{x^n F\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + x^{-n} G\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} K = \left\{t^n F\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right) + t^{-n} H\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\},$$

если $u = K(s)$ — решение

$$\left\{s^n F\left(s\frac{d}{ds}\right) - H\left(s\frac{d}{ds}\right)\right\} u = 0,$$

и что имеется преобразование, зависящее от ядра $K(xt)$ выражения

$$\left\{x^n F\left(x\frac{d}{dx}\right) + G\left(x\frac{d}{dx}\right)\right\} y = 0,$$

являющегося сопряженным уравнением для

$$\left\{t^n G\left(t\frac{d}{dt}\right)+H\left(t\frac{d}{dt}\right)\right\}v=0.$$

Отсюда докажите, что

$$J_n(x)=\int_0^\infty J_{2n}\{2\sqrt{xt}\}J_n(t)\,dt,$$

где x — положительное, а n — вещественное и больше $-\frac{1}{2}$.

[Bateman].

ГЛАВА IX

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

9·1. Определение линейной диференциальной системы. Линейное диференциальное уравнение

$$L(y) \equiv p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + $$
$$+ p_n(x)y = r(x),$$

взятое вместе с одним или более дополнительных условий, которым удовлетворяют для частных значений x функция y и ее первые $(n-1)$ производных, образуют *линейную диференциальную систему*. Наиболее простой является последовательность дополнительных условий, принятых для фундаментальной теоремы существования (§ 3·32), именно

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — n заданных постоянных. Теорема существования показывает, что если x_0 — обыкновенная точка уравнения, то система имеет только одно решение. Эта частная последовательность дополнительных условий известна как одноточечная граничная задача, поскольку должно быть найдено решение диференциального уравнения, которое удовлетворяло бы граничным условиям в заданной точке[1]. Такая задача, если число независимых условий равно порядку уравнения, имеет только одно решение.

В двухточечной граничной задаче диференциальная система состоит из диференциального уравнения и некоторого числа дополнительных линейных условий вида

$$U_i(y) \equiv \alpha_i y(a) + \alpha_i' y'(a) + \ldots + \alpha_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) +$$
$$+ \beta_i y(b) + \beta_i y'(b) + \ldots + \beta_i^{(n-1)}(b) = \gamma_i,$$

где числа α, β и γ — заданные постоянные, а (a, b) — определенный интервал изменения x. Допустим, что m линейно независимых дополнительных условий этого типа были заданы. Поскольку для $2n$ величин не может быть больше $2n$ независимых линей-

[1] Указанные условия чаще называются начальными условиями. *Прим. ред.*

ных соотношений между

$$y(a),\quad y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a),\ y(b),\ y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b),$$

то отсюда следует, что $m \leqslant 2n$.

В краткой форме система может быть выражена в виде

$$\begin{cases} L(y) = r(x), \\ U_i(y) = \gamma_i & (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

С данной системой тесно связана однородная система

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ U_i(y) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

называемая *приведенной системой.*

В приведенной системе необходимо рассмотреть два случая.

(I) Система не имеет решения, не равного тождественно нулю; такая система называется *несовместимой* (*incompatible*).

(II) Система имеет k ($\leqslant n$) линейно-независимых решений

$$y_1(x),\quad y_2(x), \ldots, y_k(x).$$

Общее решение приведенной системы может быть написано в виде

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$$

и будет зависеть от k произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Система в данном случае будет *k-кратно совместимой* (*k — указатель совместимости*).

Аналогично для неоднородной системы могут быть два случая:

(I) Система вовсе не допускает решения, что означает, что не может быть найдено решение уравнения $L(y) = r(x)$, которое удовлетворяло бы граничным условиям $U_i(y) = \gamma_i$.

(II) Система удовлетворяется частным решением $y_0(x)$. Тогда, если k указатель приведенной системы, то общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x),$$

где

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$$

— общее решение приведенной системы. Оно аналогично дополнительной функции (§ 5·1) линейного диференциального уравнения, когда на последнее не наложены граничные условия.

В настоящей главе мы рассмотрим общий вопрос совместимости или несовместимости линейной диференциальной системы и покажем аналогию, существующую между теорией линейных диференциальных систем, с одной стороны, и теорией совместных линейных алгебраических уравнений — с другой.

9·2. Аналогия с теорией системы линейных алгебраических уравнений. Линейная диференциальная система может рассматриваться как предельный случай системы M линейных алгебраических уравнений с N переменными, когда M и N в пределе стремятся к бесконечности. Для упрощения, распространим аналогию на линейную диференциальную систему второго порядка

$$\left\{\begin{array}{l} p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=r(x), \\ \alpha_i y(a)+\alpha_i' y'(a)+\beta_i y(b)+\beta_i' y'(b)=\gamma_i \end{array}\right. \qquad (i\leqslant 4).$$

Предположим, что $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $r(x)$ — непрерывные функции вещественной переменной x по всему замкнутому интервалу $a\leqslant x\leqslant b$, а также, что этот интервал может быть разделен на s равных частей точками

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s,$$

где $x_0=a$, $x_s=b$, и пусть

$$\Delta x = x_{\nu-1}-x_\nu\ ,$$

$$\Delta y_\nu = y(x_{\nu+1})-y(x_\nu),$$

$$\Delta^2 y_\nu = y(x_{\nu+2})-2y(x_{\nu+1})+y(x_\nu).$$

Тогда диференциальное уравнение может рассматриваться как предельная форма уравнения в конечных разностях [1]

$$p_0(x_\nu)\frac{\Delta^2 y_\nu}{\Delta x^2}+p_1(x_\nu)\frac{\Delta y_\nu}{\Delta x}+p_2(x_\nu)\ y_\nu=r(x_\nu),$$

где Δx в пределе стремится к нулю. Это уравнение в конечных разностях верно для $\nu=0, 1, 2, \ldots, s-2$. На основании выражений для Δy_ν и $\Delta^2 y_\nu$, после того как оба члена были умножены на Δx^2, можно написать

$$P_{0\nu}y_\nu+P_{1\nu}\ y_{\nu+1}+P_{2\nu}y_{\nu+2}=R_\nu \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-2),$$

следовательно мы получим $s-1$ уравнений, связывающих $s+1$ неизвестных величин

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_s.$$

Аналогично, каждое граничное условие

$$\alpha_i y(a)+\alpha_i' y'(a)+\beta_i y(b)+\beta_i' y'(b)=\gamma_i$$

---

[1] Портер [Porter Ann. of Math, (2), 3 (1902), 55] доказал, что переход к пределу от уравнения в конечных разностях к диференциальному уравнению может быть проведен совершенно строго.

может быть выражено в виде предельной формы

$$\alpha_i y_0 + \alpha_i' \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \beta_i y_s + \beta_i' \frac{\Delta y_{s-1}}{\Delta x} = \gamma_i,$$

которая, в свою очередь, может быть написана в виде

$$A_{i0}\, y_0 + A_{i1}\, y_1 + A_{i,\, s-1}\, y_{s-1} + A_{is}\, y_s = B_i;$$

таким образом каждое граничное условие эквивалентно линейному уравнению в конечных разностях, связывающему y_0, y_1, y_{s-1} и y_s.

Примененные здесь принципы являются вполне общими; так, линейное диференциальное уравнение порядка n, коэфициенты которого непрерывны в интервале (a, b), может рассматриваться как предельный случай семейства уравнений в конечных разностях типа

$$P_{0\nu} y_\nu + P_{1\nu} y_{\nu+1} + \ldots + P_{n\nu} y_{\nu+n} = R_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, s-n)$$

где, как и выше, s — число равных сегментов, на которые интервал (a, b) может быть подразделен. Каждое граничное условие, независимо от того, относится ли оно к одной, двум или нескольким точкам в интервале (a, b), также приводит к уравнению точно такого же типа. При наличии m граничных условий получим всего $s+m-n+1$ уравнений между $s+1$ неизвестными величинами

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, y_s.$$

Чтобы подчеркнуть аналогию, существующую между линейными диференциальными системами и системами линейных алгебраических уравнений, рассмотрим наиболее существенные свойства последних[1].

9·21. Свойства линейной алгебраической системы. Рассмотрим последовательность M совместных линейных уравнений

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1N} X_N = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{M1} X_1 + a_{M2} X_2 + \ldots + a_{MN} X_N = 0,$$

с N переменными $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Могут быть два случая:

(I) Система не допускает никаких решений, кроме

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_N = 0,$$

т. е. система несовместима.

---

[1] Бохер, Введение в высшую алгебру, гл. IV.

(II) Система допускает несколько решений (например k)

$$\begin{gathered} X_{11},\ X_{21}, \ldots, X_{N1}, \\ X_{12},\ X_{22}, \ldots, X_{N2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_{1k},\ X_{2k}, \ldots, X_{Nk}. \end{gathered}$$

Эти соотношения могут быть линейно независимыми, если нельзя найти постоянные c, которые не все равны нулю и при которых N уравнений

$$\begin{gathered} c_1 X_{11} + c_2 X_{12} + \ldots + c_k X_{1k} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 X_{N1} + c_2 X_{N2} + \ldots + c_k X_{Nk} = 0, \end{gathered}$$

были бы удовлетворены совместно. Если k последовательных решений линейно независимы, то, вследствие однородности системы, общее решение будет иметь вид

$$\begin{gathered} X_1 = c_1 X_{11} + c_2 X_{12} + \ldots + c_k X_{1k}, \\ X_2 = c_1 X_{21} + c_2 X_{22} + \ldots + c_k X_{2k}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_N = c_1 X_{N1} + c_2 X_{N2} + \ldots + c_k X_{Nk}, \end{gathered}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные. В данном случае система является k-кратно совместимой.

Указатель совместимости k данной системы определяется следующей теоремой. Если p — высший порядок детерминанта не равного нулю, какой можно получить из матрицы

$$(\mathrm{A}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1N} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{M1}, & a_{M2}, \ldots, & a_{MN} \end{pmatrix},$$

то $k = N - p$. Число p называется *рангом* матрицы (A).

Рассмотрим неоднородную систему уравнений

$$\begin{gathered} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1N} X_N = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{M1} X_1 + a_{M2} X_2 + \ldots + a_{MN} X_N = b_M, \end{gathered}$$

а вместе с ней расширенную матрицу

$$(\mathrm{B}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1N}, & b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{M1}, & a_{M2}, \ldots, & a_{MN}, & b_M \end{pmatrix}.$$

Ранг (B) по меньшей мере равен рангу (A). Для того, чтобы неоднородная система уравнений была совместимой, необходимо и достаточно, чтобы ранг (B) был в точности равен рангу (A). В данном случае, если

$$X_{10},\ X_{20},\ldots,\ X_N0$$

— любое частное решение неоднородной системы, то общее решение будет иметь вид

$$X_1 = X_{10} + c_1X_{11} + c_2X_{12} + \ldots + c_kX_{1k},$$
$$X_2 = X_{20} + c_1X_{21} + c_2X_{22} + \ldots + c_kX_{2k}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_N = X_N0 + c_1X_{N1} + c_2X_{N2} + \ldots + c_kX_{Nk}.$$

9·22. Определение индекса линейной диференциальной системы. Пусть $y_1, y_2,\ldots, y_n$ будет фундаментальной последовательностью решений однородного линейного диференциального уравнения

$$L(y) = 0.$$

Определение совместимости данного уравнения с m однородными линейными граничными условиями

$$U_i(y) = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ m)$$

эквивалентно задаче определения постоянных $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$ в общем решении

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$$

так, чтобы граничные условия были удовлетворены. Следовательно, все зависит от совместимости или несовместимости системы m одновременно заданных уравнений

$$c_1U_1(y_1) + c_2U_1(y_2) + \ldots + c_nU_1(y_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1U_m(y_1) + c_2U_m(y_2) + \ldots + c_nU_m(y_n) = 0,$$

а также и от ранга матрицы

$$(U) \equiv \begin{pmatrix} U_1(y_1), & U_1(y_2), & \ldots, & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_m(y_1), & U_m(y_2), & \ldots, & U_m(y_n) \end{pmatrix}.$$

Если ранг матрицы p —, то мы получим $n - p$ линейно независимых последовательных значений $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$ и каждому из этих значений будет соответствовать одно решение диференциального уравнения, удовлетворяющее граничным условиям. Следовательно индекс диференциальной системы $k = n - p$. Таким образом *для того, чтобы данная система была k-кратно совместимой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (U) был равен $n - k$.* В частности, если ранг матрицы равен n, (что предполагает условие $m \geqslant n$), то система будет несовместимой.

Рассмотрим неоднородную систему

$$\begin{cases} L(y) = r(x), & \\ U_i(y) = \gamma_i & (i = 1,\ 2,\ldots,\ m) \end{cases}$$

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют, как и выше, фундаментальную последовательность решений однородного уравнения и если y_0 — частное решение неоднородного уравнения, то общее решение последнего будет иметь вид

$$y = y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Чтобы граничные условия неоднородной системы были удовлетворены, необходимо определить постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из уравнений

$$c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \ldots + c_n U_1(y_n) = \gamma_1 - U_1(y_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1 U_m(y_1) + c_2 U_m(y_2) + \ldots + c_n U_m(y_n) = \gamma_m - U_m(y_0).$$

Возможность этого определения зависит от ранга расширенной матрицы

$$(U^1) \equiv \begin{pmatrix} U_1(y_1), & U_1(y_2), \ldots, & U_1(y_n), & \gamma_1 - U_1(y_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_m(y_1), & U_m(y_2), \ldots, & U_m(y_n), & \gamma_m - U_m(y_0) \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы неоднородная система была совместимой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (U^1) *был равен рангу матрицы* (U). Если p — общий ранг матриц, то общее решение каждой системы будет зависеть от $n-p$ произвольных постоянных.

Отсюда можно сделать весьма важный вывод, что *если $m < n$, то для того, чтобы неоднородная система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая приведенная система была $(n-m)$-кратно совместимой; при $m = n$ приведенная система несовместима.*

9 · 3. Свойства билинейной формы. Выражение

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1N}x_1y_N + \\ & a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2N}x_2y_N + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{N1}x_Ny_1 + a_{N2}x_Ny_2 + \ldots + a_{NN}x_Ny_N \end{aligned}$$

называется билинейной формой двух последовательностей N переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_N,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_N,$$

так как коэфициент каждого x является линейной функцией переменных, и наоборот. Необходимо различать случай, когда детерминант

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1N} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1}, & a_{N2}, \ldots, & a_{NN} \end{vmatrix},$$

являющийся детерминантом этой билинейной формы, равен или не равен нулю. В первом случае билинейная форма называется *сингулярной*, в последнем — *несингулярной* (обыкновенной). Примем, что рассматриваемая форма несингулярна.

Заменим переменные $x_1, x_2, \ldots, x_N$ новой последовательностью N переменных $X_1, X_2, \ldots, X_N$ подстановкой

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \ldots + c_{2N} X_N, \\
x_2 &= c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \ldots + c_{2N} X_N, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_N &= c_{N1} X_1 + c_{N2} X_2 + \ldots + c_{NN} X_N,
\end{aligned}$$

детерминант которой

$$C = | c_{ij} |$$

не равен нулю. Поскольку $C \neq 0$, подстановка обратима, т. е. переменные X определяются только через переменные x. Билинейная форма может быть тогда выражена в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} d_{ij} X_i y_j,$$

а соответствующий детерминант будет

$$\begin{aligned}
D = | d_{ij} | &= | a_{ik} | \, | c_{kj} | . \\
&= AC \neq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно билинейная форма после подстановки остается несингулярной.

Теперь заменим переменные $y_1, y_2, \ldots, y_N$ последовательностью $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ посредством линейной подстановки

$$\begin{aligned}
Y_1 &= d_{11} y_1 + d_{12} y_2 + \ldots + d_{1N} y_N, \\
Y_2 &= d_{21} y_1 + d_{22} y_2 + \ldots + d_{2N} y_N, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_N &= d_{N1} y_1 + d_{N2} y_2 + \ldots + d_{NN} y_N,
\end{aligned}$$

детерминант которой не равен 0. Форма следовательно приводится к выражению

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots X_N Y_N,$$

которое можно рассматривать как каноническое представление несингулярной билинейной формы. Это приведение может быть проведено различно, так как переменные $x_1, x_2, \ldots, x_N$ могут быть преобразованы в новую последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_N$ при помощи любой линейной подстановки, детерминант которой не равен нулю. Однако, после того как новая последовательность переменных $X_1, X_2, \ldots, X_N$ была определена, соответствующая последовательность $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ стала единственной.

Рассмотрим, какое изменение вводится в последовательность переменных Y при изменении одного или более переменных X. Предположим, что

$$X_1, X_2, \ldots, X_M, X_{M+1}, \ldots, X_N,$$

соответствуют

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_M, Y_{M+1}, \ldots, Y_N.$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_M$ остаются неизменными, а $X_{M+1}, \ldots, X_N$ будут заменены новыми переменными $X'_{M+1}, \ldots, X'_N$, так что

$$X_1, X_2, \ldots, X_M, X'_{M+1} \ldots, X'_N$$

образуют линейную независимую систему. Далее, пусть

$$Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_M, Y'_{M+1}, \ldots Y'_N$$

будет соответствующей системой, тогда

$$X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_MY_M + X_{M+1}Y_{M+1} + \ldots + X_NY_N$$
$$\equiv X_1Y'_1 + X_2Y'_2 + \ldots + X_MY'_M + X'_{M+1}Y'_{M+1} + \ldots + X_NY'_N$$

Поскольку $X_1, X_2, \ldots, X_M, X'_{M+1}, \ldots, X'_N$ — линейно-независимые величины, выведенные из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ подстановкой, детерминант которой не равен нулю, то единственная последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ может быть найдена таким образом, что

$$X_1 = \ldots = X_M = 0, \; X'_{M+1} = 1, \; X'_{M+2} = \ldots = X'_N = 0.$$

Тогда, если для этих значений $x_1, x_2, \ldots, x_N, X_{M+1}, X_{M+2}, \ldots, X_N$ становятся равными соответственно $A_{M+1}, A_{M+2}, \ldots, A_N$, то отсюда следует, что

$$Y'_{M+1} = A_{M+1}Y_{M+1} + A_{M+2}Y_{M+2} + \ldots + A_NY_N.$$

$Y'_{M+2}, \ldots, Y'_N$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций $Y_{M+1}, \ldots, Y_N$. Величины $Y_1, Y_2, \ldots, Y'_M$ могут рассматриваться аналогично. В частности, определим последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$, для которых

$$X_1 = 1, \; X_2 = \ldots = X_M = X'_{M+1} = \ldots = X'_N = 0;$$

пусть для этой последовательности значений $X_{M+1}, \ldots, X_N$ будут соответственно равны $B_{M+1}, \ldots, B_N$; тогда

$$Y'_1 = Y_1 + B_{M+1}Y_{M+1} + \ldots + B_NY_N,$$

и будут найдены аналогичные выражения для $Y'_2, \ldots, Y'_M$.

9·31. Сопряженные диференциальные системы. Теория билинейных форм, которая была рассмотрена в предыдущем параграфе, имеет важное значение в развитии понятия присоединенной пары линейных диференциальных систем.[1]

Пусть

$$L(u) \equiv p_0 \frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{du}{dx} + p_n u$$

будет линейным диференциальным выражением, где коэфициенты p_i — непрерывные функции вещественной переменной x в в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, первые $n-i$ производных p_i существуют и непрерывны, а p_0 не обращается тождественно в нуль ни в одной точке замкнутого интервала (a, b)[2].

В этом случае сопряженное выражение примет вид

$$\overline{L}(v) \equiv (-1)^n \frac{d^n (p_0 v)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 v)}{dx^{n-1}} + \ldots - \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v,$$

а $L(u)$ и $\overline{L}(v)$ будут связаны тождеством Лагранжа (§ 5·3)

$$vL(u) - u\overline{L}(v) = \frac{d}{dx} P(u, v),$$

где $P(u, v)$ — билинейная форма

$$u\left[p_{n-1}v - \frac{d(p_{n-2}v)}{dx} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_0 v)}{dx^{n-1}}\right] +$$
$$+ \frac{du}{dx}\left[p_{n-2}v - \frac{d(p_{n-3}v)}{dx} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}(p_0 v)}{dx^{n-2}}\right] +$$
$$+ \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} p_0 v \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Детерминантом этой формы является

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & (-1)^{n-1} p_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & (-1)^{n-2} p_0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & -p_0, & & 0, & 0 \\ p_0 & 0, & \ldots & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

Элементы ниже второй диагонали все равны нулю, поэтому детерминант равен $\pm (p_0)^n$, что не равно нулю ни в одной точке интервала (a, b). Билинейная форма зависит от последовательности переменных

$$u, \; u', \ldots, \; u^{(n-1)},$$

$$v, \; v', \ldots, \; v^{(n-1)}.$$

---

[1] Специальная пара присоединенных диференциальных систем дана Лиувиллем Liouville, J. de Math., 3 (1838), 606. Мэзон [Mason, Trans. Am. Math. Soc., 7 (1906), 337] рассматривает системы второго порядка; Биркхофф [Birckhoff. ibid., 9 (1908), 373] и Бохер [Bôcher, ibid., 14 (1913), 403] рассматривают общий вопрос. Распространение на системы диференциальных уравнений см. Bounitzky, J. de Math. (6), 5 (1909), 65, и Bôcher, loc. cit.

[2] Это означает, что уравнение не имеет особых точек ни в интервале (a, b), ни в его конечных точках.

Если мы тождество Лагранжа проинтегрируем между пределами a и b, то получим формулу Грина

$$\int_a^b \{vL(u) - u\overline{L}(v)\}\,dx = [P(u, v)]_a^b.$$

Правый член представляет собой билинейную форму двух последовательностей $2n$ величин

$$u(a),\ u'(a), \ldots, u^{(n-1)}(a),\ u(b),\ u'(b), \ldots, u^{(n-1)}(b),$$
$$v(a),\ v'(a), \ldots, v^{(n-1)}(a),\ v(b),\ v'(b), \ldots v^{(n-1)}(b);$$

его детерминант имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Delta(a) & 0 \\ 0, & \Delta(b) \end{vmatrix} = \{p_0(a)\,p_0(b)\}^n$$

и не равен нулю. Форма $[P(u, v)]_a^b$ является обыкновенной и может быть приведена к каноническому виду.

Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ будут любыми $2n$ линейно-независимыми однородными выражениями типа

$$U_i(u) \equiv \alpha_i\ u(a) + \alpha_i'\ u'(a) + \ldots + \alpha_i^{(n-1)}\ u^{(n-1)}(a) +$$
$$+ \beta_i\ u(b) + \beta_i'\ u'(b) + \ldots + \beta_i^{(n-1)}\ u^{(n-1)}(b),$$

где детерминант $4n^2$ коэфициентов не равен нулю. В этом случае существует единственная последовательность

$$V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$$

независимых форм, линейных относительно

$$v(a),\ v'(a), \ldots, v^{(n-1)}(a),\ v(b),\ v'(b), \ldots, v^{(n-1)}(b),$$

так что

$$[P(u, v)]_a^b = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \ldots + U_{2n}V_1.$$

Следовательно формула Грина может быть написана в виде

$$\int_a^b \{vL(a) - u\overline{L}(v)\}dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \ldots + U_{2n}V_1.$$

Если $U_1, U_2, \ldots, U_m$ останутся неизменными при различных $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$, то $V_1, V_2, \ldots, V_{2n-m}$ преобразуются в новую последовательность $V_1', V_2', \ldots, V_{2n-m}'$, представляющую линейные комбинации $V_1, V_2, \ldots V_{2n-m}$. Таким образом значения $V_1, V_2, \ldots, V_{2n-m}$ зависят только от $U_1, U_2, \ldots, U_m$.

Система

$$\begin{cases} L(v) = 0, \\ V_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n - m) \end{cases}$$

является сопряженной с системой

$$\begin{cases} L(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Симметрия формул показывает, что вторая система также будет сопряженной относительно первой.

Если однородную линейную диференциальную систему рассматривать как аналогию последовательности уравнений

$$a_{11} X_1 + \ldots + a_{1N} X_N = 0,$$
$$a_{M1} X_1 + \ldots + a_{MN} X_N = 0,$$

то сопряженное уравнение будет соответствующей аналогией

$$a_{11} Y_1 + \ldots + a_{M1} Y_M = 0,$$
$$a_{1N} Y_1 + \ldots + a_{MN} Y_M = 0.$$

9·32. Свойство решений k-кратно совместимой системы. Формы $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$ ограничены только условием, что

$$U_1,\ U_2, \ldots,\ U_m,\ U_{m+1},\ \ldots,\ U_{2n}$$

линейно-независимы. Однако они имеют важное свойство; если $u_1, u_2, \ldots, u_k$ образуют линейно-независимую последовательность решений k-кратносовместимой системы

$$\begin{cases} L\ (u) = 0, \\ U_i(u) = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

то

$$U_i(u_1),\ U_i(u_2), \ldots,\ U_i(u_k) \qquad (i = m+1, \ldots, 2n)$$

будут линейно-независимы.

Постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_k$ могут быть найдены таким образом, что

$$U_i(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots c_k u_k) = c_1 U_i(u_1) +$$
$$+ c_2 U_i(u_2) + \ldots + c_k U_i(u_k) = 0 \quad (i = m+1, \ldots, 2n).$$

Но

$$U_i(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_k u_k) = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, m),$$

откуда

$$U_i(u) = 0,$$

где

$$i = 1,\ 2, \ldots,\ 2n, \text{ а } u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_k u_k.$$

Эти $2n$ независимых однородных уравнения содержат $2n$ величины

$$u(a),\ u'(a), \ldots,\ u^{(n-1)}(a),\ u(b),\ u'(b), \ldots,\ u^{(n-1)}(b);$$

так как детерминант $4n^2$ коэфициентов не равен нулю, эти уравнения не удовлетворяются, если только каждая из этих величин не равна нулю. Однако это невозможно, поскольку тогда u обратилось бы в нуль. Следовательно теорема установлена.

9·33. Случай, когда число независимых граничных условий равно порядку уравнения. Случай $m = n$ имеет большое значение и значительно проще общего случая. Докажем, что *указатель* *совместимости однородной дифференциальной системы равен указателю сопряженной системы.*

Предположим, что данная система имеет вид

$$\begin{cases} L\ (u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть k будет ее указателем, а $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — последовательностью линейно-независимых решений. Сопряженная система будет иметь вид

$$\begin{cases} \overline{L}\ (v) = 0, \\ V_i(v) = 0 \end{cases} \qquad (i + 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ будет фундаментальной последовательностью решений уравнения

$$\overline{L}\,(v) = 0;$$

тогда формула Грина

$$\int_a^b \{vL(u) - u\overline{L}(v)\}\,dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n} + \ldots + U_{2n}V_1$$

будет приведена к

$$\begin{gathered} U_{n+1}(u)\,V_n(v_1) + \ldots + U_{2n}(u)\,V_1(v_1) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{n+1}(u)\,V_n(v_n) + \ldots + U_{2n}(u)\,V_1(v_n) = 0, \end{gathered}$$

где u — любое решение последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Эта последовательность уравнений, рассматриваемая в виде уравнений для определения $U_{n+1}, \ldots, U_{2n}$, имеет k решений

$$U_{n+1}(u_i), \ldots, U_{2n}(u_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

а эти решения, согласно предыдущему параграфу, линейно-независимы. Следовательно ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} V_n(v_1), & \ldots, & V_1(v_1) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ V_n(v_n), & \ldots, & V_1(v_n) \end{pmatrix}$$

равен самое большое $n - k$. Но это точно соответствует матрице, определяющей показатель присоединенной системы. Если он равен k', то ранг матрицы будет $n - k'$, следовательно

$$n - k' \leqslant n - k$$

или

$$k' \geqslant k.$$

Однако, если обе системы взаимозаменимы, то отсюда следует, что $k \geqslant k'$, откуда $k' = k$, что и требовалось доказать.

Если устранить ограничение $m = n$, то более общей формой теоремы будет $k' = k + m - n$. Доказательство следует из тех же общих принципов. Сначала устанавливается, что $k' > k+m-n$. Из обратимости между системой и сопряженной с ней системой можно вывести, что $k \geqslant k'+(2n-m)-n$ или $k' \leqslant k+m-n$, откуда непосредственно следует теорема.

9·34. Неоднородная система. Пусть данная полная система имеет вид

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} L(u) = r, \\ U_i(u) = \gamma_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда, для того чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение однородной сопряженной системы

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \bar{L}(v) = 0, \\ V_i(v) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяло соотношению

$$\text{(C)} \qquad \int_a^b vr\,dx = \gamma_1 V_{2n}(v) + \ldots + \gamma_n V_{n+1}(v).$$

Пусть k будет указателем однородной системы (B); если $k = 0$, то теорема следует из § 9 · 22, если же $k > 0$, то $v_1, v_2, \ldots, v_k$ образуют линейно-независимую последовательность решений.

Если данная полная система имеет решение u, то пусть v будет любым решением системы (B). Если определенные таким образом u и v подставить в формулу Грина, то уравнение (C) следует непосредственно.

Чтобы доказать, что условие *достаточно*, примем, что u_0 будет любым решением уравнения

$$L(u) = r,$$

тогда теорема Грина приводит к соотношению

$$\int_a^b vr\,dx = U_1(u_0) V_{2n}(v) + \ldots + U_n(u_0) V_{n+1}(v),$$

где v — любое решение системы (B).

Вычитая это соотношение из (C), получим

$$\text{(D)} \qquad \{U_1(u_0) - \gamma_1\} V_{2n}(v) + \ldots + \{U_n(u_0) - \gamma_n\} V_{n+1}(v) = 0.$$

Теперь пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будет фундаментальной системой решений однородного уравнения

$$L(u) = 0,$$

тогда, согласно теореме Грина,

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} &U_1(u_1) V_{2n}(v) + \ldots + U_n(u_1) V_{n+1}(v) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &U_1(u_n) V_{2n}(v) + \ldots + U_n(u_n) V_{n+1}(v) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом всего имеется $n+1$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $V_{2n}(v), \ldots, V_{n+1}(v)$; они удовлетворяются k решениями

$$V_{2n}(v_i), \ldots, V_{n+1}(v_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$

которые, согласно § 9·32, линейно-независимы. Ранг матрицы последовательности $n+1$ уравнений (D, E) поэтому равен не больше $n-k$, но он не может быть меньше $n-k$, так как ранг матрицы n уравнений (E) в точности равен $n-k$. Следовательно, ранг обеих матриц равен $n-k$, откуда следует, что данная полная система имеет решение.

При $m \neq n$, для того, чтобы система

$$\begin{cases} L\ (u) = r \\ U_i\,(u) = \gamma_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение v однородной сопряженной системы

$$\overline{L}(v) = 0$$

$$V_i(v) = 0 \qquad (i=1,\ 2, \ldots, 2n-m)$$

удовлетворяло соотношению

$$\int_a^b vr\,dx + \gamma_1 V_{2n}(v) + \ldots + \gamma_m V_{2n-m+1}(v).$$

Случай, когда $n \geqslant m$, $k = n - m$, может быть рассмотрен на основании выводов § 9·22; доказательство аналогично приведенному.

9·4. Самосопряженная линейная диференциальная система второго порядка. Предположим, что

$$L(u) \equiv p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_2 u$$

будет однородным линейным диференциальным выражением второго порядка, Сопряженное выражение будет иметь вид

$$\overline{L}(v) \equiv p_0 \frac{d^2v}{dx^2} + (2p_0' - p_1) \frac{dv}{dx} + (p_0'' - p_1' + p_2)\,v.$$

Поэтому, для того, чтобы выражение $L(u)$ было тождественным по форме с его сопряженным $\overline{L}(v)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_0' = p_1.$$

Выражение может быть тогда написано в виде

$$\frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{du}{dx}\right) + p_2 u.$$

В общей форме $L(u)$ не является самосопряженным, но выражение

$$\frac{1}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left\{ e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} \frac{du}{dx} \right\} + \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} u$$

самосопряженное. Следовательно, если любое уравнение второго порядка может быть сделано самосопряженным посредством умножения на соответствующий множитель (который не обращается в нуль или становится бесконечным в интервале (a, b) при условиях § 9·31), то мы не потеряем в общности, считая самосопряженное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{ K \frac{du}{dx} \right\} - Gu = R,$$

известное как уравнение Штурма, общим уравнением второго порядка. В данном случае, пусть

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left\{ K \frac{du}{dx} \right\} - Gu,$$

тогда, если u и v — любые две функции x, первая и вторая производные которой непрерывны в интервале (a, b), то

$$vL(u) - uL(v) = \frac{d}{dx}\left[K\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right)\right],$$

следовательно билинейная форма будет иметь вид

$$P(u, v) = K\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right).$$

Формула Грина приводится в данном случае к простому виду

$$\int_a^b \{ v L(u) - uL(v) \} dx = \left[K\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right)\right]_a^b.$$

В частности, если $L(u) = 0$, $L(v) = 0$, она приводится к формуле Абеля

$$K(b)\{ v(b) u'(b) - u(b) v'(b)\} = K(a)\{v(a) u'(a) - u(a) v'(a)\}.$$

Рассмотрим однородную диференциальную систему

$$\begin{cases} L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left\{ K \frac{du}{dx} \right\} - Gu = 0, \\ U_1(u) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u(b) + \alpha_3 u'(a) + \alpha_4 u'(b) = 0, \\ U_2(u) = \beta_1 u(a) + \beta_2 u(b) + \beta_3 u'(a) + \beta_4 u'(b) = 0, \end{cases}$$

где U_1 и U_2 — линейно-независимы. Это условие означает, что из шести детерминантов $\delta_{ij} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$, содержащихся в матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \end{pmatrix},$$

не все равны нулю.

Предположим, что $\delta_{12} \neq 0$, тогда, пусть U_3 и U_4 будут такими, что U_1, U_2, U_3, U_4 — линейно-независимы. Например, пусть

$$U_3(u) = u'(a), \quad U_4(u) = u'(b),$$

тогда, если u и v — любые функции x, так что $L(u)$ и $L(v)$ непрерывны в интервале (a, b), то

$$\int_a^b \{v L(u) - u L(v)\}\, dx = \left| K\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \right|_a^b =$$

$$= U_1 V_4 + U_2 V_3 + U_3 V_2 + U_4 V_1,$$

т. е.

$$K(b)\{v(b)\, u'(b) - u(b)\, v'(b)\} - K(a)\{v(a)\, u'(a) - u(a)\, v'(a)\} =$$

$$= \{\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u(b) + \alpha_3 u'(a) + \alpha_4 u'(b)\} V_4 +$$

$$+ \{\beta_1 u(a) + \beta_2 u(b) + \beta_3 u'(a) + \beta_4 u'(b)\} V_3 +$$

$$+ u'(a) V_2 + u'(b) V_1.$$

Сравнивая коэфициенты $u(a)$, $u(b)$, $u'(a)$ и $u'(b)$, получим четыре уравнения

$$\alpha_1 V_4 + \beta_1 V_3 = K(a)\, v'(a);$$

$$\alpha_2 V_4 + \beta_2 V_3 = -K(b)\, v'(b),$$

$$V_2 + \alpha_3 V_4 + \beta_3 V_3 = -K(a)\, v(a),$$

$$V_1 + \alpha_4 V_4 + \beta_4 V_3 = K(b)\, v(b).$$

Из этих уравнений можно получить V_1, V_2, V_3 и V_4

$$V_1(v) = K(b)\, v(b) + \frac{1}{\delta_{12}} \{\delta_{24} K(a)\, v'(a) + \delta_{14} K(b)\, v'(b)\},$$

$$V_2(v) = -K(a)\, v(a) - \frac{1}{\delta_{12}} \{\delta_{23} K(a)\, v'(a) + \delta_{13} K(b)\, v'(b)\},$$

$$V_3(v) = -\frac{1}{\delta_{12}} \{\alpha_2 K(a)\, v'(a) + \alpha_1 K(b)\, v'(b)\},$$

$$V_4(v) = \frac{1}{\delta_{12}} \{\beta_2 K(a)\, v'(a) + \beta_1 K(b)\, v'(b)\}.$$

Чтобы система была самосопряженной, необходимо и достаточно, чтобы $V_1(v)$ и $V_2(v)$ были линейными комбинациями $U_1(v)$ и $U_2(v)$. Поскольку $v(a)$ не входит в V_1, то V_1 можно получить исключением $v(a)$ из $U_1(v)$ и $U_2(v)$. Отсюда V_1 — кратно

$$\delta_{12}(v)\, b + \delta_{13}(v')\, a + \delta_{14}(v')\, b,$$

следовательно

$$V_1(v) = K(b)\, v(b) + \frac{1}{\delta_{12}} \left\{ \delta_{13} K(b)\, v'(a) + \delta_{14} K(b)\, v'(b) \right\}.$$

Из сравнения с предыдущим выражением для V_1 можно видеть, что требуемым условием будет

$$\delta_{24}K(a) = \delta_{13}K(b).$$

Аналогичное условие может быть получено вследствие того, что $V_2(v)$ получается исключением $v(b)$ из $U_1(v)$ и $U_2(v)$. Таким образом полученное условие необходимо и достаточно для того, чтобы рассматриваемая система была самосопряженной.

Предположим, что $\delta_{13} \neq 0$; в этом случае независимая последовательность линейных выражений U может быть получена при

$$U_3(u) = u(b), \qquad U_4(u) = u'(b).$$

Легко найти, что

$$V_1(v) = K(b)v(b) + \frac{1}{\delta_{13}}\{\delta_{14}K(a)v(a) + \delta_{34}K(a)v'(a)\},$$

$$V_2(v) = -K(b)v'(b) + \frac{1}{\delta_{13}}\{\delta_{12}K(a)v(a) - \delta_{23}K(a)v'(a)\},$$

$$V_3 = -\frac{1}{\delta_{13}}\{\alpha_1 K(a)v(a) + \alpha_3 K(a)v'(a)\},$$

$$V_4 = \frac{1}{\delta_{13}}\{\beta_1 K(a)\cdot v(a) + \beta_3 K(a)v'(a)\}.$$

Отсюда можно вывести, что

$$\delta_{24}K(a) = \delta_{13}K(b)$$

— необходимое и достаточное условие, чтобы данная система была самосопряженной.

Остальные четыре случая $\delta_{14} \neq 0$, $\delta_{23} \neq 0$, $\delta_{24} \neq 0$ и $\delta_{34} \neq 0$ могут быть рассмотрены аналогично; каждый случай приводит к тому же условию самосопряженности данной системы.

9·41. Системы Штурм-Лиувилля. Система типа

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}k\left\{\dfrac{dy}{dx}\right\} + \{\lambda g - e\}y = 0, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

называется системой Штурм-Лиувилля. В интервале $a \leqslant x \leqslant b$, k, (которое везде положительно), g и l — непрерывные функции x, а λ — произвольный параметр. Условием самосопряженности данной системы является $\delta_{24}k(a) = \delta_{13}k(b)$; предположим, что это условие удовлетворено.

Специальный случай системы, в которой граничными условиями являются

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} y'(a) - hy(a) = 0, \\ y'(b) + Hy(b) = 0, \end{cases}$$

возникает в задаче распределения температуры в неоднородном стержне[1], система самосопряженная, так как в данном случае $\delta_{24} = \delta_{13} = 0$.

Исключая поочередно $y'(a)$ и $y(a)$, граничные условия (A) могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} \delta_{13}y(a) + \delta_{23}y(b) - \delta_{34}y'(b) = 0, \\ \delta_{13}y'(a) + \delta_{12}y(b) + \delta_{14}y'(b) = 0. \end{cases}$$

Если $\delta_{13} = 0$, то, поскольку система самосопряжена, $\delta_{24} = 0$, и граничные условия приводятся к (B). При $\delta_{13} \neq 0$ система может быть написана в виде

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\} + \{\lambda g - l\}y = 0, \\ y(a) = \gamma_1 y(b) + \gamma_1' y'(b), \\ y'(a) = \gamma_2 y(b) + \gamma_2' y'(b), \end{cases}$$

и условие для самосопряженности системы примет вид

$$k(b) = (\gamma_1\gamma_2' - \gamma_1'\gamma_2)k(a).$$

В частности, система, содержащая так называемые *периодические граничные условия*

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b), \end{cases}$$

самосопряженная, если

$$k(a) = k(b).$$

9·5. Диференциальные системы, содержащие параметры. Характеристические числа. Часто в однородной диференциальной системе порядка n

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ U_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

коэфициенты диференциального уравнения, а иногда и граничных условий зависят от параметра λ. (Такой случай был рассмотрен в предыдущем параграфе). Основным вопросом в данном случае является определение частных значений λ, для которых система становится совместимой. Такие значения λ называются *характеристическими числами* системы, а соответствующие им решения — *фундаментальными функциями*[2].

Предположим, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная последовательность действительных решений уравнения

$$L(y) = 0,$$

---

[1] В этой задаче k представляет проводимость, g — удельную теплоту, а l, h и H зависят от излучающей способности у поверхности и концов стержня. λ должна быть определена таким образом, чтобы сделать систему совместимой.

[2] В советской литературе употребительны термины: характеристические, собственные, фундаментальные числа—соответственно функции. *(Прим. ред.)*.

которые должны рассматриваться как функции двух вещественных переменных (x, λ) и как таковые являются непрерывными функциями[1] (x, λ); они имеют производные до $(n-1)$ порядка относительно x, которые также являются непрерывными функциями (x, λ) при $a \leqslant x \leqslant b$ и λ, лежащей в интервале (Λ_1, Λ_2). Условие совместимости

$$\begin{vmatrix} U_1(y_1), \ldots, U_1(y_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ U_n(y_1), \ldots, U_n(y_n) \end{vmatrix} = 0$$

можно переписать так

$$F(\lambda) = 0.$$

Принимая, что коэфициенты U_i — непрерывные функции λ, $F(\lambda)$ будет непрерывной в интервале $(\Lambda_1 \Lambda_2)$. Это уравнение называется характеристическим уравнением системы, а его корни — характеристическими числами. Для значений λ, лежащих в открытом интервале $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$, корни характеристического уравнения изолированы[2]; конечные точки Λ_1 и Λ_2 могут быть предельными точками бесконечного числа корней.

Характеристическое уравнение не зависит от фундаментальной последовательности выбранных решений, так как влияние подстановки Y_i вместо y_1 где

$$Y_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

выражается в умножении левого члена характеристического уравнения на детерминант $|c_{ij}|$, не равный нулю, поскольку $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную последовательность[3].

При каждом характеристическом числе λ_i система будет иметь некоторый указатель совместимости, например k_i. Более того, λ_i, рассматриваемая как корень характеристического уравнения, будет иметь кратность m_i. m_i может быть не равно k_i, но в любом случае

$$k_i \leqslant m_i$$

(не следует забывать, что $k_i \leqslant n$). Чтобы установить это неравенство, достаточно показать, что если λ — любое характеристическое число, а k — его указатель, то

$$F'(\lambda) = F''(\lambda) = \ldots = F^{(k-1)}(\lambda) = 0.$$

---

[1] Определение непрерывной функции двух вещественных переменных см. примечание к § 3·1; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их первые $(n-1)$ производных относительно x — непрерывные функции (x, λ); это следует из теорем существования §§ 3·31, 3·32.

[2] См. § 9·6.

[3] Коэфициенты c_{ij} могут быть функциями λ, но тогда последовательность $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ перестанет быть фундаментальной для любых значений λ, для которых $|c_{ij}| = 0$. Это усложнение может быть преодолено, если принять, что $y_1 y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную последовательность для всех значений λ в интервале (Λ_1, Λ_2).

Функция $F^{(r)}(\lambda)$ может быть получена из детерминантов, каждый из которых содержит не меньше $(n-r)$ неизмененных столбцов $F(\lambda)$, причем остальные столбцы могут быть выведены диференцированием из соответствующих столбцов. Пусть каждый из этих детерминантов разложен, согласно формуле Лапласа[1], по минорам, содержащимся в $n-r$ недиференцированных столбцах. Поскольку показатель λ равен k, все детерминанты порядка $n-k+1$ или больше, извлеченные из матрицы $(U_i(y_i))$, будут равны нулю, т. е. каждый член разложения $F^{(r)}(\lambda)$ будет равен нулю при условии, если $r \leqslant k-1$. Следовательно корень λ кратен k, что и требовалось доказать.

9·6. Влияние малых изменений в коэфициентах линейной диференциальной системы. Предположение, что коэфициенты линейной диференциальной системы

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} L(y)=0 \\ U_i(y)=0 \end{cases} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

зависят от параметра λ, вызывает вопрос о влиянии на совместимость системы изменения величины λ. В частности, важно определить, изменяется ли при малом изменении λ показатель системы, если известно, что для данного значения λ, например $_0$, система k-кратно совместима[2].

Теорема I. *Показатель системы не увеличивается при любом изменении коэфициентов, которое равномерно и достаточно мало*[3].

Если показатель системы для характеристического числа λ_0 равен k, то внутри матрицы

$$\begin{pmatrix} U_1(y_1), & \ldots, & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ U_n(y_1), & \ldots, & U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

существует не меньше одного детерминанта порядка $n-k$, который не равен нулю при $\lambda=\lambda_0$ § 9·22. Предположим, что для λ_0 дано небольшое изменение, тогда, если число δ (независимое от x) существует так, что после этого изменения каждый коэфициент $L(y)$ и $U_i(y)$ изменяется по абсолютной величине, не больше чем на δ, то изменение детерминанта сравнимо с δ. Достаточно малое изменение в λ_0 не уменьшает детерминанта до нуля, что доказывает теорему.

---

[1] Scott and Mathews, Theory of Determinants, 30.

[2] Настоящее исследование принадлежит Бохеру, Bull. Am. Math. Soc., 21 (1914), I.

[3] Для каждого характеристического числа λ_0 существует число δ, таким образом, что оно в каждом коэфициенте $L(y)$ по абсолютной величине меньше δ для всех значений x в интервале (a, b). Аналогично изменение каждого коэфициента в $U_1(y)$ по абсолютной величине меньше δ.

С другой стороны, все дитерминанты порядка $n-k+1$, полученные из матрицы, равны нулю при $\lambda=\lambda_0$. Весьма вероятно, что малое изменение, сообщенное λ_0, изменило бы значение по крайней мере одного из этих детерминантов, что означало бы, что показатель упал ниже k.

Не рассматривая вопроса во всей его полноте, разберем важный частный случай и докажем, что при равномерном достаточно малом изменении одного отдельного коефициента, именно y в $L(y)$, показатель может быть приведен к нулю. Доказательство основано на трех предварительных леммах.

Лемма I. *Пусть $y_0(x)$ будет некоторым частным решением данной системы, соответствующим характеристическому числу λ_0. Тогда существует непрерывная в интервале (x, λ) функция $y(x, \lambda)$, удовлетворяющая системе* (A) *для значений λ в интервале Λ, содержащем λ_0, и приводимая к $y_0(x)$ при $\lambda=\lambda_0$.*

Чтобы придать задаче определенность, предположим, что детерминантом, который не обращается в нуль при $\lambda=\lambda_0$, является детирминант, образованный первыми $(n-k)$ рядами и столбцами матрицы (U). Тогда, любое решение $L(y)=0$, удовлетворяющее первым $(n-k)$ граничным условиям, будет также удовлетворять остальным k условиям.

Такое решение дается детерминантом

$$(B) \qquad y(x, \lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1, & \ldots, & y_{n-k}, & c_1 y_{n-k+1} & +\ldots & +c_k y_n \\ U_1(y_1), & \ldots, & U_1(y_{n-k}), & c_1 U_1(y_{n-k+1}) & +\ldots & +c_k U_1(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{n-k}(y_1), & \ldots, & U_{n-k}(y_{n-k}), & c_1 U_{n-k}(y_{n-k+1}) & +\ldots & +c_k U_{n-k}(y_n) \end{vmatrix}$$

Тождественное обращение в нуль этого детерминанта, если бы оно было возможно, выразило бы линейную зависимость между фундаментальными решениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Так как это противоречит принятым условиям, то детерминант не равен тождественно нулю. Следовательно, формула (B) является решением данной системы, а также, поскольку оно зависит от k произвольных постоянных, и общим решением.

Предположим, что существует интервал Λ, содержащий λ_0 таким образом, что система удерживает показатель k для всех значений λ в пределах Λ. Тогда Λ может быть взята достаточно малой, чтобы детерминант из $(n-k)$ рядов, который не обращается в нуль для λ_0, не был равен нулю для любого значения λ в Λ. Следовательно (B) будет общим решением системы для всех значений λ в Λ, а также непрерывной функцией (x, λ), если c_i постоянные или непрерывные функции λ.

Лемма II. *Пусть $u(x)$ будет действительным решением системы*

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} L(u) = gu, \\ U_i(u) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где g — непрерывная функция x, а *$v(x)$ — действительное решение системы, сопряженной с* (A)

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} M(v) = 0, \\ V_i(v) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда

$$\text{(E)} \qquad \int_a^b gu(x)\,v(x)\,dx = 0.$$

Эта лемма является следствием теоремы Грина[1].

Лемма III. *Если данная система* A *совместима и имеет показатель $k \geqslant 1$, то при заданном произвольно малом положительном числе ε существует непрерывная вещественная функция $g(x)$, так что $0 \leqslant g(x) < \varepsilon$, для которой показатель системы* (C) *меньше k.*

Пусть $y(x)$ будет решением системы (A) при $\lambda = \lambda_0$ и пусть $v(x)$ будет решением (D) для того же значения λ. Как $y(x)$, так и $v(x)$ не могут иметь бесконечное число корней в интервале (a, b)[2]. Следовательно, в интервале (a, b) может быть найдена такая точка, в которой произведение $y(x)\,v(x)$ не равно нулю. Более того, поскольку $y(x)\,v(x)$ — непрерывная функция x, точка c может быть включена в интервал (a', b'), внутри которого $y(x)\,v(x)$ не обращается в нуль. Теперь определим φ как непрерывную вещественную функцию x, которая равна нулю вне интервала (a', b'), и как положительную, но меньше ε, для $a' < x < b'$. Из этого определения следует, что

$$\int_a^b \varphi y(x)\,v(x)\,dx \neq 0.$$

Определим g посредством соотношения

$$g = \varkappa\varphi,$$

где $\varkappa$ — постоянная и $0 < \varkappa < 1$. Тогда из выражения (E) получим

$$\int_b^a \varphi u(x)\,v(x)\,dx = 0.$$

---

[1] Подробное доказательство см. более общий случай § 10·7.

[2] Если бы $y(x)$ имело бесконечное число корней в интервале (a, b), то эти корни имели бы предельную точку, например c в интервале (a, b). Тогда $y(c) = y'(c) = \ldots = y^{n-1}(c) = 0$, что невозможно, если $y(x)$ не равно нулю. См. § 10 · 2.

Предположим, что лемма III неверна, тогда для $0 < \varkappa < 1$ система (С) по меньшей мере k-кратно совместима, в то время как по теореме I ее показатель не может превышать k для достаточно малых изменений $\varkappa$. Пусть $\varkappa$ будет ограничена значениями, достаточно малыми для того, чтобы показатель (С) точно соответствовал k. Тогда, по лемме I, $u(x)$ непрерывная функция $(x, \varkappa)$, которая приближается к $y(x)$ так же равномерно, как $\varkappa$ к нулю. Следовательно

$$\int_a^b \varphi u(x) v(x) dx \to \int_a^b \varphi y(x) v(x) dx$$

равномерно при $\varkappa \to 0$. Но это невозможно, так как первый интеграл равен нулю для всех значений k, тогда как второй интеграл не равен нулю. Это противоречие доказывает правильность леммы III.

Теорема II. *Если положительное число ε произвольно, то существует непрерывная вещественная функция $g(x)$, так что $0 \leqslant g(x) < \varepsilon$ и для которой система (С) несовместима. Функция $g(x)$ может быть равна нулю, за исключением случая, когда она находится в произвольно малом подинтервале (a, b).*

Функция g, которая была определена при доказательстве леммы III, понижает показатель системы (С) не меньше, чем на единицу. Если показатель не равен нулю, то функцию $g_1(x)$ можно определить так, чтобы $0 \leqslant g_1 < \varepsilon$, тогда показатель системы

$$\begin{cases} L(u) = gu + g_1 u, \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

будет по крайней мере на единицу меньше показателя (С), и следовательно не менее чем на две единицы меньше показателя (А). При продолжении процесса показатель может быть приведен к нулю. Следовательно теорема II верна.

Если к функции $g(x)$, которая делает систему (С) несовместимой, прибавить достаточно малую функцию x, положительную, но не равную нулю во всех точках интервала (a, b), то, согласно теореме I, система останется несовместимой. Это рассуждение приводит к новой теореме.

Теорема III. *Если положительное число ε произвольно, то существует такая непрерывная вещественная функция $g(x)$* $(0 < g(x) < \varepsilon)$, для которой система (С) несовместима.

Примеры

1. Покажите, что система

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = r, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = A, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = B \end{cases}$$

самосопряженная, если

$$\alpha_2\beta_4-\alpha_4\beta_2=(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\exp\int\limits_a^b p\,dx.$$

2. Докажите, что если ε — произвольное положительное число, а $x_i, \ldots, x_p$ — произвольно выбранные точки в интервале (a, b), то существует вещественная непрерывная функция $g(x)$, которая обращается в нуль и изменяет знак в каждой из точек x_i, но не обращается в нуль ни в какой другой точке интервала (a, b), которая удовлетворяет условию $|g(x)| < \varepsilon$ и делает систему

$$\begin{cases} L(u) = gu, & \\ U_i(u) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

несовместимой.

ГЛАВА X

ТЕОРИЯ ШТУРМА И ЕЕ ПОЗДНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

10·1. Теория Штурма. В настоящей главе мы рассмотрим главным образом уравнения типа

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0,$$

где K и G (в пределах замкнутого интервала $a \leqslant x \leqslant b$) — непрерывные вещественные функции вещественной переменной x. K не обращается в нуль и следовательно может быть принята продолжительной; она имеет непрерывную первую производную в пределах всего интервала.

Фундаментальной теоремой существования (§ 3·32) установлено, что такие уравнения имеют только одно непрерывное решение с непрерывной производной, которое удовлетворяет начальным условиям

$$y(c) = \gamma_0, \quad y'(c) = \gamma_1,$$

где c — любая точка в замкнутом интервале (a, b). Однако, несмотря на ценность теоремы существования с теоретической точки зрения, она почти не дает сведений о природе решения, существование которого она доказывает.

С точки зрения физических приложений, а также и с теоретической точки зрения чрезвычайно важно определить число корней решения, имеющихся в интервале (a, b). Эта задача была впервые исследована Штурмом [1]; его теория основана на работах, которые в настоящее время считаются классическими. Две теоремы сравнения, на которых основана настоящая глава, являются фундаментальными; они послужили базой для весьма важных дальнейших исследований.

10·2. Теорема разделения. Ни одно непрерывное решение уравнения не может иметь бесконечное число корней в интервале (a, b), если оно не равно нулю, так как, если бы оно имело бесконечное число корней, то эти корни, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса [2] имели бы не меньше одной предельной точки c. Тогда не только $y(c)=0$, но также и $y'(c) = 0$, так как

$$y(c+h) = y(c) + hy'(c+\theta h), \qquad (0 \leqslant \theta < 1),$$

---

[1] J. de Math, 1 (1836), 106. Наиболее полный разбор теории и ее развитие см. Bôcher, Leçons sur les méthodes de Sturm (Paris, 1917); Bôcher, Proceedings, Fifth International Congrèss (Cambridge, 1912), I, 163.

[2] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 2·21.

а поскольку c — предельная точка корней, h может быть принято настолько малым, что

$$y(c+h)=0,$$

и следовательно

$$y'(c+\theta h)=0,$$

откуда, вследствие непрерывности $y'(x)$, следует, что

$$y'(c)=0.$$

Но система

$$L(y)=0,$$

$$y(c)=y'(c)=0$$

не имеет решения, не равного тождественно нулю. Это доказывает теорему, которую можно распространить на линейное однородное уравнение порядка n.

Предположим, что y_1 и y_2 будут любыми двумя вещественными линейно-независимыми решениями диференциального уравнения. Примем, что y_1 обращается в нуль не меньше двух раз в интервале (a, b), а x_1 и x_2 будут двумя последовательными нулями y_1 в этом интервале. Тогда y_2 *обратится в нуль не меньше одного раза в открытом интервале* $x_1 < x < x_2$.

Однако y_2 не может обратиться в нуль при x_1 или при x_2, так как y_2 было бы в данном случае лишь кратным y_1. Предположим, что y_2 не обращается в нуль в некоторой точке интервала (x_1, x_2); тогда функция y_1/y_2 непрерывна, имеет непрерывную производную по всему интервалу $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и тождественно обращается в нуль в его конечных точках. Следовательно ее производная должна обратиться в нуль, хотя бы в одной внутренней точке этого интервала. Но

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y_1}{y_2}\right\}=\frac{y_2 y'_1-y_1 y'_2}{y^2_2}$$

представляет собой дробь, числитель которой является вронскианом y_1 и y_2, следовательно она не может обратиться в нуль в любой точке интервала (x_1, x_2). Это противоречие доказывает, что функция y_2 должна иметь не меньше одного нуля между x_1 и x_2. Она не может иметь также и больше одного нуля, так как при двух нулях функция y_1 имела бы между ними нуль, а x_1 и x_2 не были бы последовательными нулями y_1. Теорема, которая была таким образом доказана, может быть иначе выражена так: *нули двух вещественных линейно-независимых решений линейного диференциального уравнения второго порядка разделяют друг друга (перемежаются).*

Эта теорема не верна, если решения не вещественны. Так, в уравнении

$$y''+y=0,$$

корни вещественных решений

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x$$

перемежаются. В более общем случае корни двух вещественных решений

$$y_1 = A \sin x + B \cos x, \quad y_2 = C \sin x + D \cos x$$

перемежаются, при условии, если $AD - BC \neq 0$; это означает, что эти два решения линейно-независимы. Мнимое решение

$$y = \cos x + i \sin x$$

не имеет нулей ни в одном интервале вещественной переменной x.

10·3. Фундаментальная теорема Штурма. Если имеются две функции x, например y_1 и y_2, определенные и непрерывные в интервале (a, b), и если в этом интервале y_2 имеет больше нулей, чем y_1, то говорят, что y_2 осциллирует быстрее, чем y_1. Так например, если m и n — положительные целые числа и $m > n$, то $\cos mx$ осциллирует быстрее, чем $\cos nx$ в интервале $(0, \pi)$, так как первый имеет m, а второй — n корней в этом интервале. Теорема разделения предыдущего параграфа может быть выражена еще следующим образом: нули всех решений данного диференциального уравнения осциллируют одинаково быстро; под этим подразумевается, что число нулей любого решения в интервале (α, β), находящегося в интервале (a, b), не может превышать число нулей некоторого независимого решения в том же интервале больше, чем на единицу. Если в некотором интервале решение имеет не больше одного нуля, то говорят, что оно не осциллирует в этом интервале.

Если решения

$$\frac{d}{dx}\left\{K \frac{dy}{dx}\right\} \quad Gy = 0$$

осциллируют в интервале (a, b), то они будут осциллировать быстрее при уменьшении K и G. Докажем эту теорему для случая, когда K постоянно, а уменьшается только G.

Пусть u будет решением

$$\frac{d}{dx}\left\{K \frac{du}{dx}\right\} - G_1 u = 0,$$

а v — решением

$$\frac{d}{dx}\left\{K \frac{dv}{dx}\right\} - G_2 v = 0,$$

где $G_1 > G_2$ по всему интервалу (a, b), но $G_1 \neq G_2$ во всех точках интервала. Умножая первое уравнение на v, а второе на u и вычитая одно из другого, найдем, что

$$\frac{d}{dx}\left\{K(u'v - uv')\right\} = (G_1 - G_2)\, uv,$$

откуда

$$\Big[K(u'v - uv')\Big]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (G_1 - G_2)\, uv\, dx$$

— частный случай формулы Грина.

Пусть пределы интегрирования x_1 и x_2 являются последовательными нулями u; предположим, что v не имеет нуля в интервале $x_1 < x < x_2$. Не теряя в общности, u и v могут рассматриваться как положительные в пределах этого интервала. Правая часть приведенного уравнения будет тогда определенно положительной, В левой части $u = 0$ при x_1 и x_2, u'_1 — положительна при x_1 и отрицательна при x_2, а v — положительна в обоих пределах. Левая часть следовательно отрицательна, что приводит к противоречию. Отсюда v обращается в нуль не меньше одного раза между точками x_1 и x_2.

Если u и v равны нулю в x_1, то теорема показывает, что v снова обращается в нуль до появления последовательного нуля u. Таким образом *v осциллирует быстрее, чем u*. Например, решения типа

$$v'' + m^2 v = 0$$

осциллируют быстрее, чем решения

$$u'' + n^2 u = 0$$

при условии, что $m > n$ $(-m^2 < -n^2)$.

10·31. Модификация Пиконе. Более общая теорема, сравнивающая скорость осцилляции решений двух диференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx}\left\{K_1 \frac{du}{dx}\right\} - G_1 u = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{K_2 \frac{dv}{dx}\right\} - G_2 v = 0,$$

где

$$K_1 \geqslant K_2 > 0, \quad G_1 \geqslant G_2,$$

может быть доказана при помощи расширенной формулы

$$\Big[K_1 u'v - K_2 uv'\Big]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (G_1 - G_2)\, uv\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (K_1 - K_2)\, u'v'\, dx.$$

Но здесь возникает затруднение вследствие наличия произведения $u'v'$ во втором интеграле, которое было преодолено Пиконе [1], заменившего приведенную выше формулу аналогичной, полученной следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{u}{v}(K_1 u'v - K_2 uv')\right\}$$

[1] Picone, Ann. Scuola Norm., Pisa, 11 (1909), 1.

$$= \frac{u}{v}\left\{v\frac{d}{dx}(K_1u') - u\frac{d}{dx}(K_2v') + (K_1 - K_2)u'v'\right\} +$$

$$+ \frac{u'v - uv'}{v^2}(K_1u'v - K_2uv') = \frac{u}{v}\left\{(G_1 - G_2)uv +\right.$$

$$\left. + (K_1 - K_2)u'v'\right\} + K_1u'^2 - (K_1 + K_2)uu'\frac{v'}{v} +$$

$$+ K_2u^2\frac{v'^2}{v^2} = (G_1 - G_2)u^2 + (K_1 - K_2)u'^2 + K_2\left\{u' - u\frac{v'}{v}\right\}^2.$$

Получим выражение

$$\left[\frac{u}{v}(K_1u'v - K_2uv')\right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2}(G_1 - G_2)u^2dx + \int_{x_1}^{x_2}(K_1 - K_2)u'^2dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}K_2\frac{(u'v - uv')^2}{v^2}dx,$$

известное как формула Пиконе.

Пусть x_1 и x_2 будут последовательными нулями u и предположим, что v—не обращается в нуль в некоторой точке замкнутого интервала $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. При этом правая часть формулы Пиконе будет положительной (за исключением специального случая, указанного ниже), а левая часть будет равна нулю. Это противоречие доказывает, что v имеет не меньше одного нуля в интервале (x_1, x_2).

Теорема также верна, если v равно нулю в одной или обеих точках x_1 и x_2: для этого необходимо только небольшое видоизменение левой части формулы Пиконе. Предположим, что v обращается в нуль в точке x_1, тогда неопределенная величина u/v должна быть заменена ее предельным значением u'/v', имеющим смысл, поскольку u' и v' не равны нулю в тех точках, где u и v соответственно обращаются в нуль. Следовательно

$$\lim_{x \to x_1}\left[\frac{u}{v}(K_1u'v - K_2uv')\right] = [(K_1 - K_2)uu']_{x = x_1} = 0.$$

Таким образом, независимо от того, будет ли v равно нулю в x_1 и x_2 или нет, левая часть формулы Пиконе равна нулю, а правая часть положительная,—противоречие, которое приводит к заключению, что v имеет не меньше одного нуля в открытом интервале $x_1 < x < x_2$.

Если в некоторой конечной части интервала (x_1, x_2) $G_1 > G_2$, то первый член правой части формулы Пиконе будет положительным и не равным нулю. Единственно возможный случай, при котором правый член может обратиться в нуль, имеет место при $G_1 = G_2$ во всем интервале (x_1, x_2) и при $K_1 = K_2$ в части этого интервала, тогда как в остальной части интервала $u' = 0$ (т. е. $G_1 = 0$ в этой части). В этом случае первый и второй интегралы равны нулю, а третий равен нулю, если v пропорционально u. Заметим, что если в любой части интервала (x_1, x_2) G равно нулю, то в пределах этой области K может быть изменено любым непрерывным способом без увеличения осцилляции решения, постоянного в этой области. Этот специальный случай может быть рассмотрен, если принять, что G_1 и G_2 не равны тождественно нулю ни в одной конечной части интервала (a, b).

10·32. Условия осцилляции и неосцилляции решений уравнения. Пусть коэфициенты K и G уравнений

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0$$

непрерывны и ограничены в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ и пусть верхние границы K и G в этом интервале равны $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}$, а их нижние границы — $\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}$ соответственно. Так, во всем интервале (a, b),

$$\mathbf{K} \geqslant K \geqslant \mathbf{k} > 0,$$

$$\mathbf{G} \geqslant G \geqslant \mathbf{g}.$$

В качестве первого сравниваемого уравнения рассмотрим

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{dx}\left\{\mathbf{k}\frac{dy}{dx}\right\} - \mathbf{g}y = 0,$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{k}}y = 0.$$

Решения уравнения (A) в интервале (a, b) не осциллируют быстрее, чем решения (B). Последнее уравнение интегрируется непосредственно; оно имеет следующее решение.

1° Если $\mathbf{g} > 0$, то имеется экспоненциальное решение $\exp\left\{\sqrt{\mathbf{g}/\mathbf{k}}\,x\right\}$, не имеющее нулей в интервале (a, b). Аналогично, если $\mathbf{g}=0$, то сравниваемое решение может быть принято равным единице. Отсюда, если $\mathbf{g} \geqslant 0$, то решения (B) не осциллируют. Это приводит к выводу, что *если $G \geqslant 0$ во всем интервале (a, b), то решения данного уравнения* (A) *не осциллируют.*

2°. Если $\mathbf{g} < 0$, то имеется осциллирующее решение $\sin\left\{\sqrt{-\mathbf{g}/\mathbf{k}}\,x\right\}$; интервал между его последовательными нулями или последовательными нулями любого другого решения сравниваемого уравнения равен $\pi\sqrt{-\mathbf{k}/\mathbf{g}}$. Следовательно, если

$$\pi\sqrt{-\mathbf{k}/\mathbf{g}} > b - a,$$

то ни одно решение данного уравнения не может иметь больше одного нуля в интервале (a, b). Следовательно решения (A) не являются осциллирующими, если

$$-\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{k}} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

Рассмотрим теперь второе уравнение

(C) $$\frac{d}{dx}\left\{\mathbf{K}\frac{dy}{dx}\right\} - \mathbf{G}y = 0,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{K}}y = 0.$$

Решения (A) осциллируют так же быстро, как и решения (C). Пусть G будет отрицательным; тогда решения (C) являются осциллирующими, а интервал между последовательными нулями любого решения будет равен $\pi\sqrt{-\mathbf{K}/\mathbf{G}}$. Отсюда следует, что для того, *чтобы решения данного уравнения* (A) *имели не меньше m нулей в интервале* (a, b) *достаточно, чтобы*

$$m\pi\sqrt{-\mathbf{K}/\mathbf{G}} \leqslant b - a$$

или

$$-\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{K}} \geqslant \frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2},$$

в частности, для того, чтобы уравнение (A) имело решение, осциллирующее в интервале (a, b), достаточно, чтобы

$$-\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{K}} \geqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

10·33. Применение к уравнению Штурм-Лиувилля. Уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\} + (\lambda g - l)\,y = 0$$

типично для многих классов уравнений, возникающих в задачах математической физики[1]. Осцилляционный или неосцилляционный характер их решений, а в осцилляционном случае число нулей в интервале (a, b) представляет существенный интерес для приложений.

Если $k > 0$ и $g > 0$, то уравнение может рассматриваться, как частный случай общего уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0$$

при

$$K = k, \quad G = l - \lambda g.$$

В данном случае приращение λ оставляет k неизменным, но уменьшает G, следовательно увеличивает быстроту осцилляции.

Когда $k > 0$, $l \geqslant 0$ и g изменяет свой знак внутри интервала (a, b), возникает другой, очевидно отличный случай. Этот случай может быть приведен к общему типу

$$K = \frac{k}{|\lambda|}, \qquad G = \frac{l - \lambda g}{|\lambda|}.$$

---

[1] См. § 9·41.

Если $|\lambda|$ увеличивается, в то время как λ удерживает свой знак, то в общем случае K и G будут уменьшаться. Если l равно нулю, K уменьшается, а G остается неизменным. В любом случае увеличение $|\lambda|$ вызывает более быструю осцилляцию решения.

10·4. Первая теорема сравнения. Эта теорема имеет целью сравнить распределение нулей решения $u(x)$ уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{K_1\frac{du}{dx}\right\} - G_1 u = 0,$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(a) = \alpha_1, \quad u'(a) = \alpha_1',$$

с распределением нулей решения $v(x)$ уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{K_2\frac{dv}{dx}\right\} - G_2 v = 0,$$

удовлетворяющего условиям

$$v(a) = \alpha_2, \quad v'(a) = \alpha_2',$$

когда в пределах всего интервала (a, b)

$$K_1 \geqslant K_2 > 0, \quad G_1 \geqslant G_2.$$

Сделаем следующие допущения:

1°. α_1 и α_1' оба не равны нулю и не равны α_2 и α_2'.

2°. Если $\alpha_1 \neq 0$, то

$$\frac{K_1(a)\,\alpha_1'}{\alpha_1} \geqslant \frac{K_2(a)\,\alpha_2'}{\alpha_2},$$

что означает, что $\alpha_2 \neq 0$.

3°. Тождество $G_1 \geqq G_2 \equiv 0$ не удовлетворяется в некоторой конечной части интервала (a, b).

Исходя из первой теоремы Штурма, можно заключить, что, если $u(x)$ *имеет* m *нулей в интервале* $a < x \leqslant b$, то $v(x)$ *имеет не меньше* m *нулей в том же интервале*, а i*-ый нуль* $v(x)$ *меньше* i*-го нуля* $u(x)$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ будут нулями $u(x)$, лежащими в интервале (a, b); если эти нули так перенумерованы, что

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b,$$

то фундаментальная теорема Штурма показывает, что между каждыми двумя последовательными нулями x_i и x_{i+1} лежит не меньше одного нуля $v(x)$. Теорема сравнения следует непосредственно, если можно доказать, что по крайней мере один нуль $v(x)$ лежит между a и x_1.

Если $u(x)$ имеет нуль в конечной точке a, т. е. если $\alpha_1 = 0$, то $v(x)$ будет иметь нуль между a и x_1; предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда, поскольку $v(a) = \alpha_2 \neq 0$, может быть приложена формула Пиконе

$$\left[u^2\left(K_1\frac{u'}{u}-K_2\frac{v'}{v}\right)\right]_a^{x_1}=\int\limits_a^{x_1}(G_1-G_2)\,u^2dx+\int\limits_a^{x_1}(K_1-K_2)u'^2dx+$$

$$+\int\limits_a^{x_1}K_2\frac{(u'v-uv')^2}{v^2}\,dx.$$

Правая часть формулы положительна; если вычислять левую часть при условии, что v не имеет нулей в интервале (a, x_1), она может быть приведена к выражению

$$-u^2(a)\left(\frac{K_1(a)\,\alpha_1'}{\alpha_1}-\frac{K_2(a)\,\alpha_2'}{\alpha_2}\right),$$

которое отрицательно или равно нулю по второму условию. Это противоречие доказывает, что между a и x_1 имеется не меньше одного нуля $v(x)$. Следовательно теорема верна.

Если все нули решения диференциальной системы

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\}-Gy=0,\\ y(a)=\alpha,\quad y'(a)=\alpha'\end{cases}$$

отметить в их порядке на линии AB, где A — точка $x=a$, а B — точка $x=b$ $(a<b)$, то влияние уменьшения K и G, оставляя α и α' инвариантными, вызовет смещение всех корней в направлении от B к A. Если K и G уменьшать непрерывно[1], то можно достигнуть момента, когда в отрезок AB войдет новый нуль. Этот новый нуль сначала появится в точке[2] B; дальнейшее уменьшение K и G приведет к тому, что нуль войдет в отрезок и направится по направлению к A.

10·41. Вторая теорема сравнения. Пусть c будет любой внутренней точкой в интервале (a, b), не являющейся нулем $u(x)$ или $v(x)$; тогда в открытом интервале (a, c), $v(x)$ будет иметь, согласно первой теореме сравнения, по меньшей мере столько же нулей, сколько и $u(x)$. Из второй теоремы сравнения следует, что *если c таково, что $u(x)$ и $v(x)$ имеют одинаковое число нулей в интервале $a<x<c$*, то

$$\frac{K_1(c)\,u'(c)}{u(c)}>\frac{K_2(c)\,v'(c)}{v(c)}.$$

[1] Этот процесс наиболее легко осуществляется, если допустить, что K и G зависят от вспомогательного параметра λ, как в уравнении Штурм-Лиувилля.

[2] Граничные условия предотвращают возможность появления нового нуля в A; поскольку решение непрерывно и изменяется непрерывно с K и G, — любой новый нуль во внутренней точке интервала (a, b) был бы двойным нулем, что противоречит принятым условиям. Следовательно любой новый нуль должен входить в B.

Пусть x_i будет ближайшим нулем впереди c; он будет несомненно также нулем $u(x)$, а не $v(x)$, так как между a и x_i лежит не меньше чем i (согласно условию, точно i) нулей $v(x)$. Формула Пиконе, взятая между пределами x_i и c, показывает, что

$$\left[u^2\left(K_1\frac{u'}{u}-K_2\frac{v'}{v}\right)\right]_{x_i}^{c}>0.$$

Это сразу же дает искомое неравенство. Если бы $u(x)$ и $v(x)$ не имели нулей в интервале (a, c), то теорема могла бы быть доказана аналогично, рассмотрев формулу Пиконе, между пределами a и c.

Так, в системе

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} L(y)\equiv \dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\}-Gy=0, \\ y(a)=\alpha,\quad y'(a)=\alpha', \end{cases}$$

эффект непрерывного уменьшения K и G вызывает уменьшение значения $K(x)\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ в некоторой точке интервала (a, b), не являющейся нулем $y(x)$, до тех пор, пока эта точка станет нулем.

Следует отметить, что теоремы сравнения, которые были доказаны для системы (A), одинаково верны и для системы

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} L(y)=0, \\ y(a)=\rho\alpha,\quad y'(a)=\rho\alpha', \end{cases}$$

где ρ — любая постоянная. Если $y(x)$ — решение (A), то $\rho y(x)$ будет решением (B). Это вполне очевидно. Однако, если ρ рассматривать как произвольную, то (B) эквивалентно системе

$$\text{(C)}\qquad \begin{cases} L(y)=0, \\ \alpha' y(a)-\alpha y'(a)=0, \end{cases}$$

где оба неоднородных граничных условия заменены одним однородным условием. Поскольку решение (C) равно $\rho y(x)$, обе теоремы сравнения действительны в случае совершенно однородной системы (C).

10 · 5. Одномерные граничные задачи. Под граничной задачей в общем смысле подразумевается задача, в которой определяется, имеет ли данное диференциальное уравнение решения, удовлетворяющие некоторым граничным условиям (условиям в граничных точках); принимая, что такие условия существуют, определяется их функциональная природа и исследуются модификации, возникающие при изменениях в диференциальном уравнении или в заданных граничных условиях.

Одномерной граничной задачей называется видоизменение общей проблемы, которая возникает, если уравнение является обыкновенным диференциальным уравнением, в частности обыкновенным линейным уравнением, а граничные условия устанавливаются для решения и его последовательных производных при некоторых частных значениях независимой переменной x. Фундаментальные теоремы существования главы III являются решениями одноточечных граничных задач, так как начальные условия относятся к отдельной точке x_0. Ниже мы разберем более обстоятельно двухточечную граничную задачу, в которой граничные условия относятся к двум конечным точкам интервала $a \leqslant x \leqslant b$.

Предположим, что коэфициенты диференциального уравнения, а также и коэфициенты, входящие в граничные условия, зависят от параметра λ. Так, предположим, что

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0,$$

где K и G — непрерывные функции (x, λ) при $a \leqslant x \leqslant b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$, K — положительно и равномерно диференцируемо относительно x, причем его производная непрерывна в интервале (a, b)[1]. Допустим также, что и коэфициенты граничных условий являются непрерывными функциями λ при $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$. В этом случае возникают вопросы двух видов.

1°. *Вопросы существования.* Для каких значений λ существует решение, удовлетворяющее всем условиям задачи?

2°. *Вопросы осцилляции.* Если решение существует, то сколько оно имеет нулей в интервале (a, b)?

Для одноточечной граничной задачи первый вопрос удовлетворяется фундаментальной теоремой существования, из которой следует, что для каждого значения λ в интервале (Λ_1, Λ_2) решение существует и является непрерывной функцией (x, λ). Аналогичные вопросы мы будем рассматривать ниже[2].

10 · 6. Теоремы осцилляции Штурма. Наиболее простым типом двухточечной граничной задачи является диференциальная система, известная как система Штурма

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} L(y) \equiv \dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0, \\ \alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0, \\ \beta' y(b) + \beta y'(b) = 0. \end{cases}$$

Введенные здесь частные граничные условия весьма специального типа, так как каждое из них само по себе является одноточечным граничным условием. Уравнение, взятое вместе

[1] Возможно, что K будет иметь только одну R-производную в точке a и одну L-производную в точке b.

[2] Теорема осцилляции была впервые приведена в известной статье Штурма, J. de Math., 1 (1836), 106. Однако указанные там граничные условия — очень специального типа. Исследование было впоследствии расширено: см. Mason, Trans. Am. Math. Soc., 7 (1906), 337; Bôcher, C. R. Acad. Sc. Paris, 140 (1905), 928; Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 10 (1909), 259.

с первым условием, имеет только одно независимое решение, например $y = Y(x, \lambda)$. Связывая это решение со вторым граничным условием, получим характеристическое уравнение

$$F(\lambda) \equiv \beta' Y(b, \lambda) + \beta Y'(b, \lambda) = 0,$$

корни которого — характеристические числа.

Предположим, что K и G — вещественные монотонно-убывающие функции λ, а, согласно условиям § 10·31, G не равно нулю ни в одном конечном подинтервале (a, b). Верхние границы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}$ и нижние границы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{k}$ — непрерывные монотонно-убывающие функции λ в интервале (Λ_1, Λ_2).

В § 10·32 было показано, что если для любого частного значения λ уравнение

$$L(y) = 0$$

таково, что

$$-\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{K}} \geqslant \frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2},$$

то для этого значения λ уравнение допускает вещественное решение, удовлетворяющее граничному условию

$$\alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0$$

и имеющее не меньше m корней в интервале (a, b).

Введем дальнейшее условие

$$-\mathbf{G}/\mathbf{K} \to \infty \text{ при } \lambda \to \Lambda_2.$$

Докажем, что рассматриваемое решение может иметь любое число сколь угодно больших нулей в интервале (a, b), при условии, что λ приближается к Λ_2. Коэфициенты α и α' могут быть функциями λ; предположим, что $K(a)\alpha'/\alpha$ — монотонно-убывающая функция λ.

Предположим, что λ увеличивается от некоторого числа, произвольно близкого к Λ_1, и что рассматриваемое решение имеет сначала i нулей в открытом интервале $a < x < b$. При увеличении λ, число нулей увеличивается, и каждый нуль стремится сместиться в направлении конечной точки a. Следовательно для некоторого значения λ, например $\lambda = \mu_i$, решение приобретет дополнительный нуль, который появится в конечной точке b, а затем сместится, при увеличении λ, по направлению к a. Для значения $\lambda = \mu_{i+1}$ получается другой нуль и т. д. Таким образом существует последовательность чисел

$$\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \ldots,$$

имеющих предельную точку Λ_2 и таковых, что при

$$\mu_m < \lambda < \mu_{m+1}$$

уравнение допускает единственное решение, имеющее точно $m+1$ нулей в интервале (a, b) и удовлетворяющее первому граничному условию.

Более того, второй теоремой сравнения было показано, что при изменении λ от μ_m до μ_{m+1}, выражение

$$K(b)\,y'(b)/y(b)$$

будет монотонно-убывающей функцией λ, которая должна уменьшаться от $+\infty$ до $-\infty$, так как при $\lambda=\mu_m$ и $\lambda=\mu_{m+1}$

$$y(b)=0, \text{ но } y'(b)\neq 0.$$

Рассмотрим влияние второго граничного условия

$$\beta' y(b)+\beta y'(b)=0.$$

Коэфициенты β и β' могут быть функциями λ; предположим, что β не равно тождественно нулю[1] и что

$$K(b)\beta'/\beta$$

— монотонно-убывающая функция λ.

Поскольку $K(b)\,y'(b)/y(b)$ — функция, которая при увеличении λ от μ_m до μ_{m+1} постепенно уменьшается от $+\infty$ до $-\infty$, и поскольку $-K(b)\beta'/\beta$ постепенно увеличивается в том же интервале, между μ_m и μ_{m+1} должно быть некоторое значение λ, для которого эти два выражения равны, т. е. для которого второе граничное условие удовлетворяется так же, как и первое. Для этого значения λ, например λ_{m+1}, система совместима; она допускает решение, имеющее точно $m+1$ нулей в интервале $a<x<b$. Полученные результаты могут быть выражены следующим образом.

Теорема I. *Система* (А) *имеет бесконечное число вещественных характеристических чисел, имеющих только одну предельную точку* Λ_2. *Для каждого целого числа* $m \geqslant i$ *существует только одно характеристическое число* λ_{m+1}, *которому соответствует решение, имеющее* $m+1$ *нулей в открытом интервале* (a, b).

Чтобы уточнить приведенные рассуждения, допустим что

$$-\mathbf{g}/\mathbf{k}\to-\infty \text{ при } \lambda\to\Lambda_1.$$

Поскольку $\mathbf{k}$ положительно для всех рассматриваемых значений x и λ, $\mathbf{g}$ в соседстве с Λ_1 будет также положительно.

Рассмотрим уравнение

$$\text{(B)}\qquad \frac{d}{dx}\left\{\mathbf{k}\frac{du}{dx}\right\}-\mathbf{g}u=0,$$

которое может быть написано в виде

$$u''-s^2u=0,$$

[1] Случай $\beta\equiv 0$ может быть сразу исключен; второе граничное условие приводится к $y(b)=0$; следовательно, характеристическими числами являются μ_i, $\mu_{i+1}, \ldots$

где

$$s^2 = \mathbf{g}/\mathbf{k} > 0$$

для значений λ, достаточно близких к Λ_1.

Пусть $u(x)$ будет решением (B), удовлетворяющим начальным условиям

(C) $$u(a) = \alpha, \ u'(a) = \alpha',$$

тогда

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\alpha'}{s}\right)e^{s(x-a)} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha'}{s}\right)e^{-s(x-a)}.$$

Для достаточно больших значений s, т. е. для значений λ, достаточно близких к Λ_1, $u(x)$ приближается к $\operatorname{ch} s(x-a)$ и следовательно не имеет нулей.

Пусть $y(x)$ будет решением первоначального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0,$$

которое удовлетворяет условиям (C). В этом случае условия первой теоремы сравнения, именно

$$K \geqslant \mathbf{k}, \quad G \geqslant \mathbf{g},$$

$$K\alpha'/\alpha \geqslant \mathbf{k}\,\alpha'/\alpha,$$

удовлетворены. Следовательно $y(x)$ не имеет больше нулей в интервале $a < x < b$, чем $u(x)$, и поэтому для значений λ, достаточно близких к Λ_1, $y(x)$ не имеет нулей в интервале (a, b). Отсюда следует, что $i=0$.

Докажем, что в интервале (Λ_1, μ_0) существует только одно характеристическое число λ_0. Поскольку для значений λ в этом интервале $y(x)$ и $u(x)$ не имеют нулей в $a<x<b$, из второй теоремы сравнения следует, что

$$\frac{K(b)\,y'(b)}{y(b)} \geqslant \frac{\mathbf{k}u'(b)}{u(b)}.$$

Но при $\lambda \to \Lambda_1$, $s \to +\infty$, следовательно

$$u'(b)/u(b) \to +\infty,$$

а поскольку $\mathbf{k} > 0$,

$$K(b)\,y'(b)/y(b) \to +\infty.$$

Таким образом с увеличением λ от Λ_1 до μ_0, $K(b)\,y'(b)/y(b)$ постепенно уменьшается от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно система имеет только одно характеристическое число в интервале (Λ_1, μ_0). Все полученные результаты сформулированы в следующей основной теореме осцилляции.

Теорема II. *Вещественные характеристические числа системы* (A) *могут быть расположены в возрастающем порядке величины и могут быть обозначены*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots;$$

если соответствующими характеристическими функциями будут

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_m, \ldots,$$

то y_m будет иметь точно m нулей и интервале $a < x < b$.

Предположим, что выражение

$$\lim \{-\mathbf{g}/\mathbf{k}\} = -\infty,$$

на котором основана теорема II, было составлено исключительно для того, чтобы существовало характеристическое число λ_0. Это условие, хотя и достаточное, однако оно не является необходимым для существования λ_0. Другая последовательность условий, достаточная для обеспечения существования λ_0, получается следующим образом.

До сих пор мы принимали, что K, G, α, α', β и β' определены в открытом интервале $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$. Допустим, что интервал замкнут в своей левой конечной точке, т. е. что Λ_1 принадлежит к интервалу. Пусть

$$K_1,\ G_1,\ \alpha_1,\ \alpha_1',\ \beta_1,\ \beta_1'$$

будут значениями соответствующих величин, когда $\lambda = \Lambda_1$; предположим также, что

$$\mathbf{g}_1 \geqslant 0,\ \alpha_1 \alpha_1' \geqslant 0,\ \beta_1 \beta_1' \geqslant 0,$$

но α_1 и α_1' так же, как и β_1 и β_1' не равны попарно нулю.

Рассмотрим теперь систему сравнения

$$(C) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{\mathbf{k}_1 \dfrac{du}{dx}\right\} - \mathbf{g}_1 u = 0, \\ \alpha_1' u(a) - \alpha_1 u'(a) = 0. \end{cases}$$

Диференциальное уравнение может быть написано в виде

$$u'' - s^2 u = 0,$$

где

$$s^2 = \mathbf{g}_1/\mathbf{k}_1 \geqslant 0.$$

Предположим, что $s > 0$, тогда решение системы сравнения может быть принято равным

$$u(x) = \alpha_1 \operatorname{ch} s(x-a) + \frac{\alpha_1'}{s} \operatorname{sh} s(x-a),$$

что $u(x)$ будет существенно положительным или существенно отрицательным для $x > a$.

Если $v(x)$ — решение системы

$$(D) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{K_1 \dfrac{dv}{dx}\right\} - G_1 v = 0, \\ \alpha_1' v(a) - \alpha_1 v'(a) = 0, \end{cases}$$

где K_1 и G_1 представляют K и G при $\lambda=\Lambda_1$, то из первой теоремы сравнения следует, что $v(x)$ не может иметь больше нулей в интервале (a, b), чем $u(x)$; следовательно она не имеет нулей в интервале (a, b), т. е. $i=0$. Для некоторой величины λ, большей Λ_1, именно $\lambda=\mu_0$, решение $y(x)$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\}-Gy=0, \\ \alpha' y(a)-\alpha y'(a)=0 \end{cases}$$

(которое приводится к $v(x)$ при $\lambda=\Lambda_1$) будет иметь нуль при $x=b$. Поскольку $u(x)$ и $y(x)$ не имеют нулей в интервале (a, b) при $\Lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \mu_0$, в данном случае может быть приложена вторая теорема сравнения; она показывает, что

$$\frac{K_1(b)y'(b)}{y(b)} > \frac{k_1 u'(b)}{u(b)}$$

при $\Lambda_1 \leqslant \lambda < \mu_0$. Правую часть неравенства можно вычислить непосредственно; можно показать, что она положительна, откуда следует, что левая часть также положительна. Таким образом выражение

$$K(b)\, y'(b)/y(b),$$

принимающее значение $K_1(b)\, v'(b)/v(b)$ при $\lambda=\Lambda_1$, постепенно уменьшается от значения >0 до $-\infty$ при увеличении λ от Λ_1 до μ_0. Поскольку

$$-K(b)\,\beta'/\beta$$

постепенно увеличивается от отрицательного значения при $\lambda = \Lambda_1$, мы получим точку, для которой оба выражения будут равны, а для этого значения λ [например λ_0, $y(x)$] будет удовлетворять также второму граничному условию

$$\beta y'(b)+\beta' y(b)=0.$$

Следовательно в интервале (Λ_1, μ_0) существует характеристическое число λ_0, отличное от Λ_1 и μ_0 (кроме случая $\beta=0$, когда $\lambda_0=\mu_0$), так что система (A) имеет решение, не имеющее нулей в интервале $a<x<b$.

Рассмотрим теперь кратко специальный случай $s=0$. Решение $u(x)$ является здесь линейной функцией аргумента $x-a$. Более того, функция $u(x)$ существенно положительна или отрицательна в интервале (a, b), а выражение $k u'(b)/u(b)$ в общем случае положительно или равно нулю. Таким образом, как и выше, характеристическое число λ_0 существует, но может (в специальном случае) совпадать с Λ_1. Этот случай возникает только при

$$\alpha_1'=\beta_1'=0, \quad G_1 \equiv 0.$$

Теорема III. *Принимая, что*

$$g_1 \geqslant 0, \ \alpha_1\alpha_1' \geqslant 0, \quad \beta_1\beta_1' \geqslant 0,$$

система (A) *будет иметь бесконечную последовательность вещественных характеристических чисел*

$$\lambda_0,\ \lambda_1\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_m, \ldots,$$

которым соответствуют фундаментальные функции

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m, \ldots$$

таким образом, что y_m *имеет точно* m *нулей в интервале* $a < x < b$. *Меньшее характеристическое число* λ_0 *отлично от* Λ_1 *кроме случая*

$$G_1 \equiv 0,\ \alpha'_1 = 0,\ \beta'_1 = 0.$$

10 · 61. Приложение к системе Штурм-Лиувилля. Группа теорем, известных в настоящее время как теоремы осцилляции, была впервые доказана Штурмом[1] для системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{k\,\dfrac{dy}{dx}\right\} + (\lambda g - l)\,y = 0, \\ \alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0, \\ \beta' y(a) + \beta y'(a) = 0, \end{cases}$$

с которой мы уже встречались (§§ 9 · 41, 10 · 33).

Предположим, что k, g и l (вещественные непрерывные функции x при $a \leqslant x \leqslant b$) не зависят от λ, и таковы, что $k > 0$, $g > 0$. Коэфициенты α, α', β и β' также не зависят от λ. Поскольку выражение $G \equiv l - \lambda g$ постепенно уменьшается или, в крайнем случае, остается постоянным для любого значения x в интервале $(a,\ b)$ при увеличении λ от $\Lambda_1 = -\infty$ до $\Lambda_2 = +\infty$, условия, принятые при доказательстве теоремы II (§ 10 · 6), удовлетворены. В частности

$$-G = \min(\lambda g - l) \to +\infty$$

при $\lambda \to +\infty$. Следовательно, существует бесконечная последовательность вещественных характеристических чисел $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, не имеющих предельных точек за исключением $\lambda = +\infty$; если существующими характеристическими функциями являются y_0, y_1, $y_2, \ldots$, то y_m имеет точно m нулей в интервале $a < x < b$.

Если кроме $\lambda = 0$ наложены добавочные условия

$$l \geqslant 0,\ \alpha\alpha' \geqslant 0,\ \beta\beta' \geqslant 0,$$

Λ_1 может быть принята равной нулю. В этом случае при $\lambda = 0$

$$g = \min l \geqslant 0,$$

а характеристические числа все положительные. Этот случай важен с физической точки зрения.

Рассмотрим случай, когда $k > 0$, $l \geqslant 0$, а g изменяет свой знак в интервале (a, b). Задача может быть разрешена так же, как и

[1] J. de Math., I (1836), 139, 143.

в § 10·33. Перепишем уравнение так

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{k}{|\lambda|}\frac{dy}{dx}\right\}-\frac{l-\lambda g}{|\lambda|}-y=0.$$

Это уравнение общего типа, если

$$K=\frac{k}{|\lambda|},\quad G=\frac{l}{|\lambda|}-g,\ \text{когда } \lambda>0,$$

$$K=\frac{k}{|\lambda|},\quad G=\frac{l}{|\lambda|}+g,\ \text{когда } \lambda<0.$$

В любом случае K и G постепенно уменьшаются при увеличении $|\lambda|$; если условия $\alpha\alpha'\geqslant 0$, $\beta\beta'\geqslant 0$ также удовлетворены, то

$$\frac{\alpha' k(a)}{\alpha|\lambda|} \quad \text{и} \quad \frac{\beta' k(b)}{\beta|\lambda|}$$

будут постепенно уменьшаться с увеличением $|\lambda|$. До сих пор необходимые условия были удовлетворены, но следует отметить, что поскольку g изменяет знак в интервале (a, b)

$$\mathrm{G}>0 \text{ и } \mathrm{K}>0.$$

то

$$-\mathrm{G}/\mathrm{K}\to-\infty$$

при $|\lambda|\to\infty$.

Таким образом условия теоремы I (§ 10·6) не удовлетворены; однако отсюда не следует, что теорема неверна для рассматриваемого случая. Напротив, поскольку g меняет свой знак в интервале (a, b), можно найти такой подинтервал (a', b'), в котором

$$g>0 \qquad \text{в случае } \lambda>0,$$

$$g<0 \qquad \text{в случае } \lambda<0.$$

В любом случае значения λ могут быть взяты достаточно большими по абсолютному значению, чтобы обеспечить условие $G<0$ в интервале (a', b'). Следовательно необходимое условие

$$-\mathrm{G}/\mathrm{K}\to+\infty$$

осуществляется в интервале (a', b'), когда $|\lambda|\to\infty$. Таким образом λ может быть достаточно большой для того, чтобы решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left\{k\dfrac{dy}{dx}\right\}+(\lambda g-l)y=0,\\ \alpha' y(a)-\alpha y'(a)=0\end{cases}$$

осциллировало в интервале (a', b') и a fortiori в интервале $(a_1\ b)$. Число нулей в интервале (a, b) может быть увеличено до бесконечности, полагая λ достаточно большой.

С другой стороны, решение системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{k\frac{du}{dx}\right\} - lu = 0, \\ \alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0 \end{cases}$$

(при $\lambda = 0$) не имеет нуля в интервале (a, b), если $l \geqslant 0$, за исключением случая $l \equiv 0$, когда может существовать один нуль.

Предположим, что

$$l \geqslant 0, \quad \alpha\alpha' \geqslant 0, \quad \beta\beta' \geqslant 0$$

и исключим специальный случай

$$l \equiv 0, \quad \alpha' = \beta' = 0,$$

требующий особого исследования[1], тогда методы доказательства теоремы III (§ 10 · 6) могут быть полезны при доказательстве существования характеристических чисел, которым соответствуют фундаментальные функции, имеющие 0, 1, 2,..., m, ... нулей в интервале (a, b). Единственной существенной разницей является то, что случай $\lambda < 0$ отличается от случая $\lambda > 0$ тем, что получается бесконечная последовательность отрицательных характеристических чисел с предельной точкой $\lambda = -\infty$; это аналогично бесконечной последовательности положительных характеристических чисел с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Теорема осцилляции теперь изменяется следующим образом[2].

Если g изменяет свой знак в интервале (a, b), а

$$l \geqslant 0, \ \alpha\alpha' \geqslant 0, \ \beta\beta' \geqslant 0,$$

то существует бесконечная последовательность вещественных характеристических чисел с предельными точками $+\infty$ и $-\infty$. Если положительные и отрицательные характеристические числа расположить в порядке возрастающих числовых значений и обозначить через

$$\lambda_0^+, \ \lambda_1^+, \ \lambda_2^+, \ \ldots, \ \lambda_m^+, \ \ldots,$$

$$\lambda_0^-, \ \lambda_1^-, \ \lambda_2^-, \ \ldots, \ \lambda_m^-, \ldots,$$

а соответствующие фундаментальные функции обозначить

$$y_0^+, \ y_1^+, \ y_2^+, \ldots, \ y_m^+,$$

$$y_0^-, \ y_1^-, \ y_2^-, \ldots, \ y_m^-,$$

то y_m^+ и y_m^- будут иметь точно m нулей в интервале $a < x < b$.

---

[1] См. Picone, Ann. Scuola Norm. Pisa, 11 (1909), 39; Bôcher, Bull. Am. Math. Soc., **21** (1914), 6.

[2] Sanlievici. Ann. Éc. Norm. (3), 26 (1909), 19; Picone, loc. cit; Richardson. Math. Ann., 68 (1910), 279.

10·7. Свойство ортогональности фундаментальных функций и ее следствия. Рассмотрим диференциальную систему

$$
(A)\begin{cases} L(u)+\lambda gu \equiv p_0\dfrac{d^n u}{dx^n}+p_1\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\dfrac{du}{dx}+(p_n+\lambda g)u=0, \\ U_i(u)=0 \qquad (i=1, 2,\ldots, n), \end{cases}
$$

где коэфициенты диференциального уравнения $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, p_n, g и коэфициенты, входящие в выражения $U_i(u)$, не зависят от параметра λ. Сопряженная система будет иметь вид

$$
(B)\begin{cases} \overline{L}(v)+\lambda gv \equiv (-1)^n\dfrac{d^n(p_0v)}{dx^n}+(-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}(p_1v)}{dx^{n-1}}+ \\ \qquad +\ldots-\dfrac{d(p_{n-1}x)}{dx}+(p_n+\lambda g)v=0, \\ V_i(v)=0 \qquad (i=1, 2,\ldots, n). \end{cases}
$$

Предположим, что система (A) допускает не меньше двух характеристических чисел, например λ_i и λ_j и что соответствующими характеристическими функциями являются u_i и u_j. Тогда система (B) совместима для λ_i и λ_j; пусть характеристическими функциями будут v_i и v_j.

Формула Грина

$$\int_a^b\{v\,L(u)-u\overline{L}(v)\}=U_1V_{2n}+U_2V_{2n-1}+\ldots+U_{2n}V_1$$

(§ 9·31) верна независимо от значений u и v. Пусть $u=u_i$ и $v=v_j$; тогда правый член обратится в нуль, поскольку

$$U_1(u_i)=U_2(u_i)=\ldots=U_n(u_i)=0,$$
$$V_1(v_j)=V_2(v_j)=\ldots=V_n(v_j)=0.$$

Следовательно

$$\int_a^b\{v_jL(u_i)-u_i\overline{L}(v_j)\}\,dx=0,$$

откуда

$$(\lambda_j-\lambda_i)\int_a^b gu_iv_jdx=0;$$

поскольку λ_i и λ_j различны

$$\int_a^b gu_iv_jdx=0.$$

В частности, если система (A) самосопряженная, то

$$\int_a^b gu_iu_jdx=0 \qquad (i\neq j).$$

Последовательность функций

$$u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots,$$

таких, что при заданной функции g

$$\int_a^b g u_i u_j dx = 0 \qquad (i \neq j),$$

называется *ортогональной* относительно функции g; кроме того, при $g > 0$

$$\int_a^b g u_i^2 \, dx > 0;$$

поэтому каждая функция u_i может быть умножена на некоторую постоянную, так что

$$\int_a^b g u_i^2 \, dx = 1.$$

В этом случае функции называются *нормированными*. Характеристические функции системы (А), когда последняя самосопряженная, образуют ортогональную последовательность. В некоторых случаях, в частности, когда $g > 0$, они также могут быть нормированы.

Из свойства ортогональности получаем следующую важную теорему: если $g > 0$ *во всем интервале* (a, b), *то все характеристические числа вещественны*. Предположим, что $\lambda_i = \sigma + i\tau$ — комплексное характеристическое число, тогда, поскольку коэфициенты системы все вещественны, среди остальных характеристических чисел имеется число, сопряженное с λ_i, например $\lambda_j = \sigma - i\tau$. Если характеристическая функция u_i равна $s + it$, то u_j равна $s - it$. Тогда

$$\int_a^b g u_i u_j \, dx = \int_a^b g (s^2 + t^2) \, dx;$$

это выражение равно нулю только при $s \equiv t \equiv 0$. Следовательно, если $g > 0$, то допущение существования комплексных характеристических чисел приводит к противоречию, что доказывает теорему. Условие $g > 0$ можно заменить менее ограничивающим условием $g \geqslant 0$, принимая, что равенство недействительно для всех точек некоторого конечного подинтервала (a, b).

10·71. Приложение к системам Штурм-Лиувилля. Приведенное исследование может быть непосредственно приложено к системе Штурм-Лиувилля

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{k \dfrac{dy}{dx}\right\} + (\lambda g - l) y = 0, \\ \alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0, \\ \beta' y(b) + \beta y'(b) = 0; \end{cases}$$

если знак g постоянен по всему интервалу (a, b), то каждое характеристическое число — вещественно[1].

С другой стороны, если g изменяет свой знак в интервале (a, b), то можно доказать, что все характеристические числа будут вещественными при

$$k > 0, \quad l \geqslant 0, \quad \alpha\alpha' \geqslant 0, \quad \beta\beta' \geqslant 0$$

(см. § 10·61). Предположим, что λ_i — комплексное характеристическое число, например $\sigma + i\tau$; соответствующая характеристическая функция y_i будет комплексной, скажем $s + it$.

Тогда уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{k\left(\frac{ds}{dx} + i\frac{dt}{dx}\right)\right\} + \{(\sigma + i\tau) g - l\}(s + it) = 0$$

удовлетворяется тождественно. Вещественная и мнимая части, равные каждая в отдельности нулю, дают соответственно

$$S \equiv \frac{d}{dx}\left\{k\frac{ds}{dx}\right\} + (\sigma g - l)s - \tau g t = 0,$$

$$T \equiv \frac{d}{dx}\left\{k\frac{dt}{dx}\right\} + \tau g s + (\sigma g - l)t = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\int_a^b (sS + tT)\,dx = [k(ss' + tt')]_a^b - \int_a^b k(s'^2 + t'^2)\,dx + \\ + \sigma\int_a^b g(s^2 + t^2)\,dx - \int_a^b l(s^2 + t^2)\,dx = 0.$$

Вследствие ограничений

$$k > 0, \quad \alpha\alpha' \geqslant 0, \quad \beta\beta' \geqslant 0$$

получим

$$[k(ss' + tt')]_a^b \leqslant 0;$$

поскольку $k > 0$ в интервале (a, b), а s' и t' не равны тождественно нулю[2]

$$-\int_a^b k(s'^2 + t'^2)\,dx < 0;$$

наконец

$$\int_a^b g(s^2 + t^2)\,dx = 0,$$

$$-\int_a^b l(s^2 + t^2)\,dx \leqslant 0.$$

---

[1] Эта теорема была известна еще Пуассону (Poisson, Bull. Soc. Philomath., Paris, 1826, 145).

[2] $s' = t' = 0$ означало бы, что $(\sigma + i\tau) g - l \equiv 0$, следовательно $\tau g \equiv 0$, поскольку $\tau \neq 0$; $g \equiv 0$, что противоречит сделанному допущению, что g изменяет знак в интервале (a, b).

Из вытекающего непосредственно отсюда противоречия видно, что комплексные или мнимые характеристические числа в рассматриваемом случае существовать не могут. Можно доказать также, что если y_i любая характеристическая функция, то

$$\int_a^b g y_i^2\,dx \neq 0.$$

Пусть λ_i — характеристическое число, которому соответствует y_i; тогда

$$\lambda_i g y_i = l y_i - \frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy_i}{dx}\right\}.$$

Если это тождество почленно умножить на y_i и проинтегрировать между пределами a и b, то получим соотношение

$$\lambda_i \int_a^b g y_i^2\,dx = \int_a^b l y_i^2\,dx + \int_a^b k y_i'^2\,dx - [k y_i y_i']_a^b.$$

Первый член правой части выражения положителен или равен нулю, второй — определенно положителен, а третий — положителен или равен нулю. Отсюда

$$\int_a^b g y_i^2\,dx > 0, \text{ если } \lambda_i > 0,$$
$$< 0, \text{ если } \lambda_i < 0.$$

В обозначениях § 10·51 характеристические функции y_i^+ и y_i^- могут быть умножены на соответствующие *вещественные* постоянные, так что

$$\int_a^b g(y_i^+)^2\,dx = +1,$$

$$\int_a^b g(y_i^-)^2\,dx = -1.$$

Рассмотрим теперь более общую систему[1]

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{k\dfrac{dy}{dx}\right\} + (\lambda g - l)y = 0, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

(см. § 9·41). Предположим, что по меньшей мере два из соотношений

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1},\quad \frac{\alpha_2}{\beta_2},\quad \frac{\alpha_3}{\beta_3},\quad \frac{\alpha_4}{\beta_4}$$

---

[1] Mason, Trans. Am. Math. Soc. 7 (1906), 337.

не равны. Если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_4}{\beta_4},$$

то система приводится к (А). Этот частный случай был уже нами разобран, поэтому здесь мы его рассматривать не будем; в любом другом случае граничные условия могут быть приведены к системе

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} y(a)=\gamma_1 y(b)+\gamma_1' y'(b), \\ y'(a)=\gamma_2 y(b)+\gamma_2' y'(b). \end{cases}$$

Допустим, что условие самосопряженности системы

$$\text{(D)} \qquad k(b)=(\gamma_1\gamma_2'-\gamma_1'\gamma_2)\,k(a)$$

удовлетворено, тогда соотношение

$$\Big[k(ss'+tt')\Big]_a^b-\int_a^b k(s'^2+t'^2)\,dx-\int_a^b l(s^2+t^2)\,dx=0,$$

вытекающее из предположения, что система (B) допускает комплексное характеристическое число, нарушается, когда $k>0$, $l\geqslant 0$ при

$$\Big[k(ss'+tt')\Big]_a^b\leqslant 0,$$

т. е. при

$$k(a)\,s(a)\,s'(a)-k(b)\,s(b)\,s'(b)\geqslant 0,$$

$$k(a)\,t(a)\,t'(a)-k(b)\,t(b)\,t'(b)\geqslant 0.$$

Из (C) следует, что эти два неравенства удовлетворяются, если

$$k(a)\{\gamma_1\xi+\gamma_1'\eta\}\{\gamma_2\xi+\gamma_2'\eta\}-k(b)\,\xi\eta\geqslant 0,$$

где $\xi=s(b)$, $\eta=s'(b)$ или $\xi=t(b)$, $\eta=t'(b)$. При помощи (D) это неравенство может быть приведено к

$$\gamma_1\gamma_2\xi^2+2\gamma_1'\gamma_2\xi\eta+\gamma_1'\gamma_2'\eta^2\geqslant 0,$$

что может быть переписано в виде

$$\frac{(\gamma_1\gamma_2\xi+\gamma_1'\gamma_2\eta)^2+\gamma_1'\gamma_2(\gamma_1\gamma_2'-\gamma_1'\gamma_2)\eta^2}{\gamma_1\gamma_2}\geqslant 0.$$

Из условия (C) вытекает, что $\gamma_1\gamma_2'-\gamma_1'\gamma_2>0$; отсюда следует, что приведенные выше неравенства удовлетворяются при $\gamma_1'\gamma_2\geqslant 0$ и $\gamma_1\gamma_2\geqslant 0$.

Таким образом система (B) допускает только вещественные характеристические числа.

Эти условия удовлетворяются в случае периодических граничных условий

$$y(a)=y(b), \; y'(a)=y'(b).$$

Следовательно, если $k > 0$, $l \geqslant 0$, $k(a) = k(b)$, характеристические числа системы все вещественны.

10·72. Индекс и кратность характеристических чисел. Рассмотрим снова простую систему Штурм-Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{k\dfrac{dy}{dx}\right\} + (\lambda g - l)y = 0, \\ \alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0, \\ \beta' y(b) + \beta y'(b) = 0. \end{cases}$$

Если для любого частного значения λ индекс системы равен 2, то наиболее общее решение уравнения должно удовлетворять первому граничному условию, что невозможно. Индекс системы для каждого характеристического числа равен поэтому единице.

Пусть $y(x, \lambda)$ будет решением диференциального уравнения, удовлетворяющим первому граничному условию, тогда второе граничное условие, которое удовлетворяет $y(x, \lambda)$, даст характеристическое уравнение

$$F(\lambda) \equiv \beta' y(b, \lambda) + \beta y'(b, \lambda) = 0.$$

Пусть λ_i будет характеристическим числом, а $y(x, \lambda_i)$ — соответствующей характеристической функцией, тогда

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{d}{dx}y(x, \lambda)\right\} + (\lambda g - l)y(x, \lambda) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{d}{dx}y(x, \lambda_i)\right\} + (\lambda_i g - l)y(x, \lambda_i) = 0.$$

Исключая l из этих уравнений, а затем интегрируя полученное выражение между пределами a и b, получим соотношение

$$\Big[k\{y(x, \lambda)y'(x, \lambda_i) - y'(x, \lambda)y(x, \lambda_i)\Big]_a^b +$$
$$+ (\lambda_i - \lambda)\int_a^b g y(x, \lambda_i) y(x, \lambda)\, dx = 0,$$

которое, поскольку функции $y(x, \lambda)$ и $y(x, \lambda_i)$ обе удовлетворяют первому граничному условию, а $y(x, \lambda_i)$ удовлетворяет также и второму граничному условию, приводится к виду

$$\beta' \int_a^b g y(x, \lambda_i) y(x, \lambda)\, dx = k(b)\, y'(b, \lambda_i)\{\beta' y(b, \lambda) + \beta y'(b, \lambda)\}/(\lambda - \lambda_i),$$
$$= k(b)\, y'(b, \lambda_i)\, F(\lambda)/(\lambda - \lambda_i).$$

Теперь, когда $\lambda \to \lambda_i$

$$F(\lambda)/(\lambda - \lambda_i) \to F'(\lambda_i), \text{ поскольку } F(\lambda_i) = 0,$$
$$y(x, \lambda) \to y(x, \lambda_i)$$

равномерно, поскольку $y(x, \lambda)$ — целая функция λ. Следовательно в пределе

$$\beta' \int_a^b g \{ y(x, \lambda_i) \}^2 dx = k(b) y'(b, \lambda_i) F'(\lambda_i).$$

Если $\beta' \neq 0$, то левый член уравнения также не равен нулю. Следовательно, $F'(\lambda_i) \neq 0$, т. е. λ_i — *простой* корень характеристического уравнения.

При $\beta' = 0$ модификация метода приводит к тому же результату, с тем возможным исключением, как и в случае, когда g изменяет свой знак в интервале (a, b), l равно нулю, а $\alpha' = \beta' = 0$. В данном случае характеристические числа могут быть двойными корнями характеристического уравнения.

10 · 8. Периодические граничные условия. Рассмотрим теперь следующую систему[1]

$$(A) \qquad \begin{cases} L(y) \equiv \dfrac{d}{dx}\left\{ K \dfrac{dy}{dx} \right\} - Gy = 0, \\ y(a) = y(b), \\ y'(a) = y'(b), \end{cases}$$

где условие самосопряженности системы, именно $K(a) = K(b)$, удовлетворено. Как наиболее важный, система содержит частный случай, когда K и G — периодические функции периода $(b - a)$.

Допустим, как и выше, что K и G — непрерывные функции (x, λ) при $a \leqslant x \leqslant b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$, и что обе эти функции убывают с увеличением λ. Кроме того, введем также несколько более ограничивающее условие

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} < 0,$$

что не исключает наиболее важного случая Штурм-Лиувилля, когда $G = l - \lambda g$, $g > 0$. Допустим также, что

$$\lim_{\lambda = \Lambda_1} \frac{-g}{k} = -\infty, \quad \lim_{\lambda = \Lambda_2} \frac{-G}{K} = +\infty.$$

Пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — два фундаментальных решения диференциального уравнения, выбранные таким образом, чтобы они удовлетворяли начальным условиям

$$y_1(a, \lambda) = 1, \quad y_2(a, \lambda) = 0,$$
$$y_1'(a, \lambda) = 0, \quad y_2'(a, \lambda) = 1,$$

---

[1] Tzitzéica, C. R. Acad. Sc., Paris, 140 (1905), 223; Bôcher, ibid., 928. Mason, ibid., 1086; Math. Ann., 58 (1904), 528; Trans. Am. Math. Soc., 7 (1906), 337: см. также Picard, Traité d'Analyse, 3 (I изд.), 140. Распространение на обычную самосопряженную линейную систему второго порядка см. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 10 (1909), 259 и Ettlinger, ibid., 19 (1918), 79; 22 (1921), 136.

тогда, согласно формуле Абеля (§ 9 · 4), выражение

$$\text{(B)} \qquad y_1(b, \lambda)\, y_2'(b, \lambda) - y_2(b,\lambda)\, y_1'(b, \lambda) = K(a)/K(b) = 1,$$

будет удовлетворяться тождественно для всех значений λ.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_1(a, \lambda) - y_1(b, \lambda), & y_2(a, \lambda) - y_2(b, \lambda) \\ y_1'(a, \lambda) - y_1'(b, \lambda), & y_2'(a, \lambda) - y_2'(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 - y_1(b, \lambda), & -y_2(b, \lambda) \\ -y_1'(b, \lambda), & 1 - y_2'(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

что, согласно тождеству (B), приводится к уравнению

$$\text{(C)} \qquad F(\lambda) \equiv y_1(b, \lambda) + y_2'(b, \lambda) - 2 = 0.$$

Число λ, которое определяется уравнением $F(\lambda) = 0$ так, что не все элементы характеристического детерминанта равны нулю, называется *простым характеристическим числом*. Если все эти элементы равны нулю, то получим два линейно независимых решения системы (A). Такое значение λ, для которого

$$y_1(b, \lambda) = 1, \ y_2(b, \lambda) = 0,$$
$$y_1'(b, \lambda) = 0, \ y_2'(b, \lambda) = 1,$$

называется *двойным характеристическим числом*.

Теперь нам нужно доказать, что при указанных условиях корни характеристического уравнения образуют бесконечную последовательность вещественных характеристических чисел[1].

Эта задача разрешается косвенно путем исследования знака функции $F(\lambda)$ для различных значений λ, соответственно которым решения уравнения $L(y) = 0$ обладают известными свойствами.

Пусть $\lambda = \mu_i$ будет характеристическим числом системы

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} L(u) = 0, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Эта система типа Штурма — частный случай более общей системы (§ 10 · 6, A), в которой $\alpha = \beta = 0$. Следовательно она имеет бесконечное число характеристических чисел μ_i $(i \geqslant 1)$, при которых каждая соответствующая характеристическая функция $u_i(x)$ имеет в интервале[2] $a \leqslant x < b$ некоторое число нулей, равное индексу i.

---

[1] Методы, изложенные в предыдущем параграфе, могут быть использованы для доказательства того, что во многих случаях система не имеет комплексных характеристических чисел.

[2] Первая конечная точка a входит в интервал, а вторая конечная точка b исключается, так как $u(b) = u(a)$; характеристическое число μ_0 отсутствует, поскольку каждая функция $u_i(x)$ имеет нуль при $x = a$.

Характеристические числа μ_i системы (D) не являются в общем случае корнями характеристического уравнения (C). Функция $u_i(x)$ может быть отождествлена с функцией $y_2(x, \mu_i)$.

Поскольку в данном случае

$$y_2(b, \mu_i) = 0,$$

тождество (B) приводится к

$$y_1(b, \mu_i)\, y'_2(b, \mu_i) = 1,$$

откуда

$$F(\mu_i) = y_1(b, \mu_i) - 2 + \frac{1}{y_1(b, \mu_i)} = \frac{\{y_1(b, \mu_i) - 1\}^2}{y_1(b, \mu_i)} = \frac{\{y'_2(b, \mu_i) - 1\}^2}{y'_2(b, \mu_i)}.$$

Следовательно

$$F(\mu_i) > 0, \text{ когда } y_1(b, \mu_i) > 0, \text{ но} \neq 1,$$

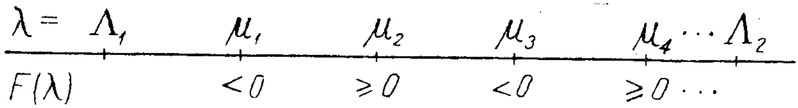
$$\text{или когда } y'_2(b, \mu_i) > 0, \text{ но} \neq 1,$$

$$F(\mu_i) = 0, \text{ когда } y_1(b, \mu_i) = y'_2(b, \mu_i) = 1,$$

$$F(\mu_i) < 0, \text{ когда } y_1(b, \mu_i) \text{ или } y'_2(b, \mu_i) < 0.$$

Поскольку $y'_2(a, \mu_i) = 1$ и $y_2(b, \mu_i) = y_2(a, \mu_i) = 0$, функция $y'_2(b, \mu_i)$ будет положительной или отрицательной соответственно тому, имеет ли $y_2(x, \mu_i)$ четное или нечетное число нулей в интервале $a \leqslant x < b$. Поэтому, когда i четное, то $F(\mu_i) \geqslant 0$, следовательно μ_i может быть корнем характеристического уравнения (C); когда i нечетное, то $F(\mu_i) < 0$, и μ_i не будет корнем (C)[1].

Знак функции $F(\lambda)$ в точках $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ может быть представлен графически (фиг. 6).



Фиг. 6.

Таким образом характеристическое уравнение $F(\lambda) = 0$ имеет четное число корней[2] в каждом интервале (μ_1, μ_3), (μ_3, μ_5), . . . Очевидно, существует бесконечная последовательность вещественных характеристических чисел системы (A).

Рассмотрим систему

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} L(v) = 0, \\ v'(a) = v'(b) = 0; \end{cases}$$

она допускает бесконечную последовательность характеристи-

---

[1] Весьма небольшое изменение аргумента показывает, что при нечетном i $F(\mu_i) \leq -4$.

[2] Возможный двойной корень считается дважды.

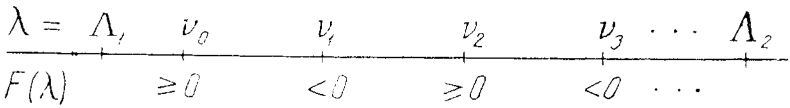
ческих чисел $\nu_i\,(i \geqslant 0)$, так что каждая характеристическая функция $v_i(x)$ имеет i нулей в интервале $a \leqslant x < b$. Отождествляя $v_i(x)$ с $y_1(x, \nu_i)$, найдем, как и выше, что

$$y_1(b, \nu_i)\, y_2'(b, \nu_i) = 1,$$
$$F(\nu_i) = \frac{\{y_1(b, \nu_i) - 1\}^2}{y_1(b, \nu_i)}.$$

Следовательно

$$F(\nu_i) > 0, \text{ когда } y_1(b, \nu_i) > 0, \text{ но} \neq 1,$$
$$F(\nu_i) = 0, \text{ когда } y_1(b, \nu_i) = 1,$$
$$F(\nu_i) < 0, \text{ когда } y_1(b, \nu_i) < 0.$$

Теперь функция $y_1(x, \nu_i)$ имеет четное или нечетное число нулей в интервале $a \leqslant x < b$, соответственно тому i четное или нечетное. Поскольку $y_1(a, \nu_i) = 1$, отсюда следует, что $y_1(b, \nu_i)$ положительно или отрицательно, соответственно тому i четное или нечетное. Поэтому, когда i четное — $F(\nu_i) \geqslant 0$ и ν_i может быть корнем характеристического уравнения (C), а когда i нечетное — $F(\nu_i) < 0$ и ν_i не будет корнем (C).



Фиг. 7.

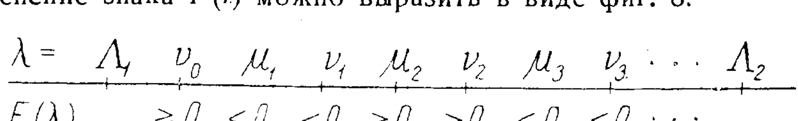
Знак $F(\lambda)$ может быть выражен следующим образом (фиг. 7).

Функция $F(\lambda)$ имеет следовательно четное число корней в каждом интервале (Λ_1, ν_1), (ν_1, ν_3), (ν_3, ν_5), ...

Очевидно, что

$$\nu_i < \mu_{i+1} < \nu_{i+2}, \quad \mu_i < \nu_{i+1} < \mu_{i+2},$$

так как увеличение числа нулей в интервале $a \leqslant x < b$ означает увеличение значения λ. С другой стороны, ничего неизвестно об относительных величинах μ_i и ν_i. Полагая, что $\mu_i < \nu_i$, изменение знака $F(\lambda)$ можно выразить в виде фиг. 8.



Фиг. 8.

Следовательно мы доказали, что при указанных условиях *для системы* (A) *в каждом интервале* (μ_i, μ_{i+1}), (ν_i, ν_{i+1}) *существует не меньше одного характеристического числа.*

Покажем далее, что для системы (A) в каждом интервале (μ_i, μ_{i+1}) или (ν_i, ν_{i+1}) имеется только одно характеристическое число. Для этого достаточно доказать, что функция $F'(\lambda)$ имеет тот же знак при каждом корне $F(x)=0$ в любом интервале. Поскольку восходящие и убывающие узлы должны следовать друг за другом в графике непрерывной функции, результат получается немедленно. Для упрощения примем, что $K(x)$ не зависит от λ, тогда

$$F(\lambda)=y_1(b,\lambda)+y_2'(b,\lambda)-2,$$

следовательно

$$F'(\lambda)=\frac{\partial y_1(b,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial y_2'(b,\lambda)}{\partial\lambda}.$$

Предположим, что $u(x,\lambda)$ будет единственным решением системы

$$\begin{cases} L(u)=0, \\ u(a)=\alpha,\ u'(a)=\alpha', \end{cases}$$

где α и α' — вещественные числа, не зависящие от λ. Очевидно, $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\right\}-G\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{\partial G}{\partial\lambda}u.$$

Но, как известно, соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\right\}-G\frac{\partial v}{\partial\lambda}=0$$

имеет два фундаментальных решения

$$\frac{\partial v}{\partial\lambda}=y_1(x,\lambda),\quad \frac{\partial v}{\partial\lambda}=y_2(x,\lambda),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$ и $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)$ можно определить методом вариации параметров (§ 5·23) так, что[1]

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{1}{K(a)}\int_a^x\frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial\lambda}u(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)-y_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)\}\,dt$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{1}{K(a)}\int_a^x\frac{\partial G(t,\lambda)}{\partial\lambda}u(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2'(x,\lambda)-$$
$$-y_2(t,\lambda)y_1'(x,\lambda)\}\,dt.$$

Следовательно, полагая $x=b$ и $u=y_1$ в выражении

[1] Не следует забывать, что

$$u(a,\lambda)=\alpha,\quad u'(a,\lambda)=\alpha'$$

для всех значений λ, следовательно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}u(a,\lambda)=0,\ \frac{\partial}{\partial\lambda}u'(a,\lambda)=0.$$

для $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, найдем

$$\frac{\partial y_1(b, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{K(a)}\int_a^b \frac{\partial G(t, \lambda)}{\partial \lambda} y_1(t, \lambda)\{y_1(t, \lambda)y_2(b, \lambda) - y_2(t, \lambda)y_1(b, \lambda)\}\,dt;$$

и полагая $x = b$ и $u = y_2$ в выражении для $\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)$, аналогично найдем, что

$$\frac{\partial y_2'(b, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{K(a)}\int_a^b \frac{\partial G(t, \lambda)}{\partial \lambda} y_2(t, \lambda)\{y_1(t, \lambda)y_2'(b, \lambda) - y_2(t, \lambda)y_1'(b, \lambda)\}\,dt$$

откуда

$$F'(\lambda) = \frac{1}{K(a)}\int_a^b \frac{\partial G(t, \lambda)}{\partial \lambda}\{y_2(b, \lambda)y_1^2(t, \lambda) + [y_2'(b, \lambda) -$$

$$- y_1(b, \lambda)]\,y_1(t, \lambda)y_2(t, \lambda) - y_1'(b, \lambda)y_2^2(t, \lambda)\}\,dt.$$

Поскольку $K(a) > 0$, а $\frac{\partial G}{\partial \lambda} < 0$, знак при $F'(\lambda)$ будет противоположен знаку при квадрической форме

$$\Phi(\xi, \eta) = y_2(b, \lambda)\xi^2 + [y_2'(b, \lambda) - y_1(b, \lambda)]\,\xi\eta - y_1'(b, \lambda)\eta^2,$$

где $\xi = y_1(t, \lambda)$, $\eta = y_2(t, \lambda)$. Дискриминант этой формы равен

$$[y_2'(b, \lambda) - y_1(b, \lambda)]^2 + 4y_2(b, \lambda)y_1'(b, \lambda),$$

и, согласно формуле Абеля

$$y_1(b, \lambda)y_2'(b, \lambda) - y_2(b, \lambda)y_1'(b, \lambda) = 1,$$

он приводится к виду

$$[y_2'(b, \lambda) + y_1(b, \lambda)]^2 - 4,$$

следовательно для значений λ, при которых характеристическое уравнение

$$y_1(b, \lambda) + y_2'(b, \lambda) = 2$$

удовлетворяется, дискриминант равен нулю. Для таких значений λ квадратическая форма может быть написана в виде

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{\left\{y_2\xi + \frac{1}{2}(y_2' - y_1)\eta\right\}^2}{y_2(b, \lambda)}$$

$$= -\frac{\{y_1'\eta - (1 - y_1)\xi\}^2}{y_1'(b, \lambda)}.$$

При простом характеристическом числе λ выражения

$$y_2\xi + \frac{1}{2}(y_2' - y_1)\eta, \quad y_1'\eta - (1 - y_1)\xi$$

не могут быть равны нулю. Отсюда следует, что функция $F'(\lambda)$ не равна нулю и ее знак соответствует знаку $y_1'(b, \lambda)$ или $y_2(b, \lambda)$. Следовательно, функция $F(\lambda)$ *изменяет свой знак при простом характеристическом числе* λ.

Если для любого частного значения λ

$$y_2(b, \lambda) = y_1'(b, \lambda) = 0,$$

то формула Абеля приводится к виду

$$y_1(b, \lambda) + y_2'(b, \lambda) = 0,$$

а из характеристического уравнения

$$y_1(b, \lambda) + y_2'(b, \lambda) = 2$$

получим, что

$$y_1(b, \lambda) = y_2'(b, \lambda) = 1.$$

Рассматриваемое значение λ является двойным характеристическим числом и для такого значения

$$F(\lambda) = 0, \quad F'(\lambda) = 0.$$

Аналогичным принятому при нахождении $F'(\lambda)$ методом можно доказать, что

$$F''(\lambda) = -\frac{2}{\{K(a)\}^2}\int_a^b\int_a^s \frac{\partial G(s, \lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial G(t, \lambda)}{\partial\lambda}\{y_1(s, \lambda)\, y_2(t, \lambda) -$$

$$- y_2(s, \lambda)\, y_1(t, \lambda)\}^2\, dt\, ds.$$

Поскольку y_1 и y_2 — независимые решения диференциального уравнения, а s и t — независимые переменные, то выражение

$$y_1(s, \lambda)\, y_2(t, \lambda) - y_2(s, \lambda)\, y_1(t, \lambda)$$

не равно тождественно нулю. Функция $F''(\lambda)$ отрицательна для двойного характеристического значения λ, поэтому она находится *в соседстве с двойным характеристическим числом; $F(\lambda)$ сохраняет постоянный отрицательный знак.*

Поскольку функция $F(\lambda)$ отрицательна при μ_{2m-1} и при μ_{2m+1} и положительна или равна нулю при μ_{2m}, в двойном интервале (μ_{2m-1}, μ_{2m+1}) должно существовать не меньше двух простых характеристических чисел λ_p и λ_q или одно двойное характеристическое число $\lambda_p = \lambda_q$ так, чтобы

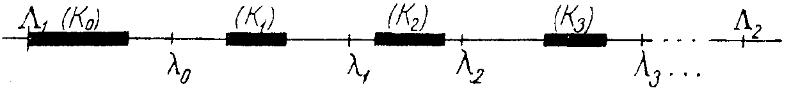
$$\mu_{2m-1} < \lambda_p \leqslant \mu_{2m} \leqslant \lambda_q < \mu_{2m+1}.$$

В этом интервале, кроме точки μ_{2m}, не может лежать ни одно двойное характеристическое число. Если в интервале (μ_{2m-1}, μ_{2m}) имеются еще другие дополнительные характеристические числа, то они должны быть простыми, а число их четным. Но для этих значений λ функция $F'(\lambda)$ имеет знак противоположный $y_2(b, \lambda)$, что невозможно, поскольку $y_2(b, \lambda)$ не меняет знака в некоторой внутренней точке интервала. Следовательно в двойном интервале (μ_{2m-1}, μ_{2m+1}), кроме λ_p и λ_q, нет никаких других характеристических чисел. Аналогично можно доказать, что в двойном интервале (ν_{2m-1}, ν_{2m+1}) имеются только два характеристических числа; очевидно, этими характеристическими числами являются λ_p и λ_q, поэтому

$$\nu_{2m-1} < \lambda_p \leqslant \nu_{2m} \leqslant \lambda_q < \nu_{2m+1}.$$

Отсюда непосредственно следует, что в открытом интервале (μ_{2m}, ν_{2m}) или в замкнутом (μ_{2m+1}, ν_{2m+1}) характеристические числа лежать не могут. Аналогично можно доказать, что в интервале $\Lambda_1 < \lambda < \nu_0$ функция $F(\lambda) > 0$ и, следовательно, характеристические числа отсутствуют.

Поскольку λ_p и λ_q — внутренние точки двойного интервала (μ_{2m-1}, μ_{2m+1}), соответствующие характеристические функции y_p и y_q не могут иметь меньше $2m-1$ или больше $2m+1$ нулей в интервале $a \leqslant x < b$. Однако, вследствие периодических граничных условий число нулей в интервале должно быть четным. Следовательно y_p и y_q имеют только по $2m$ нуля в интервале $a \leqslant x < b$.



Фиг. 9.

Обозначим интервал (Λ_1, ν_0) через $(\varkappa_0)$, а интервалы (μ_1, ν_1), $(\mu_2, \nu_2), \ldots$ через $(\varkappa_1)$, $(\varkappa_2), \ldots$ (фиг. 9). В данном случае ни одно характеристическое число не может быть внутренней точкой любого интервала $(\varkappa_i)$. С другой стороны, между двумя последовательными интервалами $(\varkappa_i)$ и $(\varkappa_{i+1})$ лежит только одно характеристическое число[1]; обозначим его через λ_i и пусть $y_i(x)$ будет соответствующей характеристической функцией. Тогда $y_0(x)$ не обратится в нуль в интервале $a \leqslant x < b$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обратятся в нуль два раза, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ — четыре раза и т. д. Это приводит к следующей *теореме осцилляции*.

Для системы (A) *существует бесконечная последовательность характеристических чисел* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$, *так что если соответствующие характеристические функции обозначить через* $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$, *то* y_i *будет иметь в интервале* $a \leqslant x < b$ *четное число нулей, именно* i *или* $i+1$ *нулей.*

[1] Очевидно, при наличии двойных характеристических чисел это утверждение неверно.

10·81. Уравнения с периодическими коэфициентами. Наиболее важное применение теории систем с периодическими граничными условиями относится к случаю, когда коэфициенты диференциального уравнения являются периодическими функциям x с периодом, соизмеримым с $(b-a)$. В частности, пусть K и G будут четными периодическими функциями, с периодом π и пусть граничными условиями будут

$$y(-\pi)=y(\pi),\ y'(-\pi)=y'(\pi),$$

тогда из диференциального уравнения найдем, что если y_i — любая характеристическая функция, то $y_i^{(r)}(-\pi)=y_i^{(r)}(\pi)$, следовательно характеристические функции будут чисто периодическими с периодом 2π.

Основные решения $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ удобно выразить следующим образом

$$y_1(0,\lambda)=1,\quad y_2(0,\lambda)=0,$$
$$y_1'(0,\lambda)=0,\quad y_2'(0,\lambda)=1;$$

тогда $y_1(x,\lambda)$ будет четной, а $y_2(x,\lambda)$ — нечетной функцией от x. Если бы, например, функция $y_1(x,\lambda)$ не была четной, то $y_1(x,\lambda)-y_1(-x,\lambda)$ было бы решением уравнения, которое обратится в нуль вместе с его первым производным для $x=0$, что невозможно.

Если для любого значения λ выражение $y_1(-\pi,\lambda)=0$, то $y_1(x,\lambda)$ будет иметь четное число нулей в интервале $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, что противоречит условию $y'(-\pi)=y'(\pi)$, следовательно это значение λ не было бы характеристическим. Для любого другого значения λ функция $y_1(x,\lambda)$ удовлетворяет условию

$$y(-\pi)=y(\pi)\neq 0.$$

Дальнейшее условие

$$y'(-\pi)=y'(\pi)=0$$

удовлетворяется при $\lambda=\nu_{2m}$.

Аналогично, для всех приемлемых значений λ функция $y_2(x,\lambda)$ удовлетворяет условию

$$y'(-\pi)=y'(\pi)\neq 0,$$

а также условию

$$y(-\pi)=y(\pi)=0$$

при $\lambda=\mu_{2m}$. В данном случае λ_i должна быть отождествлена с ν_i, когда i четное, и с μ_{i+1}, когда i нечетное.

Весьма важно распространение приведенного выше случая на периодические решения второго рода, т. е. когда $y(\pi)$ и $y'(\pi)$ не равны, а только пропорциональны $y(-\pi)$ и $y'(-\pi)$. Оба линейных граничных условия заменены теперь одним квадратичным граничным условием, именно

$$y(-\pi)y'(\pi)-y'(-\pi)y(\pi)=0.$$

Как мы увидим ниже, эта система имеет всегда только одно решение, а в общем случае для всех значений λ — два линейно независимых решения.

10 · 9. Теорема осцилляции Клейна. Мы сейчас приведем пример теоремы осцилляции, формулировка которой значительно шире теорем Штурма. Она указывает пути обобщения проблемы.

Рассмотрим так называемое уравнение Ляме[1]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-e_1}+\frac{1}{x-e_2}+\frac{1}{x-e_3}\right\}\frac{dy}{dx}-\frac{Ax+B}{(4x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}y=0,$$

где $e_1<e_2<e_3$. Возьмем два замкнутых интервала (a_1, b_1), (a_2, b_2); нужно, чтобы каждый интервал целиком лежал внутри какого-либо открытого интервала $(e\ , e_2)$, (e_2, e_3), (e_3, ∞). Таким образом, обеспечивается непрерывность коэфициентов диференциального уравнения в интервалах (a_1, b_1) и (a_2, b_2).

Постоянные A и B должны рассматриваться как параметры; задача, соответствующая физическому исследованию, состоит в том, чтобы, если возможно, определить A и B так, чтобы уравнение одновременно имело решение y_1, удовлетворяющее некоторым граничным условиям, относящимся к (a_1, b_1), и решение y_2, удовлетворяющее некоторым граничным условиям, относящимся к (a_2, b_2). Или, в более частном случае, нужно так определить A и B, чтобы уравнение допускало решение y_1, обращающееся в нуль при a_1 и b_1, и имело m_1 корней между a_1 и b_1, а также допускало решение y_2, обращающееся в нуль при a_2 и b_2, и имело m_2 корней между a_1 и b_2. Эта задача была исследована Клейном[2]; его метод исследования составляет основу значительно более общей теории, которую мы сейчас разберем.

Допустим, что в диференциальном уравнении

$$\text{(A)}\qquad \frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\}-Gy=0$$

функция G имеет форму

$$G=l(x)-\{\lambda_0+\lambda_1x+\ldots+\lambda_nx^n\}g(x)$$

и следовательно зависит от $n+1$ параметров. Далее допустим, что у нас имеются $n+1$ замкнутых интервалов

$$(a_0,\ b_0),\ (a_1,\ b_1),\ldots,\ (a_n,\ b_n),$$

где

$$a_0<b_0<a_1<b_1<\ldots<a_n<b_n,$$

---

[1] См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XXIII,

[2] Math. Ann., 18 (1881), 410 Gött. Nach. (1890), 91, [Ges. Math. Abh., 2, 512, 540]; Bôcher, Bull. Am. Math. Soc., 4 (1898), 295; 5 (1889), 365. Случай двух уравнений второго порядка с двумя параметрами рассмотрен Ричардсоном [Trans. Am. Math. Soc., 13 (1912), 22; Math. Ann., 73 (1912), 289].

так что K, l и g — непрерывны, а $g > 0$ для значений x, лежащих в любом из этих интервалов[1].

Теперь нам нужно исследовать возможность определения λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ таким образом, чтобы можно было найти $n+1$ частных решений уравнения, например $y_0, y_1, \ldots, y_n$, где y_r удовлетворяло бы двум граничным условиям

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \alpha_r' y_r(a_r) - \alpha_r y_r'(a_r) = 0, \\ \beta_r' y_r(b_r) - \beta_r y_r'(b_r) = 0 \end{cases} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n)$$

и имело бы заданное число нулей, например m_r, в интервале (a_r, b_r).

Теорема осцилляции, которая дает полное решение указанной задачи, может быть выражена так. *Существует бесконечная последовательность совместных характеристических чисел* (λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), *так что каждой частной последовательности соответствует некоторая последовательность характеристических функций. Если* $(n+1)$ *положительных целых чисел или нулей* $(m_0, m_1, \ldots, m_n)$ *заданы, то характеристические числа* $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *могут быть выбраны единственно возможным способом так, чтобы в каждом интервале* $a_r < x < b_r$ *соответствующая характеристическая функция* y_r *имела точно* m_r *нулей.*

Эта теорема доказывается методом индукции; она несомненно верна при $n = 0$, так как приводится в этом случае к теореме осцилляции § 10·6. Предположим, что теорема верна для случая n параметров включительно; она может быть затем доказана и для случая $n+1$ параметров. Если функцию G переписать так:

$$G = \{l(x) - \lambda_n x^n g(x)\} - \{\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1}\} g(x),$$

а параметр λ_n принят определенным, то G можно рассматривать как функцию, зависящую от n параметров $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Допустим, что эти n постоянных могут быть выбраны только так, чтобы характеристические функции $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ существовали и чтобы каждая из них удовлетворяла определенным граничным условиям и имела определенное число нулей в соответствующем интервале. Найденные таким образом n характеристических чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ будут зависеть от λ_n, следовательно, если λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ выражены через λ_n, то G можно рассматривать как функцию x и параметра λ_n. Если теорема Штурма может быть приложена к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left\{K \frac{dy}{dx}\right\} - G(x, \lambda_n) y = 0$$

так, чтобы показать существование решения y_n, имеющего m_n

[1] Относительно поведения K, l и g для значений x, не лежащих в одном из этих интервалов, не делается никаких указаний; действительно в случае уравнения Ляме коэфициенты становятся бесконечными для некоторых значений x (именно e_1, e_2, e_3) вне выбранных интервалов.

нулей в интервале $a_n < x < b_n$, то теорема доказана. Поэтому важно убедиться, что функция $G(x, \lambda_n)$ удовлетворяет условиям, необходимым для применения теоремы осцилляции.

Докажем, что $G(x, \lambda_n)$ — непрерывная функция (x, λ_n) для значений x, лежащих в интервале (a_n, b_n). Если λ'_n — некоторое фиксированное значение параметра λ_n, то разность

$$G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n)$$

должна обратиться в нуль по крайней мере для одного значения x в каждом интервале $a_r \leqslant x \leqslant b_r$ $(r \leqslant n-1)$, так как, если бы эта разность имела постоянно один знак в некотором интервале (a_r, b_r), то $y_r(x, \lambda_n)$ осциллировала бы, согласно теореме сравнения, более (или менее) быстро, чем $y_r, (x, \lambda'_n)$; это противоречит условию, что y_r имеет точно m_r нулей в интервале (a_r, b_r). Отсюда следует, что в каждом интервале (a_r, b_r) имеется не меньше одной точки x_r, удовлетворяющей условию

$$G_r(x_r, \lambda_n) = G(x_r, \lambda'_n) \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

но

$$G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n) = \{(\lambda'_0 - \lambda_0) + (\lambda'_1 - \lambda_1)x + \ldots + (\lambda'_n - \lambda_n)x^n\} g(x)$$
$$= (\lambda'_n - \lambda_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) g(x).$$

Следовательно, если x лежит в интервале (a_n, b_n), то

$$|G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n)| < |\lambda'_n - \lambda_n| \, |b_n - a_0| \, |b_n - a_1| \ldots |b_n - a_{n-1}| \, |g(x)|,$$

откуда следует непрерывность функции $G(x, \lambda_n)$. Аналогично

$$x - x_r > 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

когда x лежит в интервале (a_n, b_n), следовательно

$$\frac{G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n)}{\lambda_n - \lambda'_n} < 0$$

для $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Более точно

$$G(x, \lambda_n) \to -\infty \text{ при } \lambda_n \to +\infty,$$
$$G(x, \lambda_n) \to +\infty \text{ при } \lambda_n \to -\infty.$$

Условия, необходимые для теоремы осцилляции Штурма, поэтому удовлетворены. Следовательно существует только одно характеристическое число λ_n, так что y_n допускает точно m_n нулей в интервале $a_n < x < b_n$. Таким образом теорема доказана.

Рассмотренные характеристические числа являются вещественными. Возникает вопрос, могут ли существовать также и комплексные характеристические числа, однако допущение существования комплексных характеристических чисел приводит к противоречию.

Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ будет последовательностью совместных характеристических чисел, которым соответствует последовательность характеристических функций $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Если, как мы допустили, по меньшей мере одно из чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ комплексное, в то время как все другие коэфициенты диференциального уравнения и граничных условий вещественны, то диференциальная система допускает в качестве последовательности характеристических чисел последовательность $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, сопряженную с $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, вместе с последовательностью характеристических функций $v_0, v_1, \ldots, v_n$, сопряженных с $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{du_r}{dx}\right\}+\{(\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_n x^n)g-l\}u_r=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{dv_r}{dx}\right\}+\{(\mu_0+\mu_1 x+\ldots+\mu_n x^n)g-l\}v_r=0$$

$$(r=0,\ 1, \ldots,\ n).$$

Исключая l из обоих уравнений и интегрируя полученное выражение между пределами a_r и b_r, получим последовательность уравнений

$$\int_{a_r}^{b_r}\{(\lambda_0-\mu_0)+(\lambda_1-\mu_1)x+\ldots+(\lambda_n-\mu_n)x^n\}gu_r v_r dx=0$$

$$(r=0,\ 1, \ldots,\ n).$$

$n+1$ чисел $\lambda_r-\mu_r$ не все равны нулю; предположим, что ни одно из них не равно нулю, тогда между $(n+1)$ величинами $(\lambda_r-\mu_r)$ будут $n+1$ уравнений; условием совместимости этих уравнений является

$$\text{(C)}\quad \int_{a_0}^{b_0}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\Delta(x_0,\ldots,\ x_n)\,g(x_0)\ldots g(x_n)\,u_0(x_0)\,v_0(x_0)\ldots u_n(x_n)\,v_n\times$$
$$\times(x_n)\,dx_0\ldots dx_n=0,$$

где

$$\Delta(x_0,\ldots,\ x_n)=\begin{vmatrix} 1, & x_0, & \ldots, & x_0^n \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\Pi(x_r-x_s)\qquad (r>s).$$

Если p величин $\lambda_r-\mu_r$ обращаются в нуль (что означает, что соответствующие числа λ_r вещественны), то из остальных $n-p+1$ уравнений могут быть составлены $n+1$ уравнений. Условие их совместимости может быть выражено в виде некоторого числа уравнений вида (C), в каждом из которых порядок кратного интеграла равен $n-p+1$. Доказательство в основном одинаково во всех случаях.

При $n = 0$ формула (C) принимает вид

$$\int_a^b guv\,dx = 0.$$

Теперь в формуле (C)

$\Delta(x_0, \ldots, x_n) > 0$, поскольку $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$,

$g_r(x_r) > 0$,

$u_r(x_r)v_r(x_r) > 0$, поскольку u_r и v_r — сопряженные величины

Следовательно интеграл не может быть равен нулю — противоречие, доказывающее несуществование комплексных или мнимых характеристических чисел.

Теория может быть распространена без особого труда на уравнение, в котором

$$G = l - \lambda_0 g_0 - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_n g_n.$$

В кратном интеграле произведение

$$\Delta(x_0, \ldots, x_n)\, g(x_0) \ldots g(x_n)$$

может быть заменено детерминантом

$$\begin{vmatrix} g_0(x_0), & g_1(x_0), & \ldots, & g_n(x_0) \\ g_0(x_1), & g_1(x_1), & \ldots, & g_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_0(x_n), & g_1(x_n), & \ldots, & g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

Комплексные характеристические числа не существуют, если $g_0, g_1, \ldots g_n$ таковы, что детерминант сохраняет постоянный знак, когда $a_0 \leqslant x_0 \leqslant b_0, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$.

Примеры

1. Докажите, что вронскиан k линейно-независимых решений линейного дифференциального уравнения порядка $n > k$ не может иметь бесконечное число нулей в некотором интервале (a, b), в котором коэфициенты непрерывны.

[Bôcher, Bull. Am. Math. Soc., 8 (1901), 53].

2. Пусть y будет любым решением

$$\frac{d}{dx}\left\{K\frac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0,$$

а φ_1 и φ_2 — функции x с их первыми производными, непрерывными в интервале (a, b). Пусть

$$\Phi = \varphi_1 y - \varphi_2 K y',$$

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \varphi_1' \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2' + \frac{\varphi_1^2}{K} - G\varphi_2^2,$$

тогда, если $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ не обращается в нуль в интервале (a, b), то Φ не может обратиться в нуль больше конечного числа раз, а Φ и Φ' не могут обратиться в нуль ни в одной точке интервала (a, b).

[Bôcher, Trans. Am. Math. Soc., 2 (1901), 430]

3. Если y_1 и y_2 — независимые решения уравнения (2) и если

$$\Phi_1 = \varphi_1 y_1 - \varphi_2 K y_1', \quad \Phi_2 = \varphi_1 y_2 - \varphi_2 K y_2',$$

то между любыми двумя последовательными нулями Φ_2 лежит только один нуль Φ_2.

[Bôcher, ibid., 3 (1902), 214].

4. Пусть ψ_1 и ψ_2 — функции того же рода, что и φ_1 и φ_2, и пусть

$$\Phi = \varphi_1 y - \varphi_2 K y', \quad \Psi = \psi_1 y - \psi_2 K y',$$

тогда, если ни одна из функций

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\},$$

не обращается в нуль в интервале (a, b), то в любой части (a, b), где Ψ не обращается в нуль, Φ не обратится в нуль, больше одного раза

[Bôcher, ibid, 2 (1901), 430].

5. Если ни одна из функций

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad \{\psi_1, \psi_2\}$$

не обращается в нуль в интервале (a, b), то между двумя последовательными нулями Φ лежит только один нуль Ψ, и наоборот.

[Bôcher, ibid., 431].

6. Если к условиям (5) дополнительно принять, что функции $\{\varphi_1, \varphi_2)$ и $\{\psi_1, \psi_2\}$ разных знаков, то Φ и Ψ не обратятся в нуль больше одного раза в интервале (a, b) и обратится в нуль только одна из этих функций. Рассмотрите специальный случай $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 0$.

[Bôcher, ibid., 431]

7. Пусть χ_1 и χ_2 аналогичны φ_1 и φ_2 и пусть

$$\Phi_1 = \varphi_1 y - \varphi_2 K y', \quad \Psi = \psi_1 y - \psi_2 K y', \quad X = \chi_1 y - \chi_2 K y',$$

тогда, если ни одна из шести функций

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1, \quad \psi_1\chi_2 - \psi_2\chi_1, \quad \chi_1\varphi_2 - \chi_2\varphi_1 \quad \{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad \{\psi_1, \psi_2\}, \quad \{\chi_1, \chi_2\}$$

не обратится в нуль в интервале (a, b), если последние три функции имеют общий знак и если произведение всех шести функций отрицательно, то между любым корнем Φ и бо́льшим корнем X лежит корень Ψ, между любым корнем Ψ и бо́льшим корнем Φ лежит корень X, а между любым корнем X и бо́льшим корнем Ψ лежит корень Φ.

[Bôcher, ibid., 432, Sturm, J. de Math., 1 (1836), 165].

8. Если во всем интервале (a, b)

$$K > 0, \quad K' \neq 0, \quad G < 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{K'}{G}\right) < 1,$$

то нули y, y', y'' будут следовать один за другим циклически в указанном порядке, если $K' > 0$, и в обратном порядке, если $K' < 0$.

9. Положительные нули функций Бесселя $J_n(x)$, $J_{n+1}(x)$, $J_{n+2}(x)$ следуют друг за другом циклически в указанном порядке, если $n > -1$, и в обратном порядке, если $n < -1$.

[Bôcher, Bull. Am. Math. Soc. (1897), 207; loc. cit. ante, 434]:

10. Для системы

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0, \\ L_0[y(a)] = M_0[y(b)], \; L_1[y(a)] = M_1[y(b)], \end{cases}$$

где

$$L_i[y(x)] = \alpha_i y(x) - \beta_i K y'(x),$$

$$M_i[y(x)] = \gamma_i y(x) + \delta_i K y'(x) \qquad (i = 1, 2),$$

а K, G, α_i, β_i, γ_i, δ_i зависят от λ, пусть при $(a \leqslant x \leqslant b)$, $(\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2)$ будут наложены следующие условия:

(A_I) K и G непрерывны и $K > 0$ для всех рассматриваемых значений (x, λ);

(A_{II}) K и G не увеличиваются с увеличением λ, и для любого значения λ существует x, для которого K или G действительно уменьшаются;

(A_{III}) все восемь коэфициентов $\alpha_i, \ldots, \delta_i$ — непрерывные вещественные функции λ в рассматриваемом интервале и

$$|\alpha_i| + |\beta_i| > 0, \quad |\gamma_i| + |\delta_i| > 0;$$

(A_{IV}) β_i тождественно равна нулю или α_i/β_i не увеличивается с увеличением λ; δ_i тождественно равна нулю или γ_i/δ_i не увеличивается с увеличением λ;

(B) условия, обеспечивающие справедливость теоремы осцилляции Штурма для системы

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\} - Gy = 0, \\ L_0[y(a)] = 0, \quad M_0[y(b)] = 0; \end{cases}$$

$$(C) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, & \delta_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha_0', & \beta_0', & \gamma_0', & \delta_0' \\ \alpha_1', & \beta_1', & \gamma_1', & \delta_1', \end{matrix} \right\| \leq 0.$$

Пусть $y_0(x, \lambda)$ и $y_1(x, \lambda)$ обозначают два линейно-независимых решения диференциального уравнения, удовлетворяющие условиям

$$L_0[y_0(a)] = 0, \quad L_1[y_0(a)] = 1,$$
$$L_0[y_1(a)] = 1, \quad L_1[y_1(a)] = 0;$$

тогда характеристическое уравнение для системы (1) будет иметь вид

$$F(\lambda) \equiv M_1[y_0(b, \lambda)] + M_0[y_1(b, \lambda)] - 2 = 0,$$

и для каждых двух характеристических чисел системы Штурма (2) будет существовать только одно характеристическое число. Если $\mu_0, \mu_1, \ldots$ — расположенные в порядке характеристические числа системы (2), а $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — характеристические числа системы (1), то, принимая во внимание их кратность, возможны следующие случаи.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}_a & \Lambda_1 < \mu_0 \leqslant \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_2 < \mu_3 < \lambda_3 < \ldots < \Lambda_2. \\ \mathrm{I}_b & \Lambda_1 < \lambda_0 \leqslant \mu_0 \leqslant \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_3 < \mu_3 < \ldots < \Lambda_2, \\ \mathrm{II}_a & \Lambda_1 < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots < \Lambda_2, \\ \mathrm{II}_b & \Lambda_1 < \mu_0 < \lambda_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \lambda_3 < \ldots < \Lambda_2. \end{array}$$

Условия для этих случаев будут соответственно иметь вид

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I}_a & M_1[y_0(b, \lambda_0)] > 0, & F(\Lambda_1 + \varepsilon) > 0, \\ \mathrm{I}_b & M_1[y_0(b, \lambda_0)] > 0, & F(\Lambda_1 + \varepsilon) < 0, \\ \mathrm{II}_a & M_1[y_0(b, \lambda_0)] < 0, & F(\Lambda_1 + \varepsilon) > 0, \\ \mathrm{II}_b & M_1(y_0(b, \lambda_0)] < 0, & F(\Lambda_1 + \varepsilon) < 0. \end{array}$$

Характеристическая функция, соответствующая характеристическому числу λ_p, будет иметь $p-2$, $p-1$, p, $p+1$ или $p+2$ нулей в интервале $a < x < b$.

[Ettlinger, Trans. Am. Math. Soc., 19 (1918), 79; 22 (1921), 136].

ГЛАВА XI

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ПРОБЛЕМ

11·1. Одномерные функции Грина. Лучшим средством исследования граничных проблем за пределами рассуждений предыдущих параграфов являются так называемые функции Грина, которые мы сейчас определим[1]. Рассмотрим полностью однородную линейную диференциальную систему

$$
\text{(A)} \qquad \begin{cases} L(u) \equiv p_0 \dfrac{d^n u}{dx^n} + p_1 \dfrac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \dfrac{du}{dx} + p_n u = 0, \\ U_i(u) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}
$$

Предположим, что эта система несовместима, т. е. не допускает решения, не равного тождественно нулю и которое вместе с ее первыми $n-1$ производными было бы непрерывно в интервале (a, b). Несмотря на то, что (A) не имеет решения, может существовать функция, формально удовлетворяющая системе, но нарушающая, по крайней мере частично, условия непрерывности.

Этому удовлетворяет функция Грина $G(x, \xi)$, которая:

(1°) непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n-2)$ порядка включительно при $a \leqslant x \leqslant b$;

(2°) такова, что ее производная порядка $(n-1)$ имеет разрыв в точке ξ внутри интервала (a, b), причем скачок равен $1/p_0(\xi)$;

(3°) формально удовлетворяет системе во всех точках интервала (a, b), за исключением ξ.

Сначала докажем, что такая функция $G(x, \xi)$ действительно существует и что она единственная. Пусть

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_n(x)$$

будет фундаментальной последовательностью решений уравнения

$$L(u) = 0,$$

тогда, поскольку функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению в интервале $a \leqslant x < \xi$, она может быть представлена в виде

$$G(x, \xi) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \ldots + a_n u_n(x);$$

[1] Bôcher, Bull. Am. Math. Soc., 7 (1901), 297; Hilbert, Gründzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, VII — IX.

аналогично она может быть выражена в виде

$$G(x, \xi) = b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x) + \ldots + b_n u_n(x)$$

в интервале $\xi < x \leqslant b$. Но функция $G(x, \xi)$ и ее первые $(n-2)$ производных непрерывны в точке ξ, следовательно

$$\{a_1 u_1(\xi) + a_2 u_2(\xi) + \ldots + a_n u_n(\xi)\} - \{b_1 u_1(\xi) + b_2 u_2(\xi) + \\ + \ldots + b_n u_n(\xi)\} = 0,$$

$$\{a_1 u_1'(\xi) + a_2 u_2'(\xi) + \ldots + a_n u_n'(\xi)\} - \{b_1 u_1'(\xi) + b_2 u_2'(\xi) + \\ + \ldots + b_n u_n'(\xi)\} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{a_1 u_1^{(n-2)}(\xi) + a_2 u_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + a_n n_n^{(n-2)}(\xi)\} \\ - \{b_1 u_1^{(n-2)}(\xi) + b_2 u_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + b_n u_n^{n-2}(\xi)\} = 0.$$

Прерывность $(n-1)$ производной $G^{n-1}(x, \xi)$ при $x = \xi$ приводит к уравнению

$$\{a_1 u_1^{(n-1)}(\xi) + a_2 u_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + a_n u_n^{(n-1)}(\xi)\} \\ - \{b_1 u_1^{(n-1)}(\xi) + b_2 u_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + b_n u_n^{(n-1)}(\xi)\} = -\frac{1}{p_6(\xi)}.$$

Эти уравнения могут быть написаны в виде

$$c_1 u_1(\xi) + c_2 u_2(\xi) + \ldots + c_n u_n(\xi) = 0,$$

$$c_1 u_1'(\xi) + c_2 u_2'(\xi) + \ldots + c_n u_n'(\xi) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1 u_1^{(n-2)}(\xi) + c_2 u_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n u_n^{(n-2)}(\xi) = 0,$$

$$c_1 u_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 u_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n u_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)},$$

где

$$c_i = b_i - a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Дискриминант этих n уравнений равен вронскиану $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_n(x)$ при $x = \xi$; он не равен нулю, поскольку n выбранных решений образуют фундаментальную последовательность. Следовательно числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть определены единственным способом.

До сих пор граничные условия системы в (А) не были использованы. Пусть

$$U_i(u) = A_i(u) + B_i(u),$$

где члены, относящиеся к конечной точке a, сгруппированы в выражение A_i, а члены, относящиеся к b, — в выражении B_i. Тогда, учитывая, что G в интервале (a, ξ) отличается от такового в интервале (ξ, b), очевидно, что

$$U_i(G) = a_1 A_i(u_1) + a_2 A_i(u_2) + \ldots + a_n A_i(u_n) + b_1 B_i(u_1) + b_2 B_i(u_2) + \ldots + b_n B_i(u_n) = 0;$$

это может быть переписано в виде

$$b_1 U_i(u_1) + b_2 U_i(u_2) + \ldots + b_n U_i(u_n) = c_1 A_i(u_1) + c_2 A_i(u_2) + \ldots + c_n A_i(u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Детерминант $|U_i(u_j)|$ не равен нулю, поскольку n граничных условий линейно независимы, и система несовместима. Следовательно уравнения достаточны для определения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ через известные величины $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и коэфициенты U_i. Коэфициенты a_i и b_i определяются единственным способом, следовательно функция $G(x, \xi)$ — единственная. Далее функция $G(x, \xi)$ и ее первые $(n-2)$ производных непрерывны в интервале (a, b), в то время как следующая производная разрывна, именно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\partial^{n-1} G(\xi + \varepsilon, \xi)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G(\xi - \varepsilon, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right\} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Теперь пусть $H(x, \xi)$ обозначает соответствующую функцию Грина сопряженной системы

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{L}(v) &= 0, \\ V_i(v) &= 0, \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Разделим интервал (a, b) на три части (a, ξ_1), (ξ_1, ξ_2), (ξ_2, b) и рассмотрим две функции Грина

$$u = G(x, \xi_1), \; v = H(x, \xi_2).$$

Здесь может быть приложена формула Грина

$$\int_a^b \{vL(u) + u\bar{L}(v)\}\, dx = [P(u, v)]_a^b,$$

если интервал интегрирования рассматривать как предельный случай совокупности трех интервалов $(a, \xi_1 - \varepsilon)$, $(\xi_1 + \varepsilon, \xi_2 - \varepsilon)$, $(\xi_2 + \varepsilon, b)$, когда ε стремится к нулю. В каждом из них

$$L(G) = 0, \; \bar{L}(H) = 0$$

следовательно

$$\lim [P(G, H)]_a^{\xi_1 - \varepsilon} + \lim [P(G, H)]_{\xi_1 + \varepsilon}^{\xi_2 - \varepsilon} + \lim [P(G, H)]_{\xi_2 + \varepsilon}^{b} = 0.$$

Поскольку, согласно граничным условиям,

$$P(G, H) = 0$$

при $x = a$ и $x = b$, это соотношение можно привести к виду

$$\lim [P(G, H)]_{\xi_1 - \varepsilon}^{\xi_1 + \varepsilon} + \lim [P(G, H)]_{\xi_2 - \varepsilon}^{\xi_2 + \varepsilon} = 0.$$

Из § 9·31 следует, что единственным членом, имеющим разрыв в $P(G, H)$, является

$$p_0 \left[H \frac{d^{n-1} G}{dx^{n-1}} - G \frac{d^{n-1} H}{dx^{n-1}} \right],$$

следовательно

$$p_0(\xi_1) H(\xi_1, \xi_2) \lim \left[\frac{d^{n-1} G}{dx^{n-1}} \right]_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1+\varepsilon} -$$

$$- p_0(\xi_2) G(\xi_2, \xi_1) \lim \left[\frac{d^{n-1} H}{dx^{n-1}} \right]_{\xi_2-\varepsilon}^{\xi_2-\varepsilon} = 0;$$

поскольку

$$p_0(\xi_1) \lim \left[\frac{d^{n-1} G}{dx^{n-1}} \right]_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1+\varepsilon} = p_0(\xi_2) \lim \left[\frac{d^{n-1} H}{dx^{n-1}} \right]_{\xi_2-\varepsilon}^{\xi_2+\varepsilon} = 1,$$

отсюда следует, что

$$H(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1).$$

Эта формула была доказана для случая $\xi_2 > \xi_1$ и может быть также доказана для случая $\xi_2 < \xi_1$. Следовательно, если x и ξ — любые две точки в интервале (a, b), то

$$H(x, \xi) = G(\xi, x),$$

или $G(\xi, x)$ *является функцией Грина сопряженной системы* (B). Более того, если данная система самосопряженная, то функция Грина является *симметричной*, т. е.

$$G(\xi, x) = G(x, \xi).$$

Так как функция Грина данной системы единственная, то отсюда следует, что *система самосопряженная, если функция Грина данной системы симметрична.*

11·11. Решение неоднородной системы. Мы уже знаем, что, поскольку однородная система

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} L(u) = 0, \\ U_i(u) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

несовместима, любая соответствующая ей неоднородная система, в частности система

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} L(y) = r(x), \\ U_i(y) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

допускает только одно решение. Если функция Грина $G(x, \xi)$ системы (A) известна, можно непосредственно получить решение (B), именно

$$\text{(C)} \qquad y(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi.$$

Поскольку

$$y^{(\nu)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^\nu G(x, \xi)}{\partial x^\nu} r(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$$

и поскольку $\frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}}$ равномерно непрерывно в интервале (a, b), отсюда следует, что

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi.$$

Но интеграл теперь имеет разрыв в точке $\xi = x$, следовательно

$$y^{(n)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} r(\xi)\, d\xi + \lim \left[\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi) \right]_{\xi = x - \varepsilon}^{\xi = x + \varepsilon}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} r(\xi)\, d\xi + \frac{r(x)}{p_0(x)},$$

откуда, поскольку $L(G) = 0$,

$$L(y) = \int_a^b L(G)\, r(\xi)\, d\xi + r(x)$$

$$= r(x).$$

Таким образом диференциальное уравнение (B) удовлетворено.

Так как функция $U_i(y)$ не содержит производных от y порядка выше $(n-1)$, отсюда следует, что

$$U_i(y) = \int_a^b U_i(G)\, r(\xi)\, d\xi$$

$$= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

поскольку $U_i(G) = 0$. Граничные условия в этом случае также удовлетворены, и выражение (C) является решением системы (B).

Решение более общей неоднородной системы

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} L(y) = r(x), \\ U_i(y) = \gamma_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n$$

можно получить очень легко. Пусть $G_i(x)$ будет единственным решением системы

$$\begin{cases} L(G_i) = 0, \\ U_1(G_i) = \ldots = U_{i-1}(G_i) = U_{i+1}(G_i) = \ldots = U_n(G_i) = 0; \\ U_i(G_i) = 1; \end{cases}$$

тогда непосредственно можно показать, что решением системы (D) является

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi + \gamma_1 G_1(x) + \gamma_2 G_2(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x).$$

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ будут линейно-независимыми решениями уравнения

$$p_0(x)\frac{d^2u}{dx^2} + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_2(x)\, u = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$F(x, \xi) = Au_1(x) + Bu_2(x) \pm \frac{u_1(x)\, u_2(\xi) - u_2(x)\, u_1(\xi)}{2p_0(\xi)\{u_1(\xi)\, u_2'(\xi) - u_2(\xi)\, u_1'(\xi)\}},$$

где положительный знак взят при $a \leqslant x \leqslant \xi$, а отрицательный при $\xi \leqslant x \leqslant b$. Функция $F(x, \xi)$ непрерывна в интервале (a, b); ее производная имеет скачек $1/p_0(\xi)$ при $x = \xi$, но непрерывна во всех других точках. Третий член не зависит от выбранных решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Следовательно $F(x, \xi)$ имеет характер функции Грина, а при выборе постоянных A и B так, чтобы $F(x, \xi)$ удовлетворила заданным граничным условиям, становится функцией Грина данной системы.

Примеры

(1°)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

$$F(x, \xi) = A + Bx \pm {}^1/_2(\xi - x)$$

$$G(x, \xi) = x(\xi - 1) \qquad (x \leqslant \xi),$$
$$= \xi(x - 1) \qquad (x \geqslant \xi).$$

(2°)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} - n^2u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

$$F(x, \xi) = A \operatorname{ch} nx + B \operatorname{sh} nx \pm \frac{1}{2n} \operatorname{sh} n(\xi - x),$$

$$G(x, \xi) = \frac{\operatorname{sh} nx \operatorname{sh} n(\xi - 1)}{u \operatorname{sh} n} \qquad (x \leqslant \xi),$$

$$= \frac{\operatorname{sh} n\xi \operatorname{sh} n(x - 1)}{n \operatorname{sh} n} \qquad (x \geqslant \xi).$$

$$
(3^\circ) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + n^2 u = 0, \\ u(0) = u\ (1), \\ u'(0) = u'(1). \end{cases}
$$

$$
F(x,\ \xi) = A\cos nx + B\sin nx \pm \frac{1}{2n}\sin n(\xi - x),
$$

$$
G(x,\ \xi) = \frac{1}{2n}\left\{\operatorname{ctg}\frac{n}{2}\cos n(\xi - x) + \sin n\,|\,\xi - x\,|\right\}.
$$

Этот последний пример показывает, что если система совместима, т. е. при $n = 2k\pi$, где k — целое число, функция Грина обращается в бесконечность.

11·12. Функция Грина системы, содержащей параметр. Предыдущее исследование показывает, что когда λ не является характеристическим числом системы

$$
\begin{cases} L(u) \ + \lambda u = r(x), \\ U_i(u) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),
$$

то существует единственная функция Грина $G(x,\ \xi;\ \lambda)$, а решение системы имеет вид

$$
u(x) = \int_a^b G(x,\ \xi;\ \lambda)\, r(\xi)\, d\xi.
$$

Аналогично, решение сопряженной системы

$$
\begin{cases} \bar{L}(v) \ + \lambda v = r(x), \\ V_i(v) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)
$$

имеет вид

$$
v(x) = \int_a^b G(\xi,\ x;\ \lambda)\, r(\xi)\, d\xi.
$$

Отсюда следует, что если λ_i — характеристическое число однородной системы

$$
\begin{cases} L\ \ (u) + \lambda u = 0, \\ U_i(u) = 0, \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)
$$

а $u_i(x)$ — соответствующая характеристическая функция, то

$$
u_i(x) = (\lambda - \lambda_i)\int_a^b G(x,\ \xi;\ \lambda)\, u_i(\xi)\, d\xi.
$$

Этот результат следует непосредственно из того, что диференциальное уравнение

$$
L(u) + \lambda u = (\lambda - \lambda_i)\, u_i(x)
$$

допускает решение $u_i(x)$.

Если $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)$ образуют линейно-независимую последовательность решений однородного уравнения

$$L(u)+\lambda u=0,$$

то можно написать $G(x,\ \xi;\ \lambda)$ в виде[1]

$$G(x,\ \xi;\ \lambda)=\frac{N(x,\ \xi;\ \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где

$$N(x,\ \xi;\ \lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), & \ldots, & y_n(x), & g(x,\ \xi;\ \lambda) \\ U_1(y_1), & U_1(y_2), & \ldots, & U_1(y_n), & U_1(g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1), & U_n(y_2), & \ldots, & U_n(y_n), & U_n(g) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=(-1)^n\begin{vmatrix} U_1(y_1), & U_1(y_2), & \ldots, & U_1(y_n) \\ U_2(y_1), & U_2(y_2), & \ldots, & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1), & U_n(y_2), & \ldots, & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

и

$$g(x,\ \xi;\ \lambda)=\pm\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), & \ldots, & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi), & y_2^{(n-2)}(\xi), & \ldots, & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(\xi), & y_2(\xi), & \ldots, & y_n(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}(\xi), & y_2^{(n-1)}(\xi), & \ldots, & y_n^{(n-1)}(\xi) \\ y_1^{(n-2)}(\xi), & y_2^{(n-2)}(\xi), & \ldots, & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(\xi), & y_2(\xi), & \ldots, & y_n(\xi) \end{vmatrix}},$$

причем положительный или отрицательный знак зависит от величины x (меньше или больше ξ).

Теорема существования § 3·31 показывает, что если $L(u)$, $r(x)$ и $U_i(u)$ не зависят от λ, то решения $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)$ являются целыми функциями λ. Отсюда следует, что $G(x,\ \xi;\ \lambda)$ — аналитическая функция λ для всех значений λ, за исключением нулей $\Delta(\lambda)$, т. е. для всех значений λ, за исключением характеристических чисел[2]. Определим форму, которую принимает функция $G(x,\ \xi;\ \lambda)$ в соседстве с простым характеристическим числом λ_i, являющимся простым нулем $\Delta(\lambda)$.

Если $\Delta(\lambda)$ имеет простой нуль λ_i, то функция Грина может быть написана в виде

$$G(x,\ \xi;\ \lambda)=\frac{R(x,\ \xi)}{\lambda-\lambda_i}+G_i(x,\ \xi;\ \lambda),$$

где функция $G_i(x,\ \xi;\ \lambda)$ — аналитическая при $\lambda=\lambda_i$.

[1] Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9 (1908), 377. Принимается, что коэффициент $u^{(n)}$ в $L(u)$ равен единице.

[2] $G(x,\ \xi;\ \lambda)$ является *мероморфной* функцией λ.

Далее

$$R(x, \xi) = \lim_{\lambda \to \lambda_i} \frac{(\lambda - \lambda_i) N(x, \xi; \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{N(x, \xi; \lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}.$$

В разложении детерминанта для функции $N(x, \xi; \lambda_i)$ коэфициент $g(x, \xi; \lambda_i)$ равен нулю. Следовательно $N(x, \xi; \lambda_i)$ и ее первые n производных относительно x и ξ являются непрерывными функциями (x, ξ) для $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$. Более того, $N(x, \xi; \lambda)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} L_x(u) + \lambda u = 0, \\ U_i(u) = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

для всех значений λ, следовательно $R(x, \xi)$, рассматриваемая как функция x, удовлетворяет этой системе для характеристического числа λ_i. Это характеристическое число простое, следовательно $R(x, \xi)$ имеет вид

$$C_i u_i(x),$$

где $u_i(x)$ — характеристическая функция, соответствующая λ_i, а C_i зависит только от ξ. Но если рассматривать ее в виде функции ξ, то $R(x, \xi)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \overline{L}_\xi(v) + \lambda v = 0, \\ V_i(v) = 0; \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

для характеристического числа λ_i; следовательно C_i будет иметь вид

$$c_i v_i(\xi),$$

где c_i — постоянная. Отсюда

$$R(x, \xi) = c_i u_i(x) v_i(\xi);$$

остается определить только постоянную c_i.

Выражение

$$(\lambda - \lambda_i) G(x, \xi; \lambda) - R(x, \xi)$$

является аналитической функцией λ, если λ достаточно близка к λ_i; оно непрерывно относительно x и ξ, поскольку G и R непрерывны относительно x и ξ; аналогично

$$\lim_{\lambda \to \lambda_i} \{(\lambda - \lambda_i) G(x, \xi; \lambda) - c_i u_r(x) v_i(\xi)\} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_i} (\lambda - \lambda_i) \int_a^b G(x, \xi; \lambda) u_i(\xi) d\xi - c_i u_i(x) \int_a^b u_i(\xi) v_i(\xi) d\xi = 0.$$

Далее

$$(\lambda-\lambda_i)\int_a^b G(x,\ \xi;\ \lambda)\,u_i(\xi)\,d\xi = u_i(x),$$

следовательно

$$c_i\int_a^b u_i(\xi)\,v_i(\xi)\,d\xi = 1.$$

Таким образом мы установили теорему: *если $\lambda=\lambda_i$ — простой корень характеристического уравнения, то функция Грина имеет вид*

$$\frac{u_i(x)\,v_i(\xi)}{(\lambda-\lambda_i)\int_a^b u_i(\xi)\,v_i(\xi)\,d\xi} + R(x,\xi;\ \lambda);$$

где

$$\int_a^b u_i(\xi)\,v_i(\xi)\,d\xi \neq 0,$$

а функция $R(x,\ \xi;\ \lambda)$ регулярна в соседстве с λ_i.

Если все характеристические числа λ_i, модули которых меньше числа Λ, являются простыми корнями характеристического уравнения, то

$$G(x,\ \xi;\ \lambda) = \sum_i \frac{u_i(x)\,v_i(\xi)}{(\lambda-\lambda_i)\int_a^b u_i(\xi)\,v_i(\xi)\,d\xi} + E(x,\ \xi;\ \lambda),$$

где функция $E(x,\ \xi;\ \lambda)$ неограничена при любых значениях $|\lambda| < \Lambda$.

Поскольку $u_i(x)$ и $v_i(x)$ удовлетворяют однородным системам, они могут быть так нормализованы, чтобы

$$\int_a^b u_i(\xi)\,v_i(\xi)\,d\xi = 1,$$

откуда получим

$$G(x,\ \xi;\ \lambda) = \sum_i \frac{u_i(x)\,v_i(\xi)}{\lambda-\lambda_i} + E(x,\ \xi;\ \lambda).$$

11·2. Зависимость между линейной диференциальной системой и интегральным уравнением. Любая неоднородная линейная диференциальная система с числом граничных условий, равным порядку уравнения n, может быть представлена в виде

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} L(y) = g(x)\,y + r(x), \\ U_i(y) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Более того, согласно основной теореме § 9·6, если система задана, то функция $g(x)$ может быть выбрана так, что однородная система

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} L(u) = 0, \\ U_i(u) = 0 \end{cases}$$

будет несовместима. Однако отсюда не следует, что (A) имеет какое-либо решение. Предположим однако, что (A) имеет решение $y_1(x)$, тогда система

$$\begin{cases} L(y) = g(x)y_1(x) + r(x), \\ U_i(y) = \gamma_i \end{cases}$$

будет иметь единственное решение, и этим решением будет $y_1(x)$. Как и в § 11·11, $y_1(x)$ удовлетворяет соотношению

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\{g(\xi)y(\xi) + r(\xi)\}d\xi + \gamma_1 G_1(x) + \gamma_2 G_2(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x),$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина системы (B).

Но $y(x)$ входит под знак интеграла, следовательно соотношение принимает форму интегрального уравнения с $G(x, \xi)$ в качестве ядра. Напишем

$$K(x, \xi) = G(x, \xi)g(\xi),$$

$$f(x) = \gamma_1 G_1(x) + \gamma_2 G_2(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x) + \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi.$$

Эти выражения можно рассматривать, по крайней мере теоретически, как известные. Тогда интегральное уравнение, которое было бы удовлетворено решением (A), будет иметь вид

$$\text{(C)} \qquad y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi;$$

оно известно, как уравнение Фредгольма второго рода[1].

Следовательно мы доказали, что *любое решение диференциальной системы* (A), *которая была предположена совместимой, удовлетворяет уравнению* (C).

Если $y_2(x)$ является решением (C), то

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi)\, y_2(\xi)\, d\xi$$

удовлетворяет системе

$$\begin{cases} L(y) = g(x)y_2(x) + r(x), \\ U_i(y) = 0. \end{cases}$$

Но в интегральном уравнении $y(x) = y_2(x)$, следовательно ди-

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа § 11 · 2.

ференциальная система допускает решение $y_2(x)$, т. е. *любое решение интегрального уравнения* (C) *удовлетворяет диференциальной системе* (A).

Обе эти теоремы могут быть объединены следующим образом: *диференциальная система и интегральное уравнение эквивалентны друг другу.*

В частности, если λ не является характеристическим числом системы

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} L(u)+\lambda u=0 \\ U_i(u)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

где $L(u)$ и $U_i(u)$ не зависят от λ, то система

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} L(y)+\lambda y=r(x), \\ U_i(y)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$\text{(F)} \qquad y(x)+\lambda\int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi=f(x),$$

где

$$f(x)=\int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, как и выше, $G(x, \xi)$ является функцией Грина системы (B); пусть $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ будет функцией Грина системы

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} \overline{L}(v)+\lambda v=0, \\ V_i(v)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

сопряженной с (D). Тогда, применяя формулу Грина

$$\int_a^b \{vL(u)-u\overline{L}(v)\}\, dx=\Big[P(u, v)\Big]_a^b,$$

найдем, как и в § 11·1, что

$$\text{(H)} \qquad \lambda\int_a^b G(x, \xi_1)\, \Gamma(x, \xi_2; \lambda)\, dx$$

$$=p_0(\xi_1)\,\Gamma(\xi_1, \xi_2; \lambda)\lim\left[\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}}\right]_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1+\varepsilon}-p_0(\xi_2)\, G(\xi_2, \xi_1)\lim\left[\frac{d^{n-1}\Gamma}{dx^{n-1}}\right]_{\xi_2-\varepsilon}^{\xi_2+\varepsilon}$$

$$=\Gamma(\xi_1, \xi_2; \lambda)-G(\xi_2, \xi_1).$$

Функция $\Gamma(x, \xi; \lambda)$, входящая в это соотношение, называется *резольвентной функцией*, или *резольвентой* ядра $G(x, \xi)$, так как в данном случае интегральчое уравнение (F), а следовательно и диференциальная система (E), имеют решения, которые могут быть выражены формулой

$$(\mathrm{I}) \qquad y(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi,$$

как это видно из подстановки этого выражения в (F) и применяя (H).

Но поскольку характеристические числа системы (G) являются полюсами функции Грина $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ и поскольку полюсы $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ являются характеристическими числами однородного диференциального уравнения

$$(\mathrm{J}) \qquad u(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) u(\xi)\, d\xi = 0,$$

отсюда следует, что это интегральное уравнение эквивалентно системе (D), а сопряженное интегральное уравнение

$$(\mathrm{K}) \qquad v(x) + \lambda \int_a^b G(\xi, x) v(\xi)\, d\xi = 0$$

эквивалентно сопряженной системе (G).

Если решения системы (D) обозначить через $u_i(x)$, а решения системы (G) — через $v_i(x)$, то, как известно из теории сопряженных интегральных уравнений, системы $u_i(x)$, $v_i(x)$ будут биортогональны, т. е.

$$\int_a^b u_i(x) v_j(x)\, dx = 0 \qquad (i \neq j).$$

Эти системы могут быть также нормированы. В этом случае мы получим

$$\int_a^b u_i(x) v_i(x)\, dx = 1.$$

Функция $G(x, \xi)$, рассматриваемая как ядро однородного интегрального управления (J), может быть разложена следующим образом

$$G(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(x) v_i(\xi)}{\lambda - \lambda_i} + E(x, \xi),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ расположены в порядке возрастающих модулей, а функция $E(x, \xi)$ — ядро, не имеющее характеристических чисел по модулю меньших $|\lambda_n|$. Это совпадает с приведенным в предыдущем параграфе разложением.

Если данная диференциальная система является самосопряженной, а функция Грина симметрической, то результаты теории интегральных уравнений с симметрическими ядрами могут быть приняты в данном случае целиком. Так, теоремы существования хотя бы одного характеристического числа и отсутствия комплексных характеристических чисел верны и для самосопряженных диференциальных систем.

Более того, можно показать, что если данная система имеет форму (D), то функция Грина замкнута, т. е. не существует непрерывной функции $\varphi(x)$, такой, чтобы

$$\int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

тождественно. В данном случае всегда существует бесконечная последовательность характеристических чисел.

11 · 3. Применение метода последовательных приближений. Доказательство теорем существования главы III при помощи метода последовательных приближений эквивалентно теоретическому решению одноточечной граничной проблемы. При модификации метод может быть приложен к двухточечной проблеме[1]. Проблема в этом аспекте ясно показывает роль, какую играют характеристические числа.

Диференциальная система может быть записана в виде

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} L(y) = M(y) + r(x), \\ U_i(y) = V_i(y) + \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

где $L(y)$ — диференциальное выражение порядка n, а $M(y)$ — диференциальное выражение порядка ниже n; $U_i(y)$ и $V_i(y)$ — линейные формы от

$$y(a),\ y'(a), \ldots,\ y^{n-1}(a),\ y(b),\ y'(b), \ldots,\ y^{(n-1)}(b).$$

Коэфициент при $y^{(n)}(x)$ в выражении $L(y)$ равен единице, остальные коэфициенты в выражениях $L(y)$ и $M(y)$ приняты непрерывными в интервале (a, b).

Согласно § 9 · 6, данная система может быть переписана в форме (A) так, чтобы система

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} L(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

была несовместима.

Пусть y_0 будет такой функцией от x, чтобы $M(y_0)$ была непрерывна в (a, b), а выражения для $V_i(y_0)$ — конечны. Тогда, поскольку система (B) несовместима, система функций

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_r(x), \ldots$$

[1] Liouville, J. de Math., 5 (1840) 356.

определяется только рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} L(y_r) = M(y_{r-1}) + r(x), \\ U_i(y_r) = V_i(y_{r-1}) + \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Действительно, если $G(x, \xi)$ — функция Грина системы (B), то

$$y_r(x) = \int_a^b G(x, \xi)[M\{y_{r-1}(\xi)\} + r(\xi)]\,d\xi + \sum_{i=1}^n [V_i\{y_{r-1}(x)\} + \gamma_i]\; G_i(x),$$

так что, если

$$v_1 = y_1, \; v_2 = y_2 - y_1, \ldots, \; v_r = y_r - y_{r-1}, \ldots,$$

то

$$\text{(C)} \quad V_r(x) = \int_a^b G(x, \xi) M\{v_{r-1}(\xi)\}\,d\xi + \sum_{i=1}^n V_i\{v_{r-1}(x)\}\, G_i(x).$$

Возникает вопрос, сходится ли этот процесс, т. е. сходится ли равномерно в интервале (a, b) ряд

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_r + \ldots$$

и его первые $n-1$ производных, полученные почленным диференцированием. Очевидно, в данном случае вопрос далеко не так прост, как при одноточечной граничной проблеме.

Предположим, что A — число, равное большему из верхних пределов

$$|G(x, \xi)|, \; \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}\right|,$$

$$|G_i(x)|, \; |G_i'(x)|, \ldots, |G_i^{(n-1)}(x)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

в интервале (a, b).

Пусть $F(x)$ будет суммой модулей коэфициентов $M(v)$, Ω — суммой модулей коэфициентов всех n выражений $V_i(v)$, а ω_r — большим из верхних пределов

$$|v_r|, \; |v_r'|, \ldots, |v_r^{(n-1)}|$$

в интервале (a, b), тогда

$$|v_r^{(\nu)}(x)| < \int_a^b A\,\omega_{r-1}\, F(t)\,dt + A\Omega\omega_{r-1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

для всех значений x в интервале (a, b) или

$$\omega_r < AB\,\omega_{r-1},$$

где

$$B = \int_a^b F(t)\,dt + \Omega.$$

Таким образом, если AB меньше единицы, то процесс сходится. Очевидно также, что A зависит от коэфициентов $L(v)$ и $U_i(v)$, а также от $r(x)$ и γ_i, а B зависит только от коэфициентов $M(v)$ и $V_i(v)$. Следовательно, если $M(v)$ и $V_i(v)$ могут быть выбраны так, чтобы AB было достаточно мало, то процесс сходится.

Удобнее всего рассматривать эту проблему при помощи вспомогательной системы

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} L(y) &= \lambda\{M(y)+r_1(x)\}+r_2(x), \\ U_i(y) &= \lambda\{V_i(y)+\eta_i\}+\theta_i \qquad (i=1,2,\ldots,n), \end{aligned}$$

где

$$r_1(x)+r_2(x)=r(x),$$

$$\eta_i+\theta_i=\gamma_i.$$

При $\lambda=1$ эта система приводится к первоначальной системе (A).

Выберем функцию $y_1(x)$ так, чтобы она удовлетворяла системе

$$\begin{cases} L(y)=r_2(x), \\ U_i(y)=\theta_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots,n) \end{cases}$$

и пусть функции

$$y_2(x),\ldots,y_r(x),\ldots$$

определены последовательными приближениями из (D). Тогда функция $y_1(x)$ не будет зависеть от λ, а функция $y_r(x)$ будет полиномом от λ степени $r-1$. В предельном случае этот полином становится степенным рядом от λ, который сходится для достаточно малых значений $|\lambda|$. Здесь возникает вопрос, будет ли он сходиться при $\lambda=1$.

Рассмотрим систему более общего характера, чем (D), именно

$$\text{(E)}\qquad \begin{cases} \mathbf{L}(w)=\mathbf{r}(x), \\ \mathbf{U}_i(w)=\beta_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n), \end{cases}$$

где $\mathbf{r}(x)$ и коэфициенты $\mathbf{L}(w)$ — аналитические функции от λ в данной области и равномерные непрерывные функции от x в интервале $(a,\ b)$. Аналогично β_i и коэфициенты $\mathbf{U}_i(w)$ — аналитические функции λ в данной области.

Формально решение этой системы имеет вид

$$w(x)=\begin{vmatrix} w_0, & y_1,\ldots, & y_n \\ \mathbf{U}_1(w_0)-\beta_1, & \mathbf{U}_1(y_1),\ldots, & \mathbf{U}_1(y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathbf{U}_n(w_0)-\beta_n, & \mathbf{U}_n(y_1),\ldots, & \mathbf{U}_n(y_n) \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \mathbf{U}_1(y_1),\ldots,\mathbf{U}_1(y_n) \\ \cdot \\ \mathbf{U}_n(y_1),\ldots,\mathbf{U}_n(y_n) \end{vmatrix}$$

где w_0 — решение уравнения

$$\mathbf{L}(w)=\mathbf{r}(x),$$

а $y_1,\ldots,y_n$ — линейно независимые решения уравнения

$$\mathbf{L}(y)=0.$$

Теперь, поскольку w_0, $y_1, \ldots y_n$ — решения уравнений, коэфициенты которых являются аналитическими относительно λ и равномерно непрерывными относительно x, оба детерминанта, входящие в выражение для $w(x)$, сами являются аналитическими относительно λ и равномерно непрерывными относительно x. Отсюда следует, что функция $w(x)$ будет также аналитической относительно λ и равномерно непрерывной относительно x, за исключением тех значений λ, для которых детерминант в знаменателе обращается в нуль, т. е. за исключением характеристических значений λ.

Полученный результат может быть приложен к системе (D), мы найдем, что степенной ряд по λ, представляющий предельное значение $y_r(x)$, сходится в любом круге, центр которого лежит в точке $\lambda = 0$ и который не содержит ни одного характеристического числа системы

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} L(u) = \lambda M(u), \\ U_i(u) = \lambda V_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Отсюда следует, что метод последовательных приближений, будучи применен к системе (A), образует сходящуюся последовательность, если система (F) не имеет характеристического числа с модулем, меньшим или равным единице.

Теперь мы можем получить значительно более точный результат. Пусть $\lambda = \lambda_1$ будет характеристическим числом однородной системы, соответствующей (E). Тогда $(\lambda - \lambda_1)$ будет множителем знаменателя $w(x)$, и кратность этого множителя будет по меньшей мере равна показателю λ_1. Если $(\lambda - \lambda_1)$ будет также множителем числителя той же кратности, что и в знаменателе, то решение $w(x)$ будет существовать даже для характеристического числа λ_1. Это имеет место, например, в том случае, когда кратность λ_1 равна его показателю k, а неоднородная система (E) имеет решение при $\lambda = \lambda_1$, так как тогда каждый минор порядка $n - k$, который можно отнять от числителя $w(x)$, будет равен нулю при $\lambda = \lambda_1$, поэтому и числитель и знаменатель будут содержать множитель $(\lambda - \lambda_1)$, повторенный точно k раз. Следовательно функция $w(x)$ будет аналитической при $\lambda = \lambda_1$.

Этот результат показывает, что *процесс сходится для* $|\lambda| \leqslant 1$, *т. е. если какие-либо характеристические числа* (F) *лежат внутри круга* $|\lambda| = 1$ *или на его окружности; индекс каждого характеристического числа равен его кратности* **и** *для каждого такого характеристического числа система* (D) *совместима.*

11·31. Условия совместимости неоднородной системы для характеристических значений параметра. Если характеристические числа отсутствуют, то метод последовательных приближений несомненно сходится для всех значений параметра, для которых коэфициенты уравнения непрерывны. С другой стороны, система, соответствующая двухточечной граничной проблеме, имеет в общем случае характеристические числа, и для того, чтобы метод последовательных приближений мог быть приложен, необходимо, чтобы система оставалась совместимой, по крайней мере для тех характеристических чисел, модули которых не превышают некоторой определенной величины. Необходимые и достаточные условия для существования решений неоднородной системы для некоторого характеристического значения параметра—известны[1]. В настоящем параграфе мы приведем условия для самосопряженной системы второго порядка

$$(A)\qquad \begin{cases} L(y) \equiv \dfrac{d}{dx}\left\{K\dfrac{dy}{dx}\right\} - Gy = R, \\ U_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = A, \\ U_2(y) = \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = B. \end{cases}$$

Допустим, что все встречающиеся в системе коэфициенты—аналитические функции параметра λ в данной области и что K, G и R — равномерно непрерывные функции x в интервале (a, b). Условием самосопряженности системы является

$$(B)\qquad \delta_{24} K(a) = \delta_{13} K(b),$$

где

$$\delta_{ij} = \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i.$$

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ будут решениями уравнения

$$L(u) = 0,$$

такими, что

$$(C)\qquad u_1' u_2 - u_2' u_1 = 1/K,$$

тогда общее решение уравнения

$$L(y) = R$$

будет иметь вид

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_1 \int_a^x KRu_2 dx + u_2 \int_x^b KRu_1 dx.$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются при помощи граничных условий следующим образом

$$c_1 U_1(u_1) + c_2 U_1(u_2) = A - \{\alpha_1 u_2(a) + \alpha_3 u_2'(a)\} \int_a^b KRu_1 dx -$$
$$- \{\alpha_2 u_1(b) + \alpha_4 u_1'(b)\} \int_a^b KRu_2 dx,$$

$$c_1 U_2(u_1) + c_2 U_2(u_2) = B - \{\beta_1 u_2(a) + \beta_3 u_2'(a)\} \int_a^b KRu_1 dx -$$
$$- \{\beta_2 u_1(b) + \beta_4 u_1'(b)\} \int_a^b KRu_2 dx.$$

---

[1] Условия для уравнений второго порядка см. Mason, Trans. Am. Math. Soc. 7, (1906), 337; условия для уравнений высшего порядка см. Dini, Ann. di Mat... (3), 12 (1906), 243.

В данном случае все зависит от детерминанта

$$\Delta(u_1,\ u_2) = \begin{vmatrix} U_1(u_1), & U_1(u_2) \\ U_2(u_1), & U_2(u_2) \end{vmatrix}.$$

Значения λ, для которых Δ не равен нулю, не являются характеристическими числами; следовательно, данная система совместима. Цель настоящего исследования — нахождение условий, которые должны быть наложены на R, A и B таким образом, чтобы при Δ, равной нулю, система допускала решение. Могут возникнуть два случая.

(1°) *Миноры* Δ *не все равны нулю.*

Приведенная система будет единственно совместимой; она допускает только одно независимое решение. Пусть этим решением будет $u_1(x)$, тогда

$$U_1(u_1) = U_2(u_1) = 0,$$

но функции $U_1(u_2)$ и $U_2(u_2)$ не равны нулю.

Необходимым и достаточным для совместимости системы (A) является условие

$$\begin{aligned} U_1(u_2)\Big[B - \{\beta_1 u_2(a) + \beta_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx\ - \\ -\{\beta_2 u_1(b) + \beta_4 u_1'(b)\}\int_a^b KRu_2dx\Big] \\ - U_2(u_2)\Big[A - \{\alpha_1 u_2(a) + \alpha_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx\ - \\ -\{a_2 u_1(b) + \alpha_4 u_1'(b)\}\int_a^b KRu_2dx\Big] = 0. \end{aligned}$$

Коэфициент

$$\int_a^b KRu_2dx$$

может быть написан в виде

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 u_2(a) + \alpha_3 u_2'(a)\}\{\beta_1 u_1(a) + \beta_3 u_1'(a)\} - \{\alpha_2 u_2(b) + \\ + \alpha_4 u_2'(b)\}\{\beta_2 u_1(b) + \beta_4 u_1'(b)\} - \{\beta_1 u_2(a) + \beta_3 u_2'(a)\}\{\alpha_1 u_1(a) + \\ + \alpha_3 u_1(a)\} + \{\beta_2 u_2(b) + \beta_4 u_2'(b)\}\{\alpha_2 u_1(b) + \alpha_4 u_1'(b)\} = \\ = \delta_{13}\{u_1'(a)u_2(a) - u_2'(a)u_1(a)\} - \delta_{24}\{u_1'(b)u_2(b) - u_2'(b)u_1(b)\} = \\ = \frac{\delta_{13}}{K(a)} - \frac{\delta_{24}}{K(b)} = 0, \end{aligned}$$

так что условие принимает вид

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} U_1(u_2)\Big[B - \{\beta_1 u_2(a) + \beta_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx\Big] - \\ - U_2(u_2)\Big[A - \{a_1 u_2(a) + a_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx\Big] = 0. \end{aligned}$$

Теперь

$$
[E]\quad \begin{cases}
\delta_{21}u_1(b) + \delta_{31}u_1'(a) + \delta_{41}u_1'(b) = 0, \\
\delta_{12}u_1(a) + \delta_{32}u_1'(a) + \delta_{42}u_1'(b) = 0, \\
\delta_{13}u_1(a) + \delta_{23}u_1(b) + \delta_{43}u_1'(b) = 0, \\
\delta_{14}u_1(a) + \delta_{24}u_1(b) + \delta_{34}u_1'(a) = 0,
\end{cases}
$$

левые части этих уравнений имеют вид

$$
\beta_i U_1(u_1) - \alpha_i U_2(u_1),
$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ соответственно.

При помощи соотношений (B), (C) и (E) можно доказать, что

$$
(F)\begin{cases}
U_1(u_2)\{\beta_2 K(a)u_1'(a) + \beta_1 K(b)u_1'(b)\} - U_2(u_2)\{\alpha_2 K(a)u_1'(a) + \\
\qquad + \alpha_1 K(b)u_1'(b)\} = 0, \\
U_1(u_2)\{\beta_4 K(a)u_1(a) + \beta_3 K(b)u_1(b)\} - U_2(u_2)\{\alpha_4 K(a)u_1(a) + \\
\qquad + \alpha_3 K(b)u_1(b)\} = 0, \\
U_1(u_2)\{\beta_2 K(a)u_1(a) - \beta_3 K(b)u_1'(b)\} - U_2(u_2)\{\alpha_2 K(a)u_1(a) - \\
\qquad - \alpha_3 K(b)u_1'(b)\} = 0, \\
U_1(u_2)\{\beta_4 K(a)u_1'(a) - \beta_1 K(b)u_1(b)\} - U_2(u_2)\{\alpha_4 K(a)u_1'(a) - \\
\qquad - \alpha_1 K(b)u_1(b)\} = 0.
\end{cases}
$$

Функции $U_1(u_2)$ и $U_2(u_2)$ не равны нулю и, следовательно, они могут быть исключены из уравнения (D) и любого из четырех уравнений (F); выражение, полученное путем указанного исключения, будет

$$
\{\alpha_2 K(a)u_1'(a) + \alpha_1 K(b)u_1'(b)\}\left[B - \{\beta_1 u_2(a) + \beta_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx\right] -
$$

$$
- \{\beta_2 K(a)u_1'(a) + \beta_1 K(b)u_1'(b)\}\left[A - \{\alpha_1 u_2(a) + \alpha_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx\right] = 0;
$$

оно может быть приведено к виду

$$
(\alpha_2 B - \beta_2 A)K(a)u_1'(a) + (\alpha_1 B - \beta_1 A)K(b)u_1'(b) + \delta_{12}\int_a^b KRu_1dx = 0.
$$

Более того, процесс обратим, т. е. полученное после исключения выражение и первое уравнение (F) снова дают (D) за исключением случая

$$
\alpha_2 K(a)u_1'(a) + \alpha_1 K(b)u_1'(b) = 0,
$$

$$
\beta_2 K(a)u_1'(a) + \beta_1 K(b)u_1'(b) = 0,
$$

т. е. когда $\delta_{12} = 0$ или $u_1'(a) = u_1'(b) = 0$. В последнем случае $u_1(a)$ и $u_1(b)$ не должны быть равны нулю, следовательно первое и второе уравнения (E) дают $\delta_{12} = 0$, что является исключительным случаем. Уравнения, полученные исключением $U_1(u_2)$ и $U_2(u_2)$ из уравнения (D) и четырех уравнений (F) будут соответственно

$$
(G)\quad \begin{cases}
(\alpha_2 B-\beta_2 A)K(a)u_1'(a)+(\alpha_1 B-\beta_1 A)K(b)u_1'(b)+\delta_{12}\int\limits_a^b KRu_1dx=0,\\
(\alpha_4 B-\beta_4 A)K(a)u_1(a)+(\alpha_3 B-\beta_3 A)K(b)u_1(b)+\delta_{43}\int\limits_a^b KRu_1dx=0,\\
(\alpha_2 B-\beta_2 A)K(a)u_1(a)-(\alpha_3 B-\beta_3 A)K(b)u_1'(b)+\delta_{23}\int\limits_a^b KRu_1dx=0,\\
(\alpha_4 B-\beta_4 A)K(a)u_1'(a)-(\alpha_1 B-\beta_1 A)K(b)u_1(b)+\delta_{14}\int\limits_a^b KRu_1dx=0.
\end{cases}
$$

Любое из этих уравнений эквивалентно уравнению (D), если соответствующий детерминант δ_{12}, δ_{43}, δ_{23} или δ_{14} не равен нулю. Если какие-либо три детерминанта равны нулю, то все детерминанты δ_{ij} будут равны нулю, что невозможно, поскольку выражения $U_1(u)$ и $U_2(u)$ независимы. Отсюда следует, что по меньшей мере два из уравнений (G) имеют значение, отличное от нуля.

Поэтому *для того, чтобы система* (A) *была совместимой, когда соответствующая приведенная система имеет только одно независимое решение* u_1, *необходимо и достаточно, чтобы* A, B, *и* R *удовлетворяли одному из соотношений* (G) *с детерминантом* δ_{ij}, *не равным нулю.*

При A и B, равных нулю, это условие принимает вид

$$\int\limits_a^b KRu_1dx=0.$$

(2°) *Миноры* Δ *все равны нулю.*

Приведенная система будет в данном случае двояко совместимой и допускает два решения: $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Допустим, что $\delta_{13}=0$, тогда, согласно (B), $\delta_{24}=0$. Первое уравнение (E) примет вид

$$\delta_{21}u_1(b)+\delta_{41}u_1'(b)=0$$

и аналогично

$$\delta_2 u_2(b)+\delta_{41}u_2'(b)=0.$$

Но, согласно (C),

$$K(b)\{u_1'(b)u_2(b)-u_2'(b)u_1(b)\}=1,$$

следовательно

$$\delta_{21}=\delta_{41}=0,$$

и

$$\delta_{23}=\delta_{43}=0.$$

Все детерминанты равны нулю, что невозможно; откуда следует, что δ_{13} и δ_{24} не равны нулю.

Поскольку

$$U_1(u_1)=U_1(u_2)=U_2(u_1)=U_2(u_2)=0,$$

необходимыми и достаточными условиями для существования решения системы (A) будут

$$A-\{\alpha_1 u_2(a)+\alpha_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx-\{\alpha_2 u_1(b)+\alpha_4 u_1'(b)\}\int_a^b KRu_2dx=0,$$

$$B-\{\beta_1 u_2(a)+\beta_3 u_2'(a)\}\int_a^b KRu_1dx-\{\beta_2 u_1(b)+\beta_4 u_1'(b)\}\int_a^b KRu_2dx=0.$$

Эти уравнения эквивалентны системе

$$(H)\quad\left\{\begin{aligned}&(\alpha_1B-\beta_1A)K(a)u_2(a)+(\alpha_3B-\beta_3A)K(a)u_2'(a)+\delta_{13}\int_a^b KRu_2dx=0,\\&(\beta_2A-\alpha_2B)K(b)u_1(b)+(\beta_4A-\alpha_4B)K(b)u_1'(b)+\delta_{24}\int_a^b KRu_1dx=0.\end{aligned}\right.$$

Кроме указанных, могут быть найдены еще и другие уравнения того же типа, но только два из них будут независимы.

Для того, чтобы система (A) *была совместимой, когда соответствующая приведенная система имеет два линейно-независимых решения u_1 и u_2, необходимо и достаточно, чтобы A, B и R удовлетворяли одному из соотношений* (H).

При A и B, равных нулю, R должно удовлетворять соотношениям

$$\int_a^b KRu_1dx=0,\qquad \int_a^b KRu_2dx=0.$$

11 · 32. Разложение решения неоднородной системы. Рассмотрим частную систему[1]

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\}+(\lambda g-l)y+p(x)=0,\\&y'(a)-hy(a)=0,\\&y'(b)+Hy(b)=0,\end{aligned}\right.$$

где k, g, l и $p(x)$ — непрерывны, а k не обращается в нуль при $a\leqslant x\leqslant b$. Пусть u_1 и u_2 будут двумя основными решениями однородного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{du}{dx}\right\}+(\lambda g-l)u=0,$$

что

$$u_1(a)=1,\quad u_1'(a)=0,$$

$$u_2(a)=0,\quad u_2'(a)=1;$$

тогда общее решение диференциального уравнения системы (A) будет иметь вид

$$y=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+u_1(x)\int_a^x u_2(t)p(t)dt-u_2(x)\int_a^x u_1(t)p(t)dt,$$

[1] Kneser, Math. Ann., 58 (1904), 109.

где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Каждый член, входящий в это выражение, является интегральной функцией λ, при $a \leqslant x \leqslant b$.

Граничные условия (A) приводят к соотношениям

$$\begin{gathered} C_2 - hC_1 = 0, \\ C_1\{u_1'(b) + Hu_1(b)\} + C_2\{u_2'(b) + Hu_2(b)\} + \\ + \{u_1'(b) + Hu_1(b)\}\int_a^b u_2(t)\,p(t)\,dt - \\ - \{u_2'(b) + Hu_2(b)\}\int_a^b u_1(t)\,p(t)\,dt = 0, \end{gathered}$$

определяющим C_1 и C_2. Так

$$y = w(x, \lambda)/\Delta(\lambda),$$

где $w(x, \lambda)$ — интегральная функция λ для всех значений x в интервале (a, b), а характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ — интегральная функция λ.

Пусть λ_i будет характеристическим числом однородной системы

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{k\,\dfrac{dv}{dx}\right\} + (\lambda g - l)\,v = 0, \\ v'(a) - hv(a) = v'(b) + Hv(b) = 0, \end{cases}$$

а $v_i(x)$ будет соответствующей характеристической фукнцией. Тогда, поскольку эта система просто совместима, то для того, чтобы неоднородная система имела решение при $\lambda = \lambda_i$, необходимо, чтобы

$$\text{(C)} \qquad \int_a^b k(x)\,p(x)\,v_i(x)\,dx = 0.$$

Если это условие удовлетворено, то функция $w(x, \lambda)/\Delta(\lambda)$ будет конечна при $\lambda = \lambda_i$. Предположим, что это условие удовлетворено для всех характеристических функций

$$v_1(x), \quad v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots,$$

тогда функция $w(x, \lambda)/\Delta(\lambda)$ будет конечной, когда λ примет любое из значений

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

т. е. она конечна для всех значений λ, при которых Δ обращается в нуль. Следовательно, когда (C) удовлетворено для всех целых значений i, то $y(x)$ является целой функцией λ и может быть разложена при $a \leqslant x \leqslant b$ в сходящийся ряд

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n + \ldots,$$

где коэфициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ могут быть определены методом последовательных приближений.

11·4. Асимптотическое разложение характеристических чисел и функций. Допустим, что в уравнении Штурм-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\}+(\lambda g-l)y=0$$

во всем интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функции k, g и l непрерывны, k и g не обращаются в нуль, k имеет непрерывную производную, а gk — непрерывную вторую производную. Тогда, если мы произведем преобразования

$$z=\frac{1}{K}\int\limits_a^x\left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}dx,\quad u=(gk)^{\frac{1}{4}}y,\quad \rho^2=K^2\lambda,$$

где K — постоянная, равная

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b\left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

то уравнение примет нормальный вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\{\rho^2-q(z)\}u=0,$$

где

$$q(z)=\left\{\frac{\theta''(z)}{\theta(z)}-K^2\varphi(z)\right\},$$

а $\theta(z)$ и $\varphi(z)$ — соответственно $(gk)^{\frac{1}{4}}$ и l/g, выраженные в виде функций z. Интервал $a \leqslant x \leqslant b$ равен $0 \leqslant z \leqslant \pi$. По всему этому интервалу функция $q(z)$ непрерывна. Дальнейшее исследование требует также существования и непрерывности первых двух производных $q(z)$[1].

Граничные условия при этом преобразовании не изменяются; предположим, что они равны

$$\begin{cases} u'(0)-hu(0)=0,\\ u'(\pi)+Hu(\pi)=0,\end{cases}$$

где постоянные h и H — вещественны.

Если мы теперь это уравнение напишем в виде

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\rho^2u=q(z)u,$$

то его общее решение может быть символически выражено так:

$$u(z)=A\cos\rho z+B\sin\rho z+(D^2+\rho^2)^{-1}q(z)u(z)$$

$$=A\cos\rho z+B\sin\rho z+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^z\sin\rho(z-t)q(t)u(t)dt.$$

[1] Условия могут быть значительно ослаблены применением метода Диксона [Dixon, Phil. Trans. R. S. (A), 211 (1911), 411].

Такая диференциальная система однородна; чтобы сделать ее решение вполне определенным, первое граничное условие должно быть заменено неоднородными условиями

$$u(0)=1; \quad u'(0)=h.$$

Следовательно постоянные A и B определяются единственным способом [1] и

$$u(z)=\cos\rho z+\frac{h}{\rho}\sin\rho z+\frac{1}{\rho}\int_0^z\sin\rho(z-t)q(t)u(t)dt.$$

Фундаментальная теорема существования утверждает, что $|u(z)|$ ограничен в интервале $(0, \pi)$. Пусть M будет верхней границей, тогда

$$|u(z)|\leqslant\left(1+\frac{h^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{M}{\rho}\int_0^\pi|q(t)|dt.$$

Поскольку выражение $|u(z)|$ непрерывно в замкнутом интервале $0\leqslant x\leqslant\pi$, оно достигает верхней границы, следовательно

$$M\leqslant\left(1+\frac{h^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{M}{\rho}\int_0^\pi|q(t)|\,dt,$$

откуда

$$M\leqslant\left(1+\frac{h^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg/\left\{1-\frac{1}{\rho}\int_0^\pi|q(t)|\,dt\right\}$$

для всех значений ρ, которые больше фиксированного положительного числа.

Если мы теперь введем второе граничное условие, то найдем, что ρ определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\pi\rho=\frac{P}{\rho-P'},$$

где

$$P=h+H+\int_0^\pi\left\{\cos\rho t-\frac{H}{\rho}\sin\rho t\right\}q(t)u(t)\,dt,$$

$$P'=\frac{Hh}{\rho}+\int_0^\pi\left\{\sin\rho t+\frac{H}{\rho}\cos\rho t\right\}q(t)u(t)\,dt.$$

Поскольку

$$M\leqslant 1+O(\rho^{-1})$$

в интервале $(0, \pi)$, отсюда следует, что $|P|$ и $|P'|$ оба меньше конечных чисел, независимых от ρ.

---

[1] Полученное таким образом соотношение является первым известным интегральным уравнением первого рода, Liouville, J. de Math., 2 (1837), 24.

Далее, поскольку $u(t)$ имеет вид[1]

$$\cos\rho t + \frac{\alpha(\rho, t)}{\rho},$$

где $\alpha(\rho, t)$ ограничено,

$$u(z) = \cos\rho z\left\{1 - \frac{1}{\rho}\int_0^z \sin\rho t\left(\cos\rho t + \frac{\alpha(\rho, t)}{\rho}\right) q(t)dt\right\} +$$

$$+ \sin\rho z\left\{\frac{h}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \cos\rho t\left(\cos\rho t + \frac{\alpha(\rho, t)}{\rho}\right) q(t)dt\right\},$$

следовательно

$$u(z) = \cos\rho z\{1 + O(\rho^{-2})\} + \sin\rho z\{Q(z)\rho^{-1} + O(\rho^{-2})\},$$

где

$$Q(z) = h + \frac{1}{2}\int_0^z q(t)dt.$$

Легко доказать, что

$$P = h + H + h_1 + O(\rho^{-1}), \quad P' = O(\rho^{-1}),$$

где

$$h_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt.$$

Характеристическое уравнение принимает вид

$$\operatorname{tg}\pi\rho = \frac{h + H + h_1 + O(\rho^{-1})}{\rho + O(\rho^{-1})};$$

следовательно для достаточно больших значений ρ

$$\rho = n + \frac{h + H + h_1}{\pi\rho} + O(\rho^{-2})$$

$$= n + \frac{h + H + h_1}{n\pi} + O(n^{-2}),$$

или

$$\rho_n = n + cn^{-1} + O(n^{-2}),$$

где c не зависит от n. Это выражение дает также новое доказательство теоремы существования бесконечной последовательности характеристических чисел.

Теперь

$$\cos\rho_n z = \cos nz\{1 + O(n^{-2})\} - \sin nz\{czn^{-1} + O(n^{-2})\},$$

$$\sin\rho_n z = \sin nz\{1 + O(n^{-2})\} + \cos nz\{czn^{-1} + O(n^{-2})\},$$

следовательно характеристическая функция, соответствующая ρ_n,

[1] Hobson, Proc. London Math. Soc. (2), 6 (1908), 374.

имеет вид

$$u_n(z) = \cos nz\,\{1 + O(n^{-2})\} + \sin nz\,\{\alpha(z)n^{-1} + O(n^{-2})\},$$

где

$$\alpha(z) = Q(z) - cz.$$

Нормируем характеристическую функцию и, обозначив ее $v_n(z)$, получим

$$v_n(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos nz\,\{1 + O(n^{-2})\} + \sin nz\,\{\beta(z)n^{-1} + O(n^{-2})\}.$$

Это является асимптотическим выражением для характеристических функций; оно имеет особое значение для вычисления характеристических функций при больших значениях n. Выражение может быть продолжено до желаемой степени точности[1].

Следует упомянуть о двух специальных случаях, (1°); когда h или H бесконечно и (2°), когда и h и H бесконечны[2]. В первом случае в одной определенной конечной точке $u(x)$ равно нулю тогда

$$\rho_n = n + \frac{1}{2} + O(n^{-1}).$$

Во втором случае $u(x)$ обращается в нуль в обеих конечных точках,

а

$$\rho_n = n + 1 + O(n^{-1}).$$

11·5. Разложение Штурм-Лиувилля произвольной функции. Пусть

$$u_0(x),\ u_1(x), \ldots,\ u_n(x), \ldots$$

будет последовательностью нормированных характеристических функций системы

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \{\rho^2 - q(x)\}u = 0, \\ u'(0) - hu(0) = 0, \\ u'(\pi) + Hu(\pi) = 0, \end{cases}$$

соответствующей характеристическим числам

$$\rho_0,\ \rho_1, \ldots,\ \rho_n, \ldots,$$

где, как и в § 11·4,

$$\rho_n = n + cn^{-1} + O(n^{-2}).$$

Сначала покажем, что эта последовательность характеристических функций *замкнута*, т. е., если $p(x)$ — любая функция,

---

[1] Horn, Math. Ann., 52 (1899) 271, 340; Scheisinger, ibid., 63 (1907), 277; Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9 (1908), 219, 373; Blumenthal, Archiv d. Math. u. Phys. (3), 19 (1912), 136.

[2] Kneser, Math. Ann., 58 (1904), 136.

непрерывная в интервале $(0, \pi)$, и если

(B) $$\int_0^\pi p(x)u_n(x)dx = 0$$

для всех значений n, то
$$p(x) = 0$$
тождественно.

Рассмотрим систему

(C) $$\begin{cases} \frac{d^2v}{dx^2} + \{\rho^2 - q(x)\}v + p(x) = 0, \\ v'0 - hv(0) = v'(\pi) + Hv(\pi) = 0. \end{cases}$$

Если ρ не характеристическое число, то эта система имеет единственное решение, которое может быть выражено в виде бесконечного ряда

(D) $$v(x) = v_0 + \rho^2 v_1 + \ldots + \rho^{2n} v_n + \ldots,$$

где $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2v_0}{dx^2} - qv_0 + p(x) = 0,$$

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} - qv_1 + v_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2v_n}{dx^2} - qv_n + v_{n-1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

При помощи этих уравнений легко доказать, что

$$\int_0^\pi \left\{ v_{m+1} \frac{d^2v_n}{dx^2} - v_n \frac{d^2v_{m+1}}{dx^2} \right\} dx = \int_0^\pi \{v_m v_n - v_{m+1} v_{n-1}\} dx.$$

Левая часть этого соотношения может быть записана в виде

$$[v_{m+1} v_n' - v_n v_{m+1}']_0^\pi$$

и равна нулю вследствие граничных условий. Отсюда

$$\int_0^\pi v_{m+1} v_{n-1} dx = \int_0^\pi v_m v_n dx.$$

Таким образом общее значение этих интегралов зависит, только от суммы индексов; обозначим ее через W_{m+n}. Теперь

$$\int_0^\pi (\alpha v_{m-1} + \beta v_{m+1})^2 dx = W_{2m-2}\alpha^2 + 2W_{2m}\alpha\beta + W_{2m+2}\beta^2$$

не может быть отрицательным для любых вещественных значений α и β, следовательно, рассматривая $\alpha=0$, $\beta=0$ поочередно, получим

$$W_{2m+2}\geqslant 0,\quad W_{2m-2}\geqslant 0.$$

Более того, поскольку квадратическая форма от α, β — положительна, то

$$W_{2m}^2 - W_{2m-2}\,W_{2m+2}\leqslant 0,$$

поэтому W_{2m} или равно нулю для всех значений m или всегда положительно. Полагая $W_0>0$, получим

$$\text{(E)}\qquad \frac{W_2}{W_0}\leqslant\frac{W_4}{W_2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{W_{2m+2}}{W_{2m}}\leqslant\ldots$$

Из § 11·31 следует, что если система (C) имеет решение $V_n(x)$ при $\rho=\rho_0$, то

$$\int_0^\pi p(x)\;V_n(x)\,dx=0,$$

и наоборот. Более того, в § 11·32 было показано, что если это соотношение верно для всех целых значений n, то система (C) имеет решение $v(x)$ для всех значений ρ, и это решение, согласно фундаментальной теореме существования, может быть представлено рядом (D), который будет сходиться для всех значений ρ и для всех значений x в интервале $(0,\pi)$. Следовательно, разложение

$$\int_0^\pi v_0\,v(x)\,dx = W_0+\rho^2 W_1+\ldots+\rho^{2n}W_n+\ldots$$

конечно для всех значений ρ, что невозможно вследствие неравенств (E). Таким образом мы получим

$$W_0=W_2=\ldots=W_{2m}=\ldots=0,$$

откуда

$$v_0=0,\ p(x)=0$$

тождественно в интервале (a, b).

Пусть $f(x)$ будет произвольной функцией вещественной переменной x. В теории рядов Фурье предполагается, что $f(x)$ можно представить в виде бесконечного ряда нормальных функций

$$f(x)=c_0u_0(x)+c_1u_1(x)+\ldots+c_nu_n(x)+\ldots$$

Если это разложение возможно, то вследствие свойства ортогональности функций $u_n(x)$ легко найти, что

$$c_n=\int_0^\pi f(t)\,u_n(t)\,dt,$$

так что коэфициенты c_n определяются единственным образом.

Здесь возникают два основных вопроса:

(1°) сходится ли ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x) \int_0^{\pi} f(t)\, u_r(t)\, dt$$

равномерно в интервале $(0, \pi)$ и

(2°) если ряд сходится, то сходится ли он к значению $f(x)$ или другого какого-либо предела. Эти вопросы мы рассмотрим в последующих параграфах

11·51. Сходимость разложения. Возьмем функцию $\varphi(x)$, непрерывную и имеющую непрерывные первую и вторую производные в интервале $(0, \pi)$. Рассмотрим ряд[1]

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) \int_0^{\pi} \varphi(t)\, u_r(t)\, dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \varphi(t)\, u_r(t)\, dt &= \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\rho_r^2 - q(t)} \{\rho_r^2 - q(t)\}\, u_r(t)\, dt \\
&= -\int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\rho_r^2 - q(t)} \cdot \frac{d^2 u_r(t)}{dt^2} dt \\
&= \left[-\frac{\varphi(t)\, u_r'(t)}{\rho_r^2 - q(t)} + u_r(t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\rho_r^2 - q(t)} \right\} \right]_0^{\pi} - \\
&\quad - \int_0^{\pi} u_r(t) \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\rho_r^2 - q(t)} \right\} dt.
\end{aligned}$$

Вследствие граничных условий это выражение приводится к виду

$$\frac{H\varphi(\pi)\, u_r(\pi)}{\rho_r^2 - q(\pi)} + \frac{h\varphi(0)\, u_r(0)}{\rho_r^2 - q(0)} + \left[u_r(t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\rho_r^2 - q(t)} \right\} \right]_0^{\pi} -$$

$$- \int_0^{\pi} u_r(t) \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\rho_r^2 - q(t)} \right\} dt.$$

Поскольку функции $\varphi(t)$ и $q(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первую и вторую производные, то

$$\rho^2 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\rho^2 - q(t)} \right\} \text{ и } \rho^2 \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\varphi(t)}{\rho^2 - q(t)} \right\}$$

ограничены для достаточно больших значений ρ, например $\rho \geqslant \rho_\nu$, и для всех значений t в интервале $(0, \pi)$. Отсюда

$$\sum_{r=\nu}^{\infty} u_r(x) \int_0^{\pi} \varphi(t)\, u_r(t)\, dt = \sum_{r=\nu}^{\infty} u_r(x) \left\{ \frac{H\varphi(\pi)\, u_r(\pi)}{\rho_r^2 - q(\pi)} + \frac{h\varphi(0)\, u_r(0)}{\rho_r^2 - q(0)} + \frac{A_r}{\rho_r^2} \right\},$$

[1] Kneser, Math. Ann. 58 (1904), 121.

где постоянные A_r конечны для всех значений r. Следовательно ряд абсолютно и равномерно сходится в интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Сумма ряда

$$\text{(A)} \qquad \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x) \int_0^{\pi} u_r(t) \varphi(t)\, dt$$

является непрерывной функцией x в интервале $(0, \pi)$; обозначим ее через $\psi(x)$. Тогда, поскольку почленное интегрирование ряда для $\psi(x) u_n(x)$ оправдывается его равномерной сходимостью, то

$$\int_0^{\pi} \psi(x) u_n(x)\, dx = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\pi} u_r(x) u_n(x)\, dx \int_0^{\pi} u_r(t) \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} u_n(t) \varphi(t)\, dt,$$

вследствие ортогональности функций $u_n(x)$. Таким образом очевидно, что

$$\int_0^{\pi} \{\psi(x) - \varphi(x)\} u_n(x)\, dx = 0$$

для всех значений n, следовательно

$$\psi(x) = \varphi(x)$$

тождествено в интервале $(0, \pi)$. Отсюда ряд (A) *абсолютно и равномерно сходится в интервале* $0 \leqslant x \leqslant \pi$, *и его значение в этом интервале равно* $f(x)$.

11·52. Сравнение разложения Штурм-Лиувилля с разложением Фурье по косинусам. Предположим, что $f(x)$ — непрерывная функция вещественной переменной x в интервале $(0, \pi)$; никаких дальнейших ограничений вводить не будем. Пусть $s_n(x)$ будет суммой первых $(n+1)$ членов разложения Штурм-Лиувилля

$$s_n(x) = \int_0^{\pi} f(t) \sum_{r=0}^{n} u_r(x) u_r(t)\, dt.$$

Исследуем поведение $s_n(x)$, когда n стремится к бесконечности[1].

Разложение Фурье по косинусам является частным случаем приведенного выше разложения Штурм-Лиувилля; диференциальная система, которой соответствует нормальная последовательность ортогональных функций

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x, \ldots, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos nx, \ldots$$

[1] Haar, Math. Ann., 69 (1910), 339; Mercer, Phil. Trans. R. S. (A), 211 (1910), 111.

имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dx^2} + \rho^2 v = 0, \\ v'(0) = v'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Покажем, что разложение Штурм-Лиувилля $f(x)$ ведет себя во всех отношениях точно так же, как разложение Фурье по косинусам. Пусть

$$\sigma_n(x) = \int_0^\pi f(t) \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{r=1} \cos rx \cos rt \right\} dt,$$

тогда, если

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{r=0}^{n} u_r(x) u_r(t) - \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{n} \cos rx \cos rt \right\},$$

то

$$s_n(x) - \sigma_n(x) = \int_0^\pi \Phi_n(x, t) f(t)\, dt.$$

При помощи этого соотношения докажем замечательную теорему, что

$$s_n(x) - \sigma_n(x) \to 0$$

равномерно, когда $n \to \infty$. Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 1. *Существует такая постоянная M, что*

$$|\Phi_n(x, t)| < M$$

для всех значений n.

Воспользовавшись асимптотическим выражением $u_r(x)$, можно доказать, что

$$u_r(x) u_r(t) - \frac{2}{\pi} \cos rx \cos rt =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{\beta(t) \cos rx \sin rt + \beta(x) \cos rt \sin rx\} \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \{\beta(x) + \beta(t)\} \frac{\sin r(x+t)}{r} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \{\beta(x) - \beta(t)\} \frac{\sin r(x-t)}{r} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Поскольку суммы рядов

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin r(x+t)}{r} \quad \text{и} \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin r(x-t)}{r}$$

ограничены, а $\beta(x)$ ограничена в интервале $(0, \pi)$, лемма следует непосредственно.

Лемма II. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале* $(0, \pi)$ *и имеет непрерывные первую и вторую производные в данном интервале, то*

$$\int_0^\pi \Phi_n(x, t)\,\varphi(t)\,dt \to 0$$

равномерно в интервале $(0, \pi)$, *когда* $n \to \infty$.

Если $g_n(x)$ и $h_n(x)$ представляют первые $n+1$ членов разложения Штурм-Лиувилля и ряда косинусов функции $\varphi(x)$ соответственно, то

$$g_n(x) - h_n(x) = \int_0^\pi \Phi_n(x, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Но $g_n(x)$ и $h_n(x)$ приближаются к $\varphi(x)$ равномерно, что доказывает лемму.

Докажем теперь основную теорему.

Поскольку $f(x)$ непрерывна в интервале $(0, \pi)$, может быть образована последовательность непрерывных функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x), \ldots,$$

имеющих непрерывные первые и вторые производные, которые стремились бы к $f(x)$ равномерно в интервале $(0, \pi)$. Эти функции могут быть, например, полиномами степени, равной индексу[1], тогда

$$s_n x - \sigma_n(x) = \int_0^\pi \Phi_n(x, t)\,\{f(t) - \varphi_m(t)\}\,dt + \int_0^\pi \Phi_n(x, t)\,\varphi_m(t)\,dt.$$

Поскольку φ_m приближается к f равномерно, m может быть выбрано таким, чтобы для всех значений t в интервале $(0, \pi)$

$$|f(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon/2\pi M,$$

где M — абсолютная постоянная леммы I. Если m известно, то, согласно лемме II, n может быть принято достаточно большим, чтобы сделать абсолютное значение второго интеграла меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Следовательно

$$|s_n(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$$

равномерно для достаточно больших значений n. Это доказывает теорему:

Разложение Штурм-Лиувилля любой непрерывной функции $f(x)$ *сходится или расходится в любой точке интервала* $(0, \pi)$ *в зависимости от того, сходится или расходится ряд косинусов в этой точке. Оно сходится равномерно в любом подинтервале* $(0, \pi)$ *только тогда, когда ряд косинусов сходится равномерно в этом подинтервале.*

---

[1] Weierstrass, Math. Werke, 3, 1.

Этот результат имеет очень большое значение, потому что огромная работа, которая была проделана по исследованию сходимости разложения Фурье произвольной непрерывной функции, относится (лишь с формальными изменениями) к разложению Штурм-Лиувилля этой функции, когда условия непрерывности и диференцируемости, которые были наложены на коэфициенты k, g и l, удовлетворены[1].

Однако теорема имеет гораздо большее значение, чем это кажется на первый взгляд. Так, пусть $S_n(x)$ будет арифметическим средним

$$s_0(x),\ s_1(x), \ldots,\ s_n(x)$$

и пусть $\Sigma_n(x)$ будет арифметическим средним

$$\sigma_0(x),\ \sigma_1(x), \ldots,\ \sigma_n(x).$$

Тогда, поскольку

$$s_n(x) - \sigma_n(x) \to 0$$

равномерно при $n \to \infty$, отсюда непосредственно следует, что

$$S_n(x) - \Sigma_n(x) \to 0$$

равномерно. Разложение по косинусам непрерывной функции всегда равномерно суммируемо методом арифметических средних[2]. Следовательно разложение Штурм-Лиувилля суммируемо (С. I).

---

[1] Предполагается также, что постоянные h и H в граничных условиях вещественны и конечны.

[2] Fejér, Math. Ann., 58 (1904), 59.

ЧАСТЬ II

Диференциальные уравнения в комплексной области

ГЛАВА XII

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

12·1. Общие соображения. Целью настоящей главы является распространение исследований главы III о существовании и природе решений диференциальных уравнений с одной вещественной независимой переменной на уравнения с комплексной независимой переменной. Сначала рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dw}{dz}=f(z,\ w).$$

Чтобы уравнение имело смысл, должна существовать производная $\frac{dw}{dz}$, т. е. w должно быть аналитической функцией z.

Пусть $f(z, w)$ будет аналитической функцией[1] от двух переменных z и w. При этом условии может быть приложен с некоторыми изменениями метод последовательных приближений § 3·2. Основную теорему можно выразить так[2]:

Диференциальное уравнение допускает единственное решение $w=w(z)$, аналитическое внутри круга $(z-z_0)=h$, которое приводится к w_0 при $z=z_0$.

Метод Коши-Липшица может быть также распространен для применения в комплексной области[3]. Однако для комплексных

---

[1] Согласно определению Коши, $f(z, w)$ — аналитическая функция z и w в области D, если (I) $f(z, w)$ — непрерывная функция z и w в области D, и (II) $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ существуют в любой точке D. Предполагаем, что выполнены условия Римана: т. е. если $z=x+iy$, $w=u+iv$, $f(z, w)=P(x, y, u, v)+iQ(x, y, u, v)$, то

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\partial Q}{\partial v},\quad \frac{\partial P}{\partial v}=-\frac{\partial Q}{\partial u}$$

(см. Picard, Traité d'Analyse 2, IX).

Условие аналитичности для комплексных переменных аналогично условию непрерывности функции f и удовлетворению условия Липшица в случае вещественных переменных. То обстоятельство, что $\frac{\partial f}{\partial w}$ ограничено, когда $f(z, w)$ — аналитическая функция, заменяет условие Липшица в доказательстве теорем существования.

[2] Число h определяется здесь точно так же, как и в § 3·1. Пенлеве [Bull. Soc. Math. France, 27, 152], показал, что в известных случаях радиус сходимости может превышать h.

[3] Пенлеве [Painlevé, C. R. Acad. Sc. Paris, 128 (1899), 1505 и Пикар [Picard, ibid. 1363; Ann. Ec. Norm (3), 21 (1904) 56] показали, что этот метод приводит к сходящимся рядам, представляющим решение во всей области, где оно аналитическое.

переменных удобнее метод пределов[1], который мы разберем в следующем параграфе.

12 · 2. Метод пределов. В уравнении

$$\frac{dw}{dz}=f(z,\ w)$$

функция $f(z, w)$ предположена аналитической в соседстве с (z_0, w_0). Однако мы не потеряем в общности, если вместо $z-z_0$ и $w-w_0$ напишем z и w соответственно, что равносильно $z_0 = w_0 = 0$.

Условия проблемы могут быть выражены следующим образом. Пусть функция $f(z, w)$ будет аналитической при z и w, остающихся соответственно внутри кругов C и Γ радиусов a и b, проведенных из начала плоскостей z и w.

Далее, пусть $f(z, w)$ будет непрерывной на окружностях C и Γ. При этих условиях $|f(z, w)|$ ограничен в пределах этой области; пусть M будет его верхней границей, тогда

$$|f|\leqslant M \text{ при } |z|\leqslant a,\ |w|\leqslant b.$$

Диференцируя уравнение найдем последовательные производные

$$\frac{d^2w}{dz^2},\quad \frac{d^3w}{dz^3},\ldots,\frac{d^rw}{dz^r},\ldots$$

следующим образом

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d^3w}{dz^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}\cdot\frac{dw}{dz}+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{d^2w}{dz^2},$$

. . . .

Необходимо отметить, что эти выражения образованы при помощи сложения и умножения. Принимая соотношение

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_0=f(0,\ 0)$$

в качестве начального, последовательно определяются значения коэфициентов ряда Маклорена

$$w=\left(\frac{dw}{dz}\right)_0\frac{z}{1}+\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_0\frac{z^2}{2!}+\ldots+\left(\frac{d^rw}{dz^r}\right)_0\frac{z^r}{r!}+\ldots$$

---

[1] Cavshy, C. R. Acad. Sc. Paris, 9—11, 14, 15, 23 (1839—46) passim, Oeuvres (I), 4—7, 10; упрощено Brio and Bouquet C. R., 36, 39, 40 (1853, 55), passim; J. Ec. Polyt., 1, 36 (1856), 85, 131. Метод был повидимому независимо найден Вейерштрассом [Math. Werke, (I), 67, 75 (1842)]; J. für Math., 51 (1856), I [Math. Werke, I, 153]. Обработка Веиерштрасса была упрощена Кенигсбергом [J. für Math,. 104 (1889), 174; L hrbuch, 25]. См. также Brio and Bouquet, Théorie des Fonctions Elliptiques, стр. 325.

Очевидно, определенный таким образом ряд для w формально удовлетворяет диференциальному уравнению; нам нужно доказать, что он сходится при достаточно малых значениях z.

Пусть разложение Маклорена для функции $f(z, w)$ в соседстве с $z=w=0$ имеет вид

$$f(z, w)=\sum A_{pq} z^p w^q,$$

где

$$A_{pq}=\frac{1}{p!\,q!}\left(\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p d w^q}\right)_0.$$

Но[1]

$$\left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial w^q}\right|_0<\frac{p!\,q!}{a^p b^q} M,$$

следовательно

$$|A_{pq}|<\frac{M}{a^p b^q},$$

откуда, если

$$F(z, w)=\sum \frac{M}{a^p b^q} z^p w^q,$$

то

$$\left(\frac{\partial^{p+q} F}{\partial z^p \partial w^q}\right)_0 \geqslant\left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial w^q}\right|_0$$

для всех положительных целых или нулевых значений p и q. Но

$$F(z, w)=\frac{M}{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{w}{b}\right)},$$

следовательно, если

$$W=\left(\frac{dW}{dz}\right)_0 \frac{z}{1}+\left(\frac{d^2 W}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{2!}+\ldots+\left(\frac{d^r W}{dz^r}\right)_0 \frac{z^r}{r!}+\ldots$$

является решением

$$\frac{dW}{dz}=F(z, W),$$

равным нулю при $z=0$, то

$$\left(\frac{d^r W}{dz^r}\right)_0 \geqslant\left(\frac{d^r w}{dz^r}\right)_0,$$

поскольку последовательные члены $\left(\frac{d^r W}{dz^r}\right)_0$ образуются из коэфициентов $\left(\frac{\partial^{p+q} F}{\partial z^p \partial z^q}\right)_0$, согласно тому же закону сложения и умножения, по которому члены $\left(\frac{d^r W}{dz^r}\right)_0$ были выведены из коэфициентов $\left(\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial z^q}\right)_0$.

[1] Picard, Traité d'Analyse, 2 (1 изд.) 239; (2 изд.) 250.

Ряд для W следовательно является доминантным рядом для функции w, т. е. ряд Маклорена для w сходится абсолютно и равномерно внутри некоторого круга, концентрического и внутреннего относительно круга сходимости ряда для W. Точное выражение для радиуса сходимости ряда для W можно легко найти, так как, если диференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dz} = F(z, W)$$

написать в виде

$$\left(1 - \frac{W}{b}\right) \frac{dW}{dz} = \frac{M}{1 - \frac{z}{a}},$$

то переменные разделяются, а решение, равное нулю при $z = 0$ определяется формулой[1]

$$W = b - b\sqrt{\left\{1 + \frac{2Ma}{b} \log\left(1 - \frac{z}{a}\right)\right\}}.$$

Радиус сходимости ρ определяется поэтому из уравнения

$$1 + \frac{2Ma}{b} \log\left(1 - \frac{\rho}{a}\right) = 0,$$

или

$$\rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right),$$

поэтому формально полученный ряд абсолютно и равномерно сходится внутри любого круга $|z| = \rho - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \rho_1$, следовательно он является решением диференциального уравнения[2]. Поскольку коэфициенты ряда Маклорена для w получаются посредством сложения и умножения и, поскольку разложение Маклорена аналитической функции является единственным, — уравнение допускает только одно решение, удовлетворяющее принятым условиям.

12 · 21. Распространение на систему уравнений. Метод пределов может быть распространен также и на систему m уравнений первого порядка

$$\frac{dw_1}{dz} = f_1(z, w_1, w_2, \ldots, w_m),$$

$$\frac{dw_2}{dz} = f_2(z, w_1, w_2, \ldots, w_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw_m}{dz} = f_m(z, w_1, w_2, \ldots, w_m).$$

---

[1] Берется главное значение радикала, т. е. то, которое становится равным $+1$ при $z = 0$.

[2] Нужно отметить, что радиус сходимости ряда, полученного методом пределов, меньше полученного методом последовательных приближений. Кроме того, следует также отметить, что внутри круга $|z| = \rho$, $|w| < b$ первоначально принятые этим решением условия следовательно не нарушаются.

Далее, не теряя в общности, начальные условия могут быть приняты такими, что $w_1 = w_2 = \ldots = w_m = 0$ при $z = 0$. Допустим, что функции $f_1, f_2 \ldots, f_m$ аналитические в области $|z| \leqslant a$, $|w_1| \leqslant b$, $|w_2| \leqslant b, \ldots, |w_m| \leqslant b$, а M — верхний предел последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_m$ в этой области. Тогда доминантные функции могут быть взяты в качестве соответствующих решений уравнений

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{dW_2}{dz} = \ldots = \frac{dW_m}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{W_1}{b}\right)\ldots\left(1 - \frac{W_m}{b}\right)}.$$

Функции $W_1, W_2, \ldots, W_m$ все равны нулю при $z = 0$, следовательно они все между собой равны. Последовательность может быть поэтому заменена одной доминантной функцией W, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{W}{b}\right)^m},$$

или, учитывая начальные условия,

$$Y = b - b\left\{1 + \frac{(m+1)Ma}{b}\log\left(1 - \frac{z}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{m+1}},$$

откуда радиус сходимости равен

$$\rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{(m+1)Ma}}\right).$$

12·22. Теорема существования для линейного диференциального уравнения порядка n. Ввиду весьма большого теоретического и практического значения обыкновенных линейных уравнений, мы здесь приведем независимое доказательство существования решений, удовлетворяющих начальным условиям при $z = z_0$[1].

Пусть

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)w = 0$$

будет однородным линейным диференциальным уравнением порядка n, в котором коэфициенты $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ аналитические во всей области D плоскости (z). В ряде Тейлора

$$w(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}w^{(r)}(z_0)(z - z_0)^r$$
$$= \sum c_r(z - z_0)^r,$$

где z_0 и z находятся в области D, коэфициенты $w^{(r)}(z_0)$ или соответствующие коэфициенты c_r определены таким образом, что

[1] Fuchs, J. für Math., 66, (1866), 121; [Math. Werke, 1, 159].

ряд будет формально удовлетворять диференциальному уравнению.

n начальных условий

$$w(z_0),\ w'(z_0),\ \ldots,\ w^{(n-1)}(z_0)$$

могут быть выбраны произвольно; последовательные значения

$$w^{(n)}(z_0),\ w^{(n+1)}(z_0),\ \ldots$$

могут быть определены из самого диференциального уравнения и из уравнений, полученных его последовательным диференцированием относительно z. Таким образом постоянные $w^{(r)}(z_0)$ или c_r могут быть определены только одним способом: поскольку они определяются из начальных значений только процессом сложения и умножения, они остаются конечными, пока конечны начальные значения.

Предположим, что рекуррентные сотношения, определяющие $w^{(r)}(z_0)$, имеют вид

$$\omega^{(r)}(z_0) = \sum_{s=1}^{r} A_{rs}\omega^{(r-s)}(z_0) \qquad (r \geqslant n).$$

Коэфициенты $p_\nu(z)$ ограничены во всей круговой области $|z - z_0| \leqslant a$, которая предположена лежащей целиком внутри D; пусть верхняя граница $|p_\nu(z)|$ на круге Γ или $|z - z_0| = a$ будет M_ν.

Тогда, поскольку

$$p_\nu(z) = p_\nu^0 + p_\nu^1(z - z_0) + \ldots + p_\nu^{(r)}(z - z_0)^r + \ldots,$$

где $p_\nu^{(r)}$ — значение $\frac{1}{r!}\cdot\frac{d^r p_\nu(z)}{dz^r}$ при $z = z_0$, согласно теореме Коши получим

$$p_\nu^{(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{p_\nu(z)dz}{(z-z_0)^{r+1}} \leqslant \frac{M_\nu}{a^r}.$$

Следовательно, если $P_\nu(z)$ определяется уравнением

$$P_\nu(z) = \frac{M_\nu}{1 - \frac{z - z_0}{a}},$$

то $|p_\nu(z)| \leqslant |P_\nu(z)|$ внутри круга Γ и на его окружности.

Рассмотрим теперь диференциальное уравнение

$$\frac{d^n W}{dz^n} = P_1(z)\frac{d^{n-1}W}{dz^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}(z)\frac{dW}{dz} + P_n(z)W.$$

Предположим, что ему удовлетворяет ряд Тэйлора

$$W(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} W^{(r)}(z_0)(z - z_0)^r$$

$$= \sum C_r(z - z_0)^r,$$

причем $C_0 = |c_0|$, $C_1 = |c_1|, \ldots, C_{n-1} = |c_{n-1}|$. Пусть рекуррентное соотношение, определяющее $W^{(r)}(z_0)$, будет

$$W^{(r)}(z_0) = \sum_{s=1}^{r} B_{rs} W^{(r-s)}(z_0).$$

Поскольку коэфициенты разложения $P_\nu(z)$ — положительные вещественные числа и поскольку B_{rs} получается из этих коэфициентов и из $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ путем сложения и умножения, B_{rs} — положительные вещественные числа и

$$|A_{rs}| \leqslant B_{rs},$$

откуда по индукции следует, что

$$|w^{(r)}(z_0)| \leqslant W^{(r)}(z_0),$$

следовательно

$$\sum |c_r(z - z_0)^r| \leqslant \sum C_r(z - z_0)^r.$$

Круг сходимости доминантного ряда $\sum C_r(z - z_0)^r$ может быть легко найден; он равен $|z - z_0| = a$. Напишем $z - z_0 = a\zeta$, тогда диференциальное уравнение, определяющее $W(z)$, примет вид

$$(1-\zeta)\frac{d^n W}{d\zeta^n} = M_1 a \frac{d^{n-1} W}{d\zeta^{n-1}} + \ldots + M_{n-1} a^{n-1} \frac{dW}{d\zeta} + M_n a^n W;$$

это уравнение удовлетворяется степенным рядом $\sum \gamma_r \zeta^r$, причем имеет место следующее рекуррентное соотношение

$$(n + r)!\, \gamma_{n+r} - r(n + r - 1)!\, \gamma_{n+r-1} = \sum_{s=1}^{n} (n + r - s)!\, M_s a^s \gamma_{n+r-s}.$$

Для того, чтобы $\sum \gamma_r \zeta^r$ было формально тождественно с $\sum C_r (z - z_0)^r$ необходимо $\gamma_r = a^r C_r$ (при $r = 0, 1, 2, \ldots\ n - 1$). Отсюда по индукции получим, что $\gamma_r > 0$ для всех значений r.

Следовательно

$$\gamma_{n+r} = \frac{r + M_1 a}{r + n} \gamma_{n+r-1} + \theta_{n+r-2},$$

где $\theta_{n+r-2} \geqslant 0$ и $|p_1(z)| \leqslant M_1$ на окружности Γ. Пусть M_1 будет таким, что $M_1\, a > n$, тогда

$$\gamma_{n+r} > \gamma_{n+r-1}$$

для всех значений r, следовательно

$$\gamma_{n+r-1} > \gamma_{n+r-s}$$

при $s \geqslant 2$. Теперь

$$\frac{\gamma_{n+r}}{\gamma_{n+r-1}} = \frac{r+M_1 a}{r+n} + \sum_{s=2}^{n} \frac{(n+r-s)!\ M_s a^s \gamma_{n+r-s}}{(n+r)!\ \gamma_{n+r-1}},$$

откуда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\gamma_{n+r}}{\gamma_{n+r-1}} = 1\,.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum \gamma_r \zeta^r$ сходится при $|\zeta| < 1$, а доминантный ряд сходится при $|z - z_0| < a$. Следовательно диференциальное уравнение допускает решение, которое удовлетворяет указанным начальным условиям при $z = z_0$ и может быть выражено в виде степенного ряда, абсолютно и равномерно сходящегося внутри любого круга с z_0 в качестве центра, в котором коэфициенты $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ — аналитические функции

12·3. Аналитическое продолжение решения; особые точки. Метод пределов показывает, что существует решение

$$W(z - z_0) = w_0 + \sum a_r (z - z_0)^r$$

диференциального уравнения

$$\frac{dw}{dx} = f(z, w),$$

аналитическое в области

$$|z - z_0| < \rho,$$

где

$$\rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right).$$

Поскольку M — верхняя граница $|f(z, w)|$ в области $|z - z_0| \leqslant a$, $|w - w_0| \leqslant b$, очевидно, что M в общем случае зависит от выбора z_0 и w_0.

Полученное решение является единственным аналитическим решением, соответствующим начальным значениям (z_0, w_0). Однако неизвестно, могут ли существовать неаналитические решения, удовлетворяющие начальным условиям. Этот вопрос был разрешен отрицательно[1]; для целей приведенного ниже исследования достаточно показать, что не может быть решения, удовлетворяющего начальным условиям, в виде ряда, отличного от степенного ряда относительно $z - z_0$[2]. В данном случае вывод очевиден, так как если бы ряд содержал отрицательные и дробные степени переменной, то некоторые члены обратились бы

[1] Brio and Bouquet; J. Éc. Polyt. (1), cah. 36 (1856), 133. Picard, Traité d'Analyse, 2, 314; (2 изд.), 2, 357; Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (Stockholm, 1895), 394.

[2] Hamburger, J. für Math., 112 (1893), 211.

при $z=z_0$ в бесконечность. Но значения $y_{\nu}^{(r)}$, полученные из дифференциального уравнения и их последовательных производных, конечны, что приводит к противоречию.

Утверждая, что только одно решение соответствует начальным значениям (z_0, w_0), мы предполагаем, что эти значения действительно получены. Предположим, что $w \to w_0$, когда $z \to z_0$ вдоль некоторой простой кривой C в плоскости z.

Поскольку описанный путь представляет простую кривую, можно при данном $\varepsilon > 0$ найти точку z_1 на кривой, так что

$$|z_1 - z_0| < \varepsilon;$$

предполагается также, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$|w - w_0| < \delta \text{ при } |z - z_0| < \varepsilon.$$

Пусть W будет аналитическим решением, а $W + \overline{W}$ — независимым решением, удовлетворяющим измененным начальным условиям, тогда

$$\overline{W} \to 0 \text{ при } z \to z_0 \text{ вдоль } C.$$

Теперь

$$\frac{d\overline{W}}{dz} = f(z, W + \overline{W}) - f(z, W)$$

$$= \overline{W} F(z, W, \overline{W}),$$

где F — ряд, который сходится, когда z — точка на C, так что $|z - z_0| \leqslant a$,
и когда

$$|W - w_0| \leqslant b, \quad |W + \overline{W} - w_0| \leqslant b.$$

Принимая, что $\overline{W} \neq 0$,

$$\log \overline{W} = \int \frac{d\overline{W}}{\overline{W}} = \int_C F\, dz,$$

а если $|z - z_0| \leqslant a$, то $|F|$ имеет верхнюю границу M, так что

$$\left|\int_C F\, dz\right| \leqslant M \int_C |dz| \leqslant Ml,$$

где l — длина рассматриваемого пути. С другой стороны, поскольку $\overline{W} \to 0$, когда $z \to z_0$, значение

$$\left|\int_C F dz\right|$$

может быть сделано сколь угодно большим, проведя интегрирование вдоль C, достаточно близко к z_0. Это приводит к противоречию, если l конечно[1]; следовательно не существует

[1] Случай, когда l бесконечно, например, когда C — кривая, окружающая z по спирали, см. Painlevé, Leçons. 19; Young. Proc. London, Math. Soc. (I), 34 (1902) 234.

решения указанного типа, отличного от первоначального аналитического решения.

Пусть z_1 будет точкой внутри окружности $|z-z_0|=\rho$; тогда все коэфициенты ряда

$$W_1(z-z_1)=W(z_1-z_0)+W'(z_1-z_0)(z-z_1)+\ldots+W^{(r)}(z_1-z_0)\times \\ \times\frac{(z-z_1)^r}{r!}+\ldots$$

могут быть определены и конечны, а ряд $W_1(z-z_1)$ будет иметь радиус сходимости, по меньшей мере равный $\rho-|z_1-z_0|$. В секторе, общем для их кругов сходимости, $W_1(z-z_1)$ и $W(z-z_0)$ формально тождественны. Следовательно функция $W_1(z-z_1)$ во всех точках, где она аналитическая, является решением диференциального уравнения и единственным решением, которое приводится к значению $W(z_1-z_0)$ при $z=z_1$. Если функция $f(z, w)$ аналитическая внутри и непрерывна на границах области $|z-z_1|=a_1$, $|w-w_1|=b_1$ и если M_1 — верхняя граница $|f(z, w)|$ внутри этой области, то функция $W_1(z-z_1)$ будет аналитической во всей области $|z-z_1|\leqslant\rho_1$, где

$$\rho_1=a_1\left(1-e^{-\frac{b_1}{2M_1a_1}}\right).$$

Если $\rho_1>\rho-|z_1-z_0|$, то круг сходимости $W_1(z-z_1)$ будет простираться за пределы круга сходимости $W(z-z_0)$; это является общим случаем[1]. Пусть z_2 будет точкой внутри круга сходимости $W_1(z-z_1)$, но не обязательно внутри круга сходимости $W(z-z_0)$, тогда ряд

$$W_2(z-z_2)=W_1(z_2-z_1)+W_1'(z_2-z_1)(z-z_2)+\ldots+W_1^{(r)}(z_2-z_1)\times \\ \times\frac{(z-z_2)^r}{r!}+\ldots$$

будет формально тождественен с $W_1(z-z_1)$ в области, общей для их кругов сходимости, и следовательно будет удовлетворять диференциальному уравнению. Он является поэтому аналитическим продолжением решения $W(z-z_0)$.

Этот процесс может быть повторен, давая последовательно решения

$$W_1(z-z_1),\quad W_2(z-z_2),\ldots,\quad W_k(z-z_k),$$

являющиеся аналитическими продолжениями решения $W(z-z_0)$.

Решение в виде ряда $W(z-z_0)$, вместе со всеми рядами, полученными аналитическим продолжением, определяет функцию

---

[1] Picard, Bull. Sc. Math. (2), 12 (1888), 148; Traité d'Analyse, 2, 311; (2 изд.), 2, 351. Представление, имеющее смысл во всей области, где существует аналитическое решение, может быть получено заменой ряда Тэйлора рядом полиномов. Миттаг-Леффлера [Mittag-Leffler, C. R. Acad. Sc. Paris, 128, (1899), 1212].

$F(z;\ z_0,\ w_0)$, где начальные значения z_0, w_0 являются параметрами. Эта функция аналитическая во всех точках области[1] D, определяемой совокупностью кругов сходимости $W, W_1, W_2, \ldots, W_k$.

Если $z = \zeta$ — такая точка, что при $z = \zeta$, $w = F(\zeta;\ z_0,\ w_0)$ функция $f(z, w)$ не аналитическая, то точка ζ не является внутренней точкой области D. Такие точки вместе с точками, для которых функция $F(\zeta;\ z_0,\ w_0)$ становится бесконечной, а также точка на бесконечности, являются *особыми точками* диференциального уравнения. Ниже мы более подробно разберем эти особые точки.

12·4. Начальные значения, для которых функция $f(z, w)$ бесконечна. Мы видели, что если функция $f(z, w)$ однозначна и непрерывна в соседстве с (z_0, w_0), то w может быть представлена в виде сходящегося степенного ряда по $(z - z_0)$. Иначе говоря, если (z_0, w_0) — обыкновенная точка функции $f(z, w)$, то она будет также обыкновенной точкой решения $w = F(z;\ z_0,\ w_0)$. С другой стороны, будут точки, для которых условия однозначности и непрерывности, наложенные на функцию $f(z, w)$, не выполнены; предположим, что функция $f(z, w)$ становится бесконечной в интервале (z_0, w_0), но так, что обратная величина $1/f(z, w)$ является аналитической в соседстве с этими двумя значениями. В данном случае

$$\frac{1}{f(z, w)} = A_0(z) + A_1(z)(w - w_0) + A_2(z)(w - w_0)^2 + \ldots,$$

где коэфициенты $A_0(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z), \ldots$ сами могут быть разложены в ряд по восходящим степеням $(z - z_0)$ и $A_0(z_0) = 0$.

Предположим[2], что не все коэфициенты $A(z)$ равны нулю при $z = z_0$. Для определенности примем, что

$$A_0(z_0) = A_1(z_0) = \ldots = A_{k-1}(z_0) = 0, \quad A_k(z_0) \neq 0.$$

Диференциальное уравнение может быть теперь написано в виде

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f(z, w)},$$

где z — зависимая, а w — независимая переменная. Решение может быть получено при помощи метода пределов; поскольку последовательные производные

$$\frac{dz}{dw}, \quad \frac{d^2z}{dw^2}, \ldots, \quad \frac{d^kz}{dw^k}$$

---

[1] Но не обязательно аналитическая, если только область не является односвязной во всей области D. Например, функция $\log z$ аналитическая в любой точке области, кроме $0 < \delta \leqslant |z| \leqslant \Delta$.

[2] Если все эти коэфициенты обращаются в нуль при $z = z_0$, то можно написать

$$\frac{1}{f(z, w)} = G(z)\, g(z, w),$$

где функция $g(z, w)$ — аналитическая вблизи интервала (z_0, w_0), а $G(z)$ — функция одной только точки z, которая обращается в нуль при $z = z_0$. Точка z_0 в данном случае является особой точкой уравнения, см. §§ 12·6, 12·61.

равны нулю при $z = z_0$, $w = w_0$, в то время как $\frac{d^{k+1} z}{dw^{k+1}}$ не равно нулю, то уравнение допускает единственное решение, разложение которого имеет вид

$$z - z_0 = (w - w_0)^{k+1}\{c_0 + c_1(w - w_0) + c_2(w - w_0)^2 + \ldots\},$$

где $c_0 \neq 0$. Отсюда следует, что функция $w - w_0$ может быть представлена в виде

$$w - w_0 = \mathbf{P}_1\left\{(z - z_0)^{\frac{1}{k+1}}\right\},$$

где $\mathbf{P}_1$ — степенной ряд, главный член которого первой степени относительно аргумента. Следовательно имеются $k+1$ решений, удовлетворяющих начальным условиям, а z_0 — *точка разветвления*, вокруг которой эти решения переставляются.

В частности, пусть диференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{g(z, w)}{h(z, w)},$$

где $g(z, w)$ и $h(z, w)$ — полиномы от w, коэфициенты которых — аналитические функции z. Пусть степень $h(z, w)$ равна n, а z_0 таково, что уравнения $g(z_0, w) = 0$ и $h(z_0, w) = 0$ не имеют общего корня, тогда z_0 соответствует n значений w_0, так что каждой из этих начальных пар значений (z_0, w_0) соответствует последовательность решений с точкой разветвления в z_0. Если мы предположим, что точка z_0 описывает кривую в плоскости z, так что ни для одной точки z_0 на этой кривой уравнения $g(z_0, w) = 0$, $h(z_0, w) = 0$ не имеют общего корня, то каждая точка на такой кривой является точкой разветвления для последовательности решений. Точки разветвления могут рассматриваться как перемещающиеся особенности. С другой стороны, любые другие особенности и в частности любые существенные особенности возникают вследствие того, что коэфициенты полиномов $g(z, w)$ и $h(z, w)$ перестают быть аналитическими. Поскольку это происходит совершенно независимо от w, такие особенности являются фиксированными[1] относительно их положения в плоскости z.

12·41. Значения z, для которых функция $F(z;\ z_0,\ w_0)$ становится бесконечной. Пусть z_1 будет значением z, для которого решение

$$w = F(z;\ z_0,\ w_0)$$

бесконечно. Рассмотрим, каким образом функция $F(z;\ z_0, w_0)$ становится бесконечной, причем мы сделаем несколько предположений в отношении поведения функции $f(z, w)$ при $z = z_1$, $w = \infty$.

Пусть $w = W^{-1}$, тогда диференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dW}{dz} = -W^2 f(z, W^{-1})$$
$$= \varphi(z, W).$$

Предположим, что функция $\varphi(z, W)$ аналитическая в соседстве с $z = z_1$, $W = 0$. Два начальных значения $(z_1, 0)$ относится следовательно к обыкновенной точке W, а соответствующее разложение W будет иметь вид

$$W = (z - z_1)^k \{c_0 + c_1(z - z_1) + c_2(z - z_1)^2 + \ldots\},$$

где k — положительное целое число (не равное нулю). Следовательно

$$w = W^{-1} = (z - z_1)^{-k} \{\gamma_0 + \gamma_1(z - z_1) + \gamma_2(z - z_1)^2 + \ldots\},$$

т. е. решение $w = F(z; z_0, w_0)$ имеет полюс порядка k при $z = z_1$ или

$$w = \mathrm{P}_{-k}(z - z_1).$$

Допустим, что функция $\varphi(z, W)$ становится бесконечной в интервале $(z_1, 0)$, но так, что $1/\varphi(z, W)$ является функцией аналитической в соседстве с этими двумя значениями. Тогда (как в § 12·4) будет существовать последовательность решений, переставляемых между собой вокруг точки разветвления $z = z_1$ следующим образом

$$W = (z - z_1)^{\frac{1}{k+1}} \{c_0 + c_1(z - z_1) + c_2(z - z_1)^2 + \ldots\},$$

следовательно

$$w = W^{-1} = (z - z_1)^{\frac{1}{k+1}} \{\gamma_0 + \gamma_1(z - z_1) + \gamma_2(z - z_1)^2 + \ldots\}$$

или

$$w = \mathrm{P}_{-1}\{(z - z_1)^{\frac{1}{k+1}}\},$$

откуда z_1 является одновременно и бесконечностью и точкой разветвления для решения $w = F(z; z_0, w_0)$. Оба типа фиксированных особых точек, рассмотренных в настоящем параграфе, называются *регулярными*.

12·5. Фиксированные и перемещающиеся особые точки. В настоящем параграфе $f(z, w)$ — рациональная функция, например

$$f(z, w) = \frac{g(z, w)}{h(z, w)},$$

где

$$g(z, w) = p_0(z) + p_1(z)w + \ldots + p_m(z)w^m,$$
$$h(z, w) = q_0(z) + q_1(z)w + \ldots + q_n(z)w^n.$$

---

[1] То, что указано здесь относительно фиксированности существенных особенностей, относится только к уравнениям первого порядка; это не верно в отношении уравнений выше первого порядка.

Любые особенности решений диференциального уравнения, которые не входят ни в один класс функций, рассмотренных в двух предшествующих параграфах, могут возникнуть только для дискретных значений z, другими словами, они не зависят от начального значения зависимой переменной w. Такие особенности могут возникнуть в точке $z = z_1$, где

(a) z_1 — особая точка для любого из коэфициентов p и q; например

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{\sqrt{z - z_1}}$$

имеет решение

$$w = Ce^{2\sqrt{z-z_1}},$$

(b) z_1 такова, что функция $h(z_1, w)$ тождественно равна нулю; например

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{(z-z_1)^2}$$

имеет решение

$$w = Ce^{-\frac{1}{z-z_1}}.$$

Предшествующий пример также иллюстрирует этот случай.

(c) z_1 такова, что уравнения

$$g(z_1, w) = 0, \; h(z_1, w) = 0$$

удовлетворяются совместно частными значениями[2] w, например

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w + \sin(z - z_1)}{z - z_1};$$

здесь $g = h = 0$ при $z = z_1$, $w = 0$, следовательно уравнение имеет решение

$$w = (z - z_1)\int\limits_a^z \frac{\sin(t - z_1)}{(t - z_1)^2}\, dt.$$

Теперь пусть $W = w^{-1}$ и

$$\varphi(z, W) = -W^2 f(z, W^{-1})$$

$$= \frac{g_1(z, W)}{h_1(z, W)}.$$

Особенности могут возникнуть при $z = z_1$, когда

(d) z_1 такова, что $h_1(z, w)$ тождественно равно нулю,

---

[1] Каждая особая точка исключается, если она может быть исключена умножением $g(z, w)$ и $h(z, w)$ на соответствующую функцию z.

[2] Уравнения не могут быть удовлетворены совместно для непрерывной последовательности значений w без того, чтобы g и h не имели общего множителя в z, — здесь этот множитель предположен исключенным. Особые значения z_1 получаются исключением w из $g(z, w) = 0$ и $h(z, w) = 0$.

(e) z_1 такова, что уравнения

$$g_1(z_1, W) = 0, \quad h(z_1, W) = 0$$

удовлетворяются совместно частными значениями W.

Точка в бесконечности может рассматриваться и как особенность при преобразовании диференциального уравнения подстановкой $z = \zeta^{-1}$ и при исследовании точки $\zeta = 0$.

Возникающие в данном случае особые точки называются *фиксированными* или *существенно особыми точками* диференциального уравнения; они могут быть определены a priori исследованием функции $f(z, w)$. Предположим, что каждая фиксированная особая точка, лежащая в конечной части плоскости, окружена небольшим кругом, так что два круга не пересекаются, а каждый круг соединяется с точкой в бесконечности прямолинейным отрезком так, что эти отрезки также между собой не пересекаются. Таким образом односвязная область R в плоскости z определяется так, что в любой точке плоскости каждое решение $F(z; z_0, w_0)$ регулярно.

Предположим, что точка z_1 лежит внутри области R и пусть переменная z будет стремиться к значению z_1, тогда $F(z; z_0, w_0)$ будет стремиться к предельному значению (конечному или бесконечному); пусть

$$F(z; z_0, w_0) \to w_1, \text{ когда } z \to z_1.$$

Здесь могут возникнуть четыре случая.

1°. Если функция $f(z, w)$ аналитическая в соседстве с (z_1, w_1), то функция $F(z; z_0, w_0)$ будет также аналитической в соседстве с точкой z_1, являющейся *обыкновенной* точкой уравнения.

2°. Если w_1 бесконечна, но функция $\varphi(z, w)$ аналитическая в соседстве с $(z_1, 0)$, то, как было показано в § 12·41, функция $F(z; z_0, w_0)$ имеет полюс в точке z_1, которая является *регулярной особенностью* уравнения.

3°. Если w_1 ограничена, но функция $f(z_1, w_1)$ бесконечна, то, поскольку коэфициенты p или q аналитические в соседстве с z_1, функция $h(z_1, w_1)$ должна быть равна нулю. Но функция $g(z_1, w_1)$ не может быть равна нулю в области R. Отсюда выражение $1/f(z, w)$ аналитическое в соседстве с (z_1, w_1), следовательно z_1 — точка разветвления $F(z; z_0, w_0)$, а также *регулярная особая точка* уравнения.

4°. Если w_1 и функция $\varphi(z, w)$ бесконечны в соседстве с $(z_1, 0)$, то выражение $1/\varphi(z, w)$ будет аналитическим вблизи $(z_1, 0)$. Тогда z_1 — точка разветвления функции $F(z; z_0, w_0)$ и *регулярная особая точка* уравнения.

Остается доказать, что когда z стремится к z_1, функция $F(z; z_0, w_0)$ не стремится к какому-либо определенному пределу[1].

[1] Painlevé, Ann. Fac. Sc. Toulouse, (1888), 38; Leçons, 32; Picard, Traité d'Analyse, 2 (2 изд.), 370.

Предположим, что перемещающаяся точка начинает двигаться из точки z_0 и затем описывает простую кривую C в области R. Пусть z_1 будет первой точкой, при которой возникает сомнение в отношении существования предельного значения $F(z;\ z_0,\ w_0)$, и пусть корни уравнения $h(z_1,\ w) = 0$ будут $\omega_1, \ldots, \omega_n$, считая кратные корни только один раз.

Пусть δ будет произвольно малым положительным числом. Определим область Δ в плоскости w, как совокупность точек, удовлетворяющих неравенствам

$$|w - \omega_1| < \delta, \ldots, \ |w - \omega_n| < \delta, \ \ |w| > 1/\delta.$$

Предположим теперь, что когда z приближается к z_1, то функция $F(z;\ z_0,\ w_0)$ принимает значения, соответствующие точкам, лежащим внутри Δ. В этом случае существует некоторое положительное число ε, так что для каждой точки z на кривой C, для которой $|z - z_1| < \varepsilon$, одно из неравенств

$$|w - \omega_1| < \delta, \ldots, \ |w - \omega_n| < \delta, \ \ |w| > 1/\delta$$

удовлетворено. Но функция $F(z;\ z_0,\ w_0)$ изменяется непрерывно, когда z движется по C от z_0 к z_1, поэтому только одно из этих неравенств может быть удовлетворено. Отсюда следует, что w принимает какое-нибудь одно определенное значение $\omega_1, \ldots, \omega_n, \infty$ при $z = z_1$.

Можно еще предположить, что когда z приближается к z_1, то значения $w = F(z;\ z_0,\ w_0)$ соответствуют точкам, лежащим вне кругов Δ. Тогда при $|z - z_1| < \gamma$ модуль $|h(z,\ w)|$ имеет положительную нижнюю границу, следовательно $|f(z,\ w)|$ будет ограничен.

Пусть $\bar{z}$ будет точкой C, так что $|z_1 - \bar{z}| < \frac{1}{2}\gamma$, тогда, независимо от того, какое число $\bar{w}$ связано с $\bar{z}$, решение диференциального уравнения в виде ряда, соответствующее начальным условиям $z = \bar{z}$, $w = \bar{w}$, будет иметь радиус сходимости не меньший некоторого определенного числа μ, если только $\bar{w}$ лежит вне кругов Δ. Выберем на C точку $\bar{z}_1$, расстояние которой от z_1 меньшее наименьшего μ и $\frac{1}{2}\delta$, и пусть значение $\bar{w}_1$, связанное с ней, будет $\bar{w}_1 = F(\bar{z}_1;\ z_0,\ w_0)$. Тогда круг сходимости разложения z, в виде степенного ряда по $z - \bar{z}_1$, будет содержать точку z_1, следовательно функция $F(z;\ z_0,\ w_0)$ будет аналитической относительно z_1.

Таким образом во всех случаях $w = F(z;\ z_0,\ w_0)$ стремится к определенному пределу, конечному или бесконечному в каждой внутренней точке области R.

Особенность возникает в z_1 только для частных значений w, которые в свою очередь зависят от $(z_0,\ w_0)$. Изменение в интервале $(z_0,\ w_0)$ перемещает, в общем случае, особенность от z_1 к другой точке на плоскости z. Любая точка на плоскости z

может быть особенностью одного или более решений уравнения. Возьмем, например, точку z_k, и пусть w_k будет любым корнем уравнения $h(z_k, w) = 0$. Тогда, если $g(z_k, w_k) \neq 0$, особенность возникает для $z = z_k$, $w = w_k$. Такие особенности, которые перемещаются в плоскости z при изменении начальных значений, называются *перемещающимися или параметрическими особенностями*[1]. Теорема, доказанная в предшествующем параграфе, эквивалентна утверждению, что, если уравнение первого порядка и первой степени, то перемещающиеся существенные особенности отсутствуют.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dz} + \frac{z}{w} = 0,$$

когда $g(z, w) = -z$, $h(z, w) = w$. Решение, соответствующее начальной паре значений (z_0, w_0), имеет вид

$$z^2 + w^2 = z_0^2 + w_0^2,$$

или

$$w = \sqrt{z_0^2 + w_0^2 - z^2}.$$

Особенность, в данном случае точка разветвления, возникает при $h(z, w) = w = 0$. Любая точка z_k может быть особой точкой, если z_0 и w_0 такие, что

$$z_k^2 = z_0^2 + w_0^2.$$

В заключение следует отметить, что в то время как перемещающиеся особенности уравнения первого порядка являются регулярными, а не существенными особенностями, это не всегда верно для уравнений степени выше первой.

12·51. Обобщенное уравнение Риккати. В предыдущем параграфе мы видели, что особенности решений уравнения

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) = \frac{g(z, w)}{h(z, w)}$$

разделяются на две категории:

(a) фиксированные особые точки, т. е. точки в плоскости z, расположение которых не зависит от начальных значений;

(b) перемещающиеся особые точки, которые зависят от начальных значений и перемещаются в плоскости z при их изменении. Перемещающиеся особенности могут быть полюсами или точками разветвления.

Здесь возникает вопрос, какие ограничения должны быть наложены на функцию $f(z, w)$, если решения с перемещающимися точками разветвления невозможны. Пусть z_0 будет любой

---

[1] Hamburger, J. für Math., 83 (1877), 185, Fuchs, Sitz. Acad. Wiss., Berlin, 32 (1884), 669 [Math. Werke, 2, 355].

точкой на плоскости z, не являющейся одной из фиксированных особых точек. Тогда *необходимо*, чтобы не было значения w, для которого уравнение

$$h(z_0, w) = 0$$

было бы удовлетворено. Но это уравнение всегда имеет корни, если только $h(z_0, w)$ не зависит от w. Поскольку z_0—любая не особая точка в плоскости z, то отсюда следует, что $h(z, w)$ — функция одной только z. Иначе говоря, $f(z, w)$—полином от w, например

$$f(z, w) = p_0(z) + p_1(z) w + \ldots + p_n(z) w^n.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\varphi(z, W) &= -W^2 f(z, W^{-1}) \\ &= -p_0(z) W^2 - p_1(z) W - p_2(z) - p_3(z) W^{-1} - \ldots - \\ &\qquad - p_n(z) W^{-n+2}\end{aligned}$$

должно быть полиномом от W, следовательно необходимо, чтобы

$$p_3(z) = p_4(z) = \ldots = p_n(z) = 0$$

тождественно.

При отсутствии перемещающихся точек разветвления диференциальное уравнение получится вида

$$\frac{dw}{dz} = p_0(z) + p_1(z) w + p_2(z) w^2.$$

Полученное таким образом уравнение называется *обобщенным уравнением Риккати*[1]; когда $p_2(z)$ тождественно равно нулю, оно приводится к линейному уравнению.

Отсутствие перемещающихся точек разветвления уравнения приводит к важному заключению в отношении формы общего решения. Пусть z_0 и z будут двумя точками в области R (§ 12·5); они могут быть соединены при помощи простой кривой, не проходящей через какую-либо точку разветвления. Пусть w_0 будет начальным значением зависимой переменной, выбранной соответственно z_0, и пусть w будет значением, соответствующим z, полученным аналитическим продолжением через ограниченное число кругов, которые полностью замыкают путь z_0z. При этом продолжении, решение и его обратная величина остаются аналитическими функциями w_0; конечное значение w является также аналитической функцией w_0. Независимо от значения (конечного или бесконечного), какое может иметь w_0, w определяется единственным способом, так как в области R отсутствуют точки разветвления. Таким образом w_1, рассматриваемая как

[1] d'Alambert, Hist. Acad. Berlin, 19 (1763), 242; Liouville, J. Éc. Polyt. cah., 22 (1833), 1; J. de Math., 6 (1841), 1. Частный случай уравнения Риккати был рассмотрен в § 2·15.

функция w_0 — однозначна, аналитическая и не имеет никаких других особенностей, кроме полюсов, следовательно она является рациональной функцией w_0.

Если рассматривать w как произвольное начальное значение, а w_0 — как значение, полученное из него аналитическим продолжением, то процес обратим, и следовательно w_0 — рациональная функция от w. Эта рациональная зависимость между w и w_0 может иметь место только в том случае, если w дробно-линейная функция w_0, т. е.

$$w = \frac{Aw_0 + B}{Cw_0 + D},$$

где A, B, C и D — функции z.

Из свойств ангармонического соотношения следует, что если w_1, w_2 и w_3 — любые три частные значения уравнения Риккати, то общее решение может быть выражено в виде

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = A\,\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2},$$

где A — постоянная.

Решение может быть найдено еще следующим образом. Уравнения

$$\begin{aligned} w' &= p_0 + p_1 w + p_2 w^2, \\ w_1' &= p_0 + p_1 w_1 + p_2 w_1^2, \\ w_2' &= p_0 + p_1 w_2 + p_2 w_2^2, \\ w_3' &= p_0 + p_1 w_3 + p_2 w_3^2 \end{aligned}$$

совместны, если

$$\begin{vmatrix} w', & 1, & w, & w^2 \\ w_1', & 1, & w_1, & w_1^2 \\ w_2', & 1, & w_2, & w_2^2 \\ w_3', & 1, & w_3, & w_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие эквивалентно следующему

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{w - w_1}{w - w_2}\cdot\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}\right] = 0,$$

откуда получим искомый результат.

12·52. Приведение к линейному уравнению второго порядка. Если $p_2(z)$ тождественно равно нулю, то уравнение Риккати вырождается в линейное уравнение первого порядка. Этот случай мы рассматривать не будем. Напишем

$$w = -\frac{u'}{p_2(z)\,u},$$

тогда уравнение Риккати примет вид

$$-\frac{u''}{p_2 u} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{p_2'}{(p_2)^2}\cdot\frac{u'}{u} = p_0 - \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{u'}{u} + p_2\left(\frac{u'}{p_2 u}\right)^2$$

и будет приведено к однородному линейному уравнению второго порядка

$$p_2(z)\frac{d^2u}{dz^2}-\{p_2'(z)+p_1(z)\,p_2(z)\}\frac{du}{dz}+p_0(z)\,p_2^2(z)=0.$$

Уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dz^2}+P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)\,u=0$$

преобразуется подстановкой

$$w=u'/u$$

в уравнение Риккати

$$\frac{dw}{dz}=-Q(z)-P(z)\,w-w^2.$$

Следовательно теория уравнения Риккати эквивалентна теории однородного линейного уравнения второго порядка.

Общее решение линейного уравнения имеет вид

$$u=C_1u_1(z)+C_2u_2(z),$$

поэтому общее решение уравнения Риккати будет

$$w=-\frac{C_1u_1'(z)+C_2u_2'(z)}{p_2(z)\{C_1u_1(z)+C_2u_2(z)\}}.$$

Пример. Докажите, что все перемещающиеся особенности уравнения Риккати являются полюсами.

12·6. Начальные значения, для которых функция $f(z, w)$ неопределенна. Уравнение Брио и Буке[1]

$$z\frac{dw}{dz}-\lambda w=a_{10}z+a_{20}z^2+a_{11}zw+a_{02}zw^2+\cdots,$$

характеризуется тем, что для двух начальных значений $z=w=0$, производная, которая имеет форму $0/0$, неопределенна. Нас здесь интересует вопрос, могут ли существовать решения, аналитические в соседстве с $z=0$ и равные нулю при $z=0$.

Пусть ряд

$$w(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

формально удовлетворяет диференциальному уравнению; в этом случае его последовательные коэфициенты определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)\,c_1=a_{10},\\
&(2-\lambda)\,c_2=a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n-\lambda)\,c_n=P_n(a_{no},\ldots a_{on};\ c_1,\ldots,c_{n-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

где P_n — полином от его аргументов, коэфициенты которых

---

[1] J. Éc. Polyt., 36, (1856), 161; Picard, Traité d'Analyse, 3, II.

положительные целые числа. Таким образом последовательные коэфициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n \ldots$ могут быть вычислены при условии, если λ не является положительным целым числом. Если ряд $w(z)$ сходится для достаточно малых значений $|z|$, он будет представлять решение диференциального уравнения. Сходимость можно доказать при помощи метода пределов следующим образом.

Поскольку предположено, что $n - \lambda$ не равно нулю, можно найти такое число B, при котором $|n - \lambda| \geqslant B$ для всех значений n. Пусть ряд

$$a_{10}z + a_{20}z^2 + a_{11}zw + a_{02}w^2 + \ldots$$

сходится и ограничен в пределах области $|z| = r$, $|w| = R$ и пусть M будет верхним значением его модуля на граничной линии, тогда

$$\Phi(z, W) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{r}\right)\left(1 - \frac{W}{R}\right)} - M\left(1 + \frac{W}{R}\right)$$
$$= A_{10}z + A_{20}z^2 + A_{11}zW + A_{02}W^2 + \ldots$$

будет доминантной функцией этого ряда.

Рассмотрим корень уравнения

$$BW = \Phi(z, W),$$

который равен нулю, когда z равно нулю; он может быть разложен в ряд Маклорена

$$W = C_1z + C_2z^2 + \ldots + C_nz^n + \ldots,$$

имеющего конечный радиус сходимости, не равный нулю.

Коэфициенты этого ряда определяются из соотношений

$$\begin{aligned} BC_1 &= A_{10}, \\ BC_2 &= A_{20} + A_{11}C_1 + A_{02}C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ BC_n &= P_n(A_{no}, \ldots, A_{on}; C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где полином P_n формально равен полиному, определяющему $(n - \lambda)c_n$. Поскольку

$$B \leqslant |n - \lambda|; \quad A_{10} \geqslant |a_{10}|, \ldots, A_{on} \geqslant |a_{on}|,$$

по индукции получим $C_n \geqslant |c_n|$.

Следовательно, если λ не положительное целое число, то уравнение допускает решение в соседстве с $z = 0$, которое обращается в нуль при $z = 0$. Легко доказать, что это аналитическое решение единственное[1].

---

[1] Брио и Буке показали, что если вещественная часть λ отрицательна, то существует только аналитическое решение, пока z стремится к нулю вдоль пути конечной длины. С другой стороны, если вещественная часть λ положительная, то уравнение допускает бесконечное число неаналитических решений, которые равны нулю при $z = 0$. Представления этих неаналитических решений см. Picard, C. R. Acad. Sc. Paris., 87 (1878), 430, 743; Bull. Soc. Math. France, 12 (1883), 48 и Poincaré, J. Éc. Polyt. 45 (1878), 13; J. de Math. (3), 7 (1881), 375; 8 (1882), 251; (4), 1 (1885), 167.

При $\lambda=1$ аналитическое решение получается только при $a_{10}=0$. В данном случае c_1 может быть выбрано произвольно. Аналогично, если $\lambda=n>1$, то существует аналитическое решение, если только между коэфициентами a_{rs}, где $r+s\leqslant n$, существует некоторое алгебраическое соотношение. Так при $\lambda=2$ это соотношение принимает вид

$$a_{20}-a_{11}a_{10}+a_{02}a_{10}^2=0.$$

При $\lambda=n$ коэфициент c_n произвольный.

В качестве примера рассмотрим простой случай

$$z\frac{dw}{dz}-\lambda w=az.$$

Общее решение имеет вид

$$w=\frac{a}{1-\lambda}z+Cz^{\lambda}, \text{ если } \lambda\neq 1,$$

$$w=az\log z+Cz, \text{ если } \lambda=1,$$

где C — произвольная постоянная.

12·61. Обобщенная проблема Брио и Буке. Первый приведенный тип. Проблема предыдущего параграфа может быть обобщена и выражена следующим образом. Необходимо исследовать существование решений уравнения

$$\text{(A)}\qquad \frac{dw}{dz}=\frac{g(z,\ w)}{h(z,\ w)},$$

которые обращаются в нуль при $z=0$, где

$$g(0,0)=h(0,0)=0.$$

Допустим, что функции $g(z,\ w)$, $h\ (z,\ w)$ могут быть разложены в сходящийся двойной ряд по восходящим степеням z и w вблизи начала, а также, что g и h не делятся на некоторую степень z или w.

Пусть в функции $g(z,\ w)$ член, содержащий w низшей степени и не умноженный на степень z, будет w^m. Тогда пусть

z^{r_1} будет низшей степенью z, умноженной на w^{m-1}
z^{r_2} .... w^{m-2}

и z^{r_m} будет низшей степенью z, имеющей постоянный коэфициент.

Наличие w^m и z^{r_m} обязательно, так как g не делится ни на одну степень z или w, но любой из других указанных членов может отсутствовать.

$r_1,\ r_2,\dots,r_m$ — положительные целые числа, не равные нулю. Если все члены порядка выше соответствующего этим индексам опущены, то $g(z,\ w)$ приводится к полиному от z и w.

Аналогично, $h(z,\ w)$ содержит члены вида

$$w^n,\ z^{s_1}w^{n-1},\ z^{s_2}w^{n-2},\dots,z^{s_n},$$

первый и последний из которых должны существовать вместе с членами высшего порядка.

Сейчас надо исследовать возможность решения, равного $O(z^{\mu})$ в начале. Само уравнение (A) может быть написано в виде

$$h(z, w)\, z\frac{dw}{dz} = zg(z, w).$$

Построим диаграмму, аналогичную классической диаграмме Ньютона, представляющей любой член $z^{\xi} w^{\eta}$ в виде точки, декартовы координаты которой равны (ξ, η). Пусть точки P_i представляют различные члены $zg(z, w)$, а точки Q_i — члены выражения $h(z, w)\, z\frac{dw}{dz}$, которое для целей диаграммы рассматривается как выражение, эквивалентное $wh(z, w)$[1].

Среди всех этих точек на оси η имеется только одна точка $Q_0(0, n+1)$. Аналогично, на оси ξ имеется одна точка $P_m(r_m + +1,0)$ и отсутствуют точки Q. Также отсутствуют какие-либо точки и в сегментах OQ_0 и OP_m.

Приводимая ниже диаграмма (фиг. 10) иллюстрирует случай

$$\frac{dw}{dz} = \frac{[w^6,\ zw^5,\ z^5w^4,\ zw^3,\ zw^2,\ z^3w,\ z^6]}{[w^4,\ z^3w^3,\ zw^2,\ z^2w,\ z^3]},$$

где члены низшего порядка относительно w^6, $w^5, \ldots, w^0$ даны без числовых коэфициентов.

Построим полигон Q_0P_m, известный как диаграмма Пьюизо (Puiseux)[2]. Он представляет собой ломаную линию, выпуклую к началу, так что все точки P_i и Q_i лежат на этой линии или на стороне, отдаленной от начала. Поскольку линия начинается в Q_0 и кончается в P_m, должна быть по крайней мере одна сторона, которая содержала бы точки P и Q. Однако мы не будем рассматривать случаи, когда эти точки совпадают. Предположим, что эти точки соответствуют членам

$$z^{\alpha+a} w^{\beta},\ z^{\alpha} w^{\beta+b}.$$

Эти члены связаны между собой, как члены одинакового порядка; при наличии каких-либо других точек на стороне рассматриваемого полигона, соответствующие члены будут того же порядка, а все точки, находящиеся не на этой стороне, будут отнесены к членам высшего порядка. Теперь, поскольку

$$O(z^{\alpha+a} w^{\beta}) = O(z^{\alpha} w^{\beta+b}),$$

отсюда следует, что

$$w = O(z^{a/b}) = O(z^{h/k}),$$

[1] Нужно отметить, что поскольку $w = O(z^{\mu})$, отсюда следует, что

$$z\frac{dw}{dz} = O(z^{\mu}) = O(w).$$

[2] Применение диаграммы Пьюизо к теории дифеpенциальных уравнений подробно рассмотрено Файном [Eine, Amer. J. Math., 11 (1889), 317].

где h/k — дробь a/b в низших членах. Эта связь может поэтому привести к решению, равному $O(z^{\mu})$ в начале, где

$$\mu = h/k,$$

следовательно μ — наклон стороны рассматриваемого полигона.

Для исследования возможного решения допустим, что

$$z = t^k, \quad w = t^h + \text{высшие члены},$$

тогда

$$z\frac{dw}{dz} = O(t^h),$$

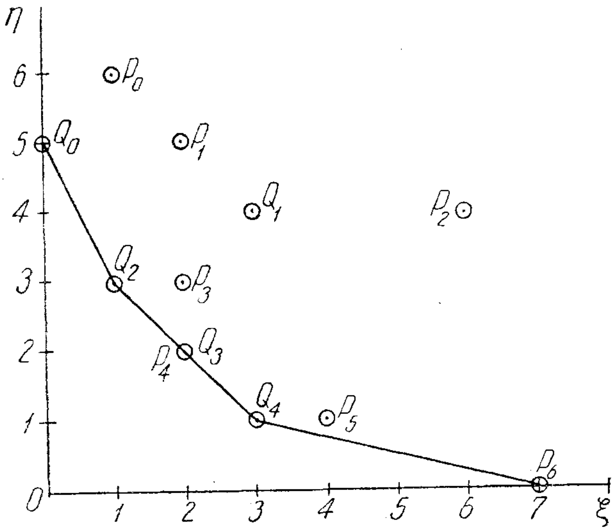


Рис. 10.

а если

$$zg(z, w) = O(t^N),$$

то

$$h(z, w) = O\left(t^{N-h}\right).$$

Так, если

$$w = t^h u,$$

где u равно $O(1)$ в начале, то

$$zg(z, w) = t^N U_0 + t^{N+1} + U_1 + \text{высшие члены},$$

$$h(z, w) = t^{N-h} V_0' + t^{N-h+1} V_1 + \text{высшие члены},$$

где $U_0, U_1, \ldots, V_0, V_1, \ldots$ — полиномы от u.

Уравнение (A) приводится к виду

$$\text{(B)} \qquad \left(t\frac{du}{dt} + hu\right)\{V_0 + V_1 t + \ldots\} = k\{U_0 + U_1 t + \ldots\},$$

а если

$$u = u_0 + O(t),$$

где $n_0 \neq 0$, то корни

$$F(u) \equiv huV_0 - kU_0 = 0$$

дают начальные значения u_0.

Уравнение (B) может быть написано в виде

$$(V_0 + V_1 t + \ldots) t \frac{du}{dt} = F(u) + (kU_1 - huV_1) t + \ldots.$$

В целях упрощения предположим, что $u = u_0$ — простой корень уравнения $F(u) = 0$; тогда

$$F(u) = (u - u_0) F'(u_0) + \ldots,$$

где

$$F'(u_0) \neq 0.$$

Предположим также, что

$$V_0 \neq 0 \text{ при } u = u_0$$

и напишем

$$V_0 = \alpha_0 + \alpha_1 (u - u_0) + \ldots \qquad (\alpha_0 \neq 0).$$

Тогда

$$t \frac{du}{dt} = \frac{(u - u_0) F'(u_0) + (kU_1 - huV_1) t + \ldots}{\alpha_0 + \alpha_1 (u - u_0) + V_1 t + \ldots}$$

или

$$t \frac{dv}{dt} = \lambda v + at + \text{высшие члены},$$

где $v = u - u_0$ и $\lambda \neq 0$. Уравнение называется в данном случае *уравнением первого приведенного типа*. Так, за исключением специального случая, где λ — положительное целое число, первоначальное уравнение имеет решение

$$w = t^h \left(u_0 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r t^r\right) = \mathrm{P}_h\left(z^{1/k}\right),$$

где $\mathrm{P}_h\left(z^{1/k}\right)$ — степенной ряд относительно $z^{1/k}$, первый член которого степени h.

Предположим, что $u = u_0$ — кратный корень $F(u) = 0$, так что $F'(u_0) = 0$; тогда, если, как и в предыдущем случае, $u = u_0$ не является корнем $V_0 = 0$, то

$$t \frac{du}{dt} = \frac{(kU_1 - huV_1) t + \ldots}{\alpha_0 + \alpha_1 (u - u_0) + V_1 t + \ldots},$$

или, если $v = u - u_0$, то

$$t \frac{dv}{dt} = at + \text{члены второго и высших порядков}.$$

Это является лишь частным случаем уравнения первого приведенного типа, когда $\lambda = 0$.

12·62. Уравнение второго приведенного типа. Рассмотрим теперь случай, когда u_0 — общий нуль $F(u)$ и V_0, так что

$$F'(u_0) = 0 \text{ и } \alpha_0 = 0.$$

Если, как и раньше, $v = u - u_0$, то уравнение принимает вид

$$t\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha' v + \beta' t + \ldots}{\alpha v + \beta t + \ldots},$$

где α, β, α', β' — постоянные, некоторые из которых могут быть равны нулю[1]. Правая часть уравнения все еще имеет неопределенную форму в начале. Рассмотрение соответствующего этому случаю полигона приводит к предположению, что первое приближение к решению в начале имеет вид

$$\alpha' v + \beta' t = 0.$$

Напишем поэтому (принимая $\alpha' \neq 0$)

$$v = \left(-\frac{\beta'}{\alpha'} + v_1\right) t;$$

уравнение примет вид

$$t^2 \frac{dv_1}{dt} = \frac{\alpha' v_1 + \ldots}{\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'} + \alpha v_1 + \ldots}.$$

Если $\alpha'\beta - \alpha\beta' \neq 0$, то получим

$$t^2 \frac{dv_1}{dt} = \lambda v_1 + at + \text{высшие члены}.$$

С другой стороны, если $\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$, то правая часть уравнения все еще будет неопределенной в начале. Процесс может быть повторен и приведен к уравнению вида

$$t^3 \frac{dv_2}{dt} = \lambda v_2 + at + \text{высшие члены}$$

или к уравнению, в котором левая часть имеет форму 0/0 в начале. Можно доказать, что после конечного числа приведений правая часть перестанет быть неопределенной в начале, и мы получим уравнение вида

$$t^{m+1} \frac{dv_m}{dt} = \lambda v_m + at + \text{высшие члены},$$

где m — положительное целое число $\geqslant 1$. Это *уравнение второго приведенного типа*[2].

---

[1] Необходимые, но не достаточные условия для существования этого случая: чтобы сторона рассматриваемого полигона (a) содержала по меньшей мере две точки P и две точки Q, (b) не содержала точек P или (c) не содержала точек Q.

[2] Для изучения поведения решений этого уравнения в соседстве с началом см. Bendixson, Öfv. Vet. — Acad. Stockholm, 55 (1898), 69, 139, 171; Horn, J. für Math., 118 (1897), 257; 119 (1898), 196, 267; Math. Ann. 51 (1898), 346, 360. Дальнейшее обобщение см. Perron, Math. Ann., 75 (1914), 256.

В общем случае начало представляет собой существенно особую точку уравнения второго приведенного типа, так как, если $\lambda \neq 0$, $m>1$, то уравнение не может быть удовлетворено рядом по восходящим степеням t с ведущим членом t^p. Если $\lambda \neq 0$, $m=1$, уравнение может быть *формально* удовлетворено рядом Маклорена, который однако расходится для всех значений t.

Например уравнение

$$z^2 \frac{dw}{dz} = \lambda w - z$$

имеет формальное решение

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} z^n,$$

которое очевидно сходится только при $z=0$.

12·63. Специальные случаи приведенных форм уравнения.

(I)
$$z^{m+1}\frac{dw}{dz} = \lambda w + az$$

является уравнением второго приведенного типа, но оно является также линейным уравнением и следовательно может быть проинтегрировано в квадратурах. Его решение имеет вид

$$w = e^{-\lambda/mz^m}\left\{a \int e^{\lambda/mz^m} z^{-m} dz + C\right\}.$$

Если $\lambda=0$, то интеграл алгебраический, но в общем случае $\lambda \neq 0$, и в начале имеется существенная особенность.

(II)
$$z^2 \frac{dw}{dz} = \alpha z^3 + \beta w^2 \qquad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$$

является частным случаем уравнения Риккати. Полигон, соответствующий этому уравнению (фиг. 11), имеет две стороны P_1Q_0 и Q_0P_0.

На стороне P_1Q_0 функция w^2 связана с zw, что предполагает решение $w = O(z)$ в начале.

Пусть

$$w = zu,$$

тогда уравнение примет вид

$$z\frac{du}{dz} + u = \alpha z + \beta u^2.$$

Уравнение, определяющее u_0, будет

$$F(u) \equiv \beta u^2 - u = 0;$$

оно имеет не равный нулю корень $u_0 = 1/\beta$.

Тогда, если $u = v + 1/\beta$, то

$$z \frac{dv}{dz} = \alpha z + v + \beta v^2,$$

что представляет случай уравнения Брио и Буке, где $\lambda = 1$. Оно имеет аналитическое решение только при $\alpha = 0$. Чтобы найти природу решения, если оно существует вблизи $z = 0$, напишем уравнение в виде

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{v}{z}\right) = \frac{\alpha}{z} + \beta\left(\frac{v}{z}\right)^2;$$

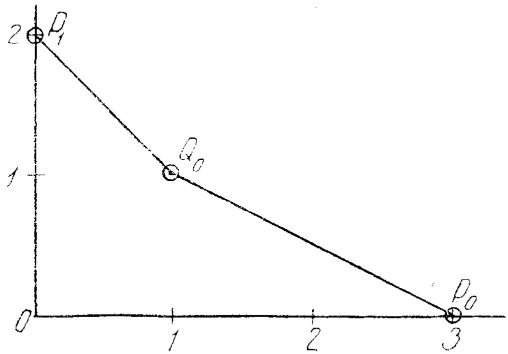


Рис. 11.

оно является уравнением Риккати относительно v/z. Преобразуем его в линейное уравнение второго порядка, полагая

$$\frac{v}{z} = -\frac{W'}{\beta W}.$$

Тогда оно примет весьма простую форму

$$zW'' = -\alpha\beta W,$$

которая имеет два независимых решения

$$W_1 = z - \frac{\alpha\beta}{2!} z^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{2 \cdot 3!} z^3 - \ldots$$

и

$$W_2 = W_1 \log z + W_0,$$

где W_0 — степенной ряд по z.

Только W_1 приводит к решению уравнения Риккати

$$v = -\frac{1 - \alpha\beta z + \frac{\alpha^2\beta^2}{2 \cdot 2!} z^2 - \cdots}{\beta\left\{1 - \frac{\alpha\beta}{2!} + \frac{\alpha^2\beta^2}{2 \cdot 3!} z^2 - \cdots\right.},$$

которое является аналитическим решением уравнения, но не удовлетворяет начальным условиям $z = w = 0$.

Поскольку сторона P_1Q_0 не дает аналитического решения, исследуем сторону Q_0P_0. Она связывает zw с z^3 и предполагает решение $w=O(z^2)$ в начале. Пусть

$$w = z^2 u,$$

тогда

$$z\frac{du}{dz} + 2u = \alpha + \beta z u^2.$$

В данном случае

$$F(u) = 2u - \alpha,$$

следовательно $u_0 = \frac{1}{2}\alpha$. Напишем

$$u = \frac{1}{2}\alpha + v,$$

тогда уравнение принимает вид

$$z\frac{dv}{dz} + 2v = \beta z\left(\frac{1}{2}\alpha + v\right)^2$$

и является уравнением Брио и Буке первого типа, с $\lambda = -2$. В данном случае существует аналитическое решение

$$v = \frac{1}{12}\alpha^2\beta z + \ldots,$$

следовательно имеется одно решение первоначального уравнения, аналитическое в соседстве с началом и принимающее там нулевое значение, именно

$$w = z^2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12}\alpha^2\beta z + \ldots\right).$$

Примеры

1. В уравнении

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)}$$

пусть

$$P(z, w) = az + bw + \ldots, \quad Q(z, w) = \alpha z + \beta w + \ldots$$

и пусть $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda, & \beta \\ a, & b - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Докажите, что если λ и $1/\lambda$ не являются положительными целыми числами или если λ не является отрицательным вещественным числом, то два частных решения будут аналитическими вблизи $z = 0$, $w = 0$; они имеют форму

$$U(z, w) \equiv gz + hw + \ldots = 0, \quad V(z, w) \equiv \gamma z + \varkappa w + \ldots = 0,$$

где $g\varkappa - h\gamma \neq 0$; общее решение имеет вид

$$U(z, w) = c[V(z, w)]^{\lambda},$$

где c — произвольная постоянная.

[Poincaré].

2. Если в обозначениях предыдущего примера λ или $1/\lambda$ — положительное целое число, докажите, что в общем случае существует только одно аналитическое решение, при котором $w = 0$, когда $z = 0$. Пусть этим решением будет $V(z, w)$, тогда общее решение будет иметь вид

$$\frac{S(z, w)}{V(z, w)} + h \log V(z, w) = \text{const},$$

где $S(z, w)$ — аналитическая функция в соседстве с $z = 0$, $w = 0$. Число h зависит от предшествующих коэфициентов $a, b, \ldots, \alpha, \beta \ldots$ относительно P и Q. Рассмотрите частный случай $h = 0$.

[Poincaré, Bendixson, Horn].

3. Если λ — отрицательное вещественное число, то два частных аналитических решения существуют, так что $w = 0$ при $z = 0$, но общее решение не имеет формы, указанной в примере 1. Преобразуйте уравнение в другое уравнение аналогичного типа, где $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $a = 0$, $b = \lambda$, и, принимая

$$zw^{-\lambda} = \rho^{1-\lambda}, \quad w = ze^{u},$$

докажите, что общее решение допускает разложение

$$\rho + \rho^2 A_2(u) + \rho^3 A_3(u) + \ldots = \text{const},$$

где $A_2, A_3, \ldots$ является аналитическим вблизи $u = 0$, а ряд сходится при $|\rho| < \delta$, $|u| < G$, где G — произвольная величина, а δ зависит от G и стремится к нулю, когда G стремится к бесконечности.

[Bendixson]

ГЛАВА XIII

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

13·2. Классификация рассматриваемых уравнений. В рассматриваемых ниже уравнениях производная не определяется полностью через z и w, но она неявно связана[1] с z и w, так что

$$F\left(z,\ w, \frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

Из этого общего класса уравнений мы рассмотрим только те уравнения, в которых левый член является полиномом от w и $\frac{dw}{dz}$, Предположим, что

$$p \equiv \frac{dw}{dz},$$

тогда функцию $F(z,\ w,\ p)$ можно выразить в виде ряда

$$A_0(z,\ w)\,p^m + A_1(z,\ w)\,p^{m-1} + \cdots + A_{m-1}(z, w)\,p + A_m(z, w),$$

в котором функции $A(z,\ w)$ будут полиномами от w, с аналитическими коэфициентами по z. Предположим далее, что указанное выражение неприводимо, т. е., что оно не может быть разложено на множители того же аналитического характера.

Нам нужно определить необходимые и достаточные условия для отсутствия перемещающихся точек разветвления[2] и получить таким образом обобщения уравнения Риккати.

Пусть $D(z,\ w)$ будет p-дискриминантом уравнения

$$F(z,\ w,\ p) = 0$$

и полиномом от w, коэфициенты которого являются аналитическими функциями z.

В последующем разборе мы исключим некоторые значения z, для которых:

(a) $D(z,\ w) = 0$ независимо от w,

(b) $A_0(z,\ w) = 0$ независимо от w,

(c) коэфициенты A имеют особые точки для общих значений w,

(d) корни $D(z,\ w) = 0$, рассматриваемые как уравнения относительно w, имеют особые точки.

Все эти значения z фиксированны и зависят только от коэфициентов A; они соответствуют особым точкам, фиксированным

---

[1] Предполагается, что элементарные свойства неявных алгебраических функций известны.

[2] Fuchs, Sitz. Acad. Wiss. Berlin, 32 (1884), 669 [Math. Werke, 2, 355].

в плоскости z. Здесь и далее мы будем рассматривать z_0 как начальное значение z, отличное от одного из перечисленных особых значений, а w_0 будет соответствующим начальным значением w; нам нужно рассмотреть четыре независимых случая

$$\text{(I)}\ D(z_0, w_0) \neq 0,\ A_0(z_0, w_0) \neq 0,$$

$$\text{(II)}\ D(z_0, w_0) \neq 0,\ A_0(z_0, w_0) = 0,$$

$$\text{(III)}\ D(z_0, w_0) = 0,\ A_0(z_0, w_0) \neq 0,$$

$$\text{(IV)}\ D(z_0, w_0) = 0,\ A_0(z_0, w_0) = 0.$$

13·2. Случай (I). Если $D(z, w)$ и $A_0(z, w)$ не равны нулю для $z = z_0$, $w = w_0$, то из теории алгебраических функций следует, что уравнение

$$\text{(A)} \qquad F(z, w, p) = 0$$

в соседстве с интервалом (z_0, w_0) определяет m независимых конечных значений p. Придадим w фиксированное значение w_0, тогда уравнение

$$F(z, w_0, p) = 0$$

будет иметь p независимых корней, аналитических в соседстве с z_0. Пусть этими корнями будут

$$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_m,$$

тогда в соседстве с интервалом (z_0, w_0) окажутся m выражений вида

$$p = \tilde{\omega}_i + C_i^{(1)}(w - w_0) + C_1^{(2)}(w - w_0)^2 + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Поскольку $\tilde{\omega}_i$ и коэфициенты C_i аналитические в соседстве с z_0, эти выражения могут быть написаны в виде

$$\text{B)} \qquad p = \tilde{\omega}_i^{(0)} + P_i(z - z_0, w - w_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\tilde{\omega}_i^{(0)}$ — значение $\tilde{\omega}_i$ при $z = z_0$, а p_i обозначает двойной ряд, который сходится для достаточно малых значений $|z - z_0|$ и $|w - w_0|$ и обращается в нуль при $z = z_0$, $w = w_0$. Следовательно первоначальное уравнение (A) заменяется последовательностью m независимых уравнений (B); каждое из этих уравнений имеет только одно аналитическое решение, которое приводится к w_0 при $z = z_0$. Следовательно уравнение (A) имеет m независимых аналитических решений, удовлетворяющих начальным условиям. Других решений оно не имеет.

13·3. Случай (II). Если $A_0(z_0, w_0) = 0$, но $D(z_0, w_0) \neq 0$, то уравнение (A) определяет m значений p, одно из которых становится бесконечным при (z_0, w_0). Не может быть двух значений p, обращающихся одновременно в бесконечность, так как это привело бы к $A_1(z_0, w_0) = 0$ и $D(z_0, w_0) = 0$. Следовательно для p имеются $m - 1$ независимых выражений, аналитических в соседстве с (z_0, w_0), а они приводят к последовательности $m - 1$ решений уравнения, удовлетворяющих начальным условиям.

Чтобы исследовать корень, который становится бесконечным в интервале (z_0, w_0), предположим

$$P = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{p};$$

в этом случае уравнение

$$F(z, w, P^{-1}) = 0$$

имеет корень

$$P = P(z - z_0, w - w_0),$$

обращающийся в нуль при (z_0, w_0) и аналитический в соседстве с ним. Это уравнение имеет решение

$$z = z_0 + \mathbf{P}_r\,(w - w_0),$$

где $r \leqslant 2$, поскольку

$$\frac{dz}{dw} = 0 \text{ при } w = w_0.$$

Решение (А), соответствующее значению p и обращающееся в бесконечность для (z_0, w_0), получится таким образом вида

$$w - w_0 = \mathbf{P}_1 \left\{(z - z_0)^{\frac{1}{r}}\right\}.$$

Следовательно случай (II) всегда приводит к решению, имеющему точку разветвления в z_0, т. е. *перемещающуюся* точку разветвления. Это приводит к первому необходимому условию для отсутствия перемещающихся точек разветвления.

Уравнение $A_0\,(z, w) = 0$ *не имеет решения* $w = \zeta(z)$, *так что* $D(z, w) \neq 0$.

13·4. Случай (III). Левая часть алгебраического уравнения

$$D(z, w) = 0$$

является полиномом от w с коэфициентами, аналитическими относительно z. Пусть $w = \eta(z)$ удовлетворяет этому алгебраическому уравнению, тогда $\eta(z)$ не будет аналитической функцией в особых точках $D(z, w)$, а также возможно и в некоторых других точках. Исключим эти точки, которые являются фиксированными, из последующего рассмотрения.

Уравнение

$$F(z, \eta, p) = 0$$

имеет не меньше одного кратного корня p, скажем $p = \tilde{\omega}$; пусть он имеет кратность λ. С другой стороны, для общих значений w уравнение

$$F(z, w, p) = 0$$

имеет m независимых корней. Пусть корни, которые равны друг другу и $\tilde{\omega}$ при $w = \eta$, будут

$$p_1, p_2, \ldots, p_\lambda.$$

Предположим, что z фиксированно; пусть w опишет небольшой круг вокруг точки η, соответствующей выбранному значению z. По завершении круга p_1 возвращается к своему начальному значению или к одному из значений $p_2, \ldots, p_\lambda$. После того, как были описаны $\alpha (\leqslant \lambda)$ полных контура, p_1 принимает начальное значение. Пусть последовательность значений, принятых p_1 в течение этого процесса, будет

$$p_1, p_2, \ldots, p_\alpha, p_1;$$

в этом случае говорят, что эта последовательность образует *цикл* порядка α.

Если p_1, рассматриваемая как функция w, имеет точку разветвления порядка $\alpha - 1$ при $w = \eta$, то

$$w - \eta = W^\alpha,$$

тогда p_1 становится однозначной функцией W. Но $p_1 = \tilde{\omega}$, когда $w = \eta$, и ограничено, когда w находится в соседстве с η. Следовательно p_1 может быть разложено в ряд Маклорена

$$p_1 = \tilde{\omega} + \sum_{r=1}^{\infty} c_r W^r,$$

коэфициенты которого зависят от z и который сходится, когда z принимает не особые значения, а W достаточно мало. Пусть c_k будет первым из коэфициентов, который не обращается тождественно в нуль; тогда

$$p_1 = \tilde{\omega} + c_k \{w - \eta(z)\}^{\frac{k}{\alpha}} + c_{k+1} \{w - \eta(z)\}^{\frac{k+1}{\alpha}} + \ldots,$$

следовательно $w - \eta(z)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\frac{d\{w - \eta(z)\}}{dz} = \tilde{\omega} - \frac{d\eta}{dz} + c_k \{w - \eta(z)\}^{\frac{k}{\alpha}} + c_{k+1} \{w - \eta(z)\}^{\frac{k+1}{\alpha}} + \ldots$$

13·41. Условие для отсутствия точек разветвления в случае (II). В частном случае $\alpha = 1$, когда правая часть уравнения аналитическая (за исключением изолированных точек) относительно z и $w - \eta(z)$, уравнение имеет аналитическое решение. Однако, если $\alpha > 1$, то правая часть не однозначна и тогда говорят, что p имеет *разветвленное* значение. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\tilde{\omega} \neq \frac{d\eta}{dz}$$

тождественно. *Изолированные* значения z, для которых $\tilde{\omega}$ и $\frac{d\eta}{dz}$ равны, исключаются.

Пусть

$$\tilde{\omega} - \frac{d\eta}{dz} = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$c_r = c_r^{(0)} + c_r^{(1)}(z - z_0) + c_r^{(2)}(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (r \geqslant k),$$

тогда, если

$$w-\eta(z)=W^{\alpha}, \qquad (\alpha \geqslant 2)$$

то

$$\begin{aligned}\alpha W^{\alpha-1}\frac{dW}{dz} &= a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots\\ &+\{c_k^{(0)}+c_k^{(1)}(z-z_0)+c_k^{(2)}(z-z_0)+\ldots\}W^k\\ &+\{c_{k+1}^{(0)}+c_{k+1}^{(1)}(z-z_0)+c_{k+1}^{(2)}(z-z_0)^2+\ldots\}W^{k+1}+\ldots;\end{aligned}$$

правая часть этого уравнения аналитическая для достаточно малых значений $z-z_0$ и W, следовательно

$$\frac{dz}{dW}=\frac{\alpha}{a_0}W^{\alpha-1}+\text{высшие члены},$$

а это уравнение имеет единственное аналитическое решение вида

$$z-z_0=\mathbf{P}_{\alpha}(W).$$

Обращая это уравнение, получим

$$W=\mathbf{P}_1\{(z-z_0)^{\frac{1}{\alpha}}\},$$

а первоначальное уравнение будет иметь решение

$$\begin{aligned}w &= \eta(z)+\mathbf{P}_1\{(z-z_0)^{\frac{1}{\alpha}}\}^{\alpha}\\ &= \eta(z)+\mathbf{P}_{\alpha}\{z-z_0)^{\frac{1}{\alpha}}\}\\ &= \eta(z)+(z-z_0)\{\gamma_0+\gamma_1(z-z_0)^{\frac{1}{\alpha}}+\gamma_2(z-z_0)^{\frac{2}{\alpha}}+\ldots\}.\end{aligned}$$

Следовательно параметрическая точка разветвления появляется, когда уравнение

$$\tilde{\omega}=\frac{d\eta}{dz}$$

не удовлетворяется тождественно. Таким образом для отсутствия параметрических точек разветвления необходимо следующее:

Если $p=\tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2,\ldots$ — *кратные корни* $F(z,\eta,p)=0$, *соответствующие точкам разветвления* p, *то*

$$\frac{d\eta}{dz}=\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=\ldots$$

тождественно.

Рассмотрим далее условие

$$\tilde{\omega}=\frac{d\eta}{dz}.$$

тождественно. Уравнение в данном случае примет вид

$$\begin{aligned}\alpha W^{\alpha-1}\frac{dW}{dz} &= \{c_k^{(0)}+c_k^{(1)}(z-z_0)+c_k^{(2)}(z-z_0)^2+\ldots\}W^k+\\ &+\{c_{k+1}^{(0)}+c_{k+1}^{(1)}(z-z_0)+c_{k+1}^{(2)}(z-z_0)^2+\ldots\}W^{k+1}+\ldots.\end{aligned}$$

Решение очевидно, именно $W=0$ или

$$w=\eta(z).$$

Это *особое решение* уравнения, возникшее в виде корня p-дискриминанта.

Кроме указанного могут быть еще и другие решения; рассмотрим эти решения (a) при $\alpha-1>k$ и (b) при $\alpha-1\leqslant k$.

При $\alpha-1>k$ пусть $\alpha-1=k+r$; уравнение может быть разделено на W^k, тогда оно примет вид

$$\alpha W^r\frac{dW}{dz}=c_k^{(0)}+\text{члены с } W \text{ и } (z-z_0),$$

где $r\geqslant 1$ и $c_k^{(0)}\neq 0$, когда z_0 не является одной из фиксированных особых точек уравнения. Так

$$\frac{dz}{dW}=\frac{\alpha}{c_k^{(0)}}W^r+\text{высшие члены}$$

— уравнение, имеющее аналитическое решение

$$z=z_0+\mathbf{P}_{r+1}(W),$$

которое в свою очередь приводит к

$$W=\mathbf{P}_1\left\{(z-z_0)^{\frac{1}{r+1}}\right\},$$

откуда решение первоначального уравнения принимает вид

$$w=\eta(z)+\mathbf{P}_a\left\{(z-z_0)^{\frac{1}{r+1}}\right\},$$

а поскольку $r\geqslant 1$, то это решение всегда имеет перемещающуюся точку разветвления.

При $\alpha-1\leqslant k$ пусть

$$k=\alpha+s-1 \qquad (s\geqslant 0).$$

После деления на $W^{\alpha-1}$ уравнение принимает вид

$$\alpha\frac{dW}{dz}=c_k^{(0)}W^s+\text{высшие члены.}$$

В данном случае $\frac{dW}{dz}$ — аналитическая функция W и $z-z_0$, следовательно имеется аналитическое решение

$$W=\mathbf{P}_1(z-z_0).$$

Если $s>0$, то очевидным решением будет $W=0$, а, согласно фундаментальной теореме существования, оно является единственным решением, обращающимся в нуль при $z=z_0$. Так, особое решение

$$w=\eta(z)$$

единственное при $s>0$.

Если $s=0$, то существует аналитическое решение

$$W=\frac{c_k^{(0)}}{\alpha}(z-z_0)+\mathbf{P}_2(z-z_0),$$

а решение первоначального уравнения будет

$$w=\eta(z)+\mathbf{P}_{\alpha}(z-z_0);$$

оно не имеет точки разветвления при $z=z_0$.

Следовательно *условие* $k\geqslant\alpha-1$ *необходимо для отсутствия перемещающихся точек разветвления.*

13·5. Случай (IV). В данном случае $w=\eta(z)$ — решение, общее для обоих уравнений

$$D(z,\ w)=0,\quad A_0(z,\ w)=0,$$

а уравнение

$$F(z,\ w,\ p)=0$$

имеет кратный бесконечный корень. Из корней $p_1,\ p_2,\ldots,p_\lambda$ уравнения

$$F(z,\ w,\ p)=0,$$

которые становятся бесконечными при $w=\eta(z)$, пусть $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_\nu$ образуют цикл порядка $\alpha\ (\geqslant 1)$; тогда p_1 может быть выражено в виде

$$p_1=\{w-\eta(z)\}^{-\frac{k}{\alpha}}\left[c_0+c_1\{w-\eta(z)\}^{\frac{1}{\alpha}}+c_2\{w-\eta(z)\}^{\frac{2}{\alpha}}+\ldots\right],$$

где коэфициенты c зависят от z, а k — положительное целое число, выбранное таким образом, что c_0 не равно тождественно нулю. Причем, как и выше, такое значение z_0, для которого

$$c_0^{(0)}=c_0(z_0)\neq 0.$$

Пусть

$$\{w-\eta(z)\}=W^{\alpha},$$

при этом уравнение примет вид

$$\alpha W^{\alpha-1}\frac{dW}{dz}=-\frac{d\eta}{dz}+W^{-k}\left\{c_0+c_1W+c_2W^2+\ldots\right\}$$

или

$$\frac{dz}{dW}=\alpha W^{k+\alpha-1}\left\{-W^k\frac{d\eta}{dz}+c_0+c_1W+\ldots\right\}^{-1}$$

$$=\frac{\alpha}{c_0^{(0)}}W^{k+\alpha-1}+\text{высшие члены}.$$

Поскольку $k+\alpha-1>0$, это уравнение имеет единственное аналитическое решение

$$z-z_0=\mathrm{P}_{k-\alpha}(W),$$

откуда, обращая, получим

$$W = P_1\left\{(z-z_0)^{\frac{1}{k+\alpha}}\right\},$$

следовательно

$$w = \eta(z) + P_\alpha\left\{(z-z_0)^{\frac{1}{k+\alpha}}\right\}.$$

Поскольку $k > 0$, решение имеет перемещающуюся точку разветвления, что верно даже, когда $\alpha = 1$; таким образом выражение для p_1 однозначно.

Следовательно *для отсутствия перемещающихся точек разветвления необходимо, чтобы* $A_0(z, w)$ *и* $D(z, w)$ *не имели общего множителя вида* $w - \eta(z)$.

Полученные условия могут быть сформулированы следующим образом: для непоявления перемещающихся точек разветвления необходимы следующие условия.

(A) *Коэфициент* $A_0(z, w)$ *не зависит от* w, *следовательно он приводится к функции только* z *или к постоянной* (§§ 13·3, 13·5). Уравнение может быть разделено на A_0, тогда оно примет вид

$$p^m + \psi_1(z, w)p^{m-1} + \ldots + \psi_{m-1}(z, w)p + \psi_m(z, w) = 0,$$

где коэфициенты ψ — полиномы от w и аналитические, за исключением изолированных особых точек относительно z.

(B) Если $w = \eta(z)$ — корень $D(z, w) = 0$, а $p = \bar{\omega}(z)$ — кратный корень $F(z, \eta, p) = 0$, так что соответствующий корень $F(z, w, p) = 0$, рассматриваемый в качестве функции от $w - \eta(z)$, ограничен, то (§ 13·41)

$$\bar{\omega}(z) = \frac{d\eta}{dz}.$$

(C) *Если порядок любой ветви равен* α, *так что уравнение получается вида*

$$\frac{d}{dz}\left\{w - \eta(z)\right\} = c_k\left\{w - \eta(z)\right\}^{\frac{k}{\alpha}},$$

то (§ 13·41) $k \geqslant \alpha - 1$.

13·6. Зависимая переменная, бесконечная в начале. Чтобы рассмотреть возможность обращения зависимой переменной в точке разветвления в бесконечность, допустим, что

$$w \to \infty, \text{ когда } z \to z_0.$$

Произведем подстановку

$$w = W^{-1}$$

так, чтобы

$$W \to 0, \text{ когда } z \to z_0,$$

и напишем

$$P = \frac{dW}{dz} = -\frac{p}{W^2};$$

тогда уравнение примет вид

$$P^m - \psi_1(z, W^{-1})W^2 P^{m-1} + \ldots + (-1)^m \psi_m(z, W^{-1}) W^{2m} = 0.$$

Чтобы коэфициент каждой степени P был рациональным относительно W, при коэфициенте P^m, равном единице, необходимо (и достаточно), чтобы $\psi_1(z, w)$, $\psi_2(z, w), \ldots, \psi_m(z, w)$ были не больше степени $2, 4, \ldots, 2_m$ относительно w. При $m = 1$, уравнение приводится к уравнению Риккати.

Таким образом, в дополнение к условию (A) предыдущего параграфа, должны быть введены следующие условия:

(A′) $\psi_r(z, w)$. *степени не больше* $2r$ *относительно* w.

Допустим, что $D'(z, w)$ является P-дискриминантом преобразованного уравнения. Если дискриминант $D(z, w)$ первоначального уравнения имеет множитель $w - \eta(z)$, то $D'(z, W)$ будет иметь соответствующий множитель $W - 1/\eta(z)$, следовательно, если условия (B) и (C) удовлетворены для первоначального уравнения, то они будут удовлетворены и для преобразованного уравнения. Но в дополнение к этим множителям дискриминант $D'(z, w)$ может содержать также в качестве множителя W. Более точно: если условие (A′) удовлетворено, то $D(z, w)$ не больше степени $2m(m-1)$ относительно w, но может быть и более низкой степени, например, $2m(m-1) - s$. В этом случае $D'(z, w)$ будет содержать множитель W^s.

Этот последний случай должен быть рассмотрен отдельно; он приводит к специальным условиям отсутствия точек разветвления [1]. Если P, выведенное из преобразованного уравнения и рассматриваемое как функция W, имеет точку разветвления соответствующую $W = 0$, то (условие B) $P = 0$ при $W = 0$. Отсюда следует, что W должно быть множителем члена $W^{2m}_{\psi m}(z, W^{-1})$. Но поскольку W является также множителем дискриминанта, он должен быть также множителем предыдущего коэфициента

$$W^{2m-2}\psi_{m-1}(z, W^{-1}).$$

Отсюда следует, как и в § 13·41, что уравнение относительно P, дает

$$P = c_k^{(0)} W^{\frac{k}{\alpha}} + \text{высшие члены},$$

[1] Необходимость специального рассмотрения для этого случая была впервые указана Хилом и Берри [Proc. London, Math. Soc. (2), 9 (1910), 231]. Они дают следующее уравнение

$$\left[\frac{d\{w - f(z)\}}{dz}\right]^m = \{w - f(z)\}^{m/r}$$

где m и r — целые числа, простые относительно друг друга, и $r < m$. Уравнение удовлетворяет условиям (A), (A′), (B), (C), но, как показывает решение

$$w = f(z) + \left\{\frac{r}{m}(z_0 - z)\right\}^{-m/r},$$

оно имеет перемещающуюся точку разветвления, для которой w бесконечна.

где $c_k^{(0)}$ — постоянная, не равная нулю. Чтобы это выражение для P дало решение, не имеющее перемещающейся точки разветвления, необходимо, чтобы

$$k \geqslant \alpha - 1.$$

Полученные два новых условия могут быть сформулированы следующим образом.

(B′) *Если уравнение преобразовано подстановкой $w = W^{-1}$ и W — множитель дискриминанта преобразованного уравнения, то W должно быть множителем последних двух коэфициентов преобразованного уравнения, когда P — многозначная функция W.*

(C′) Если порядок разветвления α, а уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{dW}{dz} = c_k^{(0)} W^{\frac{k}{\alpha}},$$

то $k \geqslant \alpha - 1$.

Условия (A), (B), (C) и дополнительные условия (A′), (B′), (C′) необходимы и очевидно достаточны для отсутствия перемещающихся точек разветвления.

Рассуждая аналогично § 12·5 для уравнения первой степени, нетрудно доказать, что решение уравнения

$$p^m + \psi_1(z, w)\, p^{m-1} + \ldots + \psi_{m-1}(z, w)\, p + \psi_m(z, w) = 0$$

не имеет перемещающихся существенных особенностей[1]. Это верно, независимо от того, имеет ли уравнение перемещающиеся точки разветвления или нет.

13·7. Уравнения, в которые z входит неявно. Рассмотрим случай, когда уравнение вида[2]

$$p^m + A_1(w)\, p^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(w)\, p + A_m(w) = 0,$$

где коэфициенты A — полиномы от w с постоянными коэфициентами, а полином A_r — степени не выше $2r$. Далее, пусть уравнение таково, что его решения не имеют перемещающихся точек разветвления.

Уравнение не допускает фиксированных особых точек, за исключением точки в бесконечности, так как такие точки являются особенностями коэфициентов A, а эти коэфициенты не зависят от z.

Пусть $w = \varphi(z)$ будет любым решением уравнения. Тогда, поскольку уравнение не изменится при подстановке $z + c$ вместо z, где c — произвольная постоянная, то решение будет иметь вид

$$w = \varphi(z + c).$$

[1] Painlevé, Leçons, 56.

[2] Brio and Bouquet, J. Éc. Polyt. (1) 36 (1856), 199.

Поскольку это решение содержит произвольную постоянную, оно является общим решением.

Следовательно, так как все решения уравнения свободны от точек разветвления и существенных особенностей в конечной части плоскости z, такие решения имеют свойства рациональных функций. Таким образом любое решение, продолженное аналитически от точки z_0 вдоль любой замкнутой простой кривой в плоскости z, возвращается к своему начальному значению в z_0, следовательно точка в бесконечности не может быть точкой разветвления. Однако она может быть существенно особой точкой.

Уравнение Риккати, когда z входит неявно, может быть проинтегрировано элементарными методами. Пусть уравнение будет

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + a_1 w + a_2 w^2,$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные; переменные разделяются следующим образом

$$\frac{dw}{a_2 w^2 + a_1 w + a_0} = dz.$$

Обозначим через ρ_1 и ρ_2 корни уравнения $a_2 w^2 + a_1 w + a_0$, тогда, если $\rho_2 \neq \rho_1$, то

$$\frac{dw}{a_2(w - \rho_1)(w - \rho_2)} = dz,$$

откуда

$$\frac{w - \rho_1}{w - \rho_2} = Ce^{a_2(\rho_1 - \rho_2)z},$$

или при $\rho_2 = \rho_1$

$$w - \rho_1 = \frac{1}{C - a_2 z},$$

где C — произвольная постоянная в каждом случае.

13·8. Биноминальные уравнения степени m. Рассмотрим теперь уравнения типа[1]

(A) $$p^m + A(z, w) = 0,$$

которые полагаем неприводимыми. Допустим, что все условия для отсутствия перемещающихся точек разветвления выполнены. В частности, функция $A(z, w)$ будет полиномом степени не больше $2m$; предположим, что степень полинома меньше $2m$ и что он не может быть точно разделен на w. Напишем $w = W^{-1}$, тогда уравнение примет вид

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^m + (-1)^m W^{2m} A(z, W^{-1}) = 0;$$

[1] Brio and Bouquet, Fonctions Elliptiques, стр. 388; для простейшего типа $p^m = f(w)$, см. Brio and Bouquet, C. R. Acad. Sc. Paris, 40 (1855), 342.

но здесь член $W^{2m}A(z, W^{-1})$ степени $2m$ относительно W. С другой стороны, если $A(z, w)$ степени меньше $2m$ относительно w и содержит множитель w, пусть a будет такой, при которой $w-a$ не является множителем. Тогда, принимая $w-a=W^{-1}$, получим уравнение, содержащее W^{2m}. Следовательно, мы не теряем в общности, предполагая, что $A(z, w)$ точно степени $2m$ относительно w.

Поскольку (A) имеет равные корни, если $A(z, w)=0$, p-дискриминант действительно равен $A(z, w)$. Пусть $w-\eta(z)$ будет множителем $A(z, w)$, тогда $p=0$ будет корнем уравнения

$$p^m + A(z, \eta) = 0.$$

Пусть соответствующий корень (A) будет разветвленным при $w=\eta(z)$. Тогда, согласно условию B (§ 13·5), которое здесь приводится к

$$\frac{d\eta}{dz} = 0,$$

$\eta(z)$ — постоянная.

Далее предположим, что соответствующий корень $A(z, w)$ не разветвлен. Тогда $A(z, w)$ будет содержать в качестве множителя $\{w-\eta(z)\}^{2m}$ или $\{w-\eta(z)\}^m$.

Если $\{w-\eta(z)\}^{2m}$ — множитель, то уравнение примет вид

$$p^m + K(z)\{w-\eta(z)\}^{2m} = 0$$

и будет приводимо, что противоречит сделанному допущению. Если $\{w-\eta(z)\}^m$ — множитель, а остающийся множитель может быть написан в виде $k(z)\{w-\eta_1(z)\}^m$, то уравнение также приводимо. Отсюда, если $\{w-\eta(z)\}^m$ — множитель, то любой другой множитель $w-\eta_1(z)$ может иметь место только до степени меньше m, откуда следует, что значение p, соответствующее $w-\eta_1(z)$, разветвленное, следовательно $\eta_1(z)$ — постоянная.

Рассмотрим сначала случай, когда $A(z,w)$ не содержит множителя $\{w-\eta(z)\}^m$. Уравнение может быть тогда написано в виде

$$p^m + K(z)\Pi(w-a_i)^{\mu_i} = 0,$$

где a_i — постоянная, и

$$\sum \mu_i = 2m,$$

а p может быть разложен в ряд, ведущий член которого равен

$$c(z)(w-a_i)^{\mu_i/m}.$$

Приведем μ_i/m к его низшим членам и напишем k_i/α_i тогда, согласно условию (C) (§ 13·5)

$$k_i \geq \alpha_i - 1$$

или

$$\frac{k_i}{\alpha_i} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha_i} \geqslant \frac{1}{2},$$

поскольку $\alpha_i \geqslant 2$, откуда

$$\mu_i \geqslant \frac{1}{2} m.$$

Следовательно задача нахождения всех возможных типов биномиальных уравнений вида

$$p^m + K(z) F(w) = 0$$

сводится к нахождению последовательностей рациональных чисел $\frac{\mu_i}{m}$ таким образом, чтобы

$$\frac{\mu_i}{m} \geqslant \frac{1}{2}, \quad \sum \frac{\mu_i}{m} = 2.$$

Но, поскольку

$$\frac{\mu_i}{m} - \frac{k_i}{\alpha_i} \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha_i},$$

любая часть $\frac{\mu_i}{m}$, которая меньше единицы, будет вида $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$, где $\alpha \geqslant 2$. Рассмотрим шесть случаев, когда уравнение степени выше первой и неприводимо.

Тип I. Имеется один множитель, показатель которого μ_i превышает m. Пусть остальные показатели (ни один из которых не может превышать m) имеют вид

$$m\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right), \quad m\left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right), \quad \ldots, \quad m\left(1 - \frac{1}{\alpha_r}\right),$$

тогда

$$m\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) + \ldots + m\left(1 - \frac{1}{\alpha_r}\right) < m,$$

откуда

$$r - 1 < \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_r}$$
$$< \frac{1}{2} r,$$

поскольку $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — целые числа больше единицы. Следовательно $r = 1$ и единственно возможным является наличие двух множителей, показатели которых равны $m + 1$ и $m - 1$ соответственно. Уравнение будет иметь вид

I $$p^m + K(z)(w - a_1)^{m+1}(w - a_2)^{m-1} = 0,$$

где m — положительное целое число.

Тип II. Пусть $\mu_1 = m$, тогда, если остальные показатели такие же, как и в предыдущем случае, то

$$m\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) + \ldots + m\left(1 - \frac{1}{\alpha_r}\right) = m,$$

откуда

$$r-1=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\ldots+\frac{1}{\alpha_r}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}r.$$

Здесь могут возникнуть два случая: $r=1$ и $r=2$. Если $r=1$, то уравнение приводится к уравнению первой степени, именно

$$p+K(z)(w-a_1)(w-a_2)=0.$$

Но если $r=2$, то

$$1=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2},$$

откуда $\alpha_1=\alpha_2=2$. Следовательно показатели равны m, $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m$, а уравнение приводимо, если только m не равно 2. Таким образом единственным неприводимым уравнением этого типа является

II $$p^2+K(z)(w-a_1)^2(w-a_2)(w-a_3)=0.$$

Типы III—IV. Все показатели меньше m. Единственными последовательностями чисел вида $\frac{\alpha-1}{\alpha}$, суммы которых равны 2, будут

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}.$$

Эти значения приводят соответственно к четырем типам уравнений.

III $$p^2+K(z)(w-a_1)(w-a_2)(w-a_3)(w-a_4)=0,$$

IV $$p^3+K(z)(w-a_1)^2(w-a_2)^2(w-a_3)^2=0,$$

V $$p^4+K(z)(w-a_1)^3(w-a_2)^3(w-a_3)^2=0,$$

VI $$p^6+K(z)(w-a_1)^5(w-a_2)^4(w-a_3)^3=0,$$

где во всех случаях a_1, a_2, a_3, a_4 — *независимые* постоянные.

Теперь вернемся к случаю, когда имеется множитель $\{w-\eta(z)\}^m$. В этом случае уравнение может быть написано в виде

$$p^m K(z)\{w-\eta(z)\}^m \Pi(w-a_i)^{\mu_i}=0,$$

причем должно быть выполнено условие

$$\mu_i\geqslant\frac{1}{2}m.$$

Поскольку в данном случае $\mu_i<m$, $\sum\mu_i=m$, единственно возможным является наличие двух степеней μ_1 и μ_2 так, чтобы

$$\mu_1=\mu_2=\frac{1}{2}m.$$

Но уравнение теперь приводимо, если только m не равно 2; следовательно единственно возможным уравнением этого типа будет

$$p^2 + K(z)\{w - \eta(z)\}^2 (w - a_2)(w - a_3) = 0,$$

где $a_2 \neq a_3$. Это уравнение является обобщением типа II, к которому оно приводится, когда $\eta(z)$ становится постоянной a_1, отличной от a_2 и a_3.

Эти шесть типов (включая в тип II его обобщенную форму) исчерпывают все случаи, когда биномиальное уравнение

$$p^m + A(z, w) = 0$$

(где $m > 1$, а $A(z, w)$ — точно степени $2m$ относительно w) имеет решения, свободные от перемещающихся точек разветвления.

Каждому из шести основных типов уравнений соответствуют уравнения, в которые w входит в степени не ниже $2m$. Такие уравнения получаются подстановкой $W = (w - a_i)^{-1}$, где $w - a_i$ встречается как множитель в $A(z, w)$. Можно доказать, что приведенный ниже ряд выведенных таким образом уравнений является исчерпывающим. Из заданного основного типа уравнения выводятся новые уравнения.

Тип I	$p^m + K(z)(w - a)^{m-1} = 0,$
	$p^m + K(z)(w - a)^{m+1} = 0.$
Тип II	$p^2 + K(z)(w - a_1)^2 (w - a_2) = 0,$
	$p^2 + K(z)(w - a_1)(w - a_2) = 0.$
Тип III	$p^2 + K(z)(w - a_1)(w - a_2)(w - a_3) = 0.$
Тип IV	$p^3 + K(z)(w - a_1)^2 (w - a_2)^2 = 0.$
Тип V	$p^4 + K(z)(w - a_1)^3 (w - a_2)^3 = 0,$
	$p^4 + K(z)(w - a_1)^3 (w - a_2)^2 = 0.$
Тип VI	$p^6 + K(z)(w - a_1)^5 (w - a_2)^4 = 0,$
	$p^6 + K(z)(w - a_1)^5 (w - a_2)^3 = 0,$
	$p^6 + K(z)(w - a_1)^4 (w - a_2)^3 = 0.$

13 · 81. Интегрирование шести типов биномиальных уравнений. Уравнение типа I может быть написано в виде

$$p^m = \{A(z)\}^m (w - a_1)^{m+1} (w - a_2)^{m-1}.$$

Пусть

$$t^m = \frac{w - a_1}{w - a_2},$$

тогда уравнение преобразуется в

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(a_1 - a_2)}{m} A(z),$$

следовательно его общий интеграл равен

$$\left(\frac{w-a_1}{w-a_2}\right)^{\frac{1}{m}}=C+\frac{(a_1-a_2)}{m}\int A(z)\,dz.$$

Рассмотрим теперь наиболее общее уравнение типа II, которое может быть написано в виде

$$p^2=\{A(z)\}^2\{w-\eta(z)\}^2(w-a_1)(w-a_2).$$

Пусть

$$t^2=\frac{w-a_1}{w-a_2},$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{dt}{dz}=\pm\frac{1}{2}A(z)\left[a_1-\eta(z)-\{a_2-\eta(z)\}t^2\right],$$

что представляет собой случай уравнения Риккати.

Если $\eta(z)$ — постоянная, например η, то, обозначив

$$a_1-\eta=b,\ a_2-\eta=b_2,$$

мы приведем уравнение к виду

$$\frac{dt}{dz}=\pm\frac{1}{2}A(z)(b_1-b_2t^2),$$

которое относительно t интегрируется элементарно.

Интегрирование остальных четырех типов вводит эллиптические функции. В этих уравнениях мы не теряем в общности, заменяя $K(z)$ на -1, так как, поскольку каждое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^m=-K(z)\Pi(w-a_i),$$

подстановка

$$(dz')^m=-K(z)(dz)^m$$

оставляет члены относительно w неизменными. Мы не потеряем также в общности, если будем рассматривать не основное уравнение любого типа, но любое эквивалентное уравнение.

Так, уравнение

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(w-a_1)(w-a_2)(w-a_3)$$

может быть взято для иллюстрации типа III.

Тип IV может быть представлен уравнением

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^3=(w-a_1)^2(w-a_2)^2.$$

Пусть

$$(w-a_1)(w-a_2)=t^3,\ \frac{dw}{dz}=t^2,$$

тогда, диференцируя, получим

$$3t^2 \frac{dt}{dz} = (2w - a_1 - a_2)\, t^2$$

или

$$\frac{dt}{dz} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}.$$

Тип V может быть представлен уравнением

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^4 = (w - a_1)^3 (w - a_2)^2.$$

Пусть $w = t^2 + a_1$, тогда это уравнение приводится к

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{2} \sqrt{t(t^2 + a_1 - a_2)}.$$

Тип VI может быть представлен уравнением

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^6 = (w - a_1)^4 (w - a_2)^3.$$

Пусть $w = t^3 + a_1$, тогда это уравнение приводится к

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{3} \sqrt{t^3 + a_1 - a_2}.$$

Следовательно в любом случае уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{dt}{dz} = \sqrt{P_3(t)},$$

где $P_3(t)$ — кубическая функция t. Это диференциальное уравнение может быть проинтегрировано только при помощи эллиптических функций[1].

Линейным преобразованием это уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{dt}{dz} = \sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3},$$

откуда

$$t = \wp(z + \alpha,\ g_2,\ g_3),$$

где α — произвольная постоянная.

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 20 · 22.

ГЛАВА XIV

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

14 · 1. Сущность проблемы. Изучение однозначных функций, определяемых диференциальными уравнениями первого порядка, частично рассмотренных в предшествующих главах, может считаться достаточно полным. Относительная простота исследования уравнений, в которые p и w входят рационально, объясняется отсутствием перемещающихся существенных особенностей. В уравнениях второго и высших порядков даже простейшего вида могут возникнуть перемещающиеся существенные особенности, что значительно усложняет задачу.

Рассмотрим простой пример: уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \cdot \frac{2w-1}{w^2+1}$$

имеет общее решение

$$w = \operatorname{tg}\{\log(Az - B)\},$$

где A и B — произвольные постоянные.

Когда z стремится к B/A произвольно или по определенному пути, w не стремится к пределу (конечному или бесконечному). Действительно из точки B/A, являющейся одновременно точкой разветвления и существенной особенностью, возникает бесконечное число ответвлений функции. Поскольку эта точка зависит от постоянных интегрирования, она является перемещающейся особенностью.

Нужно определить, существуют ли уравнения вида

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = F(z, w, p),$$

где функция F — рациональная относительно p, алгебраическая относительно w и аналитическая относительно z, со всеми критическими точками (т. е. точками разветвления и существенными особенностями) фиксированными[1]

Более общим является уравнение второго порядка

$$F(z, w, p, q) = 0 \qquad \left(q \equiv \frac{d^2w}{dz^2}\right),$$

но это обобщение не имеет сейчас большого значения.

---

[1] Picard, C. R. Acad Sc. Paris, 104 (1887), 41; 110 (1890), 887, J. de Math. (4). 5 (1889), 263; Acta Math., 17 (1893), 297: Painlevé, C. R. 116 (1893), 88, 173, 362, 566; 117 (1893), 211, 611, 686: 126 (1898), 1185, 1329, 1697; 127 (1898), 541, 945; 129 (1899), 750, 949; 133 (1901), 910; Bull. Soc. Math. France, 28 (1900), 201: Acta Math., 25 (1902), 1; Gambier, C. R. 142 (1906). 266, 1403, 1497; 143 (1906), 741: 144 (1907), 827, 962; Acta Math., 33 (1910), 1.

14·11. Общее решение как функция постоянных интегрирования. В уравнениях второго порядка важно различать, каким образом постоянные интегрирования входят в решение. Фундаментальные теоремы существования показывают, что если критические точки фиксированные, а z не является критической точкой, то решение полностью и единственным образом определяется значениями w_0 и w'_0, которые зависимая переменная w и ее первая производная w' принимают в точке z_0. Решение может рассматриваться как функция w_0 и w'_0, коэфициенты которых — функции $z - z_0$.

Могут возникнуть три случая:

(I) Решение может быть алгебраической или рациональной функцией от w_0 и w_0' или от эквивалентной пары постоянных интегрирования; так например, уравнение

$$w'' + 3ww' + w^3 = q(z)$$

имеет общее решение $w = u'/u$, где u — общее решение линейного уравнения третьего порядка.

$$u''' = q(z)\, u.$$

Поскольку

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3,$$

где u_1, u_2, u_3 образуют фундаментальную систему линейного уравнения, а A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные, общее решение уравнения для w будет иметь вид

$$w = \frac{u_1' + Bu_2' + Cu_3'}{u_1 + Bu_2 + Cu_3}$$

и будет рациональной функцией двух постоянных интегрирования B и C.

(II) Общее решение не является алгебраической функцией обеих постоянных интегрирования, но, тем не менее, уравнение допускает первый интеграл, в который постоянная интегрирования входит алгебраически. В данном случае общее решение является *полутрансцендентной* функцией постоянных интегрирования. Так, первый интеграл

$$w'' + 2ww' = q(z)$$

равен

$$w' + w^2 = \int q(z)\, dz + A$$

и линейно зависит от постоянной A. Общее решение, следовательно, является полутрансцендентной функцией A и второй постоянной интегрирования.

(III) (I) и (II) не выполнено. Общее решение в данном случае является *существенно-трансцендентной* функцией обеих постоянных интегрирования.

Как источники новых трансцендентных функций, т. е. функций, отличных от трансцендентных функций, определяемых уравнениями первого порядка с алгебраическими коэфициентами, могут рассматриваться только уравнения, которые входят в последнюю категорию.

14 · 12. Метод решения. Уравнение (A) может быть заменено системой

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = p, \\ \dfrac{dp}{dz} = F(z, w, p), \end{cases}$$

или, в более общем случае, системой вида

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = H(z, w, u), \\ \dfrac{du}{dz} = K(z, w, u). \end{cases}$$

Предположим, что H и K — функции параметра α, аналитические относительно α во всей области D, с внутренней точкой $\alpha = 0$. Примем следующую лемму: *если общее решение диференциальной системы однородно относительно z для всех значений α в области D,* за исключением $\alpha = 0$, *то оно будет однородно также и для* $\alpha = 0$.

Пусть $w(z, \alpha)$, $u(z, \alpha)$ будут двумя решениями системы, соответствующими начальным условиям

$$z = z_0, \quad w = w_0, \quad u = u_0.$$

Пусть C будет замкнутым контуром в плоскости z, начинающимся и кончающимся в z_0, на котором $w_0(z)$ и $u_0(z)$ — аналитические функции, причем

$$w_0(z) = w(z, 0), \quad u_0(z) = u(z, 0).$$

Тогда, если функции $w(z, \alpha)$ и $u(z, \alpha)$ разложить в ряды по возрастающим степеням параметра α

$$w(z, \alpha) = w_0(z) + \alpha w_1(z) + \alpha^2 w_2(z) + \ldots,$$

$$u(z, \alpha) = u_0(z) + \alpha u_1(z) + \alpha^2 u_2(z) + \ldots,$$

то эти ряды сходятся для z, лежащих на C, и для достаточно малых значений $|\alpha|$. Пусть в то время как z описывает контур C, $w_\nu(z)$ увеличится на k_ν, тогда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \alpha^\nu = 0$$

для $0 < |\alpha| \leqslant \alpha_0$, следовательно

$$k_\nu = 0$$

для всех значений ν. Отсюда следует, что функции $w_0(z)$, $w_1(z),\dots$ и аналогично $u_0(z)$, $u_1(z)\dots$ однозначны[1].

Решение распадается на две части. Сначала получается последовательность необходимых условий для отсутствия перемещающихся критических точек, затем выводится последовательность уравнений, удовлетворяющих этим необходимым условиям; прямым интегрированием или каким-либо другим способом можно показать, что общие решения этих уравнений свободны от перемещающихся критических точек, доказывая таким образом достаточность условий. Для получения последовательности необходимых условий в систему (B) вводится параметр α так, чтобы новая система имела те же фиксированные точки, что и (B), и, кроме того, была интегрируема при $\alpha = 0$. Функции $w_0(z)$, $w_1(z),\dots$, $u_0(z)$, $u_1(z),\dots$, определяются в квадратурах; для отсутствия перемещающихся критических точек в данной системе необходимо, чтобы все критические точки этих функций были фиксированными.

Пусть

$$u = g\ (z_0,\ w_0)$$

будет полюсом одной или обеих функций $H(z_0, w_0, u), K(z_0, w_0, u)$. Мы не потеряем в общности, если примем, что $g(z, w)$ равно нулю, поскольку $u - g(z, w)$ может быть заменено новой переменной U. В данном случае система (B) может быть записана в виде

$$u^m \frac{dw}{dz} = H_0(z,\ w) + uH_1(z,\ w) + \dots,$$

$$u^n \frac{du}{dz} = K_0(z,\ w) + uK_1(z,\ w) + \dots,$$

где хотя бы одно из чисел m, n больше нуля.

Допустим, что $m < n + 1$, где n больше нуля, и введем параметр α

$$z = z_0 + \alpha^{n+1}Z,\quad w = w_0 + \alpha^{n-m+1}W,\quad u = \alpha U,$$

тогда система примет вид

$$\begin{cases} U^m \dfrac{dW}{dZ} = H_0(z_0,\ w_0) + O(\alpha), \\ U^n \dfrac{dU}{dZ} = K_0(z_0,\ w_0) + O(\alpha). \end{cases}$$

За исключением случая $\alpha = 0$, эта новая система имеет фиксированные критические точки при фиксированных точках (B). При $\alpha = 0$ система принимает вид

$$U^m \frac{dW}{dZ} = H_0(z_0,\ w_0),\qquad U^n \frac{dU}{dZ} = K_0(z_0,\ w_0)$$

[1] Достаточно доказать, что функции $w(z,\ \alpha)$, $u(z,\ \alpha)$ однозначны относительно z для бесконечной последовательности $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots$ значений α, имеющих $\alpha = 0$ как предельную точку.

и имеет решение

$$U = \{(n+1)K_0 Z + A\}^{\frac{1}{n+1}},$$

где A — произвольная постоянная. Решение системы при $\alpha = 0$ имеет следовательно перемещающуюся точку разветвления и, согласно лемме, не может иметь фиксированных критических точек при $\alpha \neq 0$. Система (В) имеет решения с перемещающимися критическими точками при $m < n+1$.

Предположим, что $m \geqslant n+1$. Пусть $m = n+1$ и одновременно $K_0(z, w)$ и другие функции $K(z, w)$ равны нулю. Напишем

$$z = z_0 + \alpha^m Z, \quad u = \alpha U,$$

тогда система примет вид

$$\begin{cases} U^m \dfrac{dw}{dZ} = H_0(z_0, w) + O(\alpha), \\ U^{m-1} \dfrac{dU}{dZ} = K_0(z_0, w) + O(\alpha); \end{cases}$$

если

$$H_0(z_0, w) = \eta(w), \quad K_0(z_0, w) = \varkappa(w),$$

то система приводится, при $\alpha = 0$, к виду

$$\begin{cases} U^m \dfrac{dw}{dZ} = \eta(w), \\ U^{m-1} \dfrac{dU}{dZ} = \varkappa(w). \end{cases}$$

Эта новая система может быть проинтегрирована в квадратурах; чтобы первоначальная система не имела критических точек, необходимо, чтобы точки разветвления решений этой приведенной системы были фиксированными.

Применяя эти условия ко всем полюсам $H(z, w, u)$ и $K(z, w, u)$ вида $u = g(z, w)$ или $w = h(z)$ и к значениям $u = \infty$ и $w = \infty$, получим последовательность условий, необходимых для отсутствия перемещающихся точек разветвления общего решения. Тот же процесс может быть приложен и к любым значениям $u = g(z)$, $w = h(z)$, которые делают H или K неопределенными, так же как и к особым точкам H и K, если они имеются.

14 · 2. Применение метода. Рассмотрим уравнение

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} = R(z, w, p),$$

где R — рациональная функция w и p с коэфициентами, аналитическими относительно z. Предположим, что R неприводимо и поэтому может быть выражено в виде

$$R(z, w, p) = \frac{P(z, w, p)}{Q(z, w, p)},$$

где P и Q — полиномы от p, не имеющие общего множителя.

Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = p, \\ \dfrac{dp}{dz} = R(z, w, p). \end{cases}$$

В данном случае m равно нулю; если R имеет полюс $p = g(z, w)$, то условие $m \geqslant n+1$ не может быть удовлетворено. Отсюда следует, что для отсутствия критических точек R не может иметь полюса и должно быть полиномом от p; пусть оно будет степени q.

Но (C) также эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{u}, \\ u^{q-2}\dfrac{du}{dz} = -u^q R(z, w, u^{-1}) = R_0(z, w) + uR_1(z, w) + \ldots \end{cases}$$

В данном случае $m = 1$, $n = q - 2$, следовательно неравенство $m \geqslant n+1$ приводит к условию, что q равно максимум 2. Следовательно, если общее решение (C) не имеет перемещающихся критических точек, то необходимо, чтобы оно имело вид

(D) $$\frac{d^2w}{dz^2} = L(z, w)p^2 + M(z, w)p + N(z, w),$$

где L, M и N — рациональные функции w с коэфициентами, аналитическими относительно z.

Пусть

$$z = z_0 + \alpha Z, \quad w = \alpha W,$$

тогда (D) эквивалентно системе, которая приводится, при $\alpha = 0$, к

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{1}{u}, \\ \dfrac{du}{dZ} = -L(z_0\, W), \end{cases}$$

а эта система в свою очередь эквивалентна уравнению

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 L(z_0, W).$$

Следовательно необходимо найти уравнения вида

(E) $$\frac{d^2w}{dz^2} = p^2 l(w),$$

решения которых имели бы только фиксированные точки разветвления.

14·21. Первое необходимое условие отсутствия перемещающихся критических точек. Сначала покажем, что функция $l(w)$

имеет только простые полюсы; пусть $w = w_1$ будет полюсом порядка r. Поскольку этот полюс можно заставить совпасть с началом при помощи трансляции, что не изменяет формы уравнения, w_1 может быть принята равной нулю. Уравнение тогда будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = p, \\ \dfrac{dp}{dz} = p^2 w^{-r}\{k + O(w)\}, \end{cases}$$

где k — постоянная. Напишем

$$w = \alpha W, \quad p = \alpha^r P,$$

тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dz} = \alpha^{r-1} P, \\ \dfrac{dP}{dz} = \dfrac{kP^2}{W^r} + O(\alpha). \end{cases}$$

При расположении по возрастающим степеням α, решение системы будет иметь вид

$$W = W_0 - \frac{\alpha^{r-1}}{k} W_0^r \log\left(\frac{z + C}{z_0 + C}\right) + O(\alpha^r),$$

$$P = -\frac{W_0^r}{k(z + C)} + O(\alpha),$$

где

$$C = -z_0 - \frac{W_0^r}{P_0 k},$$

а $r > 1$. Следовательно, когда $r > 1$, критические точки не фиксированны.

При $r = 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dz} = P, \\ \dfrac{dP}{dz} = \dfrac{kP^2}{W} + O(\alpha); \end{cases}$$

при $\alpha = 0$ эта система имеет решение

$$W = (Az + B)^{\frac{1}{1-k}} \text{ при } k \neq 1$$

или

$$W = e^{Az + B} \qquad \text{при } k = 1;$$

которое не имеет перемещающихся точек разветвления, за исключением

$$k = 1 + \frac{1}{n} \text{ или } k = 1,$$

где n — целое число, положительное или отрицательное.

Уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = p^2 l(w)$$

может быть проинтегрировано один раз; первый интеграл равен

$$p = Ce^{\int l(w) dw}.$$

При полюсе $w = w_1$ главная часть $l(w)$ должна иметь вид

$$\frac{1 + \frac{1}{n_1}}{w - w_1},$$

поэтому к выражению $e^{\int l(w) dw}$ добавляется множитель $(w - w_1)^{1 - \frac{1}{n_1}}$. Пусть ν будет наименьшим общим знаменателем показателей всех таких множителей, тогда, если

$$\text{(F)} \qquad p^\nu = \varphi(w),$$

функция $\varphi(w)$ не будет иметь других особенностей, кроме полюсов в конечной части плоскости. Преобразование $w = W^{-1}$ показывает, что $\varphi(w)$ имеет полюс в бесконечности и является рациональной функцией. Таким образом проблема зависит от определения уравнений типа (F), решения которых не имеют перемещающихся особых точек; этот вопрос был рассмотрен в § 13·8. После диференцирования (F) отождествляется с (E), если

$$l(w) = \frac{\varphi'(w)}{\nu\varphi(w)},$$

следовательно изучение типов уравнения (F), не имеющих перемещающихся точек разветвления, приводит к заключению, что $l(w)$ должно быть или тождественно нулю или одного из следующих типов:

Тип I $\qquad \nu = m, \quad l(w) = \dfrac{m+1}{m(w - a_1)} + \dfrac{m-1}{m(w - a_2)} \qquad (m \geqslant 1),$

Тип III $\qquad \nu = 2, \quad l(w) = \dfrac{\frac{1}{2}}{w - a_1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{w - a_2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{w - a_3} + \dfrac{\frac{1}{2}}{w - a_4},$

Тип IV $\qquad \nu = 3, \quad l(w) = \dfrac{\frac{2}{3}}{w - a_1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{w - a_2} + \dfrac{\frac{2}{3}}{w - a_3},$

Тип V $\qquad \nu = 4, \quad l(w) = \dfrac{\frac{3}{4}}{w - a_1} + \dfrac{\frac{3}{4}}{w - a_2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{w - a_3},$

Тип VI $\qquad \nu = 6, \quad l(w) = \dfrac{\frac{5}{6}}{w - a_1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{w - a_2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{w - a_3}.$

Постоянные a_1, a_2, a_3, a_4 могут иметь любые значения. Уравнения типа II исключаются, так как для настоящего анализа они могут рассматриваться, как вырожденный случай типа III.

Способ получения $l(w)$ из $L(z, w)$ приводит к заключению, что *для того, чтобы решения уравнения*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = L(z, w)\,p^2 + M(z, w)\,p + N(z, w)$$

были свободны от перемещающихся критических точек, необходимо, чтобы функция $L(z, w)$ была тождественно равна нулю или принадлежала к одному из пяти основных перечисленных типов, где a_1, a_2, a_3, a_4 должны рассматриваться как функции z.

14·22. Второе необходимое условие для отсутствия перемещающихся критических точек. Необходимо показать, что полюсы $M(z, w)$ и $N(z, w)$, рассматриваемые как функции w, — простые и входят в полюсы $L(z, w)$. Пусть $w = h(z)$ будет полюсом порядка j функции $M(z, w)$ и полюсом порядка k функции $N(z, w)$. Поскольку подстановка $W = w - h(z)$, не изменяя существенно уравнения, изменяет рассматриваемый полюс в функции $W = 0$, можно принять, что $h(z)$ тождественно равно нулю. Уравнение может быть тогда написано в распространенной форме

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{p^2}{w}\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right) + O(w)\right\} + \frac{p}{w^j}\{M(z) + O(w)\} + $$
$$+ \frac{k}{w^k}\{N(z) + O(w)\},$$

где n — положительное или отрицательное целое число, отличное от 0 или 1, если $w = 0$ — полюс функции $L(z, w)$, и $n = 1$, если $w = 0$ не является полюсом $L(z, w)$.

Произведем следующее преобразование

$$w = \alpha W, \quad z = z_0 + \alpha^j Z, \text{ если } k \leqslant 2j - 1,$$

или

$$w = \alpha W, \quad z = z_0 + \alpha^{\frac{1}{2}(k+1)} Z, \text{ если } k \geqslant 2j - 1,$$

и напишем

$$P = \frac{dW}{dz}, \quad M_0 = M(z_0) \quad N_0 = N(z_0).$$

Тогда

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \frac{P^2}{W}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{M_0P}{W^j} + O(\alpha), \qquad \text{если } k < 2j - 1,$$

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \frac{P^2}{W}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{N_0}{W^k} + O(\alpha), \qquad \text{если } k > 2j - 1,$$

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \frac{P^2}{W}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{M_0P}{W^j} + \frac{N_0}{W^k} + O(\alpha), \text{ если } k = 2j - 1.$$

Третье из этих уравнений содержит оба других, если $\alpha = 0$, и если M_0 или N_0 также равно нулю. Уравнение

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \frac{P^2}{W}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{M_0 P}{W^j} + \frac{N_0}{W^{2j-1}},$$

где (при $M_0 = 0$), $2j-1$ должно рассматриваться как символ, принятый вместо положительного целого числа k, следовательно $2j$ — целое число не меньше 2 — может быть заменено системой

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{du} = -\dfrac{W}{u\left(j - \dfrac{1}{n} + M_0 u + N_0 u^2\right)}, \\ \dfrac{dZ}{dW} = uW^{j-1}. \end{cases}$$

Допустим, что $j > 1$, тогда, поскольку n — целое число, $j \neq \frac{1}{n}$. Более того, M_0 и N_0 не равны нулю, откуда следует, что уравнение

$$N_0 u^2 + M_0 u + j - \frac{1}{n} = 0$$

имеет не меньше одного не равного нулю корня, например $u = u_1$. Тогда $u = u_1$ будет частным решением первого уравнения указанной выше системы. Но второе уравнение системы, которое принимает вид

$$\frac{dZ}{dW} = u_1 W^{j-1},$$

имеет решение (поскольку $j > 1$) с перемещающейся точкой разветвления, следовательно общее решение не свободно от перемещающихся точек разветвления. Таким образом возможности $j > 1$ и $k > 1$ должны быть исключены. Следовательно, если $M(z, w)$ и $N(z, w)$ имеют полюсы $w = h(z)$, то эти полюсы простые.

Предположим, что $j = k = n = 1$, т. е. что $W = 0$ — простой полюс функции $M(z, w)$ или функции $N(z, w)$ или обеих, но не является полюсом $L(z, w)$. Тогда приведенное уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{M_0 P + N_0}{W},$$

и будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{1}{u}, \\ \dfrac{du}{dZ} = -\dfrac{u(M_0 + N_0 u)}{W}. \end{cases}$$

Эта система при подстановке αu вместо u, αZ вместо Z в свою очередь примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{1}{u}, \\ \dfrac{du}{dZ} = -\dfrac{\alpha u\,(M_0 + \alpha N_0 u)}{W}; \end{cases}$$

при решении относительно W и u в виде ряда по возрастающим степеням α, с коэфициентами, являющимися функциями Z, эта система имеет решение

$$W = W_0 + \frac{Z - Z_0}{u_0} + O(\alpha),$$

$$u = u_0 - \alpha M_0 u_0^2 \log\left(W_0 + \frac{Z - Z_0}{u_0}\right) + O(\alpha^2), \qquad \text{если } M_0 \neq 0,$$

или

$$u = u_0 - \alpha^2 N_0 u_0^3 \log\left(W_0 + \frac{Z - Z_0}{u_0}\right) + O(\alpha^3), \qquad \text{если } M_0 = 0.$$

Здесь решение имеет перемещающуюся критическую точку, так что единственно возможным будет

$$n \neq 1, \quad j = k = 1,$$

т. е. $w = h(z)$ может быть только полюсом $M(z, w)$ или $N(z, w)$, если оно является также полюсом $L(z, w)$. Таким образом полюсы $M(z, w)$ и $N(z, w)$ являются простыми и входят в полюсы $L(z, w)$.

Возвращаясь к типам I — VI, видим, что выражение $L(z, w)$ может быть написано в виде $\frac{\lambda(z, w)}{D(z, w)}$, где $D(z, w)$ не больше четвертой степени относительно w, а $\lambda(z, w)$ по меньшей мере на одну степень ниже D. Следовательно M и N могут быть выражены в виде

$$M(z, w) = \frac{\mu(z, w)}{D(z, w)}, \quad N(z, w) = \frac{\nu(z, w)}{D(z, w)},$$

где μ и ν — полиномы от w, максимальная степень которых должна быть определена. Пусть $D(z, w)$ будет степени δ от w.

В уравнении (D) напишем $w = W^{-1}$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \{2W - L(z, W^{-1})\}\, W^{-2} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 +$$
$$+ M(z, W^{-1}) \frac{dW}{dz} - W^2 N(z, W^{-1}).$$

Если числа a, которые входят в выражение для $L(z, w)$, в типах I — VI все конечны, то $\{2W - L(z, W^{-1})\}\, W^{-2}$ будет конечно (или равно нулю) при $W = 0$. Следовательно $W = 0$ не может быть полюсом $M(z, W^{-1})$ или $W^2 N(z, W^{-1})$, откуда следует, что степень $\mu(z, w)$ относительно w не больше δ, а степень $\nu(z, w)$ не больше $\delta+2$. С другой стороны, если $L(z, w)$ тождественно равно нулю или вырожденного типа, где одно из чисел a_1, a_2, a_3, a_4 было взято бесконечным, то $W=0$ — простой полюс $\{2W-L(z, W^{-1})\}\cdot W^{-2}$, следовательно может быть простым полюсом $M(z, W^{-1})$ и $W^2N(z, W^{-1})$. В данном случае $\mu(z, w)$ и $\nu(z, w)$ имеют степени, не превышающие $\delta+1$ и $\delta+3$ соответственно.

Следовательно в общем случае *вторым необходимым условием для отсутствия перемещающихся точек разветвления будет: если $D(z, w)$ — наименьший общий знаменатель простейших дробей в выражении $L(z, w)$ и степени δ относительно w, то $M(z, w)$ и $N(z, w)$ могут быть соответственно представлены в виде*

$$\frac{\mu(z, w)}{D(z, w)}, \quad \frac{\nu(z, w)}{D(z, w)},$$

где μ и ν — полиномы от w степени не выше $\delta+1$ или $\delta+3$.

14 · 3. Приведение к стандартному виду. Если решения уравнения второго порядка не имеют перемещающихся критических точек, то уравнение будет иметь вид

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2w}{dz^2}=L(z, w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+M(z, w)\frac{dw}{dz}+N(z, w),$$

где $L(z, w)$ равно нулю или одного из пяти основных типов, перечисленных в § 14·21. Чтобы упростить форму $L(z, w)$, произведем одно из следующих преобразований:

(I) если $L(z, w)$ имеет только один полюс $w=a_1$, напишем

$$W=\frac{1}{w-a_1};$$

(II) если $L(z, w)$ имеет два полюса $w=a_1$, a_2, напишем

$$W=\frac{w-a_2}{w-a_1};$$

(III) если $L(z, w)$ имеет три полюса $w=a_1$, a_2, a_3 или четыре полюса $w=a_1$, a_2, a_3, a_4, напишем[1]

$$W=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\cdot\frac{w-a_2}{w-a_1}.$$

Уравнение тогда преобразуется к виду

$$\frac{d^2W}{dz^2}=A(z, W)\left(\frac{dW}{dz}\right)^2+B(z, w)\frac{dW}{dz}+C(z, W),$$

---

[1] В случае типа V более удобно написать

$$W=\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\cdot\frac{w-a_1}{w-a_3}.$$

где $A(z, W)$ принимает одну из следующих восьми независимых форм

(I) 0, (II) $\frac{1}{W}$,

(III) $\frac{m-1}{mW}$ (m — целое число, больше единицы),

(IV) $\frac{1}{2W}+\frac{1}{W-1}$, (V) $\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{W}+\frac{1}{W-1}\right\}$,

(VI) $\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{W}+\frac{1}{W-1}\right\}$, (VII) $\frac{2}{3W}+\frac{1}{2(W-1)}$,

(VIII) $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{W}+\frac{1}{W-1}+\frac{1}{W-\eta}\right\}$.

Здесь (III) возникает из типа I; (II), (IV) и (VIII) — из типа III, (V) из типа IV, (VI) — из типа V, (VII) — из типа VI.

В (VIII)

$$\eta=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\cdot\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4}.$$

Эта величина может быть постоянной или может зависеть от z. В последнем случае она может быть принята в качестве новой независимой переменной Z.

14·31. Случай (I). В случае (I) выражение $L(z, w)$ равно нулю; вторая последовательность необходимых условий (§ 14·22) показывает, что уравнение будет иметь вид

$$\text{(G)}\qquad \frac{d^2w}{dz^2}=\{A(z)w+B(z)\}\frac{dw}{dz}+C(z)w^3+D(z)w^2+E(z)w+F(z).$$

Проведенное исследование не разрешает вопроса о наличии (либо отсутствии) перемещающихся критических точек в решении данного уравнения. Найденные условия являются необходимыми, но ни в коем случае не достаточными. Поэтому, исследование необходимо несколько продолжить, хотя и без существенного изменения метода.

Пусть

$$w=\frac{W}{\alpha},\quad z=z_0+\alpha Z,$$

тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2}=A(z_0)W\frac{dW}{dZ}+C(z_0)W^3+O(\alpha),$$

а при $\alpha=0$ это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\dfrac{dW}{dZ}=\dfrac{W^2}{u},\\[2mm] \dfrac{du}{dZ}=(2-a_0u-c_0u^2)W,\end{cases}$$

где $a_0 = A(z_0)$, $c_0 = C(z_0)$. При $c_0 = 0$ приведенное уравнение

$$\frac{d^2 W}{dZ^2} = a_0 W \frac{dW}{dZ}$$

имеет первый интеграл

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{1}{2} a_0 W^2 + \gamma,$$

где γ — постоянная интегрирования; его общее решение однозначно. Пусть $c_0 \neq 0$, тогда если W заменить на $W\{-c(z)\}^{-\frac{1}{2}}$, то $c(z)$ заменяется на -1; следовательно, не теряя в общности, можно предположить, что $c_0 = -1$. Система может быть теперь написана в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{W^2}{u}, \\ \dfrac{du}{dZ} = (u-h)(u-k)W, \end{cases}$$

где

$$h + k = a_0, \quad hk = 2.$$

Напишем

$$u = h + \alpha v,$$

тогда, если $h = k$, то система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{W^2}{h+\alpha v}, \\ \dfrac{dv}{dZ} = \alpha v^2 W, \end{cases}$$

а эта система имеет решение

$$W = -\frac{h}{Z-c_1} + O(\alpha),$$

$$v = c_2 - \alpha c_2^2 h \log(Z - c_1) + O(\alpha),$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Но это решение имеет перемещающуюся критическую точку; допущение $h = k$ должно быть, следовательно, отвергнуто.

Если $h \neq k$, то система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = \dfrac{W^2}{h+\alpha v}, \\ \dfrac{dv}{dZ} = (h-k+\alpha v) vW \end{cases}$$

и имеет решение

$$W = -\frac{h}{Z-c_1} + O(\alpha),$$

$$v = c_2 (Z - c_1)^{2-h^2} + O(\alpha).$$

Перемещающаяся особая точка $Z = c_1$ будет точкой разветвления, если $2 - h^2$ не целое число n, положительное или отрицательное (но не равное нулю, поскольку $h^2 = 2$ предполагает отвергнутое ранее условие $h = k$). Пусть

$$h^2 = 2 - n$$

и аналогично

$$k^2 = 2 - n',$$

откуда

$$(2 - n)(2 - n') = h^2 k^2 = 4.$$

Следовательно остаются три независимых условия

$$\text{(I)}\ 2 - n = 1, \qquad 2 - n' = 4,$$

$$\text{(II)}\ 2 - n = -1, \quad 2 - n' = -4,$$

$$\text{(III)}\ 2 - n = -2, \quad 2 - n' = -2,$$

соответствующие

$$\text{(I)}\ h = \pm 1, \qquad k = \pm 2, \qquad a_0 = \pm 3,$$

$$\text{(II)}\ h = \pm i, \qquad k = \mp 2i, \qquad a_0 = \mp i,$$

$$\text{(III)}\ h = \pm i\sqrt{2}, \quad k = \mp i\sqrt{2}, \quad a_0 = 0;$$

в каждом случае должны быть приняты все верхние или все нижние знаки.

Случай $a_0 = +3$ может быть выведен из случая $a_0 = -3$ переменой знака при w_1, следовательно он не отличается от последнего случая; в случае (II) преобразование $w = \pm i w_1$ приводит к изменению $C(z)$ от -1 до $+1$ и изменению a_0 на -1. Теперь, поскольку z_0 произвольно, любое соотношение вида

$$a_0 = A(z_0) = -3$$

верно для всех значений z_0 и следовательно $A(z)$ — постоянная.

При $A = 0$, $C \neq 0$, заменив W на $W\sqrt{2/C}$ получим $C = 2$; если $A \neq 0$, $C = 0$ и W заменим на $-2W/A$, получим $A = -2$.

Следовательно, если в случае (I) общее решение уравнения свободно от перемещающихся точек, то необходимо, чтобы уравнение могло быть приведено подстановкой вида

$$w = \lambda(z)\, W$$

к уравнению, в котором $A(z)$ и $C(z)$ имеют следующие пары постоянных значений:

(a) $A = 0, \quad C = 0.$ (b) $A = -2, \ C = 0.$

(c) $A = -3, \ C = -1.$ (d) $A = -1, \ C = 1.$

(e) $A = 0, \quad C = 2.$

Более общее преобразование

$$w = \lambda(z) W + \mu(z), \quad Z = \varphi(z)$$

не изменяет основных свойств уравнения (G), которое принимает вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{dW}{dZ} \cdot \frac{1}{\varphi'} \left\{ A\lambda W + A\mu + B - \frac{2\lambda'}{\lambda} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right\} + \frac{C\lambda^2 W^3}{\varphi'^2} +$$

$$+ \{A\lambda' + 3C\lambda\mu + D\lambda\} \frac{W^2}{\varphi'^2} + \left\{ A\frac{\lambda'\mu}{\lambda} + \frac{B\lambda'}{\lambda} + A\mu' + 3C\mu^2 + \right.$$

$$\left. + 2D\mu + E - \frac{\lambda''}{\lambda} \right\} \frac{W}{\varphi'^2} + \{A\mu\mu' + B\mu' + C\mu^3 + D\mu^2 + E\mu +$$

$$+ F - \mu''\} \frac{1}{\lambda\varphi'^2},$$

где штрихи обозначают диференцирование относительно z.

14·311. Случай I(a). При $A = C = 0$ пусть λ, μ и ν будут выбраны так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\frac{2\lambda'}{\lambda} + \frac{\varphi''}{\varphi'} = B, \quad D\lambda = 6\varphi'^2,$$

$$2D\mu = \frac{\lambda''}{\lambda'} - \frac{B\lambda'}{\lambda} - E.$$

Если D равно нулю, то уравнение линейно. Этот простой случай мы сейчас рассматривать не будем, предположим, что D не равно нулю. Тогда λ, φ и μ определяются в квадратурах, а преобразование

$$w = \lambda(z) W + \mu(z), \quad Z = \varphi(z)$$

приводит уравнение к виду

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = 6W^2 + S(z),$$

где $S(z)$ может быть выражено через B, D, E и F.

Чтобы определить, свободны ли решения этого уравнения от перемещающихся критических точек, допустим, что

$$W = \alpha^{-2} V, \quad Z = a + \alpha u,$$

где a — произвольная постоянная. Тогда

$$\frac{d^2V}{du^2} = 6V^2 + \alpha^4 S(a) + \alpha^5 u S'(a) + \frac{1}{2}\alpha^6 u^2 S''(a) + O(\alpha^7).$$

Это уравнение относительно V имеет решение, которое может быть разложено в ряд по возрастающим степеням α

$$V = v + \alpha^4 v_0 + \alpha^5 v_1 + \alpha^6 v_2 + \ldots,$$

где

$$v'' = 6v^2,$$

$$v_r'' - 12vv_r = \frac{u^r}{r!} S^{(r)}(a) \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

При $r \geqslant 4$ полученное рекуррентное уравнение более сложно, в данном случае однако можно ограничиться исследованием до $r = 2$ включительно.

Первый интеграл

$$v'' = 6v^2$$

имеет вид

$$v'^2 = 4v^3 - h,$$

где h — постоянная интегрирования. Общее решение будет следовательно иметь вид

$$v = \wp(u - k,\ O,\ h),$$

где k — вторая постоянная интегрирования

Рассмотрим теперь однородное уравнение

$$v_r'' - 12\wp(u - k,\ O,\ h)\, v_r = 0;$$

его общим решением будет

$$v_r = C_1\{u\wp' + 2\wp\} + C_2\wp',$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Неоднородное уравнение

$$v_r'' - 12\wp(u - k,\ O,\ h)\, v_r = \frac{u^r}{r!} S^{(r)}(a) \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

может быть теперь проинтегрировано методом вариации параметров; его общее решение будет иметь вид

$$v_r = U_1(u)\{u\wp' + 2\wp\} + U_2(u)\wp',$$

где

$$U_1'(u) = \frac{1}{24} \cdot \frac{S^{(r)}(a)}{r!} u^r \wp'(u - k),$$

$$U_2'(u) = \frac{1}{24} \cdot \frac{S^{(r)}(a)}{r!} u^r \{u\wp'(u - k) + 2\wp(u - k)\}.$$

Теперь

$$\wp(u - k) = \frac{1}{(u - k)^2} + O\{(u - k)^2\},$$

$$\wp'(u - k) = \frac{-2}{(u - k)^3} + O(u - k),$$

$$u\wp'(u - k) + 2\wp(u - k) = \frac{-2k}{(u - k)^3} + O(u - k),$$

следовательно при интегрировании U_1' и U_2' получим выражение с $\log(u - k)$ при $r = 2$. Отсюда следует, что для того, чтобы решение было свободно от перемещающихся критических точек, должно быть выполнено условие

$$S''(a) = 0.$$

Но a — произвольная постоянная, следовательно

$$S''(Z) = 0,$$

откуда $S(Z)$ — линейная форма $pZ + q$.

Таким образом, если решения уравнения (a) свободны от перемещающихся критических точек, то уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + pz + q.$$

При тривиальных изменениях в переменных это уравнение приводится к одной из трех стандартных форм

$$\text{(I)} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 \qquad (\text{при } p = q = 0),$$

$$\text{(II)} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + \frac{1}{2} \qquad (\text{при } p = 0,\ q \neq 0),$$

$$\text{(III)} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z \qquad (\text{при } p \neq 0).$$

Первые две из этих форм могут быть проинтегрированы при помощи эллиптических функций; они дают соответственно *однозначные* решения

$$w = \wp(z - k,\ 0,\ h),\quad w = \wp(z - k,\ 1,\ h),$$

где h и k — произвольные постоянные. Следовательно решения представляют собой полутрансцендентные функции постоянных интегрирования; они не имеют перемещающихся критических точек, но имеют перемещающиеся полюсы. Третье уравнение не интегрируется в элементарных функциях (алгебраических или трансцендентных)[1]; его общим решением является существенно-трансцендентная функция двух переменных. Это уравнение следует рассматривать, как определяющее новый тип трансцендентной функции, свободной от перемещающихся критических точек.

14·312. Случай I (b). Пусть $\lambda = 1$, $\varphi = z$ и $2\mu' = 2D\mu + E$ при $A = -2$, $C = 0$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dz^2} = -2W\frac{dW}{dz} + P(Z)\frac{dW}{dz} + Q(Z)W^2 + S(Z).$$

---

[1] Т. е. экспоненциальных, круговых или эллиптических. Далее термин *классические трансцендентные функции* или *классические трансцендентности* будет применяться для обозначения класса элементарных трансцендентных функций и трансцендентностей, определяемых линейными диференциальными уравнениями.

Пусть

$$W = \alpha^{-1} w, \quad Z = z_0 + \alpha z, \quad P(z_0) = P_0, \quad Q(z_0) = Q_0,$$

тогда уравнение можно написать так

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -2w \frac{dw}{dz} + \alpha \left\{ P_0 \frac{dw}{dz} + Q_0 w^2 \right\} + O(\alpha^2);$$

в этой форме оно удовлетворяется соотношением

$$w = w_0 + \alpha w_1 + \alpha^2 w_2 + \ldots,$$

где

$$w_0'' = -2w_0 w_0',$$

$$w_1'' = -2(w_0 w_1' + w_0' w_1) + P_0 w_0' + Q_0 w_0^2,$$

. . . .

Отсюда следует, что

$$w_0 = c \frac{e^{2c(z-a)} - 1}{e^{2c(z-a)} + 1},$$

где a и c — произвольные постоянные, а

$$w_1 = e^{-2\int w_0 dz} + \int \left\{ \int (P_0 w_0' + Q_0 w_0^2) dz \right\} e^{2\int w_0 dz} dz.$$

Но

$$P_0 w_0' + Q_0 w_0^2 = P_0 c^2 + (Q_0 - P_0) w_0^2,$$

и поскольку w_0^2 имеет двойной полюс, двукратное интегрирование выражения для w_1 приведет к логарифмическому члену, зависящему от a, если $P(z_0)$ не равно $Q(z_0)$ для всех значений z_0, т. е. $P(z)$ и $Q(z)$ должны быть тождественно равны.

Уравнение таким образом приводится к виду

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -2w \frac{dw}{dz} + P(z) \left\{ \frac{dw}{dz} + w^2 \right\} + S(z).$$

Оно теперь может быть проинтегрировано; его первый интеграл

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = u,$$

где

$$\frac{du}{dz} = P(z) u + S(z).$$

Этот первый интеграл типа Риккати, особые точки функции u фиксированны, поэтому общее решение имеет фиксированные критические точки.

Эквивалентная форма уравнения имеет вид

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = -2W \frac{dW}{dz} + q(z) \frac{dW}{dz} + q'(z) W,$$

так как это уравнение имеет также первый интеграл

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = u,$$

где

$$w = W - \frac{1}{2} q, \quad u = \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{2} q'.$$

Общее решение, следовательно, является полутрансцендентной функцией постоянных интегрирования.

14·313. Случай I (c). При $A = -3$, $C = -1$, уравнение, общее решение которого имеет только фиксированные критические точки, имеет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = -3W\frac{dW}{dZ} - W^3 + q(Z)\left\{\frac{dW}{dZ} - W^2\right\}.$$

Общее решение его

$$W = -\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dZ},$$

где $u(Z)$ — общее решение линейного уравнения третьего порядка

$$u''' = q(Z)\,u'';$$

следовательно, оно является рациональной функцией постоянных интегрирования.

14·314. Случай I (d). При $A = -1, C = 1$ пусть

$$\lambda = 1, \; \varphi = z,$$

$$3\mu + D = -3\mu + 3B = 3P(z),$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = -W\frac{dW}{dZ} + W^3 + P(Z)\left\{3\frac{dW}{dZ} + W^2\right\} + R(Z)\,W + S(Z).$$

Решения, свободные от перемещающихся критических точек, возникают в следующих пяти независимых случаях.

1° $\qquad R(z) = P'(z) - 2P^2(z), \qquad S(z) = 0.$

Уравнение может быть написано в виде

$$\frac{d^2W}{dz^2} = -w\frac{dw}{dz} + w^3 + P(z)\left\{3\frac{dw}{dz} + w^2\right\} + \{P'(z) - 2P^2(z)\}\,w;$$

его решение получается следующим образом. Пусть

$$\frac{u'}{u} = P(z), \qquad \frac{v'}{\sqrt{4v^2 - 1}} = u,$$

тогда

$$w = v'/v,$$

где штрихи обозначают диференцирование относительно z.

Принимая

$$w = \varphi'(z)\,W, \quad Z = \varphi(z),$$

где

$$\varphi'' = P(z)\,\varphi,$$

уравнение можно привести к стандартной форме

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = -W\frac{dW}{dZ} + W^3.$$

2°. $P(z) = \dfrac{q'(z)}{2q(z)}$, $R(z) = \dfrac{q''(z)}{2q(z)} - \dfrac{q'^2(z)}{q^2(z)} - q(z)$, $S(z)=0$.

Уравнение может быть написано в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -w\frac{dw}{dz} + w^3 + \frac{q'(z)}{2q(z)}\left\{3\frac{dw}{dz} + w^2\right\} + \left\{\frac{q''(z)}{2q(z)} - \frac{q'^2(q)}{q^2(z)} - q(z)\right\}w;$$

его решение получается следующим образом. Пусть

$$\frac{u'}{\sqrt{4u^3 - 12u + K}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{q(z)},$$

где K — произвольная постоянная;
тогда

$$w = \frac{u'}{u-1}.$$

Если

$$w = \varphi'(z)\,W, \quad Z = \varphi(z),$$

где

$$\varphi'^2(z) = \frac{1}{12}q(z),$$

уравнение приводится к стандартной форме

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = -W\frac{dW}{dZ} + W^3 - 12W.$$

3°. $P(z) = \dfrac{q'(z)}{q(z)} + q(z)$, $R(z) = P'(z) - 2P^2(z) - 12q^2(z)$,
$S(z) = -24\,q^3(z)$.

Уравнение может быть написано в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -w\frac{dw}{dz} + w^3 + \left\{\frac{q'(z)}{q(z)} + q(z)\right\}\left\{3\frac{dw}{dz} + w^2\right\} + \left\{\frac{q''(z)}{q(z)} - 3\frac{q'^2(z)}{q^2(z)} - 3q'(z) - 14q^2(z)\right\}w - 24q^3(z);$$

для того, чтобы его проинтегрировать, допустим

$$u = e^{\int P dz}, \quad v = \frac{1}{q(z)\,u}, \quad V = \wp(v+K,\ 0,\ 1),$$

где K — произвольная постоянная, тогда

$$w = \frac{v^3\sqrt{4V^3-1} + 2}{uv\,(v^2V - 1)}.$$

При подстановке

$$w = \varphi'(z) W, \quad Z = \varphi(z),$$

где

$$3\varphi'' = P(z)\varphi,$$

уравнение приводится к стандартной форме

$$\frac{d^2 W}{dZ^2} = -W\frac{dW}{dZ} + W^3 - 12\wp(Z, 0, 1) W + 12\wp'(Z, 0, 1).$$

4°. $$P(z) = -\frac{2q(z)}{q'(z)}, \quad R(z) = -\frac{24z}{q(z)}, \quad S(z) = \frac{12}{q(z)},$$

где

$$q(z) = 4z^3 - \varepsilon z^{-\varkappa};$$

далее $\varepsilon = 0$ и $\varkappa = 1$ или $\varepsilon = 1$ и $\varkappa$ — произвольна. Уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -w\frac{dw}{dz} + w^3 - \frac{2q(z)}{q'(z)}\left\{3\frac{dw}{dz} + w^2\right\} - \frac{24z}{q(z)} w + \frac{12}{q(z)}$$

интегрируется следующим образом. Пусть

$$\frac{u'}{\sqrt{4u^3 - \varepsilon u + K}} = \frac{1}{\sqrt{4z^3 - \varepsilon z - \varkappa}},$$

где K — произвольная постоянная,
тогда

$$w = \frac{u' - 1}{u - z}.$$

Преобразованием

$$W = w\sqrt{4z^3 - \varepsilon z - \alpha}, \quad Z = \wp(Z, \varepsilon, \alpha)$$

уравнение приводится к стандартной форме

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = -W\frac{dW}{dZ} + W^3 - 12\wp(Z, \varepsilon, \alpha) W + 12\wp'(Z, \varepsilon, \alpha).$$

5°. $$P(z) = 0, \quad R(z) = -12q(z), \quad S(z) = 12q'(z),$$

где $q(z)$ — новая трансцендентная функция, удовлетворяющая диференциальному уравнению

$$q'' = 6q^2 + z.$$

Решение уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -w\frac{dw}{dz} + w^3 - 12q(z) w + 12q'(z)$$

имеет вид

$$w = \frac{u'(z) - q'(z)}{u(z) - q(z)},$$

где $u(z)$ — любое решение

$$u'' = 6u^2 + z,$$

отличное от $q(z)$.

Следовательно каждое уравнение, которое входит в класс I (d) и имеет общее решение свободное от перемещающихся критических точек, приводится к стандартной форме

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = -W\frac{dW}{dZ} + W^3 - 12q(Z)W + 12q'(Z),$$

где

(α) q равна нулю,
или (β) q — постоянная, не равная нулю,
или (γ и δ) $q(z)$ — удовлетворяет уравнению

$$q'' = 6q^2 + \eta \qquad (\eta = 0 \text{ или } 1)$$

или (ε) $q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$q'' = 6q^2 + z.$$

В (α) — (δ) решение является полутрансцендентной, а в (ε) — существенно-трансцендентной функцией постоянных интегрирования.

14 · 315. Случай I (е). При $A = 0$, C-2 предположим, что B также равно нулю и пусть

$$\lambda = 1, \; 2\mu = -D,$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dz^2} = 2W^3 + R(z)W + S(z).$$

Если $R(z)$ и $S(z)$ — постоянные, например, β и γ, то уравнение интегрируется в эллиптических функциях. Если $R(z)$ не постоянная, то для отсутствия перемещающихся критических точек необходимо, чтобы были выполнены условия:

$$R(z) = z + \beta, \quad S(z) = \gamma,$$

где β и γ — постоянные. Подстановка

$$Z = z + \beta$$

приводит уравнение к стандартной форме

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = 2W^3 + ZW + \gamma.$$

Это уравнение не интегрируется в элементарных трансцендентных функциях, однако можно показать, что его общее решение будет свободным от перемещающихся критических точек.

Если B не равно нулю, то единственно возможным является соотношение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -3q(z)\frac{dw}{dz} + 2w^3 - \{q'(z) + 2q^2(z)\}w.$$

При подстановке

$$W = we^{\int q dz}, \; Z = \int e^{\int q dz} dz$$

уравнение приводится к стандартной форме

$$\frac{d^2W}{dZ^2}=2W^3.$$

14·316. Канонические уравнения типа I. Таким образом в качестве канонических уравнений, характеризуемых $L(z, w)\equiv 0$, может быть принята такая последовательность десяти уравнений:

$$\text{I. } \frac{d^2W}{dZ^2}=0. \quad \text{II. } \frac{d^2W}{dZ^2}=6W^2. \quad \text{III. } \frac{d^2W}{dZ^2}=6W^2+\frac{1}{2}.$$

$$\text{IV. } \frac{d^2W}{dZ^2}=6W^2+Z. \quad \text{V. } \frac{d^2W}{dZ^2}=-2W\frac{dW}{dZ}+q(Z)\frac{dW}{dZ}+q'(Z)W.$$

$$\text{VI. } \frac{d^2W}{dZ^2}=-3W\frac{dW}{dZ}-W^3+q(Z)\left\{\frac{dW}{dZ}+W^2\right\}.$$

$$\text{VII. } \frac{d^2W}{dZ^2}=2W^3. \quad \text{VIII. } \frac{d^2W}{dZ^2}=2W^3+\beta W+\gamma. \quad \text{IX. } \frac{d^2W}{dZ^2}=2W^3+ZW+\gamma.$$

$$\text{X. } \frac{d^2W}{dZ}=-W\frac{dW}{dZ}+W^3-12q(Z)W+12q'(Z).$$

В уравнениях V и VI функция $q(Z)$ произвольная, а в X определяется так же, как и в § 14·314.

14·32. Случай II. Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\left\{A(z)w+B(z)+\frac{C(z)}{w}\right\}\frac{dw}{dz}+$$
$$+D(z)w^3+E(z)w^2+F(z)w+G(z)+\frac{H(z)}{w}.$$

Пусть

$$w=\alpha^{-1}W,\ z=z_0+\alpha Z,\ A(z_0)=a_0,\ D(z_0)=d_0,$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+a_0W\frac{dW}{dZ}+d_0W^3+O(\alpha),$$

и будет эквивалентно при $\alpha=0$ системе

$$\begin{cases}\dfrac{dW}{dZ}=\dfrac{W^2}{u},\\[2mm] \dfrac{du}{dZ}=(1-a_0u+d_0u^2)W.\end{cases}$$

При $d_0=0$ решения этой системы однозначные; если $d_0\neq 0$, то можно доказать, как и в § 14·31, что единственно возможным является $a_0=0$. Отсюда следует, что $A(z)$ или $D(z)$ тождественно равно нулю. Аналогично, принимая

$$w=\frac{1}{\alpha W},\ z=z_0+\alpha Z,$$

можно доказать, как и в предыдущем случае, что $C(z)$ или $H(z)$ тождественно равно нулю.

14·321. Канонические уравнения типа II. 1°. При $A = C = 0$ получим три канонических уравнения

$$\text{XI.} \qquad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2.$$

$$\text{XII.} \qquad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \alpha W^3 + \beta W^2 + \gamma + \frac{\delta}{W}.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = \alpha W^4 + 2\beta W^3 - 2\gamma W - \delta + KW^2,$$

где K — произвольная постоянная. Интегрирование может быть завершено в эллиптических функциях.

$$\text{XIII.} \quad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \frac{1}{Z}\cdot\frac{dW}{dZ} + \frac{1}{Z}(\alpha W^2 + \beta) + \gamma W^3 + \frac{\delta}{W},$$

или, если $Z = e^z$

$$\text{XIII}'. \qquad \frac{d^2W}{dz^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 + e^z(\alpha W^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma W^3 + \frac{\delta}{W}\right).$$

Это уравнение не интегрируется в классических трансцендентных функциях.

2°. При $A \neq 0$, $C \neq 0$ получаем одно каноническое уравнение

$$\text{XIV.} \quad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \left\{q(Z)W + \frac{r(Z)}{W}\right\} + q'(Z)W^2 - r'(Z).$$

Первый интеграл типа Риккати

$$\frac{dW}{dZ} = q(Z)W^2 + KW - r(Z),$$

где K — произвольная постоянная.

3°. При $A = 0$, $C \neq 0$ получаем два канонических уравнения

$$\text{XV.} \quad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \frac{1}{W}\cdot\frac{dW}{dZ} + r(Z)W^2 - W\frac{d}{dZ}\left\{\frac{r'(Z)}{r(Z)}\right\}.$$

Первый интеграл

$$\left\{\frac{dW}{dZ} + \frac{r'(Z)}{r(Z)}W + 1\right\} = 2W^2\left\{r(Z)W + \int r(Z)\,dZ + K\right\},$$

где K — произвольная постоянная.

$$\text{XVI.} \quad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - q'(Z)\frac{1}{W}\cdot\frac{dW}{dZ} + W^3 - q(Z)W^2 + q''(Z).$$

Первый интеграл

$$\left\{\frac{dW}{dZ} - q'(Z)\right\}^2 = W^2\{[W - q(Z)]^2 + K\}.$$

Случай $A \neq 0$, $C = 0$ можно вывести из предыдущего, подставляя $1/W$ вместо W. Общее решение каждого канонического уравнения представляет собой полутрансцендентную функцию постоянных интегрирования, за исключением уравнений XII и XIII[1], которые неприводимы.

14 · 33. Случай III. Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{m-1}{mw}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\left\{A(z)\,w+B(z)+\frac{C(z)}{w}\right\}\frac{dw}{dz}+$$
$$+D(z)\,w^3+E(z)\,w^2+F(z)\,w+G(z)+\frac{H(z)}{w}$$

Пусть

$$w=\alpha^{-1}W,\quad z=z_0+\alpha Z,\quad A(z_0)=a_0,\quad D(z_0)=d_0,$$

тогда уравнение будет

$$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{m-1}{mW}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+a_0W\frac{dW}{dZ}+d_0W^3+O(\alpha).$$

Здесь может быть приложен метод, использованный в § 14 · 31, но можно также поступить следующим образом. Пусть

$$\frac{dW}{dZ}=uW^2,$$

тогда при $\alpha=0$ уравнение приводится к

$$\frac{u''}{u'^2}=\frac{-2\dfrac{m+1}{m}u+a_0}{-\dfrac{m+1}{m}u^2+a_0u+d_0}+\frac{u}{-\dfrac{m+1}{m}u^2+a_0u+d_0}.$$

Но если критические точки должны быть фиксированы, то правая часть этого уравнения при разложении на частные дроби должна быть одной из восьми форм, перечисленных в § 14 · 3, где W замещено u. Это приводит к нескольким независимым условиям, именно:

(a) если m неограничено, то

(I) функции $A(z)$ и $D(z)$ обе тождественно равны нулю или

(II) $$D(z)=-\frac{m}{(m+2)^2}A^2(z),$$

(b) при $m=2$

(I) $A(z)=0$ тождественно, $D(z)\neq 0$ или

(II) $$D(z)=\frac{1}{2}A^2(z),$$

(c) при $m=3$

$$D(z)=\frac{3}{2}A^2(z),$$

(d) при $m=5$

$$D(z)=5A^2(z).$$

Принимая $w = 1/v$, первоначальное уравнение можно преобразовать так

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{m+1}{mv}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left\{C(z)v + B(z) + \frac{A(z)}{v}\right\}\frac{dv}{dz} -$$
$$- H(z)v^3 - G(z)v^2 - F(z)v - E(z) - \frac{D(z)}{v^2}.$$

Отсюда следует:

(a) если m неограничено, то

(I) $C(z)$ и $H(z)$ тождественно равны нулю или

(II) $$H(z) = -\frac{m}{(m-2)^2}C^2(z),$$

(b) при $m = 2$,

(I) $C(z)$ и $H(z)$ тождественно равны нулю или

(II) $$C(z) = 0, \text{ а } H(z) \neq 0.$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда функции $A(z)$ и $D(z)$ равны нулю. Если уравнение предварительно преобразовать подстановкой

$$w = \alpha^{-2}W, \quad z = z_0 + \alpha Z, \quad e_0 = E(z_0),$$

а α приравнять нулю, то уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{m-1}{mW}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + e_0 \cdot W^2.$$

Возможно, что $E(z)$ также тождественно равно нулю. При $E(z) \neq 0$ можно доказать, как и в § 14·22, что единственно возможными условиями являются $m = 2$, $m = 4$, $m = -4$. Аналогично, если $C(z)$ и $H(z)$ тождественно равны нулю, то $G(z) = 0$ или $m = 4$.

Этот разбор ограничивает число рассматриваемых случаев[1]. Продолжая исследование, найдем, что уравнения, решения которых свободны от перемещающихся критических точек, имеют канонические формы, указанные в следующем параграфе.

14·331. Канонические уравнения типа III. 1°. При A, C, D и H, тождественно равных нулю, получим семь канонических уравнений

XVII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{m-1}{mW}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2.$$

[1] Необходимо исследовать четырнадцать случаев, девять из которых существенно различны. Исследование в полной форме было впервые дано Гамбье. [Gambier, C. R. Acad. Sc. Paris, 142 (1906), 1403, 1497]; предыдущее исследование, проведенное Пенлеве, не было исчерпывающим.

Общее решение $W=(K_1Z+K_2)^m$ рационально относительно постоянных интегрирования K_1 и K_2.

XVIII. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+4W^2.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2=4W(K+W)^2.$$

XIX. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+4W^2+2W.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2=4W(K+W+W^2).$$

XX. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+4W^2+2ZW$$

эквивалентно

$$\frac{d^2u}{dZ^2}=2u^3+Zu \qquad (u^2=W),$$

что представляет частный случай уравнения IX.

XXI. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{3}{4W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+3W^2$$

эквивалентно

XXIX. $$\frac{d^2u}{dZ^2}=\frac{1}{2u}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2+\frac{3u^3}{2} \qquad (u^2=W)$$

XXII. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{3}{4W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2-1$$

эквивалентно

XXXII. $$\frac{d^2u}{dZ^2}=\frac{1}{2u}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2-\frac{1}{2u} \qquad (u^2=W)$$

XXIII. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{3}{4W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+3W^2+\alpha W+\beta$$

эквивалентно

$$\frac{d^2u}{dZ^2}=\frac{1}{2u}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2+\frac{3u^3}{2}+\frac{\alpha u}{2}+\frac{\beta}{2u} \qquad (u^2=W)$$

что представляет частный случай уравнения XXX.

2°. Если C и H тождественно равны нулю и $(m+2)^2D+$ $+mA^2=0$, то имеются два канонических уравнения

XXIV. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{m-1}{mW}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+qW\frac{dW}{dZ}-\frac{mq^2}{(m+2)^2}W^3+\frac{mq'}{m+2}W^2.$$

Решение:

$$W=-\frac{(m+2)(K_1Z+K_2)}{m\int(K_1Z+K_2)^m q(Z)\,d(Z)}.$$

XXV. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{3}{4W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2-\frac{3W}{2}\frac{dW}{dZ}-\frac{W^3}{4}+\frac{q'}{2q}\left(W^2+\frac{dW}{dZ}\right)+rW+q.$$

Решение:

$$W = \frac{q}{2u' + u^2 - \frac{q'}{q} u - r},$$

где $u = t'/t$, причем t — общее решение линейного уравнения

$$t''' = \frac{3q'}{2q} t'' + \left(r + \frac{q''}{q} - \frac{q'^2}{q^2}\right) t' + \frac{1}{2}\left(r' + q - \frac{q'r}{q}\right) t.$$

3°. Если A и D тождественно равны нулю и $(m-2)^2 H + mC^2 = 0$, то имеется каноническое уравнение

$$\text{XXVI}. \quad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{3}{4W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \frac{6q'}{W} \cdot \frac{dW}{dZ} + 3W^2 + 12qW - 12q'' - \frac{36q'^2}{W},$$

где

$$q'' = 6q^2 \quad \text{или} \quad q'' = 6q^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad q'' = 6q^2 + Z.$$

Решение:

$$3W = 2V' + V^2 - 12q,$$

где

$$V = \frac{Q' - q'}{Q - q}$$

и

$$Q'' = 6Q^2 \quad \text{ли} \quad Q'' = 6Q^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad Q'' = 6Q^2 + Z, \quad \text{но} \quad Q \neq q.$$

Другие уравнения, когда A и D тождественно равны нулю, являются частными случаями:

4°. Если m неограниченно и $(m-2)^2 H + mC^2 = 0$, то получим ондо уравнение[1]. Оно имеет общую форму

$$\text{XXVII}. \quad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{m-1}{mW}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \left(fW + \varphi - \frac{m-2}{mW}\right)\frac{dW}{dZ} -$$
$$- \frac{mf^2}{(m+2)^2} W^3 + \frac{m(f' - f\varphi)}{m+2} W^2 + \psi W - \varphi - \frac{1}{mW},$$

где f, φ и ψ — определенные рациональные функции двух произвольных аналитических функций $q(Z)$ и $r(Z)$ и их производных. В частном случае $m = 2$ каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - 2W\frac{dW}{dZ} - \frac{W^3}{2} + F(Z)\,W - \frac{1}{2W},$$

а его решением является

$$W = u'/u,$$

где

$$2u'''u' = u''^2 + 2Fu'^2 - u^2.$$

---

[1] Этот трудный случай был особенно подробно изучен Гамбье, [Acta Math. 33 (1910), 51].

После диференцирования последнее уравнение становится линейным, четвертого порядка

$$u^{\mathrm{IV}} = 2Fu'' + F'u' - u.$$

Следовательно при $m=2$ общее решение является рациональной функцией постоянных интегрирования.

5°. При $m=2$, $D=\frac{1}{2}A$ и C тождественно равном нулю, получим уравнение[1]

$$\text{XXVIII.} \qquad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - (W-q)\frac{dW}{dZ} + \\ + \frac{W^3}{2} - 2qW^2 + 3\left(q' + \frac{1}{2}q^2\right)W - \frac{72r^2}{W},$$

где q и r определяются следующим образом. Пусть V_1 и V_2 будут любыми двумя решениями одного из соотношений

$$v'' = 6v^2, \quad v'' = 6v^2 + \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad v'' = 6v^2 + Z,$$

тогда

$$q = \frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}, \quad r = \frac{1}{2}(V_2 - V_1).$$

Решение:

$$W = \frac{6(V-V_1)(V-V_2)}{V' - \frac{1}{2}\left(V_1' + V_2'\right) - q\left\{V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right\}},$$

где V удовлетворяет тому же уравнению, что V_1 и V_2. Если V_1 и V_2 равны между собой[2], то

$$q = \lim \frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}, \quad r = 0.$$

6°. При $m=2$, A и C тождественно равных нулю, $D \neq 0$ имеются три канонических уравнения

$$\text{XXIX.} \qquad \frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \frac{3W^3}{2}.$$

---

[1] Этот случай был специально рассмотрен Гамбье, ibid., стр. 49.

[2] В общем случае V зависит от двух параметров, например, α и β, и может быть написано в виде $V(Z, \alpha, \beta)$. V_1 получается, придавая α и β специальные значения α_1 и β_1 и условия

$$\lim \frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1} = \left[\left(\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial Z} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial\beta\,\partial Z}\right) \Big/ \left(\lambda \frac{\partial V}{\partial\alpha} + \mu \frac{\partial V}{\partial\beta}\right)\right]_{\alpha_1,\ \beta_1},$$

где λ и μ — постоянные, отношение которых произвольно.

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = W^4 + KW.$$

XXX. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \frac{3W^3}{2} + 4\alpha W^2 + 2\beta W - \frac{\gamma^2}{2W}.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = W^4 + 4\alpha W^3 + 4\beta W^2 + 4KW + \gamma^2.$$

XXXI. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \frac{3W^3}{2} + 4ZW^2 + 2(Z^2 - \alpha)W - \frac{\beta^2}{2W}$$

не интегрируется в классических трансцендентных функциях.

7°. При $m = 2$, A, C и D тождественно равно нулю, $H \neq 0$ нулю, получим три канонических уравнения

XXXII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \frac{1}{2W}.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{du}{dZ}\right)^2 = K + \frac{1}{u^2} \qquad (u^2 = W).$$

XXXIII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + 4W^2 + \alpha W - \frac{1}{2W}.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = 4W^3 + 2\alpha W^2 + 4KW + 1.$$

XXXIV. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + 4\alpha W^2 - ZW - \frac{1}{2W} \qquad (\alpha \neq 0).$$

Решение:

$$2\alpha W = V' + V^2 + \frac{1}{2}Z,$$

где

(IX) $$V'' = 2V^3 + ZV - 2\alpha - \frac{1}{2}.$$

8°. При $n = 3$, $D = \frac{3}{2}A^2, H = -3C^2$ имеется каноническое уравнение [1]

XXXV. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{2}{3W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}W - \frac{2}{3}q - \frac{r}{W}\right)\frac{dW}{dZ} + \frac{2}{3}W^3 -$$

$$- \frac{10}{3}qW^2 + \left(4q' + r + \frac{8}{3}q^2\right)W + 2qr - 3r' - \frac{3r^2}{W},$$

где $2u^3 + Su + T$ представляет $2u^3$, $2u^3 + \alpha u + \beta$ или $2u^3 + Zu + \alpha$;

[1] Подробно см. Gambier, ibid., 32.

поэтому

$$q'' = 2q^3 + Su + T, \quad r = -\frac{1}{3}S - \frac{2}{3}(q' + q^2).$$

Решение:

$$W = \frac{V' - q' + V^2 - q^2}{V - q},$$

где V — любое решение

$$V'' = 2V^3 + SV + T.$$

9°. При $n = 5$, $D = 5A^2$, $H = -\frac{5}{9}C^2$ имеем одно каноническое уравнение

XXXVI. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{4}{5W}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}W + \frac{4}{5}q - \frac{r}{W}\right)\frac{dW}{dZ} + \frac{4}{5}W^3 + \frac{14}{5}qW^2 + \left(r - 3q' + \frac{6}{5}q^2\right)W - \frac{1}{3}(qr + 5r') - \frac{5}{9}\frac{r^2}{W},$$

где

$$q = \frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}, \quad r = \frac{72}{5}V_1 + \frac{36}{5}V_2 - \frac{5}{9}\left(\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}\right)^2,$$

а V_1 и V_2 — решения

$$V'' = 6V + S \qquad \left(S = 0, \frac{1}{2}Z\right).$$

Решение:

$$W = \frac{V' - q'}{V - q} - \frac{1}{2}(q + Z),$$

где V — общее решение $V'' = 6V + S$.

14·34. Канонические уравнения типа IV. В случае IV имеем четыре канонических уравнения[1]

XXXVII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \left\{\frac{1}{2W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = 4K_1^2W(W-1)^2.$$

Решение:

$$W = \operatorname{tgh}^2(K_1Z + K_2).$$

XXXVIII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \left\{\frac{1}{2W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + W(W-1)\left\{\alpha(W-1) + \beta\frac{W-1}{W^2} + \frac{\gamma}{W-1} + \frac{\delta}{(W-1)^2}\right\}.$$

---

[1] Gambier, C. R. Acad. Sc. Paris, 143 (1906), 741.

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = W(W-1)^2\left\{2\alpha W - \frac{2\beta}{W} - \frac{2\gamma}{W-1} - \frac{\delta}{(W-1)^2} + K\right\}.$$

XXXIX. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \left\{\frac{1}{2W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \frac{1}{Z}\cdot\frac{dW}{dZ} + \frac{(W-1)^2}{Z^2}\left(\alpha W + \frac{\beta}{W}\right) + \\ + \frac{\gamma W}{Z} + \frac{\delta W(W+1)}{W-1}$$

не интегрируется в классических трансцендентных функциях

XL $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \left\{\frac{1}{2W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + 2\frac{qW+r}{W-1}\cdot\frac{dW}{dZ} + \\ + \frac{1}{2}(W-1)^2\left\{S^2W - \frac{t^2}{W}\right\} + 2\{q^2 - r^2 - (q' + r')\}W,$$

где

$$s' = 2qs, \qquad t' = -2rt.$$

Метод интегрирования. Пусть

$$\frac{W' + 2(q+r)}{W-1} - sW = -2u,$$

тогда u определяется уравнением Риккати

$$u' + u^2 + 2ru - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}v + su,$$

где

$$v' = 2(q-r)v.$$

Нужно отметить, что если s и t не равны нулю, то

$$\frac{v'}{v} = \frac{s'}{s} + \frac{t'}{t}$$

следовательно $v = Kst$.

14·35. Канонические уравнения типа V. В случае (V) имеем два канонических уравнения[1]

XLI. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2.$$

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^3 = 27K_1^3W^2(W-1)^2.$$

Решение:

$$2W = 1 + \wp'(K_1Z + K_2, 0, -1).$$

XLII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \left\{qW + \frac{r}{W} - \frac{s}{W-1} - \\ - \frac{1}{2}(q+r+s)\right\}\frac{dW}{dZ} + W(W-1)\left\{3q^2W + \frac{3r^2}{W^2} - \right.$$

---

[1] Gambier, C. R., 144 (1907), 827.

$$
-\frac{3s^2}{(W-1)^2}+3q'+\frac{3}{2}q(r+s-q)+\frac{3r'-\frac{3}{2}r(r+s-q)}{W}+
$$

$$
\left.+\frac{3s'-\frac{3}{2}s(q+r+s)}{W-1}\right\},
$$

где

$$
3q=\frac{V_1'}{V_1}-V_1+\frac{E}{V_1}-2C,
$$

$$
3r=\frac{V_1'}{V_1}+V_1+\frac{E}{V_1}+2C,
$$

$$
3s=2V_1,
$$

а V_1 — любое решение уравнения

$$
V''=\frac{V'^2}{2V}+\frac{3}{2}V^3+4CV^2+2DV-\frac{E^2}{2V},
$$

где C, D и E все равны нулю (уравнение XXIX), все постоянные (уравнение XXX) или $C=Z$, $D=Z^2-\alpha$, $E=\beta$ (уравнение XXXI). Если V — общее решение этого уравнения, то[1]

$$
W=1+\frac{2V(V-V_1)}{V'-V_1'-V^2+V_1^2-\frac{3}{2}(q+r-s)(V-V_1)}.
$$

14·36. Канонические уравнения типа VI. В случае (VI) имеем пять канонических уравнений

XLIII. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{W}+\frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2.$$

Первый интеграл

$$
\left(\frac{dW}{dZ}\right)^4=256K_1^4W^3(W-1)^3.
$$

Решение:

$$
\frac{W-1}{W}+\wp^2(K_1Z+K_2,4,0).
$$

XLIV. $$\frac{d^2W}{dZ^2}=\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{W}+\frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2+W(W-1)\left\{\frac{\alpha}{W}+\frac{\beta}{W-1}+\right.$$

$$
\left.+2\gamma(W-1)\right\}.
$$

Решение:

$$
\frac{W-1}{W}=u^2,
$$

[1] Более подробно см. Gambier, Acta Math., 33 (1910), 38.

где

$$u'^2 = \left\{\alpha u - \frac{\beta}{u} - \frac{\gamma}{u-1} + K\right\} u(1-u^2).$$

XLV. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \left\{A + \frac{B}{W} - \frac{C}{W-1}\right\}\frac{dW}{dZ} +$$

$$+ W(W-1)\left\{4D^2(2W-1) + \frac{B^2}{W^2} - \frac{C^2}{(W-1)^2} + \frac{H}{W} + \frac{K}{W-1}\right\},$$

где

$$A = \frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}, \quad B - C = -\frac{3}{4}(V_1 + V_2), \quad B + C = -\frac{3}{2}\,\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1},$$

$$D = \frac{1}{2}(V_2 - V_1), \quad H = 2B' + AB, \quad K = 2C' + AC,$$

а V_1 и V_2 некоторые решения уравнения

$$V'' = 2V^3 + SV + T$$

(уравнение VII, VIII или XI). Если V — общее решение этого уравнения, то

$$2W - 1 = \frac{2V' - V_1' - V_2' - A(2V - V_1 - V_2)}{2(V - V_1)(V - V_2)}.$$

XLVI. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \frac{H'}{H} + \left\{1 + \frac{3}{2(W-1)}\right\}\frac{dW}{dZ} +$$

$$+ W(W-1)\left\{\frac{4\beta^2}{H^2}(2W-1) - \left(\frac{3H'}{2H}\right)^2 \frac{1}{(W-1)^2} + \frac{H}{W} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3H''}{H} - \frac{9H'^2}{2H^2}\right)\frac{1}{W-1}\right\},$$

где

$$H = 2(V_1' + V_1^2) + \alpha,$$

а V_1 — некоторое решение

VIII. $$V'' = 2V^3 + \alpha V + \beta.$$

Если V — общее решение этого уравнения, а

$$T = \frac{V' - V_1'}{V - V_1} + V + V_1,$$

то

$$W = \frac{3T^2}{2T' + 2T^2 - (4C + 4D + 3A)T + H}.$$

XLVII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \frac{H'}{H}\left\{1 + \frac{3}{2(W-1)}\right\}\frac{dW}{dZ} +$$

$$+ W(W-1)\left\{\frac{(2\alpha+1)^2}{H^2}\right\}(2W-1) - \left(\frac{3H'}{2H}\right)^2 \frac{1}{(W-1)^2} + \frac{H}{W} +$$

$$+ \left(\frac{3H''}{H} - \frac{9H'^2}{2H^2}\right)\frac{1}{W-1}\right\},$$

где

$$H = 2(V_1' + V_1^2) + Z,$$

а V_1 — некоторое решение

IX. $$V'' = 2V^3 + ZV + \alpha.$$

Интегрирование производится аналогично XLVI.

14·37. Канонические уравнения типа VII. В случае (VII) уравнение имеет вид [1]

XLVIII. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \left\{\frac{2}{3W} + \frac{1}{2(W-1)}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 + \left\{AW + B + \frac{C}{W}\right\}\frac{dW}{dZ} +$$
$$+ W(W-1)\left\{\frac{3A^2W}{8} + F + \frac{3C^2}{W^2} + \frac{H}{(W-1)^2} + \frac{K}{W} + \right.$$
$$\left. + \frac{H}{3(W-1)}\right\},$$

где

$$A = -\frac{10}{9}(t+u),\ B = \frac{1}{9}(2t + 5u),\ C = -\frac{4}{9}(u - 2t),$$

$$F = \frac{3}{2}(a' - ab) - \frac{3}{4}a^2,\ H = -\frac{9}{2}v^2,\ K = 3(c' - bc) - \frac{3}{2}c^2,$$

где

$$t = \frac{1}{2}\left\{\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1} + \frac{V_3' - V_1'}{V_3 - V_1}\right\},\ v = \frac{1}{2}\left\{\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1} - \frac{V_3' - V_1'}{V_3 - V_1}\right\},\ u = -\frac{V'}{V},$$

а V_1, V_2, V_3 — некоторые частные решения

$$V'' = 6V^2 + S \qquad \left(S = 0,\ \frac{1}{2}\ \text{или}\ Z\right).$$

Решение:

$$W = 1 + \frac{3}{2}\frac{(Y-t)^2 - v^2}{\{Y' - t' + (Y-t)\,u\} - \{(Y-t)^2 - v^2\}},$$

где

X. $$Y'' = -YY' + Y^3 - 12V_1Y + 12V_1'.$$

14·38. Канонические уравнения типа VIII. В случай (VIII) входят два типовых уравнения, в первом из которых η — постоянная, например α, а во втором [2] $\eta = Z$.

XLIX. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1} + \frac{1}{W-\alpha}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 +$$
$$+ W(W-1)(W-\alpha)\left\{\beta + \frac{\gamma}{W^2} + \frac{\delta}{(W-1)^2} + \frac{\varepsilon}{(W-\alpha)^2}\right\}.$$

[1] Gambier, C. R., 144 (1907), 962; Acta Math., 33 (1910), 45.
[2] Ibid., 143 (1906), 741.

Первый интеграл

$$\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 = W(W-1)(W-\alpha)\left\{2\beta W - \frac{2\gamma}{W} - \frac{2\delta}{W-1} - \frac{2\varepsilon}{W-\alpha} + K\right\}.$$

Общее решение может быть выражено в эллиптических функциях.

L. $$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{W-1} + \frac{1}{W-Z}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 - \left\{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z-1} + \frac{1}{W-Z}\right\}\frac{dW}{dZ} +$$
$$+ \frac{W(W-1)(W-Z)}{2Z^2(Z-1)^2}\left\{\alpha - \frac{\beta Z}{W^2} + \frac{\gamma(Z-1)}{(W-1)^2} - \frac{(\delta-1)Z(Z-1)}{(W-Z)^2}\right\}.$$

В общем случае это уравнение не интегрируется в классических трансцендентных функциях. При $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ интегрирование производится следующим образом. Пусть $\Lambda(u, Z)$ будет эллиптической функцией, определяемой интегралом

$$u = \int_0^{\Lambda} \frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w-Z)}},$$

и пусть $2\omega_1$ и $2\omega_2$ будут ее периодами, которые являются функциями Z. Тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$W = \Lambda(K_1\omega_1 + K_2\omega_2, Z),$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные [1].

14 · 39. Заключение. Применение условий, необходимых для отсутствия перемещающихся критических точек, приводит к пятидесяти видам уравнения

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = F\left(\frac{dW}{dZ}, W, Z\right),$$

где функция F рациональна относительно W и W' и аналитическая относительно Z. Все эти пятьдесят видов, за исключением шести, интегрируются в известных функциях, и общее решение их не имеет перемещающихся критических точек. Последнее верно также и для остальных шести случаев; порядок доказательства будет дан ниже (§§ 14 · 41 и последующие). Таким образом, когда указанные ограничения наложены на F, то совокупность условий достаточна, так же, как и необходима. Упомянутые пятьдесят канонических видов уравнения могут быть обобщены преобразованием

$$W = \frac{l(z)w + m(z)}{p(z)w + q(z)}, \quad Z = \varphi(z),$$

где l, m, p, q и φ — аналитические функции z, а новые типы содержат все уравнения второго порядка, рациональные отно-

[1] В общей форме уравнение L было впервые дано Фуксом [R. Fuchs, C. R. Acad. Sc. Paris, 141 (1905), 555]. Интегрирование при α, β, γ и δ, равных нулю, проведено Пенлеве.

сительно w и w', общие решения которых содержат фиксированные критические точки.

Если уравнение алгебраическое относительно w и неприводимо к эквивалентному уравнению, в которое w входит рационально, то положение совершенно меняется. Это ясно из следующего примера [1]

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \left\{ \frac{w\,[2k^2w^2 - (1+k^2)]}{(1-w^2)(1-k^2w^2)} - \frac{1}{\lambda\,(1-w^2)^{\frac{1}{2}}\,(1-k^2w^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2.$$

Можно доказать, что общее решение этого уравнения не содержит алгебраических особенностей, кроме полюсов; значительно труднее доказать, что любое решение, которое стремится к определенному значению, когда z стремится к z_0 вдоль любого пути, аналитическое или имеет полюс в z_0. Но отсюда не следует, что решение мероморфное во всей плоскости z. Общее решение имеет вид

$$w = \operatorname{sn}\{\lambda \log(Az - B)\} \pmod{k},$$

где A и B — произвольные постоянные. Точка $z = B/A$ — существенная особенность решения; когда z стремится к B/A вдоль некоторого определенного пути, w не стремится ни к какому пределу.

Этот пример ясно показывает, почему необходимые условия могут быть недостаточными, и следовательно, почему для того, чтобы отсутствие перемещающихся критических точек было оправдано, каждое из пятидесяти канонических видов уравнений, полученных в предыдущих параграфах, должно рассматриваться отдельно.

14·4. Трансцендентные функции Пенлеве. Из пятидесяти упомянутых видов уравнений наиболее важными являются *неприводимые* [2], которые являются источником новых трансцендентных функций. Эти неприводимые уравнения обозначены IV, IX, XIII, XXXI, XXXIX и L; их удобно расположить следующим образом

$$\text{(I)}\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z, \quad \text{(II)}\ \frac{d^2w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \alpha,$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\cdot\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},$$

$$\text{(IV)}\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{3w^3}{2} + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w},$$

$$\text{(V)}\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \left\{\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\cdot\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left\{\alpha w + \frac{\beta}{w}\right\} + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1},$$

[1] Painlevé, Bull. Soc. Math. France, 28 (1900), 230.

[2] Под неприводимым подразумевается уравнение, которое не может быть заменено более простым уравнением или системой более простых уравнений.

$$
\text{(VI)} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 -
$$

$$
-\left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-x}\right\}\frac{dw}{dz} + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left\{\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right\}.
$$

Новые трансцендентные функции, определяемые этими уравнениями, называются *трансцендентными функциями Пенлеве*[1]. Решения (I), (II) и (III) не имеют точек разветвления и следовательно являются однозначными функциями z. Если в уравнениях (IV) и (V) изменить независимую переменную преобразованием $z = e^z$, то решения будут однозначными функциями z. Но в уравнении (VI) точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$ являются критическими.

Уравнение (VI) содержит первые пять уравнений, которые могут быть из него получены [2].

Поскольку можно доказать, что решения (I) являются новыми трансцендентными функциями, отсюда следует, что решения остальных пяти уравнений (исключая специальные значения α, β, γ и δ) не могут быть выражены посредством только классических трансцендентных функций.

Постепенное вырождение может быть проведено следующим образом.

В уравнении (VI) подставим $1 + \varepsilon z$ вместо z, $\frac{\delta}{\varepsilon^2}$ вместо δ, $\frac{\gamma}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon^2}$ вместо γ, и пусть $\varepsilon \to 0$. Предельной формой этого уравнения будет уравнение (V).

В уравнение (V) подставим $1 + \varepsilon w$ вместо w, $-\frac{\beta}{\varepsilon^2}$ вместо β, $\frac{\beta}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon}$ вместо α, $\gamma\varepsilon$ вместо γ и $\delta\varepsilon$ вместо δ. В пределе, когда $\varepsilon \to 0$, получим уравнение (III).

Аналогично в уравнение (V) подставим $\varepsilon w \sqrt{2}$ вместо w, $1 + \varepsilon z \sqrt{2}$ вместо z, $\frac{1}{2\varepsilon^4}$ вместо α, $-\frac{1}{\varepsilon^4}$ вместо γ, $-\left(\frac{1}{2\varepsilon^4} + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\right)$ вместо δ. В пределе получим уравнение (IV).

В уравнение (III) подставим $1 + \varepsilon^2 z$ вместо z, $1 + 2\varepsilon w$ вместо w, $\frac{1}{4\varepsilon^6}$ вместо γ, $-\frac{1}{4\varepsilon^6}$ вместо δ, $-\frac{1}{2\varepsilon^6}$ вместо α, $\frac{1}{2\varepsilon^6} + \frac{2\beta}{\varepsilon^3}$ вместо β. В пределе получим уравнение (II).

Аналогично уравнение (II) может быть получено (предельным переходом) из (IV) подстановкой $\frac{\varepsilon z}{2^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{\varepsilon^3}$ вместо z, $2^{\frac{2}{3}}\varepsilon w + \frac{1}{\varepsilon^3}$ вместо w, $-\frac{1}{2\varepsilon^6} - \alpha$ вместо α, $-\frac{1}{2\varepsilon^{12}}$ вместо β.

---

[1] Только первые три типа были найдены Пенлеве, последние три типа были позднее найдены Гамбье.

[2] Painlevé, C. R. Acad. Sc. Paris, 143 (1906), 1111. Решения (VI) в соседстве с особой точкой были исследованы Гарнье. [Garnier, C. R., 162 (1916), 939, 163 (1916), 8, 118].

Наконец, в уравнение (II) подставим $\varepsilon^2 z - \frac{6}{\varepsilon^{10}}$ вместо z, $\varepsilon w + \frac{1}{\varepsilon^5}$ вместо w, $\frac{4}{\varepsilon^{15}}$ вместо α, и в пределе получим уравнение (I).

14·41. Первая трансцендентная функция Пенлеве; отсутствие перемещающихся точек разветвления. Рассмотрим более подробно уравнение

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z,$$

которому удовлетворяет первая трансцендентная функция Пенлеве. Докажем, что его общее решение не содержит перемещающихся критических точек[1]. Основной принцип метода может быть приложен к пяти уравнениям, определяющим остальные трансцендентные функции.

Сначала покажем, что это уравнение допускает решения, содержащие перемещающиеся полюсы, но не содержащие точек разветвления.

В соседстве с некоторой произвольной точкой z_0 уравнению удовлетворяет ряд

$$w = \frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{1}{10} z_0 (z-z_0)^2 - \frac{1}{6}(z-z_0)^3 + h(z-z_0)^4 + \\ + \frac{1}{300} z_0^2 (z-z_0)^6 + \ldots,$$

где h — второй произвольный параметр; этот ряд может быть также написан в виде

$$w = \frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{1}{10} z(z-z_0)^2 - \frac{1}{15}(z-z_0)^3 + h(z-z_0)^4 + \\ + \frac{1}{300} z_0^2 (z-z_0)^6 + \ldots$$

Исключая $z - z_0$ из последнего ряда и ряда для w', именно

$$w' = -\frac{2}{(z-z_0)^3} - \frac{1}{5} z(z-z_0) - \frac{3}{10}(z-z_0)^2 + 4h(z-z_0)^3 + \\ + \frac{1}{50} z_0^2 (z-z_0)^6 + \ldots,$$

и принимая $w = v^{-2}$, найдем, что

$$w' = -2\varepsilon v^{-3} - \frac{1}{2}\varepsilon z v - \frac{1}{2} v^2 + 7\varepsilon h v^3 + \ldots,$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Принимая[2]

$$w = v^{-2}, \quad w' = -2v^{-3} - \frac{1}{2} zv - \frac{1}{2} v^2 + uv^3,$$

---

[1] Painlevé, Bull. Soc. Math. France, 28 (1900), 227; C. R. Acad. Sc. Paris, 135 (1902), 411, 641, 457, 1020.

[2] Можно также сделать преобразование

$$w = v^{-2}, \quad w' = 2v^{-3} - \frac{1}{2} zv - \frac{1}{2} v^2 + uv^3,$$

уравнение (I) может быть преобразовано в систему

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dz} = 1 + \dfrac{1}{4} z v^4 + \dfrac{1}{4} v^5 + u v^6, \\ \dfrac{du}{dz} = \dfrac{1}{8} z^2 v + \dfrac{3}{8} z v^2 + \left(\dfrac{1}{4} - z u\right) v^3 - \dfrac{5}{4} u v^4 + \dfrac{3}{2} u^2 v^5. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, аналитическое в соседстве с z_0, и удовлетворяет начальным условиям $u = u_0$, $v = 0$ при $z = z_0$.

Соответствующее решение $w(z)$ имеет полюс в точке z_0, а постоянная h равна $\frac{1}{7} u_0$.

Таким образом общее решение имеет перемещающийся полюс в некоторой произвольной точке z_0. Ни одно решение не может иметь алгебраической точки разветвления в некоторой точке z_1, так как если $A(z - z_1)^r$ — главный член решения, имеющего алгебраическую особенность в z_1, то r должно быть равно -2, а решение будет аналитическим в соседстве с z_1.

14 · 42. Отсутствие перемещающихся существенных особенностей. Теперь нам нужно показать, что ни одно решение уравнения (I) не может иметь перемещающейся существенной особенности в конечной части плоскости[1]. Для этого докажем ряд предварительных теорем, относящихся к специальным решениям (I). Пусть $w(z)$ будет частным решением, которое принимает конечное значение w_0, в то время, как $w'(z)$ принимает конечное значение w_0' при $z = z_0$. Это решение аналитическое в соседстве с z_0. Пусть Γ будет наибольшим кругом с центром в точке z_0, внутри которого $w(z)$ не имеет никаких особенностей, кроме полюсов. Если радиус Γ бесконечен, то решение не имеет существенной особенности (за исключением бесконечно удаленной точки). Если бы радиус Γ был конечным, то на окружности Γ была бы существенная особенность $w(z)$. Покажем, что это допущение не соответствует действительности.

Предположим, что $z = a$ — существенно особая точка и пусть M будет верхней границей $|w(z)|$ и $|w'(z)|$, когда z стремится к a вдоль радиуса $z_0 a$. Далее решение $w(z)$ таково, что M конечно. Тогда, если z_1 — точка на радиусе, $w(z_1) = w_1$, $w'(z_1) = w_1'$, а ε — произвольная величина, то

$$|w - w_1| \leqslant A, \quad |w' - w_1'| \leqslant A, \quad \text{когда} \quad |z - z_1| \leqslant \varepsilon, \quad |z_1 - a| \leqslant \varepsilon,$$

где A конечно. Теперь (I) может быть написано в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = w', \\ \dfrac{dw'}{dz} = 6w^2 + z \end{cases}$$

---

[1] Необходимость этого исследования видна из примеров §§ 14 · 1, 14·39.

причем правая часть каждого уравнения этой системы ограничена для всех конечных значений z, w и w'. Согласно фундаментальной теореме существования (§ 12 · 2), должно существовать решение $w(z)$, удовлетворяющее данным начальным условиям относительно z_1, и аналитическое во всем круге $|z - z_1| = \varepsilon$. Решение будет таким образом аналитическим относительно a, что противоречит принятому условию. Следовательно необходимо предположить, что если a — существенная особенность, то $|w(z)|$ не ограничен вдоль z_0a.

Покажем теперь, что если $w(z)$ — любое частное решение (I), так что $|w(z)|$ не ограничен вдоль z_0a, то точка a будет полюсом $w(z)$ при условии, что существует последовательность точек z_1 на радиусе с предельной точкой a, так что $|w(z)|$ неограничен.

Возвращаясь к преобразованию

$$u(z) = \pm w^{-\frac{3}{2}}\left\{\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2w}\right\} + 2w^3 + \frac{1}{2}zw,$$

которое эквивалентно

$$u = v^{-3}\left(w' + 2v^{-3} + \frac{1}{2}zv + \frac{1}{2}v^2\right),$$

или

$$u = -v^{-3}\left(w' - 2v^{-3} - \frac{1}{2}zv + \frac{1}{2}v^2\right),$$

где $w = v^{-2}$, видим, что если w — решение, имеющее полюс в точке a, то u в соседстве с a определяется так, что

$$u(z) = 7h + O\{(z-a)^2\}.$$

Теперь, допустив, что для одного из значений u $|u(z_1)| < C$, получим, что при $z = z_1$ одно из выражений

$$v^{-3}\left(w' + 2v^{-3} + \frac{1}{2}zv + \frac{1}{2}v^2\right), \quad v^{-3}\left(w' - 2v^{-3} - \frac{1}{2}zv + \frac{1}{2}v^2\right)$$

будет иметь модуль меньше C. Предположим, что первое из этих выражений удовлетворяет данному условию и преобразуем (I) подстановкой

$$w = v^{-2}, \quad w' = -2v^{-3} - \frac{1}{2}zv - \frac{1}{2}v^2 + uv^3.$$

Полученная система (Ia) будет иметь решение $u(z)$, $v(z)$, так что u, v принимают заданные начальные значения u_1, v_1 при $z = z_1$. Тогда, если ε — малая величина

$$|u - u_1| \leqslant K, \quad |v - v_1| \leqslant K \text{ при } |z - z_1| \leqslant \varepsilon, \quad |z_1 - a| \leqslant \varepsilon,$$

где K — конечно; отсюда, согласно фундаментальной теореме существования, следует, что $u(z)$ и $v(z)$ — аналитические во всем круге $|z - a| = \varepsilon$. Следовательно $w(z)$ имеет полюс в a.

Можно найти любое число функций $U(z)$, имеющих такое же свойство, что и $u(z)$, именно: если для точек z_1 на z_0a с предельной точкой a $|U(z_1)|$ всегда ограничен, когда $|w(z_1)|$ не ограничен, то $w(z)$ имеет полюс в a. Такая функция может быть построена и будет иметь преимущество рационального выражения относительно z, w, w'.

Двузначная функция

$$u = w^{-\frac{3}{2}}\left(w' + \frac{1}{2}w^{-1}\right) + 2w^3 + \frac{1}{2}zw$$

такова, что если w имеет полюс в z_0, то одно из двух определений u принимает произвольное значение $7h$ при $z = z_0$. Независимо от того, какое определение правильно, u удовлетворяет уравнению

$$\left\{w' + \frac{1}{2}w^{-1} - w^{\frac{3}{2}}\left(2 + \frac{1}{2}zw^{-2} - uw^{-3}\right)\right\}\left\{w' + \frac{1}{2}w^{-1} + \right.$$
$$\left. + w^{\frac{3}{2}}\left(2 + \frac{1}{2}zw^{-2} - uw^{-3}\right)\right\} = 0.$$

Левая часть этого уравнения при разложении свободна от дробных степеней w и может быть написана в виде

$$w'^2 + \frac{w'}{w} - 4w^3 - 2zw + 4u + \ldots,$$

где опущенные члены содержат w^{-1}, w^{-2} и w^{-3}, но не содержат w'. Пусть

$$U = w'^2 + \frac{w'}{w} - 4w^3 - 2zw,$$

тогда, подставляя вместо w ряд

$$w = (z - z_0)^{-2} - \frac{1}{10}z_0(z - z_0)^2 - \frac{1}{6}(z - z_0)^3 + h(z - z_0)^4 + \ldots,$$

найдем, что

$$U(z) = -28h + O\{(z - z_0)^2\}.$$

При $U'(z_0) = 0$ значительно усложняется работа. Для устранения этого пусть

$$V(z) = U(z) + z,$$

тогда в соседстве с z_0

$$V(z) = -28h + z + O\{(z - z_0)^2\} = -4u(z) + z + O(w^{-1}),$$

где $u(z)$ — значение u, конечное в z_0. Поскольку $u'(z_0) = 0$,

$$V'(z) = 1 + O(z - z_0).$$

Пусть z_1 будет некоторым значением z, для которого $|w|$ не ограничен, но $|V|$ ограничен; тогда соответствующее значение w' будет любым корнем уравнения

$$w'^2 + w'w^{-1} - 4w^3 - 2zw + z = V.$$

Соответствующее значение u определяется выражением

$$w'^2 + w'w^{-1} - 4w^3 - 2zw + O(w^{-1}) = -4u,$$

$$u = \frac{1}{4}(z - V) + O(w^{-1}),$$

следовательно $|u(z_1)|$ ограничен.

Поэтому, если существует последовательность точек z_1 на радиусе z_0a, с предельной точкой a, так что $|w(z)_1|$ не ограничен, но $|V(z_1)|$ ограничен, то для одного определения $u(z)$ $|u(z_1)|$ будет ограничен, следовательно $w(z)$ будет иметь полюс в точке a.

14 · 421. Основное доказательство в случае, когда $|w|$ имеет положительную нижнюю границу. Здесь мы введем очень важное ограничение, которое позже устраним, именно: если $w(z)$—решение, имеющее существенную особенность в точке a, то для всех точек на радиусе z_0a, $|w(z)| \geqslant \rho$. При этом должна быть некоторая последовательность точек z_1 на радиусе, такая, чтобы $|V(z_1)|$ был не ограничен. Если бы $|w(z_1)|$ и $|V(z_1)|$ были ограничены, то, согласно определению V, $|w'(z_1)|$ был бы ограничен, а $w(z)$ была бы аналитической относительно a. С другой стороны, если бы $|V(z_1)|$ был ограничен, а $|w(z_1)$ не ограничен, то, согласно заключительной теореме предыдущего параграфа, функция $w(z)$ имела бы полюс в точке a. Таким образом, если a — существенная особая точка, то последовательность точек z_1, для которых $|V(z_1)|$ не ограничен, несомненно существует.

На основании этого докажем, что существует другая последовательность точек z_2, имеющих a в качестве предельной точки, таким образом, что $|V(z_2)|$ произвольно мал. Рассмотрим выражение

$$W = \frac{V'}{V} = \frac{2w'w'' + w^{-1}w'' - w^{-2}w'^2 - 12w^2w' - 2zw' - 2w + 1}{w'^2 + w^{-1}w' - 4w^3 - 2zw + z} =$$

$$= \frac{4w^3 - w'^2 + zw + w^2}{w(ww'^2 + w' - 4w'' - 2zw^2 + zw)}.$$

Если бы $|W|$ был ограничен на радиусе z_0a, то $|V|$ был бы ограничен, даже для последовательности точек z_1, что не соответствует действительности. Следовательно последовательность точек z_2, произвольно близких к a, должна существовать так, чтобы $|W(z_2)|$ не был ограничен. Более того, $|w(z_2)|$ также неограничен, так как, если $|w(z_2)|$ и $|w'(z_2)|$ будут ограничены, то $|V(z_2)|$ будет произвольно мал, а $w(z)$ будет аналитической относительно a; если $|w(z_2)|$ ограничен, а $|w'(z_2)|$ неограничен, то $|W(z_2)|$ будет ограничен, что противоречит сделанному допущению.

Теперь, если мы исключим w' из выражений V и W, то найдем, что

$$W = V^{-1} + O(w^{-\frac{1}{2}}),$$

и поскольку для последовательности точек z_2, имеющих предельную точку a, $|w(z_2)|$ и $|W(z_2)|$ неограничены, $|V(z_2)|$ произвольно мал. Из предыдущего параграфа следует, что $w(z)$ имеет полюс в точке $z = a$.

Случай, когда $w(z)$ стремится к единственному пределу g, в то время, как z приближается к a вдоль радиуса, может быть сразу устранен, так как предыдущее исследование не изменяется, за исключением несущественного элемента в выражении для V, где член w'/w замещается $w'/(w-g)$. В частности, доказательство справедливо, если вместо того, чтобы иметь положительную нижнюю границу, $|w(z)|$ был бы равен нулю при $z = a$.

Выбор радиуса z_0a в качестве линии приближения к a не существен для доказательства; любая кривая конечной длины, заканчивающаяся в a, ни одна точка которой (исключая a) не является существенной особенностью $w(z)$, была бы пригодна.

14 · 422. Случай, когда нижняя граница $|w(z)|$ равна нулю. Выше мы уже рассмотрели все возможные случаи, за исключением одного, именно: на радиусе z_0a существует последовательность точек z_1, имеющих предельную точку a, так что $|w(z_1)| < \rho$, и другая последовательность точек z_2, также имеющих предельную точку a, при которой $|w(z_2)| > \rho$. Покажем, что даже в этом случае a является полюсом $w(z)$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ будет последовательностью неперекрывающихся сегментов радиуса z_0a, в конечных точках которых $|w(z)| = \rho$ и внутри которых $|w(z)| < \rho$; пусть $l_1, l_2, \ldots$ будут длинами этих сегментов. Существование последовательных точек z_2 означает, что число интервалов λ бесконечно. Покажем, что каждый сегмент λ_ν может быть замещен изогнутым сегментом Λ_ν длины L_ν, где $1 < L_\nu / l_\nu < 3\pi$, вдоль которого $|w(z)| = \rho$, причем в области между λ_ν и Λ_ν функция $w(z)$ — аналитическая.

Если z рассматривать как зависимую, а w как независимую переменную, то уравнение (I) принимает вид

$$\text{(Ib)} \qquad \frac{d^2z}{dw^2} = -\left\{\frac{dw}{dz}\right\}^3 (6w^2 + z).$$

Пусть Z'_ν будет конечной точкой λ_ν и пусть W_ν будет соответствующим значением $w(z)$, так что $|w_\nu| = \rho$. Пусть $z(w)$ будет решением (Ib), так что

$$z(W_\nu) = Z_\nu, \quad z'(W_\nu) = Z'_\nu.$$

Если $Z'_\nu = 0$, то решением будет лишь $z = Z_\nu$; оно не содержит w и поэтому не соответствует никакому решению $w(z)$ уравнения (I). Следовательно можно предположить, что $z'(W_\nu) \neq 0$. Но если ε — положительное число $< \frac{1}{2}$, то может быть найдено такое число τ, при котором, если

$$|w| < \rho, \quad |Z'_\nu| < \tau,$$

то

$$z' = Z'_\nu(1+\delta),$$

где δ является аналитической относительно w и Z'_ν, а

$$|\delta| < \varepsilon.$$

Когда z описывает отрезок λ_ν, w описывает кривую C_ν в плоскости w; эта кривая C_ν будет лежать внутри некоторого круга Γ_ν радиуса ρ, описанного вокруг точки $w=0$; начальные и конечные значения w будут соответствовать точкам на окружности Γ_ν. Пусть S_ν обозначает длину C_ν. На радиусе z_0a пусть

$$z = a + re^{i\alpha},$$

где α — постоянная, тогда

$$l_\nu = \int_0^{S_\nu} \left| z'(w)\frac{dw}{ds} \right| ds = \int_0^{S_\nu} \left| \frac{dr}{ds} \right| ds,$$

где кривая C_ν — путь интегрирования. Поскольку

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = |z'| = |Z'_\nu||1+\delta| > \frac{1}{2}|Z'_\nu|,$$

отсюда следует, что

$$l_\nu > \frac{1}{2}|Z'_\nu| S_\nu.$$

Теперь пусть w опишет меньшую дугу Γ_ν между конечными точками C_ν, пусть σ_ν будет длиной этой дуги, а k_ν длиной ее хорды, тогда

$$\sigma_\nu \leqslant \pi k_\nu \leqslant \pi S_\nu.$$

Но

$$L_\nu = \int_0^{\sigma_\nu} \left| \frac{dr}{d\sigma} \right| d\sigma \leqslant |Z'_\nu| \int_0^{\sigma_\nu} |1+\delta| d\sigma < \frac{3}{2}|Z'_\nu|\sigma_\nu,$$

т. е.

$$L_\nu < \frac{3}{2}\pi |Z'_\nu| S_\nu,$$

следовательно

$$1 < \frac{L_\nu}{l_\nu} < 3\pi.$$

Поскольку функция $z'(w)$ аналитическая и не равна нулю внутри круга Γ_ν и на его окружности, $w(z)$ не будет иметь полюсов в области между кривой Λ_ν и сегментом λ_ν. Но так как $w(z)$ не может иметь никаких особенностей в этой области, кроме полюсов, то λ_ν может быть деформирована в Λ_ν, не встречая на своем пути никакой особой точки $w(z)$. Таким образом, если каждый сегмент λ_ν заменить соответствующей дугой Λ_ν, то образуется путь Λ, ведущий от z_0 к a, составленный из бесконечного числа дуг, общая длина которых не превышает $3\pi R$, где R — длина радиуса $z_0 a$. Для всех точек пути Λ

$$|w(z)| \geqslant \rho,$$

причем предполагается, что $w(z)$ имеет в своей конечной точке a существенную особенность. Однако в предыдущем параграфе мы показали, что это невозможно, следовательно *функция $w(z)$ не имеет существенной особенности ни в одной конечной точке плоскости z.*

14·43. Представление трансцендентной функции, как частного двух целых функций. Пусть $w(z)$ будет первой трансцендентной функцией Пенлеве, тогда

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z,$$

если

$$\eta(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - 2w^3 - zw,$$

отсюда следует, что

$$\frac{d\eta}{dz} = -w,$$

а $\eta(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^3\eta}{dz^3} + 6\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 + z = 0.$$

Поскольку единственными особыми точками $w(z)$ являются полюсы, при которых разложение принимает вид

$$w = (z - z_0)^{-2} + O\{(z - z_0)^2\},$$

единственные особенности $\eta(z)$ будут простыми полюсами.

Пусть

$$\zeta(z) = e^{\int \eta(z)\, dz},$$

тогда функция $\zeta(z)$ однозначна, так как, хотя $\int \eta dz$ бесконечно многозначен, его значения различаются на $2\pi i$. Но $\zeta(z)$ не имеет полюсов и следовательно является целой функцией z.

Таким образом функция $w(z)$ может быть выражена в виде

$$w = \frac{\zeta'^2 - \zeta\zeta''}{\zeta^2},$$

где числитель и знаменатель — целые функции z.

14·44. Произвольные постоянные, входящие в трансцендентную функцию. Покажем, что трансцендентная функция Пенлеве является существенно трансцендентной функцией двух постоянных интегрирования. Она не может быть рациональной функцией двух параметров, так как в этом случае решение уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + \alpha^5 z,$$

полученное из (I) подстановкой αz вместо z и $\alpha^{-2}w$ вместо w, также было бы рациональным относительно постоянных интегрирования. Но при $\alpha = 0$ решение

$$w = \wp(z + \beta, 0, \gamma)$$

нерационально относительно β и γ, следовательно оно нерационально и относительно своих параметров при $\alpha \neq 0$.

Предположим, что $w(z)$ — полутрансцендентная функция постоянных интегрирования, тогда уравнение (I) допустило бы первый интеграл, являющийся полиномом от w и w', например

$$P(z, w, w') \equiv w'^m + Q_1(z, w)\, w'^{m-1} + \ldots + Q_{m-1}(z, w)\, w' + \\ + Q_m(z, w) = 0.$$

Поскольку решение этого первого интеграла, т. е. трансцендентная функция, не имеет перемещающихся точек разветвления, Q_i — полином w степени не выше $2i$. Подставим $z_0 + \alpha z$ вместо z, $\alpha^{-2}w$ вместо w и $\alpha^{-3}\, w'$ вместо w', тогда

$$P(z, w, w') = \alpha^{-k} P_0(w, w') + Q(\alpha^{-k+1}) \qquad (k \geqslant 3m),$$

где $P_0(w, w')$ — однородный полином от $\sqrt[3]{w'}$, $\sqrt{w}$.

Но $P_0 = 0$ — первый интеграл уравнения

$$w'' = 6w^2,$$

следовательно

$$P_0 = K(w'^2 - 4w^3)^j,$$

где K и j — постоянные. Легко доказать, что

$$K = 3m = 6j,$$

и что соответственно $Q_m(z, w)$ степени $\frac{3}{2}m$ относительно w.

Функция $w(z)$ имеет перемещающиеся полюсы, в соседстве с которыми имеется соотношение вида (§ 14 · 41)

$$w' + \frac{1}{2w} + \ldots = \pm \left(2w^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} z w^{-\frac{1}{2}} - 7hw^{-\frac{3}{2}} + \ldots\right)$$

(h — постоянная), где целые и дробные степени w расположены в разных частях уравнения. Для больших значений w в такой форме может быть выражен каждый корень w' уравнения

$$P(z, w, w') = 0,$$

следовательно

$$P(z, w, w') = \prod_{i=1}^{j} \left\{\left(w' + \frac{1}{2} w^{-1} + \ldots\right)^2 - w^3 \left(2 + \frac{1}{2} z w^{-2} - 7h_i w^{-3} + \ldots\right)^3\right\} \\ = w'^{2j} + j\frac{w'^{2j-1}}{w} + \ldots,$$

что невозможно, поскольку правый член не является полиномом от w. Следовательно *первая трансцендентная функция Пенлеве является существенно трансцендентной функцией, зависящей от двух параметров.*

Все же можно было бы предположить, что уравнение (I) имеет частные решения, которые входят алгебраически или могут быть выражены в классических трансцендентных функциях. Если бы решение $w(z)$ было алгебраическим, то его можно было разложить для больших значений $|z|$ в ряд вида

$$w = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_{\nu-2} z^{\nu-2} + \ldots$$

Если бы ν было отрицательным или равнялось нулю, то w и w' были бы конечны для $z = \infty$, следовательно уравнение не было бы удовлетворено. При $\nu > 0$, ν должно быть целым числом.

Предположим, что $w(z)$ — классическая трансцендентная функция; она должна удовлетворять алгебраическому диференциальному уравнению, отличному от (I). Исключая высшие производные между (I) и выведенными из него уравнениями, с одной стороны, и новым уравнением — с другой, получим уравнение вида

$$P(z, w, w') = 0,$$

где P — полином от w и w'. Но мы показали, что это невозможно, следовательно *не существует частного решения, которое могло бы быть приведено к известной функции.*

14 · 45. Асимптотическая зависимость между первой трансцендентной функцией Пенлеве и эллиптической функцией Вейерштрасса. Несмотря на то, что первая трансцендентная функция Пенлеве является существенно новой функцией, все же она асимптотически связана с эллиптической $\wp$-функцией[1]. Это свойство аналогично свойству функции Бесселя $J_n(z)$ при больших значениях[2] $|z|$

$$J_n(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right).$$

Уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 6w^2 - 6z^\mu$$

при $\mu = 1$ не отличается существенно от уравнения, удовлетворяемого трансцендентной функцией. Произведем преобразование

$$w = z^{\frac{1}{2}\mu} W, \quad Z = \frac{4}{\mu + 4} z^{\frac{1}{4}\mu + 1},$$

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 17 · 5; Watson, Bessel Functions, § 7 · 1.

[2] Boutroux, Ann. Éc. Norm., 3 (1913), 255; 31 (1914), 99. Вторая трансцендентная функция Пенлеве (уравнение II, § 14 · 4) асимптотически связана с эллиптической функцией sn (z) Якоби.

тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2W}{dZ^2}=6W^2-6-\frac{5\mu}{(\mu+4)Z}\cdot\frac{dW}{dZ}+\frac{4\mu(2-\mu)}{(\mu+4)^2Z^2}W.$$

Последнее уравнение можно сравнить с уравнением

$$\frac{d^2V}{dZ^2}=6V^2-6,$$

общее решение которого имеет вид

$$V=\wp(Z-\beta,\ 12,\ \gamma),$$

где β и γ — постоянные интегрирования. Из этого сравнения следует, что для больших значений $|Z|$

$$W\sim\wp(Z-\beta,\ 12,\ \gamma)$$

и что, если $w(z)$ — трансцендентная функция Пенлеве, то

$$w(z)\sim\wp\left(\frac{4}{5}z^{\frac{5}{4}}-\beta,\ 12,\ \gamma\right).$$

Этот вопрос был тщательно исследован Бутру, который определил область, где асимптотическое соотношение для определенных значений β и γ имеет смысл (подробное доказательство дано в указанной выше статье).

В заключение можно привести теорему, данную Пенлеве; уравнение

$$w(z)=A$$

имеет бесконечное число корней для некоторого значения постоянной A.

14 · 5. Уравнения второго порядка алгебраические относительно w. Общая задача нахождения необходимых и достаточных условий для того, чтобы общее решение уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2}=F(z,\ w,\ p)\qquad\left(p\equiv\frac{dw}{dz}\right)$$

не имело перемещающихся критических точек, когда функция F рациональна относительно p, алгебраическая относительно w и аналитическая относительно z, требует применения теории алгебраических функций[1].

---

[1] Нужно отметить, что если уравнение выражено в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\Phi(z,\ w,\ u,\ p),$$

где функция Φ — рациональна относительно w, u и p, а w и u связаны соотношением

$$H(z,\ w,\ u)=0,$$

где H — полином от w и u, коэфициенты которого аналитические функции z, то род зависимости $H=0$ равен 0 или 1. Если род равен нулю, уравнение приводимо к одному из перечисленных пятидесяти родов; если род равен единице, уравнение относится к одному из трех новых классов.

Независимо от перечисленных типов, имеются еще три типа уравнений, критические точки которых фиксированы. Они имеют вид

(I) $$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{6w^2 - \frac{1}{2}g_2}{4w^3 - g_2w - g_3}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + q(z)\frac{dw}{dz} + r(z)\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = u\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}, \\ \dfrac{du}{dz} = q(z)u + r(z); \end{cases}$$

поэтому его решение является полутрансцендентной функцией постоянных интегрирования. Изменением переменных система может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dZ} = U\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}, \\ \dfrac{dU}{dZ} = 0, \end{cases}$$

следовательно она эквивалентна уравнению

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = \frac{6W^3 - \frac{1}{2}g_2}{4W^3 - g_2W - g_3}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2$$

(§ 14 · 38, уравнение XLIX).

(I)I $$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{w-z}\right\}\frac{dw}{dz} + \frac{w(w-1)}{2z(z-1)(w-z)} + q(z)\sqrt{w(w-1)(w-z)}.$$

Общее решение поэтому является существенно трансцендентной функцией двух постоянных; оно может быть получено следующим образом. Пусть $u_1(z)$ будет любым решением

$$u'' - \frac{2z-1}{z(z-1)}u' + \frac{u}{4z(z-1)} = q(z),$$

пусть функция $\Lambda(u, z)$ определяется инверсией

$$\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w-z)}} = u$$

и пусть $2\omega_1$, $2\omega_2$ будут ее периодами, тогда общим решением рассматриваемого уравнения будет

$$u = \Lambda(u_1 + K_1\omega_1 + K_2\omega_2,\ z),$$

где K_1 и K_2 — постоянные интегрирования. Следовательно уравнение не приводит к какому-либо новому типу трансцендентной функции.

$$\text{(III)}\quad \frac{d^2w}{dz^2}=\left\{\frac{6w^2-\frac{1}{2}g_2}{4w^3-g_2w-g_3}+\frac{i\pi}{\omega\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+q(z)\frac{dw}{dz}+$$
$$+r(z)\sqrt{4w^3-g_2w-g_3},$$

где 2ω — любой период $\wp(u, g_2, g_3)$. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dz}=u\sqrt{4w^3-g_2w-g_3},\\[2mm] \dfrac{du}{dz}=\dfrac{i\pi}{\omega}u^2+q(z)u+r(z);\end{cases}$$

таким образом его решение является полутрансцендентной функцией постоянных интегрирования. Данная система может быть преобразована в систему

$$\begin{cases}\dfrac{dW}{dZ}=U\sqrt{4W^3-g_2W-g_3},\\[2mm] \dfrac{dU}{dZ}=\dfrac{i\pi}{\omega}U^2,\end{cases}$$

следовательно первоначальное уравнение эквивалентно

$$\frac{d^2W}{dZ^2}=\left\{\frac{6W^2-\frac{1}{2}g_2}{4W^3-g_2W-g_3}+\frac{i\pi}{\omega\sqrt{4W^3-g_2W-g_3}}\right\}\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2,$$

что является простейшим уравнением этого частного типа.

Возникает другой вопрос, который здесь не может быть подробно рассмотрен, именно: возможно ли особое решение уравнения, критические точки которого не фиксированы[1], если общее решение этого уравнения свободно от перемещающихся критических точек?

Следующий пример показывает, что это может иметь место. Общее решение уравнения

$$w''=-w^3w'+ww'\sqrt{4w'+w^4}$$

имеет вид

$$w=A\operatorname{tg}(A^2z+B);$$

особое решение

$$w=\sqrt[3]{\frac{4}{3(z-C)}},$$

где A, B и C — произвольные постоянные.

---

[1] Chazy, C. R. Acad. Sc. Paris, 148, (1909), 157.

14·6. Уравнения третьего и высших порядков. α-метод Пенлеве, давший возможность полного исследования уравнений второго порядка, может быть приложен к анализу уравнений третьего и высших порядков[1].

Как и выше, метод делится на две ступени: определение условий, необходимых для отсутствия перемещающихся критических точек, и последующее доказательство достаточности этих условий. Можно распространить этот метод для определения необходимых условий, но трудность доказательства достаточности этих условий увеличивается с увеличением порядка рассматриваемых уравнений.

---

[1] Painlevé, Bull. Soc. Math. France, 28 (1900), 252; Chazy, C. R. Acad. Sc. Paris, 145 (1907), 305, 1263; 149 (1909), 563; 150 (1910), 456; 151 (1910), 203; 155 (1912), 132; Acta Math., 34 (1911), 317; Garnier, C. R., 145 (1907), 308; 147 (1908), 915; Ann. Éc. Norm. (3), 29 (1912), 1.

ГЛАВА XV

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

15 · 1. Предварительное исследование особых точек. Рассмотрим ряд уже установленных теорем, относящихся к однородному линейному уравнению порядка n

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)\, w = 0.$$

Пусть z_0 будет некоторой точкой, в соседстве с которой n коэфициентов аналитические. Согласно теореме существования § 12 · 22, имеется единственное решение, которое вместе с его $n-1$ производными принимает некоторые значения при $z = z_0$. Это решение может быть выражено в виде степенного ряда относительно $z - z_0$, который сходится внутри круга с центром в z_0 и окружность которого проходит через особую точку коэфициентов, лежащую наиболее близко к z. Иначе говоря, особенностями решений могут быть только особенности уравнения, поэтому, если уравнение линейно, то перемещающиеся особенности и даже перемещающиеся полюсы возникнуть не могут.

С другой стороны, общая теория линейных уравнений с вещественными коэфициентами, рассмотренная в главе V, может быть полностью перенесена в комплексную область с некоторыми формальными изменениями в доказательстве. В частности, если

$$w_1, \ w_2, \ldots, w_n$$

представляют n независимых решений, образующих фундаментальную последовательность, то вронскиан

$$\Delta(w_1, \ w_2, \ldots, w_n)$$

не может обратиться в нуль при $z = z_0$.

Поскольку

$$\Delta = \Delta_0 \exp\left\{-\int_{z_0}^{z} p_1(z)\, dz\right\},$$

где Δ_0 — значение Δ при $z = z_0$, а путь интегрирования ограничен в области, содержащей z_0, внутри которой функция $p_1(z)$ аналитическая,— очевидно, что Δ не может обратиться в нуль ни в какой точке, кроме особой точки $p_1(z)$.

Точка в бесконечности может быть или не быть особой точкой в зависимости от того, имеют ли коэфициенты уравнения, полученного подстановкой

$$z = \zeta^{-1}$$

и последующим приведением его к форме (A), особенности в начале.

Таким образом особые точки могут быть найдены рассмотрением уравнения. Для любой неособой точки можно найти фундаментальную последовательность n независимых решений. Необходимо определить, существует ли фундаментальная последовательность решений, относящихся к любой данной особой точке и, доказав существование этих решений, исследовать их поведение в соседстве с особой точкой. Это исследование приводит к так называемой *теории Фукса* линейных диференциальных уравнений[1].

15 · 2. Замкнутые контуры, содержащие особые точки. Предположим, что коэфициенты уравнения (A) однозначны и имеют только изолированные особые точки. Пусть

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

будет фундаментальной последовательностью решений и пусть z_0 будет любой обыкновенной (т. е. неособой) точкой уравнения.

Проведем простой замкнутый контур γ, начинающийся и заканчивающийся в z_0, не проходящий через какую-либо особую точку, но возможно содержащий внутри себя одну или несколько особых точек. Пусть после того, как переменная z описала контур в положительном направлении, последовательность w_1, $w_2, \ldots, w_n$ преобразуется соответственно в $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Определение $W_1, W_2, \ldots, W_n$ может быть проведено процессом аналитического продолжения с конечным числом ступеней[2].

Поскольку коэфициенты $p_1(z), p_2(z), \ldots, p_n(z)$ не изменяются при построении этого контура, уравнение в целом не изменяется, т. е. функции

$$W_1, W_2, \ldots, W_n$$

являются решениями (A); они могут быть поэтому выражены линейно посредством фундаментальной системы $w_1, w_2, \ldots, w_n$ следующим образом

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} W_1 &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n, \\ W_2 &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_n &= a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n, \end{aligned} \right.$$

---

[1] Riemann (Posthumous Fragment. 1857), Ges. Werke (2 изд.), 379; Fuchs. J. für Math. 66 (1866), 121; 68 (1868), 354 (Ges. Werke, I, 159, 205).

[2] Если длина окружности равна l, а расстояние между некоторой особой точкой до некоторой точки на окружности больше d, то число необходимых ступеней будет не больше N, где N — целое число больше $l/2d$ и ближайшее к нему.

где коэфициенты a — численные постоянные.

В любой точке z на контуре

$$\Delta(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \Delta_0 \exp\{-\int_{z_0}^{z} p_1(z)\,dz\},$$

причем интеграл описывается от z_0 к z и вдоль ветви контура, по отношению к которой внутренняя часть контура находится слева. Пусть Δ_1 будет значением вронскиана, после того как описан полный контур γ, тогда

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_0 \exp\{-\int_{\gamma} p_1(z)\,dz\}\\ &= e^{-2\pi i R}\Delta_0,\end{aligned}$$

где R — сумма вычетов $p_1(z)$ относительно полюсов, лежащих внутри контура. Так

$$\Delta(W_1, W_2, \ldots, W_n)$$

не равно нулю при $z = z_0$, и поскольку в некоторой обыкновенной точке z

$$\Delta(W_1, W_2, \ldots, W_n) = \Delta_1 \exp\{-\int_{z_0}^{z} p_1(z)\,dz\} \neq 0,$$

$W_1, W_2, \ldots, W_n$ образуют фундаментальную последовательность решений.

Необходимо отметить, что

$$\begin{aligned}|a_{rs}| &= \frac{\Delta(W_1, W_2, \ldots, W_n)}{\Delta(w_1, w_2, \ldots, w_n)}\\ &= \Delta_1/\Delta_0 \neq 0.\end{aligned}$$

Теперь, поскольку эти предварительные результаты установлены, можно определить постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ так, чтобы частное решение

$$u = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n,$$

после того как контур был полностью один раз описан, приняло значение su, где s — численная постоянная. Пусть, после того как контур был полностью описан, u преобразуется в U, тогда

$$U = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \ldots + \lambda_n W_n,$$

так что, если $U = su$, то

$$s(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r (a_{r1} w_1 + a_{r2} w_2 + \ldots + a_{rn} w_n).$$

Это соотношение справедливо и следовательно

(C) $$s\lambda_r = \lambda_1 a_{1r} + \lambda_2 a_{2r} + \ldots + \lambda_r a_{rr} + \ldots + \lambda_n a_{nr} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Если из этой последовательности совместных уравнений мы исключим неопределенные постоянные λ_r, то найдем уравнение, определяющее s, именно

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{21}, \ldots, a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}-s, \ldots, a_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}, & a_{2n}, \ldots, a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0$$

Это определяющее уравнение называется *характеристическим уравнением* выбранной системы. Оно не может иметь нулевого корня, так как в этом случае $|a_{rs}|$ равнялся бы нулю. что противоречит условию, что выбранная система является фундаментальной. Некоторому значению s, удовлетворяющему характеристическому уравнению, соответствует последовательность постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, отношения которых могут быть вычислены из уравнений (С). Они приводят к решению u, определенному независимо от постоянного множителя, которое, после того как точка z полностью описала контур γ, принимает значение su.

Характеристическое уравнение *инвариантно*, т. е. не зависит от первоначального выбора фундаментальной системы. Пусть

$$v_1,\ v_2, \ldots, v_n$$

будет фундаментальной системой, отличной от первоначально выбранной; она должна быть связана линейной зависимостью следующим образом

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 + \ldots + c_{1n}w_n, \\ v_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 + \ldots + c_{2n}w_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n &= c_{n1}w_1 + c_{n2}w_2 + \ldots + c_{nn}w_n, \end{aligned}$$

где коэфициенты c_{rs} — постоянные, так что $|c_{rs}| \neq 0$. Предположим, что после того как контур был описан, решения $v_1, v_2, \ldots, v_n$ соответственно равны $V_1, V_2, \ldots, V_n$, тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + \ldots + A_{1n}v_n, \\ V_2 &= A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + \ldots + A_{2n}v_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ V_n &= A_{n1}v_1 + A_{n2}v_2 + \ldots + A_{nn}v_n, \end{aligned}$$

где $|A_{rs}| \neq 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} V_r &= \sum_{s=1}^{n} A_{rs}(c_{s1}w_1 + c_{s2}w_2 + \ldots + c_{sn}w_n), \\ V_r &= c_{r1}W_1 + c_{r2}W_2 + \ldots + c_{rn}W_n \\ &= \sum_{s=1}^{n} c_{rs}(a_{s1}w_1 + a_{s2}w_2 + \ldots + a_{sn}w_n). \end{aligned}$$

Следовательно, сравнивая коэфициенты при w_l, получим

$$\sum_{s=1}^{n} A_{rs}c_{st} = \sum_{s=1}^{n} c_{rs}a_{st} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ t = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Теперь, согласно этим соотношениям, произведение[1]

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, \ldots, c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, \ldots, c_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n1}, & c_{n2}, \ldots, c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{21}, \ldots, a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22} - s, \ldots, a_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}, & a_{2n}, \ldots, a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

и произведение

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{21}, \ldots, c_{n1} \\ c_{12}, & c_{22}, \ldots, c_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{1n}, & c_{2n}, \ldots, c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} - s, & A_{12}, \ldots, A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - s, \ldots, A_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2}, \ldots, A_{nn} - s \end{vmatrix}$$

равны между собой. Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{21}, \ldots, a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22} - s, \ldots, a_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}, & a_{2n}, \ldots, a_{nn} - s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} - s, & A_{21}, \ldots, A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22} - s, \ldots, A_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1n}, & A_{2n}, \ldots, A_{nn} - s \end{vmatrix}$$

относительно s.

15 · 21. Неповторяющиеся (некратные) корни характеристического уравнения. Пусть характеристическое уравнение имеет n неравных корней $s_1, s_2, \ldots, s_n$, тогда существует n решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые, после того как контур был описан, принимают значения $U_1, U_2, \ldots, U_n$ соответственно, где

$$U_1 = s_1u_1, \; U_2 = s_2u_2, \ldots, U_n = s_nu_n.$$

Решения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ эквивалентны первоначальной последовательности и образуют фундаментальную систему.

Рассмотрим, в частности, случай, когда контур содержит только одну особую точку[2], например $z = \zeta$ и рассмотрим многозначную функцию $(z - \zeta)^\rho$. После того как был описан полный контур, эта функция принимает вид $e^{2\pi i\rho}$ $(z - \zeta)^\rho$. Пусть индекс ρ_k выбран таким образом, что

$$s_k = e^{2\pi i \rho_k},$$

---

[1] В качестве контура здесь удобно рассматривать круг $|z - \zeta| = R$, где, если z_1 — ближайшая особая точка к ζ, то R — некоторое число, меньшее $|z_1 - \zeta|$.

[2] ζ называется также *точкой неопределенности*.

тогда функция

$$\varphi(z-\zeta)=(z-\zeta)^{-\rho_k}\,u_k,$$

после того как будет описан полный контур вокруг точки ζ, примет свое первоначальное значение; иначе говоря $\varphi(z-\zeta)$ — однозначная функция z в области точки ζ.

Более того, индекс ρ_k является неопределенным в том смысле, что он может быть заменен на $\rho_k \pm m$, где m — любое положительное целое число. Если ρ_k может быть так определен, чтобы функция $\varphi_k(0)$ была конечна, но не равна нулю, то решение называется регулярным. Следовательно регулярным является такое решение, которое может быть выражено в виде

$$u_k=(z-\zeta)^{\rho_k}\,\varphi_k(z-\zeta),$$

где

$$\varphi(z-\zeta)=O(1) \text{ при } z\to\zeta.$$

Индекс ρ_k является *k-ым показателем, относящимся к регулярной особой точке* $z=\zeta$.

Если ρ_k не может быть так определена, то функция $\varphi_k(z-\zeta)$ (а следовательно и u_k) имеет существенную особенность в точке $z=\zeta$; решение в данном случае называется нерегулярным. Это имеет место, например, когда

$$\varphi(z-\zeta)=e^{1/(z-\zeta)}.$$

15 · 22. Случай кратных корней. Предположим, что характеристическое уравнение имеет кратные корни, например, корень s_1 повторяется m_1 раз, s_2 повторяется m_2 раз и т. д., до конца нумерации, тогда

$$m_1+m_2+\ldots=n.$$

Докажем[1], что соответственно некоторому корню s кратности m существует подпоследовательность $\mu\,(\leqslant m)$ линейно независимых решений

$$v_1,\ v_2,\ldots,v_\mu\,,$$

которые, после того как был описан контур, принимают соответственно значения

$$sv_1,\ s(v_2+v_1),\ldots,s(v_\mu+v_{\mu-1})$$

Остальные решения $v_{\mu+1},\ v_{\mu+2},\ldots,v_m$ приводят к другим подпоследовательностям с тем же множителем s. Иначе говоря, нужно доказать, что последовательность n линейных преобразований (§ 15 · 2, B) может быть заменена некоторым числом подпоследовательностей типа

$$V_1=sv_1,\ \ V_2=s(v_2+v_1),\ldots,V_\mu=s(v_\mu+v_{\mu-1}),$$

где $v_1,\ v_2,\ldots,v_\mu$ — линейные комбинации $w_1,\ w_2,\ldots,w_n$. Докажем

[1] Fuchs, J. für Math., 66 (1866), 136 [Ges. Werke, I, 174]; Hamburger, J. für Math., 76 (1873), 121.

это методом индукции, причем сначала примем, что это правильно в отношении $(n-1)$-кратной системы, а затем уже выведем его правильность для n-кратной системы.

Пусть σ — некоторый корень характеристического уравнения; тогда будет существовать решение v такое, что

$$V = \sigma v.$$

Из решений $w_1, w_2, \ldots, w_n$ по меньшей мере $n-1$ линейно независимы относительно v; пусть это будет $w_2, \ldots, w_n$. После того, как был построен контур они принимают значения $W_2, \ldots, W_n$ соответственно, где

$$(C) \qquad \begin{cases} W_2 = b_2 v + b_{22} w_2 + \ldots + b_{2n} w_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_n = b_n v + b_{n2} w_2 + \ldots + b_{nn} w_n, \end{cases}$$

но

$$\begin{vmatrix} s, & 0, \ldots, 0 \\ b_2, & b_{22}, \ldots, b_{2n} \\ b_n, & b_{n2}, \ldots, b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

откуда следует, что

$$|b_{ij}| \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Напишем

$$W_2 - b_2 v = W_2', \ldots, W_n - b_n v = W_n',$$

тогда

$$(C') \qquad \begin{cases} W_2' = b_{22} w_2 + \ldots + b_{2n} w_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_n' = b_{n2} w_2 + \ldots + b_{nn} w_n \end{cases}$$

— последовательность линейных преобразований $n-1$ символов, с детерминантом, не равным нулю. Согласно принятому условию следует, что $w_2, \ldots, w_n$ могут быть заменены линейными комбинациями этих символов, например

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1},$$

которые принимают значения $U_1', U_2', \ldots, U_{n-1}'$, после того как был описан контур.

Система (C') преобразуется в

$$U_1' = s u_1, \; U_2' = s(u_2 + u_1), \ldots, U_\mu' = s(u_\mu + u_{\mu-1})$$

вместе с другими аналогичными подпоследовательностями и дает в общем $n-1$ уравнений. Но если преобразование, которое изменяет $w_2, \ldots, w_n$ в $u_1, \ldots, u_{n-1}$, вместо системы (C') приложить к системе (С), то последняя примет вид

$$U_1 = su_1 + k_1v,\ U_2 = s(u_2 + u_1) + k_2v, \ldots, U_\mu = s(u_\mu + u_{\mu-1}) + k_\mu v,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ — определенные постоянные, зависящие от некоторых коэфициентов b_r. Напишем

$$u_1 = v_1 + \lambda_1 v,\ u_2 = v_2 + \lambda_2 v, \ldots, u_\mu = v_\mu + \lambda_\mu v,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ — произвольные постоянные. Пусть определенные таким образом величины $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ примут значения $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$, когда $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ принимают значения $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$, так что

$$U_1 = V_1 + \lambda_1 \sigma v,\ U_2 = V_2 + \lambda_2 \sigma v, \ldots, U_\mu = V_\mu + \lambda_\mu \sigma v,$$

тогда

$$(C'')\quad \begin{cases} V_1 = sv_1 + \{k_1 - (\sigma - s)\lambda_1\} v, \\ V_r = s(v_r + v_{r-1}) + \{k_r - (\sigma - s)\lambda_r + s\lambda_{r-1}\} v \end{cases} \quad (r = 2, 3, \ldots, \mu).$$

Допустим, что $\sigma \neq s$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ могут быть выбраны таким образом, чтобы коэфициент v был равен нулю в каждом отдельном случае. Тогда последовательность подстановок принимает *каноническую форму*

$$V_1 = sv_1,\ V_2 = s(v_2 + v_1), \ldots, V_\mu = s(v_\mu + v_{\mu-1}).$$

Предположим, что $\sigma = s$, тогда, если $k_1 = 0$, то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mu-1}$ могут быть выбраны таким образом, чтобы коэфициент при V обратился в нуль, а последовательность подстановок снова приняла бы показанную выше каноническую форму. С другой стороны, если $k_1 \neq 0$, то v может быть везде заменено на sv/k_1, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mu-1}$ могут быть выбраны таким образом, чтобы все коэфициенты при v во всех уравнениях, за исключением первого, обратились в нуль. Каноническая последовательность подстановок примет тогда вид

$$V = sv,\ V_1 = s(v_1 + v),\ V_2 = s(v_2 + v_1), \ldots, V_\mu = s(v_\mu + v_{\mu-1}).$$

Могут возникнуть также две или больше последовательностей подстановок (С″) с тем же множителем[1] $s = \sigma$. Они могут быть приведены при соответствующем выборе постоянной λ к виду

$$V_1 = sv_1 + k_1 v,\ V_2 = s(v_2 + v_1), \ldots, V_\mu = s(v_\mu + v_{\mu-1}),$$

$$V_{\mu+1} = sv_{\mu+1} + k_1' v,\ V_{\mu+2} = s(v_{\mu+2} + v_{\mu+1}), \ldots, V_\nu = s(v_\nu + v_{\nu-1})$$

и т. д., причем принимается, что $k_1 \neq 0$, $k_1' \neq 0, \ldots$ Как и выше, при

[1] При наличии последовательности подстановок с множителем $s \neq \sigma$ специальное рассмотрение не обязательно, так как приведение каждой последовательности к канонической форме следует непосредственно. Рассматриваемый случай: когда $s = \sigma$, $k_1 \neq 0$, $k_1' \neq 0$ и т; д., является единственным, требующим специального рассмотрения.

подстановке sv/k_1 вместо v, s вместо k_1, первая последовательность, взятая вместе с подстановкой $V = sv$, становится канонической. Во второй последовательности напишем

$$v_{\mu+r} = v'_{\mu+r} + k_1' v_r/k_1,$$

$$V_{\mu+r} = V'_{\mu+r} + k_1' V_r/k_1,$$

тогда

$$V'_{\mu+1} = sv'_{\mu+1}, \quad V'_{\mu+2} = s(v'_{\mu+2} + v'_{\mu+1}) \ldots V'_\nu = s(v'_\nu + v'_{\nu-1})$$

имеет каноническую форму. Другие подпоследовательности рассматриваются аналогично. Следовательно первая часть теоремы доказана, именно: если последовательность $n-1$ подстановок может быть приведена к канонической форме, то последовательность n подстановок может быть также приведена. Но если $n=1$, то теорема очевидно верна, а так как она тривиальна, то она верна и в общем случае.

15·23. Решения канонической подпоследовательности. Мы доказали, что соответственно m-кратному корню s характеристического уравнения существует последовательность m решений

$$v_1, \ v_2, \ldots, v_m,$$

которые, после того как контур был описан, могут быть расположены в подпоследовательности так, что если решения имеют вид

$$V_1, \ V_2, \ldots, V_m,$$

то

$$V_1 = sv_1, \quad V_2 = s(v_2 + v_1), \ldots, V_\mu = s(v_\mu + v_{\mu-1}),$$
$$V_{\mu+1} = sv_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2} = s(v_{\mu+2} + v_{\mu+1}), \ldots, V_\nu = s(v_\nu + v_{\nu-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассмотрим первую подпоследовательность, принимая, как и выше, что контур содержит только одну особую точку $z = \zeta$. Рассмотрим природу μ решений, составляющих эту подпоследовательность.

Как и выше

$$v_1 = (z-\zeta)^\rho \varphi_1(z-\zeta),$$

где

$$s = e^{2\pi i\rho},$$

а функция $\varphi_1(z-\zeta)$ однозначна в области точки ζ.

Теперь

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{v_2}{v_1} + 1,$$

т. е. $v_1 v_1$ — квазипериодическая функция $z-\zeta$. Но функция $\frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta)$ имеет ту же квазипериодичность, так как после того как контур был описан в положительном направлении вокруг точки ζ, функция $\frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta)$ примет значение $\frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta)+1$.

Следовательно, после того как контур был описан, разность

$$\frac{v_2}{v_1} - \frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta)$$

имеет свое начальное значение, поэтому

$$\frac{v_2}{v_1} - \frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta) = \psi_1(z-\zeta),$$

где функция $\psi_1(z-\zeta)$ однозначна в области ζ. Отсюда

$$v_2 = (z-\zeta)^\rho \left\{\frac{1}{2\pi i}\varphi_1(z-\zeta)\log(z-\zeta) + \varphi_2(z-\zeta),\right\}$$

где

$$\varphi_2(z-\zeta) = \varphi_1(z-\zeta)\psi_1(z-\zeta).$$

Произведем подстановку

$$t = \frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta)$$

и пусть

$$v_r = (z-\zeta)^\rho u_r.$$

Тогда, если переменная z описывает простой контур в положительном направлении вокруг точки ζ, t увеличивается до $t+1$, следовательно функции u_r, рассматриваемые как функции t, удовлетворяют квазипериодическим соотношениям

$$u_r(t+1) = u_r(t) + u_{r-1}(t). \qquad (r \geqslant 2)$$

Эти соотношения удовлетворяются, если принять $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$, а также если принять, что $u_r\ (t)$ — полином

$$C_r t(t-1)\ldots(t-r+2).$$

Постоянная C_r должна удовлетворять соотношению

$$(r-1)C_r = C_{r-1} \qquad (C_1 = 1),$$

следовательно

$$C_r = 1/(r-1)! \qquad (r \geqslant 2).$$

Таким образом мы нашли частное решение функционального уравнения, которое удовлетворяется $u_r(t)$. Обозначим это решение через $\theta_r(t)$, так что

$$\theta_r(t) = \frac{t(t-1)\ldots(t-r+2)}{(r-1)!},$$

и рассмотрим функцию

$$\Theta_r(t) = \theta_r(t)\chi_1(t) + \theta_{r-1}(t)\chi_2(t) + \ldots + \theta_1(t)\chi_r(t),$$

где каждая функция $\chi(t)$ такова, что

$$\chi_s(t+1) = \chi_s(t).$$

Тогда

$$\Theta_r(t+1)-\Theta_r(t)=\sum_{s=1}^{r}\chi_{r-s+1}(t)\{\theta_s(t+1)-\theta_s(t)\}$$

$$=\sum_{s=2}^{r}\chi_{r-s+1}(t)\,\theta_{s-1}(t)$$

$$=\Theta_{r-1}(t)$$

и следовательно

$$u_r(t)=\Theta_r(t) \qquad (r=2, 3, \ldots, \mu)$$

является решением системы соотношений

$$u_r(t+1)=u_r(t)+u_{r-1}(t).$$

Возвращаясь к переменной z, видим, что функции $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ имеют вид

$$v_1=(z-\zeta)^\rho\,\varphi_1(z-\zeta),$$

$$v_2=(z-\zeta)^\rho\,\{\theta_2\varphi_1(z-\zeta)+\varphi_2(z-\zeta)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_\mu=(z-\zeta)^\rho\,\{\theta_\mu\,\varphi_1(z-\zeta)+$$

$$+\theta_{\mu-1}\varphi_2(z-\zeta)+\ldots+\varphi_\mu(z-\zeta)\},$$

где θ_r написано вместо

$$\theta_r\left\{\frac{1}{2\pi i}\log(z-\zeta)\right\}$$

и где везде принято одинаковое определение логарифма, а функции $\varphi_r(z-\zeta)$ однозначны в соседстве с точкой ζ.

Остальные подпоследовательности, имеющие тот же множитель, могут рассматриваться совершенно аналогично. Так, если s — кратный корень характеристического уравнения, то в общее решение входят члены, имеющие логарифмические множители. Этот случай часто называется *логарифмическим* (см. § 6·3).

Пример. Уравнение

$$z^2(z+1)\frac{d^2w}{dz^2}-z^2\frac{dw}{dz}+\frac{1}{4}(3z+1)\,w=0$$

имеет два линейно независимых решения

$$w_1=z^{\frac{1}{2}},\quad w_2=z^{\frac{1}{2}}\log z+z^{\frac{3}{2}}.$$

Если z описывает контур в положительном направлении вокруг начала, то эти решения соответственно принимают вид

$$W_1=-z^{\frac{1}{2}}=-w_1,\quad W_2=-z^{\frac{1}{2}}(\log z+2\pi i)-z^{\frac{3}{2}}=-w_2-2\pi i w_1$$

Характеристическое уравнение поэтому будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -1-s, & 0 \\ -2\pi i, & -1-s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(s+1)^2 = 0.$$

Любое решение вида

$$w = (z-\zeta)^\rho \{t^r \varphi_1(z-\zeta) + t^{r-1} \varphi_{r1}(z-\zeta) + \ldots + \varphi_{rr}(z-\zeta)\},$$

где ζ — обыкновенная точка или полюс функций φ, называется *регулярным решением*[1]. Если все n решений, относящиеся к точке ζ, регулярны, то ζ называется *регулярной особой точкой* уравнения. Если какая-либо из функций φ имеет существенную особенность в точке ζ, то ζ называется *нерегулярной особой точкой* уравнения.

15·24. Метод получения решений канонических последовательностей. Исходя из уравнения

$$v_1 = (z-\zeta)^\rho \varphi_1(z-\zeta),$$

напишем

$$w = v_1 \int v_{12} dz,$$

тогда v_{12} будет удовлетворять однородному линейному уравнению порядка $n-1$, которое имеет не меньше одного однозначного решения; пусть этим однозначным решением будет v_{12}. Для корня s соответствующее характеристическое уравнение степени $n-1$ выпадает, а каноническая подпоследовательность

$$V_1 = sv_1, \; V_2 = s(v_2 + v_1), \ldots, \; V_\mu = s(v_\mu + v_{\mu-1})$$

заменяется на

$$V_{12} = sv_{12}, \; V_{13} = s(v_{13} + v_{12}), \ldots, \; V_{1\mu} = s(v_{1\mu} + v_{1,\mu-1}).$$

Теперь напишем

$$w = v_1 \int v_{12} \int v_{23} (dz)^2$$

и повторим процесс. Таким образом возникает последовательность μ решений, соответствующих канонической подпоследовательности, именно (см. § 5·21)

$$\begin{aligned} v_1 &= (z-\zeta) \; \varphi_1(z-\zeta), \\ v_2 &= v_1 \int v_{12} dz, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_r &= v_1 \int v_{12} \int v_{23} \ldots \int v_{r-1,r} \; (dz)^{r-1} \quad (r = 2, 3, \ldots, \mu), \end{aligned}$$

где $v_{12}, v_{23}, \ldots, v_{r-1,r}$ — все однозначны в области ζ. Поскольку все эти функции однозначны, получим

$$v_r = (z-\zeta)^\rho \{t^r \varphi_{r0}(z-\zeta) + t^{r-1} \varphi_{r1}(z-\zeta) + \ldots + \varphi_{rr}(z-\zeta)\},$$

где $t^r = \log(z-\zeta)$, а φ_{r0} — постоянная, кратная φ_1.

---

[1] Thomé, J. für Math. 75(1873), 266.

15·3. Необходимое условие для регулярной особенности. Приведенное выше исследование имеет теоретическое значение, потому что оно выявляет характер общего решения уравнения, относящегося к любой из его особых точек. Однако, оно мало способствует разрешению более сложной задачи определения явной формы общего решения. Мы достигли предела, дальше которого практически невозможно продолжать исследование, не налагая некоторых ограничений на уравнение или на его решения. Путь, который в данном случае нужно принять, весьма ясно указывается следующей теоремой[1].

Для того, чтобы точка $z = \zeta$ была регулярной особой точкой уравнения

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)w = 0$$

необходимо и достаточно условие

$$p_r(z) = (z - \zeta)^{-r} P(z), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где функция $P(z)$ аналитическая в соседстве с ζ.

Мы не потеряем в общности, если предположим, что точка ζ является началом. Сначала докажем необходимость этого условия для $z = 0$. Выше мы показали, что всегда существует решение

$$w_1 = z^\rho \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ — однозначна в области начала, и, принимая, что это решение регулярно, $\varphi(0) \neq 0$. Теперь пусть

$$w = w_1 \int v dz$$

будет решением уравнения, тогда v удовлетворяет диференциальному уравнению вида

$$\frac{d^{n-1}v}{dz^{n-1}} + q_1(z)\frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}} + \ldots + q_{n-1}(z)v = 0;$$

если w — регулярное решение, то v также должно быть регулярным. Но коэфициенты q могут быть выражены посредством w_1 и коэфициентов p следующим образом

$$q_1 = \frac{1}{w_1}\left\{n\frac{dw_1}{dz} + p_1 w_1\right\},$$

$$q_r = \frac{1}{w_1}\left\{{}_nC_r\frac{d^r w_1}{dz^r} + {}_{n-1}C_{r-1}\, p_1\frac{d^{r-1}w_1}{dz^{r-1}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (n - r + 1)p_{r-1}\frac{dw_1}{dz} + p_r w_1\right\}.$$

[1] Fuchs, J. für Math., 66 (1866), 143; 68 (1868), 358; Tannery, Ann. Ec. Norm. (2), 4 (1875), 135.

Рассмотрим сначала простой случай $n=1$; уравнение

$$\frac{dw}{dz}+p_1w=0$$

имеет решение

$$w=Ce^{-\int p_1dx},$$

и для того, чтобы это решение было регулярным, необходимо, чтобы p_1 приняла форму $z^{-1}f_1(z)$, где $f_1(z)$—аналитическая функция вблизи начала. Далее, рассмотрим случае $n=2$. Уравнение относительно v первого порядка, следовательно вблизи начала

$$q_1(z)=O(z^{-1})$$

и

$$\frac{1}{w_1}\cdot\frac{dw_1}{dz}=O(z^{-1}).$$

Отсюда, как и в первом случае,

$$p_1(z)=z^{-1}f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — функция, аналитическая в соседстве с началом. Но

$$p_2=-\frac{1}{w_1}\left\{\frac{d^2w_1}{dz^2}+p_1\frac{dw_1}{dz}\right\},$$

и поскольку вблизи начала

$$\frac{1}{w_1}\cdot\frac{d^2w_1}{dz^2}=O(z^{-2}),$$

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dz}=O(z^{-1}),$$

$$p_1=O(z^{-1}),$$

p_2 равно $z^{-2}f_2(z)$, где функция $f_2(z)$ аналитическая в соседстве с $z=0$.

Доказательство теперь завершается, пользуясь методом индукции. Предположим, что теорема верна для уравнения порядка $n-1$; так, в уравнении для v допустим, что

$$q_r(z)=z^{-r}g_r(z) \qquad (r=1,2,\ldots,n-1),$$

где $g_r(z)$ — функция, аналитическая в начале. Тогда из выражений для коэфициентов p непосредственно следует, что

$$p_r(z)=z^{-r}f_r(z) \qquad (r=1,2,\ldots,n-1),$$

где $f_r(z)$ функция, аналитическая в начале. Остается доказать, что $p_r(z)$ имеет указанное значение при $r=n$. Но это следует непосредственно из уравнения

$$p_n(z) = -\frac{1}{w_1}\left\{\frac{d^n w_1}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} w_1}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{dw_1}{dz}\right\}.$$

Следовательно указанное условие необходимо.

15·31. Достаточность условия для регулярной особой точки. Докажем, что если в уравнении

$$\frac{d^n w}{dz^n} + z^{-1}P_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + z^{-n+1}P_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + z^{-n}P_n(z)\,w = 0,$$

все функции $P(z)$ аналитические в соседстве с началом, то уравнение имеет фундаментальную последовательность n решений, регулярных в начале.

Это уравнение может быть заменено системой

$$\begin{cases} w = w_1, \; z\dfrac{dw_1}{dz} = w_2, \ldots, \; z\dfrac{dw_{n-1}}{dz} = w_n, \\ z\dfrac{dw_n}{dz} = A_1(z)\,w_1 + A_2(z)\,w_2 + \ldots + A_n(z)\,w_n, \end{cases}$$

где $A_1(z), \ldots, A_n(z)$ — линейные комбинации $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ с постоянными коэфициентами, следовательно аналитические вблизи $z = 0$.

Вместо указанной системы целесообразно рассмотреть более общую систему

$$\begin{cases} z\dfrac{dw_1}{dz} = A_{11}w_1 + A_{12}w_2 + \ldots + A_{1n}w_n, \\ z\dfrac{dw_2}{dz} = A_{21}w_1 + A_{22}w_2 + \ldots + A_{2n}w_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z\dfrac{dw_n}{dz} = A_{n1}w_1 + A_{n2}w_2 + \ldots + A_{nn}w_n, \end{cases}$$

где все коэфициенты A аналитические в соседстве с началом. Докажем, что при наложении некоторого ограничения (которое должно быть впоследствии устранено) существует последовательность решений этой системы, регулярных в начале, *а также свободных от логарифмических членов*, именно

$$w_1 = z^r u_1, \; w_2 = z^r u_2, \ldots, \; w_n = z^r u_n,$$

где r — некоторая постоянная, а функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$ все аналитические в начале. Постоянная r может быть выбрана таким образом, что если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — значения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ при $z = 0$, то хотя бы одно из чисел c не равно нулю. Пусть a_{rs} будет значением A_{rs} при $z = 0$, тогда, подставляя в систему значения $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и приравнивая нулю коэфициент при z^r

в каждом уравнении, получим следующую последовательность соотношений

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}-r)c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1n}c_n=0,\\
&a_{21}c_1+(a_{22}-r)c_2+\ldots+a_{2n}c_n=0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\ldots+(a_{nn}-r)c_n=0.
\end{aligned}
$$

Исключая неизвестные коэфициенты c_r из этой системы, найдем *определяющее уравнение* для r, именно

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-r, & a_{12},\ldots, & a_{1n}\\
a_{21}, & a_{22}-r,\ldots, & a_{2n}\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a_{n1}, & a_{n2},\ldots, & a_{nn}-r
\end{vmatrix}=0;
$$

Обозначим его корни, которые могут быть не все независимые, через

$$r_1,\ r_2,\ldots,\ r_n.$$

Теперь, если мы вместо $z\frac{dw_1}{dz},\ z\frac{dw_2}{dz},\ldots,\ z\frac{dw_n}{dz}$ подставим соответственно $W_1,\ W_2,\ldots,\ W_n$, то рассматриваемая система примет вид

$$
\begin{aligned}
W_1&=a_{11}w_1+a_{12}w_2+\ldots+a_{1n}w_n+O(z,\ w),\\
W_2&=a_{21}w_1+a_{22}w_2+\ldots+a_{2n}w_n+O(z,\ w),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
W_n&=a_{n1}w_1+an_2w_2+\ldots+a_{nn}w_n+O(z,\ w),
\end{aligned}
$$

где $O(z,\ w)$ — линейные выражения для $w_1,\ w_2,\ldots,\ w_n$, коэфициенты которых являются аналитическими функциями z, обращающимися в нуль в начале. Независимо от членов $O(z,\ w)$ эта последовательность линейных подстановок аналогична последовательности § 15·2, хотя она получена совершенно иначе. Если пренебречь членами $O(z,\ w)$, то $w_1,\ w_2,\ldots,\ w_n$ могут быть заменены комбинациями этих величин, именно $v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n$ так что, если все корни определяющего уравнения неравны, то система примет вид

$$V_1=r_1v_1,\quad V_2=r_2v_2,\ldots,\quad V_n=r_nv_n.$$

Производя точно такое же приведение системы при наличии членов $O(z,\ w)$, можем заменить ее системой

$$
\begin{aligned}
V_1&=r_1v_1+O(z,\ w),\\
V_2&=r_2v_2+O(z,\ w),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
V_n&=r_nv_n+O(z,\ v).
\end{aligned}
$$

Если корни определяющего уравнения не все независимы, то система может быть заменена некоторым рядом вспомогательных систем

$$V_1 = r_1 v_1 + O(z, v) \qquad V_{\mu+1} = r_2 v_{\mu+1} + O(z, v),$$

$$V_2 = r_1(v_2 + v_1) + O(z, v), \qquad V_{\mu+2} = r_2(v_{\mu+2} + v_{\mu+1}) + O(z, v),$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

$$V_\mu = r_1(v_\mu + v_{\mu-1}) + O(z, v), \qquad V_\nu = r_2(v_\nu + v_{\nu-1}) + O(z, v)$$

и т. д. Так как последний случай включает также и первый, мы рассмотрим только последний случай. Преобразуем систему подстановкой

$$v_1 = z^{r_1}\varphi_1(z), \quad v_2 = z^{r_1}\varphi_2(z), \dots, \quad v_n = z^{r_1}\varphi_n(z),$$

тогда, поскольку $V_1, V_2, \dots, V_n$ являются такими же линейными комбинациями относительно $W_1, W_2, \dots, W_n$, как и $v_1, v_2, \dots, v_n$ относительно $w_1, w_2, \dots, w_n$, отсюда следует, что

$$V_1 = z\frac{dv_1}{dz}, \dots, \quad V_n = z\frac{dv_n}{dz}.$$

Система поэтому принимает вид

$$z\frac{d\varphi_1}{dz} = O_1(z, \varphi),$$

$$z\frac{d\varphi_2}{dz} = r_1\varphi_1 + O_2(z, \varphi),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$z\frac{d\varphi_\mu}{dz} = r_1\varphi_{\mu-1} + O_\mu(z, \varphi),$$

$$z\frac{d\varphi_{\mu+1}}{dz} = (r_2 - r_1)\varphi_{\mu+1} + O_{\mu+1}(z, \varphi).$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Поскольку члены $O(z, \varphi)$ могут быть определены явно и они линейны относительно $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ с коэфициентами, аналитическими относительно z и обращающимися в нуль в начале, функции φ могут быть определены из уравнений в виде степенного ряда относительно z методом последовательных приближений. Функции $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{\mu-1}(z)$ должны быть равны нулю при $z = 0$, в то время как $\varphi_\mu(0)$ может иметь некоторое произвольное значение a. Так, если функция $\varphi_{\mu-1}(0)$ не равна нулю, то $\varphi_\mu(z)$ должна содержать логарифмический член, что противоречит условию. Если разность $r_2 - r_1$ равна положительному целому числу, например m, то процесс определения последовательных коэфициентов в разложении $\varphi_{\mu+1}(z)$ обрывается на члене z^m. Следовательно для того, чтобы можно было разложить все функции φ в степенные ряды относительно z, необходимо ограничить разность $r_k - r_1$ так, чтобы она не была положительным целым числом (но она может быть равна нулю) для любого значения k. Если это ограничивающее условие удовлетворено, то можно определить все коэфициенты в разложениях функции φ.

Остается только доказать, что эти разложения сходятся для достаточно малых значений $|z|$. Ниже мы укажем возможный метод доказательства этой сходимости.

Пусть ε будет численной разностью между $r_2 - r_1$ и ближайшим положительным целым числом; рассмотрим систему обыкновенных линейных уравнений

$$\begin{gathered}
\psi_1 = Q_1(z, \psi), \\
\psi_2 = r_1\psi_1 + Q_2(z, \psi), \\
\cdots\cdots\cdots \\
\psi_\mu - |a| = r_1\psi_{\mu-1} + Q_\mu(z, \psi), \\
\varepsilon\psi_{\mu+1} = Q_{\mu+1}(z, \psi), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — линейные выражения относительно $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, коэфициенты которых обращаются в нуль в начале. Эта система может быть решена относительно функций ψ в виде ряда по возрастающим степеням z *с положительными* коэфициентами; ряды сходятся для достаточно малых значений $|z|$. Если коэфициент ведущего члена ряда для каждой из функций ψ является модулем ведущего члена ряда для соответствующей функции φ, то модули остальных коэфициентов ряда для функций φ будут самое большее равны соответствующим коэфициентам ряда для функций ψ. Следовательно ряд для функций φ сходится абсолютно и равномерно внутри определенного круга, центр которого лежит в начале.

Отсюда следует, что *система n линейных диференциальных уравнений первого порядка имеет последовательность регулярных решений*

$$w_1 = z^{r_1}u_1, \quad w_2 = z^{r_1}u_2, \ldots, \quad w_n = z^{r_1}u_n,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *аналитические в соседстве с $z = 0$, а r_1 — корень определяющего уравнения, так что разность*

$$r_k - r_1$$

(где r_k — некоторый другой корень определяющего уравнения) не является положительным целым числом.

Если разность двух корней определяющего уравнения не равна целому числу, то система имеет n независимых последовательностей решений указанного типа.

В случае одного уравнения порядка n, которое эквивалентно системе, определяющее уравнение принимает вид

$$[r]_n + P_1(0)[r]_{n-1} + \ldots + P_{n-1}(0)r + P_n(0) = 0,$$

где $[r]_n = r(r-1)\ldots(r-n+1)$. Если корни этого уравнения

$$r_1, r_2, \ldots, r_n,$$

то диференциальное уравнение имеет решение

$$w = z^{r_k} u_k(z),$$

соответствующее каждому корню r_k, где $u_k(z)$ — функция аналитическая вблизи $z=0$, а $u_k(0) \neq 0$, если ни одна из разностей

$$r_1 - r_k,\ r_2 - r_k, \ldots,\ r_n - r_k$$

не является положительным целым числом, хотя одна или несколько разностей могут быть равны нулю.

15·311. Логарифмический случай. Для полноты доказательства достаточности условий Фукса, допустим, что корни определяющего уравнения различаются на целое число. Пусть корни

$$r_1,\ r_2, \ldots,\ r_\mu$$

различаются на целое число, а от всех других корней — на числа, отличные от целых и пусть

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_\mu.$$

Из доказательства предыдущего параграфа следует, что существует решение

$$w_1 = z^{r_1} u_1(z),$$

соответствующее r_1. Пусть

$$w = w_1 \int v dz$$

будет решением, тогда (§ 15·3) v будет удовлетворять уравнению порядка $n-1$, удовлетворяющего условиям Фукса относительно $z=0$. Но поскольку

$$v = \frac{d}{dz}\left(\frac{w}{w_1}\right),$$

корни характеристического уравнения, связанного с уравнением относительно v, будут равны

$$r_2 - r_1 - 1,\quad r_3 - r_1 - 1, \ldots,\quad r_\mu - r_1 - 1,$$

причем первые $\mu - 1$ из них — отрицательные целые числа.

Поскольку $r_2 \geqslant r_3$, получим решение

$$v = z^{r_2 - r_1 - 1} \psi(z),$$

где функция $\psi(z)$ аналитическая вблизи начала, а $\psi(0) \neq 0$. Следовательно существует решение

$$w_2 = w_1 \int z^{r_2 - r_1 - 1} \psi(z)\, dz,$$

которое, будучи умножено, если это необходимо, на постоянный множитель, приводится в общем случае[1] к решению

$$w_2 = z^{r_1} \{u_1(z) \log z + u_{22}(z)\}.$$

[1] В специальном частном случае, когда разложение $\psi(z)$ в виде ряда не содержит члена $z^{r_1 - r_2}$, логарифмический член в функции w_2 отсутствует.

Процесс может быть повторен и дает в общем случае

$$w_\nu = z^{r_1}\{u_1(z)t^\nu + u_{\nu 1}(z)t^{\nu-1} + \ldots + u_{\nu\nu}(z)\} \qquad (\nu = 2,3,\ldots,\mu),$$

где все функции $u(z)$ аналитические в соседстве с $z=0$.

15·4. Уравнения типа Фукса. Уравнением типа Фукса называется такое уравнение, в котором каждая особая точка, включая и точку в бесконечности, является регулярной особенностью. Предположим, что у нас имеется ν регулярных особых точек

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_\nu$$

в конечной части плоскости. Из теоремы Фукса непосредственно следует, что коэфициент $p_m(z)$ имеет форму

$$p_m(z) = (z-a_1)^{-m}(z-a_2)^{-m}\ldots(z-a_\nu)^{-m}P_m(z);$$

поскольку в конечной части плоскости z нет других особых точек, $P_m(z)$ — целая функция z.

Рассмотрим поведение этих коэфициентов в бесконечности. Для того, чтобы уравнение имело регулярную особенность в бесконечности, точка в бесконечности должна быть самое большее полюсом функции $p_m(z)$. Следовательно $P_m(z)$ — полином от z, а функция $p_m(z)$ может быть выражена в виде

$$p_m(z) = \sum_{s=1}^{\nu}\frac{P_{ms}}{(z-a_s)^m} + \frac{Q_m(z)}{(z-a_1)^{m-1}(z-a_2)^{m-1}\ldots(z-a_\nu)^{m-1}},$$

где P_{ms} — постоянная[1], а Q_m — полином, высшая степень которого должна быть определена. С другой стороны, $p_m(z)$ допускает разложение

$$p_m(z) = z^{\sigma_m}(b_{m0} + b_{m1}z^{-1} + b_{m2}z^{-2} + \ldots),$$

которое сходится для достаточно больших значений $|z|$; пусть

$$w = z^r(c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \ldots)$$

будет решением уравнения, регулярным в бесконечности. Показатель r может быть найден из определяющего уравнения относительно точки в бесконечности; при наличии n независимых регулярных решений это определяющее уравнение не должно становиться порядка ниже n. Следовательно, поскольку определяющее уравнение получается путем приравнивания нулю членов высшего порядка относительно z, оно должно содержать член высшего порядка относительно $w^{(n)}$, равный $O(z^{r-n})$ и ни один другой член не может иметь порядок выше этого. Но главный член, возникающий из $p_m(z)w^{(m)}$, будет $O(z^{\sigma_m+r-n+m})$, следовательно

$$\sigma_m \leqslant -m.$$

---

[1] $P_{ms} = (a_s - a_1)^{-m}\ldots(a_s - a_{s-1})^{-m}(a_s - a_{s+1})^{-m}\ldots(a_s - a_\nu)^{-m}P_m(a_s).$

Отсюда

$$Q_m(z) = O(z^{m\nu - m - \nu})$$

при $m > 1$, а Q_1 тождественно равно нулю.

Остается выяснить, какая степень определенности вводится в уравнение при известных n показателях, соответствующих каждой особой точке. Рассмотрим особенность $z = a_s$; если мы примем регулярное решение

$$w = (z - a_s)^r \sum_{\varkappa=0}^{\infty} C_\varkappa (z - a_s)^\varkappa,$$

то определяющее уравнение будет иметь вид

$$[r]_n + \sum_{m=1}^{n} P_{ms} [r]_{n-m} = 0.$$

Следовательно, если показатели

$$\alpha_{s1}, \ \alpha_{s2}, \ldots, \ \alpha_{sn},$$

относящиеся к a_s, известны, то постоянные P_{ms} определяются единственно, именно

$$P_{1s} - \frac{1}{2} n(n-1) = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{sk},$$

$$P_{2s} - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) P_{1s} + \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-1) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{sk}\alpha_{sl} \qquad (k \neq l),$$

и т. д.

Предположим теперь, что ведущим членом в $Q_m(z)$ будет $A_m z^{m\nu - m - \nu}$, так что для больших значений z

$$p_m(z) = z^{-m} \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} P_{ms} + A_m \right\} + O(z^{-m-1}).$$

Если мы примем решение в виде

$$w = z^{\sigma} (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots),$$

то соответствующим определяющим уравнением будет

$$[\sigma]_n + \sum_{m=1}^{n} \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} P_{ms} + A_m \right\} [\sigma]_{n-m} = 0.$$

Показатели, относящиеся к точке в бесконечности, определяются как корни этого уравнения относительно σ с измененными знаками.

Пусть показатели будут $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, тогда, поскольку $A_1 = 0$,

$$\sum_{s=1}^{\nu} P_{1s} - \frac{1}{2} n(n-1) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k.$$

Но

$$\sum_{s=1}^{\nu} P_{1s} - \frac{1}{2} \nu n(n-1) = -\sum \alpha_{sk}, \quad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, \nu \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

следовательно

$$\sum \alpha_{sk} + \sum \delta_k = \frac{1}{2} n(n-1)(\nu-1),$$

т. е. сумма всех показателей постоянна. Таким образом, если у нас имеются $\nu+1$ особых точек (включая точку в бесконечности), то имеются также и $n(\nu+1)$ показателей с одной зависимостью между ними. Коэфициент $p_m(z)$ содержит $m(\nu-1)+1$ постоянных, именно ν постоянных P_{ms} и $m\nu - m - \nu + 1$ коэфициентов полинома $Q_m(z)$. Следовательно уравнение содержит всего

$$\frac{1}{2} n(n+1)(\nu-1) + n$$

независимых постоянных, $n(\nu+1)-1$ из которых является следствием показателей. Таким образом в данном случае остается

$$\frac{1}{2}(n-1)(n\nu - n - 2)$$

произвольных постоянных.

Все n решений, соответствующих каждой из $\nu+1$ особых точек, изображаются P-функцией Римана[1]

$$P \begin{Bmatrix} a_1 \ldots a_\nu & \infty & \\ \alpha_{11} \ldots \alpha_{\nu 1} & \delta_1 & \\ \ldots\ldots & & z \\ \alpha_{1n} \ldots \alpha_{\nu n} & \delta_n & \end{Bmatrix},$$

которая показывает расположение особых точек и показателей, относящихся к каждой особенности.

15·5. Класс уравнений, общее решение которых однозначно. Рассмотрим уравнение

$$p_0(z)\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z) w = 0.$$

Предположим

(a) что коэфициенты являются полиномами от z и что степень $p_0(z)$ не меньше степени любого другого коэфициента;

---

[1] Riemann, Abh. Ges. Wiss. Gött., 7 (1857), 3 [Math. Werke (2 изд.), 67]; см. § 7 · 23.

(b) что особые точки, лежащие в конечной части плоскости z, регулярны; точка в бесконечности может и не быть регулярной;

(c) что общее решение уравнения однозначно.

Для удовлетворения условия (c) необходимо, чтобы показатели, относящиеся к каждой особой точке, были целыми числами, а также, чтобы решение не содержало логарифмических членов.

Докажем, что если эти условия удовлетворены, то общее решение уравнения будет иметь вид

$$w = C_1 e^{\lambda_1 z} R_1(z) + C_2 e^{\lambda_2 z} R_2(z) + \ldots + C_n e^{\lambda_n z} R_n(z),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные интегрирования, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — определенные постоянные, которые не должны быть все неравны, а функции $R(z)$ — рациональны[1].

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ будут конечными особыми точками и пусть наименьшим отрицательным показателем, относящимся к a_s, будет α_s; если показатели, соответствующие a_s, все положительные, то α_s будет равна нулю. Тогда замена зависимой переменной

$$w_1 = (z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_\nu)^{\alpha_\nu} w$$

преобразует это уравнение таким образом, что все показатели, относящиеся к конечным особенностям, будут положительными целыми числами или равны нулю. Пусть преобразованное уравнение будет иметь вид

$$q_0(z)\frac{d^n w_1}{dz^n} + q_1(z)\frac{d^{n-1} w_1}{dz^{n-1}} + \ldots + q_{n-1}(z)\frac{dw_1}{dz} + q_n(z) w_1 = 0.$$

Это уравнение обладает всеми свойствами (a), (b) и (c), указанными для первоначального уравнения.

Предположим, что

$$w_1 = w_2 e^{\lambda z}.$$

В этом случае получим уравнение, в котором коэфициент при w_2 равен

$$\lambda^n q_0(z) + \lambda^{n-1} q_1(z) + \ldots + \lambda q_{n-1}(z) + q_n(z),$$

а λ может быть выбрана так, чтобы коэфициент при высшей степени z был равен нулю. Полученное уравнение может быть написано в виде

$$Q_0(z)\frac{d^n w_2}{dz^n} + Q_1(z)\frac{d^{n-1} w_2}{dz^{n-1}} + \ldots + Q_{n-1}(z)\frac{dw_2}{dz} + Q_n(z) w_2 = 0,$$

где, если $Q_0(z)$ степени m относительно z, то $Q_n(z)$ самое большее степени $m-1$, а остальные коэфициенты степени не выше m.

Теперь

$$\frac{Q_1(z)}{Q_0(z)} = \gamma_0 + \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\gamma_s}{z-a_s},$$

[1] Halphen, C. R. Acad. Sc. Paris, 101 (1885), 1238.

где γ_0 — постоянная. Сумма показателей, относящихся к a_s, равна

$$\frac{1}{2} n(n-1) - \gamma_s.$$

Но эти показатели — неравные положительные целые числа, и их сумма поэтому не меньше

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Следовательно γ_s равна нулю или отрицательному целому числу, откуда

$$S = \sum_{s=1}^{\nu} \gamma_s \leqslant 0.$$

Предположим, что $Q_n(z)$ не равно тождественно нулю. Покажем, что в этом случае можно построить конечную цепь преобразований, приводящую к уравнению, в котором член, соответствующий $Q_n(z)$, тождественно равен нулю. Пусть

$$W_1 = \frac{dw_2}{dz},$$

тогда

$$Q_0(z) \frac{d^{n-1} W_1}{dz^{n-1}} + Q_1(z) \frac{d^{n-2} W_1}{dz^{n-2}} + \ldots + Q_{n-1}(z) W_1 + Q_n(z) w_2 = 0.$$

Если мы продиференцируем это уравнение относительно z, то получим

$$Q_0(z) \frac{d^n W_1}{dz^n} + \{ Q_0'(z) + Q_1(z) \} \frac{d^{n-1} W_1}{dz^{n-1}} + \ldots + Q_n'(z) w_2 = 0.$$

Исключим w_2 из последних двух уравнений; полученное уравнение имеет вид

$$Q_0(z) Q_n(z) \frac{d^n W_1}{dz^n} + [\{ Q_0'(z) + Q_1(z) \} Q_n(z) -$$

$$- Q_0(z) Q_n'(z)] \frac{d^{n-1} W_1}{dz^{n-1}} + \ldots = 0,$$

и является уравнением того же типа, что и уравнение относительно w_2. Пусть S' будет числом, заменяющим в этом уравнении число S в уравнении для w_2; S' — коэфициент при z^{-1} в разложении по убывающим степеням z

$$\frac{Q_0'(z)}{Q_0(z)} + \frac{Q_1(z)}{Q_0(z)} - \frac{Q_n'(z)}{Q_n(z)};$$

этот коэфициент равен m для $Q_0'(z)/Q_0(z)$, S для $Q_1(z)/Q_0(z)$ и не больше $m-1$ для $Q_n'(z)/Q_n(z)$. Следовательно

$$S' \geqslant S + 1.$$

Процесс может быть повторен (если коэфициент при W_1 в данном уравнении не равен нулю) определением уравнения для W_2, где

$$W_2 = \frac{dW_1}{dz},$$

а число S'' такое, что

$$S'' \geqslant S + 2$$

и т. д. Процесс однако конечен, поскольку $S', S'', \ldots$ — отрицательные целые числа. Следовательно должен наступить момент, когда коэфициент независимой переменной

$$W_\rho = \frac{d^\rho w_2}{dz^\rho}$$

будет равен нулю. Уравнение тогда будет иметь решение

$$W_\rho = \text{const},$$

поэтому w_2 — полином от z степени ρ. Так, поскольку

$$w = \frac{w_2 e^{\lambda z}}{(z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_\nu)^{\alpha_\nu}},$$

данное уравнение имеет решение

$$w = e^{\lambda z} R(z),$$

где $R(z)$ — рациональная функция z.

Для завершения доказательства нужно показать, что имеются независимые решения этого типа, число которых равно порядку уравнения. Примем это без доказательства для уравнения порядка $n-1$, а затем докажем для уравнения порядка n.

Указанное уравнение имеет одно решение рассмотренного типа; предположим, что оно имеет вид

$$w_1 = e^{\lambda_1 z} R_1(z),$$

и напишем

$$w = w_1 \int u dz.$$

Новая независимая переменная удовлетворяет уравнению порядка $n-1$, а это уравнение будет точно такого же типа, что и для w. Следовательно оно имеет решение

$$u = e^{\lambda z} R(z),$$

где $R(z)$ — рациональная функция z; пусть

$$w = w_1 \int e^{\lambda z} R(z)\, dz.$$

Поскольку функция w однозначна, интеграл

$$\int e^{\lambda z} R(z)\, dz$$

не может ввести логарифмических членов и будет поэтому равен

$$e^{\lambda z}\mathfrak{R}(z),$$

где функция $\mathfrak{R}(z)$ — рациональна относительно z; $n-1$ независимых решений $u(z)$ приводят к $n-1$ решениям

$$w_r = e^{\lambda_r z} R_r(z) \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

которые вместе с w_1 образуют последовательность n независимых решений данного уравнения. Эта теорема верна, поскольку она верна при $n = 1$.

Также верна и обратная теорема: если n функций $e^{\lambda_1 z}R_1(z)$, $e^{\lambda_2 z}R_2(z), \ldots$, $e^{\lambda_n z}R_n(z)$ линейно независимы, то они удовлетворяют диференциальному уравнению порядка n с коэфициентами в виде полиномов, так что степень коэфициента при $\frac{d^n w}{dz^n}$ не меньше степени других коэфициентов уравнения.

Рассмотрим функцию

$$w = e^{\lambda_1 z} R_1(z)$$

$$= e^{\lambda_1 z}\frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P и Q — полиномы от z, тогда

$$PQ\frac{dw}{dz} = (\lambda_1 PQ + P'Q - PQ')\, w,$$

следовательно коэфициент при w — полином степени не выше степени коэфициента при $\frac{dw}{dz}$.

Предположим, что для уравнения степени $n-1$ коэфициент при $\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}$ — полином степени не меньше степени остальных коэфициентов.

n функций

$$1, \quad e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}\frac{R_2(z)}{R_1(z)}, \ldots, \quad e^{(\lambda_n-\lambda_1)z}\frac{R_n(z)}{R_1(z)}$$

удовлетворяют диференциальному уравнению

$$Q_0(z)\frac{d^n W}{dz^n} + Q_1(z)\frac{d^{n-1}W}{dz^{n-1}} + \ldots + Q_{n-1}(z)\frac{dW}{dz} = 0,$$

коэфициенты которого полиномы от z, умноженные на показатели. Если

$$u = \frac{dW}{dz},$$

то возникает уравнение порядка $n-1$ относительно u, решения которого имеют вид

$$\frac{d}{dz}\left\{e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}\frac{R_2(z)}{R_1(z)}\right\}, \ldots, \frac{d}{dz}\left\{e^{(\lambda_n-\lambda_1)z}\frac{R_n(z)}{R_1(z)}\right\},$$

причем каждое решение типа $e^{\lambda z} R(z)$. На основании сделанного допущения экспоненциальные множители в $Q_0(z), \ldots, Q_{n-1}(z)$ исключаются, а степень $Q_0(z)$ равна самое большее степени остальных коэфициентов. Произведем подстановку

$$w = e^{\lambda_1 z} R_1(z) W;$$

полученное уравнение удовлетворяется, когда w порядка n и указанного выше типа. В частности, степень коэфициента $\dfrac{d^n w}{dz^n}$ не меньше степени других коэфициентов. Следовательно обратная теорема доказана.

15·6. Уравнения, коэфициенты которых двояко-периодические функции. Другой класс уравнений, общие решения которых, если они однозначны, могут быть выражены посредством известных функций, дается следующей теоремой[1]. *Если коэфициенты однородного линейного диференциального уравнения — двояко-периодические функции независимой переменной, то уравнение имеет фундаментальную последовательность решений, которые, если они однозначны, являются в общем случае двояко-периодическими функциями второго порядка.*

Пусть диференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z) w = 0$$

и пусть коэфициенты $p(z)$ будут двояко-периодическими функциями с периодами 2ω и $2\omega'$. Предположим также, что число особых точек в параллелограмме периодов конечно и что общее решение уравнения однозначно, для чего необходимо, чтобы показатели, относящиеся к каждой особой точке, были неравными целыми числами.

Пусть $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_n(z)$ будет фундаментальной последовательностью решений уравнения, тогда

$$w_1(z+2\omega), \quad w_2(z+2\omega), \ldots, w_n(z+2\omega)$$

также будут решениями, образующими фундаментальную последовательность, причем в данном случае возникает последовательность n линейных соотношений

$$w_r(z+2\omega) = a_{r1} w_1(z) + \ldots + a_{rn} w_n(z) \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Рассуждая в основном так же, как и в § 15·2, можно доказать, что имеется не меньше одного решения $u_1(z)$, так что

$$u_1(z+2\omega) = s u_1(z),$$

[1] Hermite, C. R. Acad. Sc. Paris, 85–94 (1877–82) passim [Œuvres, 3, 266; Picard, C. R. 89 (1879), 140; 90 (1880), 128; J. für Math. 90 (1881), 281; Mittag-Leffler, C. R., 90 (1880), 299; Floquet, C. R., 98 (1884), 38, 82; Ann. Éc. Norm. (3), 1, (1884), 181, 405.

где s — численная постоянная. Рассмотрим теперь второй период. Все функции

$$u_1(z), \quad u_1(z+2\omega'), \quad u_1(z+4\omega'), \ldots$$

являются решениями уравнения. Поскольку уравнение имеет только n независимых решений, существует такое число $m\ (\leqslant n)$, что $u_1(z+2m\omega')$ может быть выражено в виде линейной комбинации

$$b_1u_1(z)+b_2u_1(z+2\omega')+\ldots+b_mu_1\{z+2(m-1)\omega'\};$$

принимая, что m — наименьшее целое число, для которого это справедливо, постоянная b_1 не равна нулю.

Пусть

$$u_1(z+2\omega')=u_2(z),$$

$$u_2(z+2\omega')=u_3(z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{m-1}(z+2\omega')=u_m(z);$$

тогда

$$u_m(z+2\omega')=b_1u_1(z)+b_2u_2(z)+\ldots+b_mu_m(z);$$

функции $u_1(z)$, $u_2(z), \ldots, u_m(z)$ линейно независимы и

$$u_r(z+2\omega)=su_r(z) \qquad (r=1,\ 2, \ldots, m).$$

Существование указанной последовательности преобразований показывает, что имеется не меньше одной функции $v(z)$, являющейся линейной комбинацией $u_1(z), \ldots, u_m(z)$, так что

$$v(z+2\omega')=s'v(z),$$

где s' — постоянная.

Следовательно уравнение имеет решение $w=v(z)$, так что

$$v(z+2\omega)=sv(z), \quad v(z+2\omega')=s'v(z),$$

иначе говоря, $v(z)$ — двояко-периодическая функция второго рода, или квази-двояко-периодическая функция.

В общем случае, если характеристическое уравнение, полученное подстановкой $z+2\omega$ (или $z+2\omega'$) вместо z, имеет n независимых корней, то оно будет иметь последовательность n фундаментальных решений, каждое из которых имеет квазипериодичность указанного характера.

В любом случае можно найти аналитическое выражение для общего решения. Пусть

$$w_1 = \varphi_1(z)$$

будет любым квази-периодическим решением данного уравнения; напишем

$$w = \varphi_1(z) \int W dz,$$

тогда W будет однозначным решением уравнения порядка $n-1$. Поскольку функция $\varphi_1'(z)/\varphi(z)$ и ее последовательные производные являются чисто-периодическими, коэфициенты этого уравнения после почленного деления на $\{\varphi(z)\}^n$ также будут чисто-периодическими. Это уравнение, в свою очередь, имеет квази-периодическое решение $\varphi_2(z)$, следовательно

$$w_2 = \varphi_1(z) \int \varphi_2(z) dz$$

является решением первоначального уравнения. Этот процесс может быть продолжен, и мы получим n независимых решений

$$\begin{aligned} w_1 &= \varphi_1(z), \\ w_2 &= \varphi_1(z) \int \varphi_2(z) dz \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n &= \varphi_1(z) \int \varphi_2(z) \ldots \int \varphi_n(z)\, (dz)^{n-1}. \end{aligned}$$

15·61. Явная форма решения. Пусть

$$w = \varphi(z)$$

будет решением уравнения, так что

$$\varphi(z + 2\omega) = s\varphi(z), \quad \varphi(z + 2\omega') = s'\varphi(z).$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = e^{\lambda z} \frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z)},$$

где λ и a — постоянные, а $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса[1], тогда

$$\psi(z + 2\omega) = e^{2\lambda\omega - 2\eta a} \psi(z), \quad \psi(z + 2\omega') = e^{2\lambda\omega' - 2\eta' a} \psi(z),$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 20 · 42. Надо отметить, что

$$\frac{\sigma(z+2\omega)}{\sigma(z)} = -e^{2\eta(z+\omega)}, \quad \frac{\sigma(z+2\omega')}{\sigma(z)} = -e^{2\eta'(z+\omega')},$$

где η и η' — постоянные. Аналогично

$$\frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \zeta(z),$$

так что

$$\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta, \quad \zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta',$$

$$\frac{d}{dz} \zeta(z) = -\wp(z).$$

и поэтому частное $\varphi(z)/\psi(z)$ будет двояко-периодическим, если

$$2\lambda\omega - 2\eta a = \log s,$$

$$2\lambda\omega' - 2\eta' a = \log s'.$$

Поскольку известно, что[1]

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{1}{2}\pi i \neq 0,$$

эти уравнения определяют λ и a через ω, ω', η, η', $\log s$ и $\log s'$.

Следовательно

$$\varphi(z) = e^{\lambda z} \frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z)} \mathfrak{P}(z),$$

где $\mathfrak{P}(z)$ — эллиптическая функция.

Ограничим теперь рассмотрение уравнением второго порядка; если корни двух характеристических уравнений неравны между собой, то решения будут двояко-периодическими функциями второго рода. Пусть этими двумя решениями будут $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Рассмотрим сначала случай, когда оба характеристических уравнения имеют двойные корни; пусть

$$\varphi_1(z + 2\omega) = s\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z + 2\omega) = s\varphi_2(z),$$

$$\varphi_1(z + 2\omega') = s'\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z + 2\omega') = s'\varphi_2(z) + t'\varphi_1(z).$$

Если $t' = 0$, то $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — двояко-периодические функции второго рода; если $t' \neq 0$, то функция $\varphi_1(z)$ может быть выражена в указанной выше форме. Аналогично, если

$$\chi(z) = \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)},$$

то

$$\chi(z + 2\omega) = \chi(z),$$

$$\chi(z + 2\omega') = \chi(z) + \frac{t'}{s'}.$$

Сравним полученные уравнения с функцией

$$A\zeta(z) + Bz,$$

которая увеличивается на $2A\eta + 2B\omega$ при увеличении z на 2ω, и на $2A\eta' + 2B\omega'$ при увеличении z на $2\omega'$. Таким образом, если

$$A\eta + B\omega = 0, \quad A\eta' + B\omega' = \frac{t'}{2s'},$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 20 · 411.

то

$$\chi(z) - A\zeta(z) - Bz$$

будет двояко-периодической функцией z. В данном случае

$$\varphi_2(z) = \{\mathfrak{P}_1(z) + A\zeta(z) + Bz\}\varphi_1(z),$$

где $\mathfrak{P}_1(z)$ — эллиптическая функция, а A и B — определенные постоянные. С другой стороны, пусть

$$\varphi_1(z+2\omega) = s\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z+2\omega) = s\varphi_2(z) + t\varphi_1(z),$$
$$\varphi_1(z+2\omega') = s'\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z+2\omega') = s'\varphi_2(z) + t'\varphi_1(z).$$

Эти выражения совместны, поскольку $\varphi\{(z+2\omega)+2\omega'\} = \varphi\{(z+2\omega')+2\omega\}$. Теперь, как и выше, $\varphi_1(z)$ — двояко-периодическая функция второго рода, но в данном случае

$$\chi(z+2\omega) = \chi(z) + \frac{t}{s}, \quad \chi(z+2\omega') = \chi(z) + \frac{t'}{s'},$$

а постоянные A и B должны быть определены из уравнений

$$A\eta + B\omega = \frac{t}{2s}, \quad A\eta' + B\omega' = \frac{t'}{2s'}.$$

Функция $\varphi_2(z)$ будет иметь такую же форму, как и раньше.

Уравнение третьего порядка может рассматриваться аналогично; специального рассмотрения требует только случай, когда характеристическое уравнение имеет тройной корень. В этом случае $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ имеют указанные формы; третье решение $\varphi(z)$ содержит члены вида

$$z^2, \quad z\zeta(z) \text{ и } \zeta^2(z).$$

В общем случае, если характеристическое уравнение имеет m-кратный корень, то решения будут содержать z и $\zeta(z)$ до степени $(m-1)$ включительно. Это соответствует логарифмическому случаю уравнения Фукса.

15·62. Уравнение Ляме. В уравнении Ляме[1]

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \{h + n(n+1)\wp(z)\}w = 0,$$

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, Гл. XXIII. Это уравнение преобразуется в форму Якоби

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \{n(n+1)k^2\mathrm{sn}^2 x - \eta\}w$$

посредством преобразований

$$\wp(z) - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2 t}, \quad t = z(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}},$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad x = t - iK'.$$

где n — положительное целое число, а h — постоянная, особыми точками являются начало и точки $2m\omega + 2m'\omega'$. Показатели, относящиеся к любой особой точке, обозначим — n и $n+1$.

Теория Фукса объясняет существование одного однозначного решения, именно

$$w_1(z) = (z - 2m\omega - 2m'\omega')^{n+1} W(z),$$

где $W(z)$ — аналитическая функция в области точки $2m\omega + 2m'\omega'$ и не равна в ней нулю. Разность показателей равна $2n+1$, и поскольку это положительное целое число, необходимо рассмотреть возможность второго решения $w_2(z)$, содержащего логарифмический член. Поскольку

$$w_2(z)w_1'(z) - w_1(z)w_2'(z) = 0,$$

второе решение будет иметь вид

$$w_2(z) = Cw_1(z)\int\frac{dz}{\{w_1(z)\}^2},$$

где C — постоянная. Отсюда видно, что $1/\{w_1(z)\}^2$ — четная функция z; ее вычеты относительно начала равны нулю, поэтому логарифмический член не может возникнуть. В частности, пусть $n=1$, тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \{h + 2\wp(z)\}w = 0.$$

Введем параметр a, связанный с h трансцендентным уравнением

$$\wp(a) = h,$$

тогда уравнение будет иметь решения

$$w_1 = e^{-z\zeta(a)}\frac{\sigma(z+a)}{\sigma(z)}, \quad w_2 = e^{z\zeta(a)}\frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z)},$$

которые в общем случае независимы. Однако, если h равно e_1, e_2 или e_3, то решения не будут независимыми. Например, если h равно e_1, то a равно ω_1 и оба решения, которые в общем случае независимы, приводятся к

$$w_1 = e^{-\eta_1 z}\frac{\sigma(z+\omega_1)}{\sigma(z)}.$$

При $h = e_1$ второе решение может быть получено в квадратурах, однако удобнее получить решение при помощи предельного процесса, принимая, что h не равно e_1, но отличается от него лишь на бесконечно малую величину. Тогда уравнение

$$\wp(a) = h$$

будет иметь корни $a = \omega_1 \pm \varepsilon$, где ε — бесконечно малая величина. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{2\varepsilon}(W_1 - W_2),$$

где

$$W_1 = e^{-z\zeta(\omega_1+\varepsilon)} \frac{\sigma(z + \omega_1 + \varepsilon)}{\sigma(z)},$$

$$W_2 = e^{-z\zeta(\omega_1-\varepsilon)} \frac{\sigma(z + \omega_1 - \varepsilon)}{\sigma(z)}.$$

Эта функция является решением уравнения; ее пределом будет искомое второе решение w_2.

Теперь

$$\zeta(\omega_1 + \varepsilon) = \zeta(\omega_1) + \varepsilon\zeta'(\omega_1) + \ldots$$

$$= \eta_1 - \varepsilon e_1 + \ldots,$$

поэтому

$$e^{-z\zeta(\omega_1+\varepsilon)} = e^{-\eta_1 z}(1 + \varepsilon e_1 z + \ldots).$$

Аналогично

$$\sigma(z + \omega_1 + \varepsilon) = \sigma(z + \omega_1) + \varepsilon\sigma'(z + \omega_1) + \ldots$$

$$= \sigma(z + \omega_1)\{1 + \varepsilon\zeta(z + \omega_1) + \ldots\},$$

откуда

$$W_1 = e^{-\eta_1 z}\frac{\sigma(z + \omega_1)}{\sigma(z)}[1 + \varepsilon\{\zeta(z + \omega_1) + e_1 z\} + \ldots].$$

W_2 отличается от W_1 только знаком ε, следовательно

$$w_2 = \lim \frac{1}{2\varepsilon}(W_1 - W_2)$$

$$= e^{-\eta_1 z}\frac{\sigma(z + \omega_1)}{\sigma(z)}\{\zeta(z + \omega_1) + e_1 z\}.$$

Нужно отметить, что решение не является двояко-периодическим, но состоит из двояко-периодической функции, умноженной на экспоненциальный множитель. Следовательно, если a

имеет одно из характеристических значений ω_1, ω_2 или ω_3, то первое решение w_1 будет периодическим, а второе непериодическим.

Два независимых решения уравнения Ляме

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \{ e_1 + 2\wp(z) \} w = 0$$

могут быть также выражены в виде

$$\{ \wp(z) - e_1 \}^{\frac{1}{2}}, \quad \{ \wp(z) - e_1 \}^{\frac{1}{2}} \{ \zeta(z + \omega_1) + e_1 z \}.$$

15·63. Уравнения с двояко-периодическими коэфициентами при однозначном отношении между любыми двумя решениями. Как и выше, пусть уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z) \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z) \frac{dw}{dz} + p_n(z) w = 0$$

и пусть коэфициенты будут двояко-периодическими функциями с периодами 2ω и $2\omega'$. Предположим, что хотя общее решение неоднозначно, тем не менее отношение любых двух частных решений является однозначной функцией z. Покажем, что этот случай может быть приведен к случаю, когда общее решение однозначно[1].

Пусть a_1 будет особой точкой; в этом случае показатели, относящиеся к данной особенности, должны отличаться на целые числа. Пусть

$$\nu_1, \quad \nu_1 + e_{11}, \quad \nu_1 + e_{12}, \ldots$$

будут показателями, расположенными в возрастающем порядке величины, так что $e_{11}, e_{12}, \ldots$ будут положительными целыми числами. Пусть α_1 будет вычетом $p_1(z)$ относительно полюса $z = a_1$, тогда сумма корней этого определяющего уравнения относительно a_1 будет равна

$$\frac{1}{2} n(n-1) - \alpha_1,$$

что в свою очередь равняется сумме показателей, т. е.

$$n\nu_1 + \sum_{s=1}^{n-1} e_{1s}.$$

Предположим, что у нас имеется k особых точек

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_k$$

в одном и том же параллелограмме периодов, тогда

$$n(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k) + \sum e_{rs} = \frac{1}{2} kn(n-1) - \sum \alpha_r.$$

---

[1] Halphen, Mém. Acad. Sc. Paris, (2), 28 (1884) [Œuvres, 3, 55].

Но $\sum \alpha_r$ — сумма вычетов относительно полюсов внутри параллелограмма периодов,— равна нулю, следовательно

$$n(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k)$$

— целое число. Пусть m будет наименьшим целым числом, для которого

$$m^2(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k) = \lambda$$

также является целым числом, и рассмотрим функцию

$$\mathfrak{P}(z) = \left\{\sigma\left(\frac{z}{m}\right)\right\}^{-\lambda} \{\sigma(z - a_1)\}^{\nu_1} \ldots \{\sigma(z - a_k)\}^{\nu_k}.$$

Поскольку

$$\sigma\left(\frac{z + 2m\omega}{m}\right) = e^{2\eta\left(\frac{z}{m} + \omega\right) + \pi i} \sigma\left(\frac{z}{m}\right),$$

$$\sigma(z - a + 2m\omega) = e^{2m\eta(z - a + m\omega) + m\pi i} \sigma(z - a),$$

то

$$\mathfrak{P}(z + 2m\omega) = e^{-\lambda\left\{2\eta\left(\frac{z}{m} + \omega\right) + \pi i\right\} + \sum\nu\{2m\eta(z - a + m\omega) + m\pi i\}} \mathfrak{P}(z).$$

Отсюда следует, что логарифмическая производная $\mathfrak{P}(z + 2m\omega)$ больше логарифмической производной $\mathfrak{P}(z)$ на выражение

$$2m\eta\sum\nu - 2\eta\lambda/m,$$

которое равно нулю. То же относится к периоду $2m\omega'$. Следовательно $\mathfrak{P}'(z)/\mathfrak{P}(z)$—двояко-периодическая функция с периодами $2m\omega$, $2m\omega'$.

Произведем подстановку

$$w = \mathfrak{P}(z)\,W,$$

тогда уравнение относительно W будет иметь двояко-периодические коэфициенты с периодами $2m\omega$, $2m\omega'$. Но в этом уравнении показатели, относящиеся к каждой особой точке,—положительные целые числа, следовательно уравнение имеет одно однозначное решение. Однако, поскольку отношение между любыми двумя решениями уравнения относительно w однозначно, то решение уравнения относительно W будет также однозначно. Следовательно общее решение уравнения относительно W однозначно, что и требовалось доказать.

15·7. Уравнения с периодическими коэфициентами. Пусть коэфициенты в уравнении

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)\,w = 0$$

однозначные чисто-периодические функции z с периодом 2ω, не имеющие в конечной части плоскости z особенностей, кроме полюсов Мы не потеряем в общности, если предположим, что ω — положительное вещественное число. Теория уравнений этого типа аналогична теории уравнений с двояко-периодическими коэфициентами, откуда она повидимому была выведена; обычно она называется *теорией Флоке*[1].

Пусть $w_1(z)$, $w_2(z),\ldots,$ $w_n(z)$ будет фундаментальной последовательностью решений уравнения, тогда $w_1(z+2\omega)$, $w_2(z+2\omega),\ldots,$ $w_n(z+2\omega)$ также будут удовлетворять уравнениям, следовательно существует последовательность линейных соотношений

$$w_r(z+2\omega)=a_{r1}w_1(z)+a_{r2}w_2(z)+\ldots+a_{rn}w_n(z) \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

в которой (как и в § 15·2) детерминант $|a_{rs}|$ не равен нулю.

Задача определения решения $u(z)$ так, чтобы

$$u(z+2\omega)=su(z),$$

эквивалентна приведению указанной выше последовательности линейных соотношений к канонической форме, зависящей от характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix}=0.$$

Если это уравнение имеет n независимых корней s_1, $s_2,\ldots,$ s_n, то можно найти такую фундаментальную последовательность n решений $u_1(z)$, $u_2(z),\ldots,$ $u_n(z)$, что

$$u_1(z+2\omega)=s_1u_1(z),\ldots,\ u_n(z+2\omega)=s_nu_n(z).$$

С другой стороны, если s_1 — кратный корень, то мы получим подпоследовательность решений $u_1(z),\ldots,$ $u_\mu(z)$, так что

$$\begin{aligned} &u_1(z+2\omega)=s_1u_1(z), \\ &u_2(z+2\omega)=s_1\{u_2(z)+u_1(z)\}, \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ &u_\mu(z+2\omega)=s_1\{u_\mu(z)+u_{\mu-1}(z)\}; \end{aligned}$$

возможны и другие подпоследовательности аналогичного характера.

Рассмотрим аналитическое выражение решений в этих двух случаях. В любом случае существует не меньше одного решения $u_1(z)$, так что

$$u_1(z+2\omega)=s_1u_1(z).$$

Теперь

$$e^{-\alpha(z+2\omega)}u_1(z+2\omega)=s_1e^{-2\alpha\omega}e^{-\alpha z}u_1(z),$$

следовательно

$$e^{-\alpha z}u(z)$$

---

[1] Floquet, Ann. Éc. Norm. (2), 13 (1883), 47.

является чисто-периодической функцией с периодом 2ω, если α такая, что

$$e^{2\alpha\omega} = s_1 .$$

Число α, удовлетворяющее уравнению

$$e^{2\alpha\omega} = s_r$$

для любого частного значения r, называется *характеристическим показателем*; его мнимая часть имеет неопределенное значение, потому что к ней может быть добавлено любое целое число, умноженное на $\pi i/\omega$.

Так, если n корней характеристического уравнения независимы, то существует линейно-независимая последовательность n решений $u_1(z)$, $u_2(z), \ldots, u_n(z)$, так что

$$u_r(z) = e^{\alpha_r z} \varphi_r(z),$$

где α_r — характеристический показатель, соответствующий s_r, а $\varphi_r(z)$ — чисто-периодическая функция с периодом 2ω.

Рассмотрим теперь случай, когда s_1 — кратный корень. Если мы напишем

$$u_\nu(z) = e^{\alpha_1 z} v_\nu(z),$$

то каноническая подпоследовательность приводится к

$$\begin{aligned} v_1(z + 2\omega) &= v_1(z), \\ v_2(z + 2\omega) &= v_2(z) + v_1(z), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_\mu(z + 2\omega) &= v_\mu(z) + v_{\mu-1}(z). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{v_2(z + 2\omega)}{v_1(z + 2\omega)} = \frac{v_2(z)}{v_1(z)} + 1,$$

откуда

$$\frac{v_2(z)}{v_1(z)} - \frac{z}{2\omega}$$

— чисто-периодическая функция z с периодом 2ω. В общем случае нетрудно доказать, что если

$$P_\nu(z) = \frac{z(z-2\omega)\ldots\{z-(2\nu-2)\omega\}}{(2\omega)^\nu \nu!},$$

то

$$\begin{aligned} u_1(z) &= e^{\alpha_1 z} \varphi_1(z), \\ u_2(z) &= e^{\alpha_1 z}\{P_1(z)\varphi_1(z) + \varphi_2(z)\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\nu(z) &= e^{\alpha_1 z}\{P_{\nu-1}(z)\varphi_1(z) + P_{\nu-2}(z)\varphi_2(z) + \ldots + P_1(z)\varphi_{\nu-1}(z) + \varphi_\nu(z)\} \\ & \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, \mu), \end{aligned}$$

где $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_\mu(z)$ — чисто-периодические функции с периодом 2ω.

15·71. Характеристические показатели. Если характеристический показатель α — мнимое число, то соответствующее решение остается конечным, когда z стремится к бесконечности вдоль вещественной оси. Если же вещественная часть α не равна нулю, модуль члена $e^{\alpha z}$ становится бесконечным для $z = +\infty$ или для $z = -\infty$. В первом случае решение называется *стабильным*, во втором — *нестабильным*.

Определение характеристических показателей обычно очень сложно[1]. Рассмотренная теория, показывающая функциональный характер общего решения, не дает практического метода получения явного решения. Задачу необходимо рассматривать косвенно.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2w}{dz^2} = p(z)\,w,$$

где $p(z)$ — функция с вещественным периодом 2ω, аналитическая во всей полосе $-\eta \leqslant y \leqslant \eta$, с вещественной осью внутри нее. В данном случае характеристическое уравнение будет иметь вид

$$s^2 - As + 1 = 0,$$

где A — постоянная, зависящая только от функции $p(z)$. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ будут двумя решениями уравнения, так что

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$$
$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1,$$

и пусть

$$f(z + 2\omega) = a_{11}f(z) + a_{12}g(z),$$
$$g(z + 2\omega) = a_{21}f(z) + a_{22}g(z),$$

так что

$$g'(z + 2\omega) = a_{21}f'(z) + a_{22}g'(z).$$

Предположим, что $z = 0$, тогда

$$f(2\omega) = a_{11}, \quad g'(2\omega) = a_{22};$$

поскольку характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}, \\ a_{21}, & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0,$$

то отсюда следует, что

$$A = a_{11} + a_{22}$$
$$= f(2\omega) + g'(2\omega).$$

[1] Liapounov, Ann. Fac. Sc. Toul. (2), 9 (1907), 203—469 (впервые опубликовано на русском языке, Харьков 1892), Poincaré, Les Métodes nouvelles de la Mécanique céleste, IV; Horn, Z. Math. Phys., 48 (1903), 400.

Вместо первоначального уравнения рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \lambda p(z) w;$$

оно имеет решения

$$f(z, \lambda) = 1 + \lambda f_1(z) + \ldots + \lambda^n f_n(z) + \ldots,$$

$$g(z, \lambda) = z + \lambda g_1(z) + \ldots + \lambda^n g_n(z) + \ldots,$$

так что функции $f_n(z)$ и $g_n(z)$ равны нулю при $z = 0$, а ряды сходятся для всех значений λ, если z лежит внутри параллельной полоски, содержащей ось вещественных чисел.

Функции $f_n(z)$ и $g_n(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d^2 f_n(z)}{dz^2} = p(z) f_{n-1}(z),$$

$$\frac{d^2 g_n(z)}{dz^2} = p(z) g_{n-1}(z),$$

следовательно $f_n(z)$ и $g_n(z)$ могут быть вычислены из уравнений

$$f_n(z) = \int_0^z \int_0^z p(z) f_{n-1}(z) (dz)^2,$$

$$g_n(z) = \int_0^z \int_0^z p(z) g_{n-1}(z) (dz)^2$$

с начальными условиями

$$f_0(z) = 1, \quad g_0(z) = z.$$

После того как функции $f_n(z)$, $g_n(z)$ были найдены, λ может быть приравнена единице и мы получим

$$A = 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \{f_n(2\omega) + g'_n(2\omega)\}.$$

Предположим, что функция $p(z)$ — положительная для всех вещественных значений z, тогда функции $f_n(z)$, $g_n(z)$ и $g'_n(z)$ будут все положительны при $z > 0$. Отсюда следует, что $A > 2$, следовательно все корни характеристического уравнения вещественны. Можно принять, что характеристические показатели также вещественны, поэтому любое решение нестабильно. Таким образом для получения стабильного решения необходимо, чтобы функция $p(z)$ была отрицательной для некоторых вещественных значений z[1].

[1] Ляпунов (loc. cit.) показал, что если функция $p(z)$ отрицательная для всех вещественных значений z, а абсолютная величина $2\omega \int_0^{2\omega} p(z)\,dz$ — не больше 4, то $|A| < 2$, а корни характеристического уравнения — сопряженные комплексные числа с модулем, равным единице.

15·72. Уравнение Хилла. Предположим, что $p(z)$ — четная периодическая функция с периодом π. Уравнение может быть написано в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \{\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z + \ldots\} w = 0,$$

где функция $p(z)$ заменена эквивалентным рядом Фурье. Предположим, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно в пределах параллельной полоски, содержащей вещественную ось.

Пусть у нас имеется решение

$$w = e^{\alpha z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r e^{riz},$$

тогда при подстановке в уравнение найдем, что коэфициенты b_r удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(\alpha + 2ri)^2 b_r + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \theta_\nu b_{r-\nu} = 0$$

для всех целых значений r. Разделив это соотношение почленно на $(\alpha + 2ri)^2$, а затем исключая коэфициенты b, найдем, что характеристический показатель α удовлетворяет сходящемуся определяющему уравнению

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \frac{(i\alpha+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0}, & \cdots \\
\cdots & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{(i\alpha+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0}, & \cdots \\
\cdots & \frac{-\theta_2}{-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{-\theta_0}, & \frac{(i\alpha)^2-\theta_0}{-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{-\theta_0}, & \frac{-\theta_2}{-\theta_0}, & \cdots \\
\cdots & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{(i\alpha-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \cdots \\
\cdots & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0}, & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0}, & \frac{(i\alpha-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0}, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right| = 0,$$

Задача может теперь рассматриваться двояко: постоянные θ могут быть даны явно и необходимо определить α, или же нужно найти зависимость, которая должна существовать между постоянными θ для того, чтобы α равнялось нулю, а решение было чисто-периодическим с периодом π.

В первом случае задача разрешается непосредственно, так как если мы напишем определяющее уравнение в виде

$$\Delta(i\alpha) = 0,$$

то найдем, что[1]

$$\Delta(i\alpha)=\Delta(0)-\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\alpha i\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)},$$

следовательно α — корень трансцендентного уравнения

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\alpha i\right)=\Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Во втором случае задача сводится к определению зависимости между постоянными θ таким образом, чтобы

$$\Delta(0)=0.$$

15·8. Аналогии с теорией Фукса. Если мы напишем $t=\cos z$, то уравнение типа Хилла может быть приведено к виду

$$(1-t^2)\frac{d^2w}{dt^2}-t\frac{dw}{dt}+\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu t^{2\nu}\right)w=0.$$

Это уравнение имеет регулярные особенности при $t=\pm 1$, причем в каждом случае показатели равны 0 и $\frac{1}{2}$, а также нерегулярную особую точку в бесконечности. При рассмотрении уравнения в этой алгебраической форме, с точки зрения теории Фукса, выявляются некоторые ее интересные свойства[2].

Фундаментальные решения, относящиеся к $t=+1$, могут быть написаны в виде

$$F_1(1-t)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(1-t),$$

$$F_2(1-t)=\sqrt{1-t}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu(1-t)\right\};$$

в первом случае ряд сходится внутри круга $|1-t|=2$; во втором случае значение $\sqrt{1-t}$ вначале положительное, если $-1<t<+1$. Поскольку уравнение не изменится, если t заменить на $-t$, то решения, относящиеся к особой точке $t=-1$, равны

$$F_1(1+t),\qquad F_2(1+t),$$

причем ряд в этом случае сходится внутри круга $|1+t|=2$. Внутри области, общей для обоих кругов сходимости,

$$F_1(1-t)=\alpha F_1(1+t)+\beta F_2(1+t),$$

$$F_2(1-t)=\gamma F_1(1+t)+\delta F_2(1+t),$$

[1] Hill, Acta Math., 8 (1886); Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 19·42.

[2] Poole, Proc. London Math. Soc. (2), 20 (1922), 374.

где α, β, γ и δ — постоянные. Зависимости

$$F_1(1+t) = \alpha F_1(1-t) + \beta F_2(1-t)$$
$$= (\alpha^2 + \beta\gamma) F_1(1+t) + \beta(\alpha+\delta) F_2(1+t),$$
$$F_2(1+t) = \gamma F_1(1-t) + \delta F_2(1-t)$$
$$= \gamma(\alpha+\delta) F_1(1+t) + (\beta\gamma + \delta^2) F_2(1+t)$$

также должны удовлетворяться тождественно, так как в противном случае $F_1(1+t)$ и $F_2(1+t)$ находились бы в линейной зависимости. Отсюда

$$\alpha^2 + \beta\gamma = \beta\gamma + \delta^2 = 1, \quad \beta(\alpha+\delta) = \gamma(\alpha+\delta) = 0,$$

причем возможны только два условия

$$\text{(I)} \quad \alpha = \delta = \pm 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

или

$$\text{(II)} \quad \alpha = -\delta, \quad \beta\gamma = 1 - \alpha^2.$$

Рассмотрим первое условие $\alpha = \delta = +1$, $\beta = \gamma = 0$. Здесь

$$F_1(1-t) = F_1(1+t), \quad F_2(1-t) = F_2(1+t);$$

это соотношение справедливо в общей области сходимости рядов, следовательно оно справедливо и вблизи начала. Но начало является обыкновенной точкой уравнения, так что не может существовать двух независимых четных решений, имеющих смысл вблизи $t=0$. Таким образом это первое условие должно быть отклонено. Условия $\alpha = \delta = -1$, $\beta = \gamma = 0$ подразумевают существование двух независимых нечетных решений, действительных в начале; оно также должно быть отклонено. Следовательно остаются только условия $\alpha = -\delta$, $\beta\gamma = 1 - \alpha^2$, которые однако допускают частные случаи. Рассмотрим наиболее важные из них.

(a) Пусть $\alpha = -\delta = \pm 1$, $\beta = 0$, так что

$$F_1(1-t) = \pm F_1(1+t)$$

при $|1 \pm t| < 2$. Это решение будет четным при $\alpha = +1$ и нечетным при $\alpha = -1$; оно не имеет особенности в конечной части плоскости. При подстановке $t = \cos z$, получим решение для $\alpha = +1$ в виде ряда четных косинусов кратных z, а для $\alpha = -1$ — в виде ряда нечетных косинусов также кратных z.

(b) Пусть $\alpha = -\delta = \pm 1$, $\gamma = 0$, тогда

$$F_2(1-t) = \pm F_2(1+t)$$

при $|1 \pm t| < 2$. Решением будет произведение $\sqrt{1-t^2}$ на целую функцию t, которая меняет свой знак, когда t описывает малый контур вокруг $t = +1$ или вокруг $t = -1$. Эта целая функция четная, если $\delta = +1$, и нечетная, если $\delta = -1$. При подстановке $t = \cos z$, если $\delta = +1$, решение получается в виде ряда четных синусов кратных z, а при $\delta = -1$ — в виде ряда нечетных синусов, также кратных z.

(c) Пусть $\alpha = \delta = 0$, $\beta\gamma = 1$, тогда

$$F_1(1-t) = \beta F_2(1+t), \quad F_2(1-t) = \frac{1}{\beta} F_1(1+t)$$

при $|1 \pm t| < 2$. Решения могут быть написаны в виде

$$F_1(1-t) = \sqrt{1+t}\,\varphi(t), \quad F_2(1-t) = \sqrt{1-t}\,\varphi(-t),$$

где $\varphi(t)$ — целая функция t. При подстановке $t = \cos z$ они преобразуются в

$$F_1 = \cos\frac{1}{2}zf(z), \quad F_2 = \sin\frac{1}{2}zf(\pi - z),$$

где $f(z)$ — ряд косинусов кратных z, который сходится во всей конечной части плоскости z. Следовательно уравнение допускает два независимых решения с периодом 4π.

15·81. Существование периодических решений в общем случае. Доказанное выше существование решений с периодом 4π выдвигает вопрос о возможности существования решений с периодом $2m\pi$, где m — любое положительное целое число.

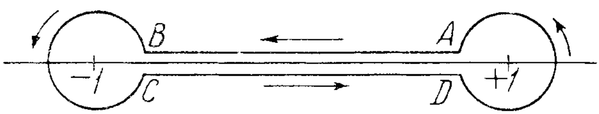


Рис. 12.

Рассмотрим контур на фиг. 12, имеющий форму петли, окружающей две особые точки $t = \pm 1$. Начнем из точки A, в которой решения имеют вид

$$u_A = F_1(1-t), \quad v_A = F_2(1-t),$$

и будем следовать вдоль отрезка AB. В точке B решения примут вид

$$u_B = \alpha F_1(1+t) + \beta F_2(1+t), \quad v_B = \gamma F_1(1+t) + \delta F_2(1+t).$$

Следуя вдоль круга BC, знак F_2 изменится на обратный, а знак F_1 останется неизменным, так что

$$u_C = \alpha F_1(1+t) - \beta F_2(1+t), \quad v_C = \gamma F_1(1+t) - \delta F_2(1+t).$$

Затем проведем отрезок CD; в точке D решения примут вид

$$u_D = (\alpha^2 - \beta\gamma) F_1(1-t) + \beta(\alpha + \delta) F_2(1-t),$$

$$v_D = \gamma(\alpha - \delta) F_1(1-t) + (\beta\gamma - \delta^2) F_2(1-t).$$

Наконец, после того как мы опишем контур DA, решения примут вид $\bar{u}_A$, $\bar{v}_A$, где

$$\bar{u}_A = (\alpha^2 - \beta\gamma) F_1(1-t) - \beta(\alpha - \delta) F_2(1-t),$$

$$\bar{v}_A = \gamma(\alpha - \delta) F_1(1-t) - (\beta\gamma - \delta^2) F_2(1-t).$$

Но

$$\alpha = -\delta, \quad \beta\gamma = 1 - \alpha^2,$$

следовательно

$$\bar{u} = (2\alpha^2 - 1) u - 2\alpha\beta v,$$

$$\bar{v} = 2\alpha\gamma u + (2\alpha^2 - 1) v.$$

Теперь пусть

$$W = au + bv,$$

тогда решением будет

$$a\bar{u} + b\bar{v} = s(au + bv).$$

Уравнение, определяющее s, будет

$$\begin{vmatrix} 2\alpha^2 - 1 - s, & 2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta, & 2\alpha^2 - 1 - s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(2\alpha^2 - 1 - s)^2 + 4\alpha^2(1 - \alpha^2) = 0.$$

Это уравнение приводится к виду

$$s^2 + 2s(1 - 2\alpha^2) + 1 = 0.$$

Если $\alpha^2 > 1$, то это уравнение дает два вещественных и независимых значения s, которые, после того как были описаны n контуров, приводят к двум решениям W_1 и W_2, равным соответственно $s^n W_1$ и $s^{-n} W_2$. Эти решения не периодические. С другой стороны, если $\alpha^2 < 1$, то корни уравнения относительно s являются сопряженными комплексными числами с модулем, равным единице. Предположим, что $s^m = 1$, где m — положительное целое число, тогда

$$s = e^{\pm 2r\pi i/m}$$

и

$$2\alpha^2 - 1 = \cos\frac{2r\pi}{m}.$$

Таким образом, после того как были описаны m контуров, возникают решения, принимающие свои начальные значения; через переменную z они могут быть выражены в виде

$$W_1 = e^{rzi/m} f(z), \quad W_2 = e^{-rzi/m} f(-z),$$

где $f(z)$ — функция с периодом 2π, конечная для всех конечных значений z. Эти решения имеют период $2m\pi$. С другой стороны, если s не является комплексным корнем, равным единице, то решения будут иметь вид

$$W_1 = e^{\theta zi} f(z), \quad W_2 = e^{-\theta zi} f(-z),$$

где θ — иррациональное число. Решения теперь непериодические, однако стабильные.

15·9. Линейные подстановки. Рассмотрим простой замкнутый контур в области z, определяемый углом θ при помощи уравнения

$$z = \varphi(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ — однозначная периодическая функция θ. Предположим, что контур не проходит через особые точки. Некоторое решение диференциального уравнения

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)w = 0$$

может быть разложено (методом последовательных приближений) в ряд, который сходится для всех значений вещественной переменной θ. Пусть

$$w_1(\theta), \quad w_2(\theta), \ldots, \quad w_n(\theta)$$

будет фундаментальной последовательностью решений; тогда, принимая, что коэфициенты уравнения однозначны, найдем, что

$$w_1(\theta + 2\pi), \quad w_2(\theta + 2\pi), \ldots, \quad w_n(\theta + 2\pi)$$

также представляет фундаментальную последовательность. Отсюда

$$\begin{aligned}
w_1(\theta + 2\pi) &= a_{11}w_1(\theta) + a_{12}w_2(\theta) + \ldots + a_{1n}w_n(\theta),\\
w_2(\theta + 2\pi) &= a_{21}w_1(\theta) + a_{22}w_2(\theta) + \ldots + a_{2n}w_n(\theta)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_n(\theta + 2\pi) &= a_{n1}w_1(\theta) + a_{n2}w_2(\theta) + \ldots + a_{nn}w_n(\theta),
\end{aligned}$$

где коэфициенты a — постоянные с детерминантом, не обращающимся в нуль, который может быть вычислен из последовательности n уравнений типа

$$\begin{aligned}
w_r(\theta + 2\pi) &= a_{r1}w_1(\theta) + a_{r2}w_2(\theta) + \ldots + a_{rn}w_n(\theta),\\
w'_r(\theta + 2\pi) &= a_{r1}w'_1(\theta) + a_{r2}w'_2(\theta) + \ldots + a_{rn}w'_n(\theta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_r^{(n-1)}(\theta + 2\pi) &= a_{r1}w_1^{(n-1)}(\theta) + a_{r2}w_2^{(n-1)}(\theta) + \ldots + a_{rn}w_n^{(n-1)}(\theta).
\end{aligned}$$

Таким образом линейные подстановки, претерпеваемые последовательностью фундаментальных решений, когда z описывает простой замкнутый контур, могут рассматриваться как известные.

В частности, предположим, что коэфициенты уравнения — рациональные функции z, которые при разложении на частные дроби принимают вид

$$\sum \frac{A_{ik}}{(z - a_i)^k}.$$

Из общих теорем существования следует, что если коэфициенты A_{ik} рассматривать как параметры уравнения, то решения $w_1(z)$, $w_2(z), \ldots, w_n(z)$ будут целыми функциями этих параметров, и следовательно *коэфициенты* a_{rs} *в последовательности линейных подстановок будут мероморфными функциями этих параметров*[1].

15·91. Группа линейного диференциального уравнения. Предположим, что коэфициенты уравнения однозначны относительно z, а также, что имеется только конечное число особых точек. Если мы заставим z описать замкнутый контур, не проходящий ни через какую особую точку, то получим такой же результат, как от линейной подстановки S, преобразующей $w_1, w_2, \ldots, w_n$ соответственно в

$$\begin{gathered}a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n, \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n,\end{gathered}$$

где детерминант постоянных a_{rs} не равен нулю.

Пусть S' будет линейной подстановкой, соответствующей контуру, отличному от первого. Тогда, если мы проведем сначала второй контур, а затем первый, то получим подстановку той же общей формы в виде произведения $S'S$, в общем случае отличного от SS'.

Любой контур в плоскости z, содержащий некоторое число особых точек, эквивалентен последовательности замкнутых контуров или петель, описанных в определенном порядке и таким образом, что каждая петля окружает только одну особую точку.

Предположим, что у нас имеются m особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и пусть S_r будет *простой* подстановкой, полученной при проведении контура вокруг точки a_r в положительном направлении. Тогда S_r^{-1} будет обратной подстановкой, полученной при проведении того же контура, но в отрицательном направлении. Любая произвольная подстановка может быть таким образом разложена в последовательность простых подстановок

$$S_l^{\lambda} S_m^{\mu} \ldots S_p^{\omega} S_r^{\rho},$$

где $\lambda, \mu, \ldots \omega, \rho$ — положительные или отрицательные целые числа, а S_r^{ρ} обозначает S_r, описанную $|\rho|$ раз в положительном и отрицательном направлениях, соответственно тому, является ли ρ положительным или отрицательным.

[1] Дальнейшее развитие зависит в значительной степени от теории инвариантов обычного линейного диференциального уравнения. См. Hamburger, J. für Math., 83 (1877), 193; Poincaré, Acta Math., 4 (1883), 212; Mittag-Leffler, Acta Math., 15 (1890), 1; von Koch, ibid., 16 (1892), 217.

Совокупность таких подстановок называется *группой* уравнения[1]. Группа была определена относительно частной фундаментальной последовательности решений. Рассмотрим теперь вторую фундаментальную последовательность; она выводится из первой последовательности при помощи определенной подстановки Σ. Тогда, если S — любая подстановка, проведенная в первой последовательности, то $\Sigma^{-1}S\,\Sigma$ — подстановка, проведенная во второй последовательности. Очевидно, если подстановки S образуют группу, то подстановки $\Sigma^{-1}S\Sigma$ также образуют группу, и эти группы между собой тесно связаны.

15·92. Проблема Римана. В качестве иллюстрации общей теории линейных диференциальных уравнений может служить следующая классическая задача. Нужно определить функцию

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(I) функция должна быть однозначной и непрерывной во всей плоскости, за исключением особых точек a, b, c;

(II) между любыми тремя определениями P_1, P_2, P_3 этой функции существует линейная зависимость

$$c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 = 0,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные;

(III) в соседстве с точкой a существуют два независимых определения

$$(z-a)^{\alpha} f_1(z), \quad (z-a)^{\alpha'} f_2(z),$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические в соседстве с $z=a$ и не равны нулю в a. Аналогично, в соседстве с $x=b$ имеются

$$(x-b)^{\beta} g_1(z), \quad (z-b)^{\beta'} g_2(z),$$

а в соседстве с $z=c$

$$(z-c)^{\gamma} h_1(z), \quad (z-c)^{\gamma'} h_2(z).$$

Пусть P_1 и P_2 будут любыми двумя линейно-независимыми определениями искомой функции. Тогда, поскольку любое другое определение находится в линейной зависимости от P_1 и P_2, искомая функция будет удовлетворять диференциальному урав-

---

[1] Эта совокупность называется также *монодромной группой* уравнения, в отличие от *группы рациональности*. Нужно отметить, что последовательность линейных подстановок образует группу, если она содержит: (a) тождественную подстановку, (b) обратное выражение для каждой подстановки и (c) произведение любых двух подстановок.

нению второго порядка

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dz^2}, & \frac{dw}{dz}, & w \\ P_1'', & P_1', & P_1 \\ P_2'', & P_2', & P_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое может быть написано в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p\frac{dw}{dz} + qw = 0,$$

где

$$p = -\frac{P_2P_1'' - P_1P_2''}{P_2P_1' - P_1P_2'}, \quad q = \frac{P_2'P_1'' - P_1'P_2''}{P_2P_1' - P_1P_2'}.$$

Рассмотрим поведение функции p в соседстве с особой точкой $z = a$. Пусть

$$P_1 = (z-a)^{\alpha} f_1(z), \ P_2 = (z-a)^{\alpha'} f_2(z),$$

тогда

$$p = \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \tilde{\omega}(z),$$

где $\tilde{\omega}(z)$ — функция аналитическая в соседстве с $z = a$. Отсюда следует, что

$$p = \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} + u(z),$$

где функция $u(z)$ будет везде аналитической. Теперь, поскольку p-функция аналитическая в бесконечности, необходимо, чтобы для больших значений $|z|$

$$p = \frac{2}{z} + O(z^{-2}).$$

Но

$$p = \frac{3-\alpha-\alpha'-\beta-\beta'-\gamma-\gamma'}{z} + O(z^{-2}) + u(z),$$

а поскольку $u(z) = O(1)$, необходимо, чтобы $u(z) = 0$, следовательно

$$p = \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c},$$

где

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Аналогично найдем, что в соседстве с a

$$q = \frac{\alpha\alpha'}{(z-a)^2} + O\left\{\frac{1}{z-a}\right\},$$

следовательно q может быть выражено в виде

$$q=\frac{\alpha\alpha'}{(z-a)^2}+\frac{\beta\beta'}{(z-b)^2}+\frac{\gamma\gamma'}{(z-c)^2}+\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\frac{C}{z-c},$$

где A, B, C — конечны для всех конечных значений z. Однако более удобно принять эквивалентное выражение

$$q=\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{L}{z-a}+\frac{M}{z-b}+\frac{N}{z-c}\right\},$$

где L, M, N — конечны для всех конечных значений z.

Поскольку точка в бесконечности является обыкновенной точкой для больших значений $|z|$, то

$$q(z)=O(z^{-4}),$$

следовательно L, M, N — постоянные, откуда легко доказать, что

$$L=\alpha\alpha'(a-b)\ (a-c),$$

$$M=\beta\beta'(b-c)\ (b-a),$$

$$N=\gamma\gamma'(c-a)\ (c-b).$$

Таким образом P-функция Римана удовлетворяет диференциальному уравнению[1]

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\Sigma\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}\cdot\frac{dw}{dz}+\Sigma\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}\cdot\frac{w}{(z-a)\ (z-b)\ (z-c)}=0,$$

которое называется *обобщенным гипергеометрическим уравнением*. При $a=0$, $b=1$, $c=\infty$[2], $\alpha'=\beta'=0$ это уравнение преобразуется в обыкновенное гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\{(\alpha+\beta-2)z+1-\alpha\}\frac{dw}{dz}-\gamma\gamma'w=0.$$

Решения обобщенного гипергеометрического уравнения дают таким образом искомые функции. Для того, чтобы они имели обусловленную форму, необходимо, чтобы ни одна из разностей показателей

$$\alpha-\alpha',\ \beta-\beta',\ \gamma-\gamma'$$

не была целым числом, так как в противном случае в одно из решений вошли бы логарифмические члены.

15·93. Группа гипергеометрического уравнения. Пусть P_α и $P_{\alpha'}$ будут двумя решениями, соответствующими показателям α и α' в особенности a, P_β и $P_{\beta'}$ — решениями, относящимися к особенности b, а P_γ и $P_{\gamma'}$ — решениями, относящимися к особенности c.

---

[1] Это уравнение было впервые получено Папперитцом [Papperitz, Math. Ann., 25 (1885), 213]. Риман ввел некоторые упрощения, которые привели к обыкновенному гипергеометрическому уравнению.

[2] $z-c$ замещено $1/z$.

Пусть Г будет любой замкнутой простой кривой, например кругом, проходящим через точки a, b и c. Тогда внутри Г все шесть решений будут аналитическими и между ними будут существовать соотношения

$$P_\alpha = A_\beta P_\beta + A_{\beta'} P_{\beta'},$$
$$P_{\alpha'} = A'_\beta P_\beta + A'_{\beta'} P_{\beta'},$$
$$P_\alpha = A_\gamma P_\gamma + A_{\gamma'} P_{\gamma'},$$
$$P_{\alpha'} = A'_\gamma P_\gamma + A'_{\gamma'} P_{\gamma'},$$

где A — постоянные коэфициенты. Эти постоянные не все независимы; между ними существуют соотношения, которые мы сейчас определим.

Поскольку точка в бесконечности является обыкновенной, контур в положительном направлении вокруг точки c эквивалентен контуру в отрицательном направлении вокруг точек a и b. Третье из указанных соотношений показывает, что первый контур преобразует P_α в

$$A_\gamma e^{2\pi i\gamma} P_\gamma + A_{\gamma'} e^{2\pi i\gamma'} P_{\gamma'},$$

в то время как первое соотношение показывает, что второй контур преобразует P_α в

$$e^{-2\pi i\alpha} (A_\beta e^{-2\pi i\beta} P_\beta + A_{\beta'} e^{-2\pi i\beta'} P_{\beta'}).$$

Следовательно

$$A_\gamma e^{2\pi i\gamma} P_\gamma + A_{\gamma'} e^{2\pi i\gamma'} P_{\gamma'} = e^{-2\pi i\alpha} \{A_\beta e^{-2\pi i\beta} P_\beta + A_{\beta'} e^{-2\pi i\beta'} P_{\beta'}\},$$

и аналогично

$$A'_\gamma e^{2\pi i\gamma} P_\gamma + A'_{\gamma'} e^{2\pi i\gamma'} P_{\gamma'} = e^{-2\pi i\alpha'} \{A'_\beta e^{-2\pi i\beta} P_\beta + A'_{\beta'} e^{-2\pi i\beta'} P_{\beta'}\}.$$

Но

$$A_\gamma P_\gamma + A_{\gamma'} P_{\gamma'} = A_\beta P_\beta + A_{\beta'} P_{\beta'},$$
$$A'_\gamma P_\gamma + A'_{\gamma'} P_{\gamma'} = A'_\beta P_\beta + A'_{\beta'} P_{\beta'}.$$

Исключая P_γ, $P_{\gamma'}$, P_β, $P_{\beta'}$ из этих четырех соотношений, найдем

$$\frac{A_\gamma}{A'_\gamma} = \frac{A_\beta}{A'_\beta} \cdot \frac{e^{-\pi i\alpha} \sin(\alpha + \beta + \gamma')\pi}{e^{-\pi i\alpha'} \sin(\alpha' + \beta + \gamma')\pi} = \frac{A_{\beta'}}{A'_{\beta'}} \cdot \frac{e^{-\pi i\alpha} \sin(\alpha + \beta' + \gamma')\pi}{e^{-\pi i\alpha'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma')\pi},$$

$$\frac{A_{\gamma'}}{A'_{\gamma'}} = \frac{A_\beta}{A'_\beta} \cdot \frac{e^{-\pi i\alpha} \sin(\alpha + \beta + \gamma)\pi}{e^{-\pi i\alpha'} \sin(\alpha' + \beta + \gamma)\pi} = \frac{A_{\beta'}}{A'_{\beta'}} \cdot \frac{e^{-\pi i\alpha} \sin(\alpha + \beta' + \gamma)\pi}{e^{-\pi i\alpha'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma)\pi}.$$

Следовательно любое из соотношений

$$\frac{A_\beta}{A'_\beta}; \quad \frac{A_{\beta'}}{A'_{\beta'}}; \quad \frac{A_\gamma}{A'_\gamma}, \quad \frac{A_{\gamma'}}{A'_{\gamma'}}$$

известно.

Все четыре соотношения совместны, если

$$\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\cdot\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\cdot\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi}=\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\cdot\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi},$$

что удовлетворяется на основании соотношения

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

Чтобы определить группу уравнения, достаточно рассмотреть изменения, которые претерпевают два фундаментальных решения, например P_α и $P_{\alpha'}$, когда точка z описывает контур вокруг каждой из двух особых точек, например a и b. Контур, описываемый вокруг a в положительном направлении, преобразует P_α и $P_{\alpha'}$ соответственно в

$$e^{2\pi i\alpha}P_\alpha\,,\quad e^{2\pi i\alpha'}P_{\alpha'},$$

и аналогично, описав положительний контур вокруг b, P_α и $P_{\alpha'}$ соответственно принимают значения

$$A_\beta e^{2\pi i\beta}P_\beta+A_{\beta'}e^{2\pi i\beta'}P_{\beta'},\quad A'_\beta e^{2\pi i\beta}P_\beta+A'_{\beta'}e^{2\pi i\beta'}P_{\beta'}.$$

Но поскольку

$$P_\alpha=A_\beta P_\beta+A_{\beta'}P_{\beta'},$$
$$P_{\alpha'}=\lambda A_\beta P_\beta+\lambda' A_{\beta'}P_{\beta'},$$

где

$$\lambda=\frac{A'_\beta}{A_\beta},\qquad \lambda'=\frac{A'_{\beta'}}{A_{\beta'}};$$

конечные формы, которые примут P_α и $P_{\alpha'}$, после обхода контура вокруг b, могут быть выражены через P_α и $P_{\alpha'}$ в виде

$$\frac{\lambda' e^{2\pi i\beta}-\lambda e^{2\pi i\beta'}}{\lambda'-\lambda}P_\alpha+\frac{e^{2\pi i\beta'}-e^{2\pi i\beta}}{\lambda'-\lambda}P_{\alpha'},$$

$$\frac{\lambda\lambda'(e^{2\pi i\beta}-e^{2\pi i\beta'})}{\lambda'-\lambda}P_\alpha+\frac{\lambda' e^{2\pi i\beta'}-\lambda e^{2\pi i\beta}}{\lambda'-\lambda}P_{\alpha'}.$$

Чтобы получить несколько более симметричное выражение, допустим, что

$$u=(\lambda'-\lambda)P_\alpha\,,\quad v=P_{\alpha'},$$

тогда, если S_a — операция проведения положительного контура вокруг a, то

$$S_a u=e^{2\pi i\alpha}u,\quad S_a v=e^{2\pi i\alpha'}v,$$

а если S_b — аналогичная операция относительно b, то

$$S_b u=\frac{\mu e^{2\pi i\beta}-e^{2\pi i\beta'}}{\mu-1}u+(e^{2\pi i\beta'}-e^{2\pi i\beta})v,$$

$$S_b v=\frac{\mu(e^{2\pi i\beta}-e^{2\pi i\beta'})}{(\mu-1)^2}u+\frac{\mu e^{2\pi i\beta'}-e^{2\pi i\beta}}{\mu-1}v,$$

где

$$\mu = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sin(\alpha + \beta' + \gamma')\pi \cdot \sin(\alpha' + \beta + \gamma')\pi}{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma')\pi \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma')\pi}.$$

Обе подстановки S_a и S_b могут рассматриваться как фундаментальные подстановки группы; любая другая подстановка состоит из целых степеней S_a и S_b.

Принимается без доказательства, что все решения уравнения являются *алгебраическими* функциями z, и обладают корнями алгебраического уравнения; каждое решение может иметь лишь конечное число значений в каждой особой точке. Таким образом число независимых подстановок конечно, следовательно и группа конечна. Очевидно, для конечности группы необходимо, чтобы

$$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta',\ \gamma,\ \gamma'$$

были все рациональными числами.

Если уравнение привести к нормальному виду путем устранения члена, содержащего $\frac{dw}{dz}$ подстановкой

$$w = (z-a)^{\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'-1)}(z-b)^{\frac{1}{2}(\beta+\beta'-1)}(z-c)^{\frac{1}{2}(\gamma+\gamma'-1)}v,$$

то оно примет вид

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \sum_{r=1}^{3} \frac{1-\lambda_r^2}{(z-a_r)^2} \cdot \frac{\psi'(a_r)}{4\psi} v = 0,$$

где

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha'), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\beta - \beta'), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(\gamma - \gamma').$$

Алгебраические решения возможны в пятнадцати случаях, когда λ_1, λ_2, λ_3 принимают следующие значения[1],

I	$^1/_2\ ^1/_2\ ^1/_n$	II	$^1/_2\ ^1/_3\ ^1/_3$
III	$^2/_3\ ^1/_3\ ^1/_3$	IV	$^1/_2\ ^1/_3\ ^1/_4$
V	$^2/_3\ ^1/_4\ ^1/_4$	VI	$^1/_2\ ^1/_3\ ^1/_5$
VII	$^2/_5\ ^1/_3\ ^1/_3$	VIII	$^2/_3\ ^1/_5\ ^1/_5$
IX	$^1/_2\ ^2/_5\ ^1/_5$	X	$^3/_5\ ^1/_3\ ^1/_5$
XI	$^2/_5\ ^2/_5\ ^2/_5$	XII	$^2/_3\ ^1/_3\ ^1/_5$
XIII	$^4/_5\ ^1/_5\ ^1/_5$	XIV	$^1/_2\ ^2/_5\ ^1/_3$
XV	$^3/_5\ ^2/_5\ ^1/_3$		

[Подробное исследование линейных уравнений второго порядка, общие решения которых являются алгебраическими, и практические методы получения таких решений см. Forsyth, Theory of Differential Equations, 4, 176—190].

---

[1] Schwarz, J. für Math., 75 (1872), 293; Cayley, Trans. Camb. Phil. Soc., 13 (1881), 5 [Coll. Math. Papers, 11, 148]; Klein, Math. Ann., 11 (1877), 115; 12, 167 [Ges. Math. Abhand., 2, 302, 307; Vorlesungen über das Ikosaeder, 115.

Примеры

1. Докажите, что если w удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$w^n + a_2 w^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

коэфициенты которого полиномы от z, то w удовлетворяет линейному диференциальному уравнению порядка $n-1$, коэфициенты которого — рациональные функции z.

2. Если u — любая функция z и

$$w^3 + 3w = u,$$

то докажите, что

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\frac{uu'}{u^2+4} - \frac{u''}{u'}\right)\frac{dw}{dz} - \frac{1}{9}\frac{u'^2}{u^2+4}w = 0.$$

3. Докажите, что диференциальное уравнение, соответствующее схеме

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & z \\ 1-\lambda & 1-\mu & \nu & \tau & \end{Bmatrix},$$

где

$$\lambda + \mu - \nu - \sigma - \tau = 0,$$

имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\frac{\lambda}{z} + \frac{\mu}{z-1} + \frac{1-\nu}{z-a}\right)\frac{dw}{dz} + \frac{\sigma\tau(z-q)}{z(z-1)(z-a)}w = 0,$$

q — произвольная постоянная.

Если решение, относящееся к особой точке $z=0$ с показателем 0, обозначить через

$$W(a,\ q;\ \sigma,\ \tau,\ \lambda,\ \mu;\ z),$$

покажите, что возможны восемь решений вида

$$w = z^\alpha (z-1)^\beta (z-a)^\gamma\, W(a,\ q;\ \sigma',\ \tau',\ \lambda',\ \mu';\ z).$$

[Если $a=1$, $q=1$ или $a=0$, $q=0$, то уравнение вырождается в гипергеометрическое уравнение. Можно построить последовательность из 64 решений аналогично последовательности из 24 решений гипергеометрического уравнения. См. Heun, Math. Ann., 33 (1889), 161, 180].

4. Уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p\frac{dw}{dz} + qw = 0$$

преобразуется подстановкой

$$w = W \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int p\, dz\right)$$

в уравнение

$$\frac{d^2W}{dz^2} + IW = 0,$$

где

$$I = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}\frac{dp}{dz}.$$

[Это выражение называется *нормальной* формой уравнения. Уравнения, имеющие одинаковую нормальную форму, *эквивалентны*, а I — их *инвариант*].

Если z — функция s, то выражение

$$\{s,\ z\} \equiv -\left[\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2\right] / z'^2,$$

где штрихи обозначают диференцирование относительно s, называется *производной Шварца*. Пусть w_1 и w_2 будут двумя независимыми решениями указанного уравнения относительно w и пусть $s = w_1/w_2$, тогда

$$\{s, z\} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz} = 2I.$$

Докажите, что для изменения независимой переменной z на Z

$$\{s, z\} = \{s, Z\}\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 + \{Z, z\}.$$

5. Докажите, что для гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)z\}\frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0,$$

$$\{s, z\} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)}{z^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)}{z(z-1)},$$

где λ, μ, ν зависят от α, β, γ.

[Связь полученного результата с построением алгебраических решений. см. Forsyth, Theory of Differential Equations, 4, 182 — 184].

6. Если уравнение Ляме с $n = 1$ выразить в виде уравнения Якоби

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \{2k^2 \operatorname{sn}^2 z - \eta\} w,$$

то его общее решение будет иметь вид

$$w = A\frac{H(z+a)}{\Theta(z)}e^{-zZ(a)} + B\frac{H(z-a)}{\Theta(z)}e^{zZ(a)},$$

где $\operatorname{dn}^2 a = \eta - k^2$.

Рассмотрите частные случаи

$$h = 1 + k^2, \quad 1, \quad k^2.$$

[Hermite].

7. Покажите, что если n — положительное целое число, то уравнение Ляме

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \{h + n(n+1)\wp(z)\}w = 0$$

имеет для соответствующих значений h решения вида

$$\text{(I)}\ w = P_m \qquad (n = 2m),$$

$$\text{(II)}\ w = [\{\wp(z) - e_\lambda\}\{\wp(z) - e_\mu\}]^{\frac{1}{2}} P_{m-1} \qquad (n = 2m),$$

$$\text{(III)}\ w = [\wp(z) - e_\lambda] P_{m-1} \qquad (n = 2m-1),$$

$$\text{(IV)}\ w = \wp'(z) P_{m-2} \qquad (n = 2m-1),$$

где P_r полином степени r от $\wp(z)$, а e_λ, e_μ — любые две постоянные e_1, e_2, e_3.

Исследуйте соответствующие решения формы Якоби уравнения Ляме.

8. Проинтегрируйте уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \left\{\frac{\lambda(\lambda+1)}{\operatorname{sn}^2 z} + \frac{\mu(\mu+1)\operatorname{dn}^2 z}{\operatorname{cn}^2 z} + \frac{\nu(\nu+1)k^2\operatorname{cn}^2 z}{\operatorname{dn}^2 z} + n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 z + \eta\right\} w.$$

[Darboux].

9. Найдите линейное диференциальное уравнение, решения которого являются произведениями решений уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + Iw = 0,$$

и объясните, почему оно третьего порядка.

[Lindemann].

10. Покажите, что уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{2}(1-2z)\frac{dw}{dz} + (az+b)w = 0$$

имеет два частных решения, произведением которых является однозначная трансцендентная функция $F(z)$, и покажите, что этими решениями являются

$$w_1 = \{F(z)\}^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[c\int\frac{dz}{\{z(1-z)\}^{\frac{1}{2}}F(z)}\right],$$

$$w_2 = \{F(z)\}^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-c\int\frac{dz}{\{z(1-z)\}^{\frac{1}{2}}F(z)}\right],$$

где c — определенная постоянная. При каких условиях эти два частных решения совпадут?

[Math. Tripos, II, 1898].

ГЛАВА XVI

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ РЯДА

16·1. Метод Фробениуса. В предыдущей главе (§ 15·3) мы показали, что если все решения линейного диференциального уравнения регулярны в соседстве с особой точкой, то коэфициенты уравнения подлежат некоторым определенным ограничениям. Так, если рассматриваемая особая точка является началом, то уравнение может быть написано в виде

$$z^n \frac{d^n w}{dz^n} + z^{n-1} P_1(z) \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + z P_{n-1}(z) \frac{dw}{dz} + P_n(z) w = 0,$$

где функции $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ аналитические в соседстве с $z = 0$. В этом случае можно получить явное разложение n фундаментальных решений, относящихся к особенности в начале, а также доказать, что эти разложения сходятся для достаточно малых значений (z)[1].

16·11. Формальное решение. Образуем ряд

$$W(z, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^{\rho+\nu} \qquad (c_0 \neq 0),$$

где число ρ и коэфициенты c_ν должны быть так определены, чтобы W было решением диференциального уравнения. Представим диференциальное уравнение символически в виде

$$Lw = 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} LW(z, \rho) &= \Sigma c_\nu L z^{\rho+\nu} \\ &= \Sigma c_\nu z^{\rho+\nu} f(z, \rho+\nu), \end{aligned}$$

где $f(z, \rho+\nu)$ представляет выражение

$$[\rho+\nu]_n + [\rho+\nu]_{n-1} P_1(z) + \ldots + [\rho+\nu]_1 P_{n-1}(z) + P_n(z);$$

символ $[\rho+\nu]_n$ заменяет $(\rho+\nu)(\rho+\nu-1)\ldots(\rho+\nu-n+1)$. Теперь представим $f(z, \rho+\nu)$ — аналитическую функцию z в соседстве с $z=0$ — в виде степенного ряда по z

$$f(z, \rho+\nu) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\rho+\nu) z^\lambda,$$

---

[1] Frobenius, J. für Math., 76 (1873) 214. Модификации первоначального представления см. Forsyth, Differential Equations, 4, 78—97.

откуда

$$LW(z, \rho) = \Sigma \{c_\nu f_0(\rho + \nu) + c_{\nu-1} f_1(\rho + \nu - 1) + \ldots + c_0 f_\nu(\rho)\} z^{\rho+\nu}.$$

Если

$$LW(z, \rho) = 0,$$

то коэфициент каждой отдельной степени z должен быть равен нулю. В этом случае возникает последовательность рекуррентных соотношений

$$c_0 f_0(\rho) = 0,$$

$$c_1 f_0(\rho + 1) + c_0 f_1(\rho) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_\nu f_0(\rho + \nu) + c_{\nu-1} f_1(\rho + \nu - 1) + \ldots + c_0 f_\nu(\rho) = 0,$$

и т. д.

Поскольку c_0 не равно нулю, первое уравнение последовательности

$$f_0(\rho) \equiv [\rho]_n + [\rho]_{n-1} P_1(0) + \ldots + \rho P_{n-1}(0) + P_n(0) = 0$$

определяет n значений ρ, которые могут быть зависимыми или независимыми. Если одно из этих значений выбрать таким образом, чтобы $f_0(\rho + \nu) \neq 0$ для любого положительного целого значения ν, то рекуррентные соотношения определят постоянные c_ν единственным образом.

$$c_\nu = \frac{(-1)^\nu c_0 F_\nu(\rho)}{f_0(\rho + 1) f_0(\rho + 2) \ldots f_0(\rho + \nu)},$$

где

$$F_\nu(\rho) = \begin{vmatrix} f_1(\rho + \nu - 1), & f_2(\rho + \nu - 2), \ldots, & f_{\nu-1}(\rho + 1), & f_\nu(\rho) \\ f_0(\rho + \nu - 1), & f_1(\rho + \nu - 2), \ldots, & f_{\nu-2}(\rho + 1), & f_{\nu-1}(\rho) \\ 0 & , f_0(\rho + \nu - 2), \ldots, & f_{\nu-3}(\rho + 1), & f_{\nu-2}(\rho) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \quad , & 0 \quad , \ldots, & f_0(\rho + 1), & f_1(\rho) \end{vmatrix}$$

Допуская, что ряд $W(z, \rho)$ сходится для каждого выбранного частного значения ρ, увидим, что если n корней определяющего уравнения независимы, и никакие два из них не различаются на целое число, то каждому числу ρ соответствует определенная последовательность коэфициентов c_ν, а всего получается n независимых решений, образующих фундаментальную систему.

Если n указанных значений ρ таковы, что два или несколько различаются на целое число, то они могут быть расположены в виде независимых последовательностей

$$\rho_0, \ \rho_1, \ldots, \rho_{\alpha-1},$$

$$\rho_\alpha, \ \rho_{\alpha+1}, \ldots, \rho_{\beta-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

так, чтобы величины в каждой последовательности различались только на целые числа, и их вещественные части образовали бы невозрастающую последовательность. Только первый член каждой последовательности дает решение рассмотренного типа, поскольку, например, любой член $\rho_{\alpha+\kappa}$ последовательности $\rho_\alpha \ldots \rho_{\beta-1}$ равен ρ_α или меньше его на положительное целое число. В первом случае решение, соответствующее $\rho_{\alpha+\kappa}$, формально тождественно с решением, соответствующим ρ_α; во втором случае решение, соответствующее $\rho_{\alpha+\kappa}$, не действительно вследствие нарушения условия $f_0(\rho+\nu) \neq 0$ при $\nu = \rho_\alpha - \rho_{\alpha+\kappa}$.

Трудности второго случая могут быть устранены подстановкой $c_0 f_0(\rho_{\alpha+\kappa}+\nu)$ вместо первоначальной постоянной c_0; в этом случае получается ряд, где все коэфициенты c_ν конечны, но первые ν членов обращаются в нуль, а ряд отличается от ряда для ρ_α только постоянным множителем и следовательно не является независимым решением.

16 · 12. Модификация формального метода решения. Чтобы получить все решения, соответствующие каждой последовательности, необходимо видоизменить прежний метод следующим образом.

Пусть σ будет параметром, изменения которого ограничены кругом, проведенным вокруг корня $f_0(\rho) = 0$ с радиусом, достаточно малым для исключения всех других корней[1]. Предположим, что мы получили ряд

$$W(z, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^{\sigma+\nu},$$

где c_0 — произвольна, а c_ν определяется как функция σ при помощи рекуррентных соотношений

$$c_1 f_0(\sigma+1) + c_0 f_1(\sigma) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_\nu f_0(\sigma+\nu) + c_{\nu-1} f_1(\sigma+\nu-1) + \ldots + c_0 f_\nu(\sigma) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где функциональные операторы $f_0, f_1, \ldots, f_\nu, \ldots$ определены выше, тогда, согласно рекуррентным соотношениям,

$$LW(z, \sigma) = \Sigma \{c_\nu f_0(\sigma+\nu) + c_{\nu-1} f_1(\sigma+\nu-1) + \ldots + c_0 f_\nu(\sigma)\} z^{\sigma+\nu}$$
$$= c_0 f_0(\sigma) z^\sigma.$$

Мы получим предыдущее решение, полагая $\sigma = \rho$, где ρ — соответствующее решение $f_0(\sigma) = 0$.

16 · 2. Сходимость разложения. Пусть Γ будет радиусом наибольшего круга, с центром в начале, внутри которого все функ-

---

[1] $f_0(\rho) = 0$ является алгебраическим уравнением относительно ρ степени n; следовательно его корни изолированы, и вокруг каждого корня (причем кратный корень считается только один раз) может быть проведен круг (с радиусом, не равным нулю), который не содержит других корней.

ции $P_1(z),\ P_2(z),\ldots,P_n(z)$ — аналитические, тогда ряд

$$f(z,\sigma+\nu)=\sum_{\lambda} f_{\lambda}(\sigma+\nu)\,z^{\lambda}$$

и ряд

$$f'(z,\sigma+\nu)=\sum_{\lambda}(\lambda+1)\,f_{\lambda+1}(\sigma+\nu)z^{\lambda},$$

полученный почленным диференцированием первого ряда относительно z, будут сходиться при $|z|<\Gamma$. Пусть $M(\sigma+\nu)$ будет верхней границей $|f'(z,\sigma+\nu)|$ на круге $|z|=R=\Gamma-\varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число, тогда согласно интегральной теореме Коши

$$(\lambda+1)\,f_{\lambda+1}(\sigma+\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\frac{f'(z,\sigma+\nu)}{z^{\lambda+1}}\,dz,$$

откуда

$$|(\lambda+1)f_{\lambda+1}(\sigma+\nu)|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M(\sigma+\nu)}{R^{\lambda+1}}\,2\pi R=\frac{M(\sigma+\nu)}{R^{\lambda}}$$

и

$$|f_{\lambda+1}(\sigma+\nu)|<M(\sigma+\nu)\,R^{-\lambda}\qquad(\lambda=0,1,2,\ldots)$$

Поскольку изменения σ ограничены в соседстве с корнями $f_0(\sigma)=0$ и поскольку число таких корней конечно, положительное целое число N может быть выбрано таким, чтобы $f(\sigma+\nu+1)\neq 0$ при $\nu\geqslant N$. В этом случае

$$c_{\nu+1}=-\frac{1}{f_0(\sigma+\nu+1)}\{c_{\nu}f_1(\sigma+\nu)+c_{\nu-1}f_2(\sigma+\nu-1)+\ldots+$$
$$+c_0f_{\nu+1}(\sigma)\};$$

если вместо каждого члена подставить его модуль, получим

$$|c_{\nu+1}|\leqslant\frac{1}{|f_0(\sigma+\nu+1)|}\{|c_{\nu}|\,|f_1(\sigma+\nu)|+|c_{\nu-1}|\,|f_2(\sigma+\nu-1)|+\ldots+$$
$$+|c_0|\,|f_{\nu+1}(\sigma)|\}$$
$$<\frac{1}{|f_0(\sigma+\nu+1)|}\{|c_{\nu}|\,M(\sigma+\nu)+|c_{\nu-1}|\,M(\sigma+\nu-1)R^{-1}+\ldots+$$
$$+|c_0|\,M(\sigma)R^{-\nu}\}=C_{\nu+1}.$$

Как следствие этого определения, получим

$$C_{\nu+1}=\frac{|c_{\nu}|\,M(\sigma+\nu)}{|f_0(\sigma+\nu+1)|}+\frac{|f_0(\sigma+\nu)|}{|f_0(\sigma+\nu+1)|}R^{-1}C_{\nu};$$

поскольку $|c_{\nu}|<C_{\nu}$, то

$$\frac{C_{\nu+1}}{C_{\nu}}<\frac{M(\sigma+\nu)}{|f_0(\sigma+\nu+1)|}+\frac{|f_0(\sigma+\nu)|}{|f_0(\sigma+\nu+1)|}R^{-1}.$$

Выберем положительные числа A_{ν} так, чтобы они удовлетворяли рекуррентному соотношению

$$\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} = \frac{M(\sigma+\nu)}{|f_0(\sigma+\nu+1)|} + \frac{|f_0(\sigma+\nu)|}{|f_0(\sigma+\nu+1)|} R^{-1},$$

и чтобы $A_N = C_N$, тогда

$$|c_{\nu+1}| < C_{\nu+1} < A_{\nu+1} \qquad (\nu \geqslant N).$$

Теперь

$$f(z, \sigma+\nu) = [\sigma+\nu]_n + [\sigma+\nu]_{n-1} P_1(z) + \ldots + P_n(z),$$

откуда

$$f'(z, \sigma+\nu) = [\sigma+\nu]_{n-1} P_1'(z) + [\sigma+\nu]_{n-2} P_2'(z) + \ldots + P_n'(z),$$

т. е, $f'(z, \sigma+\nu)$ — полином от $\sigma+\nu$ степени $n-1$, коэфициенты которого зависят только от z, следовательно

$$M(\sigma+\nu) = \operatorname{Max} |f'(z, \sigma+\nu)| \qquad (|z| \leqslant R)$$

$$\leqslant M_1 |[\sigma+\nu]_{n-1}| + M_2 |[\sigma+\nu]_{n-2}| + \ldots + M_n,$$

где

$$M_r = \operatorname{Max} |P_r'(z)| \qquad (|z| \leqslant R),$$

откуда, если ν_0 дано, то число K, независимое от σ, существует таким образом, что

$$M(\sigma+\nu) < K\nu^{n-1},$$

если $\nu \geqslant \nu_0$. Аналогично, поскольку $f_0(\sigma+\nu)$ — полином от $\sigma+\nu$ степени n, существует число K_1, независимо от σ, причем

$$|f_0(\sigma+\nu)| < K_1 \nu^n.$$

Отсюда, когда $\nu \to \infty$

$$\frac{M(\sigma+\nu)}{|f_0(\sigma+\nu+1)|} \to 0$$

и

$$\left| \frac{f_0(\sigma+\nu)}{f_0(\sigma+\nu+1)} \right| \to 1$$

равномерно относительно σ, откуда следует, что

$$\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} \to R^{-1}$$

равномерно относительно σ.

Отсюда[1] степенной ряд

$$\sum A_n z^n$$

имеет радиус сходимости R, и поэтому, так как

$$|c_n| \leqslant A_n,$$

радиус сходимости ряда

$$\sum c_n z^n$$

[1] Bromwich, Theory of Infinite Series, § 84.

не меньше R. Поскольку A_n не зависит от σ, сходимость равномерна относительно σ.

16·3. Решения, соответствующие последовательности показателей диференциального уравнения. Рассмотрим одну из последовательностей показателей диференциального уравнения, например, последовательность [1]

$$\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\alpha-1},$$

которая так расположена, что если $\varkappa < \lambda$, то $\rho_\varkappa - \rho_\lambda$ положительное целое число или нуль. Поскольку эти показатели не обязательно равны, они могут быть разделены на подпоследовательности так, чтобы члены каждой подпоследовательности были равны между собой. Так, предположим, что $\rho_0 = \rho_1 = \ldots = \rho_{i-1}$ соответствуют корню $f_0(\sigma) = 0$ кратности i; $\rho_i = \rho_{i+1} = \ldots = \rho_{j-1}$ соответствуют корню кратности $j - i$; $\rho_j = \rho_{j+1} = \ldots = \rho_{k-1}$ соответствуют корню кратности $k - j$ и т. д. до тех пор, пока ряд не будет исчерпан.

Чтобы исключить возможность того, чтобы какой-либо из коэфициентов c_ν, определяемых рекуррентными соотношениями § 16·12, стал бесконечным, напишем вместо c_0

$$c_0 f_0(\sigma + 1) f_0(\sigma + 2) \ldots f_0(\sigma + \omega) = c_0 f(\sigma),$$

где $\omega = \rho_0 - \rho_{\alpha-1}$, что равносильно умножению ряда для $W(z, \sigma)$ на $f(\sigma)$, тогда

$$\overline{W}(z, \sigma) = f(\sigma)\, W(z, \sigma)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu f(\sigma)\, z^{\sigma+\nu}$$

конечно, если изменения σ ограничены в соседстве с любым из $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\alpha-1}$. Аналогично

$$L\overline{W}(z, \sigma) = c_0 f_0(\sigma) f(\sigma)\, z^\sigma$$

$$= c_0 F(\sigma)\, z^\sigma,$$

где $F(\sigma)$ — произведение $f_0(\sigma) f_0(\sigma + 1) \ldots f_0(\sigma + \omega)$.

Теперь в функции $F(\sigma)$ множитель $f_0(\sigma)$ степени i относительно $(\sigma - \rho_0)$, степени $j - i$ относительно $(\sigma - \rho_i)$, степени $k - j$ относительно $(\sigma - \rho_j)$ и т. д. Никакой другой множитель не содержит $(\sigma - \rho_0)$, но $f_0(\sigma + \rho_0 - \rho_i)$ степени i относительно $(\sigma - \rho_i)$. Аналогично $(\sigma - \rho_j)$ входит в виде множителя степени $j - i$ в функцию $f_0(\sigma + \rho_i - \rho_j)$ и в виде множителя степени i в $f_0(\sigma + \rho_0 + \rho_j)$. Поэтому $F(\sigma)$ степени i относительно $(\sigma - \rho_0)$,

[1] Каждый показатель повторяется некоторое число раз, равное кратности соответствующего корня $f_0(\sigma) = 0$.

степени j относительно $(\sigma-\rho_i)$, степени k относительно $(\sigma-\rho_j)$ и т. д.

Если σ лежит в некоторой области в плоскости σ, содержащей точку ρ_μ, где ρ_μ — показатель рассматриваемой последовательности, то коэфициенты c_ν — аналитические (в действительности рациональные) функции σ. Если $|z|\leqslant R$, то $\sum c_\nu z^\nu$ является равномерно сходящимся рядом аналитических функций σ и может быть поэтому продиференцирован относительно σ. Более того, операторы L и $\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}$ могут переставляться. Отсюда следует, что

$$\left[L\left\{\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\overline{W}(z,\sigma)\right\}\right]_{\sigma=\rho_\mu}=\left[\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\left\{c_0F(\sigma)z^\sigma\right\}\right]_{\sigma=\rho_\mu}$$

для $s=0, 1, 2, \ldots, m-1$, где m — степень $F(\sigma)$ в $(\sigma-\rho_\mu)$, и, следовательно, для любого значения s

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\overline{W}(z,\sigma)\right]_{\sigma=\rho_\mu}$$

является решением диференциального уравнения.

Теперь

$$\overline{W}(z,\sigma)=z^\sigma\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(\sigma)z^\nu,$$

где $g_\nu(\sigma)=c_\nu f_1(\sigma)$, откуда

$$\frac{\partial^s\overline{W}(z,\sigma)}{\partial\sigma^s}=z^\sigma\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu^{(s)}(\sigma)z^\nu+s\log z\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu^{(s-1)}(\sigma)z^\nu+\ldots+\right.$$

$$\left.+(\log z)^s\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(\sigma)z^\nu\right\}$$

$$=w_s(z,\sigma)+s\log z\,w_{s-1}(z,\sigma)+\ldots+(\log z)^s w_1(z,\sigma);$$

$w_r(z,\sigma)$ равно

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu^{(r)}(\sigma)z^{\sigma+\nu}.$$

Рассмотрим показатель ρ_0 в первой подпоследовательности. В этом случае $g_\nu(\rho_0)=c_\nu f(\rho_0)$ конечно или равно нулю для всех значений ν и $g_0(\rho_0)\neq 0$. Следовательно здесь возникает подпоследовательность i решений

$$W_0 = w_0(z, \rho_0),$$

$$W_1 = w_0(z, \rho_0)\log z + w_1(z, \rho_0),$$

$$W_2 = w_0(z, \rho_0)\ (\log z)^2 + 2w_1(z, \rho_0)\log z + w_2(z, \rho_0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$W_{i-1} = w_0(z, \rho_0)(\log z)^{i-1} + (i-1)\,w_1(z, \rho_0)(\log z)^{i-2} + \ldots +$$
$$+ w_{i-1}(z, \rho_0).$$

Наличие $w_0\ (z, \rho_0)(\log z)^{r-1}$ в W_r показывает, что эти i решений линейно-независимы.

Рассмотрим показатель ρ_i второй подпоследовательности. Здесь $g_\nu(\rho_i)$ — нуль порядка i, когда $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \rho_0 - \rho_i - 1$ и конечно или равно нулю, когда $\nu \geqslant \rho_0 - \rho_i$. Отсюда следует, что

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\left\{z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\rho_0-\rho_i-1} g_\nu(\sigma)\, z^\nu\right\}\right]_{\sigma=\rho_i} = 0,$$

когда $s = 0, 1, 2, \ldots, i-1$; поэтому ведущий член в $W(z, \sigma)$ степени $\sigma + \rho_0 - \rho_i$ относительно z, т. е. степени ρ_1 при $\sigma = \rho_i$.

Решения, соответствующие подпоследовательности индекса i, были полностью перечислены; они соответственно равны W_0, $W_1, \ldots, W_{i-1}$. Поскольку решение

$$\left[z^\sigma \sum_{\nu=\rho_0-\rho_i}^{\infty} g_\nu(\sigma)\, z^\nu\right]_{\sigma=\rho i}$$

не содержит логарифмических членов, оно равно W_0, умноженному на постоянную; при $s \leqslant i-1$

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\left\{z^\sigma \sum_{\nu=\rho_0-\rho_i}^{\infty} g_\nu(\sigma)\, z^\nu\right\}\right]_{\sigma=\rho_i}$$

является линейной комбинацией решений W_0, $W_1, \ldots, W_s$.

Остаются $j - i$ решений

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\left\{z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\sigma)\, z^\nu\right\}\right]_{\sigma=\rho_i},$$

где $s = i, i+1, \ldots, j-1$. Эти решения образуют подпоследовательность

$$W_i = w_0(z, \rho_i)(\log z)^i + i w_1(z, \rho_i)\ (\log z)^{i-1} + \ldots + w_i(z, \rho_i),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$W_{j-1} = w_0(z, \rho_i)(\log z)^{j-1} + (j-1)\,w_1(z, \rho_i)\ (\log z)^{j-2} + \ldots + w_{j-1}(z, \rho_i),$$

где $w_r(z, \rho_i)$ — линейная комбинация $w_0(z, \rho_0)$, $w_1(z, \rho_0), \ldots$, $w_r(z, \rho_0)$, если $r \leqslant i-1$. Член $w_i(z, \rho_i)$ не равен нулю, так как

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial\sigma^i} g_0(\sigma)\right]_{\sigma=\rho_i} \neq 0.$$

Остальные члены подпоследовательности индекса i содержат выражение $w_i(z, \rho_i)$, умноженное на логарифмический множитель. Так, W_{i+r} содержит член $w_i(z, \rho_i)(\log z)^r$, следовательно члены подпоследовательности линейно-независимы. В следующем параграфе мы покажем, что они также линейно не зависят от членов первой подпоследовательности.

Аналогично можно доказать, что подпоследовательность индекса j дает $k-j$ решений, которые могут быть выражены в виде

$$\left[\frac{\partial^s}{\partial\sigma^s}\left\{z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\sigma) z^\nu\right\}\right]_{\sigma=\rho_j},$$

где $s=j, j+1, \ldots, k-1$ и т. д. до тех пор, пока вся последовательность показателей $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\alpha-1}$ не будет исчерпана.

Последовательность показателей

$$\rho_\alpha, \rho_{\alpha+1}, \ldots \rho_{\beta-1}$$

разделяется на подпоследовательности равных показателей и рассматривается аналогично. Следовательно мы получили совокупность n решений; остается доказать, что они образуют фундаментальную систему.

16·31. Доказательство линейной независимости решений. Рассмотрим решения, соответствующие частной последовательности показателей, например, последовательности $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\alpha-1}$, и предположим, что эти решения связаны линейным соотношением

$$A_0 W_0 + A_1 W_1 + \ldots + A_{\alpha-1} W_{\alpha-1} = 0.$$

Расположим левую часть уравнения по убывающим степеням $\log z$, тогда совокупность членов высшей степени k относительно $\log z$ должна тождественно обратиться в нуль

$$A_r W_r + \ldots + A_s W_s = 0.$$

Но каждое из чисел $W_r, \ldots, W_s$ получается из независимой подпоследовательности, следовательно они соответствуют различным показателям. Коэфициент члена высшей степени должен обратиться в нуль так же, как и коэфициент второго высшего показателя, и т. д. Отсюда следует, что

$$A_r = \ldots = A_s = 0.$$

Выражение $A_0 W_0 + A_1 W_1 + \ldots + A_{\alpha-1} W_{\alpha-1}$ теперь степени $k-1$ относительно $\log z$; совокупность членов, содержащих

$(\log z)^{k-1}$, приравнивается нулю. Можно доказать, что каждый коэфициент, который входит в эти члены, равен нулю. Процесс нужно продолжать до тех пор, пока мы не докажем, что

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{\alpha-1} = 0.$$

Следовательно, решения любой частной последовательности не находятся в линейной зависимости.

Рассмотрим теперь совокупность решений

$$W_1, \ W_2, \ldots, \ W_n$$

и предположим, что существует линейная зависимость вида

$$A_1 W_1 + A_2 W_2 + \ldots + A_n W_n = 0.$$

Поэтому совокупность членов высшей степени k относительно $\log z$ должна обратиться в нуль

$$(A_r W_r + \ldots + A_s W_s) + (A_t W_t + \ldots + A_u W_u) + \ldots = 0,$$

где члены, заключенные в скобки, принадлежат к той же последовательности. Предположим, что множители этих последовательностей, соответствующие контуру вокруг точки z, как начала, равны θ_1, $\theta_2, \ldots$ Тогда после λ контуров

$$\theta_1^\lambda (A_r W_r + \ldots + A_s W_s) + \theta_2^\lambda (A_t W_t + \ldots + A_u W_u) + \ldots = 0.$$

Поскольку $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \ldots$, эти уравнения для $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ несовместны, если только мы не получим

$$A_r W_r + \ldots + A_s W_s = 0, \quad A_t W_t + \ldots + A_u W_u = 0, \ldots,$$

что, как мы доказали, возможно лишь в случае

$$A_r = \ldots = A_s = A_t = \ldots = A_u = \ldots = 0.$$

Рассмотрим теперь члены степени $k-1$ относительно $\log z$; можно доказать, что их коэфициенты также равны нулю. Процесс следует продолжать по тех пор, пока мы не докажем, что

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0.$$

Следовательно n решений линейно-независимы и образуют фундаментальную систему.

16·32 Приложение к уравнению Бесселя. Рассмотрим уравнение Бесселя в виде[1]

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2) w = 0,$$

или символически $Lw = 0$. Тогда, если

$$W(z, \rho) = \sum c_\nu z^{\rho-\nu},$$

мы найдем, что

$$LW = c_0 (\rho^2 - n^2) z^\rho,$$

[1] Forsyth, Differential Equations, 4, 101.

если

$$c_1\{(\sigma+1)^2-n^2\}=0,$$
$$c_\nu\{(\sigma+\nu)^2-n^2\}+c_{\nu-2}=0. \qquad (\nu\geqslant 2).$$

Корни определяющего уравнения

$$\sigma^2-n^2=0$$

равны $\pm n$; если n не целое число, то соответствующие решения будут независимы. Решениями будут $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$, где

$$J_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-r}z^{n+2r}}{2^{n+2r}r!\,\Gamma(n+r+1)}.$$

Рассмотрим сначала специальный случай, когда n равно нулю. В этом случае $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ совпадают с $J_0(z)$

$$J_0(z)=1-\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$$

Поскольку $\sigma=0$ является двойным корнем определяющего уравнения, второе решение будет иметь вид

$$K_0(z)=\lim_{\sigma=0}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[z^\sigma\left\{1-\frac{z^2}{(\sigma+2)^2}+\frac{z^4}{(\sigma+2)^2(\sigma+4)^2}-\ldots\right\}\right]$$
$$=J_0(z)\log z+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\{\Gamma(r+1)\}^2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}\psi(r),$$

где

$$\psi(r)=\left[\frac{d}{dt}\log\Gamma(t+1)\right]_{t=r}.$$

Предположим, что n — положительное целое число; решение $w=J_n(z)$ является единственным решением, не содержащим логарифмов. Напишем

$$c_0=C\{(\sigma+2n)^2-n^2\},\quad (-1)^n C=E\prod_{r=1}^{n-1}\{(\sigma+2r)^2-n^2\},$$

так что

$$w=C\{(\sigma+2n)^2-n^2\}z^\sigma\left[1-\frac{z^2}{(\sigma+2)^2-n^2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{\prod_{r=1}^{n-1}\{(\sigma+2r)^2-n^2\}}\right]+$$
$$+Ez^{\sigma+2n}\left[1-\frac{z^2}{(\sigma+2n+2)^2-n^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{z^4}{\{(\sigma+2n+2)^2-n^2\}\{(\sigma+2n+4)^2-n^2\}}-\ldots\right]=w_1+w_2.$$

При $\sigma = -n$ функция w_1 обращается в нуль, а w_2 пропорциональна функции $J_n(z)$. Второе решение получается при помощи выражения

$$\lim_{\sigma = -n} \frac{\partial w}{\partial \sigma}.$$

Пусть

$$\lim_{\sigma = -n} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} = W_1, \quad \lim_{\sigma = -n} \frac{\partial w_2}{\partial \sigma} = W_2,$$

тогда

$$W_1 = z^{-n} \frac{2Cn}{\Gamma(n)} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r},$$

$$W_2 = Ez^n \log z \left[1 - \frac{z^2}{2^2(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} Ez^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \{\psi(r) + \psi(n+r) -$$

$$- \psi(n)\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}.$$

Член

$$\frac{1}{2} Ez^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \psi(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r},$$

который входит в W_2, пропорционален $J_n(z)$ и может быть опущен. Пусть

$$C = -\frac{2^{n-1}\Gamma(n)}{n},$$

так что

$$E = \frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)},$$

тогда остальная часть решения $w = W_1 + W_2$ будет иметь вид

$$w = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \{2\log z - \psi(r) - \psi(n+r)\} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} -$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n}$$

и может быть принята в качестве второго решения уравнения Бесселя[1].

16·33. Условия отсутствия логарифмов во всех решениях, относящихся к частному показателю. Первое решение, соответствующее последовательности показателей, например, решение W_0

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 17·61; Watson, Bessel Functions, § 3·52.

§ 16·3, не содержит логарифмов; последующие решения первой подпоследовательности несомненно содержат логарифмические члены. Ведущее решение второй подпоследовательности, например W_i, также содержит логарифмы, но в некоторых случаях может не содержать их, в то время как остальные решения второй подпоследовательности всегда содержат логарифмы. Аналогично, для каждой подпоследовательности после первой, единственным решением, которое может не содержать логарифмов, является ведущее решение этой подпоследовательности.

Рассмотрим любую последовательность показателей

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu, \ldots,$$

расположенных так, что

$$\rho_\varkappa - \rho_\mu$$

является положительным целым числом для $\mu > \varkappa$. Исследуем последовательность условий, необходимых и достаточных для отсутствия логарифмических членов в каждом решении W_μ, соответствующих показателю ρ_μ [1].

Показатель ρ_μ должен быть простым корнем определяющего уравнения, так как кратный корень всегда вводит логарифмические члены. Более того, поскольку каждый показатель $\rho_\varkappa$, индекс которого $\varkappa$ меньше μ, превышает ρ_μ на положительное целое число, любое решение вида

$$W_\mu + b_1 W_{\mu-1} + \ldots + b_{\mu-1} W_1 + b_\mu W_0,$$

где $b_1, \ldots, b_\mu$ — произвольные постоянные, является решением, соответствующим показателю ρ_μ Следовательно решения W_0, $W_1, \ldots, W_{\mu-1}$ не должны содержать логарифмов, а показатели $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ должны быть независимы.

Теперь

$$W_\mu = \left[\frac{\partial^\mu}{\partial\sigma^\mu}\left\{z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\sigma) z^\nu\right\}\right]_{\sigma=\rho_\mu}$$

$$= z^{\rho_\mu}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\mu g_\nu(\sigma)}{\partial\sigma^\mu} z^\nu + \mu\log z \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^{\mu-1} g_\nu(\sigma)}{\partial\sigma^{\mu-1}} z^\nu + \cdots + \right.$$

$$\left. + (\log z)^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\sigma) z^\nu\right]_{\sigma=\rho_\mu}.$$

Следовательно для того, чтобы W_μ не содержало логарифмов, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left[\frac{\partial^s g_\nu(\sigma)}{\partial\sigma^s}\right]_{\sigma=\rho_\mu} = 0$$

[1] Frobenius, loc. cit., 224.

для $s=0, 1, 2, \ldots, \mu-1$ и для всех значений ν, откуда $g_\nu(\sigma)$ должно содержать множитель $(\sigma-\rho_\mu)^\mu$ для всех значений ν. Но

$$\frac{g_\nu(\sigma)}{g_0(\sigma)}=(-1)^\nu \frac{F_\nu(\sigma)}{f_0(\sigma+1)f_0(\sigma+2)\ldots f_0(\sigma+\nu)}=H_\nu(\sigma),$$

а поскольку $g_0(\sigma)=c_0 f(\sigma)$, $g_0(\sigma)$ содержит множитель $(\sigma-\rho_\mu)^\mu$. Следовательно, необходимым и достаточным условием является то, чтобы $H_\nu(\rho_\mu)$ было конечно и равно нулю для всех значений ν. Рекуррентные соотношения для $g_\nu(\sigma)$ и для $H_\nu(\sigma)$ такие же, как и для c_ν, именно

$$H_\nu(\sigma)f_0(\sigma+\nu)+H_{\nu-1}(\sigma)f_1(\sigma+\nu-1)+\ldots+H_0(\sigma)f_\nu(\sigma)=0,$$

где $H_0(\sigma)=1$. Отсюда следует, что если $H_1(\rho_\mu)$, $H_2(\rho_\mu), \ldots$, $H_{\nu-1}(\rho_\mu)$ конечны, то $H_\nu(\rho_\mu)$ будет также конечно, если только $\rho_\mu+\nu$ не является корнем определяющего уравнения

$$f_0(\sigma)=0.$$

При $\nu=\rho_{\mu-1}-\rho_\mu$ множитель $f_0(\sigma+\nu)$ в знаменателе $H_\nu(\sigma)$ имеет простой нуль $\sigma=\rho_\mu$. Следовательно, для этого необходимо, чтобы

$$F_\nu(\rho_\mu)=0$$

при $\nu=\rho_{\mu-1}-\rho_\mu$ и достаточно, чтобы $F_\nu(\sigma)$ было приведено к первому порядку при $\sigma=\rho_\mu$.

При $\nu=\rho_{\mu-2}-\rho_\mu$ два множителя в знаменателе $H_\nu(\sigma)$ имеют простые нули $\sigma=\rho_\mu$, именно

$$f_0(\sigma+\nu-\rho_{\mu-2}+\rho_{\mu-1}) \text{ и } f_0(\sigma+\nu).$$

Таким образом необходимо и достаточно, чтобы для этого частного значения ν функция $F_\nu(\sigma)$ обратилась в нуль второго порядка при $\sigma=\rho_\mu$ или

$$F_\nu(\rho_\mu)=0, \left[\frac{\partial F_\nu(\sigma)}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=\rho_\mu}=0 \text{ при } \nu=\rho_{\mu-2}-\rho_\mu.$$

При $\nu=\rho_{\mu-3}-\rho_\mu$ три множителя в знаменателе $H_\nu(\sigma)$ имеют простые нули при $\sigma=\rho_\mu$, именно

$$f_0(\sigma+\nu-\rho_{\mu-3}+\rho_{\mu-1}),\ f_0(\sigma+\nu-\rho_{\mu-3}+\rho_{\mu-2}),\ f_0(\sigma+\nu),$$

следовательно для этого значения ν функция $F_\nu(\sigma)$ должна обратиться в нуль третьего порядка при $\sigma=\rho_\mu$. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы

$$F_\nu(\rho_\mu)=0, \left[\frac{\partial F_\nu(\sigma)}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=\rho_\mu}=0, \left[\frac{\partial^2 F_\nu(\sigma)}{\partial\sigma^2}\right]_{\sigma=\rho_\mu}=0,$$

где $\nu=\rho_{\mu-3}-\rho_\mu$.

Аналогично, при $\nu=\rho_{\mu-r}-\rho_\mu$, r множителей в знаменателе $H_\nu(\sigma)$ имеют простые нули для $\sigma=\rho_\mu$, следовательно функция

$F_\nu(\sigma)$ должна обратиться в нуль порядка r при $\sigma = \rho_\mu$. Последним условием является то, что при $\nu = \rho_0 - \rho_\mu$ функция $F_\nu(\sigma)$ должна обратиться в нуль порядка μ для $\sigma = \rho_\mu$.

Но мы приняли, что решения, относящиеся к $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\mu-1}$, не содержат логарифмов. Число условий, которым необходимо удовлетворить, равно соответственно $1, 2, \ldots, \mu - 1$, что вместе с μ условиями, относящимися к ρ_μ, образуют совокупность $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)$ условий, необходимых и достаточных для того, чтобы ни одно решение, относящееся к показателю ρ_μ, не содержало логарифмов.

16·4. Действительные и кажущиеся особенности. Особенности решений линейного диференциального уравнения являются также и особенностями уравнения, но обратное не всегда верно. Если точка $z = a$ удовлетворяет условиям для регулярной особенности, некоторые (если не все) решения содержат отрицательные или дробные степени $(z - a)$, а возможно также и степени $\log(z - a)$. В этих случаях особенность называется *действительной*. Но при некоторых специальных условиях каждое решение может быть аналитическим относительно $z=a$; в этом случае особенность называется *кажущейся*. Выведем последовательность условий, достаточных для получения кажущейся особенности[1].

Напишем уравнение в виде

$$\frac{d^n w}{dz^n} + \frac{P_1(z)}{z-a} \cdot \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + \frac{P_{n-1}(z)}{(z-a)^{n-1}} \cdot \frac{dw}{dz} + \frac{P_n(z)}{(z-a)^n} w = 0,$$

где $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ — функции, аналитические относительно $z = a$. Пусть точка $z = a$ будет кажущейся особенностью, так что каждое решение фундаментальной последовательности

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

является аналитической функцией от $z - a$ в соседстве с особенностью.

Пусть

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_1^{(n-1)}, & w_1^{(n-2)}, & \ldots, & w_1', & w_1 \\ w_2^{(n-1)}, & w_2^{(n-2)}, & \ldots, & w_2', & w_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n^{(n-1)}, & w_n^{(n-2)}, & \ldots, & w_n', & w_n \end{vmatrix}$$

и пусть $\Delta_r(z)$ будет детерминантом, полученным из Δ подстановкой $w_1^{(n)}, \ldots, w_n^{(n)}$ соответственно вместо $w_1^{(n-r)}, \ldots, w_n^{(n-r)}$, тогда

$$\frac{P_r(z)}{(z-a)^r} = -\frac{\Delta_r(z)}{\Delta(z)};$$

[1] Fuchs, J. für Math., 68 (1868), 378.

но по крайней мере для одного значения r $P_r(z)$ не содержит множителя $(z-a)^{-1}$, следовательно для этого значения r $\Delta_r(a)/\Delta(a)$ бесконечно, но $\Delta_r(z)$ аналитическая относительно $z=a$, откуда

$$\Delta(a)=0.$$

Теперь

$$\frac{1}{\Delta(z)}\cdot\frac{d\Delta(z)}{dz}=-\frac{P_1(z)}{z-a}$$

$$=-\frac{P_1(a)}{z-a}+\frac{dG(z-a)}{dz},$$

где функция $G(z-a)$ аналитическая вблизи $z=a$, следовательно

$$\Delta(z)=A(z-a)^{-P_1(a)}\,e^{G(z-a)},$$

где A — постоянная. Но так как функция $\Delta(z)$ аналитическая относительно $z=a$, то $P_1(a)$ должно быть отрицательным целым числом.

Определяющее уравнение относительно $z=a$ имеет вид

$$[\rho]_n+[\rho]_{n-1}P_1(a)+\ldots+\rho P_{n-1}(a)+P_n(a)=0.$$

Корни этого уравнения должны быть положительными целыми числами и должны быть неравны, так как равные корни приводят к логарифмическим членам. Наименьший корень может быть равен нулю. Условие, чтобы показатели были положительными целыми числами, включает условие, чтобы $P_1(a)$ было отрицательным целым числом; последнее условие может рассматриваться как предварительное, — если оно не удовлетворено, то особенность несомненно действительна.

Наконец, должна быть введена последовательность условий, достаточных для отсутствия логарифмических членов. Пусть корни определяющего уравнения, расположенные в убывающем порядке величины, будут $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$. Решение с показателем ρ_0 не содержит логарифмов. Одно условие достаточно для обеспечения того, чтобы каждое решение с показателем ρ_1 было свободно от логарифмов, два дальнейших условия достаточны для показателя ρ_2 и т. д., и, наконец, $n-1$ дальнейших условий достаточны для показателя ρ_{n-1}. Таким образом для отсутствия логарифмических членов в общем решении достаточны

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

условий.

Для получения кажущейся особенности достаточно, чтобы показатели были положительными целыми числами или равны нулю и чтобы логарифмические члены отсутствовали.

16·401. Пример условий для получения кажущейся особенности. Уравнение

$$L(w)\equiv z^2\frac{d^2w}{dz^2}-(4z+\lambda z^2)\frac{dw}{dz}+(4-\varkappa z)w=0$$

содержит два параметра λ, $\varkappa$. Покажем, что при наличии некоторых соотношений между этими параметрами особенность $z=0$ является только кажущейся[1].

Принимая, как в общем методе, что

$$w=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^{\sigma+\nu},$$

найдем, что

$$L(w)=c_0(\sigma-4)(\sigma-1)z^\sigma,$$

если коэфициенты c_ν удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(\sigma+\nu-4)(\sigma+\nu-1)c_\nu=\{\lambda(\sigma+\nu-1)+\varkappa\}c_{\nu-1}.$$

Показатели $\rho_0=4$ и $\rho_1=1$ являются положительными целыми числами; большему показателю соответствует решение, аналитическое относительно $z=0$, именно $w=c_0u$, где

$$u=z^4\{1+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots+\gamma_\nu z^\nu+\ldots\},$$

а

$$\gamma_\nu=\frac{4\lambda+\varkappa}{1\cdot 4}\cdot\frac{5\lambda+\varkappa}{2\cdot 5}\cdots\frac{(\nu+3)\lambda+\varkappa}{\nu\cdot(\nu+3)}.$$

Решение, соответствующее меньшему показателю $\rho_1=1$, содержит в общем случае логарифмы. Чтобы оно не содержало логарифмов, должно быть введено одно условие. Поскольку $\rho_0-\rho_1=3$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F_3(1)=0.$$

Теперь

$$f_0(\sigma)=(\sigma-4)(\sigma-1),$$

$$F_3(\sigma)=f_0(\sigma+1)f_0(\sigma+2)f_0(\sigma+3)\frac{c_3}{c_0}$$

$$=\{\lambda(\sigma+2)+\varkappa\}\{\lambda(\sigma+1)+\varkappa\}\{\lambda\sigma+\varkappa\},$$

следовательно необходимые и достаточные условия приводятся к

$$(3\lambda+\varkappa)(2\lambda+\varkappa)(\lambda+\varkappa)=0.$$

Таким образом могут быть три случая:

(I) $\varkappa=-\lambda$, если соответствующее решение $w=z$,

(II) $\varkappa=-2\lambda$, „ „ „ $w=z+\frac{1}{2}\lambda z^2$,

(III) $\varkappa=-3\lambda$, „ „ „ $w=z+\lambda z^2+\frac{1}{2}\lambda^2 z^3$.

Только в этих случаях начало является кажущейся особенностью.

---

[1] Forsyth, Differential Equations, т. 4, 119. Нужно отметить, что $P_1(a)=-4$, поэтому особенность может быть кажущейся.

16·5. Метод решения Пеано-Беккера. Решение линейного дифференциального уравнения, полученного в виде бесконечного ряда методом Фробениуса или аналогичным образом, является с практической точки зрения вполне удовлетворительным. Однако с теоретической точки зрения это решение имеет недостаток: оно действительно только внутри круга сходимости, который покрывает лишь незначительную часть плоскости независимой переменной. Метод, который мы сейчас рассмотрим[1], представляет большой теоретический интерес, так он приводит к аналитическому выражению общего решения, годному почти во всей плоскости.

Рассмотрим систему n совместных линейных уравнений

$$\frac{dw_i}{dz} = u_{i1}w_1 + u_{i2}w_2 + \ldots + u_{in}w_n \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

где коэфициенты u_{ij} — функции z. Предположим, что точка z_0 не является особой точкой какого-либо коэфициента. Рассмотрим звезду Миттаг-Леффлера[2], огр ниченную непересекающимися прямыми линиями, проведенными от каждой особой точки коэфициентов к бесконечности. Для определенности предположим, что эти ограничивающие линии являются продолжениями радиусов векторов, проведенных от точки z_0 к особым точкам. Предположим также, что эти коэфициенты u_{ij} аналитические во всей звезде.

Система n линейных уравнений может быть представлена символически в виде

$$\frac{dw}{dz} = uw,$$

где u представляет не одну функцию от z, а квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}, & \ldots, & u_{nn} \end{pmatrix}$$

а w — совокупность $(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n)$.

Символ Qu определяет матрицу, полученную интегрированием каждого элемента матрицы u от z_0 до z вдоль пути, не пересекающего ни одну составляющую звезды. Символ uQu обозначает матрицу, полученную умножением матрицы u на

[1] Peano, Math. Ann., 32 (1888), 455; Baker, Proc. London, Math. Soc., 34 (1902), 354; 35 (1902), 334; (2), 2 (1904), 293 (исторический обзор); Phil. Trans. R. S. (A), 216 (1915), 155. См. также Bôcher, Am. J. Math., 24 (1902), 311. Milne, Proc., Edin. Math. Soc., 34 1915), 41.

[2] Mittag-Leffler, C. R. Acad. Sc. Paris, 128 (1889). 1212.

интегрированную матрицу Qu[1]. $QuQu$ обозначает $Q(uQu)$ и т. д.

Теперь образуем ряд матриц

$$\Omega(u) = 1 + Qu + QuQu + QuQuQu + \ldots;$$

его суммой является матрица. Докажем, что элементы матрицы $\Omega(u)$ сходятся абсолютно и равномерно в любой конечной области D, содержащей z_0 и лежащей целиком внутри звезды Миттаг-Леффлера. В области D функции u_{ij} ограничены; пусть M_{ij} будет таково, что

$$|u_{ij}| \leqslant M_{ij}$$

для всех точек D, и пусть M будет таково, что

$$M_{ij} \leqslant M$$

для всех значений i и j. Примем

$$u_{ij}^{(1)}(z) = \int_{z_0}^{z} u_{ij}(z)\,dz,$$

$$u_{ij}^{(2)}(z) = \int_{z_0}^{z} \{u_{i1}(z)\,u_{1j}^{(1)}(z) + \ldots + u_{in}(z)\,u_{nj}^{(1)}(z)\}\,dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

при условии, что путь интегрирования — простая кривая, лежащая внутри области D. Предположим, что z_1 — любая особая точка на пути (z_0, z), s_1 — длина пути (z_0, z_1), а s — длина всего пути (z_0, z). Тогда

$$\begin{aligned} |u_{ij}^{(1)}(z_1)| &\leqslant s_1 M_{ij} \\ &\leqslant s_1 M, \\ |u_{ij}^{(2)}(z)| &\leqslant \int_0^s M s_1 (M_{i1} - M_{i2} + \ldots + M_{in})\,ds_1 \\ &\leqslant nM^2 \int_0^s s_1\,ds_1 = \frac{1}{2} n s^2 M^2, \end{aligned}$$

---

[1] Произведение двух квадратных матриц $u = (u_{ij})$ и $v = (v_{ij})$ того же порядка n образуется согласно $uv = (u_{i1}v_{1j} + \ldots + u_{in}v_{nj})$ и в общем случае отлично от vu.

Суммой двух матриц u и v является матрица $(u_{ij} + v_{ij})$.

Символ 1, рассматриваемый в виде матрицы, может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} 1,0, & \ldots, & 0 \\ 0,1, & \ldots, & 0 \\ 0,0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}.$$

в частности

$$|u_{ij}^{(2)}(z_1)| \leqslant \frac{1}{2} ns_1^2 M^2.$$

Аналогично

$$|u_{ij}^{(3)}(z)| \leqslant \int_0^s \frac{1}{2} ns_1^2 M^2 (M_{i1} + M_{i2} + \ldots + M_{in})\, ds_1$$

$$\leqslant \frac{1}{3!} n^2 s^3 M^3$$

и т. д. до бесконечности. Но $u_{ij}^{(1)}(z)$ является (i, j)-ым элементом матрицы Qu, $u_{ij}^{(2)}(z)$ является (i, j)-ым элементом матрицы $QuQu$ и т. д. Таким образом ряд

$$1 + sM + \frac{1}{2!} ns^2M^2 + \frac{1}{3!} n^2s^3M^3 + \ldots$$

является главным рядом для каждого элемента матрицы $\Omega(u)$, следовательно элементы $\Omega(u)$ являются рядами, которые абсолютно и равномерно сходятся во всей области D. Отсюда, если

$$w = (1 + Qu + QuQu + \ldots)\, w_0,$$

где w_0 — совокупность произвольных начальных значений $(w_1^0, w_2^0, \ldots, w_n^0)$, то почленным диференцированием получим

$$\frac{dw}{dz} = u(1 + Qu + QuQu + \ldots)\, w_0$$

$$= uw,$$

следовательно

$$w = \Omega(u)\, w_0$$

является решением системы линейных уравнений, которое сходится в пределах любой области, целиком лежащей внутри звезды и таково, что $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ приводится к $(w_1^0, w_2^0, \ldots, w_n^0)$ при $z = z_0$.

16·51. Свойства матрицы $\Omega(u)$. Пусть Ω_{ij} будет элементом матрицы $\Omega(u)$; если

$$w = \Omega(u)\, W,$$

где W обозначает совокупность

$$(W_1, W_2, \ldots, W_n),$$

то

$$w_i = \Omega_{i1} W_1 + \ldots + \Omega_{in} W_n$$

и

$$\frac{dw_i}{dz} = \frac{d\Omega_{i1}}{dz} W_1 + \ldots + \frac{d\Omega_{in}}{dz} W_n + \Omega_{i1} \frac{dW_1}{dz} + \ldots + \Omega_{in} \frac{dW_n}{dz}.$$

При переводе на язык матричной символики, получим

$$\frac{dw}{dz} = \left\{\frac{d}{dz}\,\Omega(u)\right\} W + \Omega(u)\frac{dW}{dz}$$

$$= u\Omega(u)W + \Omega(u)\frac{dW}{dz}$$

$$= uw + \Omega(u)\frac{dW}{dz}.$$

Пусть $\Omega^{-1}(u)$ будет матрицей, обратной $\Omega(u)$, т. е. такой, для которой

$$\Omega^{-1}(u)\,\Omega(u) = \Omega(u)\,\Omega^{-1}(u) = 1.$$

Докажем, что если u и v — квадратные матрицы, состоящие из n^2 элементов каждая, то

$$\Omega(u+v) = \Omega(u)\,\Omega\{\Omega^{-1}(u)\,v\,\Omega(u)\},$$

если детерминант матрицы $\Omega(u)$ не равен нулю.

Рассмотрим систему линейных диференциальных уравнений

$$\frac{dw}{dz} = (v+u)\,w$$

и произведем в ней подстановку

$$w = \Omega(u)\,W,$$

или, что то же самое, подстановку

$$W = \Omega^{-1}(u)\,w,$$

тогда

$$\frac{dw}{dz} = uw + \Omega(u)\frac{dW}{dz},$$

следовательно

$$(u+v)\,w = uw + \Omega(u)\frac{dW}{dz},$$

т. е.

$$\Omega(u)\frac{dW}{dz} = vw$$

$$= v\Omega(u)\,W,$$

или

$$\frac{dW}{dz} = \Omega^{-1}(u)\,v\Omega(u)\,W$$

Отсюда следует, что

$$w = \Omega(u)\,W$$

$$= \Omega(u)\,\Omega\{\Omega^{-1}(u)\,v\Omega(u)\}\,w_0.$$

С другой стороны

$$w = \Omega(u+v)\,w_0,$$

что, ввиду единственности решений системы с данными значениями, доказывает теорему.

Нетрудно вычислить детерминант Δ матрицы $\Omega(u)$; в действительности

$$\Delta = \exp \int_{z_0}^{z} (u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{nn})\, dz.$$

Но поскольку Ω_{ij} — элемент $\Omega(u)$, уравнение

$$\frac{d}{dz}\, \Omega(u) = u\Omega(u),$$

если его написать полностью, будет иметь вид

$$\frac{d\Omega_{ij}}{dz} = u_{i1}\Omega_{1j} + \ldots + u_{in}\,\Omega_{nj}.$$

Значение $\frac{d\Delta}{dz}$ может быть выражено в виде суммы n детерминантов, каждый из которых получается диференцированием всех элементов одного какого-либо столбца Δ. Применяя указанное выше выражение для производной Ω_{ij}, можно показать, что

$$\frac{d\Delta}{dz} = (u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{nn})\, \Delta,$$

откуда результат следует непосредственно.

В частности, если

$$u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{nn} = 0,$$

Δ не зависит от z и равна единице.

16·52. Преобразование линейного уравнения порядка n в линейную систему. Линейное диференциальное уравнение порядка n может быть представлено в виде системы n совместных уравнений первого порядка. Мы сейчас рассмотрим метод, связанный с матричным представлением.

Пусть данное уравнение имеет вид

$$\frac{d^n w}{dz^n} = \frac{P_{n-1}}{\varphi_n} \cdot \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \frac{P_{n-2}}{\varphi_{n-1}\varphi_n} \cdot \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \ldots + \frac{P_0}{\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n}\, w.$$

Напишем

$$w_1 = w, \quad w_2 = \varphi_1 \frac{dw}{dz}, \quad w_3 = \varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad \ldots,$$

тогда

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{w_2}{\varphi_1}, \quad \frac{dw_2}{dz} = -\frac{\varphi_1' w_2}{\varphi_1} + \frac{w_3}{\varphi_2}, \quad \frac{dw_3}{dz} = \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2'}{\varphi_2}\right) w_3 + \frac{w_4}{\varphi_3}$$

. . . .

$$\frac{dw_{n-1}}{dz} = \left(\sum_{r=1}^{n-2} \frac{\varphi_r'}{\varphi_r}\right) w_{n-1} + \frac{w_n}{\varphi_{n-1}},$$

$$\frac{dw_n}{dz} = \left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\varphi_r'}{\varphi_r}\right) w_n + \frac{P_0}{\varphi_n} w_1 + \frac{P_1}{\varphi_n} w_2 + \ldots + \frac{P_{n-1}}{\varphi_n} w_n.$$

Если $H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{\varphi_r'}{\varphi_r}$, то уравнение эквивалентно системе

$$\frac{dw}{dz} = uw,$$

где u — матрица

$$\begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{\varphi_1}, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & H_1, & \frac{1}{\varphi_2}, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & H_2, & \frac{1}{\varphi_3}, \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & H_{n-2}, & \frac{1}{\varphi_{n-1}} \\ \frac{P_0}{\varphi_n}, & \frac{P_1}{\varphi_n}, & \frac{P_2}{\varphi_n}, & \frac{P_3}{\varphi_n}, \ldots, & \frac{P_{n-2}}{\varphi_n}, & \frac{P_{n-1}}{\varphi_n} + H_{n-1} \end{pmatrix}$$

Наибольший интерес представляют следующие случаи.

(а) Функции P и φ — полиномы, и ни одна из функций φ не имеет кратного множителя; линейная система будет иметь вид

$$\frac{dw}{dz} = \left(V + \sum_s \frac{A_s}{z - a_s}\right) w,$$

где V — матрица, каждый элемент которой является полиномом z, $z - a_s$ — множитель одной или нескольких функций φ, а A_s — матрица постоянных.

Например, уравнение

$$(z+1) z^3 w''' - \{(a_2 + b_2) z + a_2\} z^2 w'' - \{(a_1 + b_1) z + a_1\} z w' - \{(a + b) z + a\} w = 0$$

приводится к эквивалентной системе

$$\frac{dw}{dz} = \left\{\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ a, & a_1, & a_2 + 2 \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ b, & b_1, & b_2 \end{pmatrix} \frac{1}{z+1}\right\} w.$$

(b) Функции P и φ такие же, как и в случае (a), а $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$. Уравнение

$$w'' = \frac{Az + B}{z(z-1)} w' + \frac{Cz^2 + Dz + E}{z^2(z-1)^2} w$$

приводится к

$$\frac{dw}{dz} = \left\{ \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ C, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ -E, & 1-B \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & , & 1 \\ C + D + E, & & A + B + 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z-1} \right\} w.$$

(c) Функции P — полиномы, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n-1} = 1$, а φ_n — полином без кратных корней. Функции H все равны нулю. В этом случае уравнение

$$w'' = \left\{ \lambda + \sum_{r=1}^{N} \frac{\lambda_r}{z - a_r} \right\} w' + \left\{ \mu + \sum_{r=1}^{N} \frac{\mu_r}{z - a_r} \right\} w$$

приводится к

$$\frac{dw}{dz} = \left\{ \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ \mu, & \lambda \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{N} \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \mu_r, & \lambda_r \end{pmatrix} \frac{1}{z - a_r} \right\} w.$$

(d) P — аналитические функции z; каждая из функций φ равна единице или $z - a$, где a — не является особой точкой функций P. Например, пусть уравнение будет иметь вид

$$w^{(n)} = \frac{p_{n-1} + zQ_{n-1}}{z} w^{(n-1)} + \frac{p_{n-2} + zQ_{n-2}}{z^2} w^{n-2} + \cdots +$$
$$+ \frac{p_0 + zQ_0}{z^n} w,$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ — постоянные, а $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ — функции, которые могут быть разложены около начала по степеням z. Эквивалентная система будет иметь вид

$$\frac{dw}{dz} = \left(V + \frac{A}{z} \right) w,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, 0 \\ 0, & 0, & \ldots, 0 \\ Q_0, & Q_1, & \ldots, Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & \ldots, 0 \\ 0, & 0, & 2, & 1, & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_0, & p_1, & p_2, & p_3, & \ldots, p_{n-1} + n - 1 \end{vmatrix}.$$

16·53. Частные примеры. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dw}{dz} = uw.$$

В этом случае легко доказать, что

$$QuQu = \frac{1}{2!}(Qu)^2, \quad QuQuQu = \frac{1}{3!}(Qu)^3$$

и т. д. Решение будет иметь вид

$$w = w_0 \exp Qu,$$

что соответствует решению, полученному элементарными методами.

Теперь рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2w}{dz^2} = vw.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\left(\frac{dw}{dz}, \quad \frac{dw'}{dz}\right) = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ v, & 0 \end{pmatrix} (w, \; w'),$$

где $w' = \frac{dw}{dz}$. Если мы предположим, что начальное значение z равно нулю, то легко доказать, что

$$u = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ v, & 0 \end{pmatrix}, \qquad Qu = \begin{pmatrix} 0, & z \\ Qv, & 0 \end{pmatrix},$$

$$uQu = \begin{pmatrix} Qv, & 0 \\ 0, & vz \end{pmatrix}, \qquad QuQu = \begin{pmatrix} Q^2v, & 0 \\ 0, & Qvz \end{pmatrix},$$

$$uQuQu = \begin{pmatrix} 0, & Qvz \\ vQ^2v, & 0 \end{pmatrix}, \qquad QuQuQu = \begin{pmatrix} 0, & Q^2vz \\ QvQ^2v & 0 \end{pmatrix},$$

$$uQuQuQu = \begin{pmatrix} QvQ^2v, & 0 \\ 0, & vQ^2vz \end{pmatrix}, \quad QuQuQuQu = \begin{pmatrix} Q^2vQ^2v, & 0 \\ 0, & QvQ^2vz \end{pmatrix}$$

и т. д. Таким образом общее решение будет иметь вид

$$w = w_0 W_1 + w_0' W_1,$$

где W_1 и W_2 определяются рядами

$$W_1 = 1 + Q^2v + Q^2vQ^2v + Q^2vQ^2vQ^2v + \ldots,$$

$$W_2 = z + Q^2vz + Q^2vQ^2vz + Q^2vQ^2vQ^2vQ^2vz + \ldots,$$

а (w_0, w_0') — значения (w, w') при $z=0$. Нужно отметить, что Q^2v, Q^2vz, Q^2vQ^2v, Q^2vQ^2vz обращаются в нули порядков 2, 3, 4, 5 при $z=0$.

В виде частного примера рассмотрим уравнение Бесселя

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2)w = 0.$$

Положим

$$z = 4ce^{\frac{1}{2}t}, \quad m = \frac{1}{4} n^2,$$

где c — постоянная; тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2w}{dt^2} = (m - ce^t)\, w.$$

В данном случае

$$W_1 = 1 + \left\{ m\frac{t^2}{2!} - c(e^t - 1 - t) \right\} + \left\{ m^2\frac{t^4}{4!} + mc\left[4 + 2t + \frac{t^2}{2!} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{t^3}{3!} - e^t\left(4 - 2t + \frac{1}{2}t^2\right)\right] + c^2\left[-\frac{5}{4} - \frac{1}{2}t + \right.$$
$$\left.\left. + e^t(1 - t) + \frac{1}{4}e^{2t}\right]\right\} + \ldots,$$
$$W_2 = t + \left\{ m\frac{t^3}{3!} - c\left[(t-2)e^t + t + 2\right] \right\} +$$
$$+ \left\{ m^2\frac{t^5}{5!} + mc\left[-8 - 4t - t^2 - \frac{t^3}{3!} + e^t\left(8 - 4t - t^2 - \frac{t^3}{3!}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + c^2\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t + te^t + \frac{1}{4}(t - 3)e^{2t}\right]\right\} + \ldots$$

Эти ряды сходятся для всех значений t.

Наконец, рассмотрим линейную систему

$$\frac{dw}{dz} = \left[A_0 + A_1 z + \ldots + A_\mu z^\nu + \sum_{r=1}^{\sigma} C_r (z - c_r)^{-1}\right] w$$

и предположим, что новая переменная s может быть найдена так, чтобы $\log(z - c_r)$ был однозначной аналитической функцией s для некоторого диапазона значений s и для $r = 1, 2, \ldots, \sigma$; тогда каждое решение линейной системы будет однозначной функцией s.

Пусть

$$\log(z - c_r) = \psi_r(s),$$

так что

$$z = c_r + \exp \psi_r(s)$$
$$= \Psi(s),$$

следовательно система будет иметь вид

$$\frac{dw}{ds} = \left\{ \Psi'(s)\left[A_0 + A_1\Psi + \ldots + A_\mu \Psi^\nu\right] + \sum_{r=1}^{\sigma} C_r \psi_r'(s) \right\} w$$
$$= uw.$$

Члены

$$Qu = \int_{s_0}^{s} u\,ds, \quad QuQu = \int_{s_0}^{s} u\,ds \int_{s_0}^{s} u\,ds, \ldots$$

являются однозначными аналитическими функциями s, а решение

$$w = \Omega(u)\, w_0 = (1 + Qu + QuQu + \ldots)\, w_0$$

аналитическое в соседстве с s.

Таким образом уравнение Бесселя может быть представлено в виде системы

$$\frac{dw}{dz} = \left[-z \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ n^2, & 0 \end{pmatrix} \right] w;$$

решение в этом случае может быть выражено в виде однозначной функции новой переменной $s = \log z$.

Метод матриц применяется весьма широко, но его успешное приложение требует знакомства с теоремами вычисления матриц, которые не могут быть здесь приведены. Однако имеется простое приложение, представляющее некоторый теоретический интерес, которое мы рассмотрим в следующем параграфе.

16·54. Приложение к уравнению с периодическими коэфициентами. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + (n^2 + \Psi)\, w = 0,$$

где n — целое число, а Ψ — периодическая функция z.

Напишем

$$X = \frac{1}{2} e^{inz} \left(\frac{dw}{dz} - inw \right), \quad Y = \frac{1}{2} e^{-inz} \left(\frac{dw}{dz} + inw \right),$$

тогда

$$\frac{dX}{dz} = -\frac{i\Psi}{2n} e^{inz} (Xe^{-inz} - Ye^{inz}),$$

$$\frac{dY}{dz} = -\frac{i\Psi}{2n} e^{-inz} (Xe^{-inz} - Ye^{inz}).$$

Если $\tau = 2iz$, $\zeta = e^{\tau}$, то система может быть написана в виде

$$\frac{d}{d\tau}(X, Y) = -\frac{\Psi}{4n} \begin{pmatrix} 1, & -\zeta^n \\ \zeta^{-n}, & -1 \end{pmatrix} (X, Y).$$

В частности, пусть $n = 1$, $\Psi = 4a \cos hz + 4b \cos kz$, тогда

$$\frac{d}{d\tau}(X, Y) = (ap + bq)(X, Y),$$

где p, q — обозначают матрицы

$$p = \frac{1}{2} \left(\zeta^{\frac{1}{2}h} + \zeta^{-\frac{1}{2}h} \right) \begin{pmatrix} -1, & \zeta \\ -\zeta^{-1}, & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \frac{1}{2} \left(\zeta^{\frac{1}{2}k} + \zeta^{-\frac{1}{2}k} \right) \begin{pmatrix} -1, & \zeta \\ -\zeta^{-1}, & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$(X, Y) = \Omega(ap + bq)(X_0, Y_0),$$

где

$$\Omega(ap + bq) = 1 + aQp + bQq + a^2 QpQp + + ab(QpQq + QqQp) + b^2 QqQq + \ldots$$

абсолютно и равномерно сходится для всех значений z.

[Дальнейшее развитие этого метода, в частности исследование стабильности решений линейного диференциального уравнения второго порядка с периодическими коэфициентами см. Baker, Phil. Trans., 216 (1915), 155].

Примеры

1. Решите следующие уравнения в виде ряда по возрастающим степеням z

$$\text{(I)}\quad 4z\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{dw}{dz}+w=0.$$

$$\text{(II)}\quad (2z+z^3)\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{dw}{dz}-6zw=0.$$

$$\text{(III)}\quad z\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{dw}{dz}-w=0.$$

2. Найдите полное решение гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0,$$

(II) если $\gamma=1$; (II) если γ — отрицательное целое число.

3. Покажите, что уравнение

$$z^3\frac{d^4w}{dz^4}+(\rho+\sigma+\tau+3)z^2\frac{d^3w}{dz^3}+(1+\rho+\sigma+\tau+\rho\sigma+\sigma\tau+\tau\rho)z\frac{d^2w}{dz^2}-$$

$$-(z-\rho\sigma\tau)\frac{dw}{dz}-\alpha w=0$$

удовлетворяется функцией

$${}_1F_3(\alpha;\ \rho,\ \sigma,\ \tau;\ z)=1+\frac{\alpha}{\rho\sigma\tau}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\rho(\rho+1)\sigma(\sigma+1)\tau(\tau+1)}z^2+\ldots$$

и найдите остальные решения, относящиеся к особенности $z=0$.

При $\alpha=\tau$ ${}_1F_3(\alpha;\ \rho;\ \sigma,\ \tau;\ z)$ приводится к ${}_0F_2(\rho,\ \sigma;\ z)$; докажите, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$z^2\frac{d^3w}{dz^3}+(\rho+\sigma+1)z\frac{d^2w}{dz^2}+\rho\sigma\frac{dw}{dz}-w=0.$$

Установите зависимость между этими двумя уравнениями. [Pochhammer].

4. Покажите, что ни одно решение следующих уравнений, относящихся к особенности в начале, не содержит логарифмов

$$\text{(I)}\quad \frac{d^2w}{dz^2}+\frac{dw}{dz}-\frac{2}{z^2}w=0,$$

$$\text{(II)}\quad z(2-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-(z^2-4z+2)\left\{(1-z)\frac{dw}{dz}+w\right\}=0.$$

5. Докажите, что начало является кажущейся особенностью уравнения

$$z\frac{d^2w}{dz^2}-(1+z)\frac{dw}{dz}+2(1-z)w=0.$$

ГЛАВА XVII

УРАВНЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

17·1. Возможность существования регулярных решений. Теоремы, установленные в двух предыдущих главах, показывают, что если точка z_0 — регулярная особенность, то функциональный характер фундаментальной последовательности решений, соответствующих z_0, известен. Более того, каждое решение последовательности может быть разложено в ряд по возрастающим степеням $z-z_0$, коэфициенты которого определяются последовательно системой рекуррентных соотношений.

Предположим, что в соседстве с z_0 все коэфициенты уравнения

$$(A)\qquad L(w)\equiv\frac{d^nw}{dz^n}+p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+p_2(z)\frac{d^{n-2}w}{dz^{n-2}}+\ldots+$$
$$+p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+p_n(z)w=0$$

аналитические, но хотя бы один из коэфициентов $p_r(z)$ имеет полюс в z_0 порядка, превышающего индекс r. Тогда, поскольку условие для регулярной особенности нарушено, не все n решений, соответствующих точке z_0, будут регулярными. Нужно определить, будут ли какие-либо из этих решений регулярны, а если будут, то найти для них аналитические выражения [1].

Пусть $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_n$ будут порядками полюсов, которые имеют $p_1, p_2, \ldots, p_n$ в z_0. Рассмотрим числа

$$\tilde{\omega}_1+n-1,\quad \tilde{\omega}_2+n-2, \ldots, \tilde{\omega}_{n-1}+1,\ \tilde{\omega}_n,$$

из которых, согласно условию, по меньшей мере одно больше n. Пусть g_{n-1} будет наибольшим из этих чисел, исключая $\tilde{\omega}_n$, и предположим, что уравнение имеет регулярное решение

$$w(z)=(z-z_0)^\rho\varphi(z-z_0),$$

где $\varphi(0)\neq 0$, тогда, подставляя это решение в уравнение

$$p_n(z)=-\frac{1}{w}\left\{\frac{d^nw}{dz^n}+p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}\right\},$$

увидим, что $p_n(z)$ имеет полюс в z_0 порядка не выше g_{n-1}. Сле-

[1] Thomé, J. für Math., 74 (1872), 193; 75 (1873), 265; 76 (1873), 273.

довательно для существования регулярного решения необходимо, чтобы $\tilde{\omega}_n \leqslant g_{n-1}$.

17·11. Необходимое условие для существования $n-r$ регулярных решений. Обобщим предыдущую теорему. Пусть g_r будет наибольшим из r чисел

$$\tilde{\omega}_1+n-1, \quad \tilde{\omega}_2+n-2, \ldots, \tilde{\omega}_r+n-r;$$

тогда, если имеются $n-r$ регулярных решений, то все остальные числа

$$\tilde{\omega}_{r+1}+n-r-1, \ldots, \tilde{\omega}_{n-1}+1, \tilde{\omega}_n$$

будут меньше g_r. Докажем эту теорему методом индукции; предположим, что она верна для уравнения порядка $n-1$; докажем, что она верна и для уравнения порядка n.

Преобразуем уравнение подстановкой

$$w=w_1(z)\int v\,dz,$$

где

$$w_1(z)=(z-z_0)^\rho \varphi(z-z_0)$$

— регулярное решение (A); v будет удовлетворять уравнению вида

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^{n-1}v}{dz^{n-1}}+q_1(z)\frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}}+\ldots+q_{n-2}(z)\frac{dv}{dz}+q_{n-1}(z)v=0$$

и, согласно принятому условию, что (A) имеет $n-r$ регулярных решений, (B) будет иметь $n-r-1$ регулярных решений. Пусть

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$$

будет порядком полюса в z_0 относительно $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ соответственно.

Функция $q_s(z)$ может быть выражена в явной форме

$$q_s(z)=\frac{1}{w_1}\left\{{}_nC_s\frac{d^s w_1}{dz^s}+\ldots+(n-s+1)p_{s-1}(z)\frac{dw_1}{dz}+p_s(z)w_1\right\},$$

причем

$$\sigma_s \leqslant g_r+s-n \qquad (s=1, 2, \ldots, r).$$

Следовательно каждое из чисел

$$\sigma_1+(n-1)-1, \quad \sigma_2+(n-1)-2, \ldots, \sigma_r+(n-1)-r,$$

не больше g_r-1

Предположение, что уравнение (B) имеет $n-r-1$ регулярных решений, приводит к тому, что числа

$$\sigma_{r+1}+(n-1)-r-1, \ldots, \sigma_{n-1}$$

также не больше g_r-1. Тогда, возвращаясь к выражению для q_s, увидим, что

$$\tilde{\omega}_{r+1} \leqslant \sigma_{r+1}, \ldots, \tilde{\omega}_{n-1} \leqslant \sigma_{n-1},$$

откуда каждое из чисел

$$\tilde{\omega}_{r+1}+n-r-1,\ldots,\ \tilde{\omega}_{n-1}+1$$

не больше g_r. Следовательно $\tilde{\omega}_n$ также не больше g_r.

Таким образом теорема верна для уравнения порядка $r+1$, имеющего одно решение, регулярное в z_0; следовательно она верна для уравнения порядка $r+2$, имеющего два регулярных решения, а также для уравнения порядка n, имеющего $n-r$ решений, регулярных в z_0.

Из этой теоремы можно получить весьма важное следствие. Пусть g будет наибольшим из чисел

$$\tilde{\omega}_1+n-1,\ \tilde{\omega}_2+n-2,\ldots,\ \tilde{\omega}_{n-1}+1,\ \tilde{\omega}_n,$$

а r — наименьшим целым числом, для которого

$$\tilde{\omega}_r+n-r=g,$$

тогда *уравнение будет иметь не больше $n-r$ независимых решений, регулярных в* z_0. Если бы оно имело $n-s$ независимых решений, регулярных в z_0, то, поскольку $s<r$, каждое из s чисел

$$\tilde{\omega}_1+n-1,\ldots,\ \tilde{\omega}_s+n-s$$

было бы не больше $h<g$. Но поскольку мы приняли, что имеются $n-s$ регулярных решений, то каждое из остальных чисел

$$\tilde{\omega}_{s+1}+n-s-1,\ldots,\ \tilde{\omega}_n$$

не больше h. В частности

$$\tilde{\omega}_r+n-r\leqslant h<g,$$

что противоречит условию. Следовательно теорема доказана.

Число r называется *классом*[1] особой точки z_0. Если все решения, соответствующие z_0, регулярны, то каждое из чисел

$$\tilde{\omega}_0+n,\ \tilde{\omega}_1+n-1,\ldots,\ \tilde{\omega}_{n-1}+1,\ \tilde{\omega}_n$$

($\tilde{\omega}_0=0$) меньше или равно n. Следовательно в этом случае r равно нулю.

Если $r\geqslant 1$, то число независимых решений, регулярных в z_0, будет не больше $n-r$, но может быть и меньше этого верхнего предела.

Так в уравнении

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+a\frac{dw}{dz}+bw=0,$$

где a и b — постоянные ($a\neq 0$), $\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=2$, и рассматривая осо-

[1] Общепринятым является термин *характеристический индекс*, но оба термина (характеристический и индекс) уже были достаточно использованы. Превышение числа $n-r$ над действительным числом регулярных решений удобно было бы назвать *недостатком*.

бенность в начале

$$\tilde{\omega}_1 + n - 1 = 3, \quad \tilde{\omega}_2 + n - 2 = 2.$$

следовательно

$$g = 3, \quad r = 1,$$

и поэтому имеется не больше одного решения, регулярного в начале. Легко доказать, что если это регулярное решение существует, то его разложение будет иметь вид

$$w = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m + \ldots,$$

где

$$(m+1)\, a A_{m+1} + \{b + m(m-1)\} A_m = 0.$$

Но $\lim [A_{m+1} / A_m] = \infty$, следовательно ряд не сходится для некоторого значения z, за исключением $z = 0$; в данном случае решения, регулярного в начале, не существует.

17 · 2. Определяющее уравнение. Для упрощения примем, что особая точка z_0 будет началом. Вместо (A) рассмотрим эквивалентное уравнение

$$L_1(w) = 0,$$

где $L_1 = z^g L$. Теперь L_1 может быть выражено в виде

$$z^n\, Q_0(z)\, D^n + z^{n-1}\, Q_1(z)\, D^{n-1} + \ldots + z\, Q_{n-1}(z)\, D + Q_n(z),$$

где

$$Q_0(z) = z^{g-n},$$

$$Q_\nu(z) = z^{g-n+\nu}\, p_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Функции Q аналитические в соседстве с началом; из определений g и r следует, что если $z = 0$ не является регулярной особенностью, то

$$Q_0(0) = Q_1(0) = \ldots = Q_{r-1}(0) = 0,$$

$$Q_r(0) \neq 0,$$

а остальные коэфициенты Q конечны или равны нулю в начале.

Предположим, что существует решение, регулярное в начале, например

$$w = z^\rho \{1 + O(z)\},$$

тогда коэфициент при z^ρ, полученный из

$$z^{n-\nu}\, Q_\nu(z)\, D^{n-\nu} w,$$

будет иметь вид

$$Q_\nu(0)\, [\rho]_{n-\nu}$$

и обратится в нуль при $\nu < r$, но не при $\nu = r$. Поскольку z^ρ —

низшая степень z, которая встречается в $L_1(w)$, показатель ρ должен удовлетворять *определяющему уравнению*

$$Q_r(0)[\rho]_{n-r} + \ldots = 0,$$

где опущенные члены еще более низкой степени ρ, чем приведенный член; следовательно степень определяющего уравнения равна $n-r$.

В частности, при $n = r$ определяющее уравнение примет вид

$$Q_n(0) = 0.$$

Следовательно, если левая часть определяющего уравнения не зависит от ρ, то регулярное решение не может существовать.

17 · 21. Приводимость уравнения, имеющего регулярные решения. Предположим, что уравнение (А) имеет k независимых решений, регулярных в особой точке $z = 0$. Эти решения образуют фундаментальную последовательность для уравнения порядка k, коэфициенты которого удовлетворяют условиям Фукса относительно начала. Пусть это уравнение имеет вид

$$M(w) = 0,$$

где коэфициент D^k в M равен единице; напишем $M_1 = z^k M$, тогда

$$L_1 = R_1 M_1,$$

где R_1 — диференциальный оператор порядка $n-k$ (см. § 5 · 4). Поскольку коэфициенты L_1 и M_1 конечны или равны нулю в начале и аналитические в соседстве с началом, это относится также и к коэфициентам R_1, следовательно уравнение $L_1(w) = 0$ и эквивалентное уравнение $L(w) = 0$ приводимы, если существует одно или несколько регулярных решений.

Уравнение

$$[z^{-\rho} L_1(z^\rho)]_{z=0} = 0,$$

которое, согласно определению g, не является тождеством, является определяющим уравнением $L_1(w) = 0$ $L(w) = 0$ относительно особенности $z = 0$. Пусть

$$L_1(z^\rho) = f(z, \rho) z^\rho = \sum f_\lambda(\rho) z^{\lambda+\rho},$$

$$M_1(z^\rho) = g(z, \rho) z^\rho = \sum g_\lambda(\rho) z^{\lambda+\rho},$$

$$R_1(z^\rho) = h(z, \rho) z^\rho = \sum h_\lambda(\rho) z^{\lambda+\rho},$$

где суммирование ведется от $\lambda = 0$. Поскольку

$$f_0(\rho) = 0, \; g_0(\rho) = 0$$

являются определяющими уравнениями $L(w) = 0$ и $M(w) = 0$,

$f_0(\rho)$ и $g_0(\rho)$ не будут равны тождественно нулю. Теперь

$$\begin{aligned}L_1(z^\rho) &= R_1 M_1(z^\rho)\\ &= R_1\{\sum g_\lambda(\rho) z^{\lambda+\rho}\}\\ &= \sum g_\lambda(\rho) R_1 z^{\lambda+\rho}\\ &= \sum_1 g_\lambda(\rho)\sum_\mu h_\mu(\lambda+\rho) z^{\lambda+\mu+\rho},\end{aligned}$$

следовательно

$$\sum f_\lambda(\rho) z^\lambda = \sum_\varkappa g_\varkappa(\rho)\sum_\mu h_\mu(\varkappa+\rho) z^{\varkappa+\mu},$$

откуда

$$f_\lambda(\rho) = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} g_\varkappa(\rho)\, h_{\lambda-\varkappa}(\varkappa+\rho)$$

является последовательностью соотношений, определяющей полиномы $h_0(\rho)$, $h_1(\rho)$, $h_2(\rho), \ldots$ В частности

$$f_0(\rho) = g_0(\rho)\, h_0(\rho),$$

что доказывает, что $h_0(\rho)$ не равно тождественно нулю.

Если полиномы $h_\lambda(\rho)$ вычислены, то R_1 можно определить следующим образом: степени полиномов $f_\lambda(\rho)$ имеют верхнюю границу n, а степени полиномов $g_\lambda(\rho)$ имеют верхнюю границу k; следовательно верхняя граница степеней $h_\lambda(\rho)$ равна $n-k$. Пусть $n-k=m$, тогда, поскольку

$$h(z,\rho) = \sum h_\lambda(\rho)\, z^\lambda,$$

функция $h(z, \rho)$ может быть выражена в виде

$$h(z,\rho) = \sum_{r=0}^{m-1} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+r+1)\, u_{m-r}(z) + u_0(z);$$

коэфициенты $u(z)$ определяются из формулы

$$s!\, u_s(z) = [\Delta^r h(z,\rho)]_{\rho=0},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta h(z,\rho) &= h(z,\rho+1) - h(z,\rho),\\ \Delta^2 h(z,\rho) &= \Delta h(z,\rho+1) - \Delta h(z,\rho).\end{aligned}$$

. . . .

Отсюда

$$\begin{aligned}R_1(z^\rho) &= h(z,\rho)\, z^\rho\\ &= \{[\rho]_m u_m(z) - [\rho]_{m-1} u_{m-1}(z) + \ldots + \rho u_1(z) + u_0(z)\} z^\rho,\end{aligned}$$

и следовательно R_1 — оператор

$$z^m u_m(z) D^m + \ldots + z u_1(z) D + u_0(z).$$

Теперь $f_0(\rho)$ степени $n-r$ относительно ρ, а $g_0(\rho)$ степени k. Отсюда следует, что $h_0(\rho)$ степени $n-r-k$. Поскольку $h_0(\rho)=0$ — определяющее уравнение для $R_1(w)=0$, степенью этого определяющего уравнения будет число, на которое степень определяющего уравнения $L(w)=0$ превышает число регулярных решений. В частности, если $R_1(w)=0$ не имеет определяющего уравнения, то $L(w)=0$ имеет точно $n-r$ регулярных решений[1].

17 · 3. Доказательство отсутствия регулярных решений в общем случае. В § 17 · 11 мы показали, что даже если уравнение $L(w)=0$ имеет определяющее уравнение для особенности $z=0$, соответствующее формальное разложение решения может расходиться для всех значений $|z|$. Это явление ни в коем случае не является исключительным, исключительным является самый факт существования регулярного решения.

Рассмотрим видоизмененное уравнение

$$L_1(w)=0.$$

Если существует регулярное решение

$$w=z^{\rho}(c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots),$$

то ρ определяется уравнением

$$f_0(\rho)=0.$$

Приравнивая нулю коэфициенты последовательных степеней z в выражении

$$L_1(w)=z^{\rho}\{\sum c_0f_\lambda(\rho)z^\lambda+\sum c_1f_\lambda(\rho+1)z^{\lambda+1}+$$
$$+\sum c_2f_\lambda(\rho+2)z^{\lambda+2}+\ldots\},$$

получим последовательность рекуррентных соотношений

$$c_1f_0(\rho+1)+c_0f_1(\rho)=0,$$
$$c_2f_0(\rho+2)+c_1f_1(\rho+1)+c_0f_2(\rho)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_\nu f_0(\rho+\nu)+c_{\nu-1}f_1(\rho+\nu-1)+\ldots+c_0f_\nu(\rho)=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

эти рекуррентные соотношения определяют $c_1, c_2, \ldots, c_\nu \ldots$ при заданной c_0 (см. § 16 · 11).

Существенное различие между настоящим случаем и случаем, рассмотренным в предыдущей главе, где все решения регулярны в начале, состоит в том, что $f_0(\rho)$ степени $n-r$ относительно ρ. С другой стороны, имеются некоторые функции $f_\nu(\rho)$, степень которых равна n: первой из этих функций является $f_{g-n}(\rho)$.

Если процесс вычисления коэфициентов c_ν ограничить так, чтобы выражение для w содержало только конечное число чле-

[1] Floquet, Ann. Éc. Norm. (2), 8 (1879), 63.

нов, то найденное таким образом решение будет регулярным в начале. Вообще ряд не ограничивается; покажем, что в этом случае он расходится.

Для некоторых значений k, например $k=g-n$,

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{f_k(\rho+\nu-k)}{f_0(\rho+\nu)} \right| = \infty,$$

поскольку числитель степени n, а знаменатель более низкой степени относительно ν; следовательно, для того, чтобы рекуррентное соотношение

$$\frac{c_{\nu-1} f_1(\rho+\nu-1)}{c_\nu f_0(\rho+\nu)} + \frac{c_{\nu-2} f_2(\rho+\nu-2)}{c_\nu f_0(\rho+\nu)} + \ldots + \frac{c_0 f_\nu(\rho)}{c_\nu f_0(\rho+\nu)} = -1$$

было удовлетворено, необходимо, чтобы

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{c_{\nu-k}}{c_\nu} \right| = 0,$$

следовательно ряд расходится.

17·4. Сопряженное уравнение. Если определяющее уравнение, относящееся к нерегулярной особенности, степени $n-r$, то не может существовать больше $n-r$ регулярных решений. Поскольку число регулярных решений может быть меньше максимума, нужно найти критерий, определяющий возможное число регулярных решений. Этот необходимый критерий может быть получен при помощи сопряженного уравнения[1].

Пусть $\overline{L_1}$ будет диференциальным оператором, сопряженным с L_1. В тождестве Лагранжа (§ 5·3)

$$vL_1(u) - u\overline{L_1}(v) = \frac{d}{dz}\{P(u, v)\},$$

пусть $u=z^\rho$, $v=z^{-\rho-\nu-1}$, где ρ — произвольное, а ν — целое число, тогда

$$z^{-\rho-\nu-1} L_1(z^\rho) - z^\rho \overline{L_1}(z^{-\rho-\nu-1}) = \frac{d}{dz}\{P(z^\rho, z^{-\rho-\nu-1})\},$$

$P(z^\rho, z^{-\rho-\nu-1})$ не содержит членов z^0; из принятого условия относительно коэфициентов оператора L следует, что P не имеет в начале никаких особенностей, кроме полюса, поэтому выражение

$$z^{-\rho-\nu-1} L_1(z^\rho) - z^\rho \overline{L_1}(z^{-\rho-\nu-1}),$$

не может иметь члена z. Предположим, что

$$L_1(z^\rho) = \sum f_\lambda(\rho) z^{\lambda+\rho},$$

а также что

$$\overline{L_1}(z^\rho) = \sum \varphi_\lambda(\rho) z^{\lambda+\rho}.$$

---

[1] Thomé, J. für Math., 75 (1873), 276, Frobenius ibid., 80 (1875), 320.

Коэфициент z^{-1} в $z^{-\rho-\nu-1}L_1(z^\rho)$ равен $f_\nu(\rho)$, а коэфициент z^{-1} в $zL_1(z^{-\rho-\nu-1})$ равен $\varphi_\nu(-\rho-\nu-1)$, откуда

$$f_\nu(\rho) = \varphi_\nu(-\rho-\nu-1)$$

и аналогично

$$\varphi_\nu(\rho) = f_\nu(-\rho-\nu-1).$$

Отсюда непосредственно следует, что степени двух определяющих уравнений — $f_0(\rho) = 0$, относящегося к $L_1(u) = 0$, и $\varphi_0(\rho) = 0$, относящегося к $\overline{L_1}(v) = 0$, равны. Пусть этой степенью будет $n-r$, тогда класс r будет одинаковым для обоих уравнений. В частности, если одно из уравнений $L_1(u) = 0$ и $\overline{L_1}(v) = 0$ имеет все решения, регулярные в особой точке, или вовсе не имеет их, то то же верно и для другого уравнения.

Предположим, что $L_1(u) = 0$ имеет $n-r$ решений, регулярных в начале. Тогда

$$L_1 = R_1 M_1,$$

где $M_1(u) = 0$ — уравнение, удовлетворяемое $n-r$ регулярными решениями, а R_1 — оператор порядка r. Но если $\overline{R_1}$ и $\overline{M_1}$ — сопряженные операторы R_1 и M_1 соответственно, то

$$\overline{L_1} = \overline{M_1}\,\overline{R_1}.$$

Определяющие уравнения, относящиеся к началу, как $\overline{L_1}$, так и $\overline{M_1}$,— степени $n-r$, следовательно уравнение $\overline{R_1}(u) = 0$ не имеет определяющего уравнения; поэтому, если уравнение $\overline{L}(v) = 0$ имеет $n-r$ регулярных решений, то необходимо, чтобы сопряженное уравнение $\overline{L}(u) = 0$ было удовлетворено всеми решениями уравнения $\overline{R}(u) = 0$ порядка r, которое не имеет определяющего уравнения.

Это условие является также достаточным, так как, если оно удовлетворено, то уравнение $R_1(u) = 0$, сопряженное $\overline{R_1}(v) = 0$, также не имеет определяющего уравнения. Следовательно порядок уравнения $M_1(u) = 0$ равен степени определяющего уравнения, относящегося к рассматриваемой особенности, а все решения $M_1(u) = 0$ регулярны в начале; уравнение $L_1(u) = 0$ имеет $n-r$ решений, регулярных в начале.

Таким образом *для того, чтобы уравнение порядка n имело $n-r$ решений, регулярных в особой точке, в которой определяющее уравнение степени $n-r$, необходимо и достаточно, чтобы сопряженное уравнение удовлетворялось всеми решениями уравнения порядка r, которое не имеет определяющего уравнения в рассматриваемой особой точке.*

Если регулярные решения существуют, то точные выражения для них могут быть найдены решением последовательности рекуррентных соотношений, данных в § 17·3. Любые случаи, когда корни определяющего уравнения кратные или различаются между собой на целые числа, могут рассматриваться при помощи общего метода, приведенного в § 16 · 3.

17 · 5. Нормальные решения. Следующая задача состоит в том, чтобы получить разложения, представляющие решения, нерегулярные в особой точке. Сначала рассмотрим уравнение первого порядка, для которого начало является нерегулярной особой точкой. Рассмотрим уравнение

$$z\frac{dw}{dz} + p(z)\,w = 0,$$

где

$$p(z) = \frac{ma_1}{z^m} + \frac{(m-1)\,a_2}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{2a_{m-1}}{z^2} + \frac{a_m}{z} - \rho - \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ — аналитическая функция в соседстве с началом, а $\varphi(0) = 0$. Общее решение имеет вид

$$w = Ae^{Q(z)}z^{\rho}\Phi(z),$$

где A — произвольная постоянная;

$$Q(z) = \frac{a_1}{z^m} + \frac{a_2}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z^2} + \frac{a_m}{z},$$

$$\Phi(z) = \exp\int\frac{\varphi(z)}{z}\,dz.$$

Если решение написать в виде

$$w = e^{Q(z)}\,v(z),$$

то $v(z)$ будет решением (регулярным в начале) уравнения

$$z\frac{dv}{dz} = \{\rho + \varphi(z)\}\,v.$$

Существенная особенность решения получается таким образом вследствие наличия множителя $e^{Q(z)}$, который называется *определяющим множителем* решения. Если решение такого вида существует, то оно называется *нормальным решением*[1]; число ρ называется *показателем*.

17 · 51. Решения, в которых точка в бесконечности является нерегулярной особенностью. Если какая-либо точка является регулярной особенностью в уравнениях, возникающих в физических задачах, то эта точка почти всегда находится в бесконечности. Предположим, что любая частная особая точка, например z_0, перенесена в бесконечность подстановкой

$$Z = \frac{1}{z - z_0}.$$

При этом преобразовании мы не потеряем в общности и получим решение значительно более легкое.

[1] Thomé, J. für Math., 95 (1883), 75.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)w = 0,$$

где коэфициенты могут быть разложены в виде ряда по убывающим целым степеням z

$$p_\nu(z) = z^{k_\nu}(a_{\nu_0} + a_{\nu_1}z^{-1} + a_{\nu_2}z^{-2} + \ldots).$$

Если, согласно принятому условию, точка в бесконечности является нерегулярной особой точкой, то $K_\nu \geqslant 1 - \nu$, по меньшей мере для одного значения ν. Предположим, что

$$K_\nu + \nu < K_r + r \text{ при } \nu < r,$$

$$K_\nu + \nu \leqslant K_r + r \text{ при } \nu > r,$$

тогда степень определяющего уравнения, относящегося к точке в бесконечности, будет равна $n - r$, а r будет классом особенности.

Покажем, что для существования нормального решения необходимо, чтобы K_ν было больше или равно нулю по крайней мере для одного значения ν. Если решение, нормальное в бесконечности, существует, то оно будет иметь вид

$$w = e^{Q(z)}u(z)$$

где $Q(z)$ — определяющий полином от z, а $u(z)$ будет иметь вид

$$z^\rho(c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \ldots).$$

Пусть

$$\frac{d^m}{dz^m}e^Q = t_m e^Q,$$

так что

$$t_0 = 1, \quad t_1 = Q',$$

в общем случае

$$t_{m+1} = t'_m + t_m Q'.$$

Если $Q(z)$ — полином степени s, то в бесконечности

$$t_m = O(z^{ms-m}).$$

Пусть уравнение, удовлетворяемое $u(z)$, имеет вид

$$\frac{d^n u}{dz^n} + q_1(z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \ldots + q_{n-1}(z)\frac{du}{dz} + q_n(z)u = 0,$$

тогда можно доказать, что

$$q_\nu = p_\nu + (n - \nu + 1)t_1p_{\nu-1} + {}_{n-\nu+2}C_2t_2p_{\nu-2} + \ldots + {}_nC_\nu t_\nu$$

в частности, что

$$q_n = p_n + t_1p_{n-1} + t_2p_{n-2} + \ldots + t_n.$$

Теперь, если нормальное решение существует, то можно определить Q так, чтобы уравнение для u имело не меньше одного решения, регулярного в бесконечности. Это условие ограничивает степень главного члена относительно q_n. Степени главных членов, составляющих q_ν, равны

$$K_\nu, \quad K_{\nu-1}+s-1, \quad K_{\nu-2}+2s-2, \ldots, \quad \nu(s-1),$$

следовательно, если полином Q степени s, но вообще произвольный, то степень ведущего члена относительно q_ν превышает степень ведущего члена относительно $q_{\nu-1}$ не меньше чем на $s-1$. Таким образом в общем случае главный член относительно q_n будет не меньше главного члена любого другого коэфициента q_ν, а уравнение относительно u не будет иметь определяющего уравнения, следовательно и регулярного решения в бесконечности.

Если нормальное решение существует, то соответствующим выбором степени $Q(z)$ и ее коэфициентов можно сделать степень главного члена относительно q_n по крайней мере на единицу меньше степени главного члена относительно q_{n-1}; только в этом случае уравнение относительно u может иметь решение, регулярное в бесконечности. Чтобы это было возможно, ни одно из чисел

$$K_n, \quad K_{n-1}+s-1, \quad K_{n-2}+2(s-1), \ \ldots, \quad n(s-1)$$

не должно быть больше остальных, т. е. из чисел

$$K_n-n(s-1), \quad K_{n-1}-(n-1)(s-1), \quad K_{n-2}-(n-2)(s-1), \ldots, 0$$

два наибольших числа должны быть равны между собой. Пусть g будет наибольшим из чисел

$$K_1, \quad \frac{1}{2}K_2, \quad \frac{1}{3}K_3, \ldots, \quad \frac{1}{n}K_n,$$

тогда необходимо, чтобы

$$K_\nu-\nu(s-1)\geqslant 0$$

для некоторого значения ν, откуда следует, что

$$g\geqslant s-1.$$

Но поскольку решение нормальное, а не регулярное[1], $s\geqslant 1$ и $g\geqslant 0$. Таким образом $K_\nu\geqslant 0$ по меньшей мере для одного значения ν.

[1] Нужно также отметить, что если точка в бесконечности является регулярной особенностью, то

$$g\geqslant\frac{1}{\nu}K_\nu\geqslant\frac{1}{\nu}-1$$

по меньшей мере для одного значения ν, так что $g>-1$.

Например, уравнение

$$zw'' + w' + w = 0$$

не имеют решения, нормального в бесконечности, так как $K_1 = K_2 = -1$, следовательно $g = -\frac{1}{2} < 0$.

17 · 52. Вычисление определяющего множителя. Степень s полинома $Q(z)$ ограничивается таким образом неравенством

$$s \leqslant g + 1.$$

Если g — положительное целое число или нуль, то очевидно можно допустить, что $s = g + 1$, так как в этом случае

$$K_\nu = \nu(s - 1)$$

по крайней мере для одного значения ν, а для всех остальных значений ν

$$K_\nu < \nu(s - 1);$$

следовательно из чисел

$$K_n, \quad K_{n-1} + s - 1, \quad K_{n-2} + 2(s - 1), \quad \ldots, \quad n(s - 1),$$

число $n(s - 1)$ равно большему числу последовательности.

Класс был определен как число r, так что

$$K_\nu + \nu < K_r + r \quad \text{при } \nu < r,$$

$$K_\nu + \nu \leqslant K_r + r \quad \text{при } \nu > r,$$

следовательно при $\nu > r$

$$K_r + (n - r)(s - 1) \geqslant K_\nu + (n - \nu)(s - 1) + s(\nu - r)$$

$$> K_\nu + (n - \nu)(s - 1).$$

Таким образом равенство

$$K_\nu + (n - \nu)(s - 1) = n(s - 1)$$

или

$$K_\nu = \nu(s - 1) = \nu g,$$

которое верно по крайней мере для одного значения ν, именно r может быть справедливым только при $\nu \leqslant r$, поэтому

$$K_\nu \leqslant \nu g \quad \text{при } \nu < r$$

$$K_\nu = \nu g \quad \text{при } \nu = r$$

$$K_\nu < \nu g \quad \text{при } \nu > r.$$

Пусть m будет наименьшим значением ν, для которого $K_\nu = \nu g$, тогда

$$K_m + (n - m)(s - 1) = K_r + (n - r)(s - 1) = ng$$

и

$$K_\nu + (n-\nu)(s-1) < ng \quad \text{при } \nu < m \text{ или } \nu > r.$$

Члены высшего порядка в $q_n(z)$ равны

$$t_n, \quad t_{n-m} p_m, \ \ldots, \ t_{n-r} p_r.$$

Но

$$t_\nu = Q' t_{\nu-1} + O\{z^{(\nu-1)(s-1)}\}$$
$$= Q'^\nu + O\{z^{(\nu-1)(s-1)}\},$$

и

$$t_\nu = O\{z^{\nu(s-1)}\},$$

следовательно, главное выражение в $q_n(z)$ имеет вид

$$Q'^n + p_m Q'^{n-m} + \ldots + p_n Q'^{n-r}.$$

Пусть

$$Q(z) = A_1 z + \frac{1}{2} A_2 z^2 + \ldots + \frac{1}{s} A_s z^s$$

тогда, поскольку

$$p_\nu(z) = z^{K_\nu}(a_{\nu 0} + a_{\nu 1} z^{-1} + \ldots),$$

условием для обращения в нуль члена высшего порядка в $q_n(z)$ будет

$$A_s^r + a_{m0} A_s^{r-m} + \ldots + a_{r0} = 0.$$

Следовательно, имеется не больше r независимых значений постоянной A_s. Если значение A_s известно, то остальные постоянные $A_{s-1}, \ldots, A_1$ могут быть вычислены последовательно. Так, если $s = g + 1$, то определяющий множитель может быть получен.

Условие $s = g + 1$ необходимо, когда $g = 0$, но если g — положительное целое число, то возможны целые значения s, которые меньше $g + 1$. Для получения допустимых значений s применяется диаграмма Пьюзо (см. § 12 · 61), которая должна быть построена следующим образом: наносятся точки, декартовы координаты (x, y) которых равны

$$(0, r), \ (K_1, r-1), \ldots (K_r, 0),$$

и через точку $(0, r)$ в первом квадранте параллельно оси x проводится вектор. Этот вектор вращается вокруг точки $(0, r)$ по направлению часовой стрелки до тех пор, пока не пересечет других точек. Затем он вращается в том же направлении вокруг одной из этих точек, наиболее отдаленной от $(0, r)$, пока не встретит других точек, и т. д. до тех пор, пока он, наконец, не пройдет через точку $(K_r, 0)$. Так образуется полигон, соединяющий точки $(0, r)$ и $(K_r, 0)$, причем ни одна из точек не лежит выше или справа от этой линии.

Рассмотрим любой прямолинейный отрезок этой линии и предположим, например, что он проходит через точки

$$(K_\sigma,\ r-\sigma),\ldots,\ (K_\tau,\ r-\tau);$$

пусть этот отрезок образует угол θ с отрицательным направлением оси y. Если $\mu=\operatorname{tg}\theta$, точки на этом отрезке будут удовлетворять уравнению

$$x+\mu y=C,$$

где C — постоянная; поэтому

$$K_\sigma+\mu(r-\sigma)=\ldots=K_\tau+\mu(r-\tau),$$

если $(K_\nu,\ r-\nu)$ — точка не на отрезке, то

$$K_\sigma+\mu(r-\sigma)>K_\nu+\mu(r-\nu).$$

Следовательно, если μ — положительное целое число или нуль, то

$$s=\mu+1,$$

причем s может иметь столько значений, сколько имеется независимых прямолинейных отрезков в полигоне, для которого μ — положительное целое число или нуль.

Если допустимое значение s получено, то метод получения полинома $Q(z)$ аналогичен показанному выше. После этого необходимо получить диференциальное уравнение для u и убедиться, являются ли решения регулярными в бесконечности, так как нормальное решение $w(z)$ может существовать лишь в том случае, если $u(z)$ регулярно в бесконечности. Существование определяющего множителя $e^{Q(z)}$ само по себе недостаточно для существования нормального решения; сходимость ряда относительно $u(z)$ также необходима. Если нормальное решение существует, то оно называется решением *порядка* s, где s — степень полинома $Q(z)$. *Рангом* уравнения относительно рассматриваемой особой точки является число h, где

$$h=g+1.$$

Если h — целое число, то оно может быть равно s, вообще же h больше s.

Когда полиномы $Q(z)$ определены, нужно получить определяющее уравнение, удовлетворяемое ρ. Если это уравнение имеет одинаковые корни, или корни, различающиеся на целые числа, то, кроме нормального решения, не содержащего логарифмических членов, могут существовать решения вида

$$e^{Q(z)}z^{\rho}\{\varphi_0(z)+\varphi_1(z)\log z+\ldots+\varphi_m(z)(\log z)^m\},$$

где функции $\varphi(z)$ — аналитические в бесконечности.

17 · 53. Поднормальные решения. Для некоторого прямолинейного отрезка диаграммы Пьюзо наклон μ является рациональной дробью. Для построения любых нормальных решений могут быть выбраны некоторые нулевые или положительные целые значения; нецелые значения должны быть опущены. Однако эти дробные значения приводят к решениям нового типа, которые называются *поднормальными решениями*[1].

Предположим, что рациональная дробь μ равна l/k и преобразуем уравнение подстановкой

$$\zeta = z^k.$$

Тогда диаграмма Пьюзо преобразованного уравнения будет иметь прямолинейный отрезок, расположенный под углом θ' к отрицательному направлению оси y, где

$$\operatorname{tg}\theta' = l.$$

Если l — положительное целевое число, то преобразованное уравнение может иметь нормальное решение; в этом случае определяющий множитель $Q(\zeta)$ будет полиномам от ζ степени s, где

$$s = l + 1.$$

Таким образом первоначальное уравнение может иметь решение нормального типа для переменной $z^{1/k}$; такое решение называется *поднормальным*. Очевидно, если существует одно поднормальное решение для $z^{1/k}$, то существует также и $k-1$ других поднормальных решений того же типа. Эти решения образуют совокупность поднормальных решений.

Например, уравнение

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{dw}{dz} - \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{16z}\right\} w = 0$$

имеет два поднормальных решения. Его общее решение имеет вид

$$w = Ae^{\sqrt{z}}\left\{z^{-\frac{3}{4}} - z^{-\frac{5}{4}}\right\} + Be^{-\sqrt{z}}\left\{z^{-\frac{3}{4}} + z^{-\frac{5}{4}}\right\},$$

где A и B — произвольные постоянные.

Если определяющий множитель $Q(z^{1/k})$ степени s относительно $z^{1/k}$, то поднормальное решение порядка s/k; в этом случае

$$h = g + 1 \geqslant \frac{s}{k}.$$

Следовательно, если поднормальное решение существует, то его порядок не превышает ранга уравнения.

17·54. Ранг уравнения, удовлетворяемого данной фундаментальной последовательностью нормальных и поднормальных функций.

Пусть

$$w_1 = e^{Q_1} z^{\rho_1} u_1, \quad w_2 = e^{Q_2} z^{\rho_2} u_2, \ldots, w_n = e^{Q_n} z^{\rho_n} u_n$$

[1] Fabry, Thèse (Faculté des Sciences. Paris, 1885).

будут n функциями нормального и поднормального типа, расположенными таким образом, что их порядки равны соответственно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, тогда

$$\Gamma \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n$$

Диференциальное уравнение порядка n, удовлетворяемое этими функциями, будет ранга h, не превышающего Γ относительно особой точки в бесконечности[1]. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1, & w_2, & \ldots, w_n \\ w_1', & w_2', & \ldots, w_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^{(n-1)}, & w_2^{(n-1)}, & \ldots, w_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

будет вронскианом n данных функций; допустим, что Δ не равна тождественно нулю. Пусть Δ_r будет детерминантом, полученным из Δ подстановкой $w_1^{(n)}$ вместо $w_1^{(n-r)}$, $w_2^{(n)}$ вместо $w_2^{(n-r)}$ и т. д. Тогда, если

$$p_r = -\Delta_r/\Delta,$$

то диференциальное уравнение, удовлетворяемое $w_1, w_2, \ldots, w_n$, будет иметь вид

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dw}{dz} + p_n w = 0.$$

Ранг этого уравнения зависит от порядка коэфициентов p_r в бесконечности.

Теперь из

$$w_\mu = e^{Q_\mu} z^{\rho_\mu} u$$

следует, что

$$w_\mu^{(\nu)} = z^{\nu(\gamma_\mu - 1)} e^{Q_\mu} z^{\rho_\mu} \varphi_{\mu\nu},$$

где $\varphi_{\mu\nu}$ — аналитическая функция, не равная нулю в бесконечности. Теперь

$$p_r = -\begin{vmatrix} \ldots, u_\mu & , \ldots \\ \ldots, z^{(\gamma_\mu - 1)} \varphi_{\mu 1} & , \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \ldots, z^{n(\gamma_\mu - 1)} \varphi_{\mu n} & , \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \ldots, z^{(n-1)(\gamma_\mu - 1)} \varphi_{\mu, n-1} & \ldots \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \ldots, u_\mu & , \ldots \\ \ldots, z^{(\gamma_\mu - 1)} \varphi_{\mu 1} & , \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \ldots, z^{(n-r)(\gamma_\mu - 1)} \varphi_{\mu, n-r} & , \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \ldots, z^{(n-1)(\gamma_\mu - 1)} \varphi_{\mu, n-1} & , \ldots \end{vmatrix}$$

[1] Poincaré, Acta Math., 8 (1886), 305.

Если детерминанты разложить соответственно элементам $n-r+1$-го ряда, то p_r принимает вид

$$p_r = \frac{\varphi_{1n} U_1 z^{\alpha_1 + r(\gamma_1 - 1)} + \ldots + \varphi_{nn} U_n z^{\alpha_n + r(\gamma_n - 1)}}{\varphi_{1, n-r} U_1 z^{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{n, n-r} U_n z^{\alpha_n}},$$

где $U_1, \ldots, U_n$ — функции, аналитические в бесконечности; примем, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выбраны так, что $U_1, \ldots, U_n$ не равны нулю в бесконечности.

Следовательно, если

$$p_r = O(z^{K_r}),$$

то K_r будет наибольшим из чисел

$$r(\gamma_1 - 1) + \alpha_1 - \alpha_m, \ldots, r(\gamma_m - 1), \ldots, r(\gamma_n - 1) + \alpha_n - \alpha_m,$$

которые, в свою очередь, не меньше

$$r(\gamma_1 - 1), \ldots, r(\gamma_m - 1), \ldots, r(\gamma_n - 1),$$

из которых самое большое равно $r(\gamma_1 - 1)$.

Таким образом для всех значений r

$$\frac{1}{r} K_r \leqslant \gamma_1 - 1 \leqslant \Gamma - 1,$$

следовательно

$$h = g + 1 \leqslant \Gamma.$$

Если все данные функции нормальные, то они однозначны относительно z и, следовательно, коэфициенты p_r также однозначны относительно z. Рассмотрим случай, когда среди функций $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ имеется совокупность поднормальных функций. Так, предположим, что $w_1(z), \ldots, w_k(z)$ образуют совокупность поднормальных решений. Если $\zeta = z^k$, то они могут быть написаны так

$$W_1(\zeta), \quad W_2(\zeta), \ldots, \quad W_k(\zeta),$$

где $W_1, W_2, \ldots, W_k$ — нормальные функции ζ. Они могут быть также расположены так, чтобы

$$W_2(\zeta) = W_1(\omega\zeta), \ldots, W_k(\zeta) = W_1(\omega^{k-1}\zeta),$$

где $\omega^k = 1$.

Отсюда следует, что при подстановке $\omega z^{1/k}$ вместо $z^{1/k}$, p_r остается неизмененным, т. е. p_r однозначно относительно z. То же, очевидно, верно и для двух и более совокупностей поднормальных решений.

Таким образом *последовательность нормальных или поднормальных n функций и порядка, равного или меньше Γ, удовлетворяет диференциальному уравнению порядка n ранга h (не выше Γ) с однозначными коэфициентами.*

Из этой теоремы следует, что если уравнение $L(w)=0$ с однозначными коэфициентами имеет нормальные ли поднормальные решения, то оно приводимо, так как любое число нормальных решений или совокупностей поднормальных решений удовлетворяет уравнению

$$M(w)=0$$

с однозначными коэфициентами. Если это уравнение не имеет других решений, помимо удовлетворяющих $L(w)=0$, то последнее уравнение может быть написано в виде

$$RM(w)=0,$$

и, следовательно, оно приводимо.

17·6. Уравнения Гамбургера. В настоящее время неизвестна совокупность условий, достаточных для того, чтобы уравнение порядка n допускало нормальное решение. Эти условия установлены только в одном или двух частных случаях; из них наиболее важным является уравнение порядка n, в котором

(I) имеются только две особые точки, именно $x=0$ и $x=\infty$,

(II) начало является регулярной особенностью,

(III) точка в бесконечности является существенной особенностью[1].

Уравнение может быть написано в виде

$$z^n\frac{d^nw}{dz^n}+z^{n-1}p_1\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\ldots+zp_{n-1}\frac{dw}{dz}+p_nw=0,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — целые функции z; примем, что они являются полиномами z.

Теперь, поскольку начало является регулярной особой точкой, существует не меньше одного решения вида

$$w=z^{\rho}V(z),$$

где $V(z)$ — степенной ряд, который сходится внутри некоторого произвольно большого круга $|z|=R$ и $V(0)\neq 0$. Это решение может быть получено при помощи методов, указанных в главе XVI.

Найдем последовательность условий, достаточных для того, чтобы это решение было нормальным относительно особой точки в бесконечности. Поскольку некоторое нормальное в бесконечности решение имеет вид

$$w=e^{Q(z)}z^{\sigma}U(z),$$

где $Q(z)$ — полином

$$\frac{\alpha_0z^s}{s}+\frac{\alpha_1z^{s-1}}{s-1}+\ldots+\alpha_{s-1}z,$$

[1] Hamburger, J. für Math., 103 (1888), 238.

а $U(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области, не содержащей начало, и не исчезающая в бесконечности. Отсюда следует, что

$$\frac{w'}{w} = \alpha_0 z^{s-1} + \alpha_1 z^{s-2} + \ldots + \alpha_{s-1} + \sigma z^{-1} + U'/U,$$

где для больших значений $|z|$ $U'/U = O(z^{-2})$. Далее

$$\frac{w'}{w} = \rho z^{-1} + V'/V;$$

V'/V можно разложить в ряд по убывающим степеням z, который содержал бы только конечное число положительных целых степеней z. Для этого необходимо, чтобы V имело только конечное число нулей внутри любого круга $|z| = R$; пусть V имеет k нулей, кроме нулей в существенной особенности $z = \infty$. Тогда, согласно теореме Вейерштрасса,

$$V(z) = P(z)\, e^{g(z)},$$

где $P(z)$ — полином z степени k, а $g(z)$ — целая функция z. Отсюда

$$z^{\sigma} e^{Q(z)} U(z) = z^{\rho} e^{g(z)} P(z),$$

следовательно, $g(z)$ является полиномом z, а $U(z)$ является полиномом относительно z^{-1}; аналогично

$$\sigma = \rho + k.$$

Теперь пусть

$$\frac{w'}{w} = z^{s-1} P_1,$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{s-1} z^{-s+1} + O(z^{-s}) \\ &= v + O(z^{-s}), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{w''}{w} &= \left(\frac{w'}{w}\right)^2 + \frac{d}{dz}\left(\frac{w'}{w}\right) \\ &= z^{2s-2} P_1^2 + (s-1) z^{s-2} P_1 + z^{s-1} P_1' \\ &= z^{2s-2} P_2, \end{aligned}$$

где

$$P_2 = v^2 + O(z^{-s}).$$

В общем случае

$$\frac{w^{(\varkappa)}}{w} = z^{\varkappa(s-1)} P_{\varkappa},$$

где

$$P_{\varkappa} = v^{\varkappa} + O(z^{-s}).$$

Заменим $w'/w,\ w''/w, \ldots, w^{(n)}/w$ в диференциальном уравнении, тогда полученное уравнение

$$z^{ns}P_n + z^{(n-1)s}p_1P_{n-1} + \ldots + z^s p_{n-1}P_1 + p_n = 0$$

будет тождеством. Положительное целое число s не было ограничено; предположим, что оно настолько велико, что каждый из полиномов $z^{(n-\varkappa)s}p_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$ не больше степени ns и пусть

$$p_\varkappa = \sum_{\nu=0}^{\varkappa s} a_{\varkappa,\nu} z^\nu.$$

Определяющий множитель имеет вид

$$Q(z) = \int_0^z z^{s-1} v(z)\, dz,$$

и поскольку

$$P_\varkappa = v^\varkappa + O\left(z^{-s}\right),$$

то $v(z)$ получится, если взять первые s членов корня уравнения

$$\left(z^s v\right)^n + p_1\left(z^s v\right)^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z^s v + p_n = 0.$$

В частности, уравнение, определяющее α_0, будет

$$A(\alpha_0) \equiv \alpha_0^n + a_{1,s}\alpha_0^{n-1} + a_{2,2s}\alpha_0^{n-2} + \ldots + a_{n,ns} = 0,$$

причем α_0 будет простым корнем этого уравнения.

17·61. Условия для нормального решения. Пусть

$$w = e^{Q(z)} u,$$

тогда, если w — нормальное решение, то уравнение, удовлетворяемое u, допускает не меньше одного регулярного решения. Теперь

$$\frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa} e^{Q(z)} = z^{\varkappa(s-1)} v_\varkappa e^{Q(z)},$$

где $v_\varkappa$ тождественно $v^\varkappa$ в членах вида $z^0, z^{-1}, \ldots, z^{-s+1}$. Следовательно

$$\frac{d^\nu w}{dz^\nu} = e^{Q(z)} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \left\{ \frac{\nu!}{\varkappa!\,(\nu-\varkappa)!} z^{\varkappa(s-1)} v_\varkappa \frac{d^{\nu-\varkappa} u}{dz^{\nu-\varkappa}} \right\}$$

при $v_0 = 1$, $v_1 = v$, поэтому диференциальное уравнение относительно u будет иметь вид

$$\sum_{r=0}^{n} z^{n-r} p_r \sum_{\varkappa=0}^{n-r} \left\{ \frac{(n-r)!}{\varkappa!\,(n-r-\varkappa)!} z^{\varkappa(s-1)} v_\varkappa \frac{d^{n-r-\varkappa} u}{dz^{n-r-\varkappa}} \right\} = 0$$

или

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-r}\frac{(n-r)!}{\nu!\,(n-r-\nu)!}p_r z^{(n-r-\nu)s}v_{n-r-\nu}z^{\nu}\frac{d^{\nu}u}{dz^{\nu}}=0$$

при $p_0=1$.

Коэфициент u в диференциальном уравнении равен

$$\sum_{r=0}^{n}p_r z^{(n-r)s}v_{n-r}.$$

Поскольку v получено так, как указано выше,

$$\sum_{r=0}^{n}p_r(z^s v)^{n-r}$$

и поскольку s ведущих членов v_{n-r} и v^{n-r} совпадают, то отсюда следует, что s высших членов в коэфициенте u, именно члены $z^{ns},\ldots,z^{(n-1)s+1}$, должны обратиться в нуль, следовательно

$$\sum_{r=0}^{n}p_r z^{(n-r)s}v_{n-r}=z^{(n-1)s}(\theta_0+\theta_1 z^{-1}+\ldots),$$

где v и θ_0 — известны.

Аналогично коэфициент при $z\frac{du}{dz}$ в диференциальном уравнении имеет вид

$$\sum_{r=0}^{n-1}(n-r)p_r z^{(n-r-1)}v_{n-r-1},$$

и поскольку α_0 — простой корень уравнения

$$\sum_{r=0}^{n}a_{r,rs}\alpha_0^{n-r}=0,$$

отсюда следует, что

$$\sum_{r=0}^{n-1}(n-r)a_{r,rs}\alpha_0^{n-r-1}\neq 0.$$

Следовательно ведущий член в коэфициенте $z\frac{du}{dz}$ не обращается в нуль, поэтому коэфициент $z\frac{du}{dz}$ имеет вид

$$z^{(n-1)s}(\eta_0+\eta_1 z^{-1}+\ldots),$$

где η_0 — постоянная, не равная нулю.

Если $u=z^{\sigma}U(z)$, где $U(z)$ — полином от z^{-1}, то σ должна удовлетворять определяющему уравнению

$$\eta_0\sigma+\theta_0=0.$$

Но $\sigma = \rho + k$, где k — положительное целое число или нуль, а ρ — удовлетворяет определяющему уравнению

$$I(\rho) \equiv [\rho]_n + a_{10}[\rho]_{n-1} + \ldots + a_{n-1,0}\,\rho + a_{n0} = 0.$$

Отсюда следует, что *для существования нормального решения необходимо, чтобы уравнение относительно k*

$$I(-k - \theta_0/\eta_0) = 0$$

имело не меньше одного корня, равного положительному целому числу или нулю.

Предположим, что это условие удовлетворено и что $\varkappa$ — соответствующее значение k, тогда

$$\begin{aligned} u &= z^{\sigma}(c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{\varkappa} z^{-\varkappa}) \\ &= z^{\rho}(c_{\varkappa} + c_{\varkappa-1} z + \ldots + c_0 z^{\varkappa}). \end{aligned}$$

Если это выражение подставить в диференциальное уравнение для u, то последовательность рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} &c_{\varkappa} I(\rho) = 0, \\ &c_{\varkappa-1} I(\rho+1) + c_{\varkappa} G_1(\rho+1) = 0, \\ &c_{\varkappa-2} I(\rho+2) + c_{\varkappa-1} G_1(\rho+2) + c_{\varkappa} G_2(\rho+2) = 0, \end{aligned}$$

где G_1, G_2 — полиномы от их аргументов, должна быть удовлетворена коэфициентами $c_{\varkappa}, c_{\varkappa-1}, \ldots$ Первое уравнение удовлетворяется независимо от $c_{\varkappa}$; если значение $c_{\varkappa}$ дано, то последующие $\varkappa$ уравнений определяют $c_{\varkappa-1}, \ldots, c_0$. Всего имеется $s(n-1)$ рекуррентных соотношений, $k+1$ из которых были использованы; остальные уравнения должны быть теперь удовлетворены тождественно, соответственно определенным значениям $c_{\varkappa}, \ldots, c_0$. Если совокупность этих соотношений удовлетворена, то нормальное решение существует.

Если уравнение

$$A(\alpha_0) = 0$$

имеет больше одного простого корня, в отношении которого все необходимые условия удовлетворены, то мы получим соответствующее число нормальных решений диференциального уравнения.

Исследуем возможность существования n нормальных решений. Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ будут n независимыми корнями $A(\alpha_0) = 0$ и пусть

$$Q_r(z) = \frac{\beta_r z^s}{s} + \ldots + \gamma_r z.$$

Если нормальные решения существуют, то они будут иметь вид

$$w_r = e^{Q_r(z)} z^{\sigma_r} U_r(z),$$

где $U_r(z)$ — полином от z^{-1}; если его степень равна $\varkappa_r$, то

$$\sigma_r = \rho_r + \varkappa_r,$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — корни $I(\rho)=0$. Теперь

$$\sum_{r=1}^{n}(\sigma_r - \varkappa_r) = \sum_{r=1}^{n}\rho_r$$

$$= \frac{1}{2}n(n-1) - a_{10},$$

а $\sum \sigma_r$ может быть вычислено следующим образом.

Пусть Δ будет вронскианом решений $w_1, \ldots, w_n$ и

$$\begin{aligned} w_r &= e^{Q_r} z^{\sigma_r}\{1 + O(z^{-1})\}, \\ w_r' &= \beta_r e^{Q_r} z^{\sigma_r+(s-1)}\{1 + O(z^{-1})\}, \\ w_r'' &= \beta_r^2 e^{Q_r} z^{\sigma_r+2(s-1)}\{1 + O(z^{-1})\}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

первое приближение к Δ будет

$$\Delta = e^{Q_1+\ldots+Q_n}\begin{vmatrix} z^{\sigma_1}, & \ldots, & z^{\sigma_n} \\ \beta_1 z^{\sigma_1+(s-1)}, & \ldots, & \beta_n z^{\sigma_n+(s-1)} \\ \beta_1^2 z^{\sigma_1+2(s-1)}, & \ldots, & \beta_n^2 z^{\sigma_n+2(s-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

и более точно

$$\Delta = e^{\Sigma Q_r} z^{\Sigma\sigma_r + \frac{1}{2}n(n-1)(s-1)}\{B + O(z^{-1})\},$$

где

$$B = \begin{vmatrix} 1, & \ldots, & 1 \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^{n-1}, & \ldots, & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

С другой стороны

$$\Delta = Ae^{-\int z^{-1} p_1(z)\,dz}$$

$$= Az^{-a_{10}} e^{-a_{11}z - \frac{1}{2}a_{12}z^2 - \frac{1}{3}a_{13}z^3 \ldots}.$$

Таким образом мы найдем, что

$$\sum Q_r(z) = -a_{11}z - \frac{1}{2}a_{12}z^2 - \ldots - \frac{1}{n}a_{1n}z^n,$$

$$\sum \sigma_r + \frac{1}{2}n(n-1)(s-1) = -a_{10},$$

$$B + O(z^{-1}) = A.$$

Аналогично

$$\sum k_r = \sum \sigma_r + a_{10} - \frac{1}{2} n(n-1)$$
$$= -\frac{1}{2} sn(n-1).$$

Но поскольку $k_1, \ldots, k_n$ — положительные целые числа, это уравнение невозможно. Следовательно, *если числа* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *неравны между собой, числа* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *неравны между собой, а числа* σ *связаны с* n *независимыми корнями уравнения* $I(\rho) = 0$, *то диференциальное уравнение не может иметь* n *нормальных решений.*

С другой стороны, если не все числа σ неравны между собой или если каждое число σ не связано з независимым ρ, то уравнение

$$\sum_{r=1}^{n} (\sigma_r - k_r) = \sum_{r=1}^{n} \rho_r$$

неверно и теорема несправедлива. Можно показать, что в этих случаях возможны n нормальных решений.

Рассмотрим случай, когда a_0 — кратный корень уравнения

$$A(a_0) = 0,$$

тогда $\eta_0 = 0$; поскольку

$$\sigma = -\theta_0/\eta_0$$

должно быть конечным, для существования нормального решения необходимо, чтобы $\theta_0 = 0$. Если исключить множитель $z^{(n-1)(s-1}$, то диференциальное уравнение примет вид

$$\theta_1 \{1 + O(z^{-1})\} u + \eta_1 \{1 + O(z^{-1})\} z \frac{du}{dz} +$$
$$+ \zeta_0 \{1 + O(z^{-1})\} z^{-s+3} \frac{d^2u}{dz^2} + \ldots = 0,$$

и в общем случае коэфициентом $z^\nu \frac{d^\nu u}{dz^\nu}$ будет $O(z^{(1-\nu\, s-1})$.

Определяющее уравнение имеет вид

$$\theta_1 + \eta_1 \sigma + \zeta_0 \sigma (\sigma - 1) = 0 \qquad \text{если } s = 1$$

или

$$\theta_1 + \eta_1 \sigma = 0, \qquad \text{если } s > 1.$$

При дальнейшем исследовании получим последовательность условий, достаточных для существования нормального решения[1] v может быть равно нулю, так как $O(z)$ также обращается в нуль.

[1] Günther, J. für Math., 105 (1889), 1.

17.62. Уравнение Гамбургера второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} - (a + 2bz^{-1} + cz^{-2}) = 0,$$

где началом является регулярная особая точка, относительно которой определяющее уравнение имеет вид

$$\rho(\rho - 1) = c.$$

Предположим, что регулярное решение имеет только конечное число нулей в конечной части плоскости и что существует нормальное решение

$$w = e^{Q(z)} u(z),$$

где

$$Q(z) = \frac{\alpha_0 z^S}{S} + \ldots + \alpha_{S-1} z,$$

тогда уравнение для u будет иметь вид

$$u'' + 2Q'u' + (Q'' + Q'^2 - a - 2bz^{-1} - cz^{-2}) u = 0.$$

Для того, чтобы это уравнение допускало решение

$$u = z^{\sigma}(1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots),$$

необходимо, чтобы

$$S = 1,\ \alpha_0^2 = a,\ \alpha_0 \sigma = b.$$

Коэфициенты c_r удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$2\alpha_0 c_1 = \sigma(\sigma - 1) - c,$$

$$2r\alpha_0 c_r = \{(\sigma - r + 1)(\sigma - r) - c\} c_{r-1} \quad (r = 2, 3, 4, \ldots);$$

если бы ряд $\sum c_r z^{-r}$ не был ограничен, то он расходился бы для всех значений $|z|$ и решение было бы только кажущимся. Предположим, что ряд кончается на $c_\varkappa z^{-\varkappa}$, тогда

$$(\sigma - \varkappa)(\sigma - \varkappa - 1) = c.$$

Следовательно необходимо, чтобы уравнение

$$\left(\varkappa - \frac{b}{\alpha_0}\right)\left(\varkappa + 1 - \frac{b}{\alpha_0}\right) = c$$

для $\alpha_0 = +\sqrt{a}$ или для $\alpha_0 = -\sqrt{a}$ имело корень $\varkappa$, равный положительному целому числу или нулю; это условие очевидно достаточно для существования одного нормального решения.

Для существования двух нормальных решений необходимы дополнительные условия. Если оба значения σ, именно

$$\sigma_1 = +b/\sqrt{a}, \quad \sigma_2 = -b/\sqrt{a},$$

не равны нулю и если они связаны с независимыми значениями ρ

следующим образом

$$\sigma_1 = \rho_1 + \varkappa_1, \quad \sigma_2 = \rho_2 + \varkappa_2,$$

то

$$0 = \sigma_1 + \sigma_2$$
$$= \rho_1 + \rho_2 + \varkappa_1 + \varkappa_2 = 1 + \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

что невозможно, поскольку $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — положительные целые числа или равны нулю.

С другой стороны, если

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,$$

т. е. если $b = 0$ и уравнение

$$\varkappa(\varkappa + 1) = c$$

имеет положительный целый корень, то существуют два нормальных решения

$$e^{z\sqrt{a}}(1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_\varkappa z^{-\varkappa}),$$
$$e^{-z\sqrt{a}}(1 - c_1 z^{-1} + \ldots \pm c_\varkappa z^{-\varkappa}).$$

Далее, если σ_1 и σ_2 неравны между собой, но связаны с тем же значением ρ_1, то

$$\sigma_1 = \rho_1 + \varkappa_1, \quad \sigma_2 = \rho_1 + \varkappa_2,$$

поскольку

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \varkappa_1 - \varkappa_2,$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0,$$

$2\sigma_1$ и $2\sigma_2$ должны быть целыми числами, т. е. $2b/\sqrt{a}$ должно быть также целым числом. Аналогично

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + 2\rho_1 = 0,$$

следовательно, $2\rho_1$ — отрицательное целое число, а не нуль. Но

$$4c + 1 = 4\rho_1(\rho_1 - 1) + 1$$
$$= (2\rho_1 - 1)^2,$$

т. е. $4c + 1$ — квадрат целого числа, не равный нулю. Эти условия являются необходимыми и достаточными для существования двух нормальных решений.

Примеры

1. Докажите, что уравнение

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + 2(1 - z)\frac{dw}{dz} - w = 0$$

имеет два нормальных в бесконечности решения и получите их.

2. Докажите, что уравнения

(I) $$z^6\frac{d^3w}{dz^3} + 6z^5\frac{d^2w}{dz^2} - w = 0,$$

$$z^2(z^3+6)\frac{d^3w}{dz^3}+(z^3+12)\left(3z\frac{d^2w}{dz^2}+3\frac{dw}{dz}-z^2w\right)=0,$$

$$\text{(III)}\qquad z^2(2z+1)\frac{d^3w}{dz^3}+(2z^2+9z+5)\,z\frac{d^2w}{dz^2}+(-2z^3+3z^2+6z+4)\frac{dw}{dz}+$$
$$+(-2z^2-5z+3)\,zw=0$$

имеют каждое по три нормальных в бесконечности решения и получите их.

3. Докажите, что уравнение

$$4z^2\frac{d^2w}{dz^2}+8z\frac{dw}{dz}-(4z^2+12z+3)\,w=0$$

имеет одно нормальное в бесконечности решение.

4. Докажите, что уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{a}{z}\cdot\frac{dw}{dz}+bw=0$$

имеет два нормальных в бесконечности решения, если a целое число или нуль.

5. Докажите, что уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2}-(az^2+2b+cz^{-2})\,w=0$$

имеет нормальное решение, если квадратное уравнение

$$\left(x+\frac{1}{2}-\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{b}{\sqrt{a}}\right)=c$$

имеет корень, равный положительному целому числу или нулю для любого значения $\sqrt{a}$. Рассмотрите также следующие два случая: (I) когда оба корня — целые числа для того же значения $\sqrt{a}$, и (II) когда корень уравнения — положительное целое число для обоих значений $\sqrt{a}$.

6. Докажите, что уравнение

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+\mu\frac{dw}{dz}+\lambda w=0$$

имеет два решения поднормального типа в бесконечности, если 2μ — нечетное целое число.

7. Докажите, что уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2}=(2bz^{-1}+cz^{-2})\,w$$

имеет два решения поднормального типа в бесконечности. Выразите их посредством регулярных в начале решений.

8. Докажите, что уравнение

$$z^p\frac{d^3w}{dz^3}=w$$

имеет три решения поднормального типа в бесконечности, если

$$p=3\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

а n — целое число, которое не делится на 3, и получите их.

[Halphen].

ГЛАВА XVIII

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ КОНТУРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

18·1. Расширение области применения преобразования Лапласа. Общий принцип преобразования Лапласа был уже рассмотрен нами в § 8·1.

Предположим, что

$$L_z \equiv \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} z^s D_z^r$$

будет диференциальным оператором относительно z, коэфициенты которого — полиномы от z степени не больше m, тогда уравнение

$$L_z(w) = 0$$

удовлетворится выражением

$$w(z) = \int_C e^{z\zeta} v(\zeta)\, d\zeta,$$

где функция $v(\zeta)$ и контур интегрирования C определяются следующим образом.

Пусть M_ζ будет диференциальным оператором

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} \zeta^r D_\zeta^s,$$

а $\overline{M}_\zeta$ будет его присоединенным выражением, тогда функция $v(\zeta)$ должна удовлетворять диференциальному уравнению

$$\overline{M}_\zeta(v) = 0,$$

порядок которого равен степени полиномиальных коэфициентов оператора L.

Контур C выбирается таким образом, что если $P\{e^{z\zeta}, v\}$ — билинейная форма преобразования, то

$$[P\{e^{z\zeta}, v\}]_C = 0$$

тождественно.

Преимущество замены определенного интеграла контурным интегралом состоит частично в увеличенной свободе выбора пути интегрирования. Однако только это не оправдало бы отдельного рассмотрения выражения решений диференциальных уравнений при помощи контурных интегралов. Этот вопрос рассматривается здесь вторично потому, что контурный интеграл представляет возможность исследования решений, нерегулярных в бесконечности, разложения которых в виде ряда расходятся. Природа коэфициентов в уравнении $L_z(w) = 0$ показывает, что точка в бесконечности является нерегулярной особой точкой; применяя контурные интегралы в решениях уравнения, можно исследовать поведение этих решений в соседстве с особой точкой.

18·11. Уравнения, коэфициенты которых первой степени. Если коэфициенты данного уравнения первой степени, то уравнение, которому удовлетворяет функция $v(\zeta)$, также первой степени. Пусть данное уравнение имеет вид

$$(a_0 z + b_0)\frac{d^n w}{dz^n} + (a_1 z + b_1)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + (a_n z + b_n) w = 0,$$

тогда функция $v(\zeta)$ будет удовлетворять уравнению вида

$$P(\zeta)\frac{dv}{d\zeta} - Q(\zeta)v = 0,$$

где функции $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ — полиномы степени n[1]. Это решение может быть выражено в виде

$$v^{-1}\frac{dv}{d\zeta} = \mu + \frac{\lambda_1}{\zeta - \alpha_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\zeta - \alpha_n},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — нули функции $P(\zeta)$, принимаемые разными, тогда

$$v(\zeta) = e^{\mu\zeta}(\zeta - \alpha_1)^{\lambda_1}\ldots(\zeta - \alpha_n)^{\lambda_n}.$$

Билинейный конкомитант будет иметь вид

$$(a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_n\zeta + a_n)\, v(\zeta)\, e^{z\zeta},$$

поэтому контурный интеграл

$$\int\limits_C e^{z\zeta} v(\zeta)\, d\zeta$$

будет удовлетворять данному диференциальному уравнению, при условии, что контур C, зависящий от z, выбран таким образом, что

$$\left[(\zeta - \alpha_1)^{1+\lambda_1}\ldots(\zeta - \alpha_n)^{1+\lambda_n} e^{(\mu+z)\zeta}\right]_C = 0$$

тождественно относительно z.

Пусть вещественные части λ_1 и λ_2 больше -1, тогда

$$w = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{z\zeta} v(\zeta)\, d\zeta$$

---

[1] Нужно отметить, что выражение $P(\zeta)$ равно, с точностью до постоянного множителя, полиному $a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\zeta + a_n$; чтобы $P(\zeta)$ не было степени ниже n, предположим, что $a_0 \neq 0$. Точка в бесконечности будет тогда нерегулярной особенностью для w первого ранга.

будет решением уравнения, если интегрирование производится вдоль некоторой простой кривой конечной длины, соединяющей α_1 и α_2, но остающейся все время на конечном расстоянии от любой точки α_r, для которой вещественная частьпоказателя $1+\lambda_r$ отрицательное число или нуль.

Если вещественные части $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ все больше -1, то мы получим не больше $n-1$ независимых интегралов указанного типа, каждый из которых удовлетворяет данному уравнению.

Рассмотрим теперь случай, когда числа λ неограничены. Для упрощения, будем считать, что точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ находятся на конечном расстоянии от начала. В этом случае мы получим контур, образованный совокупностью четырех петель, описанных последовательно таким образом, что каждая петля начинается и заканчивается в начале и содержит только одну особую точку. Например, пусть первая петля будет проведена вокруг α_1 в положительном направлении, вторая петля — вокруг α_2 также в положительном направлении, третья петля будет проведена вокруг α_1 в отрицательном направлении, а четвертая петля — вокруг α_2 в отрицательном направлении. Функция

$$(\zeta-\alpha_1)^{1+\lambda_1}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{1+\lambda_n}e^{(\mu+z)\zeta}$$

возвращается к своему начальному значению после того, как контур был описан. Так могут быть образованы $n-1$ независимых интегралов, удовлетворяющих данному уравнению.

Последовательность n независимых контурных интегралов, удовлетворяющих уравнению, нельзя получить, не ограничивая несколько z. Предположим, например, что

$$\mathrm{R}(z+\mu)<0;$$

в этом случае соответствующий контур получится, если точка ζ будет перемещаться от $-\infty$ вдоль линии, проведенной через α_1 параллельно вещественной оси, до тех пор, пока она достигнет расстояния r от α_1, опишет вокруг α_1 круг в отрицательном направлении, а затем возвратится по прямолинейному пути. При этом предполагается, что каждая точка на петле находится на конечном расстоянии от $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Вообще существует n интегралов этого типа.

18·12. Разбор интеграла, когда $\mathrm{R}(z)$ велико. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_C(\zeta-\alpha_1)^{\lambda_1}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n}e^{(z+\mu)\zeta}d\zeta$$

для больших значений $\mathrm{R}(z)$. Мы не потеряем в общности, если предположим, что μ равна нулю, что равноценно подстановке z вместо $z+\mu$, или что α_1 равна нулю, что равноценно подстановке ζ вместо $\zeta-\alpha_1$, и если опустим множитель $e_1^{\alpha_1 z}$, который должен быть впоследствии восстановлен. Контур тогда будет состоять из следующих трех частей:

(I) вещественной оси от $-\infty$ к $-r$;

(II) круга γ радиуса r, описанного в отрицательном направлении вокруг начала;

(III) вещественной оси от $-r$ к $-\infty$.

Пусть I_1, I_2, I_3 будут соответствующими значениями интеграла вдоль этих трех путей интегрирования. Если ζ вещественное и меньше $-r$, то положительное целое число $\varkappa$ может быть найдено таким образом, что

$$|\zeta^{\lambda_1}(\zeta-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n}|<e^{-\varkappa\zeta},$$

поэтому, если $\mathbf{R}(z)>\varkappa$, то

$$|I_1|<\int\limits_{-\infty}^{-r}e^{\zeta(z-\varkappa)}d\zeta=\frac{e^{-r(z-\varkappa)}}{z-\varkappa}.$$

Следовательно,

$$I_1\to 0,\ \text{когда}\ \mathbf{R}(z)\to+\infty,$$

и аналогично

$$I_3\to 0,\ \text{когда}\ \mathbf{R}(z)\to+\infty.$$

Остается интеграл I_2, взятый по кругу γ произвольно малого радиуса r. Первая часть подинтегрального выражения может быть разложена в виде

$$\zeta^{\lambda_1}(\zeta-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n}=\zeta^{\lambda_1}\{A_0+A_1\zeta+\ldots+A_m\zeta^m+R\zeta^{m+1}\},$$

где A_0, $A_1,\ldots$, A_m — постоянные. Пусть M будет верхней границей

$$(\zeta-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n},$$

когда $|\zeta|\leqslant r$, тогда получим положительное число ρ, так что

$$|A_0|\leqslant M,\ |A_1|\leqslant M\rho,\ldots,|A_m|\leqslant M\rho^m$$

и, следовательно,

$$|R|<M\frac{\rho^{m+1}}{1-r\rho}.$$

Теперь

$$I_2=\int\limits_{\gamma}\{A_0+A_1\zeta+\ldots+A_m\zeta^m\}\zeta^{\lambda_1}e^{z\zeta}d\zeta+\int\limits_{\gamma}R\zeta^{\lambda_1+m+1}e^{z\zeta}d\zeta.$$

Задача состоит в том, чтобы определить поведение I_2, когда $\mathbf{R}(z)\to+\infty$. Однако мы ничего не потеряем, если ограничим рассмотрение вещественным z.

Рассмотрим интеграл

$$z^{p+1}\int\limits_{\gamma}\zeta^p e^{z\zeta}d\zeta,$$

где z велико и вещественно; пусть $z\zeta=-t$, тогда интеграл будет иметь вид

$$\int\limits_{\varkappa}(-t)^p e^{-t}dt,$$

где $\varkappa$—круг радиуса rz, описанный в положительном направлении около начала в плоскости t, следовательно, интеграл будет равен[1]

$$2i \sin p\pi \Gamma (p+1).$$

Эта величина конечна, за исключением случая, когда p — положительное целое число.

Следовательно, когда $z \to +\infty$ вдоль вещественной оси,

$$z^{\lambda_1+1} \int_\gamma \zeta^{\lambda_1} e^{z\zeta} d\zeta \to 2i \sin \lambda_1 \pi \Gamma (\lambda_1 + 1),$$

$$z^{\lambda_1+1} \int_\gamma \zeta^{\lambda_1+\nu} e^{z\zeta} d\zeta \to 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

и

$$\left| z^{\lambda_1+1} \int_\gamma R \zeta^{\lambda_1+m+1} e^{z\zeta} d\zeta \right| < 2 \, | z^{-m-1} | \, M \frac{\rho^{m+1}}{1 - r\rho} \Gamma (\lambda_1 + m + 2) \to 0,$$

поскольку r может быть выбрано таким, что $r\rho < 1$. Отсюда

$$I_2 = O(z^{-\lambda_1-1}),$$

за исключением случая, когда λ_1 положительное целое число.

Множитель $e^{a_1 z}$ был временно опущен; восстанавливая этот множитель, увидим, что рассматриваемый интеграл приближается к пределу

$$K_1 e^{a_1 z} z^{-\lambda_1 - 1},$$

где K_1 конечно и не равно нулю, когда z приближается к $+\infty$ вдоль вещественной оси.

18·13. Существование n линейно-независимых интегралов. Предположим, что числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

расположены таким образом, что их вещественные части образуют убывающую последовательность. Чтобы можно было провести петлю, соответствующую каждой точке a, предположим, что все мнимые части этих чисел неравны. В этом случае получим интегралы, соответствующие каждой точке a; пусть эти интегралы будут соответственно равны

$$w_1, w_2, \ldots, w_n.$$

Эти интегралы линейно-независимы, так как в противном случае мы получили бы линейное соотношение вида

$$C_1 w_1 + C_2 w_2 + \ldots + C_n w_n = 0.$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 12·22.

Но когда $z \to +\infty$,

$$\lim w_1 e^{-\alpha_1 z} z^{\lambda_1+1} = K_1,$$

$$\lim w_\nu e^{-\alpha_1 z} z^{\lambda_1+1} = \lim K_\nu e^{-(\alpha_1-\alpha_\nu)z} z^{\lambda_1-\lambda_\nu}$$

$$= 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n),$$

поскольку вещественная часть $\alpha_1 - \alpha_\nu$ положительна[1]. Следовательно, соотношение неверно, если C_1 не равно нулю. Аналогично, $C_2, \ldots, C_n$ равны нулю, следовательно, такое линейное соотношение не существвет.

18·14. Случай, когда функция $P(\zeta)$ имеет кратные линейные множители. Предположим, что какие-либо два числа α, например α_1 и α_2, равны между собой, тогда

$$v^{-1}\frac{dv}{d\zeta} = \mu + \frac{\lambda_1}{\zeta-\alpha_1} + \frac{\varkappa_1}{(\zeta-\alpha_1)^2} + \frac{\lambda_3}{\zeta-\alpha_3} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\zeta-\alpha_n},$$

так что

$$v = e^{\mu\zeta - \frac{\varkappa_1}{\zeta-\alpha_1}} (\zeta-\alpha_1)^{\lambda_1} \ldots (\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n}.$$

Чтобы получить совокупность интегралов, нужно найти два независимых контура, относящихся к точке α_1. Одним таким контуром будет рассмотренная выше петля, но нас интересует главным образом второй контур. Мы видели, что если α_1 и α_2 независимы, то существует соответствующий контур, который содержит эти две точки, но не проходит в бесконечность. Контур, который дает второй интеграл относительно точки α_1, является предельным случаем контура, содержащего обе точки α_1 и α_2, которые теперь совпадают.

В настоящем случае билинейная форма будет иметь вид

$$e^{-\frac{\varkappa_1}{\zeta-\alpha_1}} (\zeta-\alpha_1)^{1+\lambda_1} \ldots (\zeta-\alpha_n)^{1+\lambda_n} e^{(\mu+z)\zeta}.$$

Соответствующим контуром была бы замкнутая кривая, начинающаяся в α_1 в некотором направлении и возвращающаяся к α_1 в другом направлении. Иначе говоря, градиент контура должен иметь разрыв в α_1. Более того, он должен быть таким, чтобы в то время когда ζ приближается к α_1 в любом из этих направлений, билинейная форма стремилась бы к нулю.

Пусть

$$\zeta - \alpha_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad \varkappa_1 = k e^{i\beta},$$

так что

$$\frac{\zeta-\alpha_1}{\varkappa_1} = \frac{\rho}{k} e^{i(\varphi-\beta)},$$

---

[1] Если вещественные части любых двух (или больше) последовательных чисел α равны между собой, то теорема хотя и верна, но доказать это значительно труднее.

тогда

$$\left|e^{-\frac{x_1}{\zeta-\alpha_1}}\right| = e^{-\frac{k}{\rho}\cos(\varphi-\beta)}.$$

Теперь $\rho \to 0$, тогда $\zeta \to \alpha_1$. Следовательно, чтобы этот экспоненциальный множитель стремился к нулю, когда ζ приближается к α_1, необходимо, чтобы $\cos(\varphi-\beta)$ был положительным или чтобы

$$\beta - \frac{1}{2}\pi < \varphi < \beta + \frac{1}{2}\pi.$$

Таким образом все возможные направления приближения к α_1 будут лежать на одной стороне прямой линии, проведенной через α_1 в направлении β.

18·15. Уравнение с постоянными коэфициентами. Если метод Лапласа приложить к уравнению

$$a_0\frac{d^n w}{dz^n} + a_1\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dw}{dz} + a_n w = 0,$$

где коэфициенты a — постоянные, то он очевидно не даст решения. Если уравнение удовлетворяется интегралом вида

$$w = \int\limits_C e^{z\zeta} v(\zeta)\, d\zeta,$$

то должно быть только удовлетворено условие, чтобы

$$\int\limits_C e^{z\zeta} v(\zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta = 0$$

тождественно, где

$$\varphi(\zeta) = a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\zeta + a_n.$$

Таким образом ни одно диференциальное уравнение не удовлетворяется $v(\zeta)$; единственным необходимым условием является то, чтобы функция

$$f(\zeta) = v(\zeta)\,\varphi(\zeta)$$

была аналитической в области плоскости ζ, тогда можно будет принять, что контур C находится в этой области.

Рассмотрим случай, когда $\zeta = \alpha$ — корень кратности m характеристического уравнения

$$\varphi(\zeta) = 0;$$

пусть контур C содержит этот корень, но не содержит каких-либо других корней уравнения. Выберем фунцию $f(\zeta)$ так, чтобы

$$v(\zeta) = \frac{A_1}{(\zeta-\alpha_1)^m} + \frac{A_2}{(\zeta-\alpha_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{\zeta-\alpha_1} + \psi(\zeta),$$

где функция $\psi(\zeta)$ аналитическая внутри C; постоянные A зависят от выбора $f(\zeta)$, следовательно, они произвольны, тогда

$$w = \int\limits_C \left\{ \frac{A_1}{(\zeta-\alpha_1)^m} + \frac{A_2}{(\zeta-\alpha_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{\zeta-\alpha_1} + \psi(\zeta) \right\} e^{z\zeta} d\zeta.$$

Если мы вычислим этот интеграл, то найдем, что w равно (см. § 6·12)

$$e^{\alpha_1 z} \{ C_1 + C_2 z + \ldots + C_m z^{m-1} \}.$$

18·2. Рассмотрение преобразования Лапласа в более общем случае. Отбросим ограничение, что коэфициенты диференциального уравнения первой степени. Пусть уравнение будет иметь вид

$$L(w) \equiv P_0(z) \frac{d^n w}{dz^n} + P_1(z) \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots +$$

$$+ P_{n-1}(z) \frac{dw}{dz} + P_n(z) w = 0,$$

где $P_0(z)$ — полином от z степени p, а остальные коэфициенты полиномы степеней не выше p[1]. Пусть

$$P_0(z) = a_0 z^p + \ldots \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$P_r(z) = a_r z^p + \ldots \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, если

$$W = \int\limits_C e^{z\zeta} v(\zeta)\, d\zeta,$$

$$L(W) = \int\limits_C \{ a_0 z^p \zeta^n + \ldots + a_{n-r} z^p \zeta^r + \ldots \} e^{z\zeta} v(\zeta)\, d\zeta.$$

Повторным интегрированием по частям можно доказать, что

$$\int\limits_C z^p \zeta^r v e^{z\zeta} d\zeta = [z^{p-1} \zeta^r v e^{z\zeta}] - \int\limits_C z^{p-1} e^{z\zeta} \frac{d(\zeta^r v)}{d\zeta} d\zeta$$

$$= [z^{p-1} \zeta^r v e^{z\zeta}] - \left[z^{p-2} \frac{d(\zeta^r v e^{z\zeta})}{d\zeta} \right] + \int\limits_C z^{p-2} e^{z\zeta} \frac{d^2(\zeta^r v)}{d\zeta^2} d\zeta,$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= [R_p) + (-1)^p \int\limits_C e^{z\zeta} \frac{d^p(\zeta^r v)}{d\zeta^p} d\zeta,$$

следовательно,

$$L(W) = [R] + (-1)^p \int\limits_C \left\{ a_0 \frac{d^p(\zeta^n v)}{d\zeta^p} + a_1 \frac{d^{p-1}(\zeta^{n-1} v)}{d\zeta^{p-1}} + \ldots \right\} e^{z\zeta} d\zeta,$$

---

[1] Ранг особой точки в бесконечности поэтому не больше единицы.

где R — ряд членов вида

$$e^{z\zeta}\frac{d^s(\zeta^r v)}{d\zeta^s} \qquad \begin{pmatrix} s=0,\,1,\,2,\ldots,p-1 \\ r=0,\,1,\,2,\ldots,n \end{pmatrix},$$

коэфициенты которого полиномы от z.

Таким образом, если интеграл W является решением данного диференциального уравнения, то необходимо, чтобы функция $v(z)$ удовлетворяла диференциальному уравнению

$$(a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_n)\frac{d^p v}{d\zeta^p} + \ldots = 0.$$

Следовательно, определение контурного интеграла, удовлетворяющего данному диференциальному уравнению, зависит (I) от решения присоединенного уравнения порядка p и (II) от определения контура C таким образом, чтобы $[R]$ было равно тождественно нулю относительно z. Докажем, что n независимых интегралов рассмотренного типа действительно существуют[1].

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будут корнями уравнения

$$a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

тогда $\zeta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — особые точки диференциального уравнения относительно v. Каждая из этих особых точек регулярная, и относительно каждой особенности α_r имеются $n-1$ решений, аналитических в соседстве с этой особенностью, и одно неаналитическое решение

$$v = (\zeta - \alpha_r)^{\lambda_r}\varphi_r(\zeta),$$

где функция $\varphi_r(\zeta)$ аналитическая вблизи α_r. Рассмотрим это неаналитическое решение v. Пусть z стремится к бесконечности вдоль прямой линии l, проведенной в отрицательном направлении параллельно оси вещественных чисел. Тогда, незначительно видоизменяя теорему Ляпунова (§ 6·6), найдем, что положительное число μ существует таким образом, что

$$ve^{\mu\zeta},\ \frac{dw}{d\zeta}e^{\mu\zeta},\ \ldots,\ \frac{d^n v}{d\zeta^n}e^{\mu\zeta}$$

стремятся к нулю, когда $\mathrm{R}(\zeta) \to -\infty$. То же очевидно верно, независимо от значения ν, и в отношении

$$v\zeta^\nu e^{\mu\zeta},\ \frac{dv}{d\zeta}\zeta^\nu e^{\mu\zeta},\ \ldots,\ \frac{d^n v}{d\zeta^n}\zeta^\nu e^{\mu\zeta}.$$

Следовательно, если $\mathrm{R}(z)$ — положительно и достаточно велико, а контур C представляет собою петлю, начинающуюся и заканчивающуюся в точке на бесконечности линии l, и окружающую точку α_r, то $[R]$ обратится в нуль независимо от z.

---

[1] Poincaré, Am. J. Math. 7 (1885), 217.

Таким образом существует n интегралов

$$W_1,\ W_2, \ldots, W_n,$$

так что интеграл W_r соответствует точке a_r. Более того, как в § 18·2, отсюда следует, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не положительные целые числа, то

$$W_1 e^{-a_1 z} z^{\lambda_1+1}, \ldots, W_n e^{-a_n z} z^{\lambda_n+1}$$

стремятся к пределам не равным нулю, когда z приближается к $+\infty$ вдоль вещественной оси. Таким образом приведенный анализ включает также и более общий случай.

18·21. Асимптотические представления. Контурные интегралы, полученные в предыдущем параграфе, приводят непосредственно к асимптотическим представлениям решений[1]. Отсюда следует, как в § 18·12, что если W — контурный интеграл

$$\int_C e^{z\zeta} \zeta^{\lambda} \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

то

$$W e^{-az} z^{\lambda-1} = z^{\lambda+1} \int_C \{A_0 + A_1\zeta + \ldots + A_m\zeta^m\} \zeta^{\lambda} e^{z\zeta} d\zeta +$$

$$+ z^{\lambda+1} \int_C R\zeta^{\lambda+m+1} e^{z\zeta} d\zeta.$$

Вдоль прямолинейных частей контура интеграл, так же как и его произведение на любую произвольную степень z, стремится к нулю, когда $\mathrm{R}(z) \to +\infty$. Важной частью контура является малый круг γ, окружающий начало в отрицательном направлении. Теперь, если r — положительное целое число, то

$$z^{\lambda+r+1} \int_{\gamma} \zeta^{\lambda+r} e^{z\zeta} d\zeta = (-1)^r 2i \sin\lambda\pi\,\Gamma(\lambda+r+1)$$

и

$$\left| z^{\lambda+1} \int_{\gamma} R\zeta^{\lambda+m+1} e^{z\zeta} d\zeta \right| < K \left| z^{-m-1} \right|,$$

где K не зависит от z.

Пусть

$$S_m = 2i \sin\lambda\pi \{A_0\Gamma(\lambda+1) - A_1\Gamma(\lambda+2) z^{-1} + \ldots \pm$$

$$\pm A_m \Gamma(\lambda+m+1) z^{-m}\},$$

тогда

$$z^m (W e^{-az} z^{\lambda+1} - S_m) \to 0$$

когда $z \to \infty$ вдоль вещественной оси. Следовательно $e^{az} z^{-\lambda-1} S_m$

---

[1] Poincaré, Acta Math., 8 (1886), 295.

является асимптотическим представлением интеграла W, т. е.

$$W \sim 2i \sin \lambda\pi e^{\alpha z}\left\{\frac{A_0\Gamma(\lambda+1)}{z^{\lambda+1}} - \frac{A_1\Gamma(\lambda+2)}{z^{\lambda+2}} + \ldots \pm \frac{A_m\Gamma(\lambda+m+1)}{z^{\lambda+m+1}} \mp \ldots\right\}.$$

Этот асимптотический ряд формально идентичен ряду, полученному при исследовании уравнения для получения нормального решения. Таким образом, если этот нормальный ряд не ограничен и не дает нормального решения, то он дает асимптотическое представление решения.

В предыдущем исследовании мы приняли, что z стремится к бесконечности вдоль вещественной оси. Это ограничение было принято только для упрощения, однако нет разницы также в том случае, когда z стремится к бесконечности вдоль любого луча определенного аргумента. Ряд S_m не может быть асимптотическим представлением функции $We^{-\alpha z} z^{\lambda+1}$ для всех значений аргумента, так как, если бы

$$z^m \{We^{-\alpha z} z^{\lambda+1} - S_m\}$$

стремилось *равномерно* к нулю для достаточно больших значений $|z|$, то $We^{-\alpha z}z^{\lambda+1}$ было бы аналитическим, а представление в виде ряда сходилось бы, что, по крайней мере в общем случае, неверно. В действительности, когда $\arg z$ увеличивается, то решение, которое S_m асимптотически представляет, внезапно меняется. Таким образом, если решение разложено асимптотически, то существенно определить пределы $\arg z$, между которыми представление имеет смысл [1].

18·3. Уравнения ранга выше первого; косвенная трактовка. Выше мы получили точное решение уравнений первого ранга при помощи интеграла Лапласа. Ограничение, чтобы ранг не превышал единицы, является существенным; если уравнение выше первого ранга, то метод совершенно неприменим. Покажем, что уравнение порядка s больше единицы может быть заменено уравнением первого порядка и ранга, которое, в свою очередь, может быть решено при помощи интеграла Лапласа [2]. Непосредственный метод получения решения будет дан в одном из следующих параграфов [3].

Пусть уравнение имеет вид

$$P_0 \frac{d^n w}{dz^n} + P_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dw}{dz} + P_n w = 0,$$

где коэфициенты — полиномы от z, и пусть P_r будет степени K_r. Тогда, если уравнение имеет нормальные решения порядка

---

[1] См. пример § 18·61 и сравни с §§ 19·5, 19·6.

[2] Пуанкаре [Acta Math., 8 (1886), 328] впервые описал метод и подробно рассмотрел случай уравнения второго порядка. Горн [Acta Math., 23 (1900), 171] продолжил анализ в случае уравнения второго порядка и ранга p.

[3] 18·31; см. также §§ 19·41, 19·42.

s в бесконечности, то

$$K_r \leqslant K_0 + r(s-1),$$

а знак равенства верен по меньшей мере один раз для $r \geqslant 1$.

Пусть

$$w_1(z),\ w_2(z), \ldots,\ w_n(z)$$

будут n независимыми нормальными решениями и пусть

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{s}}.$$

Образуем все возможные произведения, каждое состоящее из s множителей, так, чтобы

$$v = w_\alpha(z)\, w_\beta(\omega z) \ldots w_\mu(\omega^{s-1} z),$$

где индексы $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ принимают любые значения $1, 2, \ldots, n$. Число N независимых произведений равно n^s, а произведения удовлетворяют диференциальному уравнению типа

$$Q_0 \frac{d^N v}{dz^N} + Q_1 \frac{d^{N-1} v}{dz^{N-1}} + \ldots + Q_{N-1} \frac{dv}{dz} + Q_N v = 0,$$

коэфициенты которого полиномы от z; v — нормальное решение порядка s, откуда, если θ_r — степень Q_r, то

$$\theta_r \leqslant \theta_0 + r(s-1).$$

Если вместо z подставить ωz, $\omega^2 z, \ldots$ или $\omega^{s-1} z$, то произведения могут взаимно переставляться, поэтому уравнение останется неизмененным. Следовательно можно найти такое число m, чтобы

$$Q_r(z) = z^{m-r} q_r(z^s), \qquad (r = 0, 1, \ldots, N)$$

где $q_r(z^s)$ — полином от z^s. Уравнение относительно v можно поэтому написать в виде

$$q_0(z^s)\, z^N \frac{d^N v}{dz^N} + \ldots + q_{N-1}(z^s)\, z \frac{dv}{dz} + q_N(z^s)\, v = 0.$$

Теперь пусть $z^s = \zeta$, тогда $z^r \dfrac{d^r v}{dz^r}$ будет линейным выражением относительно

$$\zeta^r \frac{d^r v}{d\zeta^r},\ \zeta^{r-1} \frac{d^{r-1} v}{d\zeta^{r-1}}, \ldots,\ \zeta \frac{dv}{d\zeta}$$

с постоянными коэфициентами. Уравнение, следовательно, примет вид

$$R_0 \frac{d^N v}{d\zeta^N} + R_1 \frac{d^{N-1} v}{d\zeta^{N-1}} + \ldots + R_{N-1} \frac{dv}{d\zeta} + R_N v = 0,$$

где коэфициенты являются полиномами от ζ.

Если η_r — степень q_r в z^s, то

$$\theta_r = m - r + s\eta_r,$$

откуда

$$\eta_r \leqslant \eta_0 + r.$$

Теперь, степень R_r равна степени высшего члена

$$\zeta^N q_0(\zeta), \quad \zeta^{N-1} q_1(\zeta), \ldots, \quad \zeta^{N-r} q_r(\zeta),$$

и является наибольшим из чисел

$$N + \eta_0, \ N - 1 + \eta_1, \ldots, \ N - r + \eta_r,$$

т. е. $N + \eta_0$. Следовательно, степень каждого из коэфициентов $R_1, \ldots, R_N$ не больше степени R_0, поэтому уравнение будет первого ранга и v может быть выражено в виде интеграла Лапласа.

Остается вывести w из v. Пусть

$$w = \varphi_1(z)$$

будет искомым решением; напишем

$$\varphi_r(z) = \varphi_1(z\omega^{r-1}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

тогда уравнение относительно v удовлетворится произведением

$$v = \varphi_1(z)\,\varphi_2(z) \ldots \varphi_s(z).$$

Образуем первые N производных от v; поскольку $\varphi_1^{(N)}(z)$ и высшие производные могут быть выражены при помощи первых $N-1$ производных, мы получим всего $N+1$ уравнений вида

$$\frac{d^r v}{dz^r} = \sum Z_{r, \alpha, \beta, \ldots, \mu} \frac{d^\alpha \varphi_1}{dz^\alpha} \cdot \frac{d^\beta \varphi_2}{dz^\beta} \ldots \frac{d^\mu \varphi_s}{dz^\mu}$$

$(r = 0, 1, \ldots, N)$, где коэфициенты Z — рациональные функции от z. Если мы из этих уравнений исключим N произведений $\frac{d^\alpha \varphi_1}{dz^\alpha} \cdot \frac{d^\beta \varphi_2}{dz^\beta} \ldots \frac{d^\mu \varphi_s}{dz^\mu}$, то получим диференциальное уравнение порядка N относительно v.

Рассмотрим теперь только первые N уравнений, в которых r имеет значения $0, 1, \ldots, N-1$. Из этих уравнений любое из N произведений может быть выражено через $v, v', \ldots, v^{(N-1)}$. В частности

$$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) \ldots \varphi_s(z) = v, \quad \varphi_1'(z)\,\varphi_2(z) \ldots \varphi_s(z) = \Phi,$$

где Φ — линейное выражение относительно $v, v', \ldots, v^{(N-1)}$, коэфициенты которых — рациональные функции от z[1]. Отсюда

$$\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{\Phi}{v}$$

---

[1] Случай, когда детерминант коэфициентов Z обращается в нуль, был рассмотрен Пуанкаре в указанной выше статье. В этом случае Φ не рациональное, но алгебраическое выражение относительно $z, v, v', \ldots, v^{(N-1)}$.

и, следовательно, если v известно, то $w = \varphi_1(z)$ получается в квадратурах.

18·301. Пример приведения к первому рангу. Рассмотрим уравнение

$$z\frac{d^2w}{dz^2} - (z^3+1)w = 0$$

второго ранга относительно точки в бесконечности. Если $w = \varphi(z)$ — является решением, то $w_1 = \varphi(-z)$ удовлетворяет уравнению

$$z\frac{d^2w_1}{dz^2} - (z^3-1)w_1 = 0.$$

Пусть $v = ww_1$, тогда

$$v' = w'w_1 + ww_1',$$

$$v'' = w''w_1 + 2w'w_1' + ww_1'' = 2z^3ww_1 + 2w'w_1',$$

$$v''' = 4zww_1 + \left\{4z^2 + \frac{2}{z}\right\}ww_1' + \left\{4z^2 - \frac{2}{z}\right\}w'w_1,$$

$$v^{\mathrm{IV}} = \left\{8z^4 + 4 - \frac{4}{z^2}\right\}ww_1 + \left\{12z - \frac{2}{z^2}\right\}ww_1' + \left\{12z + \frac{2}{z^2}\right\}w'w_1 + 8z^2w'w_1'.$$

Исключая ww_1, $w'w_1$, ww_1' и $w'w_1'$, найдем, что уравнение, удовлетворяемое v, имеет вид

$$z^2\frac{d^4v}{dz^4} + z\frac{d^3v}{dz^3} - 4z^4\frac{d^2v}{dz^2} - 16z^3\frac{dv}{dz} - (8z^4-4)v = 0$$

и второго ранга. Но если мы его преобразуем подстановкой $z^2 = \zeta$, то оно примет вид

$$4\zeta^3\frac{d^4v}{d\zeta^4} + 14\zeta^2\frac{d^3v}{d\zeta^3} - (4\zeta^3+6\zeta)\frac{d^2v}{d\zeta^2} - 10\zeta^2\frac{dv}{d\zeta} - (2\zeta-1)v = 0$$

и будет первого ранга.

18·31. Уравнения ранга выше первого. Если уравнение ранга $p > 1$, то интегральное представление решений, замещающее интеграл Лапласа, будет иметь вид [1]

$$w = \int \ldots \int e^{\zeta_1 z + \frac{1}{2}\zeta_2 z^2 + \ldots + \zeta_p z^p/p} Z\,d\zeta_1 \ldots d\zeta_p,$$

где Z — функция от $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$. Рассмотрим это представление в случае $p = 2$; более общий случай значительно сложнее.

Пусть уравнение будет иметь вид

$$L(w) \equiv p_0(z)\frac{d^nw}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dw}{dz} + p_n(z)w = 0,$$

---

[1] Cunningham, Proc. London Math., Soc. (2), 4 (1906), 374. Нужно отметить что определение ранга Куннингамом несколько отличается от принятого.

где коэфициенты — полиномы от z, а степень $p_r(z)$ больше степени $p_0(z)$ на r. Пусть $p_0(z)$ имеет четную степень[1] λ и пусть $\lambda + 2n = 2m$.

Посмотрим, возможно ли удовлетворить уравнение двойным интегралом вида

$$w = \int\int e^{tz+\frac{1}{2}uz^2} U\,du\,dt,$$

где U — искомая функция от u и t, а контуры u и t не зависят от z. Далее

$$\frac{dw}{dz} = \int\int e^{tz+\frac{1}{2}uz^2}(t+uz)\,U\,du\,dt,$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \int\int e^{tz+\frac{1}{2}uz^2}\{(t+uz)^2+u\}\,U\,du\,dt,$$

и в общем случае

$$\frac{d^rw}{dz^r} = \int\int e^{tz+\frac{1}{2}uz^2}\omega_r U\,du\,dt,$$

где

$$\omega_r = \frac{\partial\omega_{r-1}}{\partial z} + \omega_1\omega_{r-1}.$$

Нужно отметить, что ω_r — полином вида

$$(t+uz)^r + \frac{r(r-1)}{2}u\,(t+uz)^{r-2} +$$
$$+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{8}u^2(t+uz)^{r-4} + \ldots;$$

коэфициент $(t+uz)^{r-\nu}$ равен нулю, когда ν нечетное, и равняется постоянной, помноженной на $u^{\frac{1}{2}\nu}$, когда ν четное.

Таким образом

$$z^nL(w) = \int\int e^{tz+\frac{1}{2}uz^2}\Pi(t,\ u,\ z)\,U\,du\,dt,$$

где

$$\Pi(t,\ u,\ z) = z^n\{\omega_n p_0 + \omega_{n-1}p_1 + \ldots + \omega_1 p_{n-1} + p_n\}.$$

Теперь Π — полином от z степени $2m = \lambda + 2n$. Пусть a_{rs} будет коэфициентом при $z^{\lambda+r-s}$ в p_r, а B_s — коэфициентом при z^{2m-s} в Π, тогда

$$B_0 = a_{00}u^n + a_{10}u^{n-1} + \ldots + a_{n0},$$

$$B_1 = t\{na_{00}u^{n-1} + (n-1)a_{10}u^{n-2} + \ldots + a_{n-1,0}\} +$$
$$+\{a_{01}u^n + a_{11}u^{n-1} + \ldots + a_{n1}\},$$

[1] Если $p_0(z)$ нечетной степени, то левую часть уравнения нужно умножить на z.

и в общем случае

$$B_r = t^r \{{}_nC_r a_{00} u^{n-r} + {}_{n-1}C_r a_{10} u^{n-r-1} + \ldots\} + \sum_{s=1}^{r} t^{r-s} B_{rs}(u),$$

где $B_{rs}(u)$ — полином от u степени не больше $n-r+s$.

Таким образом

$$B_r = \frac{t^r}{r!}\frac{\partial^r B_0}{\partial u^r} + \sum_{s=1}^{r} t^{r-s} B_{rs}(u).$$

Простое интегрирование относительно u и t дает

$$\iint e^{tz+\frac{1}{2}uz^2} z^r U\,du\,dt =$$

$$= \int e^{tz}\left[2e^{\frac{1}{2}uz^2} z^{r-2} U\right]_u dt - 2\iint e^{tz+\frac{1}{2}uz^2} z^{r-2}\frac{\partial U}{\partial u}\,du\,dt$$

$$= \int e^{\frac{1}{2}uz^2}\left[e^{tz} z^{r-1} U\right]_t du - 2\iint e^{tz+\frac{1}{2}uz^2} z^{r-1}\frac{\partial U}{\partial t}\,du\,dt,$$

где скобки обозначают разность между конечными и начальными значениями после того как был описан контур u или контур t. Простые интегралы, содержащие эти скобки, назовем полуинтегрированными членами.

Это приведение прилагается несколько раз к $z^n L(w)$, так что последнее приводится наконец к виду

$$\iint e^{tz+\frac{1}{2}uz^2} M(U,\ u,\ t)\,du\,dt + [R],$$

где $[R]$ обозначает совокупность полуинтегрированных членов. Таким образом, для того, чтобы рассматриваемый интеграл удовлетворял диференциальному уравнению, необходимо, чтобы функция $U(u,\ t)$ удовлетворяла *диференциальному уравнению в частных производных*

$$M(U,\ u,\ t) = 0,$$

а также, чтобы контуры были выбраны таким образом, чтобы $[R]$ обратилось в нуль тождественно. Если эти условия удовлетворены и интеграл существует, то он дает решение данного уравнения.

Высшая степень z в $\Pi(t,\ u,\ z)$ равна z^{2m}, она может быть приведена посредством m последовательных интегрирований относительно u, добавляя, таким образом к $M(U,\ u,\ t)$, выражение

$$(-2)^m\frac{\partial^m(B_0U)}{\partial u^m}.$$

Аналогично, член z^{2m-1} приводится посредством $m-1$ интегрирований относительно u и одного интегрирования относительно t и дает выражение

$$-(-2)^{m-1}\frac{\partial^m(B_1U)}{\partial u^{m-1}\,\partial t}.$$

Остальные члены могут быть приведены аналогично; если произвести достаточное число интегрирований относительно u, то ни одна частная производная не должна быть порядка выше m[1].

Диференциальное уравнение в частных производных, удовлетворяемое U, будет, следовательно, иметь вид

$$B_0 \frac{\partial^m U}{\partial u^m} = \sum A_{rs} \frac{\partial^{r+s} U}{\partial u^r \, \partial t^s} \qquad (r = 0,\ 1, \ldots, m-1;\ r+s \leqslant m),$$

где коэфициенты A_{rs} — полиномы относительно u и t. Пусть $u = \alpha$ будет некратным корнем[2] уравнения $B_0 = 0$, тогда как и при обыкновенном линейном уравнении точка $u = \alpha$ будет особой точкой решения диференциального уравнения в частных производных. Покажем, что это уравнение допускает решение, которое может быть выражено в виде сходящегося двойного ряда.

18·32. Определение функции U. Поскольку $u = \alpha$ — простой корень уравнения

$$a_{00} u^n + a_{10} u^{n-1} + \ldots + a_{n-1,0}\, u + a_{n0} = 0,$$

отсюда следует, что если

$$n a_{00} \alpha^n + (n-1)\, a_{10} \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1,0} = \beta,$$

то $\beta \neq 0$. Предположим, что

$$a_{01} \alpha^n + a_{11} \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n1} = \gamma,$$

и напишем

$$v = u - \alpha, \quad s = t + \gamma/\beta,$$

тогда член в B_1, который не содержит v, будет равен βs.

Теперь

$$L(w) = e^{-\frac{1}{2}\alpha z^2 - \gamma z/\beta} \iint e^{-\frac{1}{2} v z^2 + s z}\, U \Phi(s,\ v,\ z)\, dv\, ds,$$

где

$$\Phi(s,\ v,\ z) \equiv \Pi(t,\ u,\ z).$$

Член в $z^\varkappa v^\lambda s^\mu$ приводится к члену, не зависимому от z, посредством μ или $\mu + 1$ интегрирований относительно s вместе с $\frac{1}{2}(\varkappa - \mu)$ или $\frac{1}{2}(\varkappa - \mu - 1)$ интегрирований относительно v, в зависимости от того, $\varkappa - \mu$ четное или нечетное. Нужно отме-

---

[1] Нужно отметить, что уравнение $M(U,\ u,\ t) = 0$ не определяется единственно, так как при приведении последних членов имеется некоторая свобода выбора в отношении того, когда производить интегрирование относительно u и когда относительно t.

[2] Случай кратного корня требует несколько утомительного анализа, и не представляет особого интереса.

тить, что поскольку Ф содержит множитель z, $\varkappa$ по меньшей мере равно n; μ не больше n, поэтому $\varkappa - \mu$ — положительное целое число или нуль.

Пусть $(s, v)_{r,n}$ обозначает полином степени r относительно s, и степени n относительно v, тогда диференциальное уравнение относительно U будет иметь вид

$$(-2)^m \frac{\partial^m}{\partial v^m} \{B_0 U\} - (-2)^{m-1} \frac{\partial^m}{\partial v^{m-1} \partial s} \{\beta s U + v (s, v)_{1, n-1} U\} +$$

$$+ (-2)^{m-2} \frac{\partial^m}{\partial v^{m-2} \partial s^2} \{(s, v)_{2,n} U\} - (-2)^{m-3} \frac{\partial^m}{\partial v^{m-3} \partial s^3} \{(s, v)_{3,n} U\} +$$
$$+ \ldots = 0,$$

или, при разложении,

$$2B_0 \frac{\partial^m U}{\partial v^m} + \{\beta s + v (s, v)_{1, n-1}\} \frac{\partial^m U}{\partial v^{m-1} \partial s} +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n+1} \sum_{\mu=2}^{m} \{s^{\nu} (1, v)_n + s^{\nu-1} (1, v)_n\} \frac{\partial^{m-\mu+\nu} U}{\partial v^{m-\mu} \partial s^{\nu}} = 0,$$

где выражения $(1, v)_n$ обозначают полиномы от v степени n. Примем решение вида

$$U = v \{f_0(s) + v f_1(s) + v^2 f_2(s) + \ldots\};$$

тогда, если $[\rho]_m = \rho(\rho - 1) \ldots (\rho - m + 1)$, функции f будут удовлетворять рекуррентным соотношениям

$$2 [\rho]_m \beta f_0 + [\rho]_{m-1} \beta s \frac{df_0}{ds} + [\rho]_{m-1} a_0 f_0 = 0,$$

$$2 [\rho + 1]_m \beta f_1 + [\rho + 1]_{m-1} \beta s \frac{df_1}{ds} + [\rho + 1]_{m-1} a_0 f_1 = (a_1 s^2 + b_1 s) \frac{d^2 f_0}{ds^2} +$$
$$+ (c_0 s + d_0) \frac{df_0}{ds} + e_0 f_0,$$

. . . .

где a_0, a_1, b_1, c_0, ... — постоянные, входящие в диференциальное уравнение.

Первое рекуррентное соотношение приводится к виду

$$s \frac{df_0}{ds} + \left\{ 2(\rho - m + 1) + \frac{a_0}{\beta} \right\} f_0 = 0$$

и удовлетворяется соотношением

$$f_0 = s^{-\sigma},$$

где

$$\sigma = 2(\rho - m + 1) + \frac{a_0}{\beta}.$$

Второе рекуррентное соотношение тогда примет вид

$$s\frac{df_1}{ds}+(\sigma+2)f_1=A_1s^{-\sigma}+A_2s^{-\sigma-1},$$

где A_1 и A_2 — определенные постоянные, зависящие от σ. Следовательно,

$$f_1=s^{-\sigma}\left(\frac{1}{2}A_1+A_2s^{-1}\right)$$

и

$$f_r=s^{-\sigma}g_r(s^{-1}),$$

где $g_r(s^{-1})$ — полином от s^{-1} степени r.

Докажем, что формальное решение

$$U=v^\rho s^{-\sigma}\{1+vg_1(s^{-1})+\ldots+v^rg_r(s^{-1})+\ldots\}$$

сходится внутри любого конечного круга $|v|=\gamma$ для всех значений $|s|$, которые больше фиксированного числа s_0. Мы не потеряем в общности, если примем, что $p=0$, $\alpha=0$, так как форма ряда $\sum g_r(s)$ одинакова во всех случаях. Для упрощения предположим, что $s^{-1}=t$; тогда диференциальное уравнение в частных производных для U примет вид

$$2B_0\frac{\partial^m U}{\partial v^m}-\{\beta t+vt(t,\ v)_{1,n-1}\}\frac{\partial^m U}{\partial v^{m-1}\,\partial t}+$$

$$+\sum\sum\{t^\nu(1,\ v)_n+t^{\nu+1}(1,\ v)_n\}\frac{\partial^{m-\mu+\nu}U}{\partial v^{m-\mu}\,\partial t^\nu}=0.$$

Его решение может быть разложено в ряд

$$U=1+vg_1(t)+\ldots+v^rg_r(t)+\ldots,$$

коэфициенты которого $g_r(t)$ — полиномы, определяемые соотношениями вида

$$-t\frac{dg_r}{dt}+2rg_r=\sum_{(h)}\sum_{k=0}^{r-1}(a_{hk}t^h+b_{hk}t^{h+1})\frac{d^hg_k}{dt^h},$$

где a_{hk} и b_{hk} — постоянные.

Если полиномы $\varphi_r(t)$ определяются соотношениями

$$-t\frac{d\varphi_r}{dt}+2r\varphi_r=\sum_{(h)}\sum_{k=0}^{r-1}(|a_{hk}|t^h+|b_{hk}|t^{h+1})\frac{d^h\varphi_k}{dt^h},$$

где $\varphi_0=g_0=1$, то коэфициенты $\varphi_r(t)$ будут модулями соответствующих коэфициентов $g_r(t)$, и следовательно

$$|g_r^{(h)}(t)|\leqslant|\varphi_r^{(h)}(t)|$$

для всех значений t. Рассмотрим также последовательность функций $\psi_r(t)=c_r t^r$, где

$$-t\frac{d\psi_r}{dt}+2s\psi_r=\sum_{(h)}\sum_{k=0}^{r-1}(|a_{hk}|+|b_{hk}|)\,t^{h+1}\frac{d^h\psi_k}{dt^h};$$

коэфициенты c_r положительные, если $c_0=1$. Если $|t|>1$ и если

$$\left|\frac{d^h\psi_k}{dt^h}\right|\geqslant\left|\frac{d^h\varphi_k}{dt^h}\right|\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

то

$$|\psi_r|\geqslant|\varphi_r|.$$

Поэтому, по индукции, для всех значений r и для $|t|>1$,

$$|\psi_r|\geqslant|\varphi_r|\geqslant g_r|.$$

Но $\psi_r=c_r t^r$, а φ_r — полином степени r с положительными коэфициентами, откуда

$$\left|\frac{d^h\psi_r}{dt^h}\right|\geqslant\left|\frac{d^h\varphi_r}{dt^h}\right|$$

для $h=1,\ 2,\ \ldots,\ r$, следовательно

$$\left|\frac{d^h\psi_r}{dt^h}\right|\geqslant\left|\frac{d^h g_r}{dt^h}\right|.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\begin{aligned}V&=1+v\psi_1+v^2\psi_2+\ldots\\&=1+c_1vt+c_2v^2t^2+\ldots;\end{aligned}$$

оно удовлетворяет диференциальному уравнению в частных производных вида

$$\frac{\partial^m V}{\partial v^m}-2t\frac{\partial^m V}{\partial v^{m-1}\,\partial t}=\sum\sum t^{h+1}P_{hk}(v)\frac{\partial^{m-k+h}V}{\partial v^{m-k}\,\partial t^h},$$

где $P_{hk}(v)$ — степенной ряд относительно v, который сходится внутри круга $|v|=\delta$, где δ — модуль нуля $B_0(v)$, ближайший к началу. Следовательно, если $vt=\zeta$, то $V(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному диференциальному уравнению вида

$$t^m\frac{d^m V}{d\zeta^m}=\sum_{r=1}^{m}Q_r(\zeta,\ t)\frac{d^{m-r}V}{d\zeta^{m-r}},$$

где Q_r может быть разложен в степенной ряд по ζ, который сходится для $|\zeta|<\delta t$, поэтому ряд V сходится для $|\zeta|<\delta t$, т. е, для $|v|<\delta$.

Отсюда следует, что ряд

$$1 + vg_1(t) + v^2 g_2(t) + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно, если $|v| < \delta$ и если $|t|$ конечно и больше единицы. Но поскольку коэфициенты $g_r(t)$ — полиномы от t, ряд сходится также при $|t| < 1$.

Таким образом функция $U(v, s)$ может быть представлена двойным рядом, который сходится для всех ненулевых значений s, включая значение $s = \infty$, и для $|v| < \delta$. Остается доказать, что контуры в плоскостях s и v могут быть выбраны таким образом, чтобы двойной интеграл существовал, а полуинтегрированная часть $[R]$ обратилась в нуль.

18·33. Завершение доказательства. Ряд для V удовлетворяет линейному диференциальному уравнению в частных производных, коэфициенты которого $P_{hk}(v)$ могут быть разложены в степенной ряд по $(v - c)$, где c не является нулем $B_0(v)$. Его решения могут быть аналогично разложены и сходятся внутри круга $|v - c| = \eta$, где η — расстояние от c до ближайшего нуля $B_0(v)$. Отсюда следует, что V допускает аналитическое продолжение в некоторой замкнутой области в плоскости v, не содержащей нулей $B_0(v)$[1]. То же верно и в отношении производных V относительно v и t.

Если $|t| > 1$, то коэфициенты разложения V являются главными функциями, так как коэфициенты разложения для U, следовательно и U и ее производные допускают аналитическое продолжение.

Если мы будем рассматривать источник коэфициентов $P_{hk}(v)$ в диференциальном уравнении в частных производных для V, то увидим, что эти коэфициенты, следовательно и коэфициенты $Q_r(\zeta, t)$, в обыкновенном уравнении для V ограничены при $v = \infty$. Поэтому, если $|t| > 1$, число λ может быть выбрано таким, чтобы, когда v стремится к бесконечности в определенном направлении,

$$e^{-\lambda v t}\, V \to 0,$$

поэтому

$$e^{-\lambda v t}\, U \to 0.$$

Следовательно, если $1 < |t| < \tau$ и если v стремится к бесконечности, так что $\mathrm{R}(vz^2)$ положительно, то

$$e^{-\frac{1}{2} v z^2}\, U \to 0.$$

Но поскольку U абсолютно сходящийся ряд положительных степеней t, отсюда следует, что ограничение $1 < t$ может быть устранено и результат будет верен для $0 \leqslant t < \tau$. При тех же условиях

$$e^{-\frac{1}{2} v z^2} \frac{\partial^{h+k} U}{\partial v^h\, \partial t^k} \to 0.$$

[1] Доказательство аналогично приведенному в § 12·3.

Следовательно, если $|s| > s_0 = \tau^{-1}$, когда $|v| \to \infty$, то

$$e^{-\frac{1}{2}vz^2} \frac{\partial^{h+k} U}{\partial v^h \partial s^k} \to 0,$$

и аналогично, когда $|s| \to \infty$, то

$$e^{-sz} \frac{\partial^{h+k} U}{\partial v^h \partial s^k} \to 0,$$

если

$$\mathbf{R}(vz^2) > 0, \quad \mathbf{R}(sz) \to 0.$$

Таким образом всегда можно найти контуры в плоскостях v и s, окружающие точки $v=0$ и $s=0$ и простирающиеся в бесконечность в соответствующих направлениях, так, чтобы двойной интеграл

$$\int\int e^{sz+\frac{1}{2}vz^2}\, U\, dv\, ds$$

существовал и чтобы полуинтегрированный член $[R]$ обратился в нуль в бесконечных пределах интегрирования.

Следовательно, двойной интеграл

$$w = e^{\frac{1}{2}\alpha z^2 - \beta z/\gamma} \int\int e^{sz+\frac{1}{2}vz^2} v^{\rho} s^{-\sigma} \times$$
$$\times \{1 + vg_1(s^{-1}) + v^2 g_2(s^{-1}) + \ldots\} dv\, ds$$

является решением данного диференциального уравнения второго ранга. Не учитывая экспоненциального множителя, интегральное решение состоит из членов вида

$$\int\int e^{sz+\frac{1}{2}vz^2} v^{\rho+h-1} s^{-\sigma-k+1} dv\, ds$$
$$= 2^{\rho+k} z^{\sigma+k-2(\rho+h)} \int\int e^{\xi+\eta} \xi^{\rho+h-1} \eta^{-\sigma-k+1} d\xi\, d\eta \quad (h = 1, 2, \ldots;\ k \leqslant h).$$

Пусть контуры в плоскостях ξ и η будут петлями, окружающими начало и проходящими в бесконечность вдоль отрицательной вещественной оси. Тогда рассматриваемый член будет вида

$$z^{\sigma+k-2\rho-2h}\, \Gamma(\rho+h)\, \Gamma(-\sigma-k),$$
$$\frac{\Gamma(\rho+h)}{\Gamma(\sigma+k+1)} z^{-2m+a_0/\beta-2h+k+2} \qquad (k = 1, \ldots, h).$$

Отсюда

$$w = e^{\frac{1}{2}\alpha z^2 - \beta z/\gamma} z^{-2m+a_0/\beta+1} P(z^{-1}),$$

где $P(z^{-1})$ может быть формально разложено в ряд по возрастающим степеням z^{-1}. Но поскольку бесконечное число коэфициентов

$$\frac{\Gamma(\rho+h)}{\Gamma(\sigma+k+1)}$$

беспредельно увеличивается, когда $h \to 0$, ряд в общем случае расходится. Таким образом, если $P(z^{-1})$ неограничена, то разложение не даст решения уравнения. Однако можно доказать, что оно дает асимптотическое представление решения.

18·4. Интегралы Жордана и Похгаммера. Преобразование Эйлера (§ 8·31) дает эффективный метод исследования уравнения типа

$$L(w) \equiv Q(z)\frac{d^n w}{dz^n} - \mu Q'(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}Q''(z)\frac{d^{n-2}w}{dz^{n-2}} - \ldots$$

$$- R(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + (\mu+1)R'(z)\frac{d^{n-2}w}{dz^{n-2}} - \ldots = 0,$$

где функции $Q(z)$ и $R(z)$ полиномы, так что $Q(z)$ или $zR(z)$ степени n, в то время как степень другой функции не превышает n.

Жордан и Похгаммер подробно исследовали контурные интегралы, возникающие при этом преобразовании[1]; рассматривая различные возможные контуры интегрирования, можно в общем случае получить n независимых частных решений, которые вместе составили бы общее решение.

Рассмотрим интеграл

$$W(z) = \int_C (\zeta - z)^{\mu+n-1}\, U d\zeta,$$

где U — функция ζ, определяемая преобразованием Эйлера

$$\frac{d}{d\zeta}\{Q(\zeta)U\} = R(\zeta)U,$$

именно

$$U = \frac{1}{Q(\zeta)} e^{\int \frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta}.$$

Тогда

$$L\{W(z)\} = \int_C dV,$$

где

$$V = Z(\zeta)\,Q(\zeta)\,(\zeta - z)^{\mu} = (\zeta - z)^{\mu}\, e^{\int \frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta},$$

[1] Jordan, Cours d'Analyse, 3 (3 изд., 1915), 251; Pochhammer, Math. Ann., 35 (1889); 470, 495; 37 (1890), 500. Дальнейшее приложение метода см. Hobson, Phil. Trans. Roy. Soc. (A) 187 (1896), 493.

а контур C должен быть выбран таким образом, чтобы

$$\int_C dV = 0$$

независимо от z. Это условие удовлетворяется, если

(I) C — замкнутый контур, так что начальные и конечные значения V тождественны, или

(II) C — криволинейная дуга, так что V обращается в нуль в ее конечных точках.

В качестве общего принципа можно утверждать, что если $Q(z)$ полином степени n с неравными нулями, то имеются n контуров первого типа, по одному соответственно каждому нулю $Q(z)$, которые дают n независимых решений в виде контурных интегралов. С другой стороны, если $Q(z)$ степени n, но с кратными корнями, или степени меньше n, то число возможных независимых контуров первого типа меньше n, а недостающее число их возмещается контурами второго типа.

18·41. Контуры, связанные с нулями $Q(z)$. Пусть нули $Q(z)$ равны $a_1, \ldots, a_m$ $(m \leqslant n)$, тогда

$$\frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\alpha_r}{\zeta - a_r} + S(\zeta),$$

где в наиболее общем случае $S(\zeta)$ состоит из полинома от ζ с членами $(\zeta - a_r)^{-2}$, $(\zeta - a_r)^{-3}$ и т. д., следовательно,

$$V = Ke^{P(\zeta)}(\zeta - z)^{\mu} \prod_{r=1}^{m} (\zeta - a_r)^{\alpha_r},$$

где K — постоянная, а функция

$$P(\zeta) = \int S(\zeta)\, d\zeta$$

мероморфная во всей плоскости. Таким образом, когда ζ описывает простой замкнутый контур в положительном направлении вокруг точки a_r, V возвращается к своему первоначальному значению, умноженному на $e^{2\pi i \alpha_r}$.

Пусть O будет некоторой точкой в этой плоскости и пусть A_r обозначает петлю, начинающуюся и заканчивающуюся в O и окружающую точку a_r в положительном направлении. Пусть A_r^{-1} обозначает ту же петлю, описанную в обратном направлении. Рассмотрим теперь сложный или *двойной* контур $A_r A_s A_r^{-1} A_s^{-1}$, состоящей из петли A_r, петли A_s, петель A_r и A_s, проведенных в обратном направлении. Очевидно, когда ζ описывает этот контур, то V возвращается к O с начальным значением. На рис. 13 схематически показан двойной контур, состоящий из четырех параллельных линий, проведенных отдельно для ясности, которые совпадают на линии (a_r, a_s)[1] [точка O лежит на линии (a_r, a_s)].

Пусть W_r будет значением интеграла

$$\int (\zeta - z)^{\mu+n-1} U d\zeta,$$

где

$$U = Ke^{P(\zeta)} \frac{\prod_{r=1}^{m} (\zeta - a_r)^{\alpha_r}}{Q(\zeta)},$$

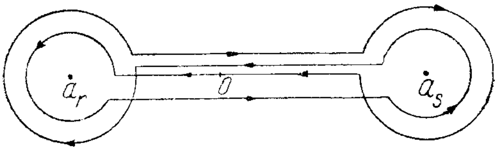


Рис. 13.

для контура A_r и для определенного начального значения подинтегрального выражения J_0. Пусть W_{rs} будет значением интеграла для сложного контура $A_r A_s A_r^{-1} A_s^{-1}$, тогда W_{rs} будет решением диференциального уравнения.

Посмотрим, что добавляет каждая из четырех петель к значению W_{rs}. Петля A_r дает W_r и после ее обхода конечное значение подинтегрального выражения равно $e^{2\pi i \alpha_r} J_0$. Это является начальным значением для петли A_s, которое поэтому добавляет к W_{rs} значение $e^{2\pi i \alpha_r} W_s$ и дает под интегралом $e^{2\pi i (\alpha_r + \alpha_s)} J_0$. Теперь, если бы петля A_r^{-1} была описана при начальном значении $e^{2\pi i \alpha_r} J_0$, то обход ее добавил бы $- W_r$ и конечное значение подинтегрального выражения было бы J_0. Однако в действительности имеется по отношению к этой петле начальное значение $e^{2\pi i (\alpha_r + \alpha_s)} J_0$; следовательно, к W_{rs} будет добавлено $-e^{2\pi i \alpha_s} \cdot W_r$ и конечное значение подинтегрального выражения будет $e^{2\pi i \alpha_s} J_0$. Наконец, петля A_s^{-1} добавляет $- W_s$ к $- W_{rs}$ и подинтегральное выражение возвращается к своему первоначальному значению J_0.

Все четыре петли, следовательно, дают

$$W_{rs} = (1 - e^{2\pi i \alpha_s}) W_r - (1 - e^{2\pi i \alpha_r}) W_s.$$

Таким образом

$$W_{rs} = - W_{sr},$$

откуда

$$(1 - e^{2\pi i \alpha_t}) W_{rs} = (1 - e^{2\pi i \alpha_r}) W_{st} + (1 - e^{2\pi i \alpha_s}) W_{rt}.$$

[1] Предполагается, что другие особые точки не лежат на линии.

Аналогичный контур можно построить относительно точек a_r, z. Пусть W_{rz} будет значением интеграла для этого контура, тогда

$$(1 - e^{2\pi i\mu}) W_{rs} = (1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_{sz} + (1 - e^{2\pi i\alpha_s}) W_{rz}$$

и поэтому все интегралы типа W_{rs} могут быть выражены линейно через интегралы W_{rz}. Следовательно, имеется не больше m линейно-независимых интегралов рассматриваемого типа.

18·42. Случай целых вычетов. Если какой-либо вычет α_r относительно $R(\zeta)/Q(\zeta)$ является целым числом, то этот метод неприменим. Так, пусть

$$\alpha_r = k,$$

где k — целое число, тогда в соотношении

$$W_{rz} = (1 - e^{2\pi i\mu}) W_r - (1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_z$$

$e^{2\pi i\alpha_r} - 1 = 0$, а $W_r \equiv 0$, вследствие того, что подинтегральное выражение является аналитическим на всем контуре A_r. Следовательно, W_{rz} тождественно равно нулю, а число независимых интегралов рассматриваемого типа меньше m. В этом случае недостающий интеграл можно получить следующим образом.

В интеграле W_{rz} подставим $k + \varepsilon$ вместо α_r, где ε — малая величина, тогда интеграл W_{rz} не обратится в нуль. Очевидно, интеграл можно разложить по степеням ε, и поскольку $[W_{rz}]_{\varepsilon=0} = 0$, это разложение будет иметь вид

$$W_{rz} = \varepsilon \left[\frac{dW_{rz}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2).$$

Диференциальное уравнение удовлетворяется выражением

$$\lim \frac{W_{rz}}{\varepsilon} = \left[\frac{dW_{rz}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = (1 - e^{2\pi i\mu}) \overline{W}_r + 2\pi i e^{2\pi ik} W_z,$$

где $\overline{W}_r$ — форма, которую принимает интеграл W_r, если член $(\zeta - a_r)^{\alpha_r}$ заменить на

$$\left[\frac{d}{d\alpha_r} (\zeta - a_r)^{\alpha_r}\right]_{\alpha_r=k} = (\zeta - a_r)^k \log (\zeta - a_r).$$

Если число независимых интегралов меньше m, то этот метод может быть использован для нахождения интегралов и приведения их общего числа к m.

18·43. Контуры, связанные с кратными нулями $Q(z)$. Пусть a будет нулем $Q(z)$ кратности k, тогда предыдущие методы дадут только одно интегральное решение, относящееся к этой точке. Выбирая контур таким образом, чтобы V обратилось в нуль в его конечных точках, получим дополнительную последовательность $k - 1$ независимых интегралов.

Предположим, что главная часть $R(\zeta)/Q(\zeta)$, относящаяся к $\zeta = a$, равна

$$\frac{\beta_k}{(\zeta-a)^k} + \ldots + \frac{\beta_1}{\zeta - a},$$

и напишем

$$\zeta - a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$-\frac{\beta_k}{k-1} = r(\cos t + i\sin t),$$

тогда

$$V = V_0(\zeta - a)^{\beta_1} e^{-\frac{\beta_k}{(k-1)(\zeta-a)^{k-1}} - \ldots} =$$

$$= V_0\rho^{\beta_1}(\cos\beta_1\varphi + i\sin\beta_1\varphi)\, e^{r\rho^{1-k}(\cos\omega + i\sin\omega) + \ldots},$$

где

$$\omega = t - (k-1)\varphi \qquad (k > 1),$$

а V_0 конечно (не равно нулю) в соседстве с $\zeta = a$. Экспоненциальный член

$$e^{r\rho^{1-k}\cos\{t-(k-1)\varphi\}}$$

доминирует в функции V, которая стремится к нулю или бесконечности, когда ρ стремится к нулю, в зависимости от того, является ли $\cos\{t - (k-1)\varphi\}$ отрицательным или положительным.

Уравнение

$$\cos\{t - (k-1)\varphi\} = 0$$

дает $2(k-1)$ расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга значений φ в интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Если через точку a провести лучи в соответствующих направлениях, то эти лучи разделят плоскость на $2(k-1)$ секторов с равными углами. Когда ζ стремится к a в различных секторах, V стремится попеременно к нулю и бесконечности. Назовем сектор, в котором V стремится к нулю, первым сектором, и пронумеруем соответственно остальные секторы.

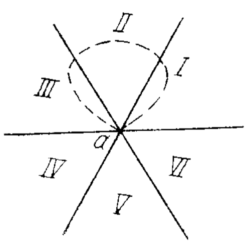


Рис. 14.

Рассмотрим простую кривую C, исходящую из точки a в первом секторе, пересекающую второй сектор на конечном расстоянии от a и возвращающуюся к a внутри третьего сектора (рис. 14). Поскольку V обращается в нуль в конечной точке C, эта кривая может быть принята в качестве контура интегрирования. Не теряя в общности, можно принять что контур C достаточно мал, чтобы не включать некоторой особой точки уравнения. Второй интеграл может быть получен проведением второго контура от третьего сектора к пятому и т. д., до тех пор, пока мы, наконец, получим $k-1$ новых интегралов. Таким образом корню $Q(z)$ кратности k соответствует k решений уравнения в виде контурных интегралов[1].

18·44. $Q(z)$ степени меньше n. Предыдущее исследование приводит к независимым контурным интегралам, равным по числу степени $Q(z)$. Если эта степень равна n, то исследование завершено; если степень меньше n, то необходимо найти еще дополнительные интегралы для доведения общего числа их до n. Пусть степень Q равна $n-\lambda$, тогда, поскольку R степени $n-1$,

$$\frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)} = \lambda\beta_{\lambda-1}\zeta^{\lambda-1} + \ldots + 2\beta_1\zeta + \beta_0 + \sum_{r=1}^{m}\frac{\alpha_r}{\zeta - a_r} + O(\zeta^{-2}) \qquad (\lambda \geqslant 1),$$

когда ζ велико. Пусть

$$\zeta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \beta_{\lambda-1} = r(\cos t + i\sin t),$$

тогда

$$V = V_0 e^{\beta_{\lambda-1}\zeta^{\lambda} + \ldots}\prod_{r=1}^{m}(\zeta - a_r)^{\alpha_r}$$

$$= V_0\rho^{\alpha}(\cos\alpha\varphi + i\sin\alpha\varphi)\,e^{r\rho^{\lambda}(\cos\omega + i\sin\omega) + \ldots},$$

где

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m, \quad \omega = t + \lambda\varphi,$$

а V_0 конечно на бесконечности.

Отсюда следует, что V стремится к нулю или бесконечности, когда ρ стремится к бесконечности, в зависимости от того, $\cos(t+\lambda\varphi)$ — отрицательный или положительный. Поэтому, если плоскость разделить на 2λ секторов лучами, проведенными из некоторой точки в направлениях

$$\cos(t + \lambda\varphi) = 0,$$

то V будет стремиться к нулю или бесконечности в зависимости от сегментов, когда ρ стремится к бесконечности. Соответствующим контуром интегрирования, следовательно, будет кривая, начинающаяся в бесконечности в сегменте, в котором предельное значение V равно нулю, пересекающая последующий сегмент, а затем возвращающаяся к бесконечности в соседнем сегменте. Следовательно, возможны λ независимых кривых этого типа, которые не содержат никаких особых точек уравнения и которые дают λ интегралов, необходимых для получения всех n решений в виде контурных интегралов.

18·45. Группа уравнения. Для некоторых фиксированных значений z контуры могут быть деформированы непрерывным способом, не изменяя значения интегралов, если они не встречают на своем пути какой-либо из точек $a_1, \ldots, a_m$, z. Аналогично, если z изменяется непрерывно, то интегралы также будут изменяться непрерывно, если деформация контуров соответственно

---

[1] Предоставляется доказать, что эти k интегралов линейно-независимы.

движению точки z не вызывает прохождения контура через какую-либо особую точку.

Рассмотрим влияние простого обхода в положительном направлении вокруг особой точки a_r. Если A_r обозначает петлю, проведенную из произвольной точки O и окружающую точку a_r, а Z — петля, окружающая точку z, то этот обход не повлияет на петли $A_s (s \neq r)$. Петли A_r и Z, деформированы в A_r' и Z' и не встречают точек z и a_r (рис. 15).

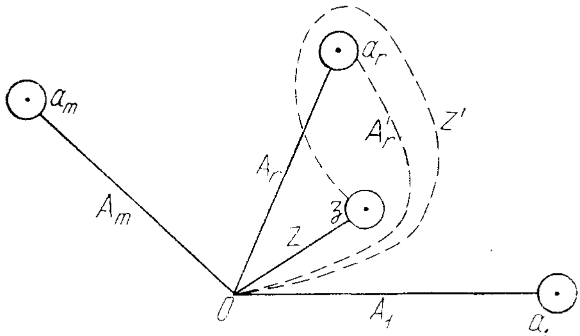


Рис. 15.

Новая петля Z' эквивалентна петле Z, состоящей из двойного контура, окружающего a_r и z, т. е. эквивалентна $ZA_rZA_r^{-1}Z^{-1}$, а новая петля A_r' эквивалентна двойному контуру, окружающему z и a_r, т. е. $ZA_rZ^{-1}A_r^{-1}A_r$ или ZA_rZ^{-1}.

Пусть W_z' и W_r' будут соответствующими добавлениями контуров Z' и A_r' к значению интеграла, взятого вокруг соответствующего двойного контура, тогда

$$W_z' = W_z + e^{2\pi i\mu} W_{rz}, \quad W_r' = -W_{rz} + W_r,$$

следовательно, интеграл W_{rz}, значение которого для недеформированного контура равно

$$(1 - e^{2\pi i\mu}) W_r - (1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_z,$$

преобразуется в

$$\begin{aligned}
&(1 - e^{2\pi i\mu}) W_r' - (1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_z' \\
&= (1 - e^{2\pi i\mu}) W_r - (1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_z - (1 - e^{2\pi i(\mu+\alpha_r)}) W_{rz} \\
&= e^{2\pi i(\mu+\alpha_r)} W_{rz}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку петля A_s остается неизмененной, интеграл W_{sz} преобразуется в

$$\begin{aligned}
&(1 - e^{2\pi i\mu}) W_s - (1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_z' \\
&= W_{sz} - e^{2\pi i\mu}(1 - e^{2\pi i\alpha_r}) W_{rz}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь влияние обхода вокруг кратного нуля a на интегралы § 18·43. Контуры представляют собой простые замкнутые кривые, начинающиеся и заканчивающиеся в a; они могут быть сделаны произвольно малыми. Наличие множителя $(\zeta - z)^{\mu}$ в подинтегральном выражении приводит к тому, что, когда z окружает точку a, точка ζ на контуре также окружается. Влияние этого выражается, следовательно, в умножении интеграла на множитель $e^{2\pi i \mu}$. Циркуляция вокруг a не влияет на интегралы этого типа, относящиеся к кратным нулям, отличным от a.

Наконец, влияние циркуляции в положительном направлении, включающем все особые точки, выражается в умножении интегралов § 18·44 на тот же множитель $e^{2\pi i \mu}$.

Таким образом фундаментальные подстановки группы уравнения известны, следовательно—известна и сама группа.

18·46. Рекуррентные соотношения и смежные функции. Чтобы подчеркнуть зависимость интегрального решения от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, μ, его можно написать в виде

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mu; z).$$

В частности, пусть $Q(z)$ будет степени n и пусть корни уравнения $Q(z) = 0$ не равны между собой, тогда

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu; z) = \int_C (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} (\zeta - z)^{\mu + n - 1} d\zeta,$$

где C таково, что начальные и конечные значения подинтегрального выражения равны.

Диференцируя по z под знаком интеграла, найдем

$$\frac{d^{\varkappa} W(\alpha_1 \ldots, \alpha_n, \mu; z)}{dz^{\varkappa}} =$$
$$= (-1)^{\varkappa} (\mu + n - 1) \ldots (\mu + n - \varkappa) W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu - \varkappa; z).$$

Подставляя это выражение (с $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$) в диференциальное уравнение, получим линейное соотношение с коэфициентами в виде полиномов между $n + 1$ функциями

$$W(\alpha_1 \ldots, \alpha_n, \mu; z), \quad W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu - 1; z), \ldots,$$
$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mu - n; z).$$

С другой стороны, поскольку

$$(\zeta - a) = (\zeta - z) + (z - a),$$

отсюда следует, что

$$W(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \mu; z) = W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \mu + 1; z) +$$
$$+ (z - a) W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \mu; z).$$

Рассматривая все возможные формулы этого типа, найдем, что все функции

$$W(\alpha_1 + p_1, \ldots, \alpha_n + p_n, \mu + q; z),$$

где $p_1, \ldots, p_n, q$ — целые числа или равны нулю, могут быть выражены в виде линейных комбинаций, с коэфициентами в виде полиномов, через любые n из этих функций, например

$$W(a_1, \ldots, a_n, \mu - 1; z), \ldots, W(a_1, \ldots, a_n, \mu - n; z),$$

представляющие рекуррентные соотношения между данными функциями.

Если один из параметров увеличить на единицу, а другой — уменьшить на единицу, то получим *смежную функцию*[1]. Соотношения, содержащие смежные функции, просты; так, исключая функцию

$$W(a_1, \ldots, a_n, \mu - 1; z)$$

из

$$W(a_1 + 1, a_2, \ldots, a_n, \mu - 1; z) = W(a_1, a_2, \ldots, a_n, \mu; z) + \\ + (z - a_1) W(a_1, \ldots, a_n, \mu - 1; z)$$

и

$$W(a_1, a_2 + 1, \ldots, a_n, \mu - 1; z) = W(a_1, a_2, \ldots, a_n, \mu; z) + \\ + (z - a_2) W(a_1, \ldots, a_n, \mu - 1; z),$$

найдем, что

$$(z - a_2) W(a_1 + 1, a_2, \ldots, a_n, \mu - 1; z) - (z - a_1) W(a_1, a_2 + 1, \ldots, \\ a_n, \mu - 1; z) = (a_1 - a_2) W(a_1, a_2, \ldots, a_n, \mu; z).$$

Другие последовательности рекуррентных соотношений могут быть получены из формул, аналогичных

$$(\mu + n - 1)\frac{\partial W}{\partial a_1} - (a_1 - 1)\frac{\partial W}{\partial z} = (z - a_1)\frac{\partial^2 W}{\partial a_1 \partial z},$$

где

$$W = W(a_1, \ldots, a_n, \mu; z).$$

18·47. Решения уравнения Римана в виде контурных интегралов. Если в уравнении P-функции Римана (§ 15·93) произведем преобразование

$$w = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta (z - c)^\gamma u,$$

то получим уравнение

$$Q(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \{\mu Q'(z) + R(z)\}\frac{du}{dz} + \\ + \left\{\frac{1}{2}\mu(\mu + 1) Q''(z) + (\mu + 1) R'(z)\right\} u = 0,$$

где

$$\mu = -\alpha - \beta - \gamma - 1 = \alpha' + \beta' + \gamma' - 2,$$

$$Q(z) = (z - a)(z - b)(z - c),$$

$$R(z) = \sum (\alpha' + \beta + \gamma)(z - b)(z - c).$$

[1] Riemann, Gött. Abh. 7 (1857); [Math. Werke, 67].

В этом случае

$$U(\zeta)=\frac{1}{Q(\zeta)}e^{\int\frac{R(\zeta)}{Q(\zeta)}d\zeta}$$

$$=(\zeta-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(\zeta-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(\zeta-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}.$$

Следовательно, если C — двойной контур, окружающий любые две точки a, b, c, то интеграл

$$\int\limits_C U(\zeta)(\zeta-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,d\zeta,$$

умноженный на $(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}$, представляет P-функцию Римана.

В частности, пусть этот двойной контур содержит точки b и c и пусть z лежит в круге Γ с центром в точке a, не содержащем точек b и c; в этом случае контур C может быть деформирован, если это необходимо, так, чтобы он целиком лежал вне Γ. Тогда для всех точек ζ на C

$$|z-a|<|\zeta-a|.$$

Пусть

$$|\arg(z-a)|<\pi,$$

далее $\arg(a-b)$ и $\arg(a-c)$ имеют главные значения, а $\arg(\zeta-a)$, $\arg(\zeta-b)$ и $\arg(\zeta-c)$ определены аналогично, когда ζ совпадает с точкой O. Тогда, если $\arg(z-b)$, $\arg(z-c)$ и $\arg(\zeta-z)$ так определены, что они приводятся соответственно к $\arg(a-b)$, $\arg(a-c)$, $\arg(\zeta-a)$, когда $z\to a$, то

$$(z-b)^{\beta}=(a-b)^{\beta}\left\{1+\beta\frac{z-a}{a-b}+\ldots\right\},$$

$$(z-c)^{\gamma}=(a-c)^{\gamma}\left\{1+\gamma\frac{z-a}{a-c}+\ldots\right\},$$

$$(\zeta-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}=(\zeta-a)^{-\alpha-\beta-\gamma}\left\{1-(\alpha+\beta+\gamma)\frac{a-z}{\zeta-a}+\ldots\right\},$$

а ряд справа сходится абсолютно и равномерно для всех значений z внутри Γ и на нем, а также для всех значений ζ на C.

Следовательно, если P^{α} есть P-функция Римана, которая допускает разложение

$$(z-a)^{\alpha}\{1+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots\},$$

то интегральное решение[1]

$$(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\int\limits_0^{(b+,\,c+,\,b-,\,c-)}U(\zeta)(\zeta-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,d\zeta$$

---

[1] Способ написания этого интеграла показывает порядок и направление образования петель, составляющих контур.

представляет функцию $P^{(\alpha)}$, умноженную на

$$(a-b)^{\beta}(a-c)^{\gamma}\int_{0}^{(b+,\,c,+\,b-,\,c-)}(\zeta-a)^{\alpha'-\alpha-1}(\zeta-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}\times$$
$$\times(\zeta-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}\,d\zeta.$$

Аналогично, решения $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ могу быть выражены в виде контурных интегралов, взятых вдоль двойного контура [1].

18·471. Периоды Абелевых интегралов. Если показатели $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, ν все рациональные вещественные числа, то неопределенный интеграл

$$\int(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(\zeta-a_n)^{\alpha_n-1}(\zeta-z)^{\nu-1}\,d\zeta$$

является Абелевым интегралом. Его значение для замкнутого контура, когда подинтегральное выражение принимает начальное значение, называется *периодом* интеграла. Из приведенного анализа нетрудно вывести, что периоды, которые являются функциями от z, удовлетворяют линейному диференциальному уравнению с коэфициентами в виде полиномов от z.

Рассмотрим, в частности, эллиптический интеграл

$$\int(1-t^2)(1-k^2t^2)\,dt$$

и пусть I будет одним из его периодов. Тогда, если

$$k^{-2}=z,\quad t^2=\zeta,\quad kI=w,$$

$$w=\frac{1}{2}\int\zeta^{-\frac{1}{2}}(\zeta-1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-z)^{-\frac{1}{2}}\,d\zeta,$$

и в обозначениях предыдущих параграфов

$$Q(\zeta)=\zeta(\zeta-1),\quad n=2,\quad \mu=-\frac{3}{2},$$

$$R(\zeta)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-1}\right\}G(\zeta)=\zeta-\frac{1}{2},$$

следовательно, w удовлетворяет гипергеометрическому уравнению

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2}+(2z-1)\frac{dw}{dz}+\frac{1}{4}w=0.$$

Действительно, если K и K' — четверти периодов эллиптической функции Якоби, то [2]

$$K=\frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)\quad K'=\frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-k^2\right)\cdot$$

18·5. Функция Лежандра $P_n(z)$. Полученный ранее результат (§ 8·311) может быть сформулирован следующим образом. Кон-

---

[1] Случаи, когда $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$ или $\gamma-\gamma'$ — целые числа или равны нулю требуют специального рассмотрения (§ 18·42).

[2] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 22·3 и последующие.

турный интеграл

$$\int\limits_C (z-\zeta)^{-n-1}(1-\zeta^2)^n\, d\zeta$$

дает решение уравнения Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+n(n+1)w=0,$$

при условии, что контур C таков, что выражение

$$(\zeta-z)^{-n-2}(\zeta^2-1)^{n+1}$$

принимает свое начальное значение после обхода контура.

Пусть A будет точкой на вещественной оси справа от $\zeta=1$[1] и пусть в A

$$\arg(\zeta-1)=\arg(\zeta+1)=0;\quad |\arg(\zeta-z)|<\pi.$$

Если ζ начинает свое движение в A, описывает положительную петлю вокруг точки $\zeta=1$ и возвращается к A, то выражение $(\zeta-z)^{-n-2}(\zeta^2-1)^{n+1}$ принимает свое начальное значение, умноженное на $e^{2\pi i(n+1)}$; если аналогичную петлю провести вокруг $\zeta=z$, то выражение примет начальное значение, умноженное на $e^{2\pi i(-n-2)}$. Следовательно, если обе петли описаны, или, что то же, если контур интегрирования начинается и заканчивается в A и окружает точки $\zeta=1$ и $\zeta=z$ в положительном направлении, но не окружает точки $\zeta=-1$, то контурный интеграл будет решением уравнения Лежандра для всех значений n.

Таким образом контурный интеграл[2]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_A^{(1+,\,z+)}\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

является функцией Лежандра; при n — положительном целом числе и $z=1$ интеграл приводится к единице. Вообще он может быть представлен символом $P_n(z)$, который, если n — положительное целое число, представляет полиномы Лежандра.

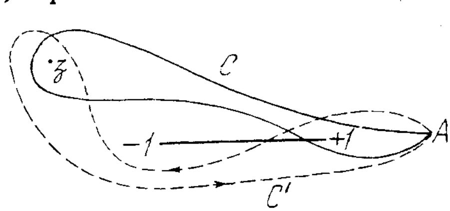


Рис. 16.

Контуры C и C' (рис. 16) оба удовлетворяют необходимым условиям, но один не может быть преобразован в другой, не встречая на своем пути особой точки $\zeta=-1$. Следовательно,

---

[1] Если z вещественно и больше единицы, то A должно быть справа от $\zeta=z$.

[2] Schäfli, Über die zwei Heine'schen Kugelfunctionen, Bern, 1881.

если n не целое число, то $P_n(z)$ не будет однозначной функцией z. Для того, чтобы сделать эту функцию однозначной, необходимо разрезать плоскости ζ и z вдоль вещественной оси от -1 до $-\infty$. Во всей разрезанной плоскости z функция $P_n(z)$ аналитическая.

18·51. Функция Лежандра $Q_n(z)$. Контур, который приводит к функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$, образуется следующим образом[1]. Пусть z не будет вещественным числом, лежащим в интервале $(-1, +1)$; построим эллипс с фокусами в точках ± 1 таким образом, чтобы точка z лежала вне его. Из правого конца главной оси A опишем контур C в виде восьмерки, окружающей точку $+1$ по часовой стрелке, а точку -1 против часовой стрелки и лежащей внутри эллипса (рис. 17), тогда выражение $(\zeta - z)^{-n-2}(\zeta^2 - 1)^{n+1}$ примет свое начальное значение, когда ζ возвратится к начальной точке A.

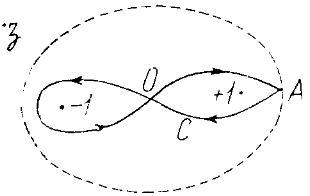


Рис. 17.

Пусть $|\arg z| \leqslant \pi$, $|\arg(z-\zeta)| \to \arg z$, когда $\zeta \to 0$ на контуре, и в A пусть $\arg(\zeta - 1) = \arg(\zeta + 1) = 0$, тогда

$$Q_n(z) = \frac{1}{4i \sin n\pi} \int\limits_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (z - \zeta)^{n+1}}\, d\zeta$$

будет решением уравнения Лежандра, справедливым, если n не целое число, и аналитическим во всей плоскости z, разрезанной вдоль вещественной оси от 1 до $-\infty$.

Предположим, что $\mathbf{R}(n+1) > 0$ и рассмотрим контур, составленный из:

(I) малого круга, описанного вокруг $+1$ в отрицательном направлении,

(II) малого круга, описанного вокруг -1 в положительном направлении,

(III) линий $(+1, -1)$ и $(-1, +1)$.

Поскольку $\mathbf{R}(n+1) > 0$, интегралы вдоль (I) и (II) стремятся к нулю при уменьшении кругов.

Интеграл вдоль линии $(+1, -1)$ равен

$$\frac{e^{-n\pi i}}{2^{n+2} \sin n} \int\limits_{+1}^{-1} (z - t)^{-n-1} (1 - t^2)^n\, dt,$$

вдоль линии $(-1, +1)$ равен

$$\frac{e^{n\pi i}}{2^{n+2} \sin n\pi} \int\limits_{-1}^{+1} (z - t)^{-n-1} (1 - t^2)^n\, dt.$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 15·3.

Оба значения дают

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int\limits_{-1}^{+1} (z-t)^{-n-1} (1-t^2)^n \, dt.$$

Эта формула справедлива, когда $\mathrm{R}(n+1) > 0$ и включает случай, когда n положительное целое число или нуль (§ 8·311). Если подинтегральное выражение разложить в степенный ряд по z^{-1}, то получим ряд для $Q_n(z)$ (§ 7).

18·6. Конфлюэнтные[1] гипергеометрические функции. Уравнение конфлюэнтных гипергеометрических функций Уиттекера[2] выводится из P-уравнения Римана, являющегося гипергеометрическим уравнением, при помощи следующего предельного процесса. В P-уравнении

$$w = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & c \\ \frac{1}{2} + m - c & c - k & z \\ \frac{1}{2} - m & 0 & k \end{array} \right\}$$

пусть $c \to \infty$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{dw}{dz} + \left\{ \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right\} w = 0.$$

Видоизменим это уравнение, приняв

$$W = e^{-\frac{1}{2} z} W;$$

получим для W уравнение

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right\} W = 0.$$

Из предельной формы контурных интегралов следует, что этому уравнению удовлетворяет решение вида

$$W = e^{-\frac{1}{2} z} z^k \int\limits_C \left(1 + \frac{\zeta}{z}\right)^{k+m-\frac{1}{2}} (-\zeta)^{-k+m-\frac{1}{2}} e^{-\zeta} \, d\zeta,$$

при соответствующем выборе контура C.

[1] В советской литературе принят термин „вырожденная“ г. ф.

[2] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, гл. XVI.

Легко доказать, что этот интеграл является решением конфлюэнтного гипергеометрического уравнения, если

$$\int\limits_C \frac{d}{d\zeta}\left\{\left(1+\frac{\zeta}{z}\right)^{k+m-\frac{3}{2}} \zeta^{-k+m+\frac{1}{2}} e^{-\zeta}\right\} d\zeta = 0,$$

а это условие удовлетворяется, если контур представляет собой простую петлю, проведенную из бесконечности в направлении, асимптотическом к положительной вещественной оси, окружающей начало в положительном направлении, но не окружающей точки $\zeta = -z$ и возвращающейся в бесконечность по положительной вещественной оси.

Стандартное решение конфлюэнтного гипергеометрического уравнения дается в виде

$$W_{k,m}(z) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}z} z^k \int\limits_{\infty}^{(0+)} \left(1+\frac{\zeta}{z}\right)^{k+m-\frac{1}{2}} (-\zeta)^{-k+m-\frac{1}{2}} e^{-\zeta} d\zeta;$$

причем $\arg z$ имеет главное значение, $|\arg(-\zeta)| \leqslant \pi$ и $\arg(1+\zeta/z) \to 0$, когда $\zeta \to 0$ вдоль простого пути внутри контура. Конфлюэнтная гипергеометрическая функция $W_{k,m}(z)$ будет тогда аналитической во всей плоскости, разрезанной вдоль отрицательной вещественной оси.

Указанное определение $W_{k,m}(z)$ перестает быть справедливым, если $m-k+\frac{1}{2}$ — положительное целое число. Но если $\mathbf{R}\left(m-k+\frac{1}{2}\right) \geqslant 0$, то контурный интеграл может быть преобразован, как было показано в последнем параграфе, в определенный интеграл

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{\Gamma\left(m-k+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{k+m-\frac{1}{2}} t^{m-k-\frac{1}{2}} e^{-t} dt,$$

что также справедливо, когда $m-k+\frac{1}{2}$ — положительное целое число.

Функция $W_{-k,m}(-z)$ также является решением данного уравнения, годным при $|\arg(-z)| < \pi$. Но поскольку в соответствующих областях существования

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \{1 + O(z^{-1})\}$$

$$W_{-k,m}(-z) = e^{\frac{1}{2}z} (-z)^k \{1 + O(z^{-1})\}$$

отношение этих двух решений не будет постоянным, следовательно они образуют фундаментальную последовательность.

18·61. Асимптотическое разложение $W_{k,m}(z)$. Чтобы получить асимптотическое разложение контурного интеграла для $W_{k,m}(z)$, воспользуемся формулой[1]

$$\left(1+\frac{\zeta}{z}\right)^{\lambda}=1+\frac{\lambda\zeta}{z}+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\cdot\frac{\zeta^n}{z^n}+R_n(\zeta,\ z),$$

где

$$R_n(\zeta,\ z)=\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\left(1+\frac{\zeta}{z}\right)^{\lambda}\int_0^{\zeta/z}u^n(1+n)^{-\lambda-1}\,du,$$

а $\lambda=k+m-\frac{1}{2}$.

Подставляя этот ряд в контурный интеграл для $W_{k,m}(z)$ и интегрируя почленно, найдем, что $(r+1)$-ый член разложения равен

$$(-1)^{r+1}\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-r+1)}{r!}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{2\pi i}e^{-\frac{1}{2}z}z^{k-r}\int_{\infty}^{(0+)}(-\zeta)^{r+m-k-\frac{1}{2}}e^{-\zeta}\,d\zeta,$$

и поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}(-\zeta)^{p}e^{-\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{\Gamma(p)},$$

это приводится к

$$(-1)^r\frac{\Gamma\left(k+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{r!\,\Gamma\left(k+m-r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-m-r+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}z}z^{k-r},$$

т. е. к

$$\frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2-\left(k-r+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{r!}e^{-\frac{1}{2}z}z^{k-r}.$$

Если n настолько велико, что $\mathrm{R}\left(n-k+m-\frac{1}{2}\right)>0$, то последний член может быть выражен в виде определенного интеграла

$$\frac{1}{\Gamma\left(m-k+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}t^{m-k-\frac{1}{2}}R_n(t,\ z)\,e^{-t}\,dt.$$

---

[1] См. Jacobi (Diss. Berlin, 1825), Ges. Werke, 3, 1—44.

Предположим, что $\lambda = k + m - \frac{1}{2}$ вещественно, $|z| > 1$ и $|\arg z| \leqslant \pi - \alpha$, где $\alpha > 0$, тогда

$$1 \leqslant |1 + tz^{-1}| \leqslant 1 + t, \text{ когда } \mathbf{R}(z) \geqslant 0,$$

$$|1 + tz^{-1}| \geqslant \sin\alpha, \text{ когда } \mathbf{R}(z) \leqslant 0,$$

следовательно в любом случае, если $\rho = |\lambda|$ и $r = |tz^{-1}|$, то

$$|R_n(t, z)| \leqslant \left|\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\right| \left(\frac{1+t}{\sin\alpha}\right)^{\rho} \int_0^r u^n (1+u)^{\rho}\, du$$

$$< \left|\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\right| \left(\frac{1+t}{\sin\alpha}\right)^{\rho} \left|\frac{t}{z}\right|^{n+1} \frac{1+t^{\rho}}{n+1}.$$

Поэтому, если $|z| > 1$, последний член по абсолютной величине будет меньше

$$A \operatorname{cosec}^{\rho}\alpha\, |z|^{-n-1} \left|\int_0^{\infty} (1+t)^{2\rho}\, t^{m-k+n+\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt\right|,$$

где A не зависит от z, а поскольку интеграл сходится, то последний член будет порядка

$$\operatorname{cosec}^{\rho}\alpha\; z^{-n-1},$$

в частности, если $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ порядка z^{-n-1}.

Следовательно для $|z| > 1$ и $|\arg z| \leqslant \pi - \alpha < \pi$,

$$W_{k,m}(z) \sim e^{-\frac{1}{2}z} z^k \times$$

$$\times \left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left\{m^2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2 - \left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2 - \left(k-r+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\, z^n}\right\}.$$

Если $k - \frac{1}{2} \pm m$ — положительное целое число, то ряд ограничен и поэтому дает точное представление функции.

18·7. Функции Бесселя. Функции Бесселя целого порядка n могут быть определены[1] (см. § 8·22) как коэфициенты при ζ^n в разложении Лорана (Lorent) для функции $e^{\frac{1}{2}z(\zeta-\zeta^{-1})}$. Следовательно

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} e^{\frac{1}{2}z(\zeta-\zeta^{-1})}\, \zeta^{-n-1}\, d\zeta,$$

где контуром является некоторая простая замкнутая кривая, окружающая начало в положительном направлении.

---

[1] Schlömilch, Z. Math. Phys. 2 (1857), 137.

При подстановке $\zeta = 2t/z$, интеграл преобразуется в

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int^{(0+)} t^{-n-1} \exp\left\{t - \frac{z^2}{4t}\right\} dt;$$

здесь контуром снова будет некоторая замкнутая кривая, окружающая начало в положительном направлении; это может быть круг $|t| = 1$, описанный против часовой стрелки.

Рассмотрим теперь, как должен быть изменен контур для того, чтобы интеграл $J_n(z)$ для любого значения n удовлетворял уравнению Бесселя

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2) w = 0.$$

Легко доказать, что контур C должен быть таким, чтобы

$$\int_C \frac{d}{dt}\left\{t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)\right\} dt = 0$$

тождественно для всех z. Если n целое число, то функция

$$t^{-n-1} \exp\,(t - z^2/4t)$$

примет свое начальное значение после того, как точка ζ описала круг $|t| = 1$; если n не целое число, то эта функция не однозначна на круге. Соответствующим контуром является такой, на котором $t^{-n-1} \exp\,(t - z^2/4t)$ обращается в нуль в конечных точках, что представляет петлю, начинающуюся на большом расстоянии вдоль отрицательной вещественной оси, окружающую начало в положительном направлении и возвращающуюся к начальной точке. Так, для всех значений n функция $J_n(z)$ определяется интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} \exp\left\{t - \frac{z^2}{4t}\right\} dt,$$

где $\arg z$ имеет свое главное значение, а $|\arg t| \leqslant \pi$ на контуре.

Определенная таким образом функция, аналитическая для всех значений z, она допускает разложение в виде ряда

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)}.$$

Для всех значений n контурный интеграл может быть преобразован в определенный интеграл, где $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$[1]. Формула

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{\frac{1}{2}z(\zeta - \zeta^{-1})}\, \zeta^{-n-1}\, d\zeta$$

---

[1] Schläfli, Math. Ann., 3 (1871), 148. Аналогичный результат, действительный при $\frac{1}{2}\pi < |\arg z| < \pi$, был дан Сониным, ibid. 16 (1880), стр. 14.

действительна для всех значений n, если $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$. Пусть контуром будет круг $|\zeta| = 1$, присоединенный к точке в бесконечности двойной линией, проведенной вдоль отрицательной вещественной оси.

Значение интеграла вдоль круга (принимая $\zeta = e^{i\theta}$) равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + iz\sin\theta}\, d\theta,$$

а вдоль линий $(-\infty, -1)$ и $(-1, -\infty)$ значения равны (если ζ заменить на $te^{-\pi i}$ в первом случае, и на $te^{\pi i}$ — во втором) выражению

$$\left\{\frac{e^{(n+1)\pi i} - e^{-(n+1)\pi i}}{2\pi i}\right\}\int_1^{\infty} e^{\frac{1}{2}z(-t+t^{-1})}\, t^{-n-1}\, dt.$$

В последнем интеграле положим $t = e^{\theta}$, тогда получим

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\theta - z\,\mathrm{sh}\,\theta}\, d\theta.$$

Если n — положительное целое число, то второй интеграл обращается в нуль и результат приводится к выражению § 8·22.

Примеры

1. Преобразуйте интеграл Шлэфли (§ 18·5) в интеграл Лапласа

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi.$$

[Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа § 15·23].

Преобразуйте соответствующий интеграл для $Q_n(z)$ в

$$Q_n(z) = \int_0^{\infty}\left\{z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}\,\theta\right\}^{-n-1} d\theta.$$

[Ibid. § 15·33].

2. Докажите, что присоединенное уравнение Лежандра

$$(1 - z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right\}w = 0$$

удовлетворяется

$$P_n^m(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n, n+1;\ 1-m;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{2^n\pi i}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int_A^{(1+,\, z+)}(\zeta - z)^{-n-m-1}(\zeta^2 - 1)^n\, d\zeta,$$

и преобразуйте последнее выражение в

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n\cos m\varphi d\varphi.$$

3. Покажите, что уравнение Эрмита-Вебера

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right\}w=0$$

удовлетворяется функцией

$$D_n(z)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{2}z^2\right),$$

что

$$D_n(z)=-\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{\infty}^{(0+)}e^{-z\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2}(-\zeta)^{-n-1}d\zeta$$

и что если n — положительное целое число, то

$$D_n(z)=(-1)^n e^{\frac{1}{4}z^2}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{1}{2}z^2}\right).$$

[Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 16·5].

4. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(\zeta+\alpha)\Gamma(\zeta+\beta)\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(\zeta+\gamma)}(-z)^{\zeta}d\zeta=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta;\gamma;z),$$

если $|\arg(-z)|<\pi$ и контур в общем случае параллелен мнимой оси, но изогнут, где это необходимо, так, чтобы полюсы $\Gamma(\zeta+\alpha)\ \Gamma(\zeta+\beta)$ лежали слева, а полюсы $\Gamma(-\zeta)$ — справа от пути интегрирования. [Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), 6 (1908), 141]

5. Докажите, что если $|\arg(z)|<\pi$, то

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}z}z^k}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma\left(-\zeta-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\zeta-k+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\zeta)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)}z^{\zeta}d\zeta$$

и что это выражение определяет $W_{k,m}(z)$, если $\pi\leqslant|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$.

[Barnes].

6. На основании примера 5 покажите, что если $|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$, то

$$W_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}M_{k,m}(z),+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}M_{k,m}(z),$$

где

$$M_{k,m}(z) =$$

$$= z^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}z} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!\,(2m+1)} z + \frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!\,(2m+1)\,(2m+2)} z^2 + \ldots \right\}$$

[Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 16·41].

7. Докажите, что

$$J_n(z) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\, \Gamma(n+1)} M_{0,n}(2iz)$$

и выведите асимптотическое разложение для $J_n(z)$.

8. Докажите, что

$$J_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2^{n+1}\,\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_C (\zeta^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \cos(z\zeta)\, d\zeta,$$

где C — контур в виде восьмерки, содержащий $\zeta = 1$ в положительном, а $\zeta = -1$ в отрицательном направлении. Покажите, что если $\mathbf{R}\left(n+\frac{1}{2}\right) > 0$, то

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n-1}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta \cos(z\cos\theta)\, d\theta.$$

[Hankel, Math. Ann., 1 (1869), 467]

9. Докажите, что если n — целое число, то

$$Y_n(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \left\{ J_{n+\varepsilon}(z) - (-1)^n J_{n-\varepsilon}(z) \right\}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{\left(\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}\right)\pi i} W_{0,n}(2iz) + e^{-\left(\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)\pi i} W_{0,n}(-2iz) \right\}$$

является вторым решением уравнения Бесселя, и выведите его асимптотическое разложение.

[Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 17·6].

ГЛАВА XIX

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

19·1. Эквивалентные особые точки. Предположим, что в системе n линейных диференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dw_r}{dz}=\sum_{s=1}^{n}p_{rs}(z)\,w_s \qquad (r=1,\ 2,\ldots,n),$$

коэфициенты $p_{rs}(z)$ являются аналитическими функциями независимой переменной z и не имеют других особенностей, кроме полюсов. Любая конечная точка является обыкновенной точкой системы, если коэфициенты аналитические в этой точке; точка в бесконечности также является обыкновенной точкой, если

$$p_{rs}{}^{(z)}=O\,(z^{-2}),$$

когда $z\to 0$. При изучении поведения решений в особой точке, удобно перенести эту точку в бесконечность.

Вне круга $|z|=R$, который содержит все конечные особые точки уравнения, коэфициенты могут быть разложены в ряд по убывающим степеням z. Если q — наибольший показатель ведущего члена в любом из этих разложений, то число $q+1$, согласно предыдущему определению, называется *рангом* особой точки в бесконечности. При $q\leqslant -2$ точка в бесконечности является обыкновенной точкой, при $q=-1$ она является регулярной особой точкой.

Предположим, что $q\geqslant 0$; рассмотрим возможность удовлетворения системы уравнений последовательностью формальных решений нормального типа

$$w_r=e^{Q(z)}\,u_r(z),$$

где

$$Q(z)=\frac{\alpha z^{q+1}}{q+1}+\frac{\beta z^{q}}{q}+\ldots+\lambda z,$$

тогда, если

$$p_{rs}(z)=\alpha_{rs}z^{q}+O\,(z^{q-1}),$$

то α определяется *характеристическим уравнением*

$$|\alpha_{rs}-\delta_{rs}\alpha|=0,$$

где

$$\delta_{rr}=1,\ \ \delta_{rs}=0, \qquad (r\neq s).$$

Если $q=-1$, то это уравнение определяет показатель α в регулярном решении

$$w_r = z^{\alpha}\{1+O(z^{-1})\}.$$

Природа формальных решений зависит от того, равны или неравны между собой корни

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

характеристического уравнения, а при $q=-1$, от того, различаются или не различаются они на целые числа. Но в любом случае фундаментальная теорема существования означает, что существует последовательность n линейно-независимых решений

$$w_1 = w_1^{(s)},\ w_2 = w_2^{(s)}, \ldots, w_n = w_n^{(s)} \qquad (s=1,\ 2,\ldots,n),$$

и что каждый элемент $w_r^{(s)}$ аналитический для $|z| \geqslant R$. Общее решение может быть выражено в виде линейной комбинации этих решений

$$w_1 = c_1 w_1^{(1)} + c_2 w_1^{(2)} + \ldots + c_n w_1^{(n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_n = c_1 w_n^{(1)} + c_2 w_n^{(2)} + \ldots + c_n w_n^{(n)}.$$

Любое линейное преобразование вида

$$w_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}(z)\,\overline{w}_s \qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

где коэфициенты $a_{rs}(z)$ аналитические в бесконечности и такие, что детерминант

$$\Delta = |a_{rs}(z)|$$

не равен нулю для $z=\infty$, преобразует данную линейную диференциальную систему в систему того же типа, именно

$$\frac{d\overline{w}_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} \overline{p}_{rs}(z)\,\overline{w}_s \qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Коэфициенты этого преобразованного уравнения даются формулой

$$\overline{p}_{rs}(z) = \sum_{k,\ l=1}^{n} \overline{a}_{rk}(z)\,p_{kl}(z)\,a_{ls}(z) - \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{rk}(z)\frac{d}{dz}a_{ks}(z)\ (r, s=1, 2,\ldots,n),$$

где $\{\overline{a}_{rs}(z)\}$ — матрица функции, обратная матрице $\{a_{rs}(z)\}$, т. е. такая, при которой

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{rk}(z)\,a_{ks}(z) = \delta_{rs}.$$

Если коэфициенты преобразования аналитические в бесконечности, а также удовлетворяют соотношениям

$$a_{rs}(z) = \delta_{rs} \qquad \text{для } z = \infty,$$

то говорят, что первоначальная и преобразованная система имеют *эквивалентную особую точку* в бесконечности. Поскольку обратное преобразование также имеет это специальное свойство в бесконечности, соотношение эквивалентности обратимо. Более того, поскольку произведение двух таких преобразований также имеет эту специальную форму, соотношение является *транзитивным*.

Из формул, выражающих коэфициенты $\bar{p}_{rs}(z)$ через коэфициенты $p_{rs}(z)$, очевидно, что ранг преобразованной системы не может превышать ранга первоначальной системы. Однако, поскольку это соотношение эквивалентности обратимо, обратное также верно, следовательно все системы, имеющие эквивалентную особую точку, имеют одинаковый ранг.

Понятие эквивалентных особых точек определяет задачу образования простейшей возможной системы, эквивалентной в бесконечности данной системе. Эта задача разрешается теоремой, которая будет доказана в следующем параграфе, именно: *каждая система n линейных диференциальных уравнений, с особой точкой ранга $q+1$ в бесконечности, эквивалентна канонической системе вида*

$$z\frac{dW_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} P_{rs}(z)\,W_s \qquad (r=1,\ 2,\ldots,n),$$

где коэфициенты $P_{rs}(z)$ — полиномы степени не выше $q+1$ [1].

Рассмотрим применение этой теоремы, когда точка в бесконечности регулярная, а корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ характеристического уравнения неравны между собой и не различаются на целые числа; тогда каноническая система в простейшей форме будет иметь вид

$$z\frac{dW_1}{dz} = \alpha_1 W_1,\ \ldots,\ z\frac{dW_n}{dz} = \alpha_n W.$$

Она имеет фундаментальную последовательность n решений .

$$W_1^{(1)} = z^{\alpha_1},\quad W_2^{(1)} = 0,\ldots,\ W_n^{(1)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$W_1^{(n)} = 0,\quad W_2^{(n)} = 0,\ldots,\ W_n^{(n)} = z^{\alpha_n}.$$

Следовательно первоначальное уравнение имеет фундаментальную последовательность решений

$$w_1^{(s)},\ \ldots,\ w_n^{(s)} \qquad (s = 1,\ 2,\ldots,n),$$

[1] Эта теорема дана Биркгоффом [Trans. Am. Math. Soc. 10 (1909), 436]. Приведенное здесь более простое и более общее доказательство также дано Биркгоффом [Math. Ann., 74 (1913), 134].

где
$$w_r^{(s)} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt}(z) W_t^{(s)}$$
$$= z^{\alpha_s} a_{rs}(z).$$

Это является фундаментальной теоремой существования для регулярной особой точки; аналогично, когда точка в бесконечности является нерегулярной особенностью, решения канонической системы приводят к решениям первоначальной системы.

19·2. Приведение к канонической системе. Доказательство теоремы предыдущего параграфа зависит от одной леммы теории аналитических функций, которую даем без доказательства[1].

Пусть $\{l_{rs}(z)\}$ будет некоторой матрицей функций, однозначных и аналитических для $|z| \geqslant R$, но не обязательно аналитических для $z = \infty$, и такой, что детерминант этой матрицы не обращается в нуль для $|z| \geqslant R$. В этом случае существует матрица $\{a_{rs}(z)\}$ функций, аналитических в бесконечности и приводимых к единичной матрице (δ_{rs}), а также матрица $\{e_{rs}(z)\}$ целых функций, детерминант которой не равен нулю в конечной области, так что

$$\{l_{rs}(z)\} = \{a_{rs}(z)\}\{e_{rs}(z) z^{k_s}\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа.

Значение этой леммы видно из рассмотрения функции $l(z)$, принимая R настолько большим, что $l(z)$ не обращается в нуль для $|z| \geqslant R$, тогда $\log l(z)$ — функция аналитическая, но не однозначная для $|z| \geqslant R$. После обхода положительного контура вокруг $z = \infty$, $\log l(z)$ принимает вид

$$\log l(z) - 2\pi ki,$$

где k — целое число, следовательно разность

$$\log l(z) - k \log z$$

аналитическая и однозначная функция для $|z| \geqslant R$, и при разложении в ряд Лорана она принимает вид

$$A(z) + E(z),$$

где функция $A(z)$ аналитическая в бесконечности, $A(\infty) = 0$, а $E(z)$ — целая функция. Пусть

$$a(z) = \exp A(z), \quad e(z) = \exp E(z),$$

---

[1] Доказательство, основанное на теории линейных интегральных уравнений см. Birkhoff, Bull. Am. Math. Soc., 18 (1911), 64; Math. Ann., 74 (1913), 122. Доказательство эквивалентной теоремы в матричных обозначениях см. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 10 (1909), 438; обобщение см. Proc. Am. Acad., 49 (1913), 521. Эти теоремы входят в более общие теоремы Гильберта [Hilbert, Gött. Nach. (1905), 307] и Племели [Plemelj, Monatschr. Math. Phys., 19 (1908), 211].

тогда

$$l(z) = a(z)\, e(z)\, z^{-k},$$

где функция $a(z)$ аналитическая в бесконечности, $a(\infty) = 1$, $e(z)$ — целая функция, а k — целое число.

Пусть z опишет простую замкнутую кривую C в отрицательном направлении вокруг круга $|z| = R$, содержащую все конечные особенности системы. Эта кривая эквивалентна контуру, описанному в положительном направлении вокруг точки в бесконечности. Поскольку каждая конечная точка вне круга $|z| = R$ является обыкновенной точкой системы, в некоторой точке кривой C существует фундаментальная последовательность n решений

$$(w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}), \ldots, (w_n^{(1)}, \ldots, w_n^{(n)}),$$

каждый элемент которых аналитический во всех точках C. Однако элементы этих решений неоднозначны, и поэтому, когда z описывает полный контур вдоль кривой C, решения преобразуются в новую фундаментальную последовательность

$$(\overline{w}_1^{(1)}, \ldots, \overline{w}_n^{(1)}), \ldots, (\overline{w}_1^{(n)}, \ldots, \overline{w}_n^{(n)}).$$

Обе последовательности решений связаны линейными соотношениями

$$\overline{w}_r^{(s)} = c_1^{(s)} w_r^{(1)} + \ldots + c_n^{(s)} w_r^{(n)},$$

или в матричном обозначении

$$(\overline{w}_r^{(s)}) = (w_r^{(s)})(c_r^{(s)}),$$

где $(c_r^{(s)})$ — матрица постоянных с детерминантом, не равным нулю.

В общем случае, т. е. когда корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ уравнения

$$\left| c_r^{(s)} - \delta_{rs}\rho \right| = 0$$

неравны между собой[1], первоначальная фундаментальная последовательность решений может быть выбрана таким образом, чтобы матрица $(c_r^{(s)})$ имела простую форму $(\delta_{rs}\rho_s)$. Следовательно подстановка, относящаяся к контуру, проведенному в положительном направлении вокруг $z = \infty$, будет иметь вид

$$\overline{w}_1^{(1)} = \rho_1 w_1^{(1)}, \ldots, \overline{w}_n^{(1)} = \rho_1 w_n^{(1)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\overline{w}_1^{(n)} = \rho_n w_1^{(n)}, \ldots, \overline{w}_n^{(n)} = \rho_n w_n^{(n)}.$$

Теперь, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ будут числами, удовлетворяющими

---

[1] Строго говоря не следует принимать, что $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ неравны; правильнее полагать, что элементарные делители матрицы $(c_r^{(s)} - \delta_{rs}\rho)$ независимы.

уравнениям

$$\lambda_s = \frac{-1}{2\pi i} \log \rho_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Этими уравнениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ определены с точностью до аддитивных целых чисел. Для некоторого выбранного определения λ_s предположим, что

$$w_r^{(s)}(z) = z^{\lambda_s} l_{rs}(z),$$

тогда каждая функция $l_{rs}(z)$ будет однозначной и аналитической для $|z| \geqslant R$, а детерминант этих функций будет иметь значение

$$|l_{rs}(z)| = z^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} |w_r^{(s)}(z)|$$

$$= cz^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} \exp\left\{\int [p_{11}(z) + p_{22}(z) + \ldots + p_{nn}(z)]\, dz\right\},$$

где c — постоянная, не равная нулю для $|z| \geqslant R$.

Матрица функций $\{l_{rs}(z)\}$, следовательно, удовлетворяет условиям леммы и может быть разложена на произведение матриц

$$\{l_{rs}(z)\} = \{a_{rs}(z)\}\{e_{rs}(z)\, z^{k_s}\}.$$

Пусть

$$W_{rs}^{(s)} = e_{rs}(z)\,(z)^{k_s + \lambda_s} = e_{rs}(z)\, z^{\mu_s},$$

тогда, при определенных таким образом функциях $a_{rs}(z)$, преобразование

$$\{w_r^{(s)}\} = \{a_{rs}(z)\}\{W_r^{(s)}\}$$

связывает каждую частную последовательность

$$w_1^{(s)}, \ldots, w_n^{(s)}$$

решений первоначального уравнения

$$\frac{dw_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} p_{rs}(z)\, w_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

с соответствующей последовательностью

$$W_1^{(s)}, \ldots, W_n^{(s)}$$

решений преобразованного уравнения

$$\frac{dW_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} p_{rs}(z)\, W_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, (n).$$

n^2 уравнений, удовлетворяемых элементами $W_r^{(s)}$, могут быть скомбинированы в матричное уравнение

$$\left\{\frac{dW_r^{(s}}{dz}\right\} = \{p_{rs}(z)\}\{W_r^{(s)}\},$$

откуда, если $\{W_r^{(s)}\}^{-1}$ — матрица, обратная $\{W_r^{(s)}\}$, то

$$\{p_{rs(z)}\} = \left\{\frac{dW_r^{(s)}}{dz}\right\}\{W_r^{(s)}\}^{-1}.$$

Теперь

$$\{W_r^{(s)}\} = \{e_{rs}(z)\, z^{-\mu_s}\} = \{e_{rs}(z)\}\, \{\delta_{rs} z^{\mu_s}\},$$

следовательно

$$\{W_r^{(s)}\}^{-1} = \{\delta_{rs} z^{-\mu_s}\}\, \{e_{rs}(z)\}^{-1}.$$

Аналогично

$$\left\{\frac{dW_r^{(s)}}{ds}\right\} = \left\{z^{\mu_s} \frac{d}{dz} e_{rs}(z) + \mu_s z^{\mu_s - 1} e_{rs}(z)\right\}$$

$$= \{f_{rs}(z)\, z^{\mu_s - 1}\} = \{f_{rs}(z)\}\, \{\delta_{rs} z^{\mu_s - 1}\},$$

где $f_{rs}(z)$ — целые функции, следовательно

$$\{\bar{p}_{rs}(z)\} = \{f_{rs}(z)\}\, \{\delta_{rs} z^{\mu_s - 1}\}\, \{\delta_{rs} z^{-\mu_s}\}\, \{e_{rs}(z)\}^{-1}$$

$$= z^{-1}\{f_{rs}(z)\}\, \{e_{rs}(z)\}^{-1}.$$

Поскольку детерминант $|l_{rs}(z)|$ не равен нулю в конечной области $\{e_{rs}(z)\}^{-1}$ является матрицей целых функций, следовательно, каждая функция

$$z\bar{p}_{rs}(z)$$

является целой функцией. Но поскольку ранг особой точки в бесконечности равен $q+1$,

$$\bar{p}_{rs}(z) = O(z^q),$$

когда $z \to \infty$. Таким образом $z\bar{p}_{rs}(z)$ — целая функция, имеющая полюс порядка не больше $q+1$ в бесконечности и является полиномом степени не больше $q+1$.

Следовательно *данная система эквивалентна в бесконечности канонической системе*

$$z\frac{dW_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} P_{rs}(z)\, W_s \qquad (r=1,\ 2, \ldots, n),$$

где коэфициенты $P_{rs}(z)$ — *полиномы степени не больше* $q+1$.

Каноническая система может быть далее упрощена подстановкой вида

$$\overline{W}_r = \sum_{s=1}^{n} c_{rs} W_s \qquad (r=1,\ 2, \ldots, n).$$

В частности, если корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ характеристического уравнения

$$|\alpha_{rs} - \delta_{rs}\alpha| = 0$$

неравны между собой, то постоянные c_{rs} могут быть выбраны таким образом, чтобы полиномы $P_{rs}(z)$ имели вид[1]

$$P_{rs} = p_{rs}^{(0)} + p_{rs}^{(1)} z + \ldots + p_{rs}^{(q)} z^q \qquad z \neq s$$

$$P_{rr} = p_{rr}^{(0)} + p_{rr}^{(1)} z + \ldots + p_{rr}^{(q)} q^q + \alpha_r z^{q+1}$$

При таком упрощении полиномов говорят, что система имеет *стандартную каноническую форму*.

19·21. Изменение доказательства в случае вырождения. Для того, чтобы показать изменение доказательства в случае вырождения, когда два или несколько множителей ρ, соответствующих положительному контуру вокруг точки в бесконечности, равны между собой, рассмотрим частный случай $\rho_1 = \rho_2$. Если, как в общем случае, существует фундаментальная последовательность решений, так что

$$\overline{w}_r^{(s)} = \rho_s w_r^{(s)},$$

для $s = 1, 2, \ldots, n$, изменение метода не является необходимым. Если это не так[2], то фундаментальная последовательность решений существует, так что (см. § 15·22) для $r = 1, 2, \ldots, n$,

$$\overline{w}_r^{(1)} = \rho_1 w_r^{(1)},$$

$$\overline{w}_r^{(2)} = \rho_1 w_r^{(2)} + w_r^{(1)},$$

$$\overline{w}_r^{(s)} = \rho_s w_r^{(s)} \qquad (s = 3, 4, \ldots, n).$$

Как и выше, пусть

$$\lambda_s = \frac{-1}{2\pi i} \log \rho_s \qquad (s = 1, 3, \ldots, n);$$

напишем

$$w_r^{(1)} = z^{\lambda_1} l_{r1}(z),$$

$$w_r^{(2)} = z^{\lambda_1} \left\{ l_{r2}(z) + \frac{1}{2\pi\rho_1 i} l_{r1}(z) \log z \right\},$$

$$w_r^{(s)} = z^{\lambda_s} l_{rs}(z) \qquad (s = 3, 4, \ldots, n).$$

Таким образом определяется матрица $\{l_{rs}(z)\}$ функций, однозначных и аналитических для $|z| \geqslant R$, детерминант которых

$$z^{-2\lambda_1 - \lambda_3 - \ldots - \lambda_n} \left| w_r^{(s)} \right|$$

не равен нулю для $|z| \geqslant R$.

---

[1] Коэфициенты c_{rs} таковы, что операции

$$\mathrm{col}\cdot r = c_{r1}(\mathrm{col}\cdot 1) + \ldots + c_{rn}(\mathrm{col}\cdot n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

преобразуют детерминант $|a_{rs} - \delta_{rs}\alpha|$ в $\delta_{rs}(\alpha_r - \alpha)|$. Соответствующую теорему, когда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ не все независимы, предоставляется вывести читателю.

[2] Т. е. когда элементарные делители матрицы $(c_r^{(s)} - \delta_{rs}\rho)$, соответствующие $\rho_1 = \rho_2$, равны.

Тогда подстановка

$$\{w_r^{(s)}\} = \{a_{rs}(z)\}\{W_r^{(s)}\}$$

преобразует данную систему в эквивалентную каноническую систему

$$z\frac{dW_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} P_{rs}(z)\, W_s \qquad (r=1, 2, \ldots, n),$$

где коэфициенты $P_{rs}(z)$ — полиномы степени не выше $q+1$, и которая имеет фундаментальную последовательность решений

$$(W_r^{(1)}, \ldots, W_r^{(n)}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$W_r^{(1)} = z^{\lambda_1+\lambda_1} e_{r1}(z) = z^{\mu_1} e_{r1}(z),$$

$$W_r^{(2)} = z^{\lambda_1}\left\{ z^{k_2} e_{r2}(z) + \frac{1}{2\pi\rho_1 i}\, z^{k_1} e_{r1}(z) \log z \right\},$$

$$W_r^{(s)} = z^{k_s-\lambda_s} e_{rs}(z) = z^{\mu_s} e_{rs}(z) \qquad (s = 3, 4, \ldots, n).$$

Как и выше, $\{l_{rs}(z)\}$ представляет собой матрицу целых функций, детерминант которых не обращается в нуль в конечной области, а $k_1, \ldots, k_n$ — целые числа.

Случаи дальнейшего вырождения могут рассматриваться аналогично; таким образом возможность приведения к канонической форме устанавливается во всех случаях.

19·22. Простой пример приведения к стандартной канонической форме. Рассмотрим линейное диференциальное уравнение второго порядка[1]

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)\, w = 0,$$

где функции $p(z)$ и $q(z)$ аналитические для $|z| \geqslant R$, и в бесконечности

$$p(z) = p_0 + O(z^{-1}), \qquad q(z) = q_0 + O(z^{-1}).$$

В наиболее общем случае точка в бесконечности является нерегулярной особенностью первого ранга. Если b_1 и b_2 — корни квадратного уравнения

$$b^2 + p_0 b + q_0 = 0,$$

неравные между собой и если соответствующим образом выбрать постоянную c, то подстановкой

$$z = (b_2 - b_1)\,\overline{z}, \qquad w = e^{b_1 z} z^{-c}$$

можно преобразовать данное уравнение в уравнение того же вида, но с

$$p(z) = -1 + p_1 z^{-1} + O(z^{-2}), \quad q(z) = O(z^{-2}).$$

[1] Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 14 (1913), 462.

Если $v = z\frac{dw}{dz}$, то уравнение второго порядка может быть заменено двумя уравнениями первого порядка

$$\frac{dw}{dz} = \frac{v}{z}, \quad \frac{dv}{dz} = -zq(z)w + \left\{-p(z) + \frac{1}{z}\right\}v.$$

Два решения w_1, w_2 первоначального уравнения могут быть всегда найдены таким образом, что если точка z описывает положительный контур вокруг точки в бесконечности, то

$$\overline{w}_1 = \rho_1 w_1, \quad \overline{w}_2 = \rho_2 w_2,$$

или

$$\overline{w}_1 = \rho_1 w_1, \quad \overline{w}_2 = \rho_1 w_2 + w_1.$$

Рассмотрим подробно первый случай; модификация метода для второго случая будет дана ниже.

Линейная система допускает решения

$$w_1 = z^{\lambda_1} l_{11}(z), \quad w_2 = z^{\lambda_2} l_{12}(z),$$
$$v_1 = zw_1' = z^{\lambda_1} l_{21}(z), \quad v_2 = zw_2' = z^{\lambda_2} l_{22}(z),$$

где показатели λ_1, λ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_1 = \frac{-1}{2\pi i}\log\rho_1, \quad \lambda_2 = \frac{-1}{2\pi i}\log\rho_2,$$

а функции $l_{11}(z)$, $l_{12}(z)$, $l_{21}(z)$ и $l_{22}(z)$ — однозначные и аналитические для $|z| \geqslant R$. Более того, детерминант имеет значение

$$l_{11}(z)\,l_{22}(z) - l_{12}(z)\,l_{21}(z) = z^{1-\lambda_1-\lambda_2}(w_1 w_2' - w_2 w_1')$$
$$= z^{1-\lambda_1-\lambda_2} e^{-\int p(z)\,dz},$$

и не равен нулю для $|z| \geqslant R$.

Чтобы точно провести приведение к канонической форме, лемма § 19·2 для частного случая $n = 2$ должна быть изменена следующим образом: *Пусть $l_{11}(z)$, $l_{12}(z)$, $l_{21}(z)$ и $l_{22}(z)$ будут функциями, однозначными и аналитическими для $|z| \geqslant R$ (но не обязательно аналитическими в бесконечности), так что их детерминант $l_{11}(z)$, $l_{22}(z)$, $l_{12}(z)$, $l_{21}(z)$ не обращается в нуль для $|z| \geqslant R$. Тогда будет существовать последовательность функций $a_{11}(z)$, $a_{12}(z)$, $a_{21}(z)$, $a_{22}(z)$, аналитических в бесконечности и приводимых соответственно к* 1, 0, 0, 1 *в бесконечности, и последовательность целых функций $e_{11}(z)$, $e_{12}(z)$, $e_{21}(z)$, $e_{22}(z)$, детерминант которых не обращается в нуль в некоторой точке конечной плоскости, так что*

$$l_{11}(z) = \{a_{11}(z)e_{11}(z) + a_{12}(z)a_{21}(z)\}z^{k_1},$$
$$l_{12}(z) = \{a_{11}(z)e_{12}(z) + a_{12}(z)e_{22}(z)\}z^{k_2},$$
$$l_{21}(z) = \{a_{21}(z)e_{11}(z) + a_{22}(z)e_{21}(z)\}z^{k_1},$$
$$l_{22}(z) = \{a_{21}(z)e_{12}(z) + a_{22}(z)e_{22}(z)\}z^{k_2},$$

где k_1 и k_2 — целые числа.

Теперь, четыре функции $l_{11}(z)$, $l_{12}(z)$, $l_{21}(z)$, $l_{22}(z)$ удовлетворяющие этим условиям, определяются при помощи соотношений

$$w_1 = z^{\lambda_1} l_{11}(z), \quad w_2 = z^{\lambda_2} l_{12}(z),$$
$$v_1 = z^{\lambda_1} l_{21}(z), \quad v_2 = z^{\lambda_2} l_{22}(z);$$

их определение зависит от выбора λ_1 и λ_2. При соответствующем выборе этих показателей целые числа k_1 и k_2 могут быть приравнены нулю; предположим, что определенный выбор λ_1 и λ_2 сделан.

Произведем подстановку

$$w = a_{11}(z) W + a_{12}(z) V, \qquad v = a_{21}(z) W + a_{22}(z) V$$

и преобразуем систему в

$$\frac{dW}{dz} = P_{11}(z) W + P_{12}(z) V, \quad \frac{dV}{dz} = P_{21}(z) W + P_{22}(z) V,$$

где

$$P_{11} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{22}\left\{\frac{a_{21}}{z} - a'_{11}\right\} - a_{12}\left\{-zqa_{11} + \left(-p + \frac{1}{z}\right) a_{21} - a'_{21}\right\}\right],$$

$$P_{12} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{22}\left\{\frac{a_{22}}{z} - a'_{12}\right\} - a_{12}\left\{-zqa_{12} + \left(-p + \frac{1}{z}\right) a_{22} - a'_{22}\right\}\right],$$

$$P_{21} = \frac{-1}{\Delta}\left[a_{21}\left\{\frac{a_{21}}{z} - a'_{11}\right\} - a_{11}\left\{-zqa_{11} + \left(-p + \frac{1}{z}\right) a_{21} - a'_{21}\right\}\right],$$

$$P_{22} = \frac{-1}{\Delta}\left[a_{21}\left\{\frac{a_{22}}{z} - a'_{12}\right\} - a_{11}\left\{-zqa_{12} + \left(-p + \frac{1}{z}\right) a_{22} - a'_{22}\right\}\right],$$

а детерминант

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

не равен нулю.

Поскольку в бесконечности

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

эти выражения допускают разложения вида

$$P_{11} = O(z^{-2}), \qquad P_{12} = rz^{-1} + O(z^{-2}),$$
$$P_{21} = rz^{-1} + O(z^{-2}), \qquad P_{22} = 1 + (1 + p_1) z^{-1} + O(z^{-2}),$$

где r и s постоянные, значения которых будут определены ниже.

Решения преобразованной системы имеют вид

$$W_1 = z^{\lambda_1} e_{11}(z), \quad W_2 = z^{\lambda_2} e_{12}(z),$$
$$V_1 = z^{\lambda_1} e_{21}(z), \quad V_2 = z^{\lambda_2} e_{22}(z);$$

подставляя эти выражения в первое уравнение преобразованной системы, найдем, что

$$\frac{d}{dz}e_{11}(z)+\frac{\lambda_1}{z}e_{11}(z)=P_{11}(z)e_{11}(z)+P_{12}(z)e_{21}(z),$$

$$\frac{d}{dz}e_{12}(z)+\frac{\lambda_2}{z}e_{12}(z)=P_{11}(z)e_{12}(z)+P_{12}(z)e_{22}(z).$$

Поскольку $e_{11}(z)$, $e_{12}(z)$, $e_{21}(z)$, $e_{22}(z)$ — целые функции, а их детерминант

$$e_{11}(z)e_{22}(z)-e_{12}(z)e_{21}(z)$$

не равен нулю для некоторого конечного значения z, функции $P_{11}(z)$ и $P_{12}(z)$ аналитические во всей конечной плоскости, за исключением простого полюса в начале. Рассматривая второе уравнение преобразованной системы, можно доказать, что то же верно относительно функций $P_{21}(z)$ и $P_{22}(z)$. Но все эти четыре функции $P_{rs}(z)$ аналитические в бесконечности; они, следовательно, линейны относительно z^{-1}. Таким образом члены $O(z^{-2})$ в разложениях этих функций обращаются в нуль, и преобразованная система принимает простую каноническую форму[1]

$$z\frac{dW}{dz}=rV,\quad z\frac{dV}{dz}=sW+(z+1-p_1)V.$$

Это приводит к теореме: *если* $w(z)$ *является решением уравнения*

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0,$$

где

$$p(z)=-1+p_1z^{-1}+O(z^{-2}),\quad q(z)=O(z^{-2}),$$

то $w(z)$ *и* $zw'(z)$ *могут быть представлены в виде*

$$w(z)=a_{11}(z)W+a_{12}(z)\frac{z}{r}\cdot\frac{dW}{dz},\quad z\frac{dw(z)}{dz}=a_{21}(z)W+a_{22}(z)\frac{z}{r}\cdot\frac{dW}{dz},$$

где W — *частное решение уравнения*

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left\{-1+\frac{p_1}{z}\right\}\frac{dW}{dz}-\frac{rs}{z^2}W=0,$$

а функции $a_{11}(z)$, $a_{12}(z)$, $a_{21}(z)$, $a_{22}(z)$ *аналитические в бесконечности и приводятся при* $z=\infty$ *к* 1, 0, 0, 1, *соответственно*[2].

Отождествим теперь постоянные r и s. Начало является регулярной особой точкой преобразованного уравнения с показателями λ_1 и λ_2. Определяющее уравнение, относящееся к этой особой точке, имеет вид

$$\lambda^2+(p_1-1)\lambda-rs=0,$$

[1] Система интегрируется в квадратурах, если r или s равно нулю.

[2] При $r=0$ надо заменить

$$\frac{z}{r}\cdot\frac{dW}{dz}\quad\text{на}\quad\lim_{r\to 0}\frac{z}{r}\cdot\frac{dW}{dz}.$$

поэтому

$$\lambda_1+\lambda_2=1-p_1, \quad \lambda_1\lambda_2=-rs.$$

В специальном случае, когда

$$\overline{w}_1=\rho_1 w_1, \quad \overline{w}_2=\rho_1 w_2+w_1,$$

функции $l_{11}(z)$, $l_{12}(z)$, $l_{21}(z)$, $l_{22}(z)$ определяются посредством соотношений

$$w_1=z^{\lambda_1}l_{11}(z), \quad w_2=z^{\lambda_1}\left\{l_{12}(z)+\frac{1}{2\pi\rho_1 i}\,l_{11}(z)\log z\right\},$$

$$v_1=zw_1'=z^{\lambda_1}l_{21}(z), \quad v_2=zw_2'=z^{\lambda_1}\left\{l_{22}(z)+\frac{1}{2\pi\rho_1 i}\,l_{21}(z)\log z\right\},$$

где

$$\lambda_1=\frac{-1}{2\pi i}\log\rho_1.$$

19·3. Формальные решения. Предположим, что все корни $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ характеристического уравнения данной системы неравны между собой, и что $q\geqslant 0$. Эквивалентная стандартная каноническая система будет иметь вид

$$z\frac{dW_r}{dz}=\sum_{s=1}^{n}P_{rs}(z)W_s \qquad (r=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

где

$$P_{rs}(z)=p_{rs}^{(0)}+p_{rs}^{(1)}z+\ldots+p_{rs}^{(q)}z^q \qquad (r\neq s),$$

$$P_{ss}(z)=p_{ss}^{(0)}+p_{ss}^{(1)}z+\ldots+p_{ss}^{(q)}z^q+\alpha_s z^{q+1}.$$

В этом случае для каждого значения s получим формальное решение нормального типа

$$W_1=T_1^{(s)},\ \ldots,\quad W_n=T_n^{(s)},$$

в котором

$$T_r^{(s)}=e^{Q_s(z)}z^{\mu_s}B_{rs}(z),$$

где

$$Q_s(z)=\frac{\alpha_s z^{q+1}}{q+1}+\frac{\beta_s z^q}{q}+\ldots+\lambda_s z,$$

$$B_{rs}(z)=B_{rs}+B_{rs}^{(1)}z^{-1}+\ldots,$$

а μ_s выбрано таким образом, что постоянная B_{ss} не равна нулю. Чтобы сделать формальные решения определенными, придадим B_{ss} значение единицы.

Непосредственной подстановкой можно доказать, что

$$B_{rs}=0 \qquad (r\neq s)$$

и что

$$\beta_s=p_{rr}^{(q)} \qquad (q>0),$$

$$\mu_s=p_{ss}^{(0)} \qquad (q=0).$$

Остальные коэфициенты тогда определятся в последовательном порядке

$$B_{rs}^{(1)},\ \gamma_s,\ B_{rs}^{(2)},\ \ldots,\lambda_s,\ B_{rs}^{(q)},\ \mu_s.$$

Детерминант формального решения имеет вид

$$|T_r^{(s)}| = e^{Q_1(z)+\ldots+Q_n(z)}\, z^{\mu_1+\ldots+\mu_n}\,\{D + D^{(1)}z^{-1} + \ldots\},$$

где

$$D = |B_{rs}| = 1.$$

Следовательно формальный детерминант не обращается в нуль.

Поскольку решения первоначальной системы

$$\frac{dw_r}{dz} = \sum_{s=1}^{n} p_{rs}(z)\, w_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

связаны с решениями канонической системы соотношениями типа

$$w_r^{(s)} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt}(z)\, W_t^{(s)},$$

где каждая функция $a_{rt}(z)$, аналитическая в бесконечности, приводится к δ_{rt} для $z = \infty$; отсюда следует, что система допускает точно n формальных решений

$$w_1 = S_1^{(s)}, \ldots, w_n = S_n^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

в которых

$$S_r^{(s)} = e^{Q_s(z)}\, z^{\mu_s} A_{rs}(z),$$

где $Q_s(z)$ — полином, а $A_{rs}(z)$ — ряд по убывающим степеням z, имеет значение δ_{rs} для $z = \infty$.

19·4. Решение стандартной канонической системы первого ранга при помощи интегралов Лапласа. При $q = 0$ стандартная каноническая система имеет вид

$$z\frac{dW_1}{dz} = \{p_{11}^{(0)} + \alpha_1 z\}\, W_1 + p_{12}^{(0)} W_2 + \ldots + p_{1n}^{(0)} W_n,$$

$$z\frac{dW_2}{dz} = p_{21}^{(0)} W_1 + \{p_{22}^{(0)} + \alpha_2 z\}\, W_2 + \ldots + p_{2n}^{(0)} W_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z\frac{dW_n}{dz} = p_{n1}^{(0)} W_1 + p_{n2}^{(0)} W_2 + \ldots + \{p_{nn}^{(0)} + \alpha_n z\}\, W_n.$$

Формальные решения

$$W_1 = T_1^{(s)}, \ldots, W_n = T_n^{(s)} \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

даются выражениями вида

$$T_r^{(s)} = e^{\alpha_s z} z^{\mu_s} B_{rs}(z),$$

где

$$\mu_s = p_{ss}^{(0)},$$

а

$$B_{rs}(z) = B_{rs} + B_{rs}^{(1)} z^{-1} + \dots$$

Рассмотрим возможность удовлетворения этой системы последовательностью интегралов Лапласа

$$W_r = \int e^{z\zeta} v_r(\zeta)\, d\zeta. \qquad (r=1, 2, \dots, n).$$

Непосредственной подстановкой в диференциальную систему найдем, что должно быть удовлетворено условие

$$\sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(0)} \int e^{z\zeta} v_s(\zeta)\, d\zeta = \int z e^{z\zeta} (\zeta - \alpha_r)\, v_r(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \left[e^{z\zeta} (\zeta - \alpha_r)\, v_r(\zeta) \right] - \int e^{z\zeta} \left\{ v_r(\zeta) + (\zeta - \alpha_r) \frac{dv_r(\zeta)}{d\zeta} \right\} d\zeta \quad (r=1, 2, \dots, n).$$

Следовательно функции $v_1(\zeta), v_2(\zeta), \dots, v_n(\zeta)$ должны удовлетворять преобразованной системе Лапласа

$$-(\zeta - \alpha_1) \frac{dv_1}{d\zeta} = \left\{ p_{11}^{(0)} + 1 \right\} v_1 + p_{12}^{(0)} v_2 + \dots + p_{1n}^{(0)} v_n,$$

$$-(\zeta - \alpha_2) \frac{dv_2}{d\zeta} = p_{21}^{(0)} v_1 + \left\{ p_{22}^{(0)} + 1 \right\} v_2 + \dots + p_{2n}^{(0)} v_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-(\zeta - \alpha_n) \frac{dv_n}{d\zeta} = p_{n1}^{(0)} v_1 + p_{n2}^{(0)} v_2 + \dots + \left\{ p_{nn}^{(0)} + 1 \right\} v_n,$$

а соответствующий контур интегрирования должен быть таким, чтобы каждый из членов

$$\left[e^{z\zeta} (\zeta - \alpha_r)\, v_r(\zeta) \right] \qquad (r = 1, 2, \dots, n)$$

тождественно обратился в нуль в точке z.

Преобразованная система Лапласа имеет регулярные особые точки в $\zeta = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и в бесконечности. Показатели, относящиеся к $\zeta = \alpha_s$, все равны нулю, за исключением одного, имеющего значение

$$-p_{ss}^{(0)} - 1 = -\mu_s - 1.$$

Предположим, что этот показатель не является отрицательным целым числом, тогда соответствующие решения преобразованной системы, именно

$$v_1^{(s)} = (\zeta - \alpha_s)^{-\mu_s - 1} \varphi_1^{(s)}(\zeta - \alpha_s), \dots, v_n^{(s)} = (\zeta - \alpha_s)^{-\mu_s - 1} \varphi_n^{(s)}(\zeta - \alpha_s),$$

где функции $\varphi_r^{(s)}(\zeta - \alpha_s)$, аналитические в соседстве с $\zeta = \alpha_s$, приводят к последовательности интегральных решений, если соответствующий контур представляет собой петлю C_s, идущую из бесконечности вдоль соответствующего луча, окружающую точку α_r в отрицательном направлении и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого луча При этом луч не должен встречать на своем пути никаких особых точек, кроме α_s, и необходимо, чтобы $\mathrm{R}\{z(\zeta-\alpha_s)\}$ было отрицательно вдоль луча.

Последовательность решений может быть представлена формулой

$$W_r^{(s)}=\int\limits_{C_s} e^{z\zeta}(\zeta-\alpha_s)^{-\mu_s-1}\varphi_r^{(s)}(\zeta-\alpha_s)\,d\zeta \qquad (r=1, 2, \ldots, n).$$

Каждой конечной особой точке α_s соответствует последовательность решений, т. е. мы получим всего n последовательностей решений.

Если $-\mu_s-1$ — положительное целое число, то контур вырождается в прямолинейный путь интегрирования, простирающийся в соответствующем направлении от α_s к бесконечности. Если $-\mu_s-1$ — отрицательное целое число или равно нулю, то возникает логарифмический случай. Таким образом *каждая последовательность интегралов*

$$W_1^{(s)}, \ldots, W_n^{(s)}$$

представляет решение стандартной канонической системы первого ранга, действительное в различных секторах плоскости z.

19·41. Решение системы второго ранга. Покажем, что приведенный выше процесс может быть видоизменен и расширен таким образом, чтобы он охватывал системы ранга выше первого. Рассмотрим сначала систему второго ранга ($q=1$)

$$z\frac{dW_1}{dz}=\{p_{11}^{(0)}+p_{11}^{(1)}z+\alpha_1z^2\}W_1+\{p_{12}^{(0)}+p_{12}^{(1)}z\}W_2+\ldots+$$
$$+\{p_{1n}^{(0)}+p_{1n}^{(1)}z\}W_n,$$
$$z\frac{dW_2}{dz}=\{p_{21}^{(0)}+p_{21}^{(1)}z\}W_1+\{p_{22}^{(0)}+p_{22}^{(1)}z+\alpha_2z^2\}W_2+\ldots+$$
$$+\{p_{2n}^{(0)}+p_{2n}^{(1)}z\}W_n,$$

. . . .

$$z\frac{dW_n}{dz}=\{p_{n1}^{(0)}+p_{n1}^{(1)}z\}W_1+\{p_{n2}^{(0)}+p_{n2}^{(1)}z\}W_2+\ldots+$$
$$+\{p_{nn}^{(0)}+p_{nn}^{(1)}z+\alpha_nz^2\}W_n.$$

Формальные решения будут иметь вид

$$W_1=T_1^{(s)},\ldots,\ W_n=T_n^{(s)} \qquad (s=1,2,\ldots,n),$$

где

$$T_r^{(s)}=e^{\frac{1}{2}\alpha_sz^2+\beta_sz}z^{\mu_s}\{B_{rs}+B_{rs}^{(1)}z^{-1}+\ldots\}$$

и

$$\beta_s=p_{ss}^{(1)}.$$

В этом случае интеграл Лапласа заменяется интегралом более общей формы, именно

$$W_r = \int e^{z^2\zeta}\{v_{r0}(\zeta) + zv_{r1}(\zeta)\}\, d\zeta \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Если это выражение для W_r подставить в систему уравнений, то найдем, что

$$\sum_{s=1}^{n} \{p_{rs}^{(0)} + p_{rs}^{(1)}z\}\int e^{z^2\zeta}\{v_{s0}(\zeta) + zv_{s1}(\zeta)\}\, d\zeta =$$

$$= \int z^2 e^{z^2\zeta}(2\zeta - \alpha_r)\{v_{r0}(\zeta) + zv_{r1}(\zeta)\}\, d\zeta + \int z e^{z^2\zeta} v_{r1}(\zeta)\, d\zeta$$

или, перенося члены, содержащие z^2, из левой части уравнения в правую, получим

$$\sum_{s=1}^{n} \{p_{rs}^{(0)} + p_{rs}^{(1)}z\}\int e^{z^2\zeta} v_{s0}(\zeta)\, d\zeta + \sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(0)} z\int e^{z^2\zeta} v_{s1}(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int z^2 e^{z^2\zeta}(2\zeta - \alpha_r)\{v_{r0}(\zeta) + zv_{r1}(\zeta)\}\, d\zeta + \int z e^{z^2\zeta} v_{r1}(\zeta)\, d\zeta -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(1)}\int z^2 e^{z^2\zeta} v_{s1}(\zeta)\, d\zeta = [e^{z^2\zeta}(2\zeta - \alpha_r)\{v_{r0}(\zeta) + zv_{r1}(\zeta)\} -$$

$$- e^{z^2\zeta}\sum p_{rs}^{(1)} v_{s1}(\zeta)] - \int e^{z^2\zeta}\left\{2v_{r0}(\zeta) + (2\zeta - \alpha_r)\frac{dv_{r0}(\zeta)}{d\zeta}\right\} d\zeta -$$

$$- z\int e^{z^2\zeta}\left\{v_{r1}(\zeta) + (2\zeta - \alpha_r)\frac{dv_{r1}(\zeta)}{d\zeta}\right\} d\zeta + \sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(1)}\int e^{z^2\zeta}\frac{dv_{s1}(\zeta)}{d\zeta}\, d\zeta.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Интегралы в обеих частях уравнения исключаются если $2n$ функций $v_{r0}(\zeta)$ и $v_{r1}(\zeta)$ удовлетворяют $2n$ совместным уравнениям

$$-(2\zeta - \alpha_r)\frac{dv_{r1}}{d\zeta} = v_{r1} + \sum_{s=1}^{n}\{p_{rs}^{(0)} v_{s1} + p_{rs}^{(1)} v_{s0}\},$$

$$-(2\zeta - \alpha_r)\frac{dv_{r0}}{d\zeta} + \sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(1)}\frac{dv_{s1}}{d\zeta} = 2v_{r0} + \sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(0)} v_{s0}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Конечными особыми точками этой системы являются $\zeta = \frac{1}{2}\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \ldots, \frac{1}{2}\alpha_n$; они представляют собой нерегулярные особенности первого ранга. Точка в бесконечности является регулярной особенностью. Если в первоначальной системе произвести преобразование

$$\overline{W}_r = e^{-\beta_m z} W_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то $p_{rr}^{(1)}$ всюду заменится на $p_{rr}^{(1)} - \beta_m$; в частности $p_{mm}^{(1)}$ приводится к нулю.

Систему уравнений, при помощи которой определяются $v_{r0}(\zeta)$ и $v_{r1}(\zeta)$, можно написать в виде

$$\frac{dv_{r1}}{d\zeta}=\frac{-1}{2\zeta-\alpha_r}\left[v_{r1}+\sum_{s=1}^{n}\{p_{rs}^{(0)}v_{s1}+p_{rs}^{(1)}v_{s0}\}\right],$$

$$\frac{dv_{r0}}{d\zeta}=\frac{-1}{2\zeta-\alpha_r}\left[2v_{r0}+\sum_{s=1}^{n}p_{rs}^{(0)}v_{s0}+\sum_{s=1}^{n}\frac{p_{rs}^{(1)}}{2\zeta-\alpha_s}\left\{2v_{s1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{t=1}^{n}(p_{st}^{(0)}v_{t1}+p_{st}^{(1)}v_{t0})\right\}\right]$$

$$(r=1,\ 2,\ldots,n)$$

Особенность $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_m$ нерегулярна, если полюсы второго порядка в $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_m$ встречаются в коэфициентах системы; это имеет место, когда $p_{mm}^{(1)}\neq 0$. Но поскольку указанным преобразованием $p_{mm}^{(1)}$ может быть приведено к нулю, это делает особенность в $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_m$ регулярной. Предположим, что это преобразование произведено.

Показатели, относящиеся к регулярной особенности $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_m$, все равны нулю, за исключением

$$-\frac{1}{2}(\mu_m+1),\ -\frac{1}{2}(\mu_m+2).$$

Отсюда следует, что существует решение системы $v_{r0}(\zeta)$ и $v_{r1}(\zeta)$ вида

$$\left.\begin{aligned}v_{r0}^{(m)}(\zeta)&=\left(\zeta-\frac{1}{2}\alpha_m\right)^{-\frac{1}{2}(\mu_m+1)}\varphi_{r0}^{(m)}\left(\zeta-\frac{1}{2}\alpha_m\right)\\ v_{r1}^{(m)}(\zeta)&=\left(\zeta-\frac{1}{2}\alpha_m\right)^{-\frac{1}{2}(\mu_m+1)}\varphi_{r1}^{(m)}\left(\zeta-\frac{1}{2}\alpha_m\right)\end{aligned}\right\}(r=1,2,\ldots,n),$$

где функции $\varphi_{r0}^{(m)}\left(\zeta-\frac{1}{2}\alpha_m\right)$ и $\varphi_{r1}^{(m)}\left(\zeta-\frac{1}{2}\alpha_m\right)$ аналитические в соседстве с $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_m$.

Каждая особенность $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_s$ должна рассматриваться отдельно; она становится регулярной при помощи соответствующего преобразования. Каждой особенности $\zeta=\frac{1}{2}\alpha_s$ соответствует последовательность $2n$ функций

$$v_{10}^{(s)}(\zeta),\ldots,v_{n0}^{(s)}(\zeta),\ v_{11}^{(s)}(\zeta),\ldots,v_{n1}^{(s)}(\zeta).$$

Соответствующий контур C_s представляет собой петлю, окружающую точку $\zeta = \frac{1}{2}\alpha_s$ в отрицательном направлении и проходящую в бесконечность вдоль луча, так что $\mathrm{R}\left\{z^2\left(\zeta - \frac{1}{2}\alpha_s\right)\right\}$ отрицательно. Отсюда следует, что *каждая последовательность интегралов*

$$W_r^{(s)} = e^{-\beta_s z} \int\limits_{C_s} e^{z^2\zeta}\left(\zeta - \frac{1}{2}\alpha_s\right)^{-\frac{1}{2}(\mu_s+1)}\left\{\varphi_{r0}^{(s)}\left(\zeta - \frac{1}{2}\alpha_s\right) + \right.$$

$$\left. + z\varphi_{r1}^{(s)}\left(\zeta - \frac{1}{2}\alpha_s\right)\right\}d\zeta \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

представляет решение стандартной канонической системы второго ранга.

Случай, когда показатель $-\frac{1}{2}(\mu_s+1)$ является целым числом, легко может быть рассмотрен: второй показатель $-\frac{1}{2}(\mu_s+2)$, который тогда очевидно не является целым числом, просто занимает его место.

19·42. Решение системы общего ранга $q+1$. В общем случае формальные решения даются выражением

$$T_r^{(s)} = e^{Q_s(z)} z^{\mu_s}(B_{rs} + B_{rs}^{(1)} z^{-1} + \ldots),$$

где

$$Q_s(z) = \alpha_s \frac{z^{q+1}}{q+1} + \beta_s \frac{z^q}{q} + \ldots + \lambda_s z.$$

Обобщенные интегралы Лапласа

$$W_r = \int \exp(\zeta z^{q+1})\{v_{r0}(\zeta) + z v_{r1}(\zeta) + \ldots + z^q v_{rq}(\zeta)\}\, d\zeta$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяют системе ранга $q+1$, если

$$\int \exp(\zeta z^{q+1}) \sum_{j=1}^{q} z^j\{(q+1)z^{q+1}\zeta + j\}\, v_{rj}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \int \exp(\zeta z^{q+1}) \left\{\sum_{k=1}^{q} p_{rs}^{(k)} z^k\right\}\left\{\sum_{l=1}^{q} z^l v_{sl}(\zeta)\right\} d\zeta +$$

$$+ \alpha_r \int \exp(\zeta z^{q+1})\, z^{q+1} \sum_{l=1}^{q} z^l v_{rl}(\zeta)\, d\zeta \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Сюда входят все целые степени z до z^{q+1} включительно. Приравнивая нулю совокупность членов относительно z и $z^{\nu+q+1}$ для $\nu = 0, 1, \ldots, q$, получим последовательность $q+1$ уравнений с $q+1$ неизвестными функциями $v_{r0}(\zeta)$, $v_{r1}(\zeta), \ldots, v_{rq}(\zeta)$. После исключения множителя z^ν уравнение будет иметь вид

$$\int \exp(\zeta z^{q+1})\{(q+1)z^{q+1}\zeta+\nu\}\, v_{r\nu}(\zeta)\, d\zeta=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\int \exp(\zeta z^{q+1})\left\{\sum_{k+l=\nu} p_{rs}^{(k)} v_{sl}(\zeta)+z^{q+1}\sum_{k+l=q+\nu+1} p_{rs}^{(k)} v_{sl}(\zeta)\right\} d\zeta+$$

$$+\alpha_r\int \exp(\zeta z^{q+1})\, z^{q+1} v_{r\nu}(\zeta)\, d\zeta.$$

Однако, поскольку, интегрируя по частям,

$$\int \exp(\zeta z^{q+1}) z^{q+1} u(\zeta)\, d\zeta=[\exp(\zeta z^{q+1})\, u(\zeta)]-\int \exp(\zeta z^{q+1}\, du(\zeta),$$

каждое из $q+1$ уравнений удовлетворяется для соответствующего контура, если функции

$$v_{r0}(\zeta),\ v_{r1}(\zeta),\dots,v_{rq}(\zeta)\qquad (r=1, 2,\dots,n)$$

удовлетворяют последовательности $n(q+1)$ преобразованных уравнений

$$-\{(q+1)\zeta-\alpha_r\}\frac{dv_{r\nu}}{d\zeta}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k+l=q+\nu+1} p_{rs}^{(k)}\frac{dv_{sl}}{d\zeta}=$$

$$=(q+1-\nu)\, v_{r\nu}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k+l=\nu} p_{rs}^{(k)} v_{sl},$$

где $r=1, 2,\dots,n$; $\nu=0, 1,\dots, q$.

Принимая последовательно $\nu=q,\ q-1,\dots,0$, можно написать преобразованные уравнения в виде

$$-\{(q+1)\zeta-\alpha_r\}\ \frac{dv_{rq}}{d\zeta}=v_{rq}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k+l=q} p_{rs}^{(k)} v_{sl},$$

$$-\{(q+1)\zeta-\alpha_r\}\frac{dv_{r,q-1}}{d\zeta}+\sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(q)}\frac{dv_{sq}}{d\zeta}=2v_{r,q-1}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k+l=q-1} p_{rs}^{(k)} v_{sl},$$

. . . .

$$-\{(q+1)\zeta-\alpha_r\}\frac{dv_{r0}}{d\zeta}+\sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(q)}\frac{dv_{s1}}{d\zeta}+\dots+\sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(0)}\frac{dv_{sq}}{d\zeta}=$$

$$=(q+1)\, v_{r0}+\sum_{s=1}^{n} p_{rs}^{(0)} v_{s0},$$

где $r=1,2,\dots, n$.

Конечные особенности этой системы имеют вид

$$\zeta=\frac{\alpha_1}{q+1},\ \frac{\alpha_2}{q+1},\dots,\frac{\alpha_n}{q+1}.$$

и являются нерегулярными особенностями не больше ранга q. Точка в бесконечности — регулярная. Преобразование

$$\overline{W} = W_r \exp\left\{ -\beta_m \frac{z^q}{q} - \gamma_m \frac{z^{q-1}}{q-1} - \ldots - \lambda_m z \right\}$$

для фиксированного m изменяет

$$p_{rr}^{(q)},\ p_{rr}^{(q-1)}, \ldots, p_{rr}^{(0)}$$

соответственно в

$$p_{rr}^{(q)} - \beta_m,\ p_{rr}^{(q-1)} - \gamma_m, \ldots, p_{rr}^{(0)} - \lambda_m,$$

где $r = 1, 2, \ldots, n$. Уравнения для $v_{r0}, v_{r1}, \ldots, v_{rq}$ тогда будут иметь регулярную особую точку[1] в $\zeta = \alpha_m/(q+1)$, относительно которой все $n(q+1)$ показателей равны нулю, за исключением $q+1$, именно

$$-(\mu_m + 1)/(q+1),\ -(\mu_m + 2)/(q+1), \ldots, -(\mu + q + 1)/(q+1);$$

существует решение вида

$$v_{rk}^{(m)} = \left(\zeta - \frac{\alpha_m}{q+1}\right)^{-\frac{\mu_m + 1}{q+1}} \varphi_{rk}^{(m)}\left(\zeta - \frac{\alpha_m}{q+1}\right)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, q),$$

где функции $\varphi_{rk}^{(m)}$ аналитические вблизи $\zeta = \alpha_m/(q+1)$.

Таким образом, если C_s — петля вокруг $\zeta = \alpha_s/(q+1)$, так что $\mathbf{R}\,[z^{q+1}\{\zeta - \alpha_s/(q+1)\}]$ отрицательно вдоль луча, то *каждая последовательность интегралов*

$$W_r^{(s)} = e^{\beta_s \frac{z^q}{q} + \ldots + \lambda_s z} \int\limits_{C_s} e^{z^{q+1}} \left(\zeta - \frac{\alpha_s}{q+1}\right)^{-\frac{\mu_s + 1}{q+1}} \sum_{k=0}^{q} z^k \varphi_{rk}^{(s)} \times$$
$$\times \left(\zeta - \frac{\alpha_s}{q+1}\right) d\zeta$$

представляет решение стандартной канонической системы ранга q.

Если отношение $(\mu_s + 1)/(q+1)$ — целое число, то оно может быть заменено некоторым другим показателем (не целым числом). Секторы, в которых это интегральное представление решения действительно, будут более точно определены в следующем параграфе.

19 · 5. Асимптотические представления. Произведем в интегральном представлении функции $W_r^{(s)}$ подстановку

$$t = z^{q+1}\left\{\zeta - \frac{\alpha_s}{q+1}\right\},$$

для каждого s, тогда

$$W_r^{(s)} = e^{Q_s(z)} z^{\mu_s} \int\limits_{\Gamma_s} e^t t^{-\frac{\mu_s + 1}{q+1}} \sum_{k=0}^{q} z^k \varphi_{rk}^{(s)} (z^{-q-1} t)\, dt,$$

[1] Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 10, 460 Утверждение относительно показателей допускает косвенное доказательство принципом непрерывности; непосредственное доказательство неизвестно.

где Γ_s — петля вокруг точки $t=0$. Разлагая подинтегральное выражение, можно доказать, что если $\arg z = \varphi$ — луч, для которого

$$\mathrm{R}\,[z^{q+1}\{\zeta - \alpha_s/(q+1)\}] < 0,$$

то должен быть сектор, для которого $\arg z = \varphi$ будет внутренним лучом,

$$W_r^{(s)} = e^{Q_s(z)} z^{\mu_s} \left\{B_{rs} + \frac{B_{rs}^{(1)}}{z} + \ldots + \frac{B_{rs}^{(m)}}{z^m} + \frac{\varepsilon_m}{z^{m+1}}\right\},$$

где $\varepsilon_m \to 0$ для всех значений m, когда $z \to \infty$. Поскольку это относится к первым $m+1$ членам, данное разложение совпадает с формальным решением $T_r^{(s)}$. Таким образом $W_r^{(s)}$ *может быть асимптотически представлено* $T_r^{(s)}$ *вдоль луча* $\arg z = \varphi$ или символически

$$W'_r{}^{(s)} \sim T_r^{(s)} \qquad (\arg z = \varphi).$$

Луч в плоскости ζ, вдоль которого контур C_s следует в бесконечность такой, что $\mathrm{R} z^{q+1}\{\zeta - \alpha_s/(q+1)\}$ отрицательно; при этом условии он может изменяться, пока не пройдет через некоторую конечную особую точку, отличную от $\zeta = \alpha_s/(q+1)$. Нетрудно определить точные секторы в плоскости z, для которых соответствующие формулы действительны.

Всего имеется $N = n(n-1)(q+1)$ лучей, для которых

$$\mathrm{R}\,\{(\alpha_s - \alpha_t) z^{q+1}\} = 0 \qquad (t \neq s),$$

и эти лучи определяются формулой

$$\operatorname{tg}(q+1)\varphi = \operatorname{ctg}\arg(\alpha_s - \alpha_r).$$

Принимая, что эти лучи независимы, обозначим их в возрастающем угловом порядке через

$$\arg z = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N,$$

причем $\tau_{N+1} = \tau_1 + 2\pi$.

Когда точка z проходит из какого-либо сектора (τ_{m-1}, τ_m) в последующий сектор (τ_m, τ_{m+1}), вещественная часть одной из разностей $(\alpha_s - \alpha_t) z^{q+1}$ меняет свой знак с положительного на отрицательный. Обозначим эту частную разность через

$$(\alpha_{s_m} - \alpha_{t_m}) z^{q+1}.$$

Рассмотрим некоторые из $q+1$ значений m, для которых $\tau_m = s$, и пусть τ'_m будет лучом, следующим в возрастающем угловом порядке к τ_m, на котором вещественная часть другой разности, например

$$(\alpha_{s_{m'}} - \alpha_{t_{m'}}) z^{q+1},$$

где $t_{m'} = s$, меняет свой знак с положительного на отрицательный. Тогда аргумент контура C_s будет промежуточным между последовательной парой аргументов

$$\arg(\alpha_{s_m} - \alpha_s), \quad \arg(\alpha_{s_{m'}} - \alpha_s),$$

а $\mathrm{R}[z^{q+1}\{\zeta - \alpha_s/(q+1)\}]$ останется отрицательным для

$$\tau_m < \arg z < \tau_{m'} + \frac{\pi}{q+1}.$$

Интегралы

$$W_1^{(s)}, \; W_2^{(s)}, \ldots, \; W_n^{(s)}$$

дают последовательность $q+1$ решений канонической системы, фиксированных выбором сектора, в котором должен лежать луч контура C_s. Каждая последовательность действительна для любого из $q+1$ соответствующих секторов

$$\tau_m < \arg z < \tau_{m'} + \frac{\pi}{q+1}.$$

Для каждого луча $\arg z = \varphi$, который лежит внутри любого из этих секторов, существует фундаментальная последовательность решений

$$W_1 = W_1^{(s)}, \; W_2 = W_2^{(s)}, \ldots, \; W_n = W_n^{(s)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

так что

$$W_1^{(s)} \sim T_1^{(s)}, \; W_2^{(s)} \sim T_2^{(s)}, \ldots, \; W_n^{(s)} \sim T_n^{(s)}.$$

Для первоначальной системы соответственно получим теорему[1]: *существуют решения $w_1, w_2, \ldots, w_n$, так что*

$$w_r \sim s_r^{(s)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

внутри любого данного сектора

$$\tau_m < \arg z < \tau_{m'} + \pi/(q+1).$$

19·6. Характеристика решений в соседстве с бесконечностью. Решения канонической системы характеризуются следующей теоремой: *существует $N = n(n-1)(q+1)$ фундаментальных последовательностей решений стандартной канонической системы, именно*

$$\begin{matrix} W_{1m}^{(1)}, & W_{2m}^{(1)}, \ldots, & W_{nm}^{(1)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ W_{1m}^{(n)}, & W_{2m}^{(n)}, \ldots, & W_{nm}^{(n)}, \end{matrix} \qquad (m = 1, 2, \ldots, N)$$

так что

$$W_{rm}^{(s)} \sim T_r^{(s)} \qquad \tau_m \leqslant \arg z < \tau_{m+1}$$

[1] Эта теорема обобщает результат, полученный Горном [J. für Math., 133 (1907), 19].

откуда

$$W^{(s)}_{r,\,m+1} = W^{(s)}_{rm} \qquad (s \neq s_m),$$

$$W^{(s_m)}_{r,\,m+1} = W^{(s_m)}_{rm} + A_m W^{(t_m)}_{rm}$$

и наконец

$$W^{(s)}_{r,N+1} = e^{2\pi i \mu_s} W^{(s)}_{r1}.$$

В настоящем параграфе мы докажем эту теорему[1].

Согласно теореме предыдущего параграфа, плоскость z можно разделить на конечное число секторов σ, в каждом из которых существует фундаментальная последовательность решений

$$W_1 = W_1^{(s)},\ W_2 = W_2^{(s)}, \ldots,\ W_n = W_n^{(s)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

так что в рассматриваемом секторе

$$W_r^{(s)} \sim T_r^{(s)}.$$

Секторы могут быть выбраны таким образом, чтобы $\arg z = \tau_m$ были внутренними лучами и чтобы внутри каждого сектора лежало не больше одного луча. Если σ — сектор, не содержащий никакого луча τ, то каждое решение канонической системы уравнений может быть представлено асимптотически в области σ, так как общее решение имеет вид

$$W_r = c_1 W_r^{(1)} + c_2 W_r^{(2)} + \ldots + c_n W_r^{(n)} \quad (r = 1, 2, \ldots, w),$$

а это решение приводит к асимптотическому соотношению

$$W_r \sim c_1 T_r^{(1)} + c_2 T_r^{(2)} + \ldots + c_n T_r^{(n)}.$$

Для больших значений $|z|$ относительные величины членов в этом выражении соответствуют относительным величинам

$$\mathrm{R}(\alpha_1 z^{q+1}),\ \mathrm{R}(\alpha_2 z^{q+1}), \ldots,\ \mathrm{R}(\alpha_n z^{q+1}),$$

а относительный порядок величины не меняется, за исключением лучей

$$\arg z = \tau_1,\ \tau_2, \ldots, \tau_N,$$

поэтому не меняется и в некотором секторе σ, не содержащем луча τ. Предположим, что для рассматриваемого сектора индексы $1, 2, \ldots, n$ выбраны таким образом, что

$$\mathrm{R}(\alpha_1 z^{q+1}) > \mathrm{R}(\alpha_2 z^{q+1}) > \ldots > \mathrm{R}(\alpha_n z^{q+1}),$$

и пусть

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0,\ c_k \neq 0;$$

тогда для сектора σ

$$W_r \sim c_k T_r^{(k)}.$$

---

[1] Решения, к которым эта теорема относится, не являются интегральными решениями §§ 19·4—19·42; решения в виде интегралов Лапласа сохраняют свою асимптотическую форму в максимальных секторах; в настоящей теореме секторы являются минимальными.

Но поскольку последовательные секторы примыкают друг к другу, каждое решение $W_1, W_2, \ldots, W_n$ будет иметь такое же асимптотическое представление в последовательных секторах до достижения сектора, содержащего луч τ. Таким образом, если сектор σ и последующие секторы, до сектора, содержащего луч τ_{m+1} включительно, сливаются в один сектор σ_m, отсюда следует, что *существует фундаментальная последовательность решений*

$$W_1^{(s)}, \; W_2^{(s)}, \ldots, \; W_n^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

так что во всем секторе σ_m

$$W_r \sim T_r^{(s)}.$$

Рассмотрим теперь характер общего решения

$$W_1, W_2, \ldots, W_m$$

в секторе σ_m. Когда точка z пересекает луч $\arg z = \tau_m$, порядок величины $\mathbf{R}\{Q_{s_m}(z)\}$ и $\mathbf{R}\{Q_{t_m}(z)\}$ меняется и

$$\mathbf{R}\{(\alpha_{s_m} - \alpha_{t_m}) z^{q+1}\} > 0 \qquad (\arg z < \tau_m),$$
$$< 0 \qquad (\arg z > \tau_m).$$

Предположим, что на начальном ограничивающем луче сектора σ_m

$$\mathbf{R}(\alpha_1 z^{q+1}), \; \mathbf{R}(\alpha_2 z^{q+1}), \ldots, \; \mathbf{R}(\alpha_n z^{q+1})$$

расположены в убывающем порядке. Если z пересекает луч $\arg z = \tau_m$, то относительный порядок двух частных последовательных членов, например

$$\mathbf{R}\{\alpha_k z^{q+1}\}, \; \mathbf{R}\{\alpha_{k+1} z^{q+1}\},$$

изменится. Однако, несмотря на это, общее решение

$$W_r = c_1 W_r^{(1)} + c_2 W_r^{(2)} + \ldots + c_n W_r^{(n)} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

не сохранит свою асимптотическую форму, исключая случай,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0, \; c_k \neq 0, \; c_{k+1} \neq 0,$$

когда решение будет иметь асимптотическую форму

$$W_r \sim c_k T_r^{(k)}$$

на начальном ограничивающем луче, и асимптотическую форму

$$W_r \sim c_{k+1} T_r^{k+1}$$

на конечном ограничивающем луче сектора σ_m.

Однако, если два частных решения W_r и W'_r могут быть найдены таким образом, что на начальном ограничивающем луче σ_m

$$W_r \sim c_k T_r^{(k)}, \; W'_r \sim c'_{k+1} T_r^{(k+1)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то линейная комбинация $W_r + AW'_r$ этих решений может быть выбрана такой, чтобы она сохранила свою асимптотическую форму во всем секторе σ_m. Поскольку

$$W_r = c_r W_r^{(k)} + c_{k+1} W_r^{(k+1)} + \ldots + c_n W_r^{(n)},$$
$$W'_r = c'_{k+1} W_r^{(k+1)} + \ldots + c'_n W_r^{(n)},$$

необходимо только придать A значение $-c_{k+1}/c'_{k+1}$.

Теперь, пусть

$$W_{11}^{(s)},\ W_{21}^{(s)}, \ldots,\ W_{n1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будет любой фундаментальной последовательностью решений, так что в секторе σ_1

$$W_{r1}^{(s)} \sim T_r^{(s)}.$$

Каждое из n независимых решений последовательности сохранит свою асимптотическую форму во всем последующем секторе σ_2, за исключением возможного решения

$$W_{11}^{(s_1)},\ W_{21}^{(s_1)}, \ldots,\ W_{n1}^{(s_1)},$$

но когда этот специальный случай возникает[1], постоянная A_1 может быть выбрана такой, чтобы решение

$$W_{11}^{(s_1)} + A_1 W_{11}^{(t_1)},\ W_{21}^{(s_1)} + A_1 W_{21}^{(t_1)}, \ldots,\ W_{n1}^{(s_1)} + A_1 W_{n1}^{(t_1)}$$

сохранило свою асимптотическую форму

$$T_1^{(s_1)},\ T_2^{(s_1)}, \ldots,\ T_n^{(s_1)}$$

во всем секторе σ_2. Поэтому новая фундаментальная последовательность решений

$$W_{12}^{(s)},\ W_{22}^{(s)}, \ldots,\ W_{n2}^{(s)},$$

где

$$W_{r2}^{(s)} = W_{r1}^{(s)} \qquad (s \neq s_1),$$
$$W_{r2}^{(s_1)} = W_{r1}^{(s_1)} + A_1 W_{r1}^{(t_1)}$$

сохраняет свою асимптотическую форму во всем секторе σ_2.

Аналогично фундаментальные последовательности решений

$$\begin{matrix} W_{13}^{(s)},\ W_{23}^{(s)}, \ldots,\ W_{n3}^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ W_{1N}^{(s)},\ W_{2N}^{(s)}, \ldots,\ W_{nN}^{(s)} \end{matrix} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1] Важно отметить, что этот специальный случай возникает только, когда $\mathrm{R}(\alpha_{s_1} z^{q+1})$ меняет порядок относительно остальных выражений $\mathrm{R}(\alpha_s z^{q+1})$ и переходит в низший ранг.

определяются последовательно и сохраняют свои асимптотические формы в секторах $\sigma_3, \ldots, \sigma_N$. Из последней последовательности тот же процесс приводит к новой последовательности

$$W_{1,N+1}^{(s)}, \quad W_{2,N+1}^{(s)}, \ldots, \quad W_{n,N+1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

сохраняющей свой асимптотический характер во всем секторе σ_1. Остается доказать, что выбор начальной фундаментальной последовательности решений может быть сделан таким, чтобы

$$W_{r,N+1}^{(s)} = e^{2\pi i \mu_s} W_{r1}^{(s)} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Сначала покажем, что конечная фундаментальная последовательность решений совершенно не зависит от выбора начальной последовательности

$$W_{11}^{(s)}, \quad W_{21}^{(s)}, \ldots, \quad W_{n1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть

$$U_{11}^{(s)}, \quad U_{21}^{(s)}, \ldots, \quad U_{n1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

будет новой начальной последовательностью фундаментальных решений, и пусть

$$U_{1m}^{(s)}, \quad U_{2m}^{(s)}, \ldots, \quad U_{nm}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n; \ m = 2, 3, \ldots, N)$$

будут выведенными из нее последовательными фундаментальными последовательностями. Обозначим постоянную, соответствующую A_m, через B_m.

Предположим, что в секторе (τ_1, τ_2)

$$\mathrm{R}(\alpha_j z^{q+1}) < \mathrm{R}(\alpha_l z^{q+1}) < \mathrm{R}(\alpha_k z^{q+1}) < \ldots,$$

тогда, поскольку $\mathrm{R}(\alpha_i z^{q+1})$ — выражение низшего порядка, возможно только одно решение, асимптотическое в (τ_1, τ_2):

$$T_1^{(i)}, \quad T_2^{(i)}, \ldots, \quad T_n^{(i)},$$

следовательно

$$U_{r1}^{(i)} = W_{r1}^{(i)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь каждые два выражения $\mathrm{R}(\alpha_s z^{q+1})$ становятся равными $2(q+1)$ раз, когда z описывает полный контур вокруг начала; если они равны на луче $\arg z = \tau'$, то они также равны и на лучах

$$\arg z = \tau' + \frac{\varkappa\pi}{q+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, 2q+1)$$

Следовательно в секторе

$$\tau_1 \leqslant \arg z \leqslant \tau_1 + \frac{\pi}{q+1} = \tau_\nu,$$

где $\nu = \frac{1}{2} n(n-1)$, любые два выражения $\mathrm{R}(\alpha_s z^{q+1})$ становятся равными только на одном луче. В частности, когда $\arg z$ увеличивается от τ_1 до τ_ν · $\mathrm{R}(a_i z^{q+1})$ постепенно возрастает и наконец превосходит все остальные выражения $\mathrm{R}(\alpha_s z^{q+1})$, откуда

$$W_{r1}^{(i)} = W_{r2}^{(i)} = \ldots = W_{r\nu}^{(i)},$$

$$U_{r1}^{(i)} = U_{r2}^{(i)} = \ldots = U_{r\nu}^{(i)}.$$

Тогда, поскольку

$$U_{r1}^{(i)} = W_{r1}^{(i)},$$

отсюда следует, что

$$U_{rm}^{(i)} = W_{rm}^{(i)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

для $m \leqslant \nu$.

Поскольку в (τ_1, τ_2) $\mathrm{R}(a_j z^{q+1})$ является второй в возрастающем порядке величиной, получим соотношение вида

$$U_{r1}^{(j)} = W_{r1}^{(j)} + cW_1^{(i)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда[1]

$$U_{rm}^{(j)} = W_{rm}^{(j)} + c\, W_{rm}^{(i)}$$

для $m = 2, 3, \ldots, \theta$, где θ — значение m, для которого величина $\mathrm{R}(a_j z^{q+1})$ меньше $\mathrm{R}(a_i z^{q+1})$. Теперь, поскольку

$$W_{r,\theta+1}^{(j)} = W_{r\theta}^{(j)} + A_\theta W_{r\theta}^{(i)}, \quad W_{r,\theta+1}^{(i)} = W_{r\theta}^{(i)},$$

$$U_{r,\theta+1}^{(j)} = U_{r\theta}^{(j)} + B_\theta U_{r\theta}^{(i)}, \quad U_{r,\theta+1}^{(i)} = U_{r\theta}^{(i)},$$

соотношение

$$U_{r\theta}^{(j)} = W_{r\theta}^{(j)} + cW_{r\theta}^{(i)}$$

может быть написано в виде

$$U_{r,\theta+1}^{(j)} - B_\theta U_{r,\theta+1}^{(i)} = W_{r,\theta+1}^{(j)} - (A_\theta - c)\, W_{r,\theta+1}^{(i)}.$$

В секторе $(\tau_\theta, \tau_{\theta+1})$ $\mathrm{R}(\alpha_i z^{q+1}) > \mathrm{R}(\alpha_j z^{q+1})$, а поскольку мы доказали, что

$$U_{r,\theta+1}^{(i)} = W_{r,\theta+1}^{(i)},$$

отсюда следует, что

$$B_\theta = A_\theta - c,$$

следовательно

$$U_{r,\theta+1}^{(j)} = W_{r,\theta+1}^{(j)}.$$

Но для $m = \theta + 1, \theta + 2, \ldots, \nu$, порядок $\mathrm{R}(\alpha_j z^{q+1})$ не может быть ниже порядка какого-нибудь другого выражения $\mathrm{R}(\alpha_s z^{q+1})$, поэтому

$$U_{rm}^{(j)} = W_{rm}^{(j)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

для $m = \theta + 1, \theta + 2, \ldots, \nu$.

[1] Нужно отметить, что значение $\mathrm{R}(\alpha_j z^{q+1})$ может быть ниже $\mathrm{R}(\alpha_s z^{q+1})$ только для $s = i$.

Аналогично, соотношение вида

$$U_{rm}^{(k)} = W_{rm}^{(k)} + cW_{rm}^{(j)} + dW_{rm}^{(i)}$$

справедливо для последовательных значений m. Постоянные c и d в этом соотношении меняют свои значения только для значений m, для которых относительный порядок трех выражений

$$\mathrm{R}(\alpha_i z^{q+1}),\ \mathrm{R}(\alpha_j z^{q+1}),\ \mathrm{R}(\alpha_k z^{q+1})$$

меняется для луча $\arg z = \tau_m$. Если порядок первого выражения (вначале низшего) увеличить относительно второго выражения, то значение d может измениться. Если порядок второго выражения сделать больше третьего, то c будет равно нулю; если порядок первого выражения будет также больше третьего, то d будет равно нулю. Таким образом, если θ' — значение m, для которого порядок первого выражения выше порядка третьего, то

$$U_{rm}^{(k)} = W_{rm}^{(k)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

для $m = \theta' + 1,\ \theta' + 2, \ldots, \nu$.

Продолжая доказательство, аналогично можно доказать, что при фиксированном значении $m \leqslant \nu$ и выше него соотношение

$$U_{rm}^{(s)} = W_{rm}^{(s)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

справедливо для каждого значения s. В частности, конечная фундаментальная система

$$U_{1, N+1}^{(s)},\ U_{2, N+1}^{(s)}, \ldots, U_{n, N+1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

тождественна системе

$$W_{1, N+1}^{(s)},\ W_{2, N+1}^{(s)}, \ldots, W_{n, N+1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно конечная фундаментальная система не зависит от выбора начальной фундаментальной системы, если, конечно, начальный выбор соответствует условиям теоремы. Предположим, что начальная система определяется инвариантной конечной системой соотношениями

$$W_{r1}^{(s)} = e^{2\pi i \mu_s} W_{r, N+1}^{(s)} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Это определение имеет смысл, так как, поскольку $T_r^{(s)}$ умножается на $e^{2\pi i \mu_s}$, когда точка z описывает полный положительный контур вокруг точки в бесконечности, асимптотическое соотношение

$$W_{r, N+1}^{(s)} \sim e^{2\pi i \mu_s} T_r^{(s)}$$

справедливо для сектора (τ_1, τ_2).

Таким образом предложенная теорема полностью доказана. Ее распространение на первоначальную систему следует непосредственно и может быть выражено следующим образом. *Существует* $N=n(n-1)(q+1)$ *фундаментальных решений системы*

$$\frac{dw_r}{dz}=\sum_{s=1}^{n} p_{rs}(z)\,w_s \qquad (r=1, 2,\ldots, n),$$

ранг которых в бесконечности равен q, *именно*

$$\left.\begin{matrix} w_{1m}^{(1)}, & w_{2m}^{(1)},\ldots, & w_{nm}^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{1m}^{(n)}, & w_{2m}^{(n)},\ldots, & w_{nm}^{(n)}, \end{matrix}\right\} \qquad (m=1, 2,\ldots, N),$$

так что, если формальное фундаментальное решение имеет вид

$$\left.\begin{matrix} S_1^{(1)}, & S_2^{(1)},\ldots, & S_n^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_1^{(n)}, & S_2^{(n)},\ldots, & S_n^{(n)}, \end{matrix}\right\}$$

то

$$w_{rm}^{(s)}\sim S_r^{(s)}, \quad \tau_m\leqslant \arg z<\tau_{m+1}.$$

N *фундаментальных решений связаны соотношениями*

$$w_{r,\,m+1}^{(s)}=w_{rm}^{(s)} \qquad (s\neq s_m),$$

$$w_{r,\,m+1}^{(s_m)}=w_{rm}^{(s_m)}+A_m w_{rm}^{(t_m)},$$

где для $m=N$

$$w_{r,\,N+1}^{(s)}=e^{2\pi i\mu_s}\,w_{r1}^{(s)}.$$

Любая последовательность функций $w_{rm}^{(s)}$, удовлетворяющих всем этим условиям, дает решение диференциальной системы. Поэтому говорят, что теорема дает *полную характеристику* решений системы относительно точки в бесконечности.

Постоянные, определяющие природу стандартной канонической системы, называются *характеристическими постоянными* и распадаются на два класса. Экспоненциальными постоянными являются $q+1$ постоянных $\alpha_s, \beta_s,\ldots, \lambda_s$ каждого полинома $Q_s(z)$ и показателей μ_s; всего число этих постоянных равно $n(q+2)$ и они не зависят друг от друга. Постоянные преобразования A_1, $A_2,\ldots, A_N$ не все независимы, так как $n-1$ из них могут быть исключены преобразованием

$$\overline{W}_r=c_r W_r \qquad (r=1, 2,\ldots, n),$$

где постоянные c_r выбраны соответствующим образом. Число существенных характеристических постоянных поэтому равно

$$n(q+2)+n(n-1)(q+1)-(n-1)=n^2(q+1)+1.$$

Коэфициенты в стандартной канонической системе содержат всего $n^2(q+1)+n$ постоянных, которые могут быть приведены к $n^2(q+1)+1$ умножением $W_1, W_2, \ldots, W_n$ на соответствующие постоянные. В общем случае число постоянных уравнения не может быть далее приведено; эти постоянные поэтому называются *неприводимыми постоянными* системы. Поскольку число характеристических постоянных равно числу неприводимых постоянных, отсюда следует, что *характеристические постоянные не связаны каким-либо определенным соотношением.*

19·7. Обобщенная проблема Римана. Проблема Римана в ее первоначальной форме (§ 15·92), относится к трем особым точкам, которые являются регулярными; эта проблема была обобщена Биркгоффом следующим образом: *нужно построить систему n линейных уравнений с данными особыми точками*

$$z_1,\ z_2, \ldots,\ z_m,\ z_{m+1}=\infty$$

соответствующего ранга

$$q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m,\ q_{m+1},$$

и с данной монодромной группой при заданных характеристических постоянных для каждой особой точки.

Чтобы показать, что эта система имеет смысл, рассмотрим совместную систему уравнений

$$\frac{dw_r}{dz}=\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2+q_k}\frac{A_{rskl}}{(z-z_k)^l}+\sum_{k=0}^{q_{m+1}}B_{rsk}z^k\right\}w_s\quad (r=1, 2, \ldots, n),$$

представляющую наиболее общее уравнение, особые точки которого $z_1, z_2, \ldots, z_m, \infty$ заданных рангов $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}$. Число произвольных постоянных A_{rskl} и B_{rsk} равно

$$n^2\left\{\sum_{l=1}^{m+1} q_l+2m+1\right\}.$$

Теперь, пусть

$$w_1^{(s)},\ w_2^{(s)}, \ldots,\ w_n^{(s)} \qquad (s=1,\ 2, \ldots, n)$$

будет фундаментальной последовательностью решений, фиксированных принятием условия, что в некоторой частной особой точке a

$$w_r^{(s)}=\delta_{rs};$$

группа этой частной фундаментальной последовательности известна.

В этом случае монодромная группа имеет m фундаментальных подстановок, соответственно каждой особой точке[1]. Каж-

[1] Если эти подстановки равны соответственно $S_1, S_2, \ldots, S_m$, а S_{m+1} — подстановка, соответствующая $z=\infty$, то

$$S_{m+1}S_m \ldots S_2S_1=I,$$

где I — тождественная подстановка.

дая подстановка определяется матрицей n^2 постоянных, поэтому группа содержит только mn^2 произвольных постоянных.

Число характеристических постоянных, относящихся к особенности z_k, равно $n^2(q_k+1)+1$; общее число характеристических постоянных равно

$$\sum_{k=1}^{m}\{n^2(q_k+1)+1\}.$$

Но показатели ρ определяются как группой, так и характеристическими постоянными, и число их равно $n(m+1)$. Следовательно между постоянными группы и характеристическими постоянными существует $n(m+1)$ соотношений.

Наконец, должна быть создана зависимость в каждой особой точке между выбранной фундаментальной последовательностью решений и каноническими фундаментальными последовательностями, определяемыми теоремой § 19·6. Эта зависимость определяется группой, обусловливающей показатели в каждой особенности, за исключением n мультипликативных постоянных. Таким образом в каждой особенности налагаются $n-1$ дополнительных условий; всего получаем $(n-1)(m+1)$ дополнительных условий.

Общее число условий, которые должны быть удовлетворены, равно

$$nm^2+\sum_{k=1}^{m+1}\{n^2(q_k+1)+1\}-n(m+1)+(n-1)(m+1)=$$

$$=n^2\left\{\sum_{k=1}^{m+1}q_k+2m+1\right\},$$

и следовательно равно общему числу постоянных.

Сформулированная таким образом проблема была разрешена Биркгоффом [1]. Если удовлетворены очевидные условия существования, то существует или решение проблемы как указано, или решение проблемы, измененное заменой показателей $\mu_1,\ldots,\mu_n$ соответственно любой из особых точек на $\mu_1+k_1,\ldots,\mu_n+k_n$, где $k_1,\ldots k_n$ — целые числа.

Примеры

1. Система

$$z\frac{dW}{dz}=rV,\quad z\frac{dV}{dz}=sW+(z+1-p_1)V$$

имеет формальные решения

[1] Proc. Am. Acad., 49 (1913), 536. Birkhoff, [Trans. Am. Math. Soc., 14 (1913), 462—476].

$$W = S_1(z), \quad V = \frac{z}{r}\frac{dS_1(z)}{dz},$$

$$W = S_2(z), \quad V = \frac{z}{r}\frac{dS_2(z)}{dz},$$

где, если $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - p_1$, $\lambda_1\lambda_2 = -rs$, то

$$S_1(z) = \left\{1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{1} z^{-1} + \frac{\lambda_1(\lambda_1+1)\lambda_2(\lambda_2+1)}{1\cdot 2} z^{-2}\ldots\right\},$$

$$S_2(z) = e^z z^{-p_1}\left\{1 + \frac{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}{1} z^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda_1-1)(\lambda_1-2)(\lambda_2-1)(\lambda_2-2)}{1\cdot 2} z^{-2} + \ldots\right\}.$$

2. Пусть

$$\rho_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}, \quad \rho_2 = e^{-2\pi i\lambda_2},$$

тогда, если $\rho_1 \neq 1$, $\rho_2 \neq 1$, то r и s не равны нулю и формальные решения расходятся. Если $\rho_1 = 1$, то r или s может быть равно нулю и по меньшей мере одно формальное решение ограничено.

Оба формальных решения при $r = 0$ имеют вид

$$W = 1, \quad V = -\frac{s}{z}\left\{1 + \frac{p_1 - 2}{z} + \frac{(p_1-2)(p_1-3)}{z^2} + \ldots\right\},$$

$$W = 0, \quad V = e^z z^{1-p_1}.$$

а при $s = 0$

$$W = 1, \quad V = 0,$$

$$W = re^z z^{-p_1}\left\{1 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_1(p_1+1)}{z^2} + \ldots\right\}, \quad V = e^z z^{1-p_1}.$$

Если оба формальных ряда ограничены, то и r и s могут быть равны нулю.

3. Определяя формальные решения $s_1(z)$ и $s_2(z)$ уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0,$$

где

$$p(z) = -1 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots, \quad q(z) = \frac{q_2}{z^2} + \frac{q_3}{z_3} + \ldots,$$

и применяя формальные решения $S_1(z) S_2(z)$, покажите, что коэфициенты в преобразовании

$$w = a_{11}(z) W + a_{12}(z) V,$$

$$v = a_{21}(z) W + a_{22}(z) V$$

могут быть разложены в степенной ряд по z, когда $r \neq 0$.

4. Два линейно-независимых решения уравнения примера 3 могут быть представлены в виде

$$w_i = z^{\lambda_1}\left\{A_i(z)\int\limits_{c_i} e^{z\zeta}\zeta^{\lambda_1-1}(1-\zeta)^{-\lambda_2}d\zeta + B_i(z)\int\limits_{c_i} e^{z\zeta}\zeta^{\lambda_1}\right.$$

$$\left.(1-\zeta)^{-\lambda_2}d\zeta\right\} \qquad (i = 1, 2),$$

где $A_i(z)$ и $B_i(z)$ — функции, аналитические в бесконечности, которые приводятся к 1 и 0 при $z=\infty$. Это представление не имеет места, если ρ_1 или ρ_2 равно нулю, когда оно заменяется одним из следующих представлений

$$w_1 = A(z) + B(z)e^z z^{1-p_1}\int e^{-z} z^{p_1-2}dz, \quad w_2 = B(z)e^z z^{1-p_1},$$

$$w_1 = A(z)\int e^z z^{-p_1}dz + B(z)e^z z^{1-p_1}, \qquad w_2 = A(z).$$

5. Если множители ρ_1 и ρ_2 не зависят друг от друга и не равны единице, то коэфициенты в рядах Лорана

$$w_1 = z^{\lambda_1}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} l_1^{(\nu)}z^\nu, \quad w_2 = z^{\lambda_2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} l_2^{(\nu)}z^\nu,$$

представляющих разложения двух линейно-независимых решений уравнения примера 3, имеют вид

$$l_i^{(\nu)} = L_i^{(\nu)} + \left\{a_1 + b_1(\lambda_i+\nu+1)\right\}L_i^{(\nu+1)} +$$

$$+\left\{a_2 + b_2(\lambda_i+\nu+2)\right\}L_i^{(\nu+2)} + \ldots \qquad (i = 1, 2),$$

где

$$L_1^{(\nu)} = \frac{\lambda_1(\lambda_1+1)\ldots(\lambda_1+\nu-1)}{\nu!(\lambda_1-\lambda_2+1)\ldots(\lambda_1-\lambda_2+\nu)},$$

$$L_2^{(\nu)} = \frac{\lambda_2(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_2+\nu-1)}{\nu!(\lambda_2-\lambda_1+1)\ldots(\lambda_2-\lambda_1+\nu)};$$

а a_ν и b_ν — таковы, что $|a_\nu|^{1/\nu}$, $|b_\nu|^{1/\nu}$ конечны для всех значений ν.

6. Если ρ_1 и ρ_2 не зависят друг от друга и не равны единице и если функция $\psi(z)$ аналитическая в бесконечности, то для каждого решения $W(z)$ уравнения

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-1 + \frac{p_1}{z}\right\}\frac{dW}{dz} - \frac{rs}{z^2}W = 0,$$

существует соотношение вида

$$W\{z+\psi(z)\} = a(z)W(z) + b(z)\frac{dW(z)}{dz},$$

где $a(z)$ и $b(z)$ — функции, аналитические в бесконечности.

ГЛАВА XX

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

20 · 1. Необходимость систематической классификации. Принципы абстрактной теории обыкновенных линейных диференциальных уравнений основаны на классических теоремах, подтверждающих существование и определяющих природу решений в соседстве с обыкновенной точкой. Свойства решений в соседстве с регулярной особенностью, а также поведение решений относительно нерегулярных особых точек известны. С другой стороны, недостаточно изучены функции, определяемые специальными уравнениями или классами уравнений. Кроме простых уравнений, решения которых являются элементарными функциями, единственным исчерпывающе изученным уравнением является гипергеометрическое уравнение в общей форме или частные виды его (например, уравнения Лежандра, Бесселя, Вебера или уравнение конфлюэнтных гипергеометрических функций). Частично изучены уравнения Матье и Ляме, однако теория функций, определяемых этими уравнениями, разработана далеко не полностью.

В настоящей главе систематическая классификация линейных диференциальных уравнений с рациональными коэфициентами осуществляется подразделением их на типы соответственно числу и природе их особых точек.

Эта систематизация базируется на исследовании Клейна и Бохера[1], которые установили, что основные линейные диференциальные уравнения, возникающие в проблемах математической физики, могут быть получены из уравнения с пятью регулярными независимыми особыми точками; в этом уравнении разность между двумя показателями, относящимися к каждой особой точке, равна $\frac{1}{2}$. Слияние двух таких особых точек образует регулярную особенность, разность показателей которой произвольна; слияние трех или больше точек в одной точке образует нерегулярную особенность.

С каждым линейным диференциальным уравнением второго порядка с рациональными коэфициентами связано определенное число регулярных и нерегулярных особых точек. Рассматривая

[1] Klein, Vorlesungen über lineare Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung (1894), 40; Bocher, Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie (1894), p. 193.

каждую из этих особенностей, как образованную слиянием соответствующего числа регулярных особенностей с разностью показателей, равной $\frac{1}{2}$, можно считать, что это уравнение выведено определенными процессами из одной стандартной последовательности уравнений. Таким образом могут быть исследованы все уравнения.

20 · 2. Слияние особых точек. Здесь удобно ввести термин, который обозначал бы регулярную особую точку с разностью показателей, равной $\frac{1}{2}$; назовем такую точку *элементарной*. Если регулярная особая точка не определена таким образом, примем, что разность показателей произвольна.

Наиболее общее уравнение, имеющее p элементарных особенностей, расположенных в точках

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, \infty$$

имеет вид (§ 15 · 4)

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{p-1}\frac{\frac{1}{2}-2\alpha_r}{z-a_r}\right\}\frac{dw}{dz}+\left\{\sum_{r=1}^{p-1}\frac{\alpha_r\left(\alpha_r+\frac{1}{2}\right)}{(z-a_r)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{A_0+A_1z+\ldots+A_{p-3}z^{p-3}}{\prod\limits_{r=1}^{p-1}(z-a_r)}\right\}w=0,$$

где показатели, относящиеся к a_r, равны α_r и $\alpha_r+\frac{1}{2}$. Поскольку показатели, относящиеся к особой точке в бесконечности, также различаются на $\frac{1}{2}$,

$$A_{p-3}=\left\{\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r\right\}^2-\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r^2-\frac{p-2}{2}\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r+\frac{(p-2)(p-4)}{16}.$$

Следовательно постоянная A_{p-3} определена; остальные $p-3$ постоянных $A_0, A_1, \ldots, A_{p-4}$ совершенно произвольны.

Предположим, что две элементарные особенности сливаются; так пусть $a_2=a_1$, тогда определяющее уравнение, относящееся к особой точке $z=a_1$, будет иметь вид

$$\rho^2-2(\alpha_1+\alpha_2)\rho+\alpha_1\left(\alpha_1+\frac{1}{2}\right)+\alpha_2\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)+A=0,$$

где

$$A=\frac{A_0+A_1a_1+\ldots+A_{p-3}a_1^{p-3}}{(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_{p-3})}.$$

Разность показателей, относящаяся к особенности $z=a_1$, в этом случае зависит от A, т. е. от произвольных постоянных $A_0,\ldots,$

A_{p-4}, следовательно она произвольна, если $p \geqslant 4$. Однако особенность остается регулярной.

Если сливаются точки a_{p-1} и ∞, то пусть произвольные постоянные $A_0, \ldots, A_{p-4}$ будут такими, что

$$\lim \frac{A_0}{a_{p-1}} = -A_0', \ldots, \lim \frac{A_{p-4}}{a_{p-1}} = -A_{p-4}',$$

где $A_0' \ldots, A_{p-4}'$ конечны, но вообще произвольны; поскольку A_{p-3}, конечно,

$$\lim \frac{A_{p-3}}{A_{p-1}} = 0.$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\sum_{r=1}^{p-2} \frac{\frac{1}{2} - 2\alpha_r}{z - a_r}\right\} \frac{dw}{dz} + \left\{\sum_{r=1}^{p-2} \frac{\alpha_r\left(\alpha_r + \frac{1}{2}\right)}{(z-a_r)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_0' + A_1'z + \ldots + A_{p-4}' z^{p-4}}{\prod\limits_{r=1}^{p-2}(z-a_r)}\right\} w = 0;$$

особая точка в бесконечности регулярна с произвольной разностью показателей, поскольку A_{p-4}' произвольно.

С другой стороны, предположим, что любые q элементарных особых точек сливаются, тогда, если $q > 2$, то полученная особенность не допускает определяющего уравнения, следовательно является нерегулярной особенностью.

Природа нерегулярной особой точки определяется числом элементарных особенностей, слиянием которых оно было образовано. Назовем нерегулярную особенность, образованную слиянием трех элементарных особенностей, особенностью *первого рода* и определим нерегулярную особенность r-го рода, как образованную слиянием $r+2$ элементарных особенностей. Очевидно, порядок слияния особенностей не влияет на природу результирующей особенности.

20·21. Стандартные формы; преобразования. Умножая зависимую переменную на соответствующий множитель, можно, не изменяя разности показателей, придать одному показателю в какой-нибудь регулярной особой точке некоторое выбранное значение. Таким образом, если уравнение с зависимой переменной u имеет элементарную особенность a_r с показателями α_r и $\alpha_r + \frac{1}{2}$, то преобразование

$$u = (z - a_r)^{\alpha_r} v$$

приводит к уравнению относительно v с особенностью в a_r и показателями, равными 0 и $\frac{1}{2}$.

В более общем случае, когда уравнение относительно u определяется схемой

$$u = P\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_m & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_m & * \, z \\ \alpha_1 + \frac{1}{2} & \alpha_2 + \frac{1}{2} & \ldots \alpha_m + \frac{1}{2} & * \end{Bmatrix},$$

где звездочки обозначают, что точка в бесконечности является некоторой особенностью (регулярной или нерегулярной), преобразование

$$u = v\prod_{r=1}^{m}(z - a_r)^{\alpha_r}$$

приводит к уравнению

$$v = P\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_m & \infty \\ 0 & 0 \ldots 0 & * \, z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2} & * \end{Bmatrix},$$

где *природа* особенности в бесконечности не была изменена.

Следовательно мы не потеряем в общности, если примем в качестве стандартного уравнения с p элементарными особенностями $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, \infty$ следующее уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\sum_{r=1}^{p-1}\frac{\frac{1}{2}}{z - a_r}\right\}\frac{dw}{dz} + \frac{A_0 + A_1 z + \ldots + A_{p-3}z^{p-3}}{\prod\limits_{r=1}^{p-1}(z - a_r)}w = 0,$$

где, поскольку точка в бесконечности также является элементарной,

$$A_{p-3} = \frac{(p-2)(p-4)}{16}.$$

Это уравнение называется *обобщенным уравнением Ляме*. Иногда выгодно принять показатели в конечных особенностях равными $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, так как тогда уравнение примет нормальный вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{3}{16}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{1}{(z - a_r)^2} + \frac{A_0 + A_1 z + \ldots + A_{p-3}z^{p-3}}{\prod\limits_{r=1}^{p-1}(z - a_r)}\right\}w = 0,$$

где

$$A_{p-3} = -\frac{3}{16}(p-2).$$

В некоторых случаях применяются два алгебраических преобразования независимой переменной. *Проективное преобразование*

$$z' = \frac{a_j - a_k}{a_j - a_i} \cdot \frac{z - a_i}{z - a_k}$$

преобразует особые точки a_i, a_j и a_k в 0,1 и ∞ соответственно, не изменяя показателей, относящихся к этим точкам[1]. Следовательно мы не потеряем в общности, если фиксируем эти три особенности в точках 0,1 и ∞; при наличии больше трех особенностей, распределение остальных особенностей произвольно.

Следующим по своему значению является *квадратическое преобразование*

$$z'^2 = z$$

с двумя фиксированными точками 0 и ∞. Элементарная особенность в любой из этих двух точек становится обыкновенной точкой, регулярная особенность остается регулярной, а порядок нерегулярной особенности удваивается. Особенность в любой другой точке $z = a$ заменяется двумя совершенно аналогичными особенностями в $z' = \pm\sqrt{a}$, и следовательно усложняет уравнение.

Наконец, *трансцендентные преобразования* применяются для приведения уравнения к известной форме, например к уравнению Матье. Их общее действие сводится к замене некоторых элементарных особенностей нерегулярной особенностью трансфинитного типа.

20·22. Формула уравнения; неприводимые постоянные. Любое данное уравнение характеризуется:

(α) числом a элементарных особенностей,

(β) числом b неэлементарных регулярных особенностей и

(γ) числом c существенных особенностей всех родов.

c нерегулярных особенностей могут быть подразделены на:

(I) c_1 особенностей первого рода,

(II) c_2 особенностей второго рода,

(III) c_3 особенностей третьего рода

и т. д. В этом случае говорят, что уравнение имеет формулу[2]

$$[a,\ b,\ c_1,\ c_2,\ c_3, \ldots].$$

Уравнения, имеющие ту же формулу, могут различаться между собой: 1) расположением особых точек, 2) показателями, относящимися к регулярным особенностям, и 3) произвольными постоянными. Уравнение, формула которого дана, является определенным, за исключением этих трех переменных, произвольная природа которых вводит в уравнение три категории постоянных. Из постоянных первой категории, определяющих

---

[1] Иногда применяется преобразование в $+1, -1, \infty$.

[2] При $c = 0$ получаем $[a, b, 0]$. Когда имеется только одна нерегулярная особенность, формула приводится к $[a, b, 1_s]$, где s — тип.

положение особенностей, три должны рассматриваться как произвольные. Каждой неэлементарной регулярной последовательности соответствует произвольная постоянная, представляющая разность показателей. Эти произвольные постоянные, вместе с постоянными третьей кетегории, являются *неприводимыми постоянными* общего уравнения. Таким образом первое уравнение § 20·2, формула которого равна $[p, 0{,}0]$, имеет $p-1$ постоянных первой категории $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$, приводимых к $p-3$; оно имеет $p-1$ постоянных второй категории $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})$, которые могут быть исключены, и $p-3$ произвольных постоянных третьей категории $(A_0, A_1, \ldots, A_{p-4})$. Оно имеет следовательно всего $2p-6$ неприводимых постоянных.

Слияние особенностей влияет только на постоянные первой категории; каждое отдельное слияние двух особых точек уменьшает число неприводимых постоянных только на одну постоянную, при условии, что остается не меньше трех особенностей. Однако, если число независимых постоянных приведено к двум $(0$ и $\infty)$, то может быть использовано преобразование $z' = Cz$, где C — соответственно выбранная постоянная, что приводит одну из постоянных третьей категории к заданному численному значению. При дальнейшем слиянии и только одной оставшейся особенности (в ∞), может быть приложено линейное преобразование, что снова уменьшает число постоянных третьей категории на единицу. Отсюда следует, что уравнение $[p, 0{,}0]$ и все другие уравнения, выведенные из него слиянием, имеют не больше $2p-6$ и меньше $p-5$ неприводимых постоянных.

20·221. Число независимых типов, которые могут быть выведены из уравнения $[p, 0{,}0]$. Легко доказать, что число независимых типов уравнения, имеющих только регулярные особенности, которые могут быть выведены из $[p, 0{,}0]$, равно $^1/_2\, p$ или $^1/_2\,(p-1)$, соответственно тому, является ли p четным или нечетным. Любое такое уравнение типа $[p-2r, r, 0]$.

Аналогично, число типов уравнения с одной нерегулярной особенностью первого рода равно $\frac{1}{2}p-1$ или $\frac{1}{2}(p-1)$, в зависимости от того, p—четное или нечетное. В более общем случае, общее число типов уравнения с одной нерегулярной особой точкой любого возможного рода равно

$$\left(\frac{1}{2}p-1\right)+\left(\frac{1}{2}p-1\right)+\left(\frac{1}{2}p-2\right)+\left(\frac{1}{2}p-2\right)+$$
$$+\ldots+2+2+1+1=\frac{1}{4}p(p-2),$$

когда p четное, или

$$\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{2}(p-3)+\frac{1}{2}(p-3)+$$
$$+\ldots+2+2+1+1=\frac{1}{4}(p-1)^2,$$

когда p нечетное. Уравнение с двумя и более нерегулярными особенностями могут быть перечислены аналогично.

Если каждую регулярную особенность считать один или два раза, в зависимости от того, равна ли разность показателей $^1/_2$ или произвольна, а каждую нерегулярную особенность r-го рода считать $r+2$ раз, то сумма полученных таким образом чисел будет равна p. С другой стороны, число N независимых типов уравнений, которые могут быть выведены из уравнения $[p, 0,0]$, равно числу подразделений целого числа p на любое число целых частей, каждое из которых меньше p. Полученные результаты для частных значений p приведены в следующей таблице, где N_r обозначает число независимых типов уравнения с r нерегулярными особенностями, а N — общее теоретически возможное число их. Само уравнение $[p, 0, 0]$ не включено.

$p=$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_0	2	2	3	3	4	4	5	5	6
N_1	2	4	6	9	12	16	20	25	30
N_2	—	—	1	2	5	8	14	20	30
N_3	—	—	—	—	—	1	2	5	9
N_4	—	—	—	—	—	—	—	—	1
N	4	6	10	14	21	29	41	55	76

20·3. Уравнения, выведенные из уравнения с четырьмя элементарными особенностями. Уравнения, имеющие две или три элементарных особенности, и не имеющие никаких других особенностей, являются тривиальными; в настоящем параграфе рассмотрим уравнение с четырьмя элементарными особенностями, а также случай их слияния.

Пусть четырьмя элементарными особенностями будут $z=a_1$, a_2, a_3, ∞; поскольку сумма всех восьми показателей должна быть равна 2, показатели относящиеся к каждой особенности, могут быть выбраны между 0 и $\frac{1}{2}$. Тогда A_1 равно нулю, а стандартная форма уравнения $[4, 0, 0]$ может быть поэтому принята в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z-a_1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-a_2}+\frac{\frac{1}{2}}{z-a_3}\right\}\frac{dw}{dz}+\frac{A_0}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}w=0.$$

В этом случае мы имеем две неприводимых постоянных $\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}$ и A_0. Уравнение является частным случаем уравнения Ляме и само по себе не имеет какого-либо особого значения.

Теперь, пусть особая точка $z=a_3$ сливается с особой точкой в бесконечности, и пусть

$$\lim A_0/a_3=n^2.$$

Если точки a_1 и a_2 преобразовать в -1 и $+1$ соответственно, то уравнение принимает вид [2, 1, 0]

$$\text{I} \qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z+1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz}-\frac{n^2}{z^2-1}w=0$$

и содержит одну неприводимую постоянную n; оно представляет собой уравнение функции Гегенбауера[1] $C_n^0(z)$.

Если $a_3 \to \infty$, $a_2 \to a_1 \to 0$, а n^2 имеет прежнее значение, уравнение принимает вид [0, 2, 0]

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}-\frac{n^2}{z}=0$$

с одной неприводимой постоянной n. Умножение зависимой переменной на z^n приводит уравнение к стандартной форме

$$\text{II} \qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1-2n}{z}\frac{dw}{dz}=0.$$

Уравнение [1, 0, 1] получается посредством слияния a_2 и a_3 с ∞ и имеет в бесконечности нерегулярную особенность первого рода. Пусть $a_1 \to 0$. Поскольку A_0 произвольно, оно может быть выбрано таким образом, чтобы

$$\lim A_0/a_2a_3=-m^2,$$

где m конечно. Это приводит к уравнению

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{\frac{1}{2}}{z}\frac{dw}{dz}-\frac{m^2}{z}w=0.$$

Постоянная m^2 неприводима; если зависимую переменную умножить на m^{-2}, то уравнение приводится к стандартной форме

$$\text{III} \qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\frac{\frac{1}{2}}{z}\frac{dw}{dz}-\frac{w}{z}=0.$$

Наконец, пусть

$$a_3 \to a_2 \to a_1 \to \infty,$$

и пусть

$$\lim A_0/a_1a_2a_3=m^2,$$

тогда уравнение будет иметь нерегулярную особенность второго рода в бесконечности и примет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2}-m^2w=0.$$

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 15·8.

Постоянная m^2 может быть исключена, поэтому стандартная форма [0, 0, 0, 1] или [0, 0, 1_2] приводится к

$$\text{IV} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} - w = 0\,.$$

Таким образом из уравнения [4, 0, 0] могут быть выведены следующие четыре типа:

I [2, 1, 0] с одной неприводимой постоянной,

II [0, 2, 0] с одной неприводимой постоянной,

III [0, 1, 1] без неприводимой постоянной,

IV [0, 0, 0, 1] без неприводимой постоянной.

Нужно отметить, что квадратическое преобразование приводит тип III к IV, соответственно § 20·21.

20·31. Уравнения, выведенные из уравнения с пятью элементарными особенностями. Стандартная форма уравнения [5, 0, 0] имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\sum_{r=1}^{4} \frac{\frac{1}{2}}{z-a_r}\right\}\frac{dw}{dz} + \left\{\frac{A_0 + A_1 z + \frac{3}{16}z^2}{\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)}\right\} w = 0$$

и содержит четыре неприводимых постоянных.

Пусть $a_4 \to 0$ и пусть

$$\lim A_0/a_4 = \frac{1}{4}h\,, \quad \lim A_1/a_4 = \frac{1}{4}n(n+1)\,.$$

Полученное уравнение имеет вид [3, 1, 0]

$$\text{I} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{z-a_1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-a_2} + \frac{\frac{1}{2}}{z-a_3}\right\}\frac{dw}{dz} - \frac{h + n(n+1)z}{4(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\, w = 0$$

и содержит три неприводимых постоянных $\dfrac{a_3+a_2}{a_3-a_1}$, h и n. Это является алгебраической формой уравнения Ляме[1].

В уравнении I пусть $a_2 \to a_3 \to 1$, $a_1 \to 0$, тогда уравнение [1, 2, 0] будет иметь вид

$$\text{II} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz} - \frac{h + n(n+1)z}{4z(z-1)^2}\, w = 0\,,$$

и содержит две неприводимых постоянных.

Оно преобразуется квадратической подстановкой $z = x^2$ в присоединенное уравнение Лежандра

$$\text{IIa} \qquad (1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - 2x\frac{dw}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\} w = 0\,.$$

---

[1] Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 23·4.

Уравнение IIa имеет формулу [0, 3, 0], оно становится специальным потому, что показатели в $z=-1$ такие же, как и в $z=+1$. Оно имеет две неприводимых постоянных, в то время, как общее уравнение типа [0, 3, 0] имеет три неприводимых постоянных (уравнение III следующего параграфа).

Первое из двух возможных уравнений, имеющих точку в бесконечности в качестве нерегулярной особенности первого рода, получается процессом

$$a_1 \to 0, \quad a_2 \to 1, \quad a_3 \to a_4 \to \infty,$$

$$\lim A_0/a_3a_4 = \frac{1}{4}a, \quad \lim A_1/a_3a_4 = \frac{1}{4}k^2.$$

Таким образом уравнение [2, 0, 1] имеет вид

$$\text{III} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz} - \frac{a+k^2z}{4z(z-1)}w = 0,$$

и содержит две неприводимых постоянных. При помощи трансцендентной подстановки $z=\cos^2 x$, оно преобразуется в уравнение Матье

$$\text{IIIa} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + (a + k^2\cos^2 x)w = 0.$$

Теперь, пусть

$$a_1 \to a_2 \to 0, \quad a_3 \to a_4 \to \infty,$$

$$\lim A_0/a_3a_4 = \frac{1}{4}n^2, \quad \lim A_1/a_3a_4 = \frac{1}{4}k^2,$$

тогда возникает уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} - \frac{n^2+k^2z}{4z^2}w = 0.$$

Постоянная k исключается умножением независимой переменной на $-k^{-2}$, поэтому уравнение [0, 1, 1] имеет вид

$$\text{IV} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{z-n^2}{4z}w = 0$$

и содержит одну неприводимую постоянную. Квадратическое преобразование $z=x^2$ приводит его к уравнению Бесселя

$$\text{IVa} \qquad x^2\frac{d^2w}{dx^2} + x\frac{dw}{dx} + (x^2-n^2)w = 0.$$

Уравнение Бесселя является частным случаем [0, 1, 0, 1].

Нерегулярная особенность в бесконечности второго рода получается операциями

$$a_2 \to a_3 \to a_4 \to \infty, \quad a_1 \to 0.$$

Образованное таким образом уравнение [1, 0, 0, 1] или [1, 0, 1_2] приводится к

$$\text{V} \qquad z\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z\right)w = 0\,;$$

оно содержит одну неприводимую постоянную. При подстановке $z = x^2$ это уравнение преобразуется в уравнение Вебера

$$\text{Va} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)w = 0\,,$$

имеющее формулу [0, 0, 1_4] (уравнение X следующего параграфа).

Наконец, если $a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to \infty$, то получим уравнение [0, 0, 1_3], которое может быть приведено к стандартной форме

$$\text{VI} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + zw = 0\,;$$

оно не содержит неприводимых постоянных.

Уравнение VI преобразуется подстановкой

$$w = z^{\frac{1}{2}}\,y\,, \quad z = \left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$$

в частный случай уравнения Бесселя, именно

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0\,.$$

Таким образом из уравнения [5, 0, 0] могут быть выведены следующие шесть типов уравнений:

I [3, 1, 0] с тремя неприводимыми постоянными,
II [1, 2, 0] с двумя неприводимыми постоянными,
III [2, 0, 1] с двумя неприводимыми постоянными,
IV [0, 1, 1] с одной неприводимой постоянной,
V [1, 0, 1_2] с одной неприводимой постоянной,
VI [0, 0, 1_3] без неприводимой постоянной.

20·32. Уравнения, выведенные из уравнения с шестью элементарными особенностями. Уравнение [6, 0, 0] удобно рассматривать в его наиболее общей форме, именно

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\sum_{r=1}^{5}\frac{\frac{1}{2} - 2\alpha_r}{z - a_r}\right\}\frac{dw}{dz} +$$
$$+ \left\{\sum_{r=1}^{5}\frac{\alpha_r\left(\alpha_r + \frac{1}{2}\right)}{(z - a_r)^2} + \frac{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3}{\prod\limits_{r=1}^{5}(z - a_r)}\right\}w = 0\,,$$

где

$$A_3 = \left(\sum_{r=1}^{5} \alpha_r\right)^2 - \sum_{r=1}^{5} \alpha_r^2 - 2\sum_{r=1}^{5} \alpha_r + \frac{1}{2}.$$

Уравнение имеет шесть неприводимых постоянных, именно A_0, A_1, A_2 и ангармоническое соотношение трех групп из четырех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$.

Пусть $a_5 \to \infty$ и пусть

$$\lim A_0/a_5 = -\frac{1}{4} C_0, \quad \lim A_1/a_5 = -\frac{1}{2} C_1, \quad \lim A_2/a_5 = \frac{1}{4} n(n+1),$$

а $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Тогда уравнение, возникающее из [4, 1, 0], будет иметь вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\sum_{r=1}^{4} \frac{\frac{1}{2}}{z - a_r}\right\} \frac{dw}{dz} + \left\{\frac{C_0 + 2C_1 z - n(n+1) z^2}{4\prod_{r=1}^{4} (z - a_r)}\right\} w = 0.$$

Это уравнение является обобщенной формой уравнения Ляме; оно имеет четыре элементарных особенности и одну регулярную особенность в бесконечности с разностью показателей равной $n + \frac{1}{2}$ и содержит пять неприводимых постоянных.

Следующее уравнение [2, 2, 0] получается из уравнения I операциями

$$a_1 \to 0, \quad a_2 \to a_3 \to a, \quad a_4 \to 1$$

и имеет вид

$$\text{II} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{z - a} + \frac{\frac{1}{2}}{z - 1}\right\} \frac{dw}{dz} + \frac{C_0 + 2C_1 z - n(n+1) z^2}{4z(z-a)^2(z-1)} w = 0$$

с четырьмя неприводимыми постоянными a, C_0, C_1, n.

Предположим, что $a = k^{-2}$ и произведем подстановку $z = \operatorname{sn}^2(x, k)$; после чего уравнение может быть приведено к виду [1]

$$\text{IIa} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \left\{h + n(n+1) k^2 \operatorname{sn}^2 x + \frac{m(m+1) k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right\} y = 0.$$

Уравнение [0, 3, 0] наиболее удобно получить непосредственно из [6, 0, 0]. Пусть $a_1 \to a_2 \to 0$, $a_3 \to a_4 \to 1$, $a_5 \to \infty$ и пусть C_0, C_1 и n будут иметь прежние значения. Все показатели α_1, α_2, α_3, α_4 могут быть выбраны произвольно; остаются

[1] Hermite, J. für Math., 89 (1880), 9 [Œuvres, 4, 8]; Darboux, C. R. Acad. Sc. Paris, 94 (1882), 1645.

три неприводимых постоянных, например α, β, γ, которые определяются следующим образом:

$$1-\gamma=2(\alpha_1+\alpha_2),$$

$$0=\alpha_1\left(\alpha_1+\frac{1}{2}\right)+\alpha_2\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}C_0,$$

$$\gamma-\alpha-\beta=2(\alpha_3+\alpha_4),$$

$$0=\alpha_3\left(\alpha_3+\frac{1}{2}\right)+\alpha_4\left(\alpha_4+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\{C_0+2C_1-n(n+1)\},$$

$$\alpha\beta=-\frac{1}{2}(C_0+C_1);$$

тогда уравнение может быть приведено к обыкновенному гипергеометрическому уравнению

$$\text{III}\qquad z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0.$$

Уравнение [3, 0, 1] получается операциями

$$a_1\to 0,\quad a_2\to a,\quad a_3\to 1,\quad a_4\to a_5\to\infty,$$

$$\lim A_0\, a_4a_5=\frac{1}{4}C_0,\quad \lim A_1\, a_4a_5=\frac{1}{2}C_1,\quad \lim A_2/a_4a_5=\frac{1}{2}C_2.$$

Пусть

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,$$

тогда уравнение примет вид

$$\text{V}\qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{z-a}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz}+\frac{C_0+2C_1z+C_2z^2}{4z(z-a)(z-1)}w=0,$$

с четырьмя неприводимыми постоянными. Если $a=k^{-2}$ и $z=\operatorname{sn}^2(x,k)$, то уравнение примет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2}-k^2(C_0+2C_1\operatorname{sn}^2x+2C_2\operatorname{sn}^4x)w=0.$$

Это уравнение является обобщением уравнения Ляме.

Уравнение [1, 1, 1] является вырождением случая IV. Однако более удобно вывести его из [6, 0, 0] следующим образом. Пусть $a_4\to a_5\to\infty$ и пусть C_0, C_1 и C_2 будут иметь прежние значения. Пусть $a_1\to 0$ при $\alpha_1=0$ и $a_2\to a_3\to 1$, образуя регулярную особенность с показателями 0 и r. Необходимыми условиями в этом случае будут

$$r=2(\alpha_2+\alpha_3),$$

$$0=\alpha_2\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)+\alpha_3\left(\alpha_3+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}(C_0+2C_1+2C_2).$$

Уравнение тогда примет вид

$$\text{V}\qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{1-r}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz}-\frac{a+k^2z}{4z(z-1)}w=0,$$

где $a=C_0$, $k^2=-2C_2$; оно имеет три неприводимых постоянных. Подстановка $z=\cos^2 x$ преобразует его в присоединенное уравнение Матье[1]

$$\text{Va}\qquad \frac{d^2w}{dx^2}+(1-2r)\operatorname{ctg} x\frac{dw}{dx}+(a+k^2\cos^2 x)w=0.$$

Уравнение [0, 0, 2], имеющее две нерегулярных особенности первого рода (одно в начале, а другое в бесконечности), возникает следующим образом. Пусть $a_4\to a_5\to\infty$, C_0, C_1 и C_2 имеют прежние значения, а $a_1\to a_2\to a_3\to\infty$ при $\alpha_1=\frac{1}{4}$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$; тогда уравнение примет вид

$$z^3\frac{d^2w}{dz^2}+z^2\frac{dw}{dz}+\{C_0+2C_1z+2C_2z^2\}w=0.$$

Уравнение имеет только две неприводимых постоянных; если независимую переменную умножить на соответствующую постоянную, то уравнение может быть приведено к стандартной форме

$$\text{VI}\qquad z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-\frac{1}{4}\left\{a+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{4}k^2(z+z^{-1})\right\}w=0.$$

При помощи трансцендентной подстановки $z=e^{2ix}$ уравнение может быть преобразовано в уравнение Матье

$$\frac{d^2w}{dx^2}+(a+k^2\cos^2 x)=0.$$

Получаем два уравнения, для которых точка в бесконечности является нерегулярной особенностью второго типа. Примем, что $a_3\to a_4\to a_5\to\infty$, и

$$\lim A_0/a_3a_4a_5=-\frac{1}{4}C_0,\qquad \lim A_1/a_3a_4a_5=-\frac{1}{2}C_1,$$

$$\lim A_2/a_3a_4a_5=-\frac{1}{2}C_2,$$

а

$a_1\to 0$, $a_2\to 0$ при $\alpha_1=\alpha_2=0$: тогда возникает уравнение $[2, 0, 1_2]$

$$\text{VII}\qquad \frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz}+\frac{C_0+2C_1z+2C_2z^2}{4z(z-1)}w=0,$$

[1] Ince, Proc. Edin. Math. Soc., 41 (1923), 94.

содержащее три неприводимых постоянных. Преобразование $z = \cos^2 x$ с последующим изменением постоянных приводит это уравнение к виду[1]

$$\text{VIIa} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + \left\{ a - (n+1)\, l \cos 2x + \frac{1}{8}\, l^2 \cos 4x \right\} w = 0.$$

Примем, как в предыдущем случае, что $a_3 \to a_4 \to a_5 \to \infty$, и $a_1 \to a_2 \to 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4}$. Если $C_0 = -\frac{1}{2} - 4m^2$, то показатели, относящиеся к $z = 0$, равны $\frac{1}{2} - m$, $\frac{1}{2} + m$. Не теряя в общности, можно принять, что $C_1 = 2k$, $C_2 = -\frac{1}{2}$. Уравнение тогда приводится к виду

$$\text{VIII} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right\} w = 0$$

и содержит две неприводимых постоянных; оно является уравнением конфлюэнтных гипергеометрических функций[1] $W_{k,m}(z)$.

Пусть $a_2 \to a_3 \to a_4 \to a_5 \to \infty$, а $a_1 \to 0$ при $\alpha_1 = 0$. Если

$$\lim A_0/a_2a_3a_4a_5 = \frac{1}{4} C_0, \quad \lim A_1/a_2a_3a_4a_5 = \frac{1}{2} C_1,$$

$$\lim A_2/a_2a_3a_4a_5 = \frac{1}{2} C_2,$$

то уравнение принимает вид $[1, 0, 1_3]$

$$\text{IX} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{dw}{dz} + \frac{C_0 + 2C_1z + 2C_2z^2}{4z}\, w = 0.$$

Это уравнение имеет только две неприводимых постоянных C_0^2/C_1 и C_0^3/C_2. Квадратическое преобразование $z = x^2$ приводит его к виду

$$\text{IXa} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + \{C_0 + 2C_1x^2 + 2C_2x^4\}\, w = 0,$$

что является частным случаем $[0, 0, 1_6]$.

Наконец, пусть элементарные особенности сливаются в бесконечности, тогда полученное при этом уравнение $[0, 0, 1_4]$ может быть легко приведено к уравнению Вебера

$$\text{X} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2\right) w = 0$$

с одним неприводимым постоянным.

Таким образом из уравнения $[6, 0, 0]$ слиянием его особенностей получаются следующие десять независимых уравнений[2]:

---

[1] Whittaker, Bull. Am. Math. Soc., 10 (1903), 125. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа, гл. XVI.

[2] Типы I, IV, V и IX еще недостаточно подробно исследованы.

I [4, 1, 0] с пятью неприводимыми постоянными,
II [2, 2, 0] с четырьмя „ „ ,
III [0, 3, 0] с тремя „ „ ,
IV [3, 0, 1] с четырьмя „ „ ,
V [1, 1, 1] с тремя „ „ ,
VI [0, 0, 2] с двумя „ „ ,
VII [2, 0, 1_2] с тремя „ „ ,
VIII [0, 1, 1_2] с двумя „ „ ,
IX [1, 0, 1_3] с двумя „ „ ,
X [0, 0, 1_4] с одной неприводимой постоянной.

20·4. Лишние постоянные. Надо отметить, что в последовательности уравнений, выведенных из [6, 0, 0], число неприводимых постоянных равно числу особенностей; в последовательности, выведенной из [5, 0, 0], число особенностей превышает число неприводимых постоянных на единицу. В общем случае, число неприводимых постоянных в уравнении, выведенном из [p, 0, 0], превышает число особенностей на $p-6$. Рассмотрим, как образуются эти постоянные.

Уравнение [p, 0, 0] содержит всего $2p-6$ неприводимых постоянных, $p-3$ из которых обусловливаются произвольным положением $p-3$ особенностей, а $p-3$ постоянных не определены. Аналогично, в уравнении [p, q, 0] имеются $p+q-3$ произвольных постоянных, которые не обусловливаются положениями особых точек или произвольными разностями показателей относительно q регулярных особенностей. Эти постоянные называются *лишними постоянными.*

Рассмотрим класс уравнений, имеющих одну нерегулярную особенность первого типа. Любое такое уравнение [p, q, 1] может рассматриваться как образованное из [$p+1$, $q+1$, 0] слиянием элементарной и регулярной особенностей. В этом процессе одна постоянная теряется, но она не является лишней постоянной. Следовательно [p, q, 1] имеет такое же число лишних постоянных, что и [$p+1$, $q+1$, 0], именно [$p+q-1$). Аналогично, рассматривая [p, q, 1_2], как выведенное из [p, $q+2$,0] слиянием двух регулярных особенностей, можно доказать, что число лишних постоянных в [p, q, 1_2] равно $p+q-1$. В общем случае уравнение [p, q, 1_s] имеет $2p+3q+s-3$ неприводимых постоянных, из которых $p+q-2$ обусловливаются произвольными положениями этого числа особенностей, q обусловливаются разностями показателей, относящихся к q регулярным особенностям, а s — постоянными в определяющем множителе, относящимися к нерегулярной особенности. Следовательно, остаются $p+q-1$ лишних постоянных.

Лишние постоянные входят в группу уравнения; соответствующим выбором этих постоянных группа может быть упрощена. В качестве примера можно привести уравнение Матье (§ 20·31, IIIa), где постоянная k входит в определяющий множитель, относящийся к нерегулярной особенности в бесконечности[1], а a — лишняя постоянная.

20·5. Последовательности уравнений с регулярными особенностями. Уравнения формул

$$[3,\ 1,\ 0],\quad [4,\ 1,\ 0],\ \ldots,\quad [p,\ 1,\ 0]\ldots$$

образуют важную последовательность. Первое из них является уравнением Ляме

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{3}\frac{\frac{1}{2}}{z-a_r}\right\}\frac{dw}{dz}-\frac{n(n+1)z+h}{4\prod\limits_{r=1}^{3}(z-a_r)}w=0.$$

Только одна из постоянных a_r приводима; поэтому мы не потеряем в общности, если предположим, что особенности расположены так, что

$$a_1+a_2+a_3=0.$$

Преобразуем z подстановкой

$$x=\frac{1}{2}\int_z^{\infty}\{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

так что $z=\wp(x)$. В этом случае уравнение примет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2}-\{h+n(n+1)\wp(x)\}w=0.$$

Обобщенное уравнение Ляме будет иметь вид

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{p}\frac{\frac{1}{2}}{z-a_r}\right\}\frac{dw}{dz}+\left\{\frac{A_0+A_1z+\ldots+A_{p-2}z^{p-2}}{4\prod\limits_{r=1}^{p}(z-a_r)}\right\}w=0$$

с $p-2$ лишними постоянными, именно $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{p-2}$. При подстановке

$$x=\frac{1}{2}\int_z^{\infty}\left\{\prod_{r=1}^{p}(t-a_r)\right\}^{-\frac{1}{2}}dt$$

уравнение преобразуется в

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\{A_0+A_1z+\ldots+A_{p-2}z^{p-2}\}w=0.$$

Другой важной последовательностью уравнений Фукса является последовательность, имеющая p особенностей. Независимыми типами являются

$$[p,\ 0,\ 0],\ [p-1,\ 1,\ 0],\ \ldots,\ [0,\ p,\ 0],$$

---

[1] Ince, Proc. Roy. Soc. Edin., 46 (1926), 386.

и каждое уравнение имеет $p-3$ лишних постоянных. Уравнения $p=3$ являются уравнениями P-функции Римана, уравнения $p=4$ являются уравнениями Ляме и присоединенными уравнениями, выведенными из уравнения Ляме обобщением его элементарных особенностей. Уравнения для $p=5, 6, 7, \ldots$ еще не изучены.

20·51. Последовательности уравнений с одной нерегулярной особенностью. Уравнение Вебера $[0, 0, 1_4]$

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)w=0$$

может рассматриваться как частный случай $[0, 0, 1_p]$

$$\frac{d^2w}{dz^2}\{A_0+A_2z^2+\ldots+A_{p-2}z^{p-2}\}w=0,$$

с $p-3$ неприводимыми постоянными.

Мы показали, что уравнение $[1, 0, 1_2]$ (§ 20·31, V) преобразуется квадратической подстановкой в $[0, 0, 1_4]$. Более общее уравнение $[1, 0, 1_r]$ имеет вид

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{2}\frac{dw}{dz}+\frac{1}{4}(B_0+B_1z+B_2z^2+\ldots+B_{r-1}z^{r-1})w=0$$

с $r-1$ неприводимыми постоянными. Оно преобразуется подстановкой $z=x^2$ в уравнение

$$\frac{d^2w}{dx^2}+(B_0+B_1x^2+B_2x^4+\ldots+B_{r-1}x^{2r-2})w=0$$

и имеет теперь формулу $[0, 0, 1_{2r}]$. Но это уравнение не типично для этой формулы, поскольку она содержит только $r-1$ вместо общего числа 2_r-3 неприводимых постоянных. Последовательность уравнений $[1, 0, 1_r]$ можно поэтому не принимать во внимание; она включается в последовательность $[0, 0, 1_p]$.

Уравнение $[0, 0, 1_1]$ преобразуется квадратичной подстановкой в уравнение Бесселя, которое является частным случаем $[0, 1, 1_2]$ конфлюэнтного гипергеометрического уравнения. Аналогично, более общее уравнение $[0, 1, 1_p]$

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+\frac{1}{4}(A_pz^p+A_{p-1}z^{p-1}+\ldots+A_1z-n^2)w=0$$

с p неприводимыми постоянными преобразуется подстановкой $z=x^2$ в

$$x^2\frac{d^2w}{dx^2}+x\frac{dw}{dx}+(A_px^{2p}+A_{p-1}x^{2p-2}+\ldots+A_1x^2-n^2)w=0,$$

что является частным случаем $[0, 1, 1_{2p}]$.

20·52. Уравнения с периодическими коэфициентами. Аналогично тому как уравнение $[2, 0, 1_1]$ преобразуется подстановкой $z = \cos^2 x$ в уравнение Матье, более общее уравнение $[2, 0, 1_p]$

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right\}\frac{dw}{dz} - \frac{A_0 + A_1 z + \cdots + A_p z^p}{4z(z-1)} w = 0$$

с $p+1$ неприводимыми постоянными преобразуется в

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \{A_0 + A_1 z \cos^2 x + \ldots + A_p \cos^{2p} x\} w = 0,$$

которое может быть написано в виде уравнения Хилла

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \{\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2x + \ldots + 2\Theta_p \cos 2px\} w = 0,$$

имеющего важное значение в теории луны. При $p = 1$ оно приводится к уравнению Матье, при $p = 2$ — к уравнению VIIa § 20·32; частные свойства уравнений, для которых $p > 2$, неизвестны.

Если две элементарные особенности $z = 0$ и $z = 1$ уравнения $[2, 0, 1_p]$ сливаются в начале, то уравнение принимает вид $[0, 1, 1_p]$.

Уравнение Ляме может быть обобщено аналогично заменой регулярной особой точки в бесконечности нерегулярной особенностью рода $p-1$. Уравнение $[3, 0, 1_{p-1}]$ имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{z-a_1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-a_2} + \frac{\frac{1}{2}}{z-a_3}\right\}\frac{dw}{dz} + \left\{\frac{A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p}{4(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\right\} w = 0$$

с $p+2$ неприводимыми постоянными. Если $a_1 = 0$, $a_2 = k^{-2}$, $a_3 = 1$, то подстановка $z = \mathrm{sn}^2(x, k)$ приводит уравнение к

$$\frac{d^2w}{dx^2} - k^2(A_0 + A_1 \mathrm{sn}^2 x + \ldots + A_p \mathrm{sn}^{2p} x) w = 0.$$

Посредством операций

$$a_1 \to 0, \quad a_2 \to \infty, \quad a_3 \to 1$$

$[3, 0, 1_{p-1}]$ принимает вид $[2, 0, 1_p]$, а обобщенное уравнение Ляме вырождается в уравнение Хилла.

20·6. Асимптотическое поведение решений в нерегулярной особенности. Поскольку любое уравнение, имеющее нерегулярную особую точку в бесконечности нечетного типа, может быть преобразовано квадратичной подстановкой в уравнение с особенностью четного типа, достаточно рассмотреть последний тип. Уравнение $[0, 0, 1_{2p}]$ может быть написано в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \{A_0 + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_{2p-2} z^{2p-3} - m^2 z^{2p-2}\} w = 0,$$

где $m \neq 0$. Если нормальное решение существует, то определяющий множитель имеет вид

$$e^{\pm \frac{m}{p} z^p + \frac{a_1}{p-1} z^{p-1} + \ldots + a_{p-1} z},$$

следовательно уравнение ранга p. Это верно даже при наличии других особенностей.

Примеры

1. Найдите условия, достаточные для того, чтобы уравнение $[2, 0, 1_2]$ имело нормальное решение. Рассмотрите возможность двух нормальных решений. Выразите результаты через уравнение VIIa (§ 20 · 32).

2. Покажите в виде таблицы, что уравнение $[2, 0, 1_2]$ так же относится к $[2, 0, 1_1]$, как $[0, 1, 1_2]$ относится к $[0, 1, 1_1]$.

3. Напишите формулы для 14 уравнений, которые могут быть выведены из $[7, 0, 0]$.

ГЛАВА XXI

ТЕОРЕМЫ ОСЦИЛЛЯЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

21·1. Сущность проблемы. В главах X и XI был рассмотрен ряд теорем, имевших целью определить число и распределение вещественных нулей функций типа Штурм-Лиувилля. Комплексные нули таких специальных функций, как гипергеометрическая функция, функции Бесселя[1] и функции Лежандра[2] были исследованы современными авторами, но до последнего времени общие теоремы, охватывающие все функции типа Штурм-Лиувилля, неизвестны. Этот пробел был восполнен Хиллом[3], который применил полученные им результаты к функциям Лежандра[4] и Матье[5]. В настоящей главе мы рассмотрим методы Хилла и покажем их применение на уравнении

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{w}{z} = 0,$$

решения которого могут быть получены в функциях Бесселя первого порядка.

Данный метод основан на свойствах некоторых интегральных равенств, известных как *преобразования Грина*, которые выводятся из рассматриваемого диференциального уравнения. Поведение нулей частного решения уравнения отражается на поведении соответствующего преобразования Грина. При рассмотрении мы найдем, что существуют некоторые области в плоскости комплексной независимой переменной, известные как *области, свободные от нулей, в пределах которых частное не обращается в нуль.*

21·2. Преобразование Грина. Предположим, что в самосопряженном линейном диференциальном уравнении второго порядка

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dz}\left\{K(z)\frac{dw}{dz}\right\} + G(z)\,w = 0$$

---

[1] Hurwitz, Math. Ann., 33 (1889), 246.

[2] Hille, Arkiv. för Mat., 13 (1918), № 17.

[3] Arkiv för Mat., 16 (1921), № 17; Bull. Am. Math. Soc., 28 (1922), 261, 462; Trans. Am. Math. Soc., 23 (1922), 350.

[4] Arkiv för Mat., 17 (1922), № 22.

[5] Proc. London Math. Soc. (2), 23 (1924), 185.

$K(z)$ и $G(z)$ — аналитические функции в области D, в которой $K(z)$ не обращается в нуль. Если

$$w_1 = w, \quad w_2 = K(z)\frac{dw}{dz},$$

то уравнение (A) заменяется двумя совместными уравнениями первого порядка

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dw_1}{dz} = w_2 K(z), \\ \dfrac{dw_2}{dz} = -G(z)\, w_1. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы остается справедливым, если каждый член заменить сопряженным ему выражением, тогда

$$d\overline{w}_1 = \overline{w}_2 d\overline{z} \,/\, \overline{K(z)}.$$

Отсюда следует, что

$$w_2 d\overline{w}_1 + \overline{w}_1 dw_2 = w_2\overline{w}_2 d\overline{z} \,/\, \overline{K(z)} - w_1\overline{w}_1 G(z)\, dz;$$

интегрируя между пределами z_1 и z_2 и принимая, что каждая точка на пути интегрирования лежит в области D, получим

$$\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{|w_2|^2}{\overline{K(z)}}\, d\overline{z} + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2 G(z)\, dz = 0.$$

Это уравнение называется *преобразованием Грина* данного уравнения; оно играет такую же роль в исследовании комплексных нулей, как и первоначальная формула Грина в случае вещественной переменной.

Пусть

$$d\overline{z}/\overline{K(z)} = d\mathrm{K} = d\mathrm{K}_1 + i d\mathrm{K}_2,$$
$$G(z)\, dz = d\mathrm{G} = d\mathrm{G}_1 + i d\mathrm{G}_2,$$

где K_1, K_2, G_1, G_2 вещественные функции, тогда преобразование Грина примет вид

$$\text{(C)} \qquad \left[\overline{w}_1 w_2\right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} |w_2|^2 d\mathrm{K} + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2 d\mathrm{G} = 0,$$

а если разделить вещественные и мнимые части, то получим

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \mathbf{R}\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{z_1}^{z_2} - \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} |w_2|^2 d\mathrm{K}_1 + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2 d\mathrm{G}_1 = 0, \\ \mathbf{I}\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{z_1}^{z_2} + \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} |w_2|^2 d\mathrm{K}_2 + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2 d\mathrm{G}_2 = 0. \end{cases}$$

21·21. Инвариантность преобразования Грина. Пусть Z будет независимой переменной, определяемой соотношением

$$dz = f(Z)\, dZ,$$

где $f(Z)$ — некоторая аналитическая функция. В новых переменных система (21·2, B) примет вид

$$dw_1 = w_2 dZ/k(Z), \quad dw_2 = -g(Z)\, w_1 dZ,$$

где

$$k(Z) = K(z)/f(z), \quad g(Z) = G(z) f(Z).$$

Если

$$dZ/k(Z) = d\mathfrak{k}, \quad g(Z)\, dZ = d\mathfrak{D},$$

то преобразование Грина примет вид

$$[\overline{w}_1 w_2]_{Z_1}^{Z_2} - \int_{Z_1}^{Z_2} |w_2|^2 d\mathfrak{k} + \int_{Z_1}^{Z_2} |w_1|^2 d\mathfrak{D} = 0$$

аналогично (C) и следовательно *преобразование Грина инвариантно относительно преобразования независимой переменной.*

Особого внимания заслуживают следующие три специальных случая.

(I) Предположим, что $\mathbf{Z} = \mathbf{K}(z)$ и напишем $J(Z) = G(z) K(z)$; тогда диференциальное уравнение и преобразование Грина соответственно примут вид

$$\frac{d^2 w}{dZ^2} + J(Z)\, w = 0,$$

$$[\overline{w}_1 w_2]_{Z_1}^{Z_2} - \int_{Z_1}^{Z_2} |w_2|^2 d\overline{Z} + \int_{Z_1}^{Z_2} |w_1|^2 J(Z)\, dZ = 0.$$

(II) Предположим, что $\mathbf{Z} = \mathbf{G}(z)$ и напишем $H(Z) = G(z) K(z)$, тогда

$$\frac{d}{dZ}\left\{ H(Z) \frac{dw}{dZ} \right\} + w = 0,$$

$$[\overline{w}_1 w_2]_{Z_1}^{Z_2} - \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{|w_2|^2}{H(Z)} d\overline{Z} + \int_{Z_1}^{Z_2} |w_1|^2 dZ = 0.$$

(III) Для того, чтобы получить симметричную форму, предположим, что

$$dZ = \sqrt{\frac{G(z)}{K(z)}}\, dz, \quad S(Z) = \sqrt{G(z) K(z)},$$

тогда

$$\frac{d}{dZ}\left\{ S(Z) \frac{dw}{dZ} \right\} + S(Z)\, w = 0,$$

$$[\overline{w}_1 w_2]_{Z_1}^{Z_2} - \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{|w_2|^2}{S(Z)} d\overline{Z} + \int_{Z_1}^{Z_2} |w_1|^2 S(Z)\, dZ = 0.$$

21·3. Выбор соответствующего пути интегрирования. Путь интегрирования (z_1, z_2) еще не был определен; при выборе пути интегрирования таким образом, чтобы одно из условий

$$
d\mathbf{K}_1 = 0, \quad d\mathbf{K}_2 = 0,
$$
$$
d\mathbf{G}_1 = 0, \quad d\mathbf{G}_2 = 0
$$

было удовлетворено, могут быть упрощены формулы (21·2, E), выведенные из преобразования Грина.

Кривые $\mathbf{K}_1 = \text{const}$, $\mathbf{K}_2 = \text{const}$ представляют взаимно ортогональные семейства кривых в плоскости z и называются **K**-сетью. В частном случае $K = 1$, **K**-сеть состоит из сети прямых линий, параллельных осям x и y. Аналогично кривые $\mathbf{G}_1 = \text{const}$, $\mathbf{G}_2 = \text{const}$ образуют пару взаимно ортогональных семейств, и называются **G**-сетью.

Рассмотрим **G**-сеть[1]. Напишем

$$
G(z) = g_1(z) + ig_2(z),
$$

где g_1 и g_2 — вещественные функции. Пусть Δ будет областью в плоскости z, для которой функция $G(z)$ мероморфная, и пусть a будет внутренней точкой области Δ, для которой $G(a) \neq 0$. Через a проходит только одна кривая каждого семейства $\mathbf{G}_1 = \text{const}$, $\mathbf{G}_2 = \text{const}$. Наклоны этих двух кривых в a равны соответственно

$$
g_1(a)/g_2(a), \quad -g_2(a)/g_1(a).
$$

Таким образом кривые семейства $\mathbf{G}_1 = \text{const}$ имеют касательные, параллельные оси x в точках, где они пересекают кривую $g_1(z) = 0$, и касательные, параллельные оси y в точках, где они пересекают кривую $g_2(z) = 0$. Обратное верно в случае семейства $\mathbf{G}_2 = \text{const}$.

Единственными исключительными точками Δ являются нули и полюсы функции $G(z)$. Далее, пусть $z = a$ будет нулем кратности k, тогда, если

$$
G(z) = a_k(z-a)^k + O\{(z-a)^{k+1}\},
$$
$$
\int_a^z G(z)\,dz = \frac{a_k}{k+1}(z-a)^{k+1} + O\{(z-a)^{k+2}\}.
$$

Напишем

$$
z - a = re^{i\theta}, \quad a_k = \rho e^{i\varphi},
$$

откуда, отделяя вещественные и мнимые части, получим

$$
\mathbf{G}_1(z) - \mathbf{G}_1(a) \equiv \mathbf{R}\int_a^z G(z)\,dz = \frac{\rho}{k+1} r^{k+1}\cos\{(k+1)\theta + \varphi\} + O(r^{k+2}),
$$
$$
\mathbf{G}_2(z) - \mathbf{G}_2(a) \equiv \mathbf{I}\int_a^z G(z)\,dz = \frac{\rho}{k+1} r^{k+1}\sin\{(k+1)\theta + \varphi\} + O(r^{k+2}).
$$

---

[1] Поскольку **K**-сеть становится тривиальной в наиболее важном случае, именно в случае $K = 1$, мы будем рассматривать **G**-сеть. Результаты для **K**-сети будут рассмотрены в конце параграфа.

Следовательно через точку $z = a$ проходит $k+1$ кривых каждого семейства $\mathbf{G}_1 = \text{const}$, $\mathbf{G}_2 = \text{const}$. Кривые обоих семейств следуют друг за другом попеременно, а последовательные касательные пересекаются под постоянным углом $\pi/(k+1)$.

Теперь, пусть $z = a$ будет полюсом порядка k, где $k > 1$. Если

$$G(z) = a_k (z-a)^{-k} + O\{(z-a)^{1-k}\}$$

и если принять, что член с $(z-a)^{-1}$ отсутствует в выражении для $G(z)$, получим

$$\int^z G(z)\, dz = \gamma + i\delta - \frac{a_k}{k-1}(z-a)^{1-k} + O\{(z-a)^{2-k}\},$$

где $\gamma + i\delta$ — комплексная постоянная интегрирования. Отсюда следует, что

$$\mathbf{G}_1(z) \equiv \mathbf{R}\int^z G(z)\, dz = \gamma - \frac{\rho}{k-1} r^{1-k} \cos\{(k-1)\theta - \varphi\} + O(r^{2-k}),$$

$$\mathbf{G}_2(z) \equiv \mathbf{I}\int^z G(z)\, dz = \delta + \frac{\rho}{k-1} r^{1-k} \sin\{(k-1)\theta - \varphi\} + O(r^{2-k}).$$

Поскольку при принятом условии $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ не содержат логарифмических членов, каждая кривая некоторого семейства, имеющая точки в соседстве с $z = a$, проходит через $z = a$. Рассматриваемые кривые, принадлежащие к семейству $\mathbf{G}_1$, являются касательными к линиям

$$\arg(z-a) = \left\{\varphi + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}/(k-1),$$

а кривые семейства $\mathbf{G}_2$ — касательными к линиям

$$\arg(z-a) = \{\varphi + \nu\pi\}/(k-1),$$

где в каждом случае $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k-2$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $z = a$ — простой полюс $G(z)$, и пусть

$$G(z) = a_1 (z-a)^{-1} + O(1),$$

тогда

$$\int^z G(z)\, dz = \gamma + i\delta + a_1 \log(z-a) + O(z-a);$$

если $a_1 = \alpha + i\beta$, то

$$\mathbf{G}_1(z) \equiv \mathbf{R}\int^z G(z)\, dz = \gamma + \alpha \log r - \beta\theta + O(r),$$

$$\mathbf{G}_2(z) \equiv \mathbf{I}\int^z G(z)\, dz = \delta + \beta \log r - \alpha\theta + O(r).$$

При $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, точка $z = a$ является точкой закручивания для кривых обоих семейств; при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, кривые семейства $\mathbf{G}_1$

вблизи $z = a$ являются, приближенно, круговыми овалами, содержащими эту точку, а кривые семейства G_2 имеют точку $z = a$ в качестве точки разветвления конечного порядка. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ справедливо обратное.

В случае K-сети имеем: если $z = a$—полюс $K(z)$, то K-сеть ведет себя в точке a так, как G-сеть ведет себя, когда точка $z = a$ является нулем $G(z)$. Аналогично поведение K-сети, когда $z = a$ — нуль порядка больше единицы или порядка единицы, соответствует поведению G-сети, когда $z = a$ — полюс $G(z)$ того же порядка.

21·31. Специальный случай, когда функция $G(z)$ является полиномом. Случай, когда функция $G(z)$ — полином степени n, имеет очень большое значение. Пусть

$$G(z) = A_0(z-a_1)^{\nu_1}(z-a_2)^{\nu_2}\ldots(z-a_m)^{\nu_m} \qquad (\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=n),$$

тогда из предыдущего параграфа можно сделать следующие выводы: любая общая кривая любого из семейств G, не проходящая через какую-либо точку $a_1, a_2, \ldots, a_m$, не имеет кратных точек в плоскости z. С другой стороны, одна кривая каждого семейства имеет кратную точку порядка $\nu_k + 1$ в a_k, поэтому каждое семейство имеет не больше m особых кривых.

Каждая кривая пересекает линию в бесконечности в $n+1$ независимых точках, но эти пересечения одинаковы для всех кривых того же семейства. Асимптоты всех кривых вещественны и независимы и пересекаются в одной точке, именно в точке

$$z = \frac{\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots + \nu_m a_m}{n}.$$

Если $A_0 = \varphi_0$, то асимптотические направления кривых G_1 будут

$$\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{n+1},$$

а асимптотические направления кривых G_2

$$\frac{k\pi - \varphi_0}{n+1},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$. Асимптоты каждого семейства поэтому составляют равные углы друг с другом и разрезают пополам углы между асимптотами другого семейства.

Функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ гармонические во всей конечной части плоскости z, следовательно они не могут иметь максимум или минимум при некотором конечном значении z[1]. Отсюда следует, что кривая G не может начинаться или заканчиваться в конечной точке, а также что она не может быть замкнутой. Таким образом путь интегрирования может быть проведен из

[1] Forsyth, Theory of Functions, IV, 475.

бесконечности к любой выбранной точке в плоскости z, не пересекая рассматриваемой кривой.

21·4. Интервалы, свободные от нулей на вещественной оси. Пусть x_1 и $x_2 (x_1 < x_2)$ будут любыми двумя произвольными точками в любом интервале (a, b) на вещественной оси, внутри которого функция $J(z)$ аналитическая. Если w — любое решение уравнения

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2w}{dz^2} + J(z)\, w = 0$$

и

$$w = w_1, \quad w' = w_2, \quad J(z) = g_1(z) + ig_2(z),$$

то формулы, выведенные из преобразования Грина, примут вид

$$\text{(B)} \qquad \mathbf{R}\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} |w_2|^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} g_1(x)\,|w_1|^2 dx = 0,$$

$$\text{(C)} \qquad \mathbf{I}\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} g_2(x)\,|w_1|^2 dx = 0.$$

Докажем, что *если во всем интервале* (a, b) $\mathbf{R}J(z) \leqslant 0$ *или* $\mathbf{I}J(z)$ *не изменяет своего знака, то в этом интервале может быть не больше одного нуля.*

Предположим, что в этом интервале имеется больше одного нуля и пусть x_1 и x_2 будут последовательными нулями, тогда в уравнении (B) $\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{x_1}^{x_2}$ является нулем, в то время как, если $g_1(x) \leqslant 0$, то сумма остальных двух членов определенно отрицательна. С другой стороны, во втором уравнении (C), $\left[\overline{w}_1 w_2\right]_{x_1}^{x_2}$ равно нулю, и если $g_2(x)$ неизменно по знаку и обращается в нуль только в дискретных точках, то второй член не равен нулю. Таким образом при любом условии предположение о наличии больше одного нуля приводит к противоречию, что доказывает теорему. Отсюда следует, что двумя необходимыми условиями для осцилляции в интервале вещественной оси, свободном от особых точек, являются условия

(a) чтобы $\mathbf{R}J(z)$ было больше или равно нулю и

(b) чтобы $\mathbf{I}J(z)$ изменило знак или обратилось в нуль.

Приведенная теорема должна быть видоизменена при наличии какой-либо особой точки внутри или на конце интервала (a, b). Предположим, что $z=a$ — регулярная особая точка (A) с показателями λ_1 и λ_2 $(\lambda_1+\lambda_2=1)$; предположим также, что $\mathbf{R}(\lambda_1) > \frac{1}{2}$ и пусть $w = w_1$ будет решением, соответствующим показателю λ_1. Тогда, поскольку $z = a$ самое большее полюс второго порядка для функции $J(z)$, интегралы в (B) и (C) конечны, если в интервале

a, b) нет никаких особых точек, кроме $z=a$. Отсюда следует, что если условия, ранее наложенные на $J(z)$, действительны, а также если $w_1 w_2 \to 0$, когда $z \to a$, то $w_1 w_2$ не обратится в нуль в интервале $a < x < b$.

21·41. Области, свободные от нулей. Пусть $z_1 z_2$ будет некоторым прямолинейным отрезком в плоскости z, вдоль которой функция $J(z)$ аналитическая.

Напишем

$$z = z_1 + re^{i\theta},$$

тогда θ — постоянная вдоль выбранного отрезка. Если $w(z)$ — любое решение уравнения (21·4, A), то преобразование Грина примет вид

$$\left[\bar{w}\frac{dw}{dr}\right]_0^r - \int_0^r \left|\frac{dw}{dr}\right|^2 dr + e^{2i\theta}\int_0^r |w|^2 J(z)\,dr = 0.$$

Пусть

$$\bar{w}\frac{dw}{dr} = f_1(r) - if_2(r),$$

$$g_1(z)\cos 2\theta - g_2(z)\sin 2\theta = P(z, \theta),$$

$$g_2(z)\cos 2\theta + g_1(z)\sin 2\theta = Q(z, \theta),$$

где f_1, f_2, P и Q вещественны; отделим вещественные и мнимые части преобразования Грина, тогда

$$f_1(r) - f_1(0) - \int_0^r \left|\frac{dw}{dr}\right|^2 dr + \int_0^r P(z, \theta)\,|w|^2\,dr = 0,$$

$$f_2(r) - f_2(0) + \int_0^r Q(z, \theta)\,|w|^2\,dr = 0.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, получим следующую теорему:

На отрезке $z_1 z_2$ имеется не больше одного нуля $w\,dw/dz$, если вдоль него (I) $P(z, \theta) \leqslant 0$ *или* (II) $Q(z, \theta)$ *не меняет знака. Если, кроме* (I), $f_1(0) \geqslant 0$ *или если, кроме* (II), $f_2(0)$ *имеет противоположный знак относительно знака* $Q(z, \theta)$, *то произведение $w\,dw/dz$ вовсе не имеет нуля на этом отрезке.*

Видоизменим эту теорему. Рассмотрим пучок параллельных линий (l)

$$z = z_0 + re^{i\theta},$$

где z_0 рассматривается как переменный параметр. Пусть T будет односвязной областью в плоскости z, в которой функция $J(z)$ аналитическая и граница которой пересекается каждой линией пучка в двух точках. Две линии пучка пересекают границу в совпадающих точках; пусть этими точками будут α и β. Граница таким образом разделяется на две независимые дуги, одна из которых рассматривается как геометрическое место точек z_0 и называется *дугой* C. Отсюда следует лемма:

На части каждой линии l, лежащей внутри T, лежит не больше одного нуля $\bar{w}dw/dz$ при условии, что в области T

$$\text{(I) } P(z, \theta) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \text{(II) } Q(z, \theta) \neq 0.$$

Если кроме (I), $\mathbf{R}\{\bar{w}dw/dr\} \geqslant 0$ *вдоль C или кроме* (II), $\mathbf{I}\{\bar{w}dw/dr\}$ *имеет вдоль C противоположный знак относительно $Q(z, \theta)$ в области T, то $\bar{w}dw/dz$ не имеет нуля в T.*

Теперь, пусть C будет отрезком на вещественной оси, функция $w(z)$ будет вещественной для всех точек C, а $\theta = \frac{1}{2}\pi$, тогда

$$\mathbf{R}\left\{\bar{w}\frac{dw}{dr}\right\} = \mathbf{R}\left\{e^{i\theta}\bar{w}\frac{dw}{dz}\right\} = 0, \quad P(z, \theta) = -g_1(z) = -\mathbf{R}\{J(z)\}.$$

Это приводит к следующей важной теореме:

Если $w(z)$ — решение, вещественное на отрезке (a, b) вещественной оси, T — область, симметрично расположенная относительно вещественной оси, каждая линия, перпендикулярная к вещественной оси, пересекающей эту область, также пересекает эту границу в двух точках и встречает (a, b) во внутренней точке и, наконец, если $\mathbf{R}\{J(z)\} \geqslant 0$ в области T, тогда $w(z)$ не может иметь комплексного нуля или экстремума[1] *в T.*

В этой теореме слова *вещественная ось* могут быть заменены словами *мнимая ось*, а условие $\mathbf{R}\{J(z)\} \geqslant 0$ можно заменить на $\mathbf{R}\{J(z)\} \leqslant 0$.

Если рассматриваемое уравнение имеет вид $w'' + w = 0$, а $w(z)$ равно $\sin z$, то теорема показывает, что $\sin z$ и $\cos z$ не имеют комплексных нулей.

Аналогично можно вывести следующую теорему для мнимой оси:

Если область T такая же, как и выше, если $w(z)$ — решение, вещественное на отрезке (a, b), если $\bar{w}dw/dz$ имеет в (a, b) фиксированный знак и если $\mathbf{I}\{J(z)\}$ имеет этот знак во всей части области, лежащей выше вещественной оси, то $w(z)$ не может иметь комплексного нуля или экстремума в области T.

21·411. Применение. Рассмотрим диференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{w}{z} = 0;$$

оно имеет регулярную особую точку в начале, с показателями 0 и 1, и нерегулярную особенность в бесконечности. Одно решение конечно в начале и может быть написано в виде

$$E(z) = iz^{\frac{1}{2}} J_1\left(2iz^{\frac{1}{2}}\right),$$

[1] Экстремум (точка, для которой $w'(z) = 0$) соответствует в теории комплексной переменной стационарной точке в теории вещественной переменной.

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Это решение вещественно для всех вещественных значений z и имеет бесконечное число вещественных отрицательных нулей[1]. Любое другое решение, не являющееся кратным $E(z)$, содержит $\log z$. Такое решение может быть вещественным не больше, чем на половине оси; если оно вещественно на отрицательной половине вещественной оси, то оно осциллирует. Решение, вещественное для положительных вещественных значений x, может иметь не больше одного положительного нуля или экстремума. В общем случае, если w вещественно, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} w'(x)}{w(x)} \to +1,$$

следовательно w увеличивается по абсолютной величине беспредельно, но имеется одно специальное решение[2], для которого предельное отношение равно -1 и для этого решения $w \to 0$, когда $x \to +\infty$.

Рассмотрим распределение комплексных нулей. Если $\mathbf{R}(z) < 0$, $\mathbf{R}(-1/z) > 0$, то согласно основной теореме предыдущего параграфа, ни одно решение, вещественное для отрицательных значений вещественной переменной x, не может иметь никаких комплексных нулей в полуплоскости $\mathbf{R}(z) < 0$. Более того $\mathbf{I}(-1/z) > 0$, когда $\mathbf{I}(z) > 0$.

Пусть $w(z)$ будет некоторым решением; если оно имеет положительный нуль или экстремум, то обозначим его через x_0. Тогда, согласно последней теореме § 21·41, $w(z)$ не будет иметь нуля в полуплоскости $\mathbf{R}(z) > x_0$. При исключительном решении оно не имеет нуля в полуплоскости $\mathbf{R}(z) \geqslant 0$.

21 42. Звезда, свободная от нулей. Рассмотрим пучок линий, исходящих из точки $z = a$, в которой функция $J(z)$ регулярная, но не равна нулю. Напишем

$$z = a + re^{i\theta},$$

$$(z-a)^2 J(z) = P(z) + iQ(z).$$

Кривые

$$P(z) = 0, \quad Q(z) = 0$$

пересекаются в точке a, где каждая кривая имеет двойную точку. Направления касательных к этим кривым в точке a даются выражениями

$$g_1(a)\cos 2\theta - g_2(a)\sin 2\theta = 0, \quad g_2(a)\cos 2\theta + g_1(a)\sin 2\theta = 0$$

соответственно.

На луче, проходящем через a, под углом θ, отметим точку p_θ, которая получается следующим образом. Перемещающаяся точка начинает свое движение в a и пересекает луч до тех пор, пока

---

[1] О нулях функций Бесселя и родственных им см. Watson, Bessel Functions, XV.

[2] См. Wiman, Arkiv för Mat., 12 (1917), № 14

Q изменит свой знак. Если P было положительным или изменило свой знак, то точкой, в которой Q изменит свой знак, будет p_θ. С другой стороны, если P все время отрицательно, то перемещающаяся точка будет продолжать свое движение до тех пор, пока P изменит знак, и тогда этой точкой будет p_θ.

Этот процесс повторяется для всех лучей пучка, а полученная совокупность сегментов ap_θ называется *звездой* a. Если особая точка $J(z)$ внутри звезды, то она исключается прямолинейным отрезком, проведенным в направлении от a.

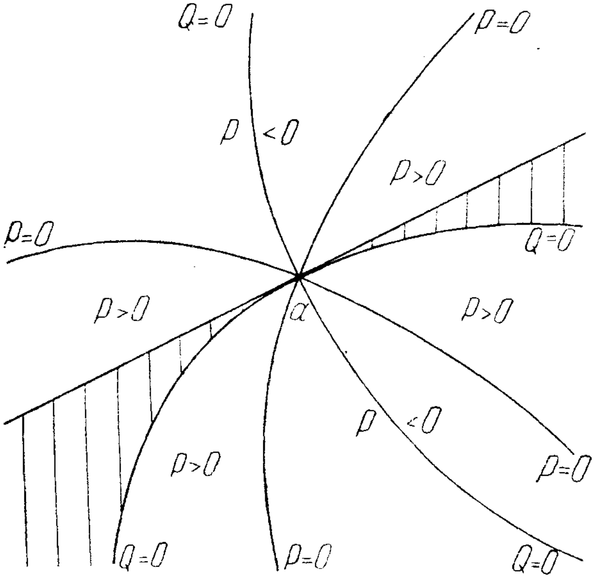


Рис. 18.

В соседстве с точкой a граница отрезка состоит из ответвления кривой $Q = 0$, лежащей в области $P > 0$, и касательной к этому ответвлению в $z = a$ (рис. 18).

Из первой теоремы § 21·41 следует, что *если $z = a$ — нуль $w\,dw/dz$, то это произведение не обращается в нуль в некоторой точке звезды, принадлежащей a, включая не-особые точки ее границы.*

Эта теорема может быть приложена к решению

$$w = z^{\frac{1}{2}} J\left(2iz^{-\frac{1}{2}}\right)$$

уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{w}{z} = 0.$$

Это решение имеет простой нуль в точке $z = 0$. Звезда, соответствующая этой точке, покрывает всю плоскость, за исключением отрицательной половины вещественной оси. Отсюда следует, что рассматриваемое решение не имеет нулей, кроме нулей, лежащих на отрицательной половине вещественной оси.

21·43. Стандартная область. Найдем область, свободную от нулей, и более обширную, чем звезда. Рассмотрим диференциальную систему в ее наиболее общей форме

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{w_2}{K(z)}, \quad \frac{dw_2}{dz} = -G(z)\,w_1$$

и пусть функции $K(z)$ и $G(z)$ будут аналитическими во всей плоскости, за исключением некоторого числа изолированных точек. Эти особые точки, вместе с нулями $K(z)$, являются особенностями диференциальной системы; исключим их из плоскости некоторым числом соответственно проведенных отрезков. В плоскости с купюрами функции $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}$, определяющие обе сети кривых § 21·3, однозначны.

Определим *стандартный путь* интегрирования в виде кривой, исходящей из какой-либо обыкновенной точки плоскости и удовлетворяющей следующим условиям:

(I) он не должен пересекать купюру, исключая, возможно, конечную точку;

(II) он должен состоять из конечного числа дуг обеих сетей;

(III) вдоль пути должно удовлетворяться одно из следующих четырех пар неравенств, именно

$$(\alpha)\ \begin{matrix} d\mathbf{G}_1 \leqslant 0, \\ d\mathbf{K}_1 \geqslant 0; \end{matrix} \quad (\beta)\ \begin{matrix} d\mathbf{G}_1 \geqslant 0, \\ d\mathbf{K}_1 \leqslant 0; \end{matrix} \quad (\gamma)\ \begin{matrix} d\mathbf{G}_2 \geqslant 0, \\ d\mathbf{K}_2 \geqslant 0; \end{matrix} \quad (\delta)\ \begin{matrix} d\mathbf{G}_2 \leqslant 0, \\ d\mathbf{K}_2 \leqslant 0. \end{matrix}$$

Чтобы не получить прерывных касательных, предположим, что в точке, в которой встречаются две различных дуги, угловая точка заменяется небольшой дугой с непрерывной касательной. Это всегда можно произвести так, чтобы характеристическая пара неравенств кривой не была нарушена.

Теперь пусть точка a будет такой, при которой если $W(z) = w_1(z)\,w_2(z)$, то $W(a) = 0$. Если b — другая точка на стандартном пути, выходящем из точки a, то из равенств

$$\mathbf{R}\left[\overline{w}_1 w_2\right]_a^b - \int_a^b |w_2|^2\, d\mathbf{K}_1 + \int_a^b |w_1|^2\, d\mathbf{G}_1 = 0,$$

$$\mathbf{I}\left[\overline{w}_1 w_2\right]_a^b + \int_a^b |w_2|^2\, d\mathbf{K}_2 + \int_a^b |w_1|^2\, d\mathbf{G}_2$$

непосредственно следует, что $W(z)$ не будет иметь на стандартном пути никаких нулей, кроме a.

Если мы совокупность стандартных путей интегрирования, исходящих из точки a, назовем *стандартной областью* a, можно сформулировать теорему:

Если $W(a) = 0$, то $W(z)$ *в стандартной области* a *не имеет нулей, кроме* $z = a$.

Аналогично можно построить стандартные пути для всех точек непрерывной кривой C, на которой изменение знака $K(z)\, w_1(z)\, w_2(z)$ известно. Совокупность этих стандартных путей называется *стандартной областью* C относительно рассматриваемого решения.

21·431. Пример стандартной области. В уравнении

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{w}{z} = 0$$

имеем

$$\mathrm{K}(z) = z, \quad \mathrm{G}(z) = -\log z.$$

Чтобы сделать функцию $\mathrm{G}(z)$ однозначной, плоскость разрезается вдоль отрицательной половины вещественной оси.

Теперь, если $z = re^{i\theta}$, то стандартные кривые составляются из дуг сетей кривых

$$x = \text{const}, \; y = \text{const}; \; r = \text{const}, \; \theta = \text{const},$$

а четыре полученные пары неравенств будут соответственно равны

$$(\alpha)\ \begin{matrix} dr \geqslant 0, \\ dx \geqslant 0; \end{matrix} \quad (\beta)\ \begin{matrix} dr \leqslant 0, \\ dx \leqslant 0; \end{matrix} \quad (\gamma)\ \begin{matrix} d\theta \leqslant 0, \\ dy \geqslant 0; \end{matrix} \quad (\delta)\ \begin{matrix} d\theta \geqslant 0, \\ dy \leqslant 0, \end{matrix}$$

Предположим, что у нас имеется решение, при котором $W(x_0) = 0$, x_0 — точка на отрицательной половине вещественной оси. Стандартные кривые, исходящие из x_0, могут охватить следующие области:

Если (α) удовлетворяется, то областью является

$$\mathrm{R}(z) \geqslant x_0, \; |z| \geqslant |x_0|.$$

Если (β) удовлетворяется, то область отсутствует.

Если (γ) удовлетворяется, то область будет $\mathrm{I}(z) > 0$.

Если (δ) удовлетворяется, то область будет $\mathrm{I}(z) < 0$.

Таким образом стандартная область охватывает всю плоскость, за исключением части вещественной оси, для которой $\mathrm{R}(z) < |x_0|$; поэтому ни одно решение рассматриваемого уравнения, имеющее отрицательный вещественный нуль $z = x_0$, не имеет комплексного нуля или вещественного нуля $z > |x_0|$.

21·5. Асимптотическое распределение нулей. Теоремы, рассмотренные в предыдущих параграфах, имеют своей целью разрешение проблемы определения расширенных областей плоскости z, свободных от нулей частного решения рассматриваемого диференциального уравнения. Сейчас мы разберем дополнительную проблему, именно распределение нулей в соседстве с нерегулярной особой точкой[1].

[1] Аналогичные проблемы были изучены Бутро в связи с трансцендентными функциями Пенлеве [Ann. Éc. Norm. (3), 30 (1913), 255; (3), 31 (1914), 99] и Гарнье в связи с решениями линейных диференциальных уравнений Гарнье [J. de Math. (8), 2 (1919), 99].

Диференциальное уравнение

(A) $$\frac{d}{dx}\left\{K(z)\frac{dw}{dz}\right\}+G(z)w=0$$

преобразуется заменой независимой переменной

$$Z=\int_{z_0}^{z}\sqrt{\frac{G(z)}{K(z)}}\,dz$$

в уравнение

(B) $$\frac{d}{dZ}\left\{S(Z)\frac{dw}{dZ}\right\}+S(Z)w=0,$$

где

$$S(Z)=\sqrt{G(z)K(z)}.$$

Его можно также написать в виде

(C) $$\frac{d^2w}{dZ^2}+F(Z)\frac{dw}{dZ}+w=0,$$

где

$$F(Z)=\frac{d}{dZ}\{\log S(Z)\}.$$

Замена зависимой переменной

$$W=\sqrt{S(Z)}\,w$$

преобразует уравнение в

(D) $$\frac{d^2W}{dZ^2}+\{1-\Phi(Z)\}W=0,$$

где

$$\Phi(Z)=\frac{1}{2}\frac{dF}{dZ}+\frac{1}{4}F^2.$$

Новая переменная Z, рассматриваемая как функция z, бесконечно многозначна. Предположим, что Z может быть так определена, чтобы функция $\Phi(Z)$ была аналитической во всей бесконечной области Δ плоскости Z, обладающей следующими свойствами:

(A 1) Δ является односвязной и ограниченной кусочно-гладкой кривой,

(A 2) каждая линия, параллельная вещественной оси, пересекает границу Γ области (I) на линейном отрезке, (II) в точке или (III) вовсе не пересекает ее.

(A 3) Δ находится внутри сектора

$$-\pi+\delta<\arg Z<\pi-\delta,\quad |Z|\geqslant R_0>0.$$

Область, удовлетворяющая этим условиям, называется областью типа **A**. Если Γ пересекается каждой параллелью к вещественной оси, то область называется типа **Aa**, в противном случае — типа **Ab**. Условия **A** обеспечивают условие, по которому Δ содержит полоску Δ_0 конечной ширины, определяемой неравенствами вида

$$\mathbf{R}(Z) \geqslant A > R_0, \quad B_1 \geqslant \mathbf{I}(Z) \geqslant B_2.$$

Предположим также, что в каждой точке Δ функция $\Phi(Z)$ удовлетворяет условию

$$\text{(B)} \qquad \Phi(Z) < \frac{M}{|Z|^{1+\nu}},$$

где M и ν — положительные числа.

Из теорем существования следует, что любое решение $W(Z)$ уравнения (D) ограничено в полоске Δ_0. Рассмотрим выражение

$$f(Z) = W_0(Z) + \int^{\infty} \sin(T - Z)\,\Phi(T)\,W(T)\,dT,$$

где $W_0(Z)$ — решение уравнения

$$W_0'' + W_0 = 0,$$

а путь интегрирования параллелен вещественной оси. Можно показать, что

$$f''(Z) + f(Z) - \Phi(Z)\,W(Z) = 0,$$

и следовательно, если $f(Z)$ — решение интегрального уравнения

$$\text{(E)} \qquad f(Z) = W_0(Z) + \int_Z^{\infty} \sin(T - Z)\,\Phi(T) f(T)\,dT,$$

то $f(Z)$ будет также решением диференциального уравнения (D). В этом смысле уравнение (E) можно назвать *эквивалентным интегральным уравнением*[1].

21·51. Исследование интегрального уравнения. Прежде чем рассматривать интегральное уравнение, необходимо получить выражение для верхней границы интеграла

$$\text{(F)} \qquad I(z;\,\mu) = \int_z^{\infty} \frac{dt}{|t|^{\mu}},$$

где μ вещественно и

$$\mu \geqslant \mu_0 > 1.$$

Здесь z не отрицательное вещественное число, а путь интегрирования, параллельный вещественной оси. Пусть

$$z = re^{i\theta}, \quad t = r(v + e^{i\theta}),$$

[1] Это интегральное уравнение типа Вольтерра. Приведенное ниже исследование интегрального уравнения было дано Хиллом [Trans. Am. Math. Soc., 26 (1924), 241].

тогда

$$I(re^{i\theta};\ \mu) = r^{1-\mu}\int\limits_0^\infty \frac{dv}{|v+e^{i\theta}|^{\mu}} = r^{1-\mu} J(\theta;\ \mu).$$

Теперь

$$|v+e^{i\theta}|^{-\mu} = (1+2v\cos\theta+v^2)^{-\mu/2} = (1+v)^{-\mu}\left\{1-\frac{4v\sin^2\frac{1}{2}\theta}{(1+v)^2}\right\}^{-\mu/2}.$$

При $|\theta|<\pi$ второй множитель может быть разложен в ряд по $v/(1+v)^2$; полученный ряд для $|v+e^{i\theta}|^{-\mu}$ будет равномерно сходиться при $0\leqslant v\leqslant\infty$.

Интегрируя его почленно и применяя формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{v^k dv}{(1+v)^{\mu+2k}} = B(k+1,\ \mu+k-1) = \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\mu+k-1)}{\Gamma(\mu+2k)},$$

найдем, что

$$J(\theta;\ \mu) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+k\right)\Gamma(\mu+k-1)}{\Gamma(\mu+2k)}\left(4\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)^k =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+k-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}+k\right)}\sin^{2k}\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\mu-1}F\left(\mu-1,\ 1;\ \frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2};\ \sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$

и, следовательно[1],

$$I(re^{i\theta};\ \mu) = \frac{F\left(\mu-1,\ 1;\ \frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2};\ \sin^2\frac{1}{2}\theta\right)}{(\mu-1)\,r^{\mu-1}}.$$

Можно доказать[2], что при $0<|\theta|<\pi$

$$F\left(\mu-1,1;\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2};\sin^2\frac{1}{2}\theta\right) = -F\left(\mu-1,1;\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2};\cos^2\frac{1}{2}\theta\right) + 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}|\sin\theta|^{1-\mu}.$$

---

[1] В частности

$$I(re^{i\theta};\ 2) = \frac{\theta}{r\sin\theta}.$$

[2] Доказательство следует из формулы (§ 7·231), выражающей $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ через $F(\alpha,\ \beta;\ \alpha+\beta-\gamma+1;\ 1-x)$ и $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha;\ \gamma-\beta;\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x)$, а также из того, что $F(\alpha,\ \beta;\ \alpha;\ x)=(1-x)^{-\beta}$.

Поскольку каждая из гипергеометрических функций в этом уравнении имеет положительную сумму при $\mu > 1$, $0 \leqslant |\theta| < \pi$, отсюда следует, что

$$I(re^{i\theta};\ \mu) \leqslant \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{(\mu-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}\,|\,r\sin\theta\,|^{1-\mu}.$$

Гипергеометрическая функция в выражении для $I(re^{i\theta};\ \mu)$ возрастает с $|\theta|$ при $0 \leqslant |\theta| < \pi$, следовательно, если $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\pi$,

$$I(re^{i\theta};\ \mu) \leqslant I(re^{\frac{1}{2}i\pi};\ \mu)$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{(\mu-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}\,r^{1-\mu}.$$

С другой стороны, если $\frac{1}{2}\pi < |\theta| < \pi$,

$$I(re^{i\theta};\ \mu) < \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{(\mu-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}\,|\,y\,|^{1-\mu}.$$

При $\mu \geqslant \mu_0 > 1$ выражение

$$\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\mu-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right)}$$

ограничено; пусть его верхней границей будет C. Отсюда получим

(G) $$I(z;\ \mu) < C\,\frac{R^{1-\mu}}{\sqrt{\mu-1}},$$

где, если $z = x + iy$,

$$R = |z| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant |\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi,$$

$$R = |y| \quad \text{при} \quad \frac{1}{2}\pi \leqslant |\arg z| < \pi.$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$W(Z) = W_0(Z) + \int_Z^{\infty} \sin(T-Z)\,\Phi(T)\,W(T)\,dT$$

и напишем

$$K(Z,\ T) = \sin(T-Z)\,\Phi(T).$$

Методом последовательных приближений покажем, что решение этого интегрального уравнения существует. Определим последовательность функций $W_1(Z), \ldots, W_n(Z), \ldots$, где

$$W_1(Z) = W_0(Z) + \int_Z^{\infty} K(Z,T)\, W_0(T)\, dT,$$

и в общем случае

$$W_n(Z) = W_0(Z) + \int_Z^{\infty} K(Z,T)\, W_{n-1}(T)\, dT \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

тогда

$$W_{n+1}(Z) - W_n(Z) = \int_Z^{\infty} K(Z,T)\, \{W_n(T) - W_{n-1}(T)\}\, dT.$$

Пусть L будет верхней границей $|W_0(Z)|$ в Δ_0; поскольку $T-Z$ вещественно на пути интегрирования,

$$|K(T,Z)| \leqslant |\varphi(T)| < \frac{M}{|Z|^{1+\nu}}.$$

Предположим, что для некоторого значения n

$$|W_n(Z) - W_{n-1}(Z)| < \left(\frac{CM}{\nu^{\frac{1}{2}}|Z|^{\nu}}\right)^n \cdot \frac{L}{\{n!\}^{\frac{1}{2}}},$$

тогда

$$|W_{n+1}(Z) - W_n(Z)| < \left(\frac{CM}{\nu^{\frac{1}{2}}}\right)^n \cdot \frac{L}{\{n!\}^{\frac{1}{2}}} \int_Z^{\infty} \frac{M\,dT}{|T|^{n\nu+\nu+1}}$$

$$< \left(\frac{CM}{\nu^{\frac{1}{2}}|Z|^{\nu}}\right)^{n+1} \frac{L}{\{(n+1)!\}^{\frac{1}{2}}},$$

т. е. неравенство справедливо для следующего значения n. Но поскольку

$$|W_1(Z) - W_0(Z)| \leqslant \left|\int_Z^{\infty} K(Z,T)\, W_0(T)\, dT\right|$$

$$< \int_Z^{\infty} \frac{ML\,dT}{|T|^{1+\nu}}$$

$$< \frac{CML}{\nu^{\frac{1}{2}}|Z|^{\nu}},$$

неравенство справедливо для $n = 1$, а доказательство получается индукцией.

Следовательно $W_n(Z)$ сходится равномерно в Δ_0 к предельной функции $W(Z)$, аналитической во всей области Δ_0, и удовлетворяет интегральному уравнению. Более того, $W(Z)$ является единственным ограниченным решением интегрального уравнения, так как если бы существовало второе ограниченное решение, то разность $D(Z)$ удовлетворяла бы однородному интегральному уравнению

$$D(Z)=\int_{Z}^{\infty} K(Z, T)\, D(T)\, dT.$$

Пусть Δ_a будет частью Δ_0, для которой $\mathbf{R}(Z) \geqslant a$, где a должно быть определено. В этом случае можно доказать, что если μ_a — верхняя граница $|D(Z)|$ в Δ_a, то

$$\mu_a \leqslant \frac{CM}{\nu^{\frac{1}{2}} a^{\nu}}\, \mu_a.$$

Следовательно, если a выбрано так, что $a^{\nu} > CM/\nu^{\frac{1}{2}}$, то это неравенство приведет к противоречию (если только μ_a не равно нулю), что доказывает, что $D(Z)$ должно быть тождественно равно нулю.

Доказательство справедливо для любой полоски типа Δ_0, которую может содержать Δ. Отсюда следует, что интегральное уравнение имеет в части Δ, которая лежит в полуплоскости $\mathbf{R}(Z) \geqslant 0$, единственное аналитическое решение. Рассмотрим полуплоскость $\mathbf{R}(Z) < 0$, и предположим, что b — произвольно большое положительное число. В этом случае положительное число M_b существует и в Δ

$$|\Phi(Z)| < \frac{M_b}{|Z+b|^{1+\nu}}.$$

Для завершения доказательства в данном случае необходимо ввести изменение, вследствие измененной формы неравенства (G). Отсюда следует, что единственное решение существует также в той части Δ, которая лежит на отрицательной стороне мнимой оси, если

$$\mathbf{R}(Z) > -b, \quad |\mathbf{I}(Z)| \geqslant \rho.$$

Пусть D будет частью Δ, в которой $\mathbf{I}(Z)$ ограничено, $\mathbf{R}(Z)$ ограничено снизу, а $|\mathbf{I}(Z)| \geqslant \rho$, когда $\mathbf{R}(Z) < 0$. Пусть Λ будет верхней границей $|W(Z)|$ в D и пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ будет точкой, которой достигается эта верхняя граница, тогда, если L — верхняя граница $|W_0(Z)|$ в D, то

$$\Lambda < L + \Lambda M \int_{0}^{\infty} \frac{dv}{|z_1+v|^{1+\nu}} < L + \Lambda \frac{CM}{\nu^{\frac{1}{2}} R_1^{\nu}},$$

где

$$R_1 = |z_1|, \quad \text{когда } x_1 > 0,$$

$$R_1 = |y_1|, \quad \text{когда } x_1 < 0.$$

Теперь, если D выбрать таким, что $R_1^\nu > 2CM|\nu^{\frac{1}{2}}$, то $\Delta < 2L$ и

$$|W(Z) - W_0(Z)| < \frac{2CLM}{\nu^{\frac{1}{2}} R^\nu},$$

где $R = |Z|$ или $|Y|$, соответственно тому, X больше или меньше нуля.

Нетрудно получить аналогичные равенства, справедливые в той части Δ, в которой $\mathrm{I}(Z) > B_2$, так как интегральное уравнение

$$W^+(Z) = W_0^+(Z) + \int_Z^\infty K^+(Z, T)\, W^+(T)\, dT,$$

где

$$W_0^+(Z) = e^{iZ} W_0(Z), K^+(Z, T) = e^{i(Z-T)} K(Z, T),$$

удовлетворяется

$$W^+(Z) = e^{iZ} W(Z),$$

и можно доказать, что $|W^+(Z)|$ ограничен для $\mathrm{I}(Z) > B_2$. Соответствующим выбором B_2 верхняя граница $|W^+(Z)|$ в рассматриваемой области может быть значительно меньше верхней границы L^+ выражения $|W_0^+(Z)|$ в этой области. Отсюда следует, что

$$|e^{iZ}\{W(Z) - W_0(Z)\}| < \frac{2CL^+ M}{\nu^{\frac{1}{2}} R^\nu},$$

где R имеет такое же значение, как и выше. Аналогичная формула может быть получена для той же части Δ, для которой $\mathrm{I}(Z) < B_1$.

Ввиду этих неравенств $W(Z)$ называется *асимптотическим* выражением относительно $W_0(Z)$; можно доказать, что $W'(Z)$ асимптотическое выражение относительно $W_0'(Z)$.

21·52. Усеченные решения. Пусть $W_1(Z)$ будет решением, асимптотическим относительно e^{iZ}, тогда интегральное уравнение

$$U(Z) = 1 + \frac{1}{2i} \int_Z^\infty \left\{ e^{2i(T-Z)} - 1 \right\} \Phi(T)\, U(T)\, dT$$

будет удовлетворяться функцией $U(Z) = e^{-iZ} W_1(Z)$. Из этого интегрального уравнения видно [1], что $W_1(Z)$ — аналитическая функция в секторе

$$-\pi + \varepsilon \leqslant \arg Z \leqslant 2\pi + \varepsilon, \qquad |z| \geqslant \rho$$

[1] Доказательство, справедливое при $\nu = 1$, см. Hille, Proc. London Math. Soc., 23 (1924), § 2·24.

и что

$$e^{-iZ}\, W_1(Z) = 1 + \frac{\theta_1(Z)}{Z^\nu},$$

где $|\theta_1(Z)|$ ограничен в секторе. Аналогично, если решение $W_2(Z)$ асимптотическое относительно e^{iZ}, то

$$e^{iZ}\, W_2(Z) = 1 + \frac{\theta_2(Z)}{Z^\nu}.$$

Из этих формул следует, что решения $W_1(Z)$ и $W_2(Z)$ не имеют нулей вне достаточно большого круга; они называются *усеченными в* Δ. То же верно и для производных $W_1'(Z)$ и $W_2'(Z)$.

Теперь, если область Δ типа **Аа**, в которой каждая линия, параллельная вещественной оси, пересекает границу, $W_1(Z)$ и $W_2(Z)$ являются единственными решениями, усеченными в Δ. Другое решение может быть написано в виде

$$W(Z) = C_1 W_1(Z) + C_2 W_2(Z). \qquad (C_1 C_2 \neq 0)_1$$

и будет асимптотическим относительно

$$W_0(Z) = C_1 e^{iZ} + C_2 e^{-iZ}.$$

Не теряя в общности, решение $W_0(Z)$ можно представить в виде $\sin(Z - \alpha)$; его нули равны $\alpha_n = \alpha + n\pi$. Теперь, поскольку область типа **Аа**, полоска Δ_0 может быть выбрана так, чтобы она содержала все нули $W_0(Z)$ при определенном значении n, например N_0. Обозначим части Δ, которые лежат выше и ниже Δ_0, через Δ_1 и Δ_{-1} соответственно, тогда в Δ_0

$$W(Z) = \sin(Z - \alpha) + \frac{\theta_0(Z)}{Z^\nu};$$

в Δ_1

$$e^{iZ} W(Z) = e^{iZ} \sin(Z - \alpha) + \frac{\theta_1(Z)}{Z^\nu},$$

а в Δ_2

$$e^{-iZ}\, W_1^1(Z) = e^{-iZ} \sin(Z - \alpha) + \frac{\theta_{-1}(Z)}{Z^\nu}.$$

В каждом случае в Δ_λ

$$|\theta_\lambda(Z)| < \frac{2CL_\lambda M}{\nu^{\frac{1}{2}}} \qquad (\lambda = -1, 0, +1),$$

когда

$$|Z|^\nu \geqslant 2CM/\nu^{\frac{1}{2}},$$

где L_ν обозначает верхнюю границу $|e^{\lambda iZ} \sin(Z - \alpha)|$ в Δ_λ.

Теперь пусть Γ_n будет кругом малого радиуса ε, содержащего точку α_n, тогда на Γ_n

$$|\sin(Z-\alpha)| > \frac{2}{\pi}\varepsilon,$$

и если

$$|Z| \geqslant r = \left\{ \frac{CL_0 M\pi}{\nu^{\frac{1}{2}}\varepsilon} \right\}^{1/\nu},$$

то

$$\left| \frac{f_0(Z)}{Z^\nu} \right| < \frac{2}{\pi}\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\sin(Z-\alpha)$ является главным членом для $W(Z)$ на любом круге Γ_n, который лежит в Δ, и вне круга $|Z| = \gamma$.

Пусть Δ^+ будет той частью Δ, которая лежит вне круга $|Z| = \gamma$. Тогда внутри каждого круга Γ_n в Δ^+ будет лежать только один нуль $W(Z)$[1]. Пусть Δ^* будет остатком от Δ^+, если удалить внутреннюю часть каждого круга Γ_n в Δ^+, тогда $W(Z)$ не будет иметь нуля в Δ^*. Аналогично можно доказать, что нули $W'(Z)$ в Δ^+ лежат по одному внутри каждого круга

$$|Z - \alpha'_n| = \varepsilon,$$

где $\alpha'_n = \alpha + \frac{1}{2}\pi$.

Таким образом нули $W(Z)$ и $W'(Z)$ могуть быть обозначены соответственно через A_n и A'_n, где

$$\lim(A_n - \alpha_n) = 0, \quad \lim(A'_n - \alpha'_n) = 0,$$

а последовательность точек A_n называется *последовательностью нулей* осциллирующего решения $W_n(Z)$. Оба усеченных решения не имеют последовательности нулей.

Если область Δ типа **Ab**, существует бесконечное число решений, усеченных в Δ, именно решения, асимптотические относительно функции $W_0(Z)$, нули которой лежат вне Δ. С другой стороны, если при некотором значении n последовательность точек $\alpha_n = \alpha + n\pi$ лежит в Δ, может быть построено решение, последовательность нулей которого аппроксимируется формулой (α_n) и которое является асимптотическим относительно $W_0(Z) = C\sin(Z-\alpha)$.

Таким образом, независимо от типа области, всегда может быть найдено решение, нули которого аппроксимируются последовательностью $(\alpha + n\pi)$, если эта последовательность лежит в Δ. Для того, чтобы показать зависимость нулей от α, напишем $A_n(\alpha)$ вместо A_n и $W(Z,\alpha)$ вместо $W(Z)$. Здесь возникает во-

[1] Rouché, J. Ec. Polyt., 39 (1862), 217.

прос, как будет изменяться $A_n(\alpha)$ при изменении α? Предположим, что $\alpha = \sigma + i\tau$; придавая τ постоянное значение τ_0, заставим σ изменяться от σ_0 до $\sigma_0 + \pi$, тогда $A_n(\alpha)$ опишет непрерывную кривую между точками $A_n(\alpha_0)$, где $\alpha_0 = \sigma_0 + i\tau$, и $A_{n+1}(\alpha_0)$. При дальнейшем увеличении σ $A_n(\alpha)$ опишет кривую, соединяющую нули и стремящуюся к асимптоте $\mathrm{I}(Z) = \tau_0$. Эта кривая называется *нулевой кривой* диференциального уравнения. Очевидно, через каждую точку в Δ проходит только одна нулевая кривая.

21·53. Распределение нулей в плоскости z. Полученные результаты могут быть отнесены также и к плоскости z при помощи подстановки

$$Z = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{G(z)}{K(z)}}\, dz.$$

Эта подстановка дает конформное соответствие между плоскостями Z и z. Односвязная область Δ на плоскости Z преобразуется в односвязную область D в плоскости z; в наиболее общем случае преобразованная область лежит на бесконечно-многолистной поверхности Римана. Любое решение $w(z)$ будет аналитическим во всей области D, но на границах этой области может быть одна или несколько особых точек, соответствующих $z = \infty$.

Полученные результаты для распределения нулей в плоскости Z могут быть перенесены на плоскость z. Круг $|Z| = \gamma$ соответствует кривой, разделяющей область D на две части; пусть D^+ будет частью, соответствующей Δ^+. Точки α_n становятся точками a_n, а круги Γ_n становятся замкнутыми контурами C_n, содержащими точки a_n. D^* определяется как часть D^+, которая осталась после того, как была удалена внутренняя часть контуров C_n. Если при некотором значении n и выше него точки α_n все лежат в Δ, то соответствующие точки a_n будут лежать в D. Решению $W(Z, \alpha)$ соответствует решение $w(z, a)$, где

$$w(z, a) = \{S(Z)\}^{-\frac{1}{2}} W(Z, \alpha),$$

и внутри каждого контура C_n в D^+ лежит только один нуль $w(z, a)$ в то время как в D^* нули отсутствуют.

Нулевые кривые в плоскости Z могут быть представлены нулевыми кривыми $\mathfrak{C}$ на поверхности Римана, асимптотическими к кривым

$$\mathrm{I}\sqrt{\frac{G(z)}{K(z)}} = 0.$$

Через каждую точку a в области D проходит только одна нулевая кривая $\mathfrak{C}(a)$. Отметим точки a_n на $\mathfrak{C}(a)$ в направлении возрастающих значений $\mathbf{R}(Z)$, где

$$n\pi = \mathbf{R}\left\{\int_a^{a_n} \sqrt{\frac{G(z)}{K(z)}}\, dz\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а путем интегрирования служит кривая $\mathfrak{C}(a)$, тогда существует решение $w(z, a)$, нули которого A_n могут быть расположены так, что

$$\lim (A_n - a_n) = 0.$$

Рассмотрим два круга Σ_1 и Σ_2, проведенные в плоскости Z с радиусами R_1 и R_2 соответственно, где $R_2 > R_1 > R$, и предположим, что каждый из этих кругов пересекает Γ (границу Δ), только в двух точках. В плоскости z круговые дуги Σ_1 и Σ_2 преобразуются в кривые S_1 и S_2, которые, вместе с преобразованными частями Γ, заключенными между Σ_1 и Σ_2, образуют криволинейный четырехсторонник $[D]$. Этот четырехсторонник пересекается $\mathfrak{C}(a)$ в двух точках, например, z_1 на S_1 и z_2 на S_2. Отсюда следует, что число нулей $w(z, a)$ в $[D]$ дается формулой

$$N[D] = \frac{1}{\pi} R\left\{ \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\frac{G(z)}{K(z)}} dz \right\} + \theta,$$

где путь интегрирования лежит вдоль $\mathfrak{C}(a)$ и $-1 \leqslant \theta \leqslant +1$.

Аналогичные результаты могут быть получены и в отношении $w'(z, a)$ из формулы

$$\frac{dw}{dz} = \left\{ \frac{dW}{dZ} - \frac{1}{2} F(Z) W(Z) \right\} \{ S(Z) \}^{-\frac{1}{2}} \frac{dZ}{dz},$$

где известен только первый множитель.

21·54. Уравнения с коэфициентами в виде полиномов. В качестве примера рассмотрим случай, когда $K(z)$ и $G(z)$ — полиномы от z; пусть

$$K(z) = z^k + \ldots, \quad G(z) = g_0 z^g + \ldots \qquad (g_0 \neq 0).$$

Для того, чтобы точка в бесконечности была нерегулярной особенностью, предположим, что $g \geqslant k - 1$; пусть $m = g - k + 2$, так что $m \geqslant 1$.

Поскольку

$$Z = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{g_0 z^g + \cdots}{z^k + \cdots}} dz,$$

Z является, в общем случае, Абелевым интегралом третьего рода. Для больших значений z, Z имеет форму

$$Z = \frac{2}{m} g_0^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}m} \{1 + C_{\frac{1}{2}m} z^{-\frac{1}{2}m} \log z + O(z^{-1})\},$$

где логарифмический член встречается только в том случае, если m — четное число. С другой стороны

$$z = \left\{ \frac{m^2 Z^2}{4 g_0} \right\}^{\frac{1}{m}} \{1 + \Sigma\},$$

где Σ — двойной ряд по возрастающим степеням $Z^{-\frac{2}{m}}$ и $\log Z$, который сходится для достаточно больших значений $|Z|$.

Далее, поскольку

$$F(Z) = \frac{G(z)K'(z) + G'(z)K(z)}{2\{G(z)\}^{\frac{3}{2}}\{K(z)\}^{\frac{1}{2}}},$$

отсюда следует, что

$$F(Z) = \frac{g+k}{2g_0^{\frac{1}{2}}} z^{-\frac{m}{2}} \{1 + O(z^{-1})\},$$

следовательно

$$F(Z) = \frac{g+k}{m} Z^{-1} \{1 + \Sigma\},$$

где Σ — двойной ряд того же типа, что и выше.

Аналогично

$$\Phi(Z) = \frac{3k - g + 4}{4m^2} Z^{-2} \{1 + \Sigma\},$$

и следовательно $\Phi(Z)$ удовлетворяет условию **B** при $\nu = 1$ в некоторой области вне достаточно большого круга $|Z| = R$, где $\arg Z$ ограничен. Пусть Δ будет областью

$$|Z| > R, \quad \mathbf{R}(Z) \geqslant 0.$$

Для достаточно больших значений R эта область может быть конформно отображена на секторную область D_μ плоскости z, в которой

$$\frac{1}{m}\{(2\mu - 1)\pi - \theta_0\} - \delta < \arg z < \frac{1}{m}\{(2\mu + 1)\pi - \theta_0\} + \delta,$$

здесь δ — малое положительное число, $\theta_0 = \arg g_0$, а $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, соответственно выбранному значению $Z^{1/m}$.

Если $z = re^{i\theta}$, то асимптотические нулевые кривые в плоскости z имеют вид

$$r^{\frac{1}{2}m} \sin \frac{1}{2}(m\theta + \theta_0) + \text{низшие члены} = \text{const},$$

а их асимптотическими направлениями будут

$$\theta_\mu = \frac{1}{m}(2\mu\pi - \theta_0).$$

В общем случае решение $w(z, a)$ неоднозначно в соседстве с бесконечностью, но если $\mathfrak{D}$ представляет часть поверхности Римана для $\log z$, которая лежит вне достаточно большого круга, то $w(z, a)$ однозначно на $\mathfrak{D}$. Нули $w(z, a)$ образуют таким образом m последовательностей, асимптотических к направлениям θ_μ

в каждом листе $\mathfrak{D}$. Если $N(r)$ обозначает число нулей в последовательности, лежащей внутри круга $|z|=r$, то когда $r\to\infty$,

$$N(r)\to\frac{2}{m\pi}|g_0|^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}m}.$$

Результаты § 21·52 показывают, что существуют два решения, усеченные в направлении θ_μ, откуда следует, что общее число усеченных решений не превышает $2m$. Покажем, что действительное число усеченных решений равно m.

Рассмотрим область Δ', границей которой является дуга круга

$$|Z|=R,\ -\frac{1}{2}\pi+\delta\leqslant\arg Z\leqslant\frac{1}{2}\pi-\delta,$$

и касательные, пров денные к конечным точкам этой дуги и простирающиеся на бесконечность в полуплоскости $\mathbf{I}(Z)<0$. Определенная таким образом плоскость — типа **А**; в ней $\Phi(Z)$ удовлетворяет условию **В**. Пусть $W_1(Z)$ и $W_2(Z)$ будут усеченными решениями, асимптотическими относительно e^{iZ} и e^{-iZ} соответственно. Теперь $W_1(Z)$ асимптотически стремится к e^{iZ} в более расширенной области

$$-\pi<\arg Z<2\pi;$$

как это видно из рассмотрения области, симметричной Δ' относительно мнимой оси, $W_2(Z)$ также асимптотически стремится к e^{-iZ} в расширенной области

$$-2\pi<\arg Z<\pi.$$

Следовательно, если $|\mathbf{I}(Z)|\to\infty$, то

$$W_1(Z)\to 0 \quad \text{в верхней половине } \Delta',$$

$$W_2(Z)\to 0 \quad \text{в нижней половине } \Delta',$$

и вследствие свойств интегрального уравнения, удовлетворяемого $W(Z)$, эти условия достаточны для определения $W_1(Z)$ и $W_2(Z)$ соответственно.

В плоскости z существует m независимых областей D'_μ, соответствующих Δ', а D'_μ таково, что

$$\theta_{\mu-1}+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta_{\mu+1}-\varepsilon \qquad (\mu=0,\ 1,\ \dots\ m-1).$$

Последовательные области D'_μ и $D'_{\mu+1}$ имеют общую часть, именно область U_μ, где

$$\theta_\mu+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta_{\mu+1}-\varepsilon.$$

Имеется одно решение, усеченное в D'_μ, которое стремится к нулю в U_μ, и решение, усеченное в $D'_{\mu+1}$, которое также стремится к нулю в U_μ. Однако, поскольку только одно такое решение может стремиться к нулю в U_μ, оба рассматриваемые решения должны быть тождественны. Число усеченных решений таким образом приводится к m; это можно показать исследованием уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + z^g w = 0.$$

Если $w_\mu(z)$ — решение, которое стремится к нулю в U_μ, то это решение, усеченное в примыкающих направлениях θ_μ и $\theta_{\mu+1}$, сохраняет то же асимптотическое представление в трех примыкающих областях $U_{\mu-1}$, U_μ и $U_{\mu+1}$.

Примеры

1. Докажите формулу

$$[w_1 \overline{w}_2]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{|w_2|^2}{K(z)}\, dz + \int_{z_1}^{z_2} |w_1|^2\, \overline{G}(z)\, d\overline{z} = 0.$$

2. Рассматривая динамическую систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g_1 x + g_2 y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g_1 y - g_2 x,$$

где g_1 и g_2 — функции t, используйте результаты § 21·4 для того, чтобы доказать, что частица, начинающая двигаться из начала в момент t_1 с заданной скоростью, будет продолжать удаляться от начала до тех пор, пока $g_1(t) \leqslant 0$, а знак $g_2(t)$ остается неизменным.

3. Распространите результаты §§ 21·4, 21·41 на случай самосопряженного уравнения второго порядка.

4. Пусть функция $F(z)$ будет вещественной и положительной, когда z вещественно и больше x_1, аналитической во всей области D, включающей вещественную ось с $\mathbf{R}(z) > x_1$ и такой, что

$$\mathbf{R}\{F(z)\} > 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{I}\{F(z)\} \neq 0$$

в D; пусть $W(z)$ будет решением уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} - F(z)\, w = 0,$$

так что $W(z) \to 0$, когда $Z \to \infty$ в D вдоль параллели к вещественной оси. Докажите, что $W(z)$ не имеет нуля или экстремума в D.

5. Постройте стандартную область для решения уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{w}{z} = 0,$$

имеющего комплексный нуль $z = a + ib$.

6. Докажите, что если функция $\Phi(Z)$ — аналитическая и удовлетворяет условию **B** в полуплоскости Γ, $\mathbf{I}(Z) > B_2$, то каждое решение будет асимптотическим к синусоидальной функции в Γ^+ — крайней правой части области, и асимптотическим к другой синусоидальной функции в Γ^- — крайней левой части области. Исследуйте нули этого решения.

7. При заданной функции $\sin(Z - \alpha)$ существует одно решение $W^+(Z)$, асимптотическое к ней в Γ^+, и другое решение $W^-(Z)$, асимптотическое относительно этой функции в Γ^-. Но если $\tau = \mathbf{I}(\alpha)$ велико, то существует реше-

ние $W(Z)$, асимптотическое к $\sin(Z-\alpha)$ во всей полуплоскости Γ, а последовательности нулей в Γ^+ и Γ^- сливаются в одну последовательность. Выше этой последовательности нули отсутствуют и только конечное число нулей имеется ниже ее в Γ.

8. Асимптотические нулевые кривые уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{w}{z} = 0$$

являются параболами с фокусом в начале и отрицательной вещественной осью в качестве оси. Найдите распределение нулей в соседстве с асимптотической параболой.

9. Общее решение уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} + G(z)w = 0,$$

где $G(z)$ — полином от z, может быть представлено в виде

$$w = w_1(z) - \lambda w_2(z),$$

где $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — линейно-независимые решения, а λ — комплексный параметр. Покажите, что для того, чтобы решение было усеченным, необходимо и достаточно, чтобы λ было одним из асимптотических значений мероморфной функции $\lambda(z) = w_1(z)/w_2(z)$.

[*Примечание.* Число a называется асимптотическим значением целой или мероморфной функции $f(z)$, если имеется простая кривая, стремящаяся к бесконечности, вдоль которой $f(z) \to a$].

СПИСОК ЖУРНАЛОВ, УКАЗАННЫХ В ПРИМЕЧАНИЯХ

Abh. Akad. Wiss., Berlin . . . Abhandlungen der königlichen Akademie des Wissenschaften in Berlin.

Abh. Ges. Wiss., Gött. . . . . Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (continuation of Comm. Gott.).

Acta Erud. . . . . Acta Eruditorum publicata Lipsiae.

Acta Erud. Suppl. . . . . . . Acta Eruditorum quae Lipsiae publicantur Supplementa.

Acta Math. . . . . Acta Mathematica, Stockholm.

Acta Soc. Sc. Fenn. . . . . . Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Helsingfors.

Am. J. Math. . . . . The American Journal of Mathematics, Baltimore, Md.

Ann. di Mat. . . . . Annali di Matematica pura ed applicata, Rome and Milan.

Ann. Éc. Norm. . . . . Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Paris.

Ann. Fac. Sc., Toulouse . . . . Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Ann. of Math. . . . . Annals of Mathematics, Princeton, N. J.

Ann. Scuola Norm., Pisa . . . Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa.

Archiv d. Math. u. Phys. . . . Archiv der Mathematik und Physik (Grunert's Archiv), Greifswald und Leipzig.

Archiv for Math. . . . . Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania (Oslo).

Arkiv för Mat. . . . . Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Stockholm.

Bibl. Math. . . . . Bibliotheca Mathematica, Stockholm und Leipzig.

Bull. Am. Math. Soc. . . . . . Bulletin of the American Mathematical Society, Lancaster, Pa. and New York.

Bull. Acad. Sc. Belg. . . . . . Bulletins de l'Académie royale des Sciences de Belgique, Brussels.

Bull. Sc. Math. . . . . Bulletin des Sciences mathématiques, Paris.

Bull. Soc. Math. France . . . . Bulletin de la Société mathématique de France, Paris.

Bull. Soc. Philomath., Paris . . Bulletin de la Société philomathique de Paris.

Camb. Math. J. . . . . The Cambridge Mathematical Journal.

Comm. Acad. Petrop. . . . . . Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (Continued as Novi Comm.).

Comm. Gott. . . . . Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis (Continued successively as Novi Commentarii, Commentationes and Commentationes recentiores.)

Comm. Math. Soc., Kharkov . . Communications and Proceedings of the Mathematical Society of the Imperial University of Kharkov.

C. R. Acad. Sc., Paris . . . . Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris.

Forhand. Vid.-Selsk., Christiania . . . . Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania (Oslo).

Gött. Nach. . . . . Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Hist. Acad., Berlin	Histoire de l'Académie royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin.
Hist. Acad., Paris	Histoire de l'Académie royale des Sciences, Paris.
J. de Math.	Journal de Mathématiques pures et appliquée (Liouville), Paris.
J. Éc. Polyt.	Journal de l'École Polytechnique, Paris. (Reference is made to the Cahier, each of which is separately paged. The number of Cahiers to the volume is irregular.)
J. für Math.	Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), Berlin.
Math. Ann.	Mathematische Annalen, Leipzig.
Mathésis	Mathésis, Recueil Mathématique, Gand and Paris.
Mém. Acad. Sc., Paris	Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France: since 1805, Memoires présentés par divers savants...
Mess. Math.	The Messenger of Mathematics, London and Cambridge.
Misc. Berol.	Miscellanea Berolinensia, Berlin.
Misc. Taur.	Miscellanea Taurinensia, Turin.
Monatsh. Math. Phys.	Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien.
Nouv. Mém. Acad., Berlin	Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, Berlin. (Continuation of Hist. Acad., Berlin).
Öfv. Vet., Akad. Stockholm	Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm.
Phil. Trans. R. S.	Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
Proc. Am. Acad	Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston, Mass.
Proc. Camb. Phil. Soc.	Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
Proc. Edin. Math. Soc.	Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.
Proc. London Math. Soc.	Proceedings of the London Mathematical Society.
Proc. Roy. Soc. Edin.	Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.
Quart. J. Math.	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, London.
Rend. Accad. Lincei	Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti, Rome.
Rend. Circ. Mat., Palermo	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
Rend. Ist. Lombard	Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti, Milan.
Sitz. Akad. Wiss. Berlin	Sitzungsberichte der königlichen preussischen Academie der Wissenschaften. Berlin.
Trans. Am. Math. Soc.	Transactions of the American Mathematical Society, Lancaster, Pa. and New York.
Trans. Camb. Phil. Soc.	Transactions of the Cambridge Philosophical Society.
Trans. Roy. Soc. Edin.	Transactions of the Royal Society of Edinburgh.
Z. Math. Phys.	Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Учебные пособия

(1) *Forsyth, A. R.,* Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, six volumes, of which the first four deal with ordinary differential equations, namely:

Vol. I. Exact Equations and Pfaff's Problem.

Vosl. II, Pl. Ordinary Equations, not Linear.

Vol. IV. Ordinary Linear Equations.

(2) *Craig, T.,* Treatise on Linear Differential Equations, New York, 1889.

(3) *Page, J. M.,* Ordinary Differential Equations, with an Introduction to Lie's Theory of Groups of One Parameter, London, 1897.

(4) *Bateman, H.,* Differential Equations, London, 1918.

(5) *Goursat, E.,* Cours d'Analyse mathématique, Paris, Tome II (4th ed. 1924) and Tome III. (3rd ed. 1922).

(5a) A Course in Mathematical Analysis, translated by E. R. Hendrick and O. Dunkel, Vol. II., part 2, Boston, 1917.

(6) *Jordan, C.,* Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Paris, Tome III. (3rd ed. 1915).

(7) *Picard, E.,* Traité d'Analyse, Paris, Tome II (3rd ed. 1926), Tome III. (2nd. ed. 1908).

(8) *Schlesinger, L.,* Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen auf funktiontheoretischer Grundlage, Berlin und Leipzig (3rd ed. 1922; a revised version of Sammlung Schubert XIII).

(9) *Schlesinger, L.,* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig, Band I, 1895, Band II_1, 1897, Band II_2, 1898.

(10) *Schlesinger, L.,* Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin, 1908.

(11) *Königsberger, L.,* Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig, 1889.

(12) *Heffter, L.,* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln, Leipzig, 1894.

(13) Horn J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1905 (Sammlung Schubert L).

(14) *Bieberbach, L.,* Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, 1923.

(15) *Смирнов, В. И.,* Курс высшей математики, том II и III.

(16) *Стеклов, А.* Курс диференциальных уравнений.

(17) *Степанов, В.* Курс диференциальных уравнений.

II. Монографии

(1) Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig:

II. A 4a. *Painlevé, P.,* Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen, 1900.

II A 4b. *Vessiot, E.,* Gewöhnliche Differentialgleichungen; Elementare Integrationsmethoden, 1900.

(These are reproduced, in an improved form, in the Encyclopédie des Sciences mathématiques, Paris and Leipzig, Tome II, vol. 3, fasc. I, 1910).

II. A 7a. *Bôcher, M.,* Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, 1900.

II. B 5. *Hilb, E.,* Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, 1915.

II. B 6. *Hilb, E.*, Nichtlineare Differentialgleichungen, 1921.
III. B 8. *Liebmann, H.*, Geometrische Theorie der Differentialgleichungen, 1916.

(2) *Klein, F.*, Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Göttingen, 1914 (autographed; a printed edition is said to be in preparation).

(3) *Bôcher, M.*, Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig, 1894.

(4) *Painlevé, P.*, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, Paris, 1897 (lithographed).

(5) *Boutroux, P.*, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, Paris, 1908.

(6) *Bôcher, M.*, Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, Paris, 1917.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть I

Диференциальные уравнения в вещественной области

стр.

Часть II

Диференциальные уравнения в комплексной области