Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

В.В.Гіржон

МЕХАНІКА

навчальний посібник для студентів фізичних факультетів університетів

Запоріжжя
Запорізький національний університет
2008

УДК: 531(075.8)
ББК: В2я73
Г 51

Рецензенти:
Доктор технічних наук, професор кафедри фізичного матеріалознавства
Запорізького національного технічного університету
Ольшанецький В.Ю.

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики
Дніпропетровського національного університету
залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна
Заблудовський В.О.

Гіржон В.В.

Г51 Механіка.. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2008. – 187 с.

ISBN 966-599-177-9

Навчальний посібник призначено для студентів першого курсу фізичних факультетів класичних університетів.

Послідовність подання матеріалу, рівень складності викладання дають можливість досить просто адаптувати окремі теми для використання їх при вивченні загального курсу фізики студентами технічних університетів або непрофільних факультетів класичних університетів.

Наведений на початку посібника мінімальний обсяг математичних понять та детальне описання отримання основних законів та закономірностей, що вивчаються в класичній механіці, забезпечують використання студентами курсу лекцій при самостійній роботі над окремими розділами.

УДК: 531(075.8)
ББК: В2я73

ISBN 966-599-177-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Курс загальної фізики “Механіка” читається автором протягом багатьох років на фізичному факультеті Запорізького національного університету.

Посібник побудовано у вигляді стислого викладення матеріалу у тому вигляді, в якому студенти, як правило, занотовують лекційний курс. Необхідність саме такого типу викладення матеріалу обумовлена двома причинами: по-перше, досить значними труднощами, які виникають у студентів-першокурсників при конспектуванні лекцій; по-друге, збереженням викладачем часу, який він витрачає на диктування обов’язкових означень, законів, теорем тощо. Це дає змогу студентам більш уважно сприймати лекцію, а викладачеві – навести додаткові приклади, провести демонстрації, показати навчальні кінофільми тощо.

Посібник розраховано на “середнього” студента. Тому математичні тлумачення деяких фізичних закономірностей та виведення формул є досить детальними.

Оскільки даний курс читається на першому курсі, то, як показує досвід, шкільних знань з математики (особливо якщо студент навчався не в профільному фізико-математичному середньому навчальному закладі) для повного розуміння і засвоєння матеріалу недостатньо. У зв’язку з цим на початку посібника наведено деякий фактичний матеріал з певних розділів математичного аналізу та векторної алгебри, який студенти опрацьовують самостійно. Незрозумілі питання (у випадку їх виникнення) розглядаються на консультаціях з викладачем .

Кожна тема є досить автономною, що дає змогу просто адаптувати курс лекцій до навчальної програми як класичного (чи педагогічного), так і технічного університету.

При викладенні курсу автор користувався найбільш вдалими з його точки зору методами, зазначеними в підручниках Д.В.Сивухіна, О.М.Матвеєва, С.П.Стрєлкова, С.Е.Хайкіна, І.В.Савельєва, В.І.Пономаренка та Ю.М.Ільїна.

ОСНОВНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ МЕХАНІКИ

1. *Похідна*

Нехай функція *y* = *f(x)* визначена у деякому інтервалі $a \le x \le b$ (або $x \in [a,b]$). Це означає, що кожному значенню величини *x* з цього інтервалу відповідає певне значення величини *y*. Величина *x* називається аргументом, а величина *y* – функцією. Зв'язок між цими величинами зручно показувати графічно (рис. 1).

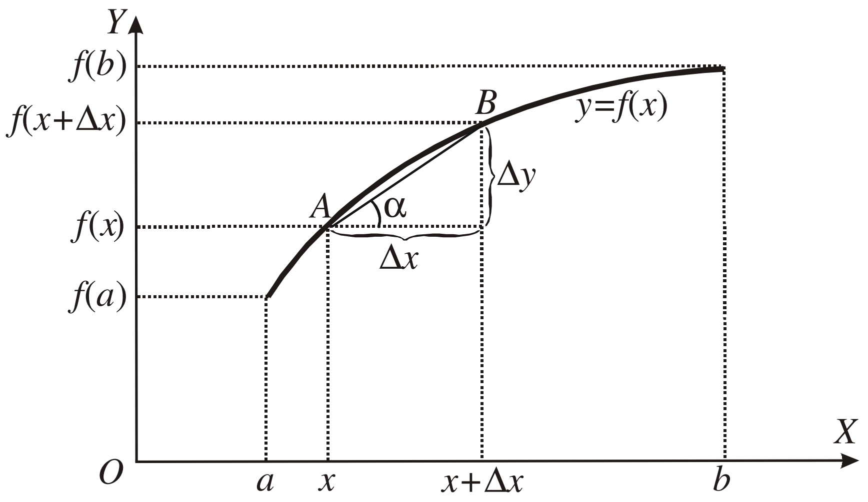


Рис. 1.

Якщо зафіксуємо деяке значення аргумента *x*, то йому буде відповідати певне значення функції *y* = *f(x)*. Надамо аргументу приросту Δx. Тоді він зміниться і стане рівним $x + \Delta x$. Значення функції також зміниться і стане дорівнювати $f(x + \Delta x)$. Приріст же функції буде дорівнювати $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Складемо відношення приросту функції до приросту аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$. Ця границя називається похідною функції $y(x)$ за аргументом *x* і позначається $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Разом з позначенням $f'(x)$ для похідної використовуються й інші позначення: $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$. Останнє позначення похідної належить Лейбніцу.

У механіці похідні за часом від різних функцій прийнято позначати знаком точки над функцією, або за Лейбніцем. Наприклад, якщо координата x матеріальної точки залежить від часу t, то похідна функції $x(t)$ позначається $\dot{x}$, або $\dot{x}(t)$, або $\frac{dx}{dt}$. Друга похідна позначається $\ddot{x}$, або $\ddot{x}(t)$, або $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням.

Як видно з рис. 1, при $\Delta x \to 0$ перетинаюча АВ перетворюється в дотичну до графіка функції $y(x)$ у точці x. Кут α при цьому стає кутом нахилу дотичної, причому

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x.$$

Таким чином, **тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції *y*(*x*) у деякій точці *x* дорівнює похідній функції для цієї точки**.

2. ***Первісна та невизначений інтеграл***

Нехай функція $f(x)$ є похідною функції $F(x)$, тобто $f(x) = F'(x)$. Функція $F(x)$ називається **первісною** функції $f(x)$.

Якщо деяка величина C є сталою, то можна записати

$$(f(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Таким чином, функція $F(x) + C$ також є первісною функції $f(x)$. Тому кажуть, що **первісна визначена з точністю до довільної адитивної (такої, яку можна додати) сталої**. Тобто, будь-яка функція $f(x)$ має не одну первісну, а нескінченну їх кількість, оскільки константа C може приймати будь-яке значення.

Має місце теорема: **якщо *F*(*x*) – одна з первісних для функції *f*(*x*), то будь-яка інша первісна $\tilde{F}(x)$ має вигляд $\tilde{F}(x) = F(x) + C$, тобто відрізняється від *F*(*x*) на сталу величину *C*.**

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$. Знак $\int$ називається знаком інтегралу, вираз $f(x)dx$ називається підінтегральним виразом, а функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією.

Таким чином, невизначений інтеграл є ніщо інше, як сімейство функцій виду $\int f(x)dx = F(x) + C$, де C – довільна стала, а $F(x)$ – яка-небудь первісна функції $f(x)$.

Властивості невизначеного інтегралу:

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

тобто узяті разом знак диференціалу "*d*" і знак невизначеного інтегралу " $\int$ ", так би мовити, "компенсують" один одного.

3. ***Визначений інтеграл***

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано функцію $f(x) \ge 0$. Зобразимо цю функцію графічно (рис. 2). Фігура, обмежена знизу віссю *OX*, зверху – кривою $y = f(x)$, а з боків - прямими $x = a$ та $x = b$, називається криволінійною трапецією.

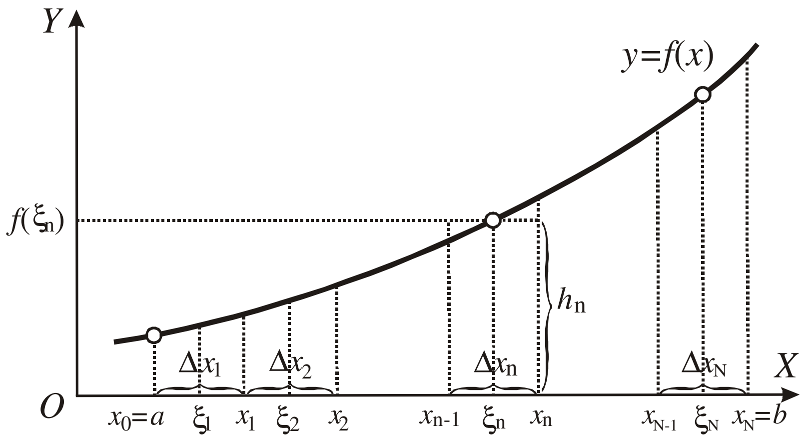


Рис. 2

Обчислимо площу цієї трапеції *S*. Для цього розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на *N* частин точками поділу

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ ...,x_{N-1},\ x_N = b,$$

і позначимо через Δx_n довжину відрізка, що лежить між точками x_{n-1} та x_n, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 1, 2,..., N$. Розіб'ємо площу *S* на окремі смуги, як показано на рис. 2. Позначимо через ΔS_n площу смуги, яка спирається на відрізок Δx_n. Тоді маємо

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_N = \sum_{n=1}^{N} \Delta S_n .$$

Виберемо навмання усередині кожного з відрізків Δx_n точку ξ_n. Розглянемо смугу за номером *n*, що спирається на відрізок Δx_n. Побудуємо прямокутник, який спирається на відрізок Δx_n як на основу і який має висоту $h_n = f(\xi_n)$, що дорівнює значенню функції $y = f(x)$ у точці ξ_n. Площа смуги ΔS_n буде приблизно дорівнювати площі цього прямокутника: $\Delta S_n \cong \Delta x_n \cdot f(\xi_n)$. Причому остання рівність буде тим точнішою, чим вужчою буде смуга, тобто чим меншою буде її ширина Δx_n.

Отже, шукана площа може бути записаною у вигляді

$$S \cong \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \Delta x_n .$$

Сума, що стоїть у правій частині називається інтегральною сумою функції $f(x)$. Позначимо її через S_N

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \Delta x_n$$

Тоді $S \cong S_N$, тобто площа криволінійної трапеції приблизно дорівнює інтегральній сумі. Ця рівність перейде у точну, якщо спрямувати до нуля ширину кожної смуги, тобто $\Delta x_n \to 0$. При цьому число *N* відрізків, на які розбито інтервал $[a,b]$ осі *OX*, буде прагнути до нескінченності.

Границя, до якої прагне інтегральна сума S_N при $N \to \infty$ і $\Delta x_n \to 0$ (*n* = 1, 2, …, *N*), називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ в границях від *a* до *b*. Число *a* називається нижньою границею, а число *b* – верхньою границею. Визначений інтеграл позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx .$$

Таким чином маємо

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta x_n \to 0}} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \Delta x_n .$$

Оскільки $S_N \to S$ при $N \to \infty$ і $\Delta x_n \to 0$, то площа криволінійної трапеції якраз і буде чисельно дорівнювати визначеному інтегралу:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,, \quad f(x) \geq 0 \text{ при } x \in [a,b]\,.$$

Ньютоном і Лейбніцем було доведено наступну теорему: **визначений інтеграл від деякої функції дорівнює різниці значень первісної цієї функції у верхній та нижній границях**, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

4. Скалярні та векторні величини. Скалярний і векторний добутки векторів

Скалярною називають таку величину, яка характеризується одним лише числом. Наприклад, маса тіла, час, об’єм тощо.

Векторною називають величину, яка окрім числового значення характеризується ще й напрямком. Такі величини звичайно зображуються у вигляді направлених відрізків різної довжини і позначаються стрілкою над ними. Будь-який вектор характеризується *початком*, *довжиною* (*модулем*) та *напрямком*. Два вектори будуть однаковими, якщо вони зображуються рівними паралельними відрізками і направлені в один бік. Довжина вектора $\vec{a}$ записується $|\vec{a}|$.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який знаходиться або за правилом трикутника (рис. 3),

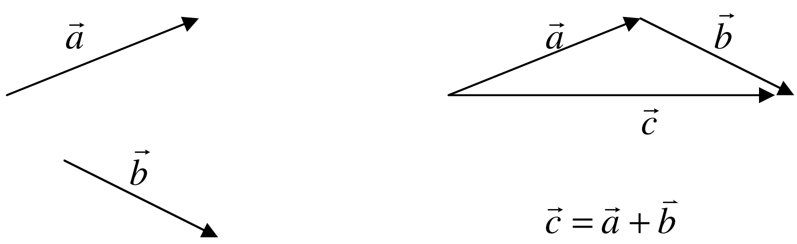


Рис. 3

або за правилом паралелограма (рис. 4)

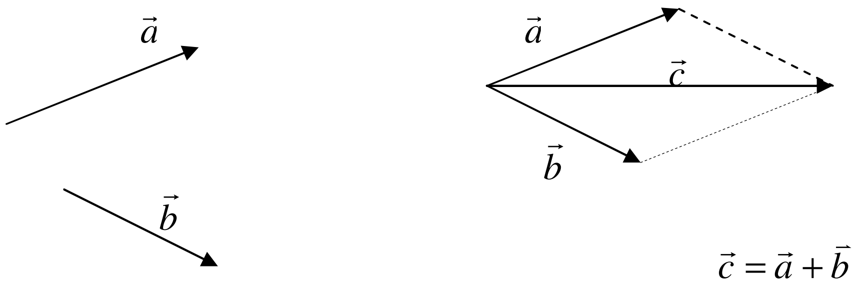


Рис. 4

Віднімання проводять аналогічно, тобто: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Якщо векторів багато, то їх суму можна одержати шляхом побудови ланцюжка: до кінця першого вектора приєднується початок другого, до кінця другого – початок третього і т.д. Потім з'єднують початок першого і кінець останнього.

При обчисленнях з векторними величинами вектори зручно подавати через їх складові за деякими заданими напрямками. Виберемо, наприклад, на площині прямокутну декартову систему координат. Тоді будь-який вектор $\vec{a}$ можна записати як суму:

$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y,$$

де $\vec{a}_x$ - складова вектора $\vec{a}$ вздовж осі абсцис;

$\vec{a}_y$ - складова вектора $\vec{a}$ вздовж осі ординат.

Позначимо через $\vec{i}$ та $\vec{j}$ одиничні вектори вздовж осей абсцис і ординат, відповідно (рис. 5).

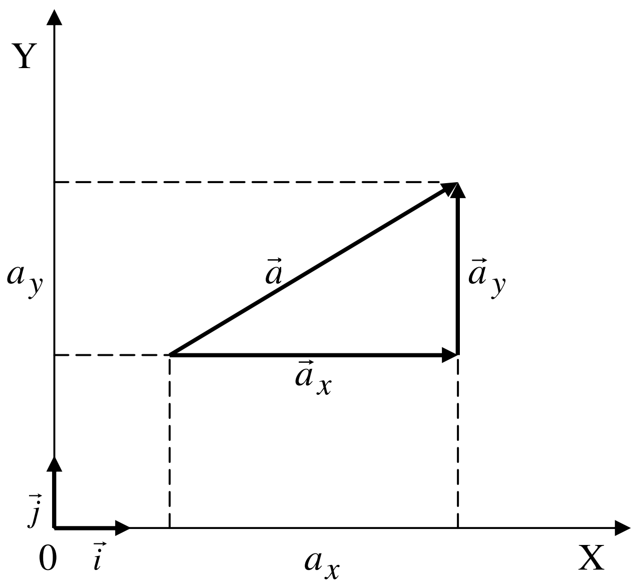


Рис. 5

Одиничним називають такий вектор, модуль якого дорівнює одиниці. Він показує тільки деякий напрямок у просторі. Тоді можна записати

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j},$$

де a_x і a_y - є вже не векторними величинами, а скалярними.

Числа a_x і a_y називають проекціями вектора $\vec{a}$ на деякі напрямки, що вказуються векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$, або просто проекціями вектора $\vec{a}$ на задані координатні осі X і Y.

Модуль вектора $\vec{a}$ (згідно з теоремою Піфагора) визначається співвідношенням

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} .$$

Правила множення векторів

Добутком вектора $\vec{a}$ на число c називають такий вектор $\vec{b}$, який є колінеарним вектору $\vec{a}$, але його модуль є в c разів більшим за модуль вектора $\vec{a}$ (рис. 6).

Рис. 6

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається ***скалярна величина***, яка дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Cos(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Cos\alpha,$$

де α - кут між векторами.

Як наслідки, з цієї формули випливають висновки:

- Скалярний добуток двох перпендикулярних векторів дорівнює нулю.
- Скалярний добуток двох паралельних векторів дорівнює добутку їх модулів.
- Скалярний добуток двох антипаралельних векторів дорівнює від'ємному значенню добутку їх модулів.

Властивості скалярного добутку:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативність);

б) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (розподільна властивість).

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається такий ***вектор*** $\vec{c}$, який є ***нормальним (перпендикулярним) до площини***, у якій знаходяться вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Напрямок вектора $\vec{c}$ знаходиться за правилом правого гвинта (рис. 7): якщо закріпити гайку в площині векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і обертати гвинт у напрямку від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ найкоротшим шляхом, то він буде рухатись у напрямку вектора $\vec{c}$.

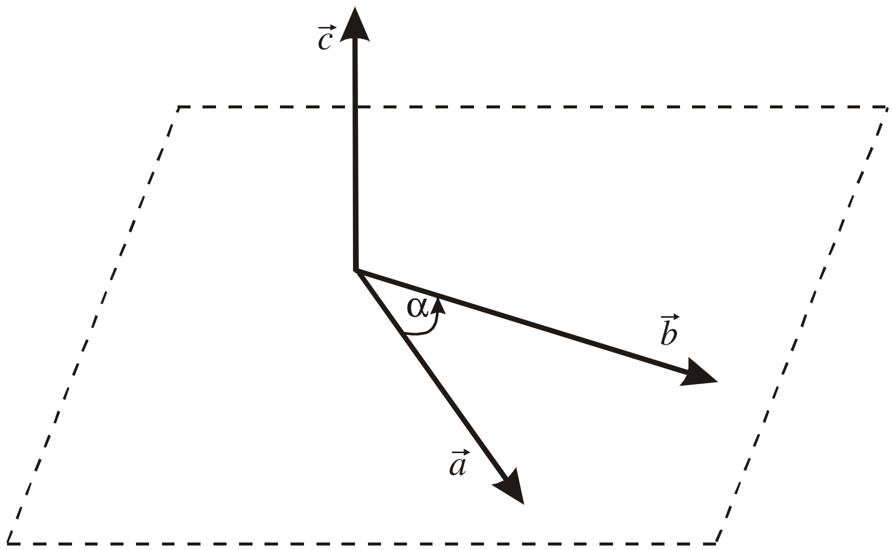


Рис. 7.

Позначається векторний добуток так:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{або} \quad \vec{c} = [\vec{a}\vec{b}].$$

Можна показати, що модуль вектора $\vec{c}$ відповідає виразу

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Sin\alpha,$$

де α - кут між векторами. Тобто він чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

З означення векторного добутку випливає, що векторний добуток не підлягає властивості комутативності, тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}, \text{ оскільки } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Проте векторний добуток характеризується розподільною властивістю

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Але в цій формулі потрібно строго дотримуватися порядку співмножників.

5. Застосування операцій математичного аналізу до векторних функцій

Нехай вектор $\vec{a}$ є функцією від аргументу t

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}.$$

Надамо аргументу t приросту Δt. При цьому вектор $\vec{a}$ отримає приріст $\Delta\vec{a}$**,** який можна записати

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t) = [a_x(t+\Delta t) - a_x(t)]\vec{i} +$$
$$+[a_y(t+\Delta t) - a_y(t)]\vec{j} + [a_z(t+\Delta t) - a_z(t)]\vec{k}$$

Похідна від векторної функції дорівнює границі

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}.$$

Або, використовуючи попереднє рівняння

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}.$$

Отже, щоб знайти похідну від векторної функції треба продиференціювати її проекції.

Проінтегруємо ліву і праву частини векторної функції $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$

$$\int \vec{a}(t)dt = \int (a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k})dt$$

або

$$\int \vec{a}(t)dt = \vec{i}\int a_x(t)dt + \vec{j}\int a_y(t)dt + \vec{k}\int a_z(t)dt.$$

Тобто інтегрування векторної функції зводиться до інтегрування її проекцій.

Скалярний і векторний добутки векторів диференцюються за тими ж правилами, що й звичайний добуток функцій:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}\right),$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}\right).$$

Отримані формули легко перевірити, використовуючи означення скалярного та векторного добутків.

6. Частинні похідні та диференціал функції кількох змінних

Нехай функція $f(x, y, z,...)$ залежить від декількох змінних $x, y, z,...$. Для таких функцій існує поняття ***частинної похідної*** за однією із змінних. Така похідна, наприклад за змінною *x*, позначається $\frac{\partial f}{\partial x}$ і обчислюється за загальноприйнятими правилами. При цьому всі інші змінні вважаються фіксованими і розглядаються як сталі.

Наприклад, знайти частинні похідні за всіма змінними від функції $f(x, y, z) = x^3 + xy^4\sqrt{z} + \sqrt[3]{x^2 y}$.

Спочатку обчислимо похідну за змінною *x*, вважаючи змінні *y* та *z* сталими

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^4\sqrt{z} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2xy}{\sqrt[3]{(x^2 y)^2}};$$

Абсолютно аналогічно:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 x\sqrt{z} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2 y)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{dz} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{xy^4}{\sqrt{z}}.$$

1 Фізичні величини та їх вимірювання

Механічним рухом тіла називають зміну його положення з часом відносно інших тіл.

Механіка - частина фізики, яка вивчає рух тіл.

Сукупність закономірних змін, які відбуваються з певними тілами з часом називається ***фізичним процесом***.

Зміни, які відбуваються при фізичних процесах, визначаються кількісно шляхом вимірювань різних фізичних величин, таких, наприклад, як довжина, час, швидкість, напруга, маса, тощо. Фізичні величини визначають основні властивості тіл або характеристики процесів, що розглядаються. Зміни фізичних величин завжди потрібно визначати кількісно, шляхом вимірювань, тобто шляхом порівняння даної величини з якоюсь наперед вибраною однорідною величиною, прийнятою за одиницю вимірювань.

Отже, для вимірювання будь-якої фізичної властивості необхідно вибрати одиницю вимірювань даної властивості, тобто таку фізичну властивість, якій можна приписати число 1. Тоді вимірювання зводиться до порівняння властивостей, що вимірюються, з властивістю, яка прийнята за одиничну.

Наприклад, вимірювання довжини зводиться до порівняння довжини предмета, що вимірюється, з еталоном (або одиницею) довжини, яку нанесено, наприклад, на лінійку.

У фізиці існує багато різних фізичних величин, які виражаються тільки у власних одиницях вимірювань. Проте працювати з таким значним числом різноманітних одиниць незручно. А оскільки різні фізичні величини не є незалежними і між ними існують різноманітні зв'язки, то число одиниць можна значно зменшити. Використовуючи різні зв'язки, одні фізичні величини можна виразити через інші. В результаті залишиться незначна кількість фізичних величин, через одиниці яких можуть бути виражені інші величини. Всі ці величини називають ***основними***, а всю сукупність одиниць фізичних величин називають ***системою одиниць***.

Кожна фізична величина визначається на основі закономірностей, одержаних дослідним шляхом. Як уже зазначалося, числове значення фізичної величини отримують в результаті порівняння її з деяким еталонним значенням, прийнятим за одиницю вимірювання. Для кожної фізичної величини може бути обрана своя одиниця, незалежно від інших величин. Але в фізиці довільно встановлюють одиниці вимірювань лише для деяких величин (основних). Тоді одиниці всіх інших величин можуть бути виражені через основні. В цьому випадку основні одиниці будуть простими, а всі інші – складними.

Взагалі немає якогось критерію для вибору основних одиниць та їх кількості. Але в результаті практичного застосування найбільш сприйнятливою виявилась міжнародна система одиниць (система СІ).

Основними одиницями в цій системі є: ***довжина*** (1метр), ***час*** (1 секунда), ***маса*** (1 кілограм), ***сила струму*** (1 Ампер), ***температура*** (1 Кельвін), ***сила світла*** (1 Кандела).

В механіці за основні одиниці приймають три перших.

1967 р. ***Одиниця часу 1 с*** – це проміжок часу, під час якого відбувається 9192631770 коливань електромагнітного випромінювання, що відповідає переходу між двома визначеними зверхтонкими рівнями основного стану атома цезію-133 при відсутності зовнішніх полів.

1975 р. ***Одиниця довжини 1 м*** – це довжина 1650763,73 світлових хвиль у вакуумі оранжевої лінії атома криптону-86, або, точніше, лінії, що відповідає переходові між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ цього атома.

1889 р. Прототипом ***1 кг маси*** є циліндр з платини (90 %) та іридію (10 %) діаметром 39 мм і такої ж висоти. До сторіччя французької буржуазної революції було виготовлено 34 копії метра і 43 копії кілограма для держав Метричної конвенції (1875, Париж, 36 держав). Росії дістались еталони метра № 28 і № 11, та еталон кілограма № 12, які зберігаються в НДІ метрології ім. Д.І.Менделєєва (м. Москва).

1.1 Метод розмірностей

Будь-яка фізична величина може бути заданою у вигляді формули

$$a = ke_a\,, \tag{1.1}$$

де e_a – одиниця величини a, тобто така ж фізична величина, що й a, але її числове значення дорівнює одиниці. Отже e_a визначає природу величини, що вимірюється, та прийнятий масштаб вимірювання;

k – безрозмірний множник, який показує із скількох одиниць e_a складається величина a, що вимірюється.

Яким же чином e_a визначає природу величини a? Це відбувається за допомогою ***розмірності***. Як правило, фізична величина позначається якоюсь певною літерою; розмірність цієї величини також позначається тією ж літерою, але в прямих дужках.

Наприклад, якщо фізична величина a є масою, то її розмірністю також є масою, яка позначається літерою m, що можна записати в вигляді рівності: $[a] = m$. Одиниця вимірювання має ту саму розмірність $[e_a] = m$.

Розглянемо фізичні величини, які задаються за допомогою формул:

$$\begin{cases} a = k_1 e_a \\ b = k_2 e_b \\ c = k_3 e_c \end{cases}. \tag{1.2}$$

Припустимо, що існує деякий фізичний закон, який пов'язує між собою ці величини. Причому, закон встановлюється між числами k_1, k_2 та k_3, які вимірюють ці фізичні величини . Нехай закон має вигляд

$$k_1 = A k_2^m k_3^n, \tag{1.3}$$

де A, k_1, k_2, k_3 – безрозмірні числа; m, n – показники степеня.

З формул (1.2) визначимо k_1, k_2, k_3 і підставимо в (1.3):

$$\frac{a}{e_a} = A \cdot \frac{b^m}{e_b^m} \cdot \frac{c^n}{e_c^n}, \quad \Rightarrow \quad a = \left(A \cdot \frac{e_a}{e_b^m \cdot e_c^n} \right) \cdot b^m \cdot c^n. \tag{1.4}$$

Оскільки числове значення величин e_a, e_b, e_c дорівнює одиниці, але вони є величинами розмірними, то формулу (1.4) можна записати

$$a = A' b^m c^n, \tag{1.5}$$

де $A' = A \cdot \dfrac{e_a}{e_b^m \cdot e_c^n}$.

У такій формі звичайно і записуються фізичні закони.

Існує два правила знаходження розмірностей складних виразів, згідно з якими

$$\left[\frac{1}{a} \right] = \frac{1}{[a]} \quad \text{та} \quad [ab] = [a] \cdot [b]. \tag{1.6}$$

Враховуючи ці правила, та співвідношення (1.4) і (1.5), розмірність величини A' можна записати у вигляді

$$[A'] = [A] \cdot \left[\frac{e_a}{e_b^m \cdot e_c^n} \right] = [A] \cdot \frac{[e_a]}{[e_b]^m \cdot [e_c]^n},$$

Але, з іншого боку, $[A'] = \dfrac{[a]}{[b]^m \cdot [c]^n}$. Отже, справедливою буде рівність

$$[A] \cdot \frac{[e_a]}{[e_b]^m \cdot [e_c]^n} = \frac{[a]}{[b]^m \cdot [c]^n}. \tag{1.7}$$

Розмірності лівої і правої частин рівняння (1.7) співпадають, оскільки A – безрозмірний множник.

Розглянутий метод розмірностей є ефективним способом швидкого контролю правильності виведення формул при порівнянні розмірностей лівої і правої частини.

<u>Приклад</u>. Використовуючи метод розмірностей, вивести формулу кінетичної енергії матеріальної точки.

Відомо, що кінетична енергія матеріальної точки E_k залежить від маси точки m та від модуля її швидкості v. Припустимо, що ця залежність нам невідома. Тоді залежність $E_k = f(m, v)$ (див. формулу (1.5)) можна записати у вигляді

$$E_k = Am^x v^y. \tag{1.8}$$

Виразимо фізичні величини, що входять до цієї формули, через основні одиниці

$$\left.\begin{array}{ll} [E_k] = 1\ Н \cdot м = 1\ \dfrac{кг \cdot м^2}{с^2} & \to ML^2T^{-2} \\ [m] = 1\ кг & \to M \\ [v] = 1\ \dfrac{м}{с} & \to LT^{-1} \end{array}\right\}$$

і підставимо у формулу (1.8)

$$ML^2T^{-2} = AM^x\left(LT^{-1}\right)^y. \tag{1.9}$$

Порівнявши показники степеня при M, L, T у лівій та правій частинах рівняння, маємо: $x = 1$, $y = 2$.

Тоді можна записати

$$E_k = Amv^2.$$

Безрозмірний множник A за допомогою методу розмірностей знайти неможливо. Тому треба вважати, що метод розмірностей дає змогу знайти залежність між фізичними величинами з точністю до постійного множника.

1.2 Системи координат

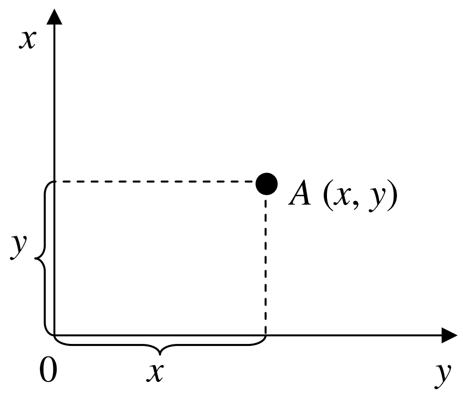
В механіці рухом називають зміну положення матеріальної точки (або тіла) у просторі з часом відносно інших тіл. Множину тіл, або систему тіл, відносно яких визначається положення рухомого тіла, називають ***просторовою системою відліку***. Висловлювання про те, що дві неодночасні події відбулися в якомусь одному й тому ж певному місці простору позбавлене змісту до тих пір, доки не вказано просторову систему відліку, в якій ці події розглядаються.

Просторову систему відліку можна зв'язати з будь-яким твердим тілом, наприклад, обравши в ньому координатні осі. На практиці частіше за все обирають прямокутну декартову систему координат. Тоді положення кожної точки простору в такій системі можна задавати її ***координатами*** x, y, z, тобто числами, що визначають положення цієї точки у даній системі координат.

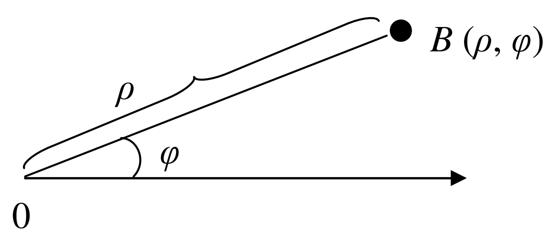
Розглянемо найбільш поширені системи координат.

На площині

1) ***Прямокутна декартова система координат***. У цій системі положення точки визначається двома числами x і y. Ці числа визначають довжини відрізків на відповідних осях.



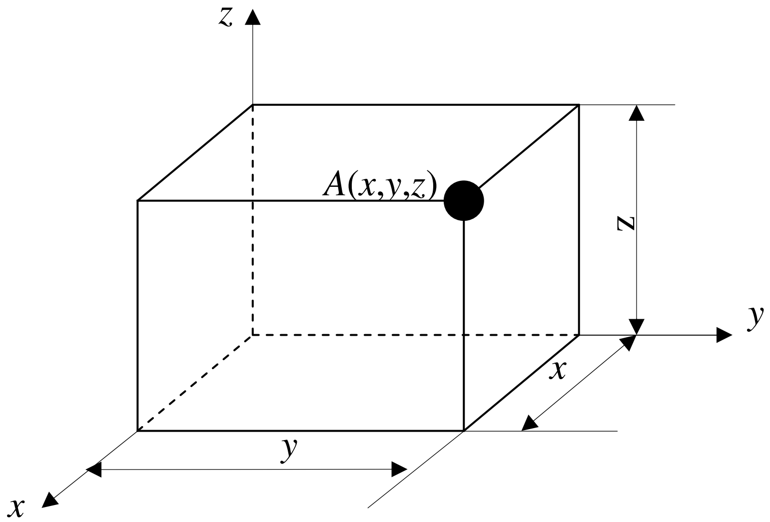
2) ***Полярна система координат***. Положення точки тут визначають двома числами ρ та φ, де ρ - це довжина відрізка, φ - кут.



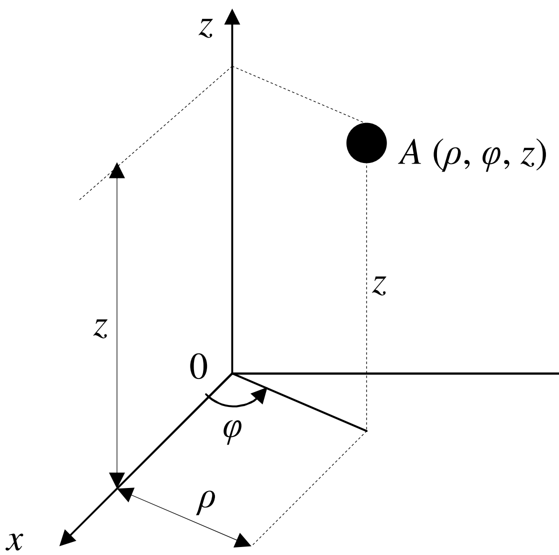
У просторі

1) ***Прямокутна декартова система координат.*** Положення точки в такій системі визначають числами (x, y, z), які є довжинами відрізків на відповідних осях.

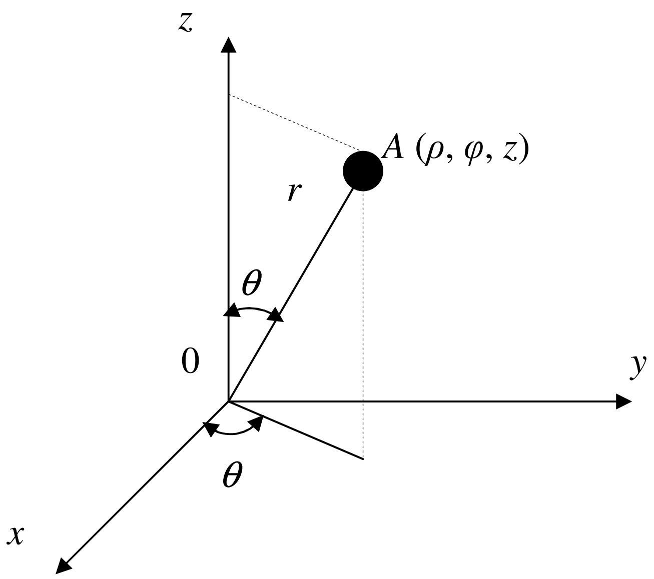
Існують права і ліва прямокутні декартові системи координат. ***Права -*** це така система, коли при погляді на площину *XOY* у додатному напрямку осі *Z* вісь *X* для суміщення з віссю *Y* по найкоротшому шляху треба повертати за годинниковою стрілкою. На рисунку зображено праву систему координат.



Циліндрична система координат. У цій системі три числа ρ, φ, z визначають положення точки, причому z – довжина відповідного відрізка на осі z, ρ – довжина відрізка, що з'єднує початок координат з проекцією точки на площину *XOY*, φ – кут між віссю x та відрізком ρ.



2) ***Сферична система координат***. Тут положення точки визначається трьома числами r, φ і θ, де r – відстань від точки до початку координат, φ – кут між віссю x та проекцією відрізка r на площину *XOY*, θ – кут між віссю z та відрізком r.



Дуже часто при розв'язуванні певних задач виникає необхідність у використанні різних координат. Як легко бачити з рисунків, очевидними є такі формули перетворення координат:

1) Перехід від циліндричних до декартових прямокутних координат:

$$\begin{cases} x = \rho Cos\varphi; \\ y = \rho Sin\varphi; \\ z = z \end{cases}$$

2) Перехід від сферичних до декартових прямокутних координат:

$$\begin{cases} x = rSin\theta\, Cos\varphi; \\ y = rSin\theta\, Sin\varphi; \\ z = rCos\theta \end{cases}$$

2 Кінематика матеріальної точки

Кінематика – це розділ механіки, у якому вивчається лише описання руху матеріальних точок, і зовсім не приймаються до уваги причини, що цей рух викликають.

Матеріальною точкою називають макроскопічне тіло, розмірами якого можна знехтувати і вважати, що вся маса тіла зосереджена в одній геометричній точці (більш точне поняття матеріальної точки буде надано далі).

Описати рух матеріальної точки – це значить знайти її положення в будь-який момент часу.

Неперервну послідовність точок, яку проходить рухома матеріальна точка, називають ***траєкторією руху***.

Домовимося положення точки у просторі характеризувати прямокутними декартовими координатами x, y, z, які є проекціями радіуса-вектора точки $\vec{r}$ на координатні осі. Тоді повне описання руху буде зводитися до знаходження трьох координат x, y, z, як функцій часу, тобто

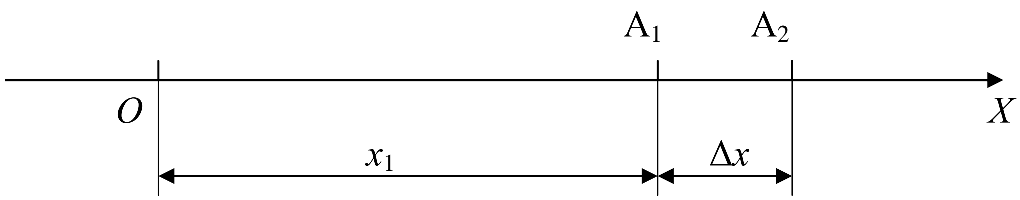
$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),$$

або, що те ж саме, - до знаходження векторної функції $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$.

2.1 Швидкість і прискорення при поступальному русі

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Оберемо цю пряму за вісь OX. Тоді положення точки буде визначатися лише однією координатою $x = x(t)$.

Нехай у деякий момент часу точка була у положенні A_1. В цей момент часу координата точки була $x_1 = x(t)$. Через деякий проміжок часу Δt точка



перемістилася в положення A_2. Тоді її координата стала $x_2 = x(t + \Delta t)$. За час Δt точка пройде шлях $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$. Цей шлях буде додатним, якщо напрямок руху співпадає з обраним напрямком осі OX. Відношення пройденого шляху Δx до проміжку часу Δt, протягом якого здійснювався рух, називають ***середньою швидкістю матеріальної точки*** за час Δt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2.1)$$

Почнемо зменшувати проміжок часу Δt, спрямовуючи його до нуля. Тоді величина пройденого шляху Δx також буде прямувати до нуля, тобто $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Відношення ж $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при цьому буде прямувати до цілком певної величини, що не залежить від Δt. Ця величина, або ця границя відношення, називається ***миттєвою швидкістю матеріальної точки в момент часу t***

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Математично вираз (2.2) являє собою похідну функції $x(t)$ за аргументом t, і позначається $\dot{x}(t)$ або $\frac{dx}{dt}$. Таким чином, $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (за означенням похідної).

Тоді можна сказати, що ***миттєва швидкість v – це похідна від координати x за часом t, або похідна від пройденого шляху (при прямолінійному русі) за часом***

$$v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.3)$$

У загальному випадку руху в просторі (тривимірна система координат) середня швидкість руху з використанням радіуса-вектора запишеться так:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

А миттєва швидкість, відповідно

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t). \quad (2.5)$$

Швидкість – це векторна величина, оскільки вона визначає не лише “бистроту” руху, але і його напрямок.

Якщо врахувати, що в декартовій системі координат

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k},$$

то можна записати

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\,. \tag{2.6}$$

Тоді проекції швидкості на координатні осі будуть визначатися із співвідношень:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}\,. \tag{2.7}$$

При змінному русі швидкість може змінюватися як за величиною, так і за напрямком. Тоді повну зміну швидкості за час Δt знаходять за допомогою векторної різниці

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}\,.$$

Для оцінки зміни швидкості за часом вводять фізичну величину, яка називається ***прискоренням***. Прискорення в певний момент часу або у даній точці траєкторії визначається границею відношення вектора зміни швидкості $\Delta\vec{v}$ до відповідного проміжку часу Δt

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,. \tag{2.8}$$

Прискорення – це вектор, який за напрямом збігається з вектором $\Delta\vec{v}$ при $\Delta t \to 0$. Тоді за означенням похідної

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)\,, \tag{2.9}$$

тобто ***прискорення є першою похідною від швидкості за часом.***

Але, оскільки $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,, \tag{2.10}$$

тобто прискорення є другою похідною від радіуса-вектора матеріальної точки за часом.

Інтегруючи вирази (2.7), (2.9), (2.10), можна знайти, наприклад, пройдений точкою шлях і швидкість.

Приклади

Для спрощення будемо розглядати одномірний рух.

1) Нехай x = const , тобто матеріальна точка є нерухомою, тоді $\Delta x = 0$, а це означає, що й $v = \dfrac{dx}{dt} = 0$.

2) Згідно з виразом (2.7): $dx = vdt$, тоді відстань $\Delta x = x_2 - x_1$, пройдену точкою за час Δt, можна записати в вигляді суми всіх dx, тобто

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_0^t vdt$$

Якщо $v = const$ (рівномірний рух), то

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \int_0^t vdt = v\int_0^t dt = vt\,.$$

Або (оскільки при прямолінійному русі $\Delta x = s$)

$$s = vt$$

3) Розглянемо випадок, коли $a = const$ ($a > 0$).
Тоді

$$s = \int_0^t vdt = \int_0^t (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}\,.$$

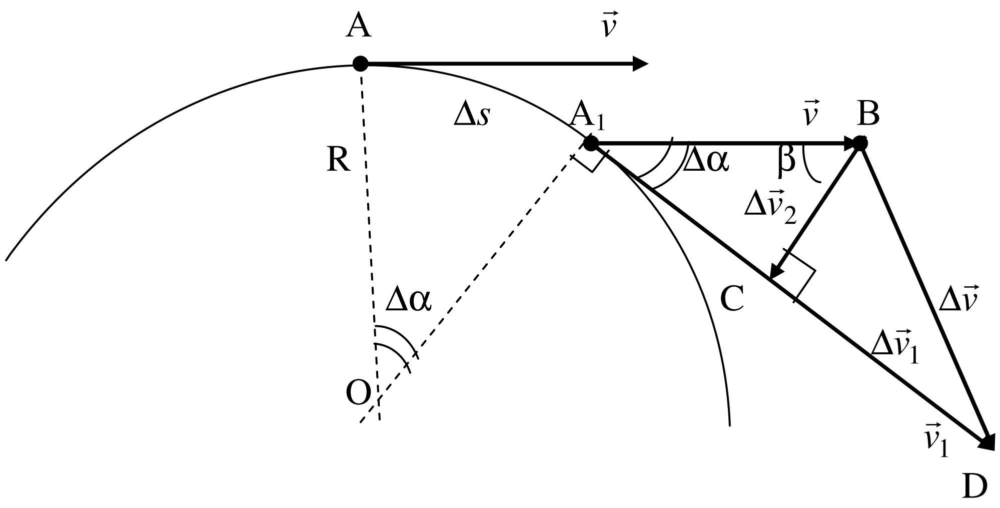
2.2 Криволінійний рух. Тангенціальне і нормальне прискорення

Розглянемо рух у загальному випадку, тобто такий рух, коли швидкість може змінюватись з часом як за величиною, так і за напрямком. Такий рух назвемо ***криволінійним***.

Припустимо, що тіло, яке рухається криволінійно, у деякій точці A має швидкість $\vec{v}$, а через певний проміжок часу Δt в точці A_1 швидкість тіла буде $\vec{v}_1$. Тоді прискорення в точці A_1 запишеться

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\,,$$

де вектор $\Delta\vec{v}$ характеризує зміну швидкості і за величиною, і за напрямком.



Розкладемо вектор $\Delta\vec{v}$ на дві складові: $\Delta\vec{v}_1$ і $\Delta\vec{v}_2$, які визначають відповідно зміну швидкості за величиною та за напрямком за час Δt .

Щоб знайти $\Delta\vec{v}_1$, треба знайти різницю довжин відрізків [A_1D] і [A_1B], тобто

$$\left|\Delta\vec{v}_1\right| = [A_1D] - [A_1B] = [A_1D] - [A_1C] = [CD] .$$

Для знаходження $\Delta\vec{v}_2$ сполучимо точки B і C та визначимо напрям цього вектора при умові, що $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2$.

Тоді повне прискорення складе

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} . \qquad (2.11)$$

Позначимо першу складову виразу (2.11) через

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} . \qquad (2.12)$$

Величину $\vec{a}_\tau$ називають ***тангенціальним прискоренням,*** яке ***виражає зміну швидкості за величиною.*** Тангенціальне прискорення завжди напрямлене по дотичній до траєкторії руху і в залежності від того, зростає модуль вектора швидкості чи зменшується, вектор $\vec{a}_\tau$, відповідно, або співпадає з напрямком вектора миттєвої швидкості, або є протилежним до нього.

Іншою складовою повного прискорення є доданок

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}, \qquad (2.13)$$

Цей вираз характеризує зміну швидкості за напрямком, а величину $\vec{a}_n$ називають ***нормальним*** або ***доцентровим прискоренням.*** Вектор цього прискорення завжди є напрямленим перпендикулярно до вектора швидкості. Дійсно, при $\Delta t \to 0$ у рівнобедреному трикутнику BA_1C кут $\Delta\alpha \to 0 \Rightarrow \beta \to \frac{\pi}{2}$, отже $\Delta\vec{v}_2 \perp \vec{v}$. Щоб обчислити $\vec{a}_n$, необхідно знайти $\Delta\vec{v}_2$. Знайдемо $|\Delta\vec{v}_2|$. Для цього скористаємося рівністю відношень відповідних сторін подібних трикутників OAA_1 і A_1BC

$$\frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\vec{v}|} = \frac{\Delta s}{R}.$$

Тоді

$$|\vec{a}_n| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}_2|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{|\vec{v}|}{R} = |\vec{v}| \cdot \frac{|\vec{v}|}{R} = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

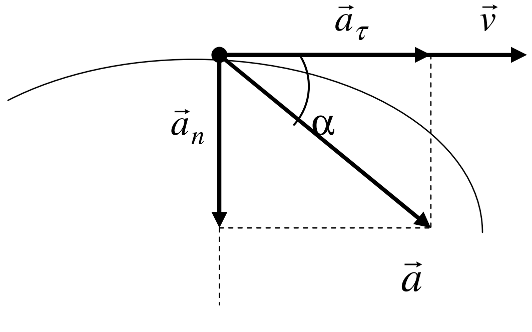
Тобто

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}. \qquad (2.14)$$

В загальному ж вигляді, якщо ввести одиничні вектори $\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{a}_\tau$ та $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{a}_n$, вектор повного прискорення $\vec{a}$ запишеться у вигляді

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}} \qquad (2.15)$$

Знаючи тангенціальне і нормальне прискорення, можна знайти модуль і напрямок вектора повного прискорення руху в даній точці траєкторії:



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

Крім того,

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$$

3 Кінематика твердого тіла

3.1 Поняття числа ступенів свободи системи матеріальних точок

Якщо розглядати прямокутну декартову систему координат, то положення матеріальної точки в просторі у цій системі задається її координатами x, y, z; в циліндричній системі – координатами r, φ і z, у сферичній – r, φ і θ. Важливим у наведеному прикладі є те, що число ***незалежних*** (!) координат, необхідних для однозначного визначення положення точки в просторі повторюється. Воно дорівнює трьом. Тоді кажуть, що така точка має ***три ступені свободи***.

Якщо розглянути коливання математичного маятника в просторі, то вони не є довільними. У даному випадку матеріальна точка може рухатися лише по поверхні сфери з центром у точці закріплення. Тоді кажуть, що на рух точки накладено зв'язки. Координати такої матеріальної точки повинні задовольняти деякому рівнянню (у наведеному прикладі – це рівняння сфери, по якій рухається точка). Тоді незалежними змінними залишаються лише дві координати, наприклад, x і y, а координату z можна виразити через x і y з рівняння $f(x, y, z) = 0$, або в явному вигляді $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, де R – радіус сфери (або довжина підвісу математичного маятника). У цьому випадку кажуть, що матеріальна точка має ***два ступені свободи***.

Якщо ж переміщення матеріальної точки відбувається лише вздовж якоїсь заданої кривої, то число незалежних координат, необхідних для визначення положення цієї точки, буде дорівнювати одиниці. А це означає, що точка має лише ***один ступінь свободи***.

У загальному випадку механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, які можуть рухатися без обмежень, для миттєвого визначення їх положення необхідно задати $3n$ координат (по три для кожної точки). Тоді система має $3n$ ступенів свободи. Але бувають випадки, коли свобода переміщення матеріальної точки в системі є обмеженою. У цьому випадку на $3n$ координат накладаються додаткові умови, які називають ***зв'язками***. Припустимо, що для однозначного визначення положення всіх точок системи потрібно знайти f координат. А останні $(3n - f)$ координат можна визначити із рівнянь зв'язку. Тоді таке ***число f незалежних координат називається числом ступенів свободи системи***.

Отже, можна вважати, що ***числом ступенів свободи деякої системи матеріальних точок є найменша кількість незалежних параметрів (координат), за допомогою яких можна однозначно визначити миттєве положення усіх точок системи.***

3.2 Число ступенів свободи твердого тіла

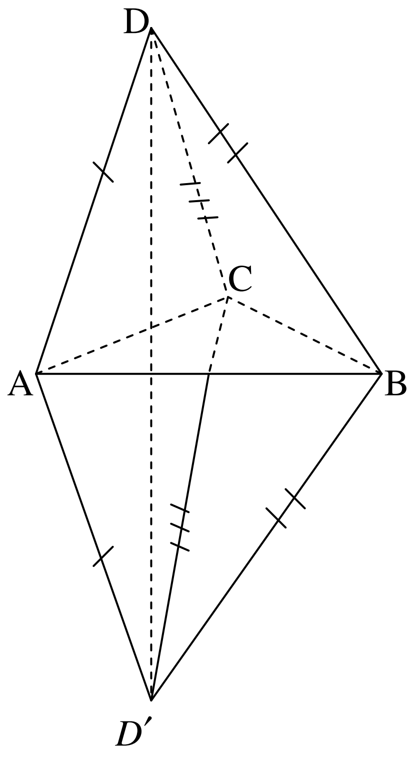
Твердим тілом називається ідеалізована система матеріальних точок, відстань між якими з часом не змінюється, хоча сама система може рухатись.

Теорема. ***Тверде тіло має шість ступенів свободи, якщо на його рух не накладені ніякі обмеження.***

Доведення

Для того, щоб однозначно визначити положення будь-якого твердого тіла у просторі досить задати положення його трьох точок, наприклад *A*, *B*, *C*, які не розташовані на одній прямій.

Оберемо довільно ще одну точку *D*. Відстані $|AD|$, $|BD|$ і $|CD|$ при будь-яких рухах тіла не будуть змінюватись (за означенням ідеально твердого тіла). Крім того, точка *D* завжди повинна знаходитись по один і той же бік від площини ΔABC і ніколи її не перетинати.



Щоб визначити положення точки *D* в просторі, побудуємо за заданими довжинами $|AC|$, $|AD|$ і $|CD|$ трикутник *ADC*. Основа цього трикутника *AC* в просторі є фіксованою. Будемо обертати ΔADC навколо сторони *AC* до тих пір, доки вершина *D* не опиниться на заданій відстані від точки *B*. Це буде можливим лише в точках *D* і *D′*. Але точка *D′* не підходить, оскільки знаходиться не з того боку площини ΔABC. Таким чином, знаючи положення трьох точок *A*, *B* і *C* за допомогою геометричної побудови можна знайти положення будь-якої іншої точки тіла. Положення точок *A*, *B*, *C* можна задати їхніми координатами x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. У прямокутній декартовій системі координат ці дев'ять координат можуть бути пов'язані між собою трьома співвідношеннями:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = |AB|^2 = const;$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = |BC|^2 = const;$$

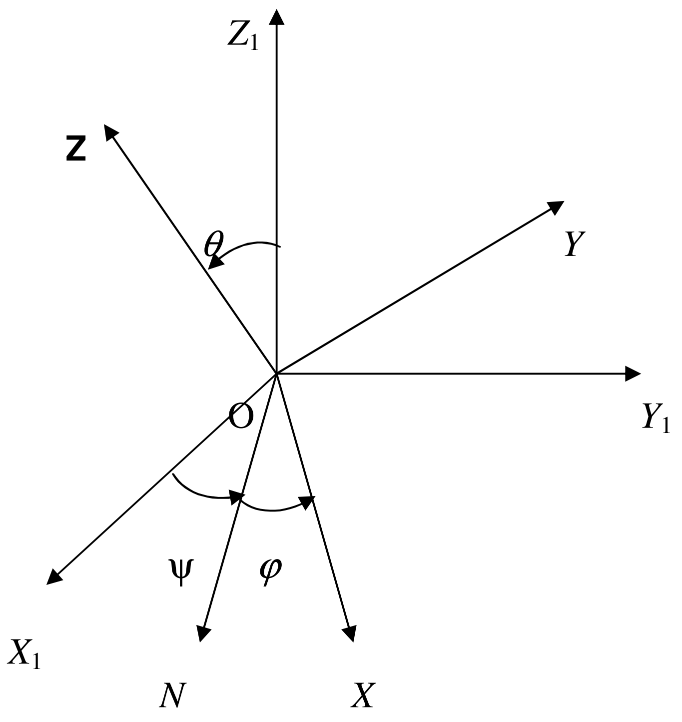
$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = |AC|^2 = const.$$

Тобто ми маємо три рівняння зв'язку. Незалежних координат залишається тільки шість, оскільки $|AB|$, $|BC|$ і $|AC|$ – не змінюються. Отже, ***тверде тіло має шість ступенів вільності***, що й треба було довести.

3.3 Розклад руху твердого тіла на складові. Кути Ейлера

Вище було зазначено, що рух твердого тіла можна описати за допомогою шести незалежних параметрів. Для описання руху будь-якої точки твердого тіла можна використати три незалежних параметри. У цьому випадку з такою точкою зручно зв'язати початок прямокутної декартової системи координат, осі якої можуть пересуватися без обертання паралельно самим собі (тобто по суті з точкою зв'язується початок рухомої системи координат). Три незалежних змінних параметри, які залишаються, будуть характеризувати положення твердого тіла відносно цих осей. Тепер, щоб повністю описати положення твердого тіла, треба розглянути його обертання відносно початку обраної системи координат. Такий опис виконується за допомогою так званих ***кутів Ейлера.***

Нехай у твердому тілі деяка нерухома точка O є початком двох координатних систем: нерухомої системи $X_1Y_1Z_1$ та рухомої XYZ, яка жорстко зв'язана з твердим тілом. Тоді положення тіла в просторі буде повністю визначатися положенням рухомої системи координат XYZ відносно нерухомої $X_1Y_1Z_1$. Покажемо, що положення системи XYZ відносно системи $X_1Y_1Z_1$ можна визначити за допомогою трьох незалежних величин – ***кутів Ейлера***.



Позначимо лінію перетину площин X_1Y_1 і XY через ОN і будемо вважати напрямок від О до N за додатній. Пряма ОN називається ***лінією вузлів***. Кут між віссю X_1 і лінією вузлів ОN позначають черех ψ і відраховують осі X_1 проти ходу годинникової стрілки. Кут між площинами X_1Y_1 та XY або (що те ж саме) між осями Z_1 і Z позначають через θ і вважають додатнім, якщо, дивлячись із додатнього напрямку лінії вузлів ОN, він буде задаватись направленим проти ходу годинникової стрілки. Кут між лінією ОN і віссю X позначимо через φ і будемо відраховувати його від лінії ОN проти ходу годинникової стрілки.

Кути ψ, θ і φ, які визначають положення системи XYZ відносно системи $X_1Y_1Z_1$, і називаються ***кутами Ейлера***. При цьому, кут ψ називається ***кутом прецесії***, кут θ – ***кутом нутації***, кут φ - ***кутом власного обертання***. Відповідно, вісь Z_1 називають ***віссю процесії***, лінію вузлів ОN – ***віссю нутації,*** а вісь Z – ***віссю власного обертання***.

Кути Ейлера змінюються у таких межах:

$$0 \le \psi \le 2\pi;$$
$$0 \le \theta \le \pi;$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Таким чином, будь який рух закріпленого в точці твердого тіла можна описати, задаючи три функції $\psi = \psi(t);\ \theta = \theta(t);\ \varphi = \varphi(t)$.

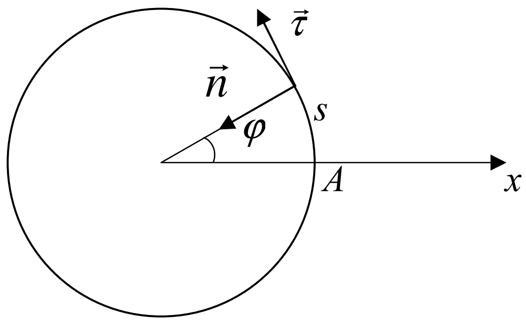
3.4 Поступальний, плоский та обертовий рухи

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому траєкторії всіх його точок мають однаковий вигляд. Це означає, що в будь-який момент часу швидкості всіх точок тіла є однаковими. Якщо з'єднати відрізком прямої дві довільні точки твердого тіла, то при русі тіла цей відрізок буде переміщуватися паралельно самому собі. Кути Ейлера при поступальному русі зберігаються постійними. Отже, цей рух можна описувати рухом лише однієї точки, а значить ***тверде тіло, яке рухається поступально, має три ступені свободи.***

Плоским називається такий рух твердого тіла, при якому траєкторії всіх його точок розташовуються в паралельних площинах. У цьому випадку рух тіла буде повністю визначатися рухом одного з його перерізів у будь-якій із паралельних площин. Положення ж такого перерізу однозначно визначається положенням його двох точок. Ці дві точки на площині мають чотири координати, але існує ще одне співвідношення (рівняння зв'язку), яке вказує на постійність відстані між точками (за означенням твердого тіла). Отже, ***при плоскому русі тверде тіло також має три ступені свободи.***

Обертовим називається такий рух твердого тіла, при якому якнайменше дві його точки весь час залишаються нерухомими. Пряма, що проходить через ці точки називається ***віссю обертання***. Всі ж інші точки тіла, окрім тих, які лежать на осі обертання, рухаються вздовж траєкторій, що мають вигляд концентричних кіл, у площинах, які є перпендикулярними до осі обертання. А це означає, що ***обертовий рух є плоским рухом***.

Розглянемо рух довільної точки твердого тіла по колу радіуса R. Якщо за початок відліку прийняти точку A, то положення точки на колі буде однозначно визначатися пройденим шляхом s. Але, згідно з рисунком, для малих значень φ, величина $s = R\varphi$.



Тоді модуль вектора лінійної швидкості

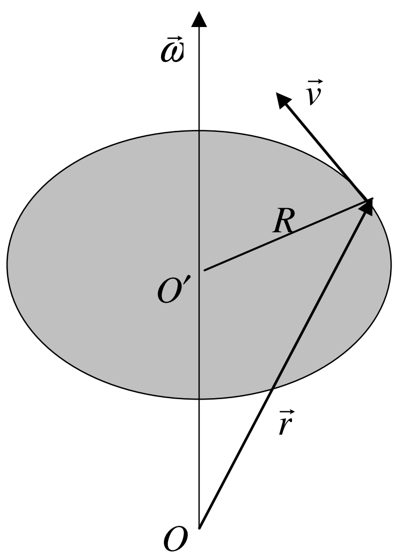
$$v = \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (3.1)$$

тобто положення точки характеризується зміною кута повороту. Швидкість зміни кута повороту з часом $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ називається ***кутовою швидкістю***. Якщо ω = const, то її називають ***круговою частотою обертання*** твердого тіла навколо обраної осі. Величина $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ називається ***частотою обертання*** і вказує на кількість обертів, виконаних за одиницю часу. А величина $T = \frac{1}{\nu}$ визначає тривалість одного обертання і називається ***періодом обертання.***

Всі характеристики обертання твердого тіла можна об'єднати в поняття ***вектора кутової швидкості*** $\vec{\omega}$. Модуль цього вектора є $|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$. Направлений вектор $\vec{\omega}$ завжди вздовж осі обертання, причому так, що миттєва лінійна швидкість $\vec{v}$ будь-якої точки твердого тіла визначається співвідношенням

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \qquad (3.2)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки твердого тіла, початок якого знаходиться на осі обертання.



Доведемо, що величина $\vec{\omega}$ дійсно є вектором.

За час dt точки твердого тіла, що обертається, переміщуються на кут $d\varphi = \omega dt$. Таке елементарне кутове переміщення буде характеризуватися не лише своєю величиною, але й площиною, у якій воно відбувається. Тоді, для того, щоб зафіксувати цю площину, величину $d\vec{\varphi}$ треба розглядати як вектор, перпендикулярний до цієї площини. Його напрямок знаходиться за правилом правого ґвинта: ***якщо ґвинт обертати в бік зростання φ, то напрямок поступального руху ґвинта повинен співпадати з напрямком вектора $d\vec{\varphi}$.***

Нескінченно мале кутове переміщення $d\vec{\varphi}$ матеріальної точки відбувається протягом нескінченно малого проміжку часу dt. Тому ***кутова швидкість $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ є вектором. Напрямки векторів $d\vec{\varphi}$ та $\vec{\omega}$ співпадають і знаходяться за правилом правого ґвинта***.

Першу похідну від кутової швидкості за часом або другу похідну від кутового переміщення за часом називають кутовим прискоренням

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{3.3}$$

Модуль лінійної швидкості та нормального прискорення точок твердого тіла при обертовому русі знаходиться так.

Згідно з (3.1) $v = R\dfrac{d\varphi}{dt}$, але $|\vec{\omega}| = \dfrac{d\varphi}{dt}$ $\Rightarrow v = \omega R$

(3.4)

Відомо, що $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\omega^2 R^2}{R} \quad \Rightarrow \quad a_n = \omega^2 R$. (3.5)

Модуль тангенціального прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R \tag{3.6}$$

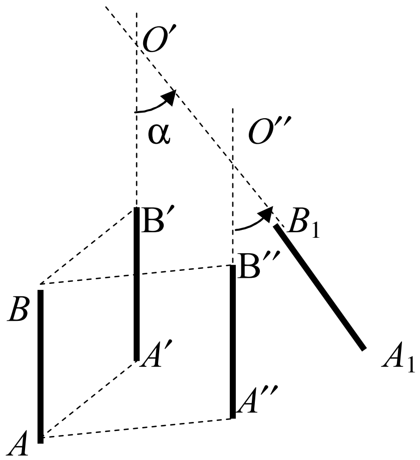
Тоді повне прискорення складе

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = \sqrt{R^2\left(\omega^4 + \varepsilon^2\right)} \quad \Rightarrow \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{3.7}$$

3.5 Миттєва вісь обертання. Теорема Ейлера

Обертовий рух є плоским рухом. Це означає, що положення твердого тіла в просторі у будь-який момент часу повністю визначиться положенням відрізка прямої, що з’єднує дві довільні точки тіла в одному з перерізів.

Припустимо, що за деякий час такий відрізок із положення AB перемістився в положення A_1B_1. Це переміщення можна виконати в два етапи: 1) поступальний рух, при якому відрізок паралельно самому собі перемістився в положення $A'B'$; 2) обертовий рух, коли тіло повернулося на кут α навколо осі, що проходить через точку O' перпендикулярно до площини руху. Такий розклад руху є неоднозначним, оскільки точку типу O' можна обрати у будь-якому місці на продовженні відрізка A_1B_1. Але при такому переміщенні кут повороту α завжди залишається одним і тим же.



Таким чином, за деякий проміжок часу dt виконується елементарне поступальне переміщення $d\vec{l}$ усіх точок і елементарне кутове переміщення $d\vec{\alpha}$ навколо точки O' ($d\vec{\alpha}$ - також вектор!). Оскільки швидкість поступального руху $\vec{v}_0 = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$, а обертового $\vec{v}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\alpha}}{dt}$, то загальну швидкість усіх точок тіла можна записати

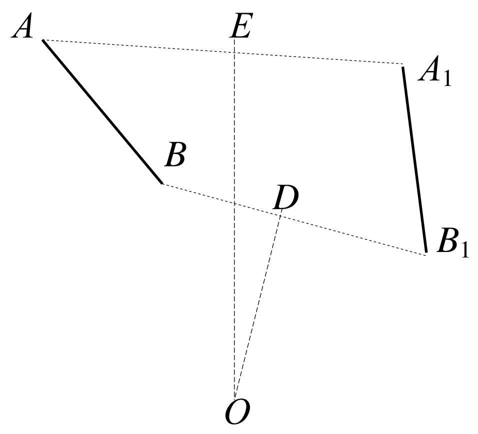
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right).$$

Зазначений розклад руху на поступальний та обертовий є неоднозначним. Тоді, якщо змінювати поступальне переміщення, то одночасно буде змінюватись і положення осі обертання (положення $A''B''$). У такому випадку будь-яка вісь, яка є перпендикулярною до площини руху, може бути віссю обертання. Швидкість же поступального руху буде залежати від вибору осі обертання (оскільки буде змінюватись $d\vec{l}$).

Миттєвою називається така вісь обертання, вибір якої призводить до того, що швидкість поступального переміщення $\vec{v}_0 = 0$. Тоді загальна швидкість точок тіла у даний момент часу буде дорівнювати лише швидкості обертового руху навколо миттєвої осі.

Оскільки при плоскому русі завжди можна знайти миттєву вісь обертання, то буде справедливим стверджувати, що ***при плоскому русі тверде тіло може бути переведено з будь-якого заданого положення в інше довільне положення за допомогою лише одного повороту навколо миттєвої осі обертання***.

Розглянемо приклад знаходження такої осі.



Нехай обраний відрізок перейшов з положення AB в положення A_1B_1. З'єднаємо точки A і A_1, B і B_1. З середин відрізків $|AA_1|$ та $|BB_1|$ проведемо перпендикуляри $|EO|$ та $|DO|$, що перетинаються у точці O. Через точку O, перпендикулярно до площини руху і проходить миттєва вісь обертання.

На основі вищеозначеного Ейлером було сформульовано теорему:

Тверде тіло, яке має одну нерухому точку, можна перевести з деякого довільного положення в будь-яке інше довільне положення шляхом повороту навколо осі, що проходить через цю нерухому точку.

У подальшому ця теорема отримала назву ***теореми Ейлера.***

4 Динаміка матеріальної точки

4.1 Сили і взаємодія

Динаміка – це частина класичної механіки, яка займається вивченням руху тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Питання про фізичне поняття сили давно цікавило людство. Арістотель, наприклад, вважав, що сила є причиною руху. Крім того, він запевняв, що з припиненням дії сили припиняється й рух. Цей погляд на поняття сили проіснував понад 19 століть і лише в XVII ст. Галілео Галілей розкрив справжній закон руху тіл. Він показав, що будь-яке тіло має властивість зберігати рух (точніше, кількість руху), а сила є лише причиною зміни кількості руху. Зміна ж кількості руху викликається іншими тілами, тобто проявляється при взаємодії тіл. Тому в механіці ***під силою розуміють не фізіологічне відчуття зусилля, а фізичну величину, яка змінює стан руху тіл і яка виникає в результаті взаємодії принаймні двох тіл.***

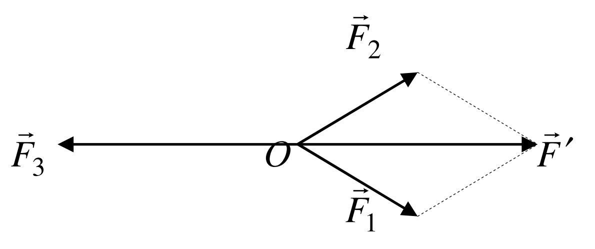
Виміряти величину сили можна, наприклад, за допомогою динамометра, оскільки сили можуть змінювати не лише швидкість руху тіл, а й викликати їх деформацію.

Дві сили називають рівними за числовим значенням, але протилежно направленими, якщо вони, будучи прикладеними до тіла, не надають йому прискорення. На основі цього можна стверджувати, що, окрім числового значення, сила характеризується ще й напрямком, тобто вона є ***векторною величиною***. І, як кожний вектор, вона характеризується трьома параметрами: початком, модулем та напрямком.

Виходячи з цього, можна дати таке загальне означення сили:

Сила є векторною кількісною мірою інтенсивності взаємодії тіл, що проявляється у зміні кількості їх руху.

Якщо на матеріальну точку діють декілька сил у різних напрямках, то їх дію можна замінити дією однієї сили, яка називається ***рівнодіючою***. Величина і напрям рівнодіючої визначаються за правилами додавання векторів.



Приклад. Нехай на точку O діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, але $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}'$. Тоді $\vec{F}_3 + \vec{F}' = 0$, або $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ (для даного випадку).

Якщо ж на точку діють n сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, то умову рівноваги цієї точки можна записати так

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n = 0,$$ або

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0,$$

або в проекціях на координатні осі:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0; \; \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0; \; \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0 .$$

4.2 Закони Ньютона

Узагальнюючи досягнення науки свого часу, Ньютон (1643-1727) сформулював основні закони динаміки в праці "Математичні начала натуральної філософії".

Перший закон Ньютона.

За перший закон динаміки Ньютон прийняв закон інерції, відкритий ще Галілеєм (1564-1642). Згідно з першим законом:

Будь-яке тіло продовжує утримуватися в своєму стані спокою або прямолінійного і рівномірного руху, коли і оскільки воно не змушується прикладеними силами змінювати цей стан.

Іншими словами, ***якщо дане тіло не взаємодіє з іншими тілами (тобто на нього не діють ніякі сили), то його швидкість залишається величиною постійною***.

Таке тіло називається ***вільним***, а його рух – ***вільним рухом***, або ***рухом за інерцією.***

Якщо говорити точно, то вільні тіла – це фізичні абстракції. Але за деяких умов зовнішні дії на тіла можуть бути усунені або скомпенсовані (наприклад, при розгляді руху тіла, що вільно падає в вакуумі). Але при таких міркуваннях виникає запитання, як переконатися в тому, що тіло не знаходиться під впливом зовнішніх дій? За відсутністю прискорень про це судити не можна, потрібні якісь інші способи, інакше закону інерції буде бракувати сенсу. Повністю позитивної відповіді на це питання до цього часу не існує. Ми можемо візуально спостерігати відсутність різних тіл, що діють на дане тіло, але на це ж тіло можуть діяти ще й різні силові поля, які породжуються іншими тілами. Тому питання про відсутність зовнішніх дій зводиться до питання про відсутність впливу з боку силових полів.

На сьогодні усі відомі в природі сили зводяться до ***сил гравітаційного притягання***, ***електромагнітних сил*** та до ***сил взаємодії між елементарними частинками***. Останніх сил у макромеханіці позбавитися легко, оскільки вони дуже короткодіючі (~ 10^{-14} м). Але дві перші сили є далекодіючими, їх модулі повільно зменшуються з відстанню. Тому позбавитись їх не так просто. Проте у відсутності електромагнітних полів завжди можна переконатися, оскільки вони по різному впливають на додатні та від'ємні заряди (за допомогою, наприклад, поведінки пробного заряду). Всі накопичені до цього часу наукою факти свідчать про те, що віддалені тіла Всесвіту не збуджують скільки-небудь помітних статичних електромагнітних полів у відносно малих областях простору (типу Сонячної системи). Це дає підставу стверджувати, що існують такі тіла, що не зазнають впливу з боку якихось електромагнітних полів.

Про наявність гравітаційних полів говорити так впевнено не можна, оскільки їхню природу вивчено ще далеко недостатньо. Але навіть при наявності таких полів з ними можна було б і не рахуватися, оскільки одне і те ж гравітаційне поле всім тілам надає абсолютно однакових прискорень. Тобто це означає, що можна ввести систему відліку, яка вільно падає в такому гравітаційному полі. Тоді на явища, що відбуваються у цій системі відліку, присутність однорідного гравітаційного поля впливати не буде. Змінні ж гравітаційні поля (хвилі), за теоретичними розрахунками, є настільки малими, що сучасна експериментальна техніка не дозволяє їх виявити.

Таким чином, як показують наведені вище феноменологічні міркування, можна знайти такі системи відліку, у яких перший закон Ньютона виконується. Такі системи, в яких вільні тіла рухаються прямолінійно і рівномірно називаються ***інерціальними системами відліку,*** а перший закон Ньютона часто називають ще ***законом інерції***.

Зміст же закону інерції зводиться до ствердження про те, що існує хоча б одна інерціальна система відліку.

Другий закон Ньютона.

Згідно з першим законом, будь-яке тіло буде чинити опір спробам привести його в рух зі стану спокою чи змінити напрямок його руху. Така властивість тіл називається ***інертністю***. У різних тіл інертність проявляється по-різному. Наприклад, надати однакового прискорення більшому з однорідних предметів значно важче. Інертність тіл зростає зі збільшенням ***кількості речовини***, що міститься в даному тілі. Інертність тіла проявляється лише в динамічних явищах. ***Мірою інертності тіла є фізична величина, що називається масою тіла.***

Розглянемо відомий зі школи експеримент. Згадаємо залежність прискорення від величини сили, прикладеної до тіла (дослід з візком, динамометром та набором важків). Вона може бути записаною: $F = ka$. Збільшуючи масу візка, помічаємо, що при постійній діючій силі значення прискорення зменшується. Тобто в отриманій експериментальній залежності коефіцієнтом пропорційності виявляється маса тіла. Визначену в такий спосіб масу називають ***інертною масою.***

Для подальших міркувань введемо поняття ***замкнутої системи матеріальних точок (тіл). Замкнутою системою називають таку систему матеріальних точок (тіл), яка настільки віддалена від інших матеріальних точок (тіл), що не зазнає з їхнього боку ніякого впливу.***

В означеній таким чином системі будемо надавати різним тілам прискорень, діючи на них з постійною силою. Одержимо: $F = m_1a_1 = m_2a_2$. Звідки $m_2 = m_1 \dfrac{a_1}{a_2}$. У такий спосіб, в принципі, можна виміряти масу будь-якого тіла, якщо маса іншого тіла є відомою.

Досліди з відрізком показали, що яку б горизонтальну силу не було прикладено до візка, прискорення завжди буде пропорційним діючій силі і завжди буде співпадати з напрямом дії сили. А це означає, що ***маса є скалярною величиною.*** Якщо її позначити буквою m, то можна записати

$$\vec{F} = m\vec{a}\,. \tag{4.1}$$

Це і є формула, яка виражає другий закон Ньютона і відома зі школи. Ньютон цей закон сформулював у більш загальному вигляді, використовуючи для характеристики механічного стану при русі тіла ще одну фізичну величину – ***кількість руху тіла*** (або, що те ж саме, ***імпульс тіла***)

$$\vec{p} = m\vec{v}\,.$$

У формулюванні Ньютона другий закон звучав так:

Зміна кількості руху є пропорційною прикладеній до тіла силі і відбувається у тому ж напрямку, у якому діє ця сила.

У сучасній інтерпретації другий закон Ньютона можна сформулювати так:

Похідна від кількості руху тіла за часом чисельно дорівнює діючій силі і співпадає з нею за напрямком.

Математично другий закон Ньютона записується

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{або} \qquad \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right). \tag{4.2}$$

І тільки у тому випадку, коли $m = const$, її можна винести за знак похідної і записати

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (\text{оскільки } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}),$$

або

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (\text{оскільки } \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}).$$

Таким чином, запис другого закону Ньютона у вигляді формули (4.2) є найбільш загальним, оскільки він враховує той факт, що маса тіла може бути змінною величиною (наприклад, при русі ракети).

Третій закон Ньютона.

Згідно з третім законом дія тіл, яка зумовлює зміну стану їх руху, має характер взаємодії: якщо на тіло діє сила, то це означає, що на нього діє інше тіло, але це інше тіло, в свою чергу, зазнає впливу від першого.

Ньютон третій закон сформулював так:

Кожній дії завжди існує рівна протидія. Іншими словами***, сили дії двох матеріальних точок (тіл) одна на одну є рівними за величиною і протилежними за напрямком.***

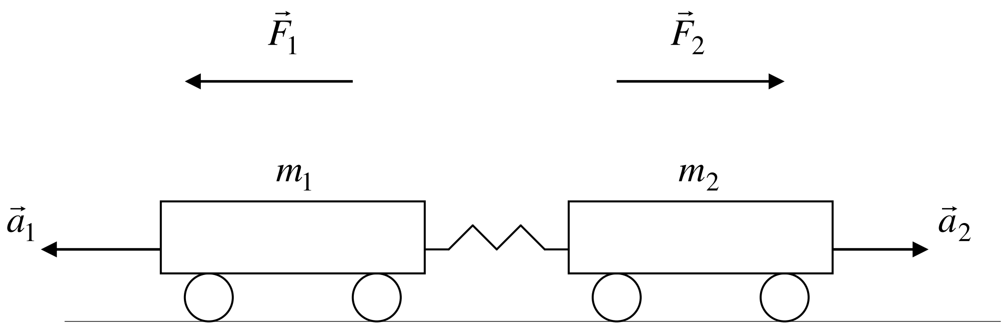
Тобто

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}.$$

Цей закон стверджує, що якщо тіло *B* діє на тіло *A* з силою $\vec{F}_{12}$, то, в свою чергу, тіло *A* діє на тіло *B* з силою $\vec{F}_{21}$, рівною за величиною і протилежною за знаком силі $\vec{F}_{12}$. Причому, обидві сили є направленими вздовж однієї і тієї ж прямої. Таким чином, третій Ньютона закон відображає той факт, що ***сила є результатом взаємодії двох різних тіл.***

Третій закон нічого не говорить про величину сил, а тільки про те, що вони рівні. Важливо підкреслити, що в цьому законі мова йде про сили, які прикладено до ***різних тіл***. Тому питання про рівнодіючу цих сил позбавлене фізичного змісту.

Розглянемо дослід з двома візками, з'єднаними пружиною.



Відштовхування візків масами m_1 і m_2 виникає після стиснення пружини зовнішніми силами $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$. У всіх випадках буде виконуватися рівність

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2.$$

Для кожного із тіл, що взаємодіють, можна записати:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \text{ або } \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_1; \quad \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_2 \text{ (згідно з II законом).}$$

Тоді згідно з III законом:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0.$$

Після інтегрування маємо

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$$

Тобто при взаємодії двох тіл сума їхніх імпульсів є постійною величиною. Таким чином, ***третій закон Ньютона можна сформулювати також як вимогу збереження суми імпульсів тіл, що взаємодіють, при відсутності інших зовнішніх сил, тобто для замкненої системи***.

5 Рух системи матеріальних точок

Кінцеве число матеріальних точок називається ***системою матеріальних точок***. Кожній точці такої системи можна поставити у відповідність деяке число, тобто ці точки можна пронумерувати.

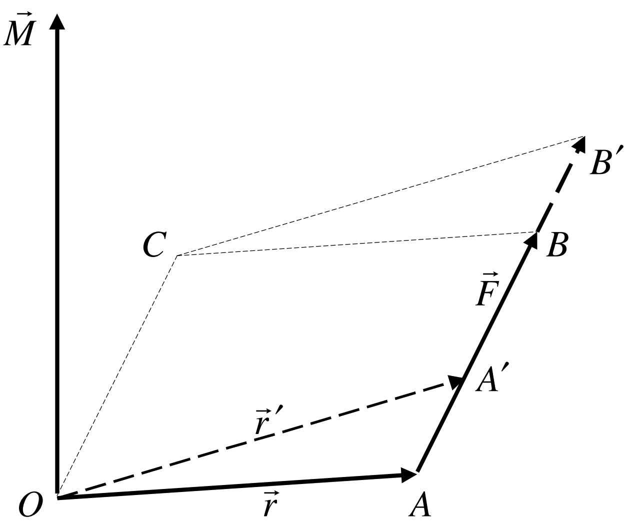
Приклади: планети Сонячної системи, ідеальний газ у певному кінцевому об’ємі тощо.

Сили, які діють на будь-яку точку системи з боку інших точок називаються внутрішніми силами. Якщо джерело сил знаходиться поза системою, то сили називають зовнішніми.

5.1 Момент сили і момент імпульсу матеріальної точки

Необхідно розрізняти поняття моменту сили і моменту імпульсу відносно точки і відносно осі. Це пов’язані між собою, але різні поняття.

Момент вектора відносно точки сам є вектором. Момент цього ж вектора відносно деякої осі є проекцією на цю вісь його момента відносно точки, що лежить на цій осі.



Нехай точка O – будь-яка точка, відносно якої розглядається момент вектора сили та вектора імпульсу. Назвемо її ***началом*** або ***полюсом.*** Позначимо через $\vec{r}$ радіус-вектор, проведений з цієї точки до точки A прикладення сили $\vec{F}$.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки О називають векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{або} \quad \vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \tag{5.1}$$

Момент сили не зміниться, якщо точку прикладення сили $\vec{F}$ перенести у будь-яку іншу точку на прямій лінії дії сили. Це випливає безпосередньо з означення моменту: якщо точку прикладення сили перенести з т. A в т. A', то паралелограм $OCBA$ перетвориться на паралелограм $OCB'A'$. Але площі цих паралелограмів залишаться рівними, оскільки OC – загальна основа і, крім того, вони мають загальну висоту. А це означає, що наше твердження є справедливим (за означенням векторного добутку).

Якщо $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 . \tag{5.2}$$

Тобто, ***момент рівнодіючої двох або декількох сил відносно деякого полюсу дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того ж полюсу.***

Момент імпульсу $\vec{p}$ матеріальної точки відносно полюсу O означається аналогічно:

Моментом імпульсу $\vec{p}$ ***відносно точки (полюсу) О називається векторний добуток радіуса-вектора*** $\vec{r}$ ***на імпульс*** $\vec{p}$***.***

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{або} \quad \vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] \tag{5.3}$$

Моменти сили та імпульсу пов’язані між собою співвідношенням, яке виводиться із законів Ньютона, що вказує на доцільність та необхідність введення цих понять.

Припустимо, що полюс є нерухомим і продиференцюємо вираз (5.3) за часом

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{5.4}$$

Але $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – це швидкість; вектор її співнапрямлений з вектором імпульсу ($\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{p}$), оскільки $\vec{p} = m\vec{v}$. Тоді векторний добуток двох паралельних векторів дорівнює нулю, а значить і перший додаток у формулі (5.4) також дорівнює нулю.

Другий доданок запишемо так:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \tag{5.5}$$

Таким чином, рівняння (5.4) набуває вигляду

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{5.6}$$

Це співвідношення називається ***рівнянням моментів*** і формулюється так: ***похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого полюсу дорівнює моментові діючої сили відносно того ж полюсу.***

5.2 Момент сили і момент імпульсу системи матеріальних точок

Імпульсом системи, що складається з n матеріальних точок, називається векторна сума імпульсів усіх n матеріальних точок, які входять до системи.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \,, \tag{5.7}$$

де $\vec{p}_i$ - імпульс i-тої матеріальної точки.

Аналогічно, ***моментом імпульсу системи n матеріальних точок відносно деякого полюса O називається векторна сума моментів імпульсів усіх матеріальних точок системи відносно того ж полюса.***

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \,, \tag{5.8}$$

де $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ - момент імпульсу i-тої матеріальної точки відносно полюса O.

Продиференцюємо вираз (5.8) за часом

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{v}_i \times \vec{p}_i) + \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M} \,,$$

тобто

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \,, \tag{5.9}$$

де $\vec{M}$ – момент зовнішніх сил.

Вираз (5.9) являє собою математичний запис рівняння моментів для системи матеріальних точок.

Перед тим, як означити момент сили системи матеріальних точок, розглянемо поняття сили, що діє на цю систему. Означимо таку силу, як суму всіх сил, діючих на кожну з n точок системи, включаючи сили взаємодії матеріальних точок системи між собою, тобто внутрішні сили

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,, \tag{5.10}$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,\prime} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} \tag{5.11}$$

де $\vec{F}_i$ – це сила, яка діє на i-ту точку системи. Вона складається із суми зовнішньої сили $\vec{F}_i^{\,\prime}$, що діє на цю точку, і внутрішньої сили $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji}$, яка дорівнює векторній сумі всіх сил, які діють з боку усіх точок системи на i-ту точку. Сума береться по всіх індексах i та j, крім $i \neq j$, бо при $i = j$ одержимо силу дії i-тої точки на саму себе, але $\vec{F}_{ii} = 0$.

Підставляючи (5.11) в (5.10), одержимо

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,\prime} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} \,. \tag{5.12}$$

Другий доданок у виразі (5.12) можна записати так

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} \right) = 0 \,, \tag{5.13}$$

оскільки, згідно з третім законом Ньютона $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$.

Враховуючи (5.13), одержимо

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,\prime} \tag{5.14}$$

Тобто ***сила, що діє на систему n матеріальних точок, дорівнює лише сумі зовнішніх сил, які діють на всі точки системи.***

Тоді момент дії такої системи можна записати у вигляді

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \vec{F}_i \,, \tag{5.15}$$

де $\vec{F}_i$ визначається із співвідношення (5.11).

Спростимо вираз (5.15), підставивши в нього (5.11)

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\prime}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}\right). \tag{5.16}$$

Перша сума – це момент зовнішніх сил, друга – момент внутрішніх сил. Розглянемо другий доданок у формулі (5.16):

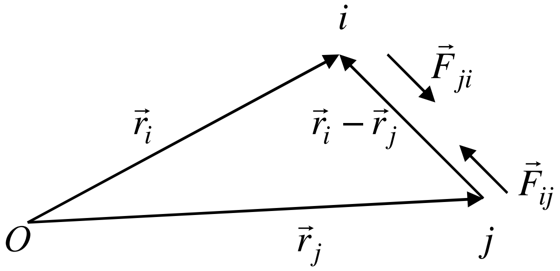
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\times \vec{F}_{ji},$$

оскільки $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$.

Припустимо, що момент внутрішніх сил дорівнює нулю

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\times \vec{F}_{ji} = 0 \tag{5.17}$$

Тоді на систему матеріальних точок буде діяти лише момент зовнішніх сил. Таке припущення є реальним, бо, наприклад, у випадку центральних сил вектори $\vec{F}_{ji}$ і $\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)$ – є колінеарними, а значить їх векторний добуток дорівнює нулю.



Це означає, що й кожний доданок у сумі (5.17) також дорівнює нулю, а звідки і вся сума дорівнює нулю. Отже

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\prime}\right)$$

5.3 Закон руху системи матеріальних точок. Центр маси

Нехай система складається з n точок, а $\vec{F}_{ji}$ - сила, з якою j-та точка діє на i-ту. При цьому $\vec{F}_i$ - результуюча всіх зовнішніх сил, що діють на i-ту точку. Запишемо закони руху для кожної точки

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1j} + ... + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1; \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2j} + ... + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2; \\ .... \\ \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + ... + \vec{F}_{ij} + ... + \vec{F}_{in} + \vec{F}_i, \ (i \neq j); \\ .... \\ \dfrac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + ... + \vec{F}_{nj} + ... + \vec{F}_{n,n-1} + \vec{F}_n; \end{cases} \tag{5.18}$$

Якщо складемо ліві і праві частини системи (5.18), то одержимо сумарний імпульс системи

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ji}\ . \tag{5.19}$$

При цьому доданок $\sum\limits_{i=1}^{n}\ \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ji} = 0$, оскільки $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$.

В результаті маємо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\ . \tag{5.20}$$

Тобто***, похідна за часом від сумарного імпульсу системи матеріальних точок дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на всі точки системи.*** Це і є закон руху системи матеріальних точок.

При опису руху системи матеріальних точок часто зручно користуватися поняттям ***центра маси системи.***

Центром маси системи матеріальних точок називають таку умовну точку, у якій зібралася б уся маса системи матеріальних точок, якби вони взаємодіяли з нескінченно зростаючими силами притягання.

За означенням імпульсу системи матеріальних точок

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right), \tag{5.21}$$

де $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – маса системи, як сума мас n точок, що складають систему.

Вираз у дужках $\vec{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ (5.22) являє собою радіус-вектор тієї уявної точки, яка і є центром маси системи. Величина $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ – швидкість руху цієї уявної точки. Підставивши (5.22) в (5.21), одержимо:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{R}}{dt} = m\vec{V}. \tag{5.23}$$

Ми отримали вираз, який є аналогічним виразу для імпульсу матеріальної точки. Тоді закон руху системи набуває вигляду

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F},$$

тобто він співпадає із законом руху для матеріальної точки, якщо вся маса її зосереджена в центрі маси системи і всі зовнішні сили прикладено до центра маси системи.

6 Закони збереження

Ізольованою (або замкненою) називають таку систему матеріальних точок, на яку не діють зовнішні сили.

В реальних умовах абсолютно ізольованих систем не буває, але деякі з них за певних умов можна вважати достатньо ізольованими.

Для замкнених систем залишаються постійними три фізичних величини: ***енергія***, ***імпульс*** і ***момент імпульсу***. Відповідно існують і три закони збереження: ***закон збереження енергії***, ***закон збереження імпульсу*** і ***закон збереження момента імпульсу***.

Закони збереження є точними законами і мають загальний характер, тобто область їх використання поширюється не лише на механічні явища. Закони збереження не залежать від природи та характеру діючих сил. Тому за їх допомогою можна зробити ряд важливих висновків щодо поведінки механічної системи навіть у тому випадку, коли сили, які діють на цю систему, залишаються невідомими.

6.1 Закон збереження імпульсу

Запишемо закон (рівняння) руху для системи, що складається з n матеріальних точок

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,, \qquad (6.1)$$

де $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ - рівнодіюча усіх зовнішніх сил.

Але якщо система є ізольованою, то дія зовнішніх сил відсутня. Тоді права частина рівняння (6.1) дорівнює нулю, тобто маємо

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0\,.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо

$$\vec{p} = const\,. \qquad (6.2)$$

Таким чином, ми дійшли висновку, що

Сумарний імпульс ізольованої системи матеріальних точок є величиною постійною.

Це і є закон **збереження імпульсу**.

На практиці може статися так, що система матеріальних точок не є ізольованою повністю, тобто зовнішні сили можуть діяти лише в певних напрямках. Тоді систему координат можна обрати таким чином, що одна чи дві проекції зовнішніх сил на координатні осі будуть дорівнювати нулю.

Припустимо, що зовнішня сила може діяти лише в напрямку осі *Z*, а в напрямках, паралельних площині *XOY*, зовнішні сили не діють, тобто $F_z \neq 0,\ F_x = 0,\ F_y = 0$. Тоді рівняння (6.1), у проекціях на координатні осі, запишеться так:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0;\ \frac{dp_y}{dt} = 0;\ \frac{dp_z}{dt} = F_z\,. \tag{6.3}$$

Інтегруючи два перших рівняння, отримуємо

$$p_x = const;\ \ p_y = const\,.$$

А це означає, що в напрямках, паралельних площині *XOY* імпульс не змінюється і система поводить себе зовсім як ізольована, тобто в напрямках, паралельних площині *XOY*, виконується закон збереження імпульсу (наприклад, дія сили тяжіння поблизу поверхні Землі).

Розглянемо приклад використання закону збереження імпульсу. Нехай дві кулі з масами m_1 і m_2, що рухаються зі швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, взаємодіють у вигляді повністю непружного удару і рухаються далі як одне тіло (повністю непружним ударом називають таку взаємодію тіл (які до взаємодії мали різну швидкість), після якої вони набувають однакової швидкості і рухаються як одне тіло). Треба визначити, як будуть рухатися кулі після удару. Це зробити досить просто, якщо відомі імпульси обох куль до удару. Нехай імпульс першої кулі $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$, а другої $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. Тоді, згідно із законом збереження імпульсу, після удару сумарний імпульс обох куль $\vec{p}$ складає суму $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. При цьому напрямок руху може змінитись, але імпульс залишиться тим же самим.

Тоді

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}, \quad \Rightarrow\ \vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Напрямок руху куль після удару можна знайти за правилами додавання векторів.

6.2 Закон збереження моменту імпульсу

Для системи матеріальних точок рівняння моментів має вигляд

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \vec{M}\ , \qquad (6.4)$$

де $\vec{M}$ - сумарний момент зовнішніх сил.

Якщо система є ізольованою, то $\vec{M} = 0$. Тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0\,. \qquad (6.5)$$

Інтегруючи рівняння (6.5), маємо

$$\vec{L} = const\,. \qquad (6.6)$$

Або в проекціях на координатні осі:

$$L_x = 0;\ L_y = 0;\ L_z = 0;$$

Вираз (6.6) є математичним записом ***закону збереження моменту імпульсу***:

Сумарний м***омент імпульсу ізольованої системи не змінюється при будь-яких процесах, що відбуваються в системі.***

Якщо система не є повністю ізольованою, а, наприклад лише проекція моменту імпульсу на вісь *Z* дорівнює нулю ($\vec{M}_z = 0$), то тоді

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x;\ \frac{dL_y}{dt} = M_y;\ \frac{dL_z}{dt} = 0\ .$$

В цьому випадку систему можна вважати замкненою лише в напрямку осі *Z*, оскільки $L_z = const$.

Отже, ***закон збереження моменту імпульсу*** (як і ***закон збереження імпульсу***) можна використовувати як до повністю, так і до не повністю ізольованих систем.

6.3 Закон збереження енергії

6.3.1 Поняття про енергію

Імпульс матеріальної точки (чи системи точок) можна вважати деякою мірою механічного руху. Але така міру може бути використаною не у всіх випадках. Наприклад, при повністю непружному ударі двох однакових куль, які рухаються назустріч одна одній, відбувається "зникнення" руху, тобто після взаємодії кулі зупиняються. Проте закон збереження імпульсу виконується: до удару кулі мали рівні і протилежно направлені імпульси. Значить до удару сумарний імпульс системи, що складається з двох куль, дорівнював нулю і після удару залишився рівним нулю. Використовувати ж закон збереження імпульсу до однієї кулі не можна, оскільки під час удару на неї діє зовнішня сила – сила тиску другої кулі (тобто система, що складається з однієї кулі не буде ізольованою)

Необхідно зазначити, що стан обох куль принципово зміниться після удару: в початковий момент кулі рухались, а після удару рух кожної кулі припинився і, крім того, підвищилась температура кожної кулі (цей факт є експериментально доведеним). Отже, у даному випадку закон збереження кількості руху не може правити за міру зміни механічного стану системи. Той факт, що кулі нагрілись під час удару має принципове значення: механічний рух куль "зник", але замість нього виникла інша форма руху матерії – теплова. Крім того, виділилася кількість тепла, що не є пропорційною сумі імпульсів, які мали кулі до удару. Та й взагалі, імпульс - величина векторна, а кількість тепла – скалярна. Тому й порівнювати їх величина не можна.

Таким чином, повинно існувати інше описання (чи інша міра) механічного руху системи, особливо у тих випадках, коли відбувається перетворення механічного руху в інші види руху. Такою, у всіх випадках придатною мірою, є ***енергія***, величина якої при всіх перетвореннях матерії в ізольованій системі залишається постійною.

Оскільки рух – це властивість матерії, то енергія є кількісною мірою руху матерії для всіх його форм.

Перед тим, як обговорювати міру енергії механічного руху, необхідно зупинитись на такій важливій фізичній величині, як ***робота***.

Розглянемо два приклади, в яких є дія сили, але немає зміни імпульсу:

1) нерухоме тіло лежить на столі;
2) на прямолінійній дільниці шляху локомотив тягне вагони.

Існує принципова різниця в наведених прикладах: для того, щоб сила тяжіння діяла на тіло (1-й приклад), то Земля, з боку якої діє ця сила, не повинна зазнавати ніяких змін. А для того, щоб сила тяги локомотива діяла на вагони (2-й приклад), необхідні деякі витрати палива та води. ***Локомотиву необхідно постійно надавати якоїсь кількості енергії***. З точки ж зору механіки різниця між цими прикладами полягає лише в тому, що у першому випадку прикладення сили тіло знаходиться у стані спокою, а в іншому – рухається з деякою швидкістю. Досвід показує, що кількість витраченого палива за деякий час є пропорційною добутку сили тяги локомотива на шлях, який пройшов локомотив за цей же час. Тому в усіх подібних явищах значну роль відіграє фізична величина, яка називається ***роботою*** і визначається як скалярний добуток сили на переміщення, тобто

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} \tag{6.7}$$

Робота є скалярною величиною і править за міру передачі руху від одного тіла до іншого через силу.

Інакше:

Робота – це міра передачі енергії від одного тіла до іншого, або міра переходу енергії від одного тіла до іншого.

6.3.2 Робота сил та кінетична енергія

Під час дії деякої сили на матеріальну точку може змінюватися абсолютне значення її швидкості. У цьому випадку кажуть, що сила виконує роботу. Робота буде додатною при зростанні швидкості та від'ємною при її зменшенні.

Розглянемо випадок, коли дія сили і рух відбуваються вздовж однієї з осей координат, наприклад осі *OX*. Нехай матеріальна точка масою m пересувається під дією сили F_x. Тоді, згідно з II законом Ньютона, для цієї сили можна записати

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \ . \tag{6.8}$$

Помножимо обидві частини рівняння (6.8) на v_x

$$mv_x \frac{dv_x}{dt} = F_x v_x, \text{ або } \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_x^2}{2}\right) = F_x v_x. \tag{6.9}$$

Враховуючи, що $v_x = \dfrac{dx}{dt}$. Домноживши обидві частини рівняння (6.9) на dt, отримуємо

$$d\left(\frac{mv_x^2}{2}\right) = F_x dx. \tag{6.10}$$

З формули (6.10) видно, що при зміщенні точки на величину dx сила F_x виконує роботу $F_x dx$. Внаслідок цього змінюється значення величини $\frac{mv_x^2}{2}$.

Величина $\frac{mv_x^2}{2}$ називається ***кінетичною енергією матеріальної точки***.

Якщо в результаті дії сили швидкість точки змінюється від значення v_{x_1} до v_{x_2} при зміщенні її з положення x_1 в x_2, то після інтегрування виразу (6.10) одержимо

$$\int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} d\left(\frac{mv_x^2}{2}\right) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx, \quad \text{або} \quad \left(\frac{mv_{x_2}^2}{2} - \frac{mv_{x_1}^2}{2}\right) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \tag{6.11}$$

Тобто, ***робота, яку виконує сила при переміщенні матеріальної точки, дорівнює зміні її кінетичної енергії.***

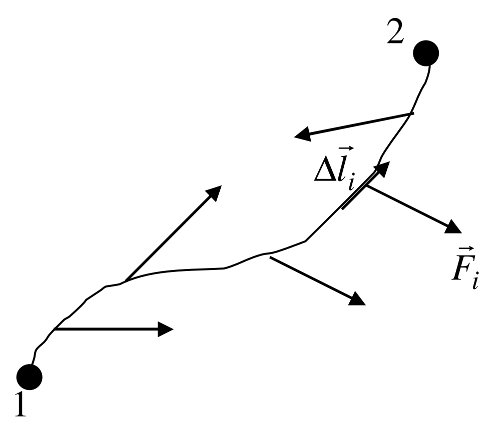
Запишемо формулу (6.11) у вигляді

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \quad . \tag{6.12}$$

З формули (6.12) видно, що зміна кінетичної енергії буде можливою лише за умови, коли $F_x \neq 0$. Постійною ж ця зміна буде лише тоді, коли $F_x = 0$. Тобто, іншими словами, $\left(\frac{mv_{x_2}^2}{2} - \frac{mv_{x_1}^2}{2}\right) = const$ тоді, коли $F_x = 0$.

У тому випадку, коли напрямок вектора переміщення матеріальної точки не співпадає з напрямком дії сили, роботу буде виконувати лише компонента сили, яка є направленою вздовж переміщення

$$dA = FdlCos(\vec{F}, d\vec{l}) = \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{6.13}$$



Розглянемо випадок руху точки не вздовж прямої лінії, а вздовж будь-якої кривої. Розіб'ємо всю траєкторію руху на елементарні переміщення $\Delta\vec{l}_i$. Тоді робота сили на цьому відрізку шляху складе

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = F_i \Delta l_i Cos(\vec{F}_i, \Delta\vec{l}_i).$$

Сума всіх таких елементарних

робіт буде приблизно дорівнювати роботі по переміщенню матеріальної точки з положення 1 у положення 2. Якщо врахувати, що $\Delta\vec{l}_i \to 0$, то одержимо

$$A = \lim_{\Delta\vec{l}_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i d\vec{l}_i = \int\limits_{\substack{(1)\\L}}^{(2)} \vec{F} d\vec{l} \ . \tag{6.14}$$

Інтеграл $\int\limits_L \vec{F} d\vec{l}$ називається криволінійним інтегралом вздовж лінії L між точками 1 і 2. При практичному використанні замість L пишуть рівняння конкретної лінії, вздовж якої рухається точка з положення 1 у положення 2. Якщо змінити напрям руху від точки 2 до точки 1, то зміниться й знак інтеграла, оскільки напрямок вектора $\Delta\vec{l}_i$ зміниться на протилежний.

Розглянемо тепер найбільш загальний випадок трьохвимірного руху точки по криволінійній траєкторії. Рівняння руху запишемо у вигляді

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \ .$$

Тоді

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \ .$$

Або

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ . \tag{6.15}$$

Інтегруючи обидві частини формули (6.15) вздовж траєкторії руху між заданими її початковим та кінцевим положеннями, одержимо

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int\limits_{\substack{(1)\\L}}^{(2)} \vec{F} d\vec{l} \ . \tag{6.16}$$

6.3.3 Консервативні і неконсервативні сили. Потенціальна енергія

Сили, що розглядаються в макроскопічній механіці, прийнято розділяти на консервативні і неконсервативні. Якщо сили взаємодії залежать лише від координат матеріальних точок системи і робота таких сил при переміщенні системи із початкового положення в кінцеве не залежить від шляху переходу, а визначається лише початковою та кінцевою координатами, то такі сили називають ***консервативними.***

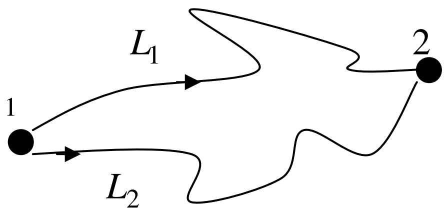
Приклади консервативних сил: сила тяжіння, всі центральні сили, тощо.

До консервативних сил відносять ***дисипативні сили***, які виникають при ковзанні якого-небудь тіла по поверхні іншого (наприклад, сили тертя), а також ***гіроскопічні сили***, які залежать від швидкості матеріальної точки і діють завжди у напрямку, перпендикулярному до вектора цієї швидкості.

Замість виразу **“*консервативні сили*”** вживають ще вираз **“*потенціальні сили*”** або **“*потенціальні поля сил*”**.

Полем сил називають ділянку простору, де діють дані сили.

Таким чином, ***потенціальним полем сил називають таке поле, у якому робота сил залежить лише від координат точок 1 і 2 і не залежить від того, вздовж якої траєкторії точка перейшла з положення 1 в положення 2***, тобто



$$\int\limits_{\substack{(1)\\L_1}}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{\substack{(1)\\L_2}}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l}\,. \qquad (6.17)$$

Для правої частини виразу (6.17) можна записати

$$\int\limits_{\substack{(1)\\L_2}}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int\limits_{\substack{(2)\\L_2}}^{(1)} \vec{F}\cdot d\vec{l}\,. \qquad (6.18)$$

Підставивши (6.17) в (6.18), маємо

$$\int\limits_{\substack{(1)\\L_1}}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int\limits_{\substack{(2)\\L_2}}^{(1)} \vec{F}\cdot d\vec{l} \qquad \text{або} \qquad \int\limits_{\substack{(1)\\L_1}}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int\limits_{\substack{(2)\\L_2}}^{(1)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0. \qquad (6.19)$$

Тобто ми одержали інтеграл по замкненому контуру, який можна записати так

$$\oint\limits_{L} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0. \qquad (6.20)$$

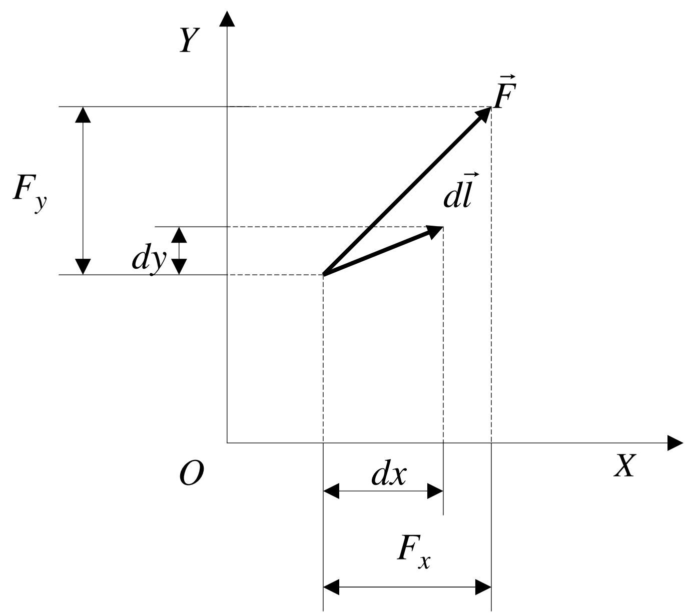
Тоді, згідно з (6.20), для потенціального поля сил можна стверджувати, що ***потенціальним полем сил називають таке поле, у якому робота сил по довільному замкненому контурові дорівнює нулю.***

Розглянемо роботу сил в потенціальному полі.

Теорема. Якщо F_x, F_y, F_z – проекції потенціальної сили на осі координат, то існує така функція $E_n(x, y, z)$, за допомогою якої ці проекції визначаються із співвідношень:

$$F_x = -\frac{\partial E_n(x,y,z)}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial E_n(x,y,z)}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial E_n(x,y,z)}{\partial z}. \qquad (6.21)$$

За допомогою функції $E_n(x, y, z)$ визначимо елементарну роботу, враховуючи, що проекціями переміщення вектора $d\vec{l}$ на осі координат є відповідно dx, dy, dz.



Скалярний добуток в проекціях на координатні осі запишеться як

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Тоді, враховуючи (6.21), маємо

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial E_n}{\partial x}dx - \frac{\partial E_n}{\partial y}dy - \frac{\partial E_n}{\partial z}dz. \qquad (6.22)$$

Але, згідно з означенням, що надається в курсі математичного аналізу, $\frac{\partial f}{\partial x}dx = df(x)$ є повним диференціалом функції $f(x)$, який виражає приріст функції при зміні аргументу x на величину dx.

Це дає змогу записати

$$dE_n = \frac{\partial E_n}{\partial x}dx + \frac{\partial E_n}{\partial y}dy + \frac{\partial E_n}{\partial z}dz\,.$$

І тоді формула (6.22) набуває вигляду

$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = -dE_n. \qquad (6.23)$$

Інтегруючи вираз (6.23), одержимо величину роботи при переміщенні точки в потенціальному полі із положення (1) у положення (2).

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_{(1)}^{(2)} dE_n = -\left(E_{n_2} - E_{n_1}\right). \qquad (6.24)$$

Раніше було показано, що

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\,.$$

Тоді формула (6.24) набуває вигляду

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\left(E_{n_2} - E_{n_1}\right), \quad \text{або} \quad \frac{mv_2^2}{2} + E_{n_2} = \frac{mv_1^2}{2} + E_{n_1}\,.$$

Тобто

$$\frac{mv^2}{2} + E_n = Const \qquad (6.25)$$

Величину E_n називають потенціальною енергією матеріальної точки, а вираз (6.25) – законом збереження енергії (механічної), який можна сформулювати так:

Повна механічна енергія замкненої системи матеріальних точок, які знаходяться лише під дією консервативних сил, залишається постійною.

Потенціальну енергію можна означити ще й так:

Якщо на матеріальну точку діють лише консервативні сили, то роботу, що виконується ними при переміщенні точки із даного положення у деяке нульове положення, називається потенціальною енергією матеріальної точки у першому положенні.

6.4 Нормування потенціальної енергії

Згідно з виразом (6.21) потенціальна енергія визначається як функція, часткові похідні якої за координатами дорівнюють відповідним проекціям сили. Перепишемо формули (7.5) у дещо іншому вигляді:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_n}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(E_n + C\right) = -\left(\dfrac{\partial E_n}{\partial x} + \dfrac{\partial C}{\partial x}\right) = -\dfrac{\partial E_n}{\partial x} = F_x, \text{оскільки } \dfrac{\partial C}{\partial x} = 0; \\ F_y = -\dfrac{\partial E_n}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(E_n + C\right) = -\left(\dfrac{\partial E_n}{\partial y} + \dfrac{\partial C}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial E_n}{\partial y} = F_y, \text{оскільки } \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0; \\ F_z = -\dfrac{\partial E_n}{\partial z} = -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(E_n + C\right) = -\left(\dfrac{\partial E_n}{\partial z} + \dfrac{\partial C}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial E_n}{\partial z} = F_z, \text{оскільки } \dfrac{\partial C}{\partial z} = 0; \end{cases} \quad (6.26)$$

З формул (6.26) випливає, що потенціальну енергію було визначено (згідно з розглянутою теоремою) з точністю до адитивної постійної величини. Але це означає (фізично), що можна обрати будь-яку точку простору і сказати, що потенціальна енергія у цій точці дорівнює довільному значенню, яке регулюється за допомогою вибору константи *С*. ***Отже, говорити про числове значення потенціальної енергії у точці не можна, в цьому немає фізичного змісту. Фізичний зміст буде мати <u>різниця</u> потенціальних енергій між заданими точками.***

Це означає, що якщо у будь-якій точці простору значення потенціальної енергії вибрати рівним деякому наперед заданому числу, то після цього її значення у всіх інших точках буде теж ***повністю визначеним***. Такий процес однозначного визначення потенціальної енергії у всіх точках простору називається ***нормуванням потенціальної енергії.***

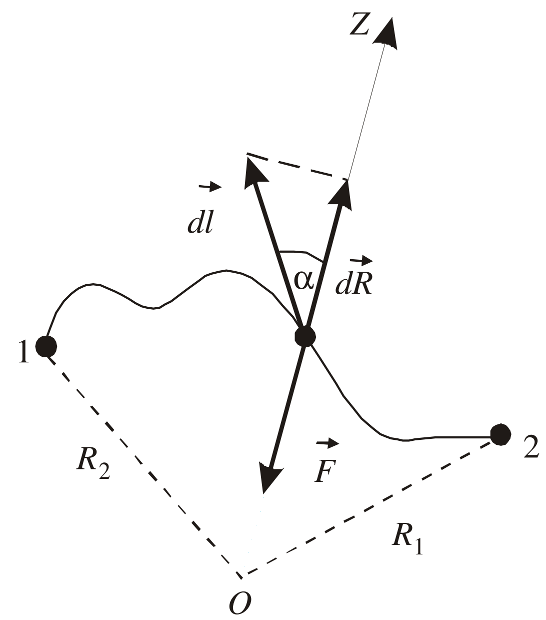
Приклад. Розглянемо силу тяжіння поблизу Землі. Направимо вісь *OZ* перпендикулярно до поверхні Землі. Тоді

$$F_z = -mg;\ F_x = F_y = 0.$$

Потенціальна енергія $E_n(z) = mgz + C$. Якщо домовитися, що на поверхні Землі $(z = 0)$ $E_n(0) = 0$, то A = 0. Тоді $0 = C$ і звідси безпосередньо маємо, що $E_n(z) = mgz$. У таких випадках стверджують, що вираз для $E_n(z)$ буде справедливим при нормуванні значення енергії на нуль поверхні Землі. Можна також домовитися, що на поверхні Землі $E_n(0) = C_0$. Тоді C = C_0, а $E_n(z) = mgz + C_0$. У цьому випадку кажуть, що потенціальна енергія нормована на значення C_0 на поверхні Землі.

6.5 Енергія взаємодії

При введенні поняття потенціальної енергії для всіх розглянутих прикладів її наявність була зумовлена взаємодією тіл. Розглянемо приклад з силою тяжіння. Якщо тіло віддаляти на незначну відстань від поверхні Землі, то силу тяжіння у першому наближенні можна вважати постійною. При збільшенні відстані між тілами (Землею і досліджуваним тілом) сила тяжіння буде зменшуватися пропорційно квадрату відстані між центрами маси цих тіл. Виберемо систему координат так, щоб початок її знаходився в центрі Землі. Тоді сила тяжіння буде направленою вздовж радіуса Землі R, а її модуль буде залежати лише від відстані між центрами маси обох тіл. Щоб переконатися в тому, що ця сила є консервативною (або потенціальною) знайдемо елементарну роботу dA при переміщенні тіла на $d\vec{l}$.



Якщо досліджуване тіло має масу m, то діюча на нього сила, згідно із законом всесвітнього тяжіння, визначається за формулою

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}, \tag{6.27}$$

де M – маса Землі, $\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ - одиничний вектор. У обраній нами системі координат

знак (–) означає, що сила є протилежно направленою відносно осі OZ, тобто є направленою
до центру Землі. Тоді

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -G\frac{Mm}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \cdot d\vec{l} = -G\frac{Mm}{R^2} dlCos\left(\vec{R}, d\vec{l}\right) = -G\frac{Mm}{R^2} dR\,, \quad (6.28)$$

оскільки $\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = 1$, а $dlCos\alpha = dR$ (переміщення вздовж радіуса Землі).

Таким чином, елементарна робота визначається лише переміщенням вздовж радіуса, тобто залежить лише від однієї змінної R та від її диференціала. Тому повну роботу по переміщенню тіла з точки, що знаходиться на відстані R_1 від центра Землі в точку на відстані R_2, визначимо, інтегруючи формулу (6.28):

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \left(-GMm \cdot \frac{1}{R^2} \right) dR = -GMm \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -GMm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.29)$$

З виразу (6.29) видно, що сила тяжіння є потенціальною силою, оскільки її робота залежить лише від значень R_1 та R_2.

Вище для визначення роботи в потенціальному полі було доведено формулу (6.24)

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\left(E_{n_2} - E_{n_1}\right).$$

Порівнюючи вирази (6.29) та (6.24), легко можна знайти потенціальну енергію тіла масою m

$$-GMm\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\left(E_{n_2} - E_{n_1}\right),$$

звідки

$$-\frac{GMm}{R_1}+\frac{GMm}{R_2}=-E_{n2}+E_{n1}\text{, або } E_{n1}+\frac{GMm}{R_1}=E_{n2}+\frac{GMm}{R_2}.$$

Тобто

$$E_n(R)+\frac{GMm}{R}=Const.$$

Або інакше

$$E_n(R)=-\frac{GMm}{R}+Const. \tag{6.30}$$

Пронормуємо $E_n(R)$, виходячи з таких фізичних міркувань. Якщо тіло віддалити від Землі до нескінченності, то ніякої взаємодії не буде. Тоді розумною з фізичної точки зору буде така умова нормування

$$E_n(\infty)=0, \tag{6.31}$$

яка не є довільною, а враховує реальну фізичну сутність процесів, що відбуваються при взаємодії. Легко бачити, що при цьому *Const* = 0.

Якщо таку умову нормування прийняти, то тоді формула (6.30) набуває вигляду

$$E_n(R)=-\frac{GMm}{R}. \tag{6.32}$$

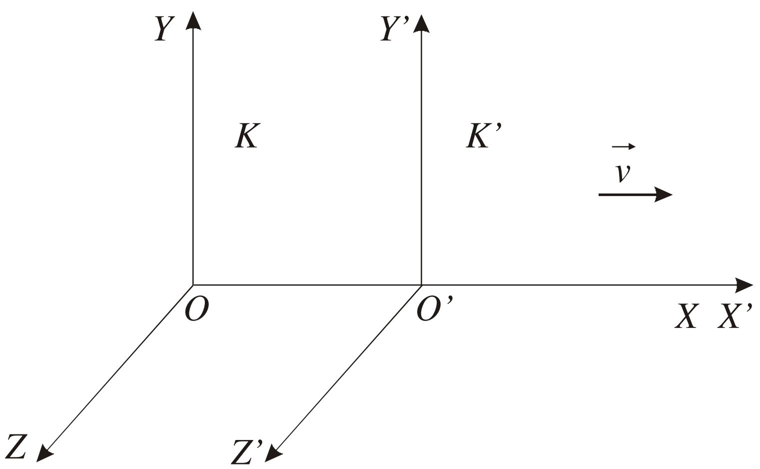
В загальному ж випадку, якщо прийнято умову нормування (6.31), формула для потенціальної енергії тіла, яке знаходиться у будь-якій точці B, запишеться так

$$E_n(B)=\int_B^{\infty}\vec{F}(\vec{R})d\vec{R}. \tag{6.33}$$

7 Інерціальні системи відліку. Принцип відносності

Розглядаючи питання про впровадження та перетворення систем координат, векторні і координатні методи описання руху, ми припускали, що маємо справу з точками однієї й тієї ж системи відліку. Причому всі дії виконувались лише геометрично, на основі прийнятого означення системи координат. У перетвореннях координат не брав участі такий важливий фізичний фактор, як час. В дійсності ж, у реальному світі всі тіла, з якими можуть бути пов'язані різні системи відліку, рухаються відносно одне одного. Якщо система координат пов'язана з деяким тілом, то це означає, що в такій системі відліку впроваджено свою систему координат і час у різних точках системи вимірюється зсинхронованими між собою годинниками, які в цих точках знаходяться в стані спокою. Питання про взаємозв'язок координат і часу різних систем відліку при їх відносному русі є фізичною задачею і не може бути розв'язаним лише геометрично. Лише у випадку, коли відносна швидкість різних систем відліку дорівнює нулю, тобто відносно одна одної вони знаходяться в стані спокою, задача може бути розв'язана геометрично, оскільки зникає різниця між системами відліку і всі такі системи можна сприймати як одну систему.

Розглянемо дві системи відліку: нерухому (позначимо її K) та рухому (K'), яка рухається відносно системи K прямолінійно поступально і рівномірно зі швидкістю $\vec{v}$. У кожній із систем відліку введемо прямокутну (декартову) систему координат. Тоді координати точок у нерухомій системі будуть визначатися трійкою чисел x, y, z, а в рухомій – відповідно x', y', z'.



Раніше ми виконували вимірювання координат і часу, вважаючи, що справедливою є геометрія Евкліда і припускаючи існування єдиного часу і можливості синхронування годинників. Якщо існування таких систем підтверджується досвідом, то тепер необхідно визначити метод знаходження цих систем відліку. Для цього будемо вивчати хід фізичних процесів у різних системах, які рухаються одна відносно одної.

Численні експерименти і досвід, набутий людством, дозволяють зробити наступний висновок:

У всіх системах відліку, які одна відносно одної рухаються поступально, прямолінійно і рівномірно, всі механічні явища відбуваються однаково.

Такі системи координат називають ***інерціальними***, оскільки в них виконується закон інерції Ньютона.

Вперше подібний висновок для механічних явищ був сформульований Галілео Галілеєм і за його ім'ям він дістав назву ***принципу відносності Галілея.*** Пізніше було доведено справедливість цього принципу і для електромагнітних явищ. Це дозволило узагальнити його для будь-яких фізичних явищ і назвати в загальному вигляді ***принципом відносності спеціальної теорії відносності (СТВ)***.

Необхідно зазначити, що хоча принцип відносності на сьогодні достатньо точно доведено для механічних та електромагнітних явищ, він все ж таки є постулатом, оскільки, по-перше, це ствердження має абсолютний характер, а перевірити його експериментально можна лише з деякою точністю на даному етапі розвитку експериментальної техніки і, по-друге, принцип відносності припускає однаковий характер перебігу будь-яких фізичних явищ в інерціальних системах відліку. Але на цей час відкрито далеко не всі фізичні явища і немає абсолютної впевненості у тому, що й інші явища, які будуть відкриті в майбутньому, підлягатимуть принципу відносності.

7.1 Перетворення Галілея

Нехай нерухома (K) і рухома (K') системи координат мають в момент часу $t = 0$ співпадаючі початки. Тоді в момент часу t початок системи K' знаходиться в точці $x = vt$ нерухомої системи K. Сутність перетворень Галілея полягає в тому, що вони припускають, що для координат і часу систем K і K' в будь-який момент часу існує таке співвідношення, яке було б між ними при умові їх взаємного спокою відносно одна одної в даний момент часу. Це означає, що перетворення координат зводяться до геометричних перетворень при одному і тому ж значенні часу:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \tag{7.1}$$

Ці формули мають назву ***перетворень Галілея.***

Якщо за нерухому взяти систему K', то в цьому випадку система K буде рухатись відносно системи K' зі швидкістю, яка дорівнює за модулем швидкості в попередньому випадку, але при цьому є протилежною за напрямком. Тоді перетворення Галілея матимуть вигляд:

$$x = x' + vt;\ \ y = y';\ \ z = z';\ \ t = t'. \tag{7.2}$$

Формули (7.1) і (7.2) одержано не шляхом розрахунків, а шляхом міркувань. Розрахунки приводять до аналогічних виразів. А це означає, що формули (7.1) і (7.2) не заперечують принципові відносності.

Якщо при перетворенні координат різні фізичні величини не змінюють їх числових значень, то це означає, що вони, незалежно від вибору системи координат, мають об'єктивні значення. Такі величини називають ***інваріантами перетворень.***

Розглянемо інваріанти перетворень Галілея.

7.1.1 Інваріантність довжини

Нехай в рухомій системі координат K' знаходиться стержень, координати кінців якого є x'_1, y'_1, z'_1 та x'_2, y'_2, z'_2. Тоді довжину цього стержня l' можна записати у вигляді

$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}\,. \tag{7.3}$$

При поступальному русі системи K' відносно системи K всі точки стержня будуть мати швидкість v. Знайдемо довжину стержня відносно нерухомої системи координат. Згідно з (7.1) в момент часу t_0 маємо:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - vt_0;\ \ y'_1 = y_1;\ \ z'_1 = z_1;\ \ t'_1 = t_0; \\ x'_2 = x_2 - vt_0;\ \ y'_2 = y_2;\ \ z'_2 = z_2;\ \ t'_2 = t_0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Тоді

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = x_2 - vt_0 - x_1 + vt_0 = x_2 - x_1; \\ y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1; \\ z'_2 - z' = z_2 - z_1. \end{cases} \tag{7.5}$$

Таким чином, за означенням $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, а з урахуванням (7.5) $l = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = l'$. А це означає, що довжина є інваріантною відносно перетворень Галілея.

7.1.2 Абсолютний характер поняття одночасності

В перетвореннях Галілея $t' = t$. Внаслідок цього в формулах (7.4) було записано $t'_1 = t_0$ і $t'_2 = t_0$. Тобто в той момент часу, коли фіксувались координати кінців стержня в системі K, годинники в обох точках системи K' показували один і той же час. Це означає, що події, одночасні в одній системі координат, є одночасними і в другій. Отже, незалежно від вибору системи координат, твердження про одночасність двох будь-яких подій має абсолютний характер.

7.1.3 Інваріантність інтервалу часу

Припустимо, що в рухомій системі K′ відбулися дві події: одна в момент часу t_1', інша в момент часу t_2'. Між цими подіями пройшов час $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Але згідно з (7.2) $t = t'$, тобто в нерухомій системі координат *К* між першою і другою подіями пройшов час

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t' = \Delta t' \qquad (8.6).$$

А це означає, що інтервал часу є інваріантою відносно перетворень Галілея.

7.1.4 Додавання швидкостей

Нехай у системі *K′* рухається матеріальна точка, координати якої від часу описуються такими залежностями:

$$x' = x'(t'); \; y' = y'(t'); \; z' = z'(t'). \qquad (7.7)$$

Тоді проекції швидкості на осі координат системи *K′* можуть бути записаними:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}; \; u_y' = \frac{dy'}{dt'}; \; u_z' = \frac{dz'}{dt'}. \qquad (7.8)$$

В системі *К* координатами точки є:

$$x(t) = x'(t') + vt'; \; y(t) = y'(t'); \; z(t) = z'(t'). \qquad (7.9)$$

А проекції швидкості на осі координат системи *К* будуть мати вигляд

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt} + v\dfrac{dt'}{dt} = \dfrac{dx'}{dt'} + v\dfrac{dt'}{dt'} = u_x' + v; \\ u_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{dy'}{dt'} = u_y'; \\ u_z' = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{dz'}{dt'} = u_z'. \end{cases} \qquad (7.10)$$

Формули (7.10) є формулами додавання швидкостей в класичній нерелятивістській механіці.

7.1.5 Інваріантність прискорення

Здиференцюємо вирази (7.10) за часом із урахуванням того, що $dt = dt'$.

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(x' + vt'\right) = \frac{d^2x'}{dt^2} + v\frac{d^2t'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} + v\frac{d^2t'}{dt'^2} = \\
= \frac{d^2x'}{dt'^2} + v\frac{d}{dt}\left(\frac{dt'}{dt'}\right) = \frac{d^2x'}{dt'^2} + v\frac{d}{dt}(1) = \frac{d^2x'}{dt'^2}; \\
\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2}; \\
\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2}.
\end{gathered} \tag{8.11}$$

Одержані вирази показують, що прискорення також є інваріантою відносно перетворень Галілея.

Питання для самостійного опрацювання

1. Історичний огляд розвитку поглядів на швидкість світла. Різні трактування швидкості світла.
2. Визначення швидкості тіла за Ремером.
3. Дослід Майкельсона-Морлі. Інтерпретація досліду в рамках уявлень про ефір.
4. Балістична гіпотеза та її неспроможність.
5. Несумісність сталості швидкості світла зі звичними уявленнями. Дослід Фізо як перше експериментальне свідчення неспроможності перетворень Галілея при високих швидкостях руху. Постулативний характер твердження про сталість швидкості світла.

8 Перетворення Лоренца

При достатньо високих швидкостях руху перетворення Галілея не відображають правильно того взаємозв'язку, який існує між координатами і часом в інерціальних системах, що рухаються одна відносно одної. Отже, необхідно знайти інші перетворення, які б не суперечили експериментальним даним. Ці перетворення (перетворення Лоренца) базуються на двох постулативних принципах (так званих постулатах спеціальної теорії відносності:

***1) принципові відносності*;**

2) принципові сталості швидкості світла

Перетворення Лоренца й покладено в основу ***спеціальної теорії відносності.***

8.1 Лінійність перетворення координат

У спеціальній теорії відносності швидкості не додаються за класичними формулами (див. 7.1.4). Внаслідок цього, час однієї системи координат буде виражатися не лише через час іншої системи координат, а буде залежати ще й від самих координат. Тому в самому загальному вигляді перетворення можна записати так:

$$\begin{aligned} x' &= \Phi_1(x, y, z, t); \\ y' &= \Phi_2(x, y, z, t); \\ z' &= \Phi_3(x, y, z, t); \\ t' &= \Phi_4(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Знайшовши вид функцій $\Phi_i(x, y, z, t)$, знайдемо і перетворення СТВ.

Необхідно зазначити, що в інерціальних системах координат головними властивостями простору є його ***однорідність*** та ***ізотропність.***

Ізотропність – незмінність властивостей за різними напрямками.

Однорідність – незмінність характеристик простору при переході від однієї точки до іншої.

Час також має властивість однорідності. Фізично це означає, що можливим є співіснування однаковості розвитку і зміни даної фізичної ситуації незалежно від того, в який момент часу ця ситуація склалася.

З усього зазначеного вище випливає, що перетворення (8.1) повинні бути лінійними.

Використовуючи вираз для повного диференціала, зміну координати x' можна записати

$$dx' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dt. \qquad (8.2)$$

Оскільки простір і час мають властивість однорідності, ці співвідношення повинні бути однаковими для всіх точок простору і для довільних моментів часу, тобто величини $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$ є постійними і не залежать від координат і часу. Тоді функцію Φ_1 можна записати так

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + A_5, \qquad (8.3)$$

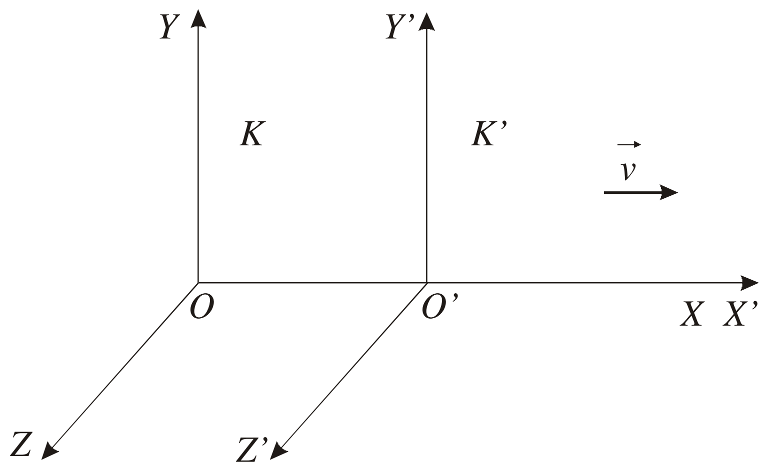
де A_i – постійні величини.

Таким чином, функція $\Phi_1(x, y, z, t)$ є лінійною відносно своїх аргументів.

Аналогічно можна довести й лінійність функцій Φ_2, Φ_3, Φ_4.

Враховуючи усе вище наведене, отримаємо перетворення Лоренца.

Нехай існують дві інерціальні системи відліку – нерухома (*K*) і рухома (*K′*). Припустимо, що деяка подія в системі *K* характеризується значенням координат і часу (x, y, z, t), а в системі *K′* – (x', y', z', t'), відповідно Згідно рисунку площина $y' = 0$ співпадає з площиною $y = 0$, а площина $z' = 0$ співпадає з площиною $z = 0$. А це означає, наприклад, що координати y і y' повинні дорівнювати нулю одночасно, незалежно від значень інших координат і часу. Це буде можливим лише у випадку, коли $y = \alpha y'$ (8.4) (де $\alpha = const$) внаслідок лінійності рівняння.



Оскільки системи *K* і *K′* - рівноправні, то перетворення $y' = \alpha y$ (8.5) буде оберненим при тому ж значенні α. Перемноживши (8.4) і (8.5), одержимо: $\alpha^2 = 1, \Rightarrow \alpha = \pm 1$. Для співнапрямлених осей $\alpha = +1$. Внаслідок цього одержуємо

$$y = y', \text{ або } \quad y' = y. \tag{8.6}$$

З аналогічних міркувань маємо

$$z = z', \text{ або } \quad z' = z. \tag{8.7}$$

Із формул (8.6) і (8.7) випливає, що значення y і z не залежать від x' і t', а значить і x' та t' не залежать від y і z. А це означає, що x і t є лінійними функціями лише від x' і t'.

З рисунка видно, що для точки O в системі K: $x = 0$, а в системі K': $x'=-vt'$. Отже, вираз $x' + vt'$ повинен дорівнювати нулю лише тоді, коли нулю дорівнює координата x. Щоб ця умова виконувалась лінійне перетворення повинно мати вигляд

$$x = \gamma(x' + vt'). \tag{8.8}$$

Навпаки, в системі K' точка O' має координату $x' = 0$, а в системі K: $x = vt$. Тоді вираз $(x - vt)$ буде дорівнювати нулю лише тоді, коли $x' = 0$. Але для цього повинно виконуватися співвідношення

$$x' = \gamma(x - vt). \tag{8.9}$$

Оскільки системи K і K' рівноправні, то коефіцієнт γ в обох випадках є однаковим.

У подальшому скористуємося принципом сталості швидкості світла. Нехай у момент початку відліку точки O і O' співпадають. Припустимо, що в момент часу $t = t' = 0$ в напрямку осей x і x' посилається світловий сигнал, який спричиняє спалах на екрані. Цей спалах в системі K характеризується координатою x і часом t, а в системі K' – координатою x' і часом t'. Але оскільки $c = const$, то

$$x = ct; \;\; x' = ct'. \tag{8.10}$$

Підставимо (8.10) в (8.8) і (8.9). Тоді

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t';$$
$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t$$

Перемноживши останні рівняння і спростивши результат, маємо

$$c^2 tt' = \gamma^2 (c + v)(c - v)tt', \quad \text{або} \quad c^2 = \gamma^2 \left(c^2 - v^2\right).$$

Звідки

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}, \quad \text{або} \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \ \Rightarrow \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Підставивши знайдене значення γ у формули (8.8) і (8.9), отримаємо:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8.11}$$

Щоб знайти формули перетворення часу, виключимо у формулах (8.11) координату x і знайдемо t:

$$x' = \frac{\dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

або

$$x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - vt \Rightarrow t = \frac{x'}{v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{vt'}{v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} =$$

$$= \frac{x' + vt' - x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt' - x' + \frac{x'v^2}{c^2}}{v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{vt' + \frac{v^2}{c^2} x'}{v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

тобто

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8.12}$$

Аналогічно, виключивши з (8.11) x', маємо:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (8.13)$$

Отже, отримано низку формул, які мають назву перетворень Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (8.14,\ \text{а})$$

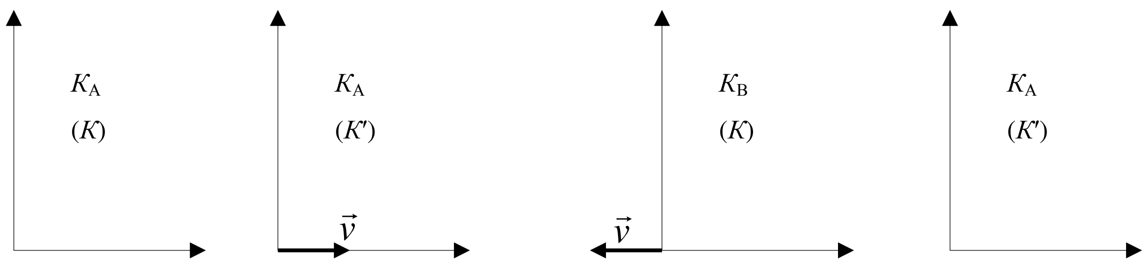
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (8.14,\ \text{б})$$

При швидкостях, набагато менших від швидкості світла, тобто при $\frac{v}{c} << 1$, величинами $\frac{v}{c}$ можна знехтувати. В цьому випадку перетворення Лоренца зводяться до перетворень Галілея.

9 Наслідки перетворень Лоренца

9.1 Відносність одночасності і причинність

Розглянемо інерціальні системи відліку K_{A} і K_{B} і припустимо, що в системі K_{A} в точках з координатами x_1^A і x_2^A ($x_2^A > x_1^A$) в момент часу t^A відбуваються дві одночасні події. Знайдемо різницю моментів часу t_2^B і t_1^B, в які будуть зареєстровано ці події в системі K_{B}.



Якщо система K_{B} рухається вправо відносно системи K_{A}, то її треба вважати системою K', а систему K_{A} – системою K і користуватися формулами (8.14,а). У цьому випадку

$$t_1^B = \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x_1^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2^B = \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x_2^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

тоді

$$t_2^B - t_1^B = \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x_2^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x_1^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x_2^A - t_A + \frac{v}{c^2} x_1^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{v}{c^2}\left(x_2^A - x_1^A\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} < 0.$$

Якщо ж система K_{B} рухається відносно системи K_{A} вліво, то в цьому випадку систему K_{A} треба вважати системою K', а K_{B} – системою K і користуватися формулами (8.14,б). Тоді

$$t_1^B = \frac{t_A + \frac{v}{c^2} x_1^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2^B = \frac{t_A + \frac{v}{c^2} x_2^A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

Відповідно

$$t_2^B - t_1^B = \frac{\frac{v}{c^2}\left(x_2^A - x_1^A\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 0.$$

Таким чином, у будь-якій системі, крім K_A, події будуть ***неодночасними***, до того ж в одних системах друга подія буде відбуватися пізніше за першу ($t_2^B > t_1^B$), а в інших - раніше, тобто $t_2^B < t_1^B$.

Необхідно підкреслити, що одержаний результат має відношення лише до причинно не пов'язаних між собою подій, оскільки події, що відбуваються одночасно в різних точках простору, не можуть впливати одна на одну.

Якщо ж між подіями існує причинний зв'язок, то подія-причина в усіх системах відліку відбувається раніше за подію-наслідок (наприклад, в жодній системі син не може народитися раніше від батька).

Щоб причинно-наслідковий зв'язок мав об'єктивний характер, тобто не залежав від вибору системи координат, треба щоб ніякі матеріальні дії, які здійснюють фізичний зв'язок подій, що відбуваються в різних точках, не могли передаватися зі швидкістю, більшою за швидкість світла.

9.2 Визначення довжини рухомого тіла в СТВ

Припустимо, що в системі K' у стані спокою знаходиться стержень довжиною l_0, розташований вздовж напрямку осі x'. Координати кінців стержня будуть відповідно x_1' і x_2'. Тоді $l_0 = x_2' - x_1'$. Довжину l_0 позначено так тому, що вона позначає довжину стержня в стані спокою, або іншими словами, вона визначає довжину стержня у тій системі координат, у якій він знаходиться у стані спокою. Нехай відносно нерухомої системи K довжина стержня буде $l = x_2 - x_1$.

Згідно з перетвореннями Лоренца для часу t_0 маємо:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тоді

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ або } l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Тобто довжина стержня, який рухається, є меншою від довжини стержня в стані спокою відносно системи *K*, якщо стержень є розташованим вздовж напрямку осі x'. Таке явище називається ***лоренцовим або фітцжеральдовим скороченням.***

Якщо ж стержень розташувати перпендикулярно до напрямкуйого руху, то розміри стержня не зміняться.

Приклади:

1) діаметр Землі при швидкості руху 30 км/с скорочується приблизно на 6 см.
2) ефект поздовжнього скорочення стає помітним лише тоді, коли швидкість руху наближається до швидкості світла (якщо $v = 0{,}85c$, то $l' = 0{,}5l_0$).

9.3 Уповільнення ходу годинника, що рухається

Нехай в системі K' в одній і тій же точці з координатою x' відбуваються в момент часу t_1' і t_2' дві події. В системі K' ці події розділені між собою проміжком часу $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Знайдемо проміжок часу Δt між цими подіями в системі *K*. Для цього в системі *K* визначимо моменти часу t_1 і t_2, які відповідають моментам часу t_1' і t_2' системі K', і знайдемо їх різницю. Тоді, скориставшись перетвореннями Лоренца, можна записати

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Звідси

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{або} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.1}$$

Якщо події відбуваються з однією і тією ж матеріальною точкою, яка знаходиться у стані спокою в системі *K*′, то $\Delta t' = t_2' - t_1'$ є проміжком часу, що вимірюється годинником, який є нерухомим відносно обраної точки і який рухається разом з нею відносно системи *K* зі швидкістю $\vec{v}$. Час, відрахований за годинником, що рухається разом з точкою, називається ***власним часом*** цієї точки і позначається буквою τ, тобто $\Delta t' = \tau$. Величина $\Delta t = t_2 - t_1$ – є проміжком часу між цими ж подіями, який відраховано за годинником системи *K*. Тоді формулу (9.1) можна записати

$$\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{9.2}$$

З формули (9.2) випливає, що власний час є меншим за час, який відрахований за годинником, що рухається відносно точки (оскільки можна вважати, що годинник, який знаходиться у стані спокою в системі *K*, рухається відносно точки зі швидкістю $-\vec{v}$).

При розгляді руху матеріальної точки у довільній системі, власний час вимірюється за годинником системи, у якій точка знаходиться в стані спокою. А це означає, що власний час є ***інваріантою***, тобто має одне і те ж значення у всіх інерціальних системах відліку.

Якщо спостерігач знаходиться в системі *K*, то Δt є для нього проміжком часу, відрахованим за нерухомим годинником, а τ - проміжком часу, відрахованим за годинником, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$. Але оскільки $\tau < \Delta t$, то можна стверджувати, що годинник, який рухається, працює повільніше, ніж той, що знаходиться у стані спокою.

9.4 Перетворення і додавання швидкостей

В системі *K* проекції швидкості на координатні осі мають вид:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}\,. \tag{9.3}$$

А в системі *K*′:

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'};\ v_y' = \frac{dy'}{dt'};\ v_z' = \frac{dz'}{dt'}\,. \tag{9.4}$$

Знайдемо співвідношення, які пов’язують “нештриховані” компоненти швидкості зі “штрихованими”. Для цього скористуємось перетвореннями Лоренца, які запишемо у вигляді:

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad t = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (9.5)$$

Поділимо першу рівність на четверту у формулах (9.5):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}.$$

Поділимо другу і третю рівність на четверту:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\frac{dt' + \frac{v}{c^2}dy'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2}dy'} = \frac{\frac{dy'}{dt'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dy'}{dt'}} = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_y v}{c^2}}.$$

Аналогічно, $\frac{dz}{dt} = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_z v}{c^2}}$.

В результаті отримуємо:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_y v}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_z v}{c^2}}. \qquad (9.6)$$

Формули (9.6) і є формулами додавання швидкостей в СТВ. Зворотні перетворення згідно з принципом відносності одержують шляхом заміни "штрихованих" величин на "нештриховані" і швидкості $\vec{v}$ на $-\vec{v}$.

Отримані формули показують, що при додаванні швидкостей ніколи не можна отримати швидкість більшу, ніж швидкість світла.

Наприклад, нехай $v'_x = c$; $v'_y = 0$; $v'_z = 0$. Тоді

$$v_x = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c; \;\; v_y = 0; \;\; v_z = 0.$$

9.5 Перетворення прискорень

Нехай в системі K' матеріальна точка має прискорення, проекціями на осі координат якого є відповідно a'_x; a'_y; a'_z, а миттєва швидкість її в цей момент дорівнює нулю. Тобто поведінка точки характеризується такими рівняннями:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = a'_x; \; \frac{dv'_y}{dt'} = a'_y; \frac{dv'_z}{dt'} = a'_z; \;\; v'_x = v'_y = v'_z = 0. \tag{9.7}$$

Тоді в системі K проекції швидкостей складатимуть відповідно $v'_x = 0;\; v'_y = 0;\;\; v'_z = 0$.

А проекції прискорення

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x; \; \frac{dv_y}{dt} = a_y; \frac{dv_z}{dt} = a_z; \tag{9.8}$$

Величини dv_x; dv_y; dv_z визначимо із співвідношень (9.6). Крім того, рівності нулю функцій v'_x; v'_y; v'_z будемо вважати можливими лише після диференціювання. Тоді з формул (9.6) маємо:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1+\frac{v'_{vx}}{c^2}};$$

$$dv_x = \frac{dv'_x\left(1+\frac{v'_x v}{c^2}\right) - \frac{v}{c^2}\left(v'_x + v\right)dv'_x}{\left(1+\frac{v'_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{dv'_x}{1+\frac{v'_x v}{c^2}} - \frac{\frac{v}{c^2}\left(v'_x + v\right)dv'_x}{\left(1+\frac{v'_x v}{c^2}\right)^2} =$$

$$\frac{dv'_x}{\left(1+\frac{v'_x v}{c^2}\right)^2}\left(1+\frac{v'_x v}{c^2} - \frac{v'_x v}{c^2} - \frac{v}{c^2}\right) = \frac{1-\frac{v}{c^2}}{\left(1+\frac{v'_x v}{c^2}\right)^2} dv'_x;$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v'_y v}{c^2}};$$

$$dv_y = \frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\cdot dv'_y\cdot\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)-\dfrac{v'_y v}{c^2}\cdot\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\cdot dv'_y}{\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)^2}=$$

$$\frac{dv'_y}{\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)^2}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{v'_y v}{c^2}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{v'_y v}{c^2}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)^2}\cdot dv'_y.$$

Абсолютно аналогічно:

$$dv_z = \frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\left(1+\dfrac{v'_z v}{c^2}\right)^2}\cdot dv'_z.$$

З перетворень Лоренца відомо, що $t = \dfrac{t'+\dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Отже,

$$dt = \frac{dt'+\dfrac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\dfrac{v}{c^2}\cdot\dfrac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\cdot dt' = \frac{1+\dfrac{v}{c^2}\cdot v'_x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\cdot dt'.$$

Тоді

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\dfrac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1+\dfrac{v'_x v}{c^2}\right)^2}}{\dfrac{\left(1+\dfrac{v'_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} \cdot \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\dfrac{v'_x v}{c^2}\right)^3} \cdot a'_x .$$

Враховуючи, що $v'_x = 0$, маємо

$$a_x = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \cdot a'_x . \qquad (9.9)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)^2}}{\dfrac{\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} \cdot \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{v'_y v}{c^2}\right)^3} \cdot a'_y$$

Оскільки $v'_y = 0$, то

$$a_y = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot a'_y \; . \qquad (9.10)$$

Абсолютно аналогічно отримуємо

$$a_z = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot a'_z \; . \qquad (9.11)$$

9.6 Релятивістське рівняння руху

Якщо розглянути шкільний експеримент з візками, які зіштовхуються, то при збільшенні модуля швидкості візків величина $\frac{F}{a} \neq const$ і буде залежати від величини швидкості. Проте подібні ефекти будуть помітними лише при дуже високих швидкостях (десятки і сотні тисяч кілометрів за секунду).

Так проводячи досліди на циклотроні при вивченні руху протона по круговій орбіті, було показано, що

$$\frac{F_n}{a_n} = \frac{const}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \frac{F_\tau}{a_\tau} = \frac{const}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}. \tag{9.12}$$

При $v << c$ формули (9.12) переходять у відомі формули II закону Ньютона. Це означає, що стала величина у формулах (9.12) дорівнює масі тіла m_0, яка є мірою інертності тіла при нульовій швидкості. Ця маса m_0 називається масою спокою. Тоді формули (9.12) можна записати так:

$$\frac{F_n}{a_n} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \frac{F_\tau}{a_\tau} = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}. \tag{9.13}$$

Нехай тіло рухається по криволінійній траєкторії. У цьому випадку діюча на нього сила $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$.

$$\vec{F}_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt}; \qquad \vec{F}_n = \vec{n} \cdot \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Тоді

$$\vec{F} = \vec{\tau} \cdot \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} + \vec{n} \cdot \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Спростимо останній вираз, враховуючи, що $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \cdot \frac{\vec{n}}{R}$.

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (9.14)$$

Крім того, $\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

Після цього вираз (9.14) набуває вигляду:

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v\vec{\tau}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

де $v\vec{\tau} = \vec{v}$ – швидкість тіла.

Таким чином, релятивістське рівняння руху має вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Або

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F};$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$; $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Величину m називають релятивістською масою, m_0 – масою спокою, $\vec{p}$ - релятивістським імпульсом.

10 Неінерціальні системи відліку

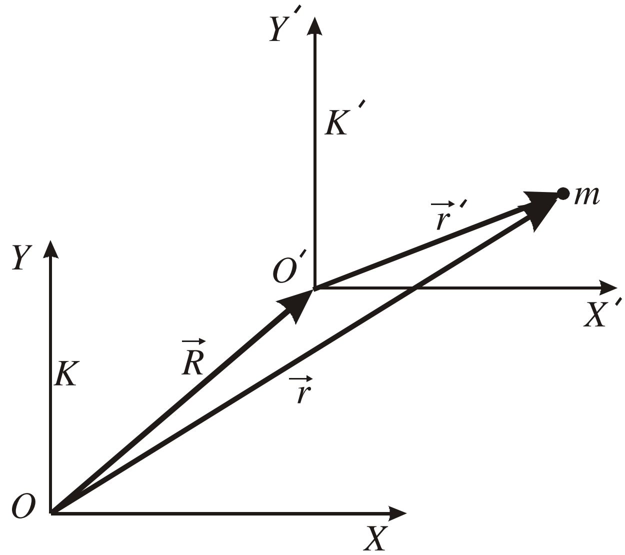
Неінерціальною системою відліку називають таку систему, яка рухається прискорено відносно обраної ***інерціальної*** системи. Обмежимося розглядом рухів з невисокими швидкостями. Це дасть змогу користуватися перетвореннями Галілея.

10.1 Сили інерції

Закони Ньютона виконуються лише в інерціальних системах відліку. В неінерціальних вони не виконуються.

Розглянемо тіло (матеріальну точку), яке в інерціальній системі відліку знаходиться у стані спокою. В цьому випадку на тіло не діють ніякі сили, тобто $\vec{F}=0$. В неінерціальній же системі, яка рухається відносно інерціальної з прискоренням, тіло буде мати не рівне нулеві прискорення $\vec{a}$. Але оскільки $\vec{F}=0$, то рівність $\vec{F}=m\vec{a}$ не виконується. Як бути у цьому випадку? Як користуватися законами Ньютона в неінерціальних системах? Ці питання і будуть розглядатись при вивченні даної теми.

Нехай маємо дві системи відліку – інерціальну *K* і неінерціальну *K*′, яка рухається відносно *K* з прискоренням, і нехай вектор $\vec{R}$ визначає положення початку координат системи *K*′ відносно системи *K*, а $\vec{r}$ та $\vec{r}\,'$ є радіусами-векторами матеріальної точки в системах *K* і *K*′, відповідно.



Зображені на рисунку вектори можна зв’язати співвідношенням

$$\vec{r}=\vec{R}+\vec{r}\,'. \tag{10.1}$$

Здиференцюємо вираз (10.1) двічі за часом

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}. \qquad (10.2)$$

Введемо позначення:

$\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ - прискорення точки в системі *K*;

$\vec{w} = \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ - прискорення початку *O′* системи *K′* відносно системи *K*.

Похідна $\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}$ обчислюється спостерігачем, який знаходиться в системі *K′*. Якщо система *K′* рухається відносно системи *K* поступально, то $\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \vec{a}\,'$, і співвідношення (10.2) запишеться в вигляді:

$$\vec{a} = \vec{w} + \vec{a}\,'. \qquad (10.3)$$

Але система *K′* окрім поступального руху може виконувати ще й обертовий рух з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. У цьому випадку похідна $\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}$ окрім прискорення $\vec{a}\,'$ точки в системі *K′* має ще й доданки, до складу яких множниками входять або кутова швидкість $\vec{\omega}$, або її похідні. Це зумовлено тим, що $\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}$ у формулі (10.2) є похідною, яка обчислюється спостерігачем, розташованим у системі *K*, в той час як $\vec{a}\,'$ є другою похідною за часом від $\vec{r}\,'$, обчисленою спостерігачем, який обертається разом із системою *K′*. Вектор $\vec{r}\,'$ поводить себе в обох системах по різному.

Помножимо рівність (10.3) на масу матеріальної точки *m*:

$$m\vec{a} = m\vec{w} + m\vec{a}\,'. \qquad (10.4)$$

Але $m\vec{a} = \vec{F}$, де $\vec{F}$ - сила, з якою на матеріальну точку діють інші точки. Тоді

$$\vec{F} = m\vec{w} + m\vec{a}\,' \quad \text{або} \quad m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\vec{w}. \qquad (10.5)$$

Таким чином, відносно системи *K′* матеріальна точка поводить себе так, ніби крім “реальної” сили $\vec{F}$ на неї діє ще й додаткова, “фіктивна” сила

$\vec{F}_{in} = -m\vec{w}$. Ця сила називається ***силою інерції.*** Фіктивність сили інерції треба розуміти так: не існує тіл, взаємодією яких було б зумовлено виникнення цієї сила. У неї немає “партнера”, який повинен бути згідно з III законом Ньютона. Виникнення сили інерції зумовлено лише неінерціальністю тієї системи відліку, у якій розглядаються механічні явища.

Тоді рівняння (10.5) можна записати:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}. \tag{10.6}$$

Таке рівняння, яке має місце в неінерціальній системі відліку, за зовнішнім виглядом є аналогічним рівнянню другого закону Ньютона. А це означає, що ввівши поняття сил інерції, можна описувати рух як в інерціальних, так і в неінерціальних системах відліку за допомогою одних і тих же рівнянь руху. В цьому й полягає зміст введення сил інерції.

Щоб описати рух тіла в неінерціальній системі відліку за допомогою рівняння (10.6), покажемо спосіб знаходження сил інерції. Для цього запишемо рівняння руху точки в інерціальній та неінерціальній системах відліку:

$$\begin{cases} m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}; \\ m\vec{a} = \vec{F} \end{cases}, \tag{10.7}$$

де $\vec{a}'$ і $\vec{a}$ - прискорення в неінерціальній та в інерціальній системах відліку, відповідно. Із рівнянь (10.7) випливає

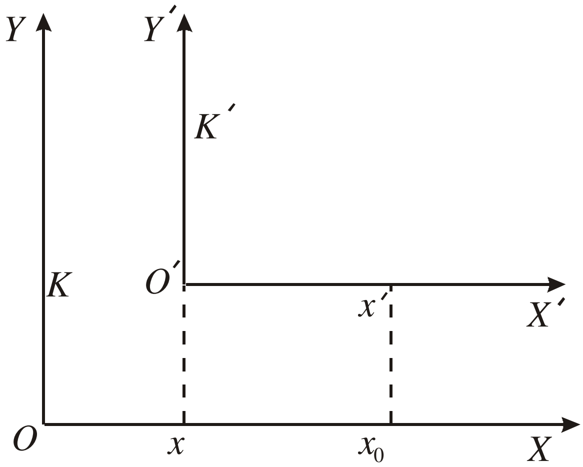
$$\vec{F}_{in} = m(\vec{a}' - \vec{a}). \tag{10.8}$$

Прискорення $\vec{a}$ відносно інерціальної системи відліку називають ***абсолютним***, а прискорення $\vec{a}'$ відносно неінерціальної системи відліку – ***відносним***. З формули (10.8) безпосередньо випливає, що сили інерції існують лише в неінерціальних системах відліку.

10.2 Неінерціальні системи відліку, що рухаються прямолінійно і поступально

Нехай неінерціальна система *K′* рухається відносно інерціальної системи *K* прямолінійно і поступально. В цьому випадку перетворення координат мають вигляд:

$$x = x_0 + x'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'.$$



Здиференціювавши ці перетворення за часом, маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt} \quad \text{або} \quad v = v_0 + v', \tag{10.9}$$

де $\dfrac{dx}{dt} = v$ - абсолютна швидкість;

$\dfrac{dx_0}{dt} = v_0$ - переносна швидкість;

$\dfrac{dx'}{dt} = v'$ - відносна швидкість.

Здиференціювавши рівняння (10.9) ще раз за часом, отримуємо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \frac{dv'}{dt} \quad \text{або} \quad a = a_0 + a', \tag{10.10}$$

де $\dfrac{dv}{dt} = a$ - абсолютне прискорення;

$\dfrac{dv_0}{dt} = a_0$ - переносне прискорення;

$\dfrac{dv'}{dt} = a'$ - відносне прискорення.

Тоді, згідно з (10.8), вираз для сил інерції в неінерціальній системі, що рухається прямолінійно і поступально, буде мати вигляд

$$\vec{F}_{in} = m(a' - a) = -ma_0 \quad \text{або} \quad \vec{F}_{in} = -ma_0. \tag{10.11}$$

З останнього виразу легко бачити, що сила інерції є направленою протилежно до переносного прискорення неінерціальної системи відліку.

10.3 Невагомість. Гравітаційна та інертна маси. Принцип еквівалентності

Розглянемо вільно падаючу неінерціальну систему відліку. У ній сили інерції повністю компенсують дію сили тяжіння і рух відбувається так, начебто не існує ані сил інерції, ані сил тяжіння. Внаслідок цього настає так званий стан невагомості (стан невагомості в земних умовах досягається для тренування льотчиків та космонавтів).

Причиною стану невагомості при вільному падінні є рівність між ***інертною*** та ***гравітаційною*** масами тіла. ***Інертна*** маса характеризує інертні властивості тіла, а ***гравітаційна*** маса – силу, з якою тіла притягуються одне до одного.

На сьогодні немає ніякого критерію, який би стверджував про пропорційність гравітаційної та інертної мас. Але спробуємо феноменологічно довести, що ці маси пропорційні одна одній.

Нехай гравітаційна маса Землі є $M_Г$, а маса деякого тіла - $m_Г$. Тоді модуль сили, що діє на це тіло з боку Землі на її поверхні, дорівнює

$$F = G \cdot \frac{m_Г M_Г}{R^2}, \tag{10.12}$$

де G - гравітаційна стала, R - радіус Землі.

Якщо інертну масу тіла позначити через m, то під дією сили (10.12) тіло набуває прискорення, модуль якого складає

$$g = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{M_Г}{R^2} \cdot \frac{m_Г}{m} = const \cdot \frac{m_Г}{m}. \tag{10.13}$$

Оскільки прискорення g для всіх тіл біля поверхні Землі є однаковим, то $m_Г \sim m$. Внаслідок пропорційності $m_Г$ та m (і їх рівності) при вільному падінні сили інерції та сили тяжіння будуть компенсувати одна одну.

На цей час рівність $m_Г$ і m доведено з точністю до 10^{-12}, тобто на сьогодні відомо, що $\frac{m_Г - m}{m_Г} \le 10^{-12}$.

З рівності гравітаційної та інертної мас випливає і такий, очевидний для механічних явищ, наслідок: ***якщо дана система відліку знаходиться в рівноприскореному прямолінійному русі відноскно інерціальної системи відліку, у якій поля тяжіння відсутні (за означенням), то механічні явища у такій системі відбуваються так, ніби існує поле тяжіння, у якому прискорення вільного падіння дорівнює прискоренню даної системи відліку.***

Поширення цього твердження на всі фізичні явища називається ***принципом еквівалентності***, який можна сформулювати ще й так:

У будь-якій системі відліку наявність прискорення цієї системи не відрізняється від присутності відповідного поля тяжіння.

10.4 Червоне зміщення

Згідно з принципом еквівалентності поле тяжіння повинно впливати і на світло, змінюючи його довжину хвилі (або частоту).

Нехай з деякої точки на поверхні Землі вертикально випромінюється світло з частотою ω. Розглянемо, якою буде частота цього випромінювання на висоті h над поверхнею Землі.

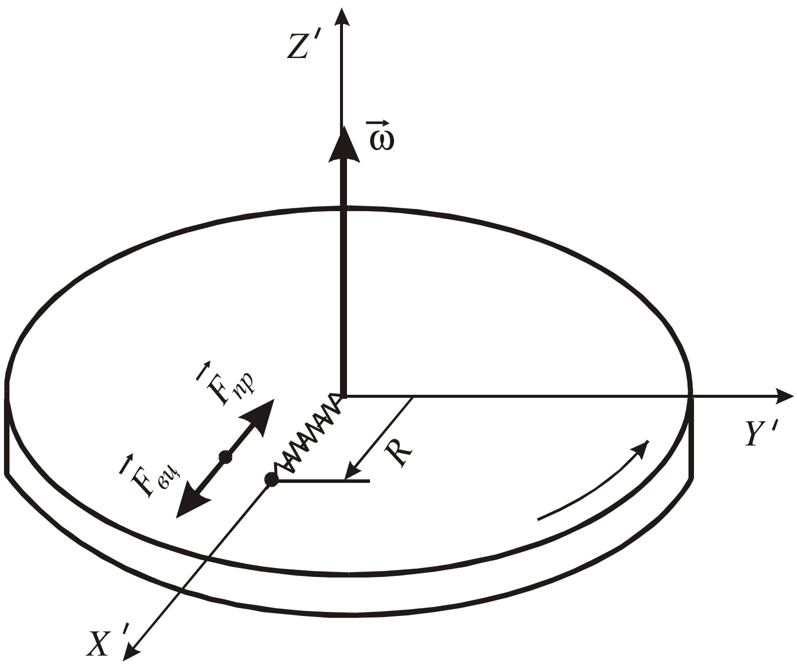
Припустимо, що експеримент відбувається в системі відліку, яка вільно падає в однорідному полі тяжіння. Сили в такій системі відсутні і всі процеси, що відбуваються в ній, будуть ідентичні процесам, які відбуваються в інерціальній системі. Тому частота змінюватися не буде. А значить і спостерігач, який знаходиться у цій системі в стані спокою не помітить зміни частоти на висоті h.

Зв'яжемо тепер систему координат із Землею. Нехай у цій системі вільно падає неінерціальна система відліку. Припустимо, що в момент випускання променя в деякій точці O швидкість цієї системи дорівнює нулю, а прискорення дорівнює g. За час $\Delta t = h/c$ (c – швидкість світла) промінь досягне висоти h. Система ж відліку набуває швидкості $v = g\Delta t = gh/c$. Тоді внаслідок ефекту Доплера, спостерігач, що знаходиться у цій системі на висоті h, повинен побачити промінь світла більшої частоти, ніж у точці O на величину $\Delta\omega = \omega \cdot \left(v/c\right)$. Проте зміна частоти в неінерціальній системі не помічалась. Це означає, що при поширенні світла від точки O на висоту h насправді відбулося зменшення частоти світла на величину $\Delta\omega = -\dfrac{\omega g h}{c^2}$. Якщо ми досліджували промінь світла у видимій частині спектра, то це означає, що відбувся зсув відповідної частоти у бік червоного кольору. Тому ефект зменшення частоти світла при поширенні його проти сил тяжіння називається ***червоним зміщенням.*** При різниці висот у 10 м величина зміщення мізерна: $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-15}$.

11 Неінерціальні системи відліку, що обертаються

11.1 Відцентрова сила інерції

Нехай неінерціальна система K' обертається відносно інерціальної системи K з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ при відсутності поступальної складової. При цьому сама система K' нехай пов'язана з диском, що обертається.



Закріпимо на поверхні диска радіальну направляючу, по якій може рухатися кулька, яка зв'язана з віссю обертання диска пружиною.

При обертанні диска кулька починає деформувати пружину і вона розтягується до тих пір, доки сила пружності $\vec{F}_{пр}$ не стане рівною добуткові маси кульки m на її нормальне прискорення $\vec{a}_n$, тобто $\vec{F}_{пр} = m\vec{a}_n$. При цьому $\vec{a}_n = -\omega^2\vec{R}$, де $\vec{R}$ - вектор, проведений від центра диска до кульки, а $\left|\vec{R}\right|$ - відстань кульки від осі обертання системи K'. Отже,

$$\vec{F}_{пр} = -m\omega^2\vec{R}. \qquad (11.1)$$

Відносно системи K', зв'язаної з диском, кулька знаходиться в стані спокою. Формально це можна пояснити тим, що окрім сили пружності пружини $\vec{F}_{пр}$ в системі K' на кульку діє ще й сила інерції $\vec{F}_{вц}$, яка є рівною за модулем і протилежною за напрямком векторові $\vec{F}_{пр}$, тобто вона є направленою вздовж вектора $\vec{R}$:

$$\vec{F}_{вц} = m\omega^2\vec{R} \tag{11.2}$$

Визначену за допомогою формули (11.2) силу називають ***відцентровою силою інерції.*** Ця сила виникає в системах відліку, які обертаються і не залежить від того знаходиться тіло у цій системі в стані спокою, чи рухається відносно неї зі швидкістю $\vec{v}'$. Такий висновок випливає з того, що $\vec{v}'$ не входить до формули (11.2).

Приклад. Землю можна розглядати як кулю, що обертається. Внаслідок цього, оцінюючи поведінку тіл у системах відліку, зв'язаних із Землею, при точних розрахунках необхідно враховувати й відцентрову силу інерції. Максимальне значення цієї сили буде на екваторі, оскільки тут $R = R_{\max} = 6{,}38\cdot 10^6$ м. Знаючи, що за добу (86400 с) Земля повертається на кут 2π, можна розрахувати її кутову швидкість

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\ {рад}/{с}\ .$$

Тоді модуль відцентрової сили, діючої на екваторі на тіло масою 1 кг, дорівнює

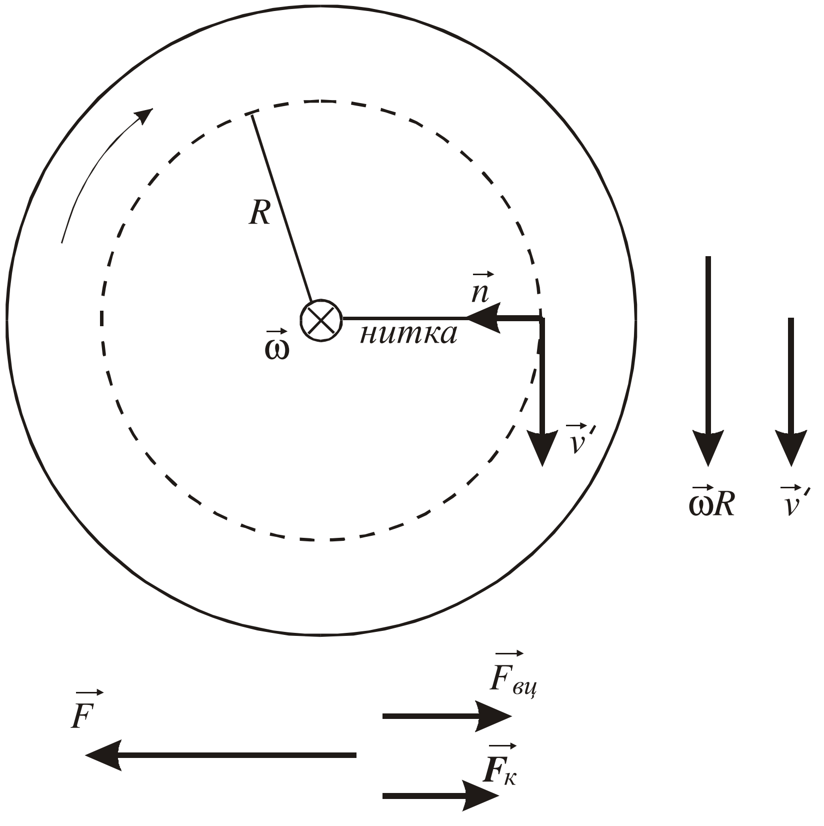
$$\vec{F}_{вц} = 1{,}00\cdot\left(7{,}27\cdot 10^{-5}\right)^2\cdot 6{,}38\cdot 10^6 = 0{,}0337\ \text{(Н)},$$

що складає приблизно 1/291 частину від величини сили тяжіння. Таке значення сили $\vec{F}_{вц}$ вказує на те, що в ряді випадків нею можна знехтувати.

11.2 Сила Коріоліса

Нехай система K' зв'язана з диском, який обертається відносно інерціальної системи відліку, і нехай кутова швидкість диску є $\vec{\omega}$. Припустимо, що по колу радіуса R рухається прив'язана до вісі ниткою матеріальна точка з постійною за модулем швидкістю $\vec{v}'$ відносно диска (у попередньому випадку матеріальна точка була нерухомою).

При обертанні диска величина лінійної швидкості точок кола буде дорівнювати ωR. Тоді швидкість $\vec{v}$ відносно нерухомої системи відліку (абсолютна швидкість) буде мати модуль $v = v' + \omega R$.



Тому прискорення матеріальної точки в нерухомій системі відліку можна записати у вигляді:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n} = \frac{(v' + \omega R)^2}{R}\cdot\vec{n} = \frac{v'^2}{R}\cdot\vec{n} + 2v'\omega\cdot\vec{n} + \omega^2 R\cdot\vec{n}\,, \qquad (11.3)$$

де $\frac{v'^2}{R}\cdot\vec{n} = \vec{a}'_n$ – прискорення точки відносно диска (тобто відносно системи, що обертається). Добуток маси m точки на $\vec{a}_n$ дає силу натягу нитки $\vec{F}$. Тоді, домноживши вираз (11.3) на масу точки m, одержимо

$$\vec{F} = m\vec{a}'_n + m\omega^2 R\cdot\vec{n} + 2mv'\omega\cdot\vec{n}\,. \qquad (11.4)$$

Звідки

$$m\vec{a}'_n = \vec{F} - m\omega^2 R\cdot\vec{n} - 2mv'\omega\cdot\vec{n}\,. \qquad (11.5)$$

Отже, спостерігач, який знаходиться на поверхні диска, повинен зробити висновок, що крім “реальної” сили $\vec{F}$ на точку діють дві додаткові сили, які направлені від осі обертання. Перша з них дорівнює $-m\omega^2 R\cdot\vec{n}$ і є відцентровою силою інерції; тобто $\vec{F}_{вц} = -m\omega^2 R \cdot \vec{n}$, оскільки $-R \cdot \vec{n} = \vec{R}$ - вектору, проведеному від осі обертання до обраної точки. Другу додаткову силу можна записати у вигляді

$$\vec{F}_k = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}. \tag{11.6}$$

Дійсно, модуль векторного добутку $\vec{v}' \times \vec{\omega}$ дорівнює $|\vec{v}'| \cdot |\vec{\omega}|$, оскільки кут між векторами $\vec{v}'$ і $\vec{\omega}$ є прямим. Напрямок же цього добутку є протилежним до напрямку вектора $\vec{n}$.

Враховуючи вищесказане, формулу (11.5) можна записати так:

$$m\vec{a}_n' = \vec{F} + \vec{F}_{вц} + \vec{F}_k. \tag{11.7}$$

Визначену співвідношенням (11.6) силу називають ***силою Коріоліса.*** Формулу (11.6) одержано для випадку, коли вектор швидкості точки є направленим по дотичній до кола з центром на осі обертання системи *K'*. Зміна напрямку швидкості $\vec{v}'$ по відношенню до осі обертання призведе до аналогічного результату. Крім того, з формули (11.6) випливає, що в тому випадку, коли точка рухається в неінерціальній системі паралельно осі обертання (тобто, коли $\vec{v}' \uparrow\uparrow \vec{\omega}$) сила Коріоліса не виникає.

За означенням векторного добутку результуючий вектор є перпендикулярним до двох інших. Тоді з виразу (11.6) безпосередньо маємо два важливих висновки:

1. ***Сила Коріоліса є перпендикулярною до вектора $\vec{\omega}$, тобто вона завжди розташована в площині, перпендикулярній до осі обертання неінерціальної системи відліку.***
2. ***Сила Коріоліса є перпендикулярною до швидкості $\vec{v}'$ і тому роботу над матеріальною точкою не виконує. Ця сила може змінювати лише напрямок швидкості $\vec{v}'$, але не її модуль.***

Сила Коріоліса впливає на рух тіл поблизу земної поверхні. Так, при вільному падінні ця сила відхиляє падаючі тіла на схід. Це відхилення пропорційне косинусу широти місцевості і тому максимальним є на екваторі і дорівнює нулю на полюсах. При падінні на екваторі з висоти 30 м (приблизно 10 поверхів висотного будинку) відхилення складає 3,6 мм.

Дією сили Коріоліса пояснюється також і той факт, що в північній півкулі у річок завжди розмивається сильніше правий берег, а у південній – лівий.

11.3 Маятник Фуко

У 1850 році французький вчений Фуко довів, що Земля обертається, спостерігаючи за коливаннями маятника, який складався з мотузки довжиною 67 м і кулі масою 28 кг.

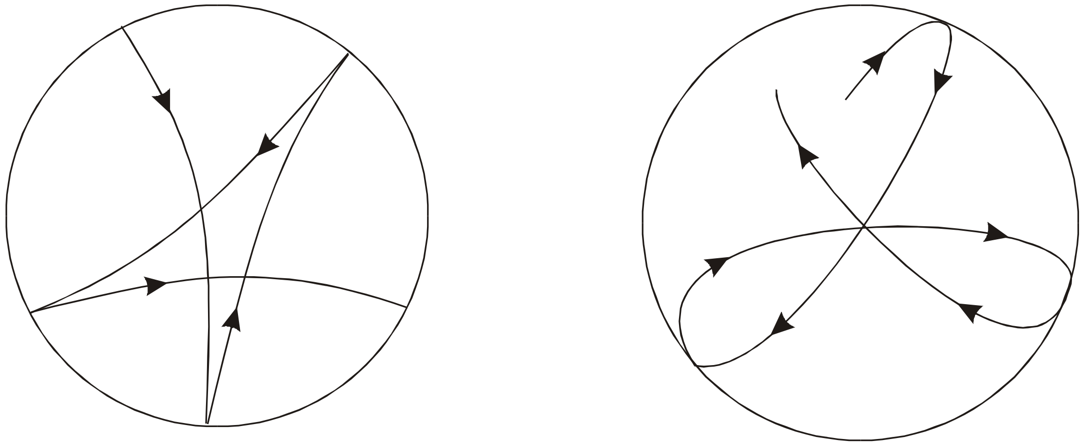
Уявимо собі, що маятник підвішено на полюсі. Тоді при коливаннях маятника площина його коливань буде повільно повертатися в бік, протилежний обертанню Землі, з такою ж кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, з якою Земля обертається навколо своєї власної осі.

В нерухомій системі координат немає сил, які б могли змінити площину коливань. Тому маятник буде зберігати свою площину коливань незмінною, а Земля повертатися під ним.

Якщо ж віднести коливання маятника на полюсі до системи координат, пов'язаної з Землею, то обертання площини коливань можна уявити як результат дії сили Коріоліса. Дійсно, вона є перпендикулярною до вектора швидкості обертання і завжди розташована в горизонтальній площині.

Слід руху маятника на Землі буде різним в залежності від того, в який спосіб ми примусимо його коливатись. Для цього прослідкуємо за траєкторією руху маятника над диском, що обертається, при двох способах запуску маятника.

Якщо відхилити маятник убік і водночас примусити рухатись диск так, щоб у момент запуску маятника він одержав таку ж швидкість, як і та частина диска, над якою він знаходиться, то траєкторія руху маятника буде мати вигляд "зірочки" (*а*). Таким же буде вид траєкторії на земному полюсі, якщо маятник запускати з відхиленого положення.



а) *б*)

У другому випадку примусимо спочатку маятник коливатись, а потім приведемо в рух диск. Тоді траєкторія буде мати вигляд "розетки" (*б*). На Землі таку форму траєкторії можна буде спостерігати тоді, коли маятник почне коливатись після різкого удару по його кульці, яка знаходилась у стані спокою. Але в обох випадках під дією сили Коріоліса траєкторії будуть викривлятися в ***один і той же*** бік.

12 Динаміка твердого тіла

Тверде тіло можна розглядати як систему матеріальних точок, відстань між якими є постійною. Тому будемо вважати, що всі співвідношення, які використовувалися для системи матеріальних точок раніше, будуть справедливими і для твердого тіла. Тобто справедливими будуть рівняння:

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, де $\vec{F}$ - сума зовнішніх сил; $\vec{p}$ - імпульс тіла;

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, де $\vec{L}$ - момент імпульсу тіла; $\vec{M}$ - момент зовнішніх сил.

12.1 Рівняння моменту імпульсу тіла при обертанні навколо нерухомої осі. Момент інерції

Для описання обертового руху системи матеріальних точок навколо нерухомої осі використаємо рівняння моментів: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

Якщо навколо нерухомої осі обертається матеріальна точка масою m по колу радіуса r, то модуль її момента імпульсу відносно цієї осі буде $L = mvr$, оскільки радіус-вектор матеріальної точки, проведений від осі обертання і вектор лінійної швидкості є взаємно перпендикулярними.

Нехай модуль кутової швидкості дорівнює ω. Тоді $v = \omega r$, а це означає, що $L = mr^2\omega$. Якщо ж навколо нерухомої осі обертається система матеріальних точок з однією і тією ж кутовою швидкістю ω, то тоді $L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega$, де сума береться за всіма матеріальними точками системи. Оскільки величина ω є постійною для всіх точок, то її можна вивести за знак суми. Тоді отримаємо

$$L = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (12.1)$$

Або, ввівши позначення

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 , \qquad (12.2)$$

одержимо

$$L = I\omega \,, \qquad (12.3)$$

де I - величина, що дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок на квадрати відстаней їх до осі обертання.

Ця величина називається ***моментом інерції системи відносно обраної осі обертання***. Тоді, згідно з рівнянням (12.3), можна стверджувати, що ***при обертанні системи матеріальних точок (або твердого тіла) навколо нерухомої осі момент її імпульса відносно цієї осі дорівнює добуткові момента інерції тіла відносно тієї ж осі на кутову швидкість***.

Якщо на обертовий рух системи матеріальних точок накладається ще й їх радіальний рух або рух паралельно осі обертання, то наявність таких рухів не призводить до зміни формули (12.3), оскільки момент імпульсу кожної точки системи залежить від її швидкості $\vec{v}$ лінійно. Коли ж вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований вздовж радіуса або паралельно осі обертання, то момент імпульсу відносно цієї осі дорівнює нулю. Побічний вплив таких рухів полягає в тому, що момент інерції *I* перестає бути постійною величиною і змінюється з часом у відповідності зі зміною миттєвої конфігурації системи. У цьому випадку рівняння (12.3) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M \,, \qquad (12.4)$$

де – M момент зовнішніх сил відносно осі обертання (точніше, проекція моменту цих сил на вісь обертання, тому у в формулі (12.4) немає позначення векторів).

Співвідношення (12.4) має назву ***основного рівняння динаміки обертового руху навколо нерухомої осі.***

Якщо момент зовнішніх сил дорівнює нулю, то формула (12.4) набуває вигляду:

$$I\omega = const \,. \qquad (12.5)$$

Формула (12.5) є ***математичним записом закону збереження момента імпульсу при обертовому русі відносно нерухомої осі обертання.***

За зовнішнім виглядом формула (12.4) нагадує II закон Ньютона для матеріальної точки: $\frac{d}{dt}(mv) = F$, де роль маси відіграє момент інерції *I*, роль швидкості – кутова швидкість *ω*, роль сили – момент сил *M*, а роль імпульсу – момент імпульсу *L*. Момент імпульсу *L* називають ще ***обертовим імпульсом системи***.

Приклади щодо закону збереження обертового імпульсу:

1) Стілець Жуковського;
2) Обертання фігуристів;
3) Сальто.

Якщо навколо нерухомої осі обертається незмінна система матеріальних точок або тверде тіло, то в цьому випадку момент інерції залишається постійним і рівняння (12.4) набуває вигляду:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M\ . \tag{12.6}$$

Тобто, ***добуток моменту інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання на кутове прискорення дорівнює моментові зовнішніх сил відносно тієї ж осі***.

12.2. Кінетична енергія тіла, що обертається

Кінетична енергія i-тої точки твердого тіла з масою Δm, яка обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω на відстані r_i від неї може бути визначена із співвідношення

$$\left(\Delta E_k\right)_i = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \omega^2 r_i^2, \tag{12.7}$$

оскільки $v = \omega r$.

Визначивши суму за всіма точками у виразі (12.7), одержимо кінетичну енергію твердого тіла

$$\Delta E_k = \sum_i \left(\Delta E_k\right)_i = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2 .$$

Але $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i I_i = I$ (I – момент інерції). Тоді

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 . \tag{12.8}$$

Оскільки $L = I\omega$, то формулу (12.8) можна записати так:

$$E_k = \frac{L^2}{2I} . \tag{12.9}$$

Вираз (12.8) є аналогічним до виразу для кінетичної енергії матеріальної точки або тіла, що рухається поступально ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$), якщо роль маси відіграє момент інерції, а роль лінійної швидкості – кутова швидкість.

Знайдемо роботу, що виконується зовнішньою силою при обертанні твердого тіла.

Якщо матеріальна точка обертається по колу, то елементарна робота при повороті на кут $d\varphi$ дорівнює

$$dA_i = Fds_i = Fr_i d\varphi = M_i d\varphi$$

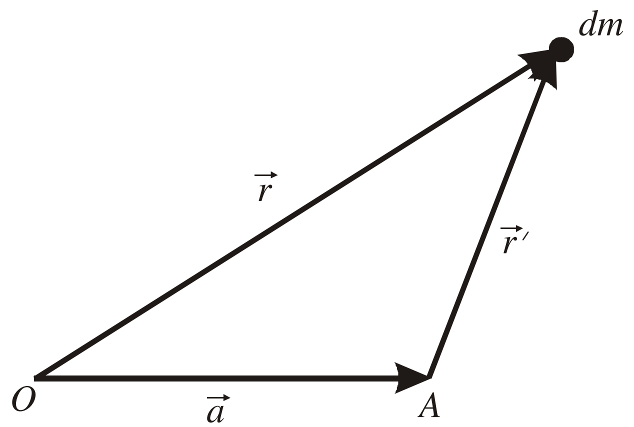
Подібний вираз можна отримати і для твердого тіла, оскільки його можна розглядати як систему матеріальних точок, які обертаються з постійною кутовою швидкістю ω

$$dA = Fds = Md\varphi \qquad (12.10)$$

В отриманому виразі, по аналогії з попередніми міркуваннями, роль сили відіграє момент зовнішніх сил, роль лінійного переміщення – кутове переміщення.

12.3 Теорема Гюйгенса-Штейнера

Знайдемо зв'язок між компонентами інерції тіла відносно двох різних паралельних осей. Нехай ці осі є перпендикулярними до площини рисунка і проходять через точки O і A.



Розіб'ємо тіло на елементарні маси dm. Позначимо радіуси-вектори однієї з елементарних мас, що лежить у площині рисунка через $\vec{r}$ і $\vec{r}'$, відповідно. З рисунка видно, що $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$, де $\vec{a}$ ***– радіус вектор, який з'єднує осі по найкоротшому шляху.***

Піднесемо до квадрата обидві частини останнього рівняння

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{r}). \qquad (12.11)$$

Домножимо обидві частини формули (13.11) на dm та зінтегруємо:

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + \int a^2 dm - 2\int (\vec{a} \cdot \vec{r}) dm$$

або

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + \int a^2 dm - 2\left(\vec{a} \cdot \int \vec{r} dm\right) \qquad (12.12)$$

Але $\int r'^2 dm = I_A$ - момент інерції тіла відносно осі A;

$\int r^2 dm = I_O$ - момент інерції тіла відносно осі O;

$\int dm = m$ - маса тіла.

Останній інтеграл у формулі (12.12) можна записати, як $\int \vec{r} dm = m\vec{R}_C$, де $\vec{R}_C$ - радіус-вектор центра маси C тіла відносно осі O.

Тоді

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m\left(\vec{a} \cdot \vec{R}_C\right). \qquad (12.13)$$

Припустимо, що вісь O проходить через центр маси C тіла. У цьому випадку $\vec{R}_C = 0$ і формула (12.13) набуває вигляду:

$$I_A = I_C + ma^2 \qquad (12.14)$$

Отримане геометричне співвідношення має назву ***теореми Гюйгенса-Штейнера***, яку формулюють так:

Момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції його відносно паралельної осі, яка проходить через центр маси, та величини ma^2, де a – відстань між осями.

12.4 Обчислення моментів інерції

Момент інерції тіла відносно деякої нерухомої осі обертання у випадку рівномірного розподілення речовини в ньому обчислюються за допомогою формули

$$I = \int r^2 dm \qquad (*)$$

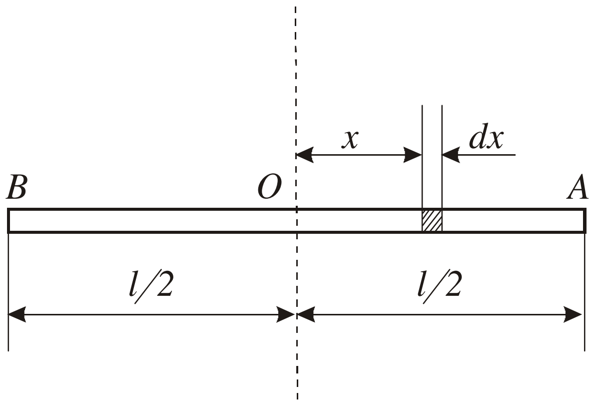
де r – відстань від елемента маси до осі обертання.

У багатьох випадках обчислення моментів інерції можна спростити, використовуючи властивості симетрії та подібності, а також теорему Гюйгенса-Штейнера.

Розглянемо конкретні випадки обчислення моментів інерції.

12.4.1 Момент інерції тонкого однорідного стержня відносно перпендикулярної осі

а) Нехай вісь обертання проходить через середину стержня точку *O*.



Оберемо на відстані *x* від осі обертання нескінченно малу ділянку стержня *dx*. Масу виділеної ділянки *dm* може бути знайдено як добуток лінійної густини стержня ρ (оскільки він нескінченно тонкий, тобто одновимірний) на *dx*. Тобто $dm=\rho dx$. Тоді елементарний момент інерції відносно обраної осі можна записати

$$dI = 2dm \cdot x^2 = 2\rho dx \cdot x^2 . \tag{12.15}$$

Коефіцієнт 2 з'явився тому, що стержень умовно розбитий навпіл і на відстані *x* від осі з іншого боку також можна обрати аналогічну ділянку.

За означенням лінійної густини $\rho = {}^{m}\!/_{l}$. Після чого вираз (12.15) набуває вигляду:

$$dI = 2\frac{m}{l} \cdot x^2 dx . \tag{12.16}$$

Зінтегрувавши вираз (12.16) у границях від 0 до $\frac{l}{2}$, отримаємо момент інерції всього стержня

$$I_O = \int_0^{\frac{l}{2}} 2\frac{m}{l} \cdot x^2 dx = 2\frac{m}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12} . \tag{12.17}$$

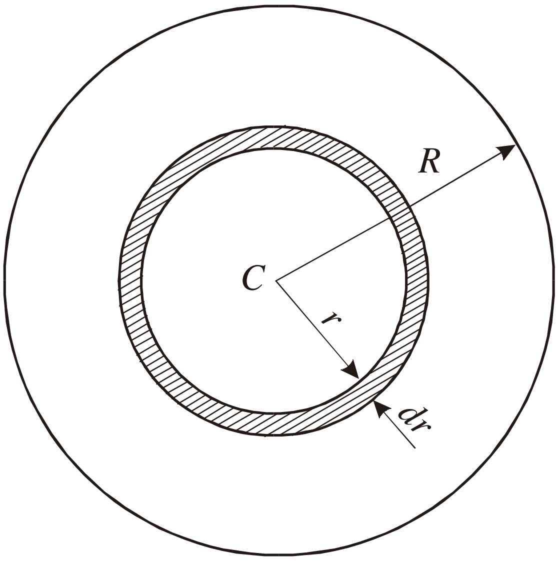
б) Нехай вісь обертання проходить через кінець стержня (точку *A* чи *B*).

Для визначення моменту інерції в цьому випадку скористаємося теоремою Гюйгенса-Штейнера:

$$I_A = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \qquad (12.18)$$

12.4.2 Момент інерції нескінченно тонкого однорідного диску

Нехай вісь обертання проходить через центр диска C перпендикулярно до його площини.



Розглянемо нескінченно тонке кільце з внутрішнім діаметром r і зовнішнім $r+dr$. Площа такого кільця $dS = 2\pi rdr$. Момент інерції нескінченно тонкого кільця $dI = r^2 dm$, оскільки всі його точки знаходяться на відстані r від осі обертання. Тоді момент інерції всього диска згідно з (*) буде $I = \int r^2 dm$.

Оскільки диск однорідний, то $dm = \frac{m}{S} dS$, де $\frac{m}{S}$ - поверхнева густина диска, S - площа всього диска). Тоді $dm = m\frac{2\pi rdr}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2} rdr$.

Значить

$$I_C = \int_0^R \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{mR^2}{2}. \qquad (12.19)$$

Формула (12.19) є справедливою і для визначення моменту інерції однорідного суцільного циліндра відносно його поздовжньої геометричної осі.

12.4.3 Момент інерції суцільної однорідної кулі відносно осі, що проходить через центр маси

Таку кулю можна уявити як сукупність нескінченно тонких сферичних шарів з масами *dm,* радіусами *r* і товщинами *dr*. Але $dm = \frac{m}{V} dV$, де $dV = 4\pi r^2 dr$ - об'єм окремого шару.

Відомо, що момент інерції такого нескінченно тонкого сферичного шару $dI = \frac{2}{3} r^2 dm$. Тоді обраний елемент об'єму кулі буде мати момент інерції

$$dI = \frac{2}{3} \cdot m \cdot \frac{dV}{V} \cdot r^2 = \frac{2}{3} m r^2 \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 2m \frac{r^4}{R^3} dr .$$

Зінтегрувавши останній вираз в границях від 0 до *R*, отримаємо шуканий момент інерції:

$$I = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2mr^5}{5R^3} \bigg|_0^R = \frac{2}{5} m R^2 . \qquad (12.20)$$

За аналогічними міркуваннями можна визначити момент інерції для будь-якого іншого симетричного тіла.

12.5 Кінетична енергія тіла при плоскому русі

Припустимо, що плоский рух твердого тіла являє собою суперпозицію поступального руху довільної точки *O* зі швидкістю $\vec{v}_0$ та обертового руху навколо осі, що проходить крізь цю точку, з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. У цьому випадку загальну швидкість *i*-тої точки тіла (або *i*-тої елементарної маси) можна записати за допомогою співвідношення

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \tag{12.21}$$

де $\vec{r}_i$ - радіус-вектор *i*-тої елементарної маси, проведений з точки *O*.

Тоді кінетична енергія *i*-тої маси буде

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

або

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\Delta m_i \left\{ v_0^2 + 2\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \right\}.$$

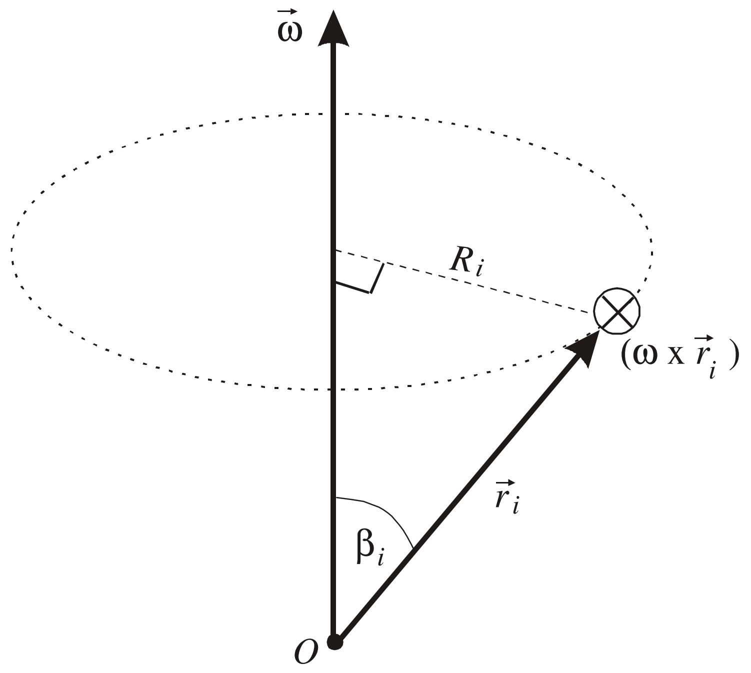
Повна ж кінетична енергія тіла складе

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i \left\{ v_0^2 + 2\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_i 2\Delta m_i \vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_i \Delta m_i + \vec{v}_0 \sum_i \Delta m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2. \end{aligned} \tag{12.22}$$

Але $\sum\limits_i \Delta m_i = m$, де m – маса всього тіла. Тоді перший доданок у формулі (12.22) буде дорівнювати

$$\frac{1}{2} v_0^2 \sum_i \Delta m_i = \frac{m v_0^2}{2} \ . \tag{12.23}$$

Розглянемо рисунок.



Якщо вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{r}_i$ розташовані так, як показано на рисунку, то вектор $(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$ є направленим за рисунок. Його модуль дорівнює $\left|\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right| = \omega r_i \sin\beta_i = \omega R_i$, де R_i – відстань i-тої точки (або елементарної маси) від осі обертання. Отже маємо: $(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \omega^2 R_i^2$.

Тоді третій доданок у формулі (12.22) набуває вигляду:

$$\frac{1}{2}\omega^2\sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{I_O\omega^2}{2}, \qquad (12.24)$$

де I_O - момент інерції тіла відносно осі обертання, що проходить крізь точку O.

Для перетворення другого доданка у виразі (12.22) скористуємося дистрибутивним законом векторного добутку

$$\vec{v}_0\sum_i \Delta m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \vec{v}_0\left(\vec{\omega}\times\sum_i \Delta m_i\vec{r}_i\right) = \vec{v}_0(\vec{\omega}\times m\vec{r}_c) = m\vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r}_c), \qquad (12.25)$$

де $\vec{r}_c$ - радіус-вектор центра маси тіла, проведений з точки O.

Таким чином, враховуючи (12.23), (12.24) і (12.25), одержимо

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} + m\vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r}_c) + \frac{I_O\omega^2}{2}. \qquad (12.26)$$

Перший доданок останньої формули містить лише ті величини, які характеризують поступальний рух, а третій – лише обертовий рух. У другому ж доданку містяться величини, що характеризують як поступальний, так і обертовий рухи.

Якщо за точку *O* обрати центр маси тіла *C*, то $\vec{r}_c = 0$, і формула (12.26) набуває вигляду:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \qquad (12.27)$$

де v_C^2 - швидкість центра мас; I_C - момент інерції тіла відносно осі, що проходить крізь центр маси.

Таким чином, ***якщо плоский рух розкласти на поступальний зі швидкістю центра маси і обертовий навколо осі, яка проходить крізь центр маси, то кінетична енергія тіла при такому русі визначається сумою двох незалежних доданків, один з яких містить лише ті величини, що характеризують поступальний рух, а другий – лише обертовий рух.***

Прикладом такого руху може бути рух маятника Максвела.

12.6 Гіроскопи

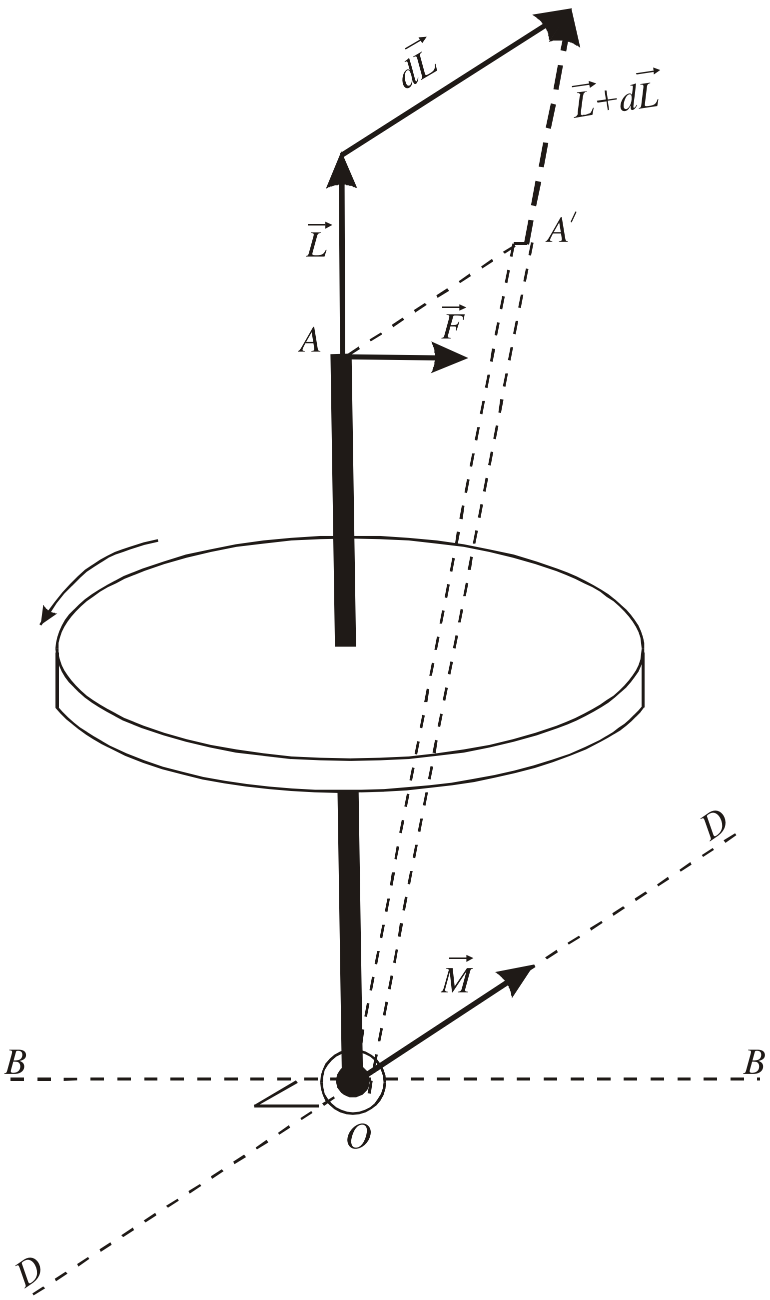
Якщо розглянути рух дзиги, то легко помітити, що під час обертання зберігається напрям осі обертання. Дзига у першому наближенні може правити за приклад руху тіл, які в механіці дістали назву ***гіроскопів***.

Гіроскопом називають масивне симетричне тіло, яке обертається з високою кутовою швидкістю навколо однієї з осей симетрії. Якщо гіроскоп закріпити у центрі маси за допомогою карданової підвіски на двох кільцях, то такий гіроскоп називається ***вільним гіроскопом***. При такому закріпленні вісь гіроскопу може зайняти будь-який напрямок у просторі.

У симетричного тіла напрямки векторів момента імпульсу $\vec{L}$ і кутової швидкості $\vec{\omega}$ співпадають, бо обертовий імпульс $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Оскільки гіроскоп має значну масу, то величини $\vec{L}$ та $\vec{\omega}$ набувають досить високих значень.

Розглянемо гіроскоп, у якого вісь закріплено одним кінцем шарнірно в точці *O*. Спробуємо вісь гіроскопа *OA* повернути навколо осі *DD* ($DD \perp BB$), подіявши на вільний кінець силою $\vec{F}$ протягом часу dt. При цьому вісь гіроскопа “не захоче” повертатись навколо осі *DD*, а повернеться навколо осі *BB*, прийнявши положення *OA′*. Така поведінка гіроскопа дістала назву ***гіроскопічного ефекту***.

Розглянемо суть цього ефекту з точки зору законів механіки твердого тіла. Згідно з рівнянням моментів $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ в результаті дії сили $\vec{F}$ за час dt момент імпульсу $\vec{L}$ отримає приріст $d\vec{L} = \vec{M}dt$, де $\vec{M}$ - момент сили $\vec{F}$ відносно точки *O*.



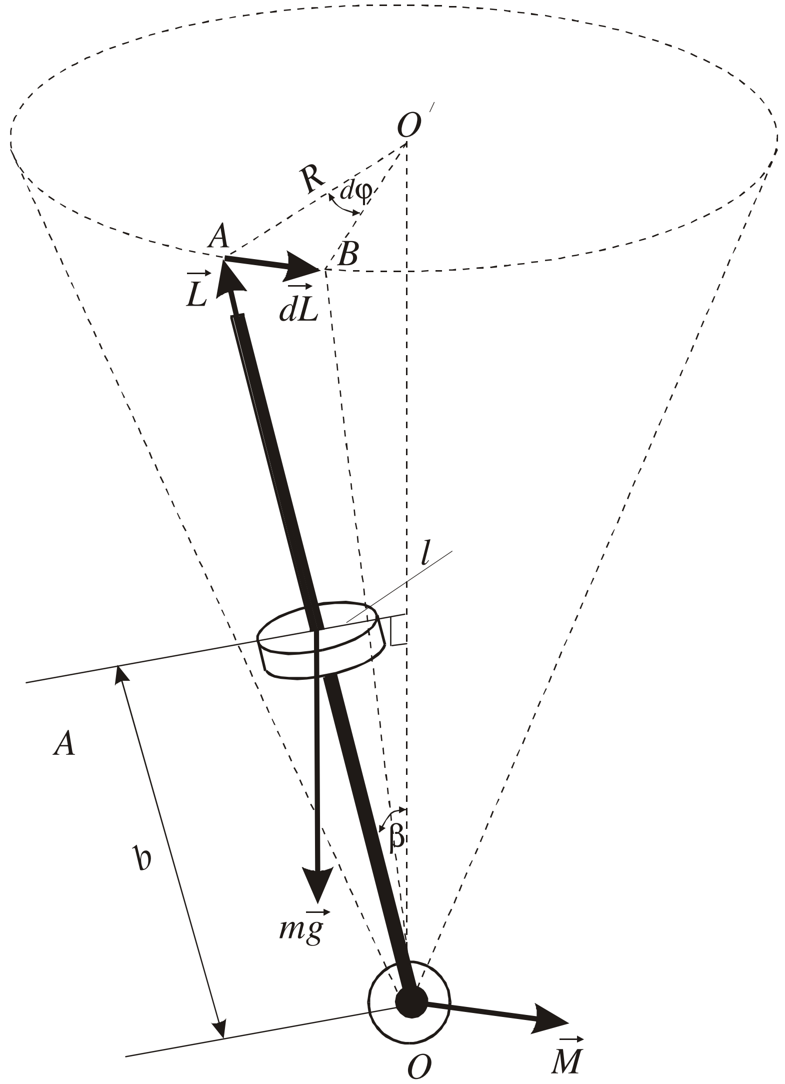
Нове значення імпульсу $\vec{L}+d\vec{L}$ (як сума двох векторів після дії сили $\vec{F}$) виявляється оберненим навколо осі *BB* відносно початкового значення $\vec{L}$. А оскільки вектор $\vec{L}$ спрямований вздовж осі гіроскопа, то разом із вектором $\vec{L}$ і вісь *OA* повернеться навколо осі *BB* і перейде в положення *OA'*.

12.7 Прецесія гіроскопа

Внаслідок гіроскопічного ефекту добре закручена дзига не падає під дією сили тяжіння. Її дія призводить лише до того, що вісь дзиги повертається, описуючи конус. Такий рух осі називається ***прецесією***. І тільки коли внаслідок тертя щодо повітря і місця контакту з опорою обертання дзиги уповільниться, то вона з часом упаде і займе положення, яке відповідає мінімуму потенціальної енергії.

Розглянемо найпростіший вид прецесії - ***регулярну прецесію***.

Нехай один кінець гіроскопу закріплений шарнірно в точці *O*. Це дасть можливість його осі вільно повертатись у будь-якому напрямку.



На гіроскоп діє момент сили $m\vec{g}$, модуль якого $M = mgb\sin\beta$. Сила $m\vec{g}$ лежить у вертикальній площині *OAO′*. Момент сили $\vec{M}$ - перпендикулярний до цієї площини ($l = b\sin\beta$ - плече сили). Будемо відкладати вектор $\vec{L}$ від точки *O*. В момент часу t вектор $\vec{L}$ стане відповідати відрізку *OA*. За час dt вектор $\vec{L}$ отримає перпендикулярний до нього приріст $d\vec{L} = \vec{M}dt$ (оскільки $d\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{M}$) в результаті чого він, не змінюючи свого модуля і кута β з вертикаллю, переходить в положення *OB*. Але вісь *OA* і сила $m\vec{g}$ також повертаються на кут $d\varphi$, оскільки вони лежать в одній площині з вектором $\vec{L}$. А оскільки площина, в якій розташовано вектор сили $m\vec{g}$, повернулася на кут $d\varphi$, то на цей же кут повернеться і вектор $\vec{M}$ моменту сили. У новому положенні має місце таке ж взаємне розташування векторів $\vec{L}$ та $\vec{M}$, яке було і в момент часу *t*. Тому за наступний проміжок часу *dt* вертикальна площина разом із віссю повернеться на кут $d\varphi$ і т. д. В результаті вісь гіроскопу буде обертатися навколо вертикальної осі, описуючи конус з кутом 2β при вершині. При цьому вектор $\vec{L}$ буде змінюватися лише за напрямком, залишаючись незмінним за модулем, оскільки елементарні прирости його $d\vec{L}$ весь час будуть перпендикулярними до вектора $\vec{L}$.

Таким чином, у полі сили тяжіння вісь гіроскопа з однією нерухомою точкою повертається навколо вертикалі, описуючи конус. Такий рух гіроскопа називають ***регулярною прецесією.***

Знайдемо кутову швидкість прецесії із співвідношення

$$\omega_{np} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{12.28}$$

Спочатку знайдемо $d\varphi$: $\left|d\vec{L}\right| = Rd\varphi \;\Rightarrow\; d\varphi = \frac{\left|d\vec{L}\right|}{R}$. З урахуванням того, що $R = \left|\vec{L}\right|\sin\beta$, маємо $d\varphi = \frac{\left|d\vec{L}\right|}{\left|\vec{L}\right|\sin\beta}$. Але $\left|d\vec{L}\right| = \vec{M}dt$. Тоді остаточно: $d\varphi = \frac{Mdt}{L\sin\beta}$.

Підставивши останній вираз у формулу (12.28), маємо

$$\omega_{np} = \frac{M}{L\sin\beta}. \tag{12.29}$$

Оскільки $M = mgb\sin\beta$, то формула (12.29) набуває вигляду:

$$\omega_{np} = \frac{mgb\sin\beta}{L\sin\beta} = \frac{mgb}{L} = \frac{mgb}{I\omega}. \tag{12.30}$$

Якщо ввести позначення $\frac{mgb}{I} = const = C$, то вираз (12.30) запишеться

$$\omega_{np} = \frac{C}{\omega}, \tag{12.31}$$

тобто ω_{np} змінюється зі зміною ω за гіперболічним законом.

Формула (12.30) є справедливою лише для випадку, коли $\omega_{np} << \omega$. Тоді $\frac{mgb}{I\omega} << \omega$. Звідси випливає, що $mgb << I\omega^2$; тобто домінуючу роль у випадку такого руху відіграє кінетична енергія, оскільки $mgb \sim E_n$, а $I\omega^2 \sim E_k$.

13 Рух при наявності тертя

13.1 Тертя ковзання

Розглянемо два приклади:

1) тіло ковзає по поверхні іншого тіла;
2) тіло знаходиться в стані спокою, хоча на нього діє горизонтально направлена сила.

І в першому, і в другому з розглянутих прикладів важливу роль відіграє сила тертя. Фізичний зміст сил тертя у цих прикладах різний: у першому випадку сила тертя виникає внаслідок руху, у другому – внаслідок дії зовнішньої сили. Та сила тертя, яка виникає тоді, коли тіло знаходиться в стані спокою, називається ***силою тертя спокою***.

При русі тіла сила тертя завжди направлена супроти швидкості руху, тобто $\angle\left(\vec{F}_{mp},\vec{v}\right)=180^{\circ}$. Внаслідок дії цієї сили кінетична енергія витрачається на нагрівання тіла. Оскільки переміщення тіла і сила тертя протилежно направлені, то робота сили тертя є від'ємною величиною. Цього висновку легко дійти, використовуючи II закон Ньютона.

Якщо на тіло, що рухається, діє лише сила тертя, то закон запишеться так:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{F}_{mp}. \qquad (13.1)$$

Домножимо скалярно обидві частини рівняння (13.1) на елементарне переміщення $d\vec{s}$. Отримаємо

$$m\cdot d\vec{s}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{F}_{mp}\cdot d\vec{s}\,.$$

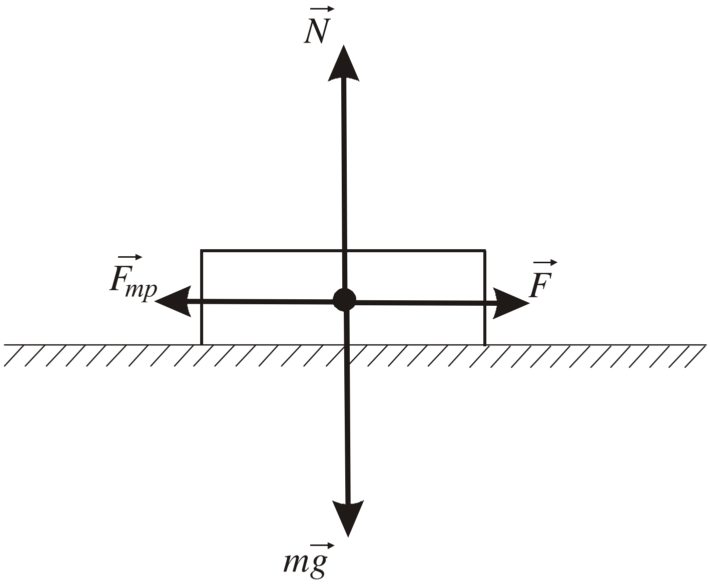
Але $\frac{d\vec{s}}{dt}=\vec{v}$, а $\vec{F}_{mp}\cdot d\vec{s}=A$. Тоді можна формулу (13.1) записати

$$m\vec{v}d\vec{v}=-dA \quad\Rightarrow\quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-dA \quad\Rightarrow\quad \frac{mv^2}{2}=-A.$$

Розрізняють два види тертя – сухе (зовнішнє) та внутрішнє тертя.

При сухому терті може виникнути сила тертя спокою, а при внутрішньому – ні. Це пояснюється тим, що при внутрішньому терті взаємодіють не тверді поверхні, а шари рідини. Внутрішнє тертя буде розглянуте нижче.

Розглянемо сухе тертя. ***Сила тертя спокою*** у випадку, що пояснюється рисунком (для наочності та зручності тлумачення всі сили зведено в одну точку), визначається величиною діючої сили $\vec{F}$: збільшуючи $\vec{F}$, ми збільшуємо і $\vec{F}_{тр}$; змінюючи напрям $\vec{F}$ ми змінюємо й напрям дії сили тертя $\vec{F}_{тр}$.

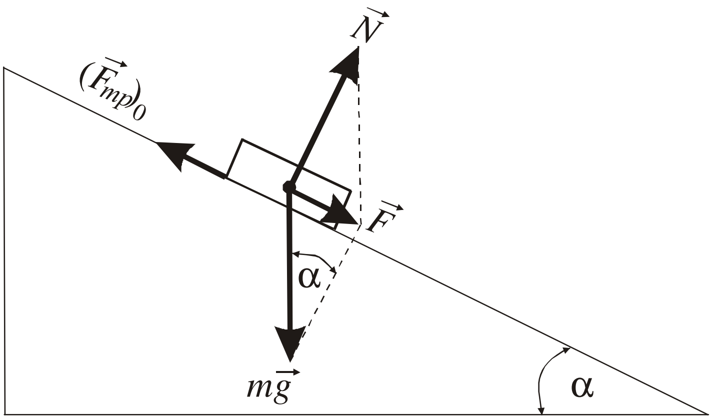


При подальшому зростанні сили $\vec{F}$ тіло починає рухатись. Прискорення ж воно може набути лише у випадку, коли сила $\vec{F}$ буде більшою за деяке максимальне значення сили тертя $\left(\vec{F}_{тр}\right)_0$. Якщо ж $\vec{F} < \left(\vec{F}_{тр}\right)_0$, то величина сили тертя дорівнює $\left|\vec{F}\right|$. Експериментально встановлено, що

$$\left|\vec{F}_{тр}\right|_0 = \mu_0\left|\vec{N}\right| \qquad \text{або} \qquad \left(F_{тр}\right)_0 = \mu_0 N, \qquad (13.2)$$

де μ_0 - ***коефіцієнт тертя спокою***. Вираз (13.2) називають ще ***законом Амонтона*** (1699).

Величину μ_0 в (13.2) можна визначити, наприклад, з досліду по вивченню ковзання твердого тіла по похилій площині.



При малих значеннях кута α тіло буде знаходитись у стані спокою. Збільшуючи кут, можна визначити той момент, коли тіло почне ковзати по похилій площині. У цей момент максимальна сила тертя спокою $\left(\vec{F}_{тр}\right)_0$ буде дорівнювати рівнодіючій сил $m\vec{g}$ і $\vec{N}$, тобто $\vec{F}$. Тоді, спроектувавши сили вздовж напрямку руху, можна записати

$$\left(F_{mp}\right)_0 = F = mg\sin\alpha \qquad \text{або} \qquad \frac{\left(F_{mp}\right)_0}{N} = tg\alpha .$$

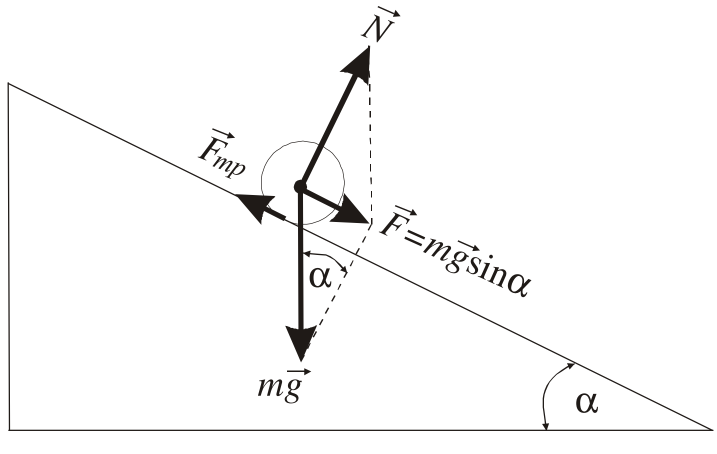
А оскільки $\left(F_{mp}\right)_0 = \mu_0 N$, то легко бачити, що $\mu_0 = tg\alpha$.

У тому випадку, коли одне тіло ковзає по поверхні іншого, виникаюча сила тертя ковзання описується ***законом Кулона***, який за зовнішнім виглядом відрізняється від закону Амонтона лише коефіцієнтом μ, що має назву ***коефіцієнта тертя ковзання***.

$$\left|\vec{F}_{mp}\right| = \mu\left|\vec{N}\right| . \tag{13.3}$$

13.2 Тертя кочення

Розглянемо циліндр, який скочується без ковзання з похилої площини, тобто розглянемо такий його рух, коли точки дотику циліндра і похилої площини не ковзали б одна відносно одної. У цьому випадку між означеними точками діє сила тертя спокою, яка і є тангенціальною силою тертя $\vec{F}_{mp}$. Ця сила разом із силою $\vec{F} = m\vec{g}\sin\alpha$ утворюють пару сил, дія яких і спричиняє обертання циліндра.

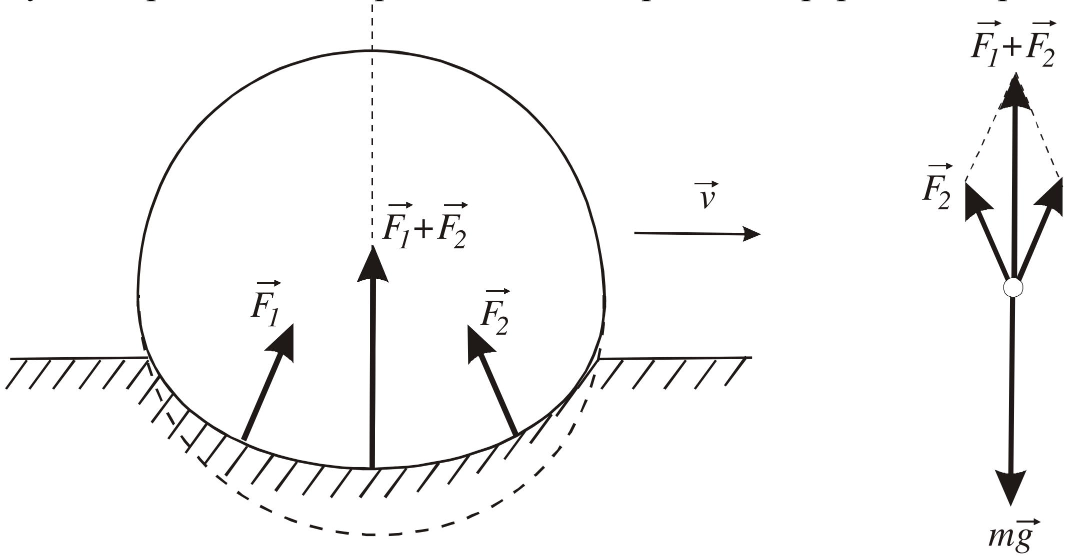


Припустимо, що циліндр і поверхня, по якій він скочується, є абсолютно твердими (не деформуються). У цьому випадку геометричним місцем точок їх дотику буде пряма лінія. І тоді, окрім сили тертя $\vec{F}_{mp}$, ніякі інші сили не повинні виникати. В напрямку дії сили тертя ані матеріальні частки циліндру, ані матеріальні частки похилої площини переміщуватися не будуть. А це означає, що робота сили тертя буде дорівнювати нулю, тобто ніяких витрат енергії на подолання дії сил тертя не буде.

Таким чином, якщо абсолютно твердий циліндр без ковзання скочується по абсолютно твердій поверхні, то таке кочення не буде супроводжуватися витратами енергії роботу по подоланню сил тертя, хоча при цій умові й існує сила тертя спокою, яка й забезпечує такий рух циліндру.

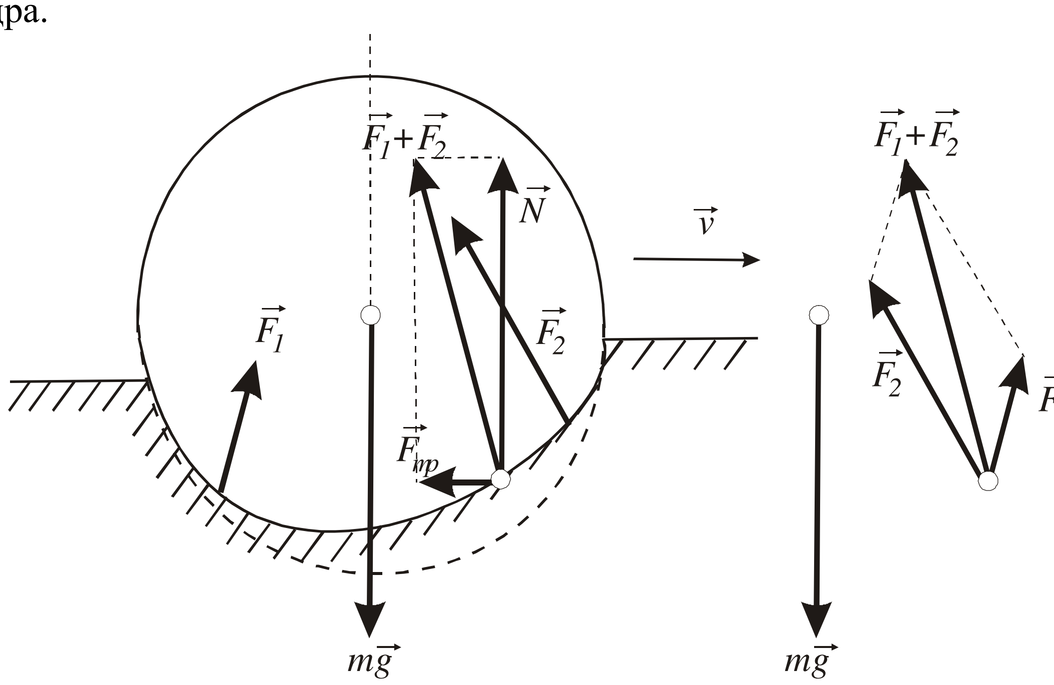
Проте при скочуванні реального циліндру, навіть без ковзання, витрати кінетичної енергії існують, що доведено експериментально. Причиною витрат кінетичної енергії є сили тертя кочення, виникнення яких пов’язано із залишковими деформаціями. Покажемо, що абсолютно пружні деформації не призводять до виникнення будь-яких сил, що перешкоджають рухові тіла.

Під дією сили тяжіння деформуються як похила площина, так і сам циліндр, який начебто “сплющується” (для більшої наочності рисунок розташуємо горизонтально і розглянемо поперечний переріз циліндра).



Якщо рівнодіючу всіх пружних сил реакції, розташованих зліва і справа від вертикальної лінії позначити через $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, відповідно, то тоді ці сили будуть рівними за модулем, а їх рівнодіюча ($\vec{F}_1+\vec{F}_2$) буде проходити крізь центр означеного поперечного перерізу, розташовуючись при цьому на одній прямій з лінією дії сили $m\vec{g}$, і буде протинаправленою до неї. Тобто при абсолютно пружній деформації можна спостерігати симетричну відносно вертикальної лінії картину. Внаслідок цього моменти сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ будуть взаємно скомпенсованими, а сумарна рівнодіюча всіх сил буде проходити через центр перерізу, тобто буде мати лише вертикальну складову, яка зрівноважується силою тяжіння.

Розглянемо тепер випадок, коли деформації не будуть абсолютно пружними. Тоді сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ будуть різними як за модулем, так і за напрямком, оскільки справа від вертикальної лінії (з того боку, куди рухається циліндр) деформації і похилої площини, і циліндра будуть більш значними, ніж зліва. Рівнодіюча ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2$) цих сил має як вертикальну, так і горизонтальну складові. При цьому вертикальна складова $\vec{N}$ зрівноважує силу тяжіння, а горизонтальна $\vec{F}_{тр}$ (мала), що є напрямленою проти вектора швидкості, і буде ***силою тертя кочення***. У цьому випадку момент сили $\vec{F}_2$ буде більшим за момент сили $\vec{F}_1$. А це означає, що сумарний момент усіх сил реакції буде перешкоджати рухові циліндра.



Отже, сила тертя кочення і момент сил деформації, який перешкоджає рухові, виникають внаслідок непружного характеру деформації як циліндра, так і поверхні в зоні їх дотику.

Як свідчить рисунок, внаслідок непружного характеру деформації реакція опори $\vec{N}$ проходить по лінії, яка знаходиться на деякій відстані h від лінії дії сили $m\vec{g}$. Максимальна відстань між цими лініями й визначає величину коефіцієнта сили тертя кочення (це його фізичний зміст).

13.3 Внутрішнє тертя

При русі твердого тіла в рідині сили внутрішнього тертя залежать від форми тіла, швидкості руху та властивостей рідини: в'язкості та густини. Причому, чим більша в'язкість, тим більша сила тертя (про це більш докладніше буде розповідатися при вивченні механіки рідин та газів).

Визначимо силу тертя при ковзанні двох близьких паралельних поверхонь, простір між якими заповнений рідиною. Якщо одна з поверхонь площиною S рухається під дією сили $\vec{F}$ зі швидкістю $\vec{v}$ відносно іншої поверхні, що знаходиться в стані спокою, то сила тертя $\vec{F}_{тр}$, прикладена до першої поверхні, буде рівною за модулем і протилежною за напрямком до сили $\vec{F}$. Вимірюючи дослідним шляхом швидкість та силу, Ньютон виявив закономірність:

$$F_{тр} \sim \mu S \frac{v}{h},$$

або в загальному випадку

$$\vec{F}_{тр} = -\beta \cdot \vec{v}, \tag{13.4}$$

де - h відстань між поверхнями; μ - коефіцієнт в'язкості $\left([\mu] = \left[\frac{кг}{м \cdot с}\right]\right)$.

Насправді ж така закономірність виявилась справедливою лише для випадку, коли $h << \sqrt{S}$.

Дослід показує, що при існуванні внутрішнього тертя постійно діюча сила $\vec{F}$ може прискорити тіло до деякої певної швидкості, яку називають граничною. Коли ж тіло досягне цієї швидкості, то сила тертя, визначена за допомогою (13.4), буде зрівноважувати зовнішню силу $\vec{F}$, і тіло почне рухатися рівномірно. Тобто приходимо до висновку про існування такої граничної швидкості, що $v_{гр} = F/\beta$.

Нехай тіло рухається вздовж одного напрямку при наявності сил внутрішнього тертя і постійно діючої сили, проекцію якої на напрямок руху позначимо через F_0. Тоді рівняння руху можна записати так:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right) = F_0 - \beta \cdot v. \tag{13.5}$$

Нехай в початковий момент часу $t = 0$, тіло було нерухомим, тобто $v = 0$. Розділимо змінні у формулі (13.5) та зінтегруємо:

$$mdv = (F_0 - \beta \cdot v)dt \quad \Rightarrow \quad mdv = F_0\left(1 - \frac{\beta \cdot v}{F_0}\right)dt$$

або

$$\frac{dv}{1 - \frac{\beta \cdot v}{F_0}} = \frac{F_0}{m}dt$$

Тоді

$$\int_0^v \frac{dv}{1-\dfrac{\beta\cdot v}{F_0}} = \frac{F_0}{m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{F_0}{\beta}\int_0^v \frac{d\left(1-\dfrac{\beta\cdot v}{F_0}\right)}{1-\dfrac{\beta\cdot v}{F_0}} = \frac{F_0}{m}\int_0^t dt$$

Або

$$\frac{F_0}{\beta}\ln\left(1-\frac{\beta\cdot v}{F_0}\right) = -\frac{F_0}{m}t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1-\frac{\beta\cdot v}{F_0}\right) = -\frac{\beta}{m}t\,.$$

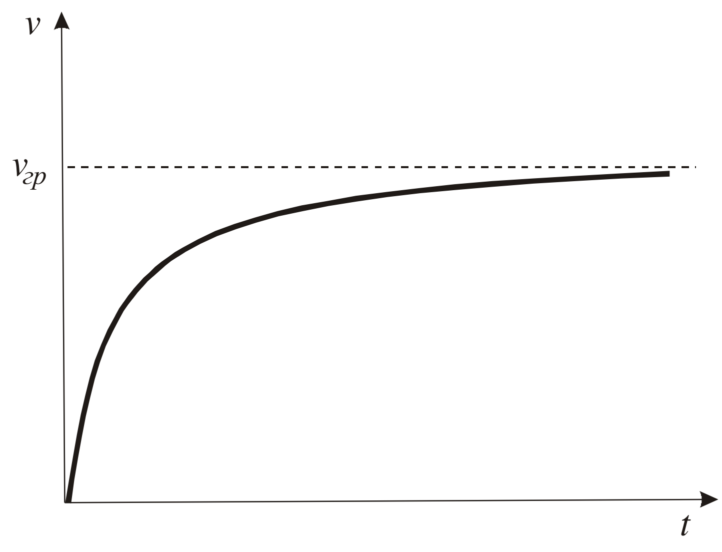
За означенням логарифму

$$1-\frac{\beta}{F_0}\cdot v = e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{F_0}\cdot v = 1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\,.$$

Остаточно маємо

$$v(t) = \frac{F_0}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta}{m}t}\right). \qquad (13.6)$$

Графічно це зображається так:



14 Динаміка тіл змінної маси

14.1 Рівняння Мещерського

Якщо розглянути рух ракети, то легко дійти висновку, що сила тяги виникає внаслідок швидкого відкидання газів у напряму, протилежному напрямку дії сили. Така сила називається ***реактивною***, оскільки згідно з III законом Ньютона вона виникає як сила реакції. Двигун же, який працює за таким принципом, називають ***реактивним***.

Існує принципова різниця між реактивним рухом та іншими видами руху. Для прикладу розглянемо рух ракети і рух звичайного гвинтового літака. При русі ракети сила тяги виникає внаслідок відкидання газів, які до виникнення цієї сили **входили до маси ракети**. У випадку руху літака також відбувається відкидання повітря гвинтом, але **маса повітря не є частиною літака.**

Отже, розглядаючи реактивний рух, потрібно обов'язково враховувати зміну маси тіла з часом.

Розглянемо рівняння руху тіла, маса якого змінюється з часом.

Нехай $m(t)$ - маса тіла у деякий момент часу t, а $\vec{v}(t)$ - його швидкість у той же момент. Тоді кількість руху тіла в цей момент часу буде дорівнювати $m\vec{v}$. Через проміжок часу dt маса і швидкість ракети отримають відповідні прирости dm та $d\vec{v}$ (причому $dm < 0$). Тоді кількість руху стане рівною $(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})$. Але до цієї величини необхідно додати ще й кількість руху відкинутих газів масою dm_1 зі швидкістю $\vec{v}_1$ за час dt, тобто величину $\vec{v}_1 dm_1$. Тоді закон збереження імпульсу для моментів часу t та $t + dt$ набуває вигляду:

$$(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})+\vec{v}_1 dm_1 = m\vec{v}. \qquad (14.1)$$

Або, якщо дія зовнішньої сили відсутня, то

$$(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})+\vec{v}_1 dm_1 - m\vec{v} = 0 \qquad (14.2)$$

Якщо ж на тіло, наприклад на ракету, діє деяка зовнішня сила, то вираз (14.2) набуде вигляду:

$$(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})+\vec{v}_1 dm_1 - m\vec{v} = \vec{F}dt. \qquad (14.3)$$

Оскільки ліва частина рівняння (14.3) – це приріст кількості руху за час dt, то зміна імпульсу повинна бути рівною $\vec{F}dt$, де $\vec{F}$ – рівнодіюча всіх зовнішніх сил.

Розкривши дужки, одержимо

$$m\vec{v} + md\vec{v} + \vec{v}dm + dm \cdot d\vec{v} + \vec{v}_1 dm_1 - m\vec{v} = \vec{F}dt . \qquad (14.4)$$

Зазначимо, що $dm \cdot d\vec{v} \cong 0$, як добуток двох нескінченно малих величин. Тоді

$$md\vec{v} + \vec{v}dm + \vec{v}_1 dm_1 = \vec{F}dt . \qquad (14.5)$$

При реактивному русі (як і при інших видах механічного руху) виконується закон збереження маси

$$dm + dm_1 = 0 . \qquad (14.6)$$

Користуючись формулою (16.6), з виразу (16.5) можна легко виключити величину dm_1, оскільки $dm_1 = -dm$

$$md\vec{v} + \vec{v}dm = \vec{F}dt + \vec{v}_1 dm$$

або

$$md\vec{v} = \vec{F}dt + (\vec{v}_1 - \vec{v})dm . \qquad (14.7)$$

Врахуємо, що $\vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{v}_{відн}$, а $\vec{v}_{відн}$ - це швидкість руху маси dm_1 відносно тіла, або, якщо розглядати ракету, то $\vec{v}_{відн}$ - це швидкість газів відносно ракети. Тоді рівняння (14.7) набуває вигляду:

$$md\vec{v} = \vec{F}dt + \vec{v}_{відн} dm \qquad (14.8)$$

або

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{відн}\frac{dm}{dt} + \vec{F} . \qquad (14.9)$$

За зовнішнім виглядом рівняння (14.9) співпадає з рівнянням II закону Ньютона. Проте у цьому рівнянні маса тіла – не є величиною постійною, а змінюється з часом. Крім того, до зовнішньої сили $\vec{F}$ додається ще один член: $\vec{v}_{відн}\frac{dm}{dt}$, який можна трактувати як ***реактивну силу***, тобто силу, з якою гази діють на ракету. Рівняння (14.8) називають ***рівнянням Мещерського.***

14.2 Рух тіла, на яке не діють зовнішні сили. Рівняння Ціолковського

Покладемо в рівнянні (14.8) $\vec{F}=0$. Одержимо

$$m d\vec{v}=\vec{v}_{відн} dm. \tag{14.10}$$

Припустимо, що рух ракети відбувається прямолінійно в напрямку, протилежному $\vec{v}_{відн}$. Якщо напрямок польоту обрати за додатній, то проекція вектора $\vec{v}_{відн}$ на цей напрямок буде від'ємною величиною. Тому в скалярній формі формула (14.10) має вигляд:

$$m dv=-v_{відн} dm \qquad \text{або} \qquad \frac{dv}{dm}=-\frac{v_{відн}}{m}. \tag{14.11}$$

Для полегшення розв'язку цього рівняння припустимо, що $v_{відн}=const$. Тоді з рівняння (14.11) маємо

$$dv=-v_{відн}\frac{dm}{m} \qquad \text{або} \qquad v=-v_{відн}\int\frac{dm}{m}=-v_{відн}\ln m+C\ . \tag{14.12}$$

Константу *C* визначимо з початкових умов інтегрування. Припустимо, що в початковий момент часу швидкість ракети дорівнює нулю ($v=0$), а її маса дорівнює m_0. Підставивши початкові умови в (14.12), одержуємо

$$\frac{m_0}{m}=e^{\frac{v}{v_{відн}}}\ . \tag{14.13}$$

Це співвідношення називається ***формулою Ціолковського***, яка є справедливою лише для випадку, коли $v \ll c$ і $v_{відн} \ll c$, де c – швидкість світла.

Узагальнимо формулу (14.13) для випадку релятивістського руху. Якщо m_0 і m – маси спокою ракети у відповідні моменти часу, то навіть без розрахунків видно, що формула (14.13) дає занижене значення відношення $\frac{m_0}{m}$.

Дійсно, релятивістська маса зростає зі зростанням швидкості. Внаслідок цього, при одній і тій же витраті палива, "релятивістська ракета" досягає меншої швидкості, ніж швидкість, яка визначається за формулою (14.12).

Згідно з виразом (14.10)

$$m d\vec{v}=\vec{v}_{відн} dm \qquad \text{або} \quad m d\vec{v}=\left(\vec{v}_1-\vec{v}\right) dm.$$

Продиференцюємо цей вираз за часом, враховуючи, що $m_0 = \dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dv}{dt} = (v_1 - v)\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{14.14}$$

Але

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dm}{dt} + \frac{m}{c^2}\cdot\frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt}. \tag{14.15}$$

Підставимо (14.15) в (14.14)

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dv}{dt} = (v_1 - v)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dm}{dt} + \frac{m}{c^2}\cdot\frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt}\right];$$

$$\frac{dv}{dt}\left[\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - (v_1 - v)\cdot\frac{m}{c^2}\cdot\frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{v_1 - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dm}{dt};$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[1 - \frac{(v_1 - v)v}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right]\frac{dv}{dt} = \frac{v_1 - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dm}{dt};$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{c^2 - v^2 - v_1 v + v^2}{c^2 - v^2}\right]\frac{dv}{dt} = \frac{v_1 - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dm}{dt};$$

$$\frac{m}{c^2 - v^2} \cdot c^2 \left(1 - \frac{v_1 v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} = (v_1 - v) \frac{dm}{dt}. \tag{14.16}$$

В спеціальній теорії відносності, згідно з формулами додавання швидкостей,

$$v_{відн} = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{v_1 v}{c^2}}. \tag{14.17}$$

Звідси випливає, що $v_1 - v = v_{відн}\left(1 - \frac{v_1 v}{c^2}\right)$. Підставивши значення $v_1 - v$ в (14.17), маємо

$$\frac{mc^2}{c^2 - v^2} \cdot \left(1 - \frac{v_1 v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} = v_{відн} \left(1 - \frac{v_1 v}{c^2}\right) \frac{dm}{dt}$$

або

$$\frac{mc^2}{c^2 - v^2} \cdot \frac{dv}{dt} = v_{відн} \cdot \frac{dm}{dt}.$$

Тоді

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{v_{відн}}{c^2} \cdot \frac{dm}{m}. \tag{14.18}$$

Проінтегруємо вираз (14.18), враховуючи, що швидкість змінюється від v_0 до v, а маса від m до m_0 (оскільки $m_0 > m$).

Спочатку знайдемо $\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{c^2 - v^2}$, перетворивши підінтегральний вираз у такий спосіб

$$\frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{c + v} + \frac{1}{c - v}\right).$$

Отримаємо

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{c^2-v^2}=\frac{1}{2c}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{c+v}+\frac{1}{2c}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{c-v}=\frac{1}{2c}\int_{v_0}^{v}\frac{d(c+v)}{c+v}-\frac{1}{2c}\int_{v_0}^{v}\frac{d(c-v)}{c-v}=$$

$$=\frac{1}{2c}\ln(c+v)\Big|_{v_0}^{v}-\frac{1}{2c}\ln(c-v)\Big|_{v_0}^{v}=\frac{1}{2c}\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right)_{v_0}^{v}=$$

$$=\frac{1}{2c}\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right)-\frac{1}{2c}\ln\left(\frac{c+v_0}{c-v_0}\right)=\frac{1}{2c}\ln\left[\frac{(c+v)(c-v_0)}{(c-v)(c+v_0)}\right].$$

Тепер знайдемо $\int_{m}^{m_0}\frac{dm}{m}$:

$$\int_{m}^{m_0}\frac{dm}{m}=\ln m\Big|_{m}^{m_0}=\ln\frac{m_0}{m}.$$

Тоді рівняння (14.18) набуває вигляду:

$$\frac{1}{2c}\ln\left[\frac{(c+v)(c-v_0)}{(c-v)(c+v_0)}\right]=\frac{v_{відн}}{c^2}\cdot\ln\frac{m_0}{m}. \tag{14.19}$$

Або

$$\frac{c}{2v_{відн}}\ln\left[\frac{(c+v)(c-v_0)}{(c-v)(c+v_0)}\right]=\ln\frac{m_0}{m}.$$

Тоді

$$\frac{m_0}{m}=\left[\frac{(c+v)(c-v_0)}{(c-v)(c+v_0)}\right]^{\frac{c}{2v_{відн}}}. \tag{14.20}$$

Коли ракета починає розгін зі стану спокою, то $v_0 = 0$, і тоді формула (14.20) буде мати вигляд:

$$\frac{m_0}{m}=\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\frac{c}{2v_{відн}}}\quad\Rightarrow\quad m_0=m\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\frac{c}{2v_{відн}}}. \tag{14.21}$$

Вираз (12.21) і являє собою так звану ***релятивістську формулу Ціолковського.***

Запишемо (14.21) у вигляді:

$$m_0 = m\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2v_{відн}}},$$

де $\beta \equiv \frac{v}{c}$.

У випадку, коли $\beta << 1$ і $\frac{v_{відн}}{c} << 1$, отримуємо $\frac{1+\beta}{1-\beta} \approx 1 + 2\beta$ (два члени ряду Тейлора).

Тоді

$$\frac{m_0}{m} \approx (1+2\beta)^{\frac{c}{2v}\cdot\frac{v}{v_{відн}}} = (1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}\cdot\frac{v}{v_{відн}}}. \qquad (14.22)$$

Оскільки величина 2β є дуже малою, то

$$(1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}} \approx \lim_{\beta\to 0}(1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}} = e.$$

І тоді вираз (14.22) остаточно набуває вигляду:

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{відн}}},$$

що і є формулою Ціолковського (14.13), яку виведено було вище для малих швидкостей руху.

15 Зіткнення

15.1 Поняття зіткнень. Закони збереження при зіткненнях

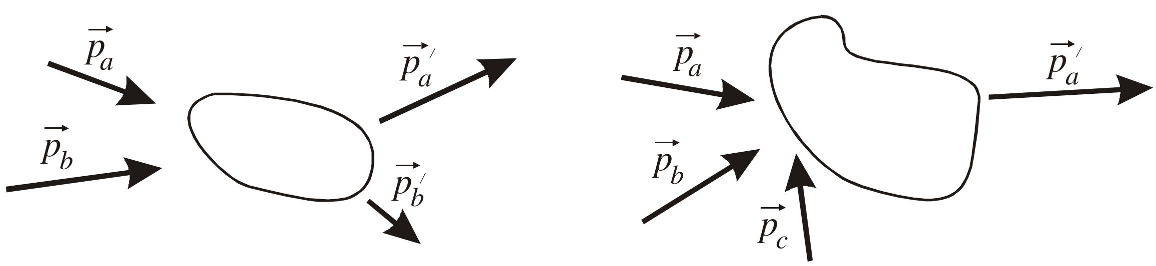
Якщо при взаємодії матеріальних тіл в момент їх наближення змінюються швидкості, кінетичні енергії чи внутрішній стан (наприклад, температура, тиск тощо), то про таку взаємодію тіл говорять як про ***зіткнення***.

Проте говорити про зіткнення можна не лише у випадку взаємодії, при якій тіла безпосередньо контактують. Наприклад, процес зближення космічних тіл також є зіткненням, хоча прямого дотику (контакту) між тілами може й не бути. Характерною особливістю такого зіткнення є те, що область простору, в якій воно відбувається, є малою порівняно з траєкторіями (переміщеннями) тіл. Найпомітнішою зміна характеристик звичайно буде при максимально можливому зближенні взаємодіючих тіл.

Таким чином, ***зіткненням можна назвати взаємодію n матеріальних точок (тіл) у відносно малій області простору на протязі відносно малого проміжку часу***. За межами зазначеної області взаємодії і проміжку часу, протягом якого відбувалося зіткнення, є сенс говорити про початкові та кінцеві стани тіл, тобто про такі стани, коли взаємодією між тілами можна знехтувати.

У механіці безпосереднє зіткнення матеріальних тіл часто називають ***ударом***. У цьому випадку зіткнень імпульси взаємодіючих тіл змінюються, а координати залишаються постійними.

Процеси зіткнення прийнято зображати за допомогою діаграм. При цьому тіла (матеріальні точки), які беруть участь у зіткненнях, зображають за допомогою векторів їхніх імпульсів.



Замкнута крива – це схематичне зображення області взаємодії. Процес зіткнення досить складний. Кількість тіл (матеріальних точок), які мають певний імпульс (тобто рухаються), як видно з діаграм, може бути різною, оскільки деякі з них можуть бути нерухомими до зіткнення, а після зіткнення починають рухатись і навпаки. Але між величинами, які описують поведінку тіл до зіткнення та після зіткнення (тобто в початковому і кінцевому станах) виконуються відповідні співвідношення, які не залежать від детального характеру взаємодії. Це обумовлено тим, що множина тіл (або матеріальних точок), що беруть участь у зіткненнях, являє собою ізольовану систему, для якої виконуються закони збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу.

Закон збереження імпульсу при зіткненнях можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{j=1}^{k} \vec{p}\,'_j \,. \tag{15.1}$$

Різні індекси обумовлені тим, що кількість взаємодіючих об'єктів до і після зіткнення може бути різною.

Закон збереження енергії. Формулюючи вище закон збереження енергії, ми враховували лише механічну енергію системи, тобто кінетичну та потенціальну енергію, а в релятивістському випадку ще й енергію спокою. Проте при вивченні зіткнень необхідно брати до уваги й інші види енергії, зокрема внутрішню енергію, величина якої залежить від стану частинок, з яких складаються тіла, що взаємодіють. Якщо позначити внутрішню енергію $E_{вн}$, а кінетичну енергію E_k, то у випадку зіткнення закон збереження енергії можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(E_{вн_i} + E_{k_i} \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(E'_{вн\,j} + E'_{k\,j} \right). \tag{15.2}$$

Формулу (15.2) записано для випадку, коли зміна потенціальної енергії між взаємодіючими тілами не враховується, оскільки вище було відмічено, що існує початкове і кінцеве положення тіл, тобто таке положення, коли тіла можна вважати такими, що не взаємодіють.

Закон збереження моменту імпульсу. Використовуючи цей закон при зіткненнях, необхідно враховувати, що взаємодіючі об'єкти можуть мати внутрішні моменти імпульсу, обумовлені обертанням (приклади: Земля, "класичний" електрон, тощо). Тоді, якщо позначити моменти імпульсів об'єктів, які беруть участь у зіткненні через $\vec{L}_i$, а через $\vec{L}_{вн_i}$ - їхні внутрішні моменти імпульсів, то закон збереження моменту імпульсу при зіткненні можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{L}_i + \vec{L}_{вн_i} \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\vec{L}'_j + \vec{L}'_{вн\,j} \right). \tag{15.3}$$

15.2 Пружні та непружні зіткнення

Якщо при взаємодії тіл під час зіткнення внутрішня енергія змінюється, то зіткнення називається ***непружним***, а якщо не змінюється – то ***пружним***. Розрізняють також ***абсолютно пружний*** і ***абсолютно непружний удари***.

Абсолютно пружний удар. Практично таких випадків, коли при зіткненні макроскопічних тіл не змінюється їх внутрішня енергія, в природі не зустрічається. Але до цього можна наблизитись, обираючи матеріали взаємодіючих тіл. В мікросвіті випадок абсолютно пружного зіткнення може бути реалізованим. Це пояснюється законами квантової механіки.

Розглянемо центральні удари абсолютно пружних куль. У цьому випадку до удару швидкості куль $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ є напрямленими вздовж прямої, яка з'єднує їхні центри. Ця пряма називається лінією центрів. Під час абсолютно пружного удару кулі при зіткненні "сплющуються" і кінетична енергія частково переходить в потенціальну енергію пружних деформацій. Причому, в деякий момент часу вся кінетична енергія переходить в потенціальну енергію пружно деформованих куль. В цей момент кулі будуть аналогічні стиснутим пружинам, які намагаються повернутись до недеформованого стану. Внаслідок цього починається перехід енергії пружних деформацій в кінетичну енергію поступального руху куль. Після закінчення переходу кулі розлітаються в різні боки і знову стають недеформованими. Отже, сумарна кінетична енергія поступального руху куль знову набуває початкового значення (тобто значення енергії до удару).

Швидкості куль після зіткнення $\vec{v}_1'$ і $\vec{v}_2'$легко знайти із законів збереження імпульсу та енергії:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'; \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} \dfrac{m_2 v_2'^2}{2}. \end{cases} \tag{15.4}$$

Ця система повинна мати два розв'язки. Один з них: $\vec{v}_1 = \vec{v}_1'$ та $\vec{v}_2 = \vec{v}_2'$. Але цей розв'язок не задовольняє умові задачі. Йому відповідає випадок, коли швидкості куль не змінились, тобто кулі не взаємодіяли.

Знайдемо розв'язок рівнянь (15.4) в випадку, коли $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_1'$ і $\vec{v}_2 \neq \vec{v}_2'$.

Запишемо (15.4) в проекціях на обраний напрямок (вздовж лінії центрів) у вигляді

$$\begin{cases} m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2')\ ; \\ m_1\left(v_1'^2 - v_1^2\right) = m_2\left(v_2^2 - v_2'^2\right). \end{cases}$$

Розділимо почленно обидва рівняння, оскільки $v_1' - v_1 \neq 0$ і $v_2' - v_2 \neq 0$. Отримаємо

$$\frac{1}{v_1' + v_1} = \frac{1}{v_2' + v_2} \quad \Rightarrow \quad v_1' + v_1 = v_2' + v_2$$

Звідки

$$v_2' = v_1' + v_1 - v_2; \quad v_1' = v_2' + v_2 - v_1. \tag{15.5}$$

Підставимо значення v_2' в перше рівняння системи (15.4):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_1' + m_2 v_1 - m_2 v_2;$$
$$(m_1 + m_2) v_1' = 2 m_2 v_2 - (m_2 - m_1) v_1;$$
$$v_1' = \frac{2 m_2 v_2 - (m_2 - m_1) v_1}{(m_1 + m_2)}. \tag{15.6}$$

Аналогічно, використовуючи (15.5), знайдемо v_2':

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_2' + m_1 v_2 - m_1 v_1 + m_2 v_2';$$
$$(m_1 + m_2) v_2' = 2 m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2;$$
$$v_2' = \frac{2 m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2}{(m_1 + m_2)}. \tag{15.7}$$

Абсолютно непружний удар. Абсолютно непружний удар є прикладом того випадку, де має місце втрата механічної енергії під дією дисипативних сил. Це таке зіткнення двох тіл, в результаті якого вони з'єднуються і далі рухаються як одне ціле. Прикладом може бути рух кулі, яка попадає в мішок з піском, або рух пластилінових куль після зіткнення.

Розглянемо абсолютно непружний удар на прикладі зіткнення двох куль. Нехай кулі рухаються вздовж прямої, що з'єднує їх центри зі швидкостями $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$, тобто розглянемо центральний удар. Позначимо спільну швидкість куль після удару через $\vec{v}$. Тоді закон збереження імпульсу в проекціях на обраний напрямок руху запишеться у вигляді

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

звідки

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{15.8}$$

Закон збереження для випадку непружного удару куль матиме вигляд

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v}{2} + E_{вн}, \qquad (15.9)$$

де $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = E_{k_1}$ - кінетична енергія куль до зіткнення;

$\frac{(m_1 + m_2)v}{2} = E_{k_2}$ - кінетична енергія куль після зіткнення;

$E_{вн}$ - частка кінетичної енергії E_{k_1}, яка перейшла у внутрішню енергію.

Тоді , використовуючи (15.8), маємо

$$E_{вн} = E_{k_1} - E_{k_2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v}{2} =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}}{2} =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 v_2^2 (m_1 + m_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 \left(v_1^2 - 2 v_1 v_2 + v_2^2\right)}{2(m_1 + m_2)}.$$

Або

$$E_{вн} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(v_1 - v_2\right)^2. \qquad (15.10)$$

Введемо у виразі (15.10) позначення $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ і назвемо його ***зведеною масою*** куль. Тоді формула (15.10) набуває вигляду

$$E_{вн} = E_{k_1} - E_{k_2} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \left(v_1 - v_2\right)^2. \qquad (15.11)$$

Отже, ми дійшли висновку, що ***при зіткненні двох абсолютно непружних куль відбувається втрата кінетичної енергії макроскопічного руху, яка дорівнює половині добутку зведеної маси на квадрат відносної швидкості. При цьому внутрішня енергія тіл після взаємодії підвищується на таку ж величину і, таким чином, закон збереження енергії не порушується.***

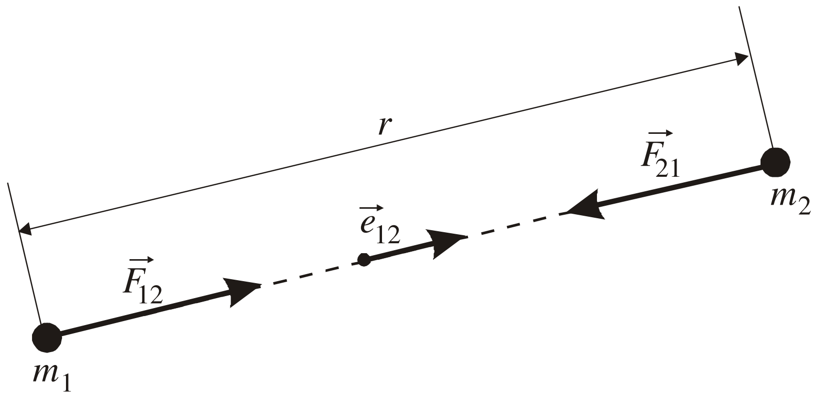
16 Рух у полі сили тяжіння

16.1 Закон всесвітнього тяжіння

Класичну нерелятивістську теорію гравітації було створено Ньютоном в 1678 році. Він показав, що дві матеріальні точки з масами m_1 і m_2 притягуються одна до одної із силою, що є обернено пропорційною квадрату відстані між ними, тобто модуль цієї сили складає

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{16.1}$$

Коефіцієнт пропорційності G називають гравітаційною сталою. Сили взаємного притягання є напрямленими вздовж прямої, яка з'єднує матеріальні точки.



Якщо прийняти такі позначення, як на рисунку, то сила, з якою, наприклад, друга матеріальна точка притягує першу, у векторній формі може бути позначена як

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot \vec{e}_{12}, \tag{16.2}$$

де $\vec{e}_{12}$ - одиничний вектор, направлений від першої точки до другої. Сила $\vec{F}_{21}$ відрізняється від сили $\vec{F}_{12}$ лише знаком, тобто $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Необхідно підкреслити, що формули (16.1) і (16.2) є справедливими лише для матеріальних точок, тобто тіл, розмірами яких можна знехтувати у порівнянні з відстанями між ними.

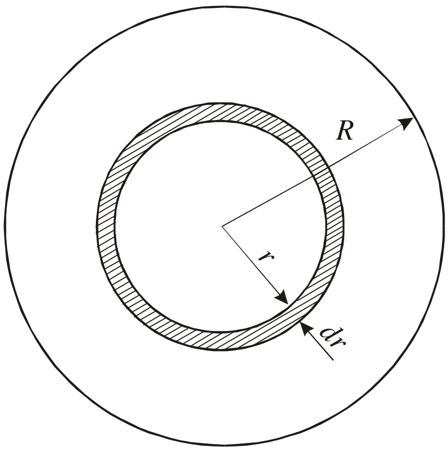
Потенціальна ж енергія матеріальної точки m_2 у полі тяжіння матеріальної точки m_1 буде відповідати співвідношенню

$$E_n = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (16.3)$$

Але потенціальна енергія матеріальної точки m_1 в полі тяжіння точки m_2 буде мати таке ж саме значення. Таким чином, можна стверджувати, що величина E_n у формулі (16.3) є енергією взаємодії матеріальних точок m_1 і m_2.

16.2 Гравітаційна енергія кулеподібного тіла

Припустимо, що існує куля масою M і радіусом R, і ще припустимо, що матеріальні частки цієї кулі взаємодіють одна з одною. З такою взаємодією пов'язана ***енергія гравітаційного поля*** або так звана ***гравітаційна енергія***. Чисельно така енергія буде дорівнювати роботі, необхідній для того, щоб речовину кулі рознести по всьому нескінченному простору. Припустимо, що маса розподілена в кулі рівномірно з деякою густиною $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$. Будемо видаляти речовину на нескінченність пошарово, починаючи з поверхні. Крім того, припустимо також, що шар речовини, який видаляється, є нескінченно тонким, тобто не утворює ніякого гравітаційного поля в обмежуваній ним частині кулі.



Згідно з рисунком, в шарі товщиною dr на відстані r від центра кулі зосереджена маса $dm = \rho 4\pi r^2 dr$. Якщо такий шар видалити, то на нього буде діяти лише гравітаційне поле маси, яка знаходиться в об'ємі кулі, обмеженому радіусом r. Тоді робота по видаленню шару на нескінченність буде чисельно дорівнювати потенціальній енергії цього шару в гравітаційному полі, яке утворюється всіма коаксіальними внутрішніми шарами, тобто

$$dE_г = -G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{r}. \qquad (16.4)$$

Інтегруючи вираз (16.4), одержимо

$$E_г = -G\frac{16\pi^2\rho^2}{3}\int_0^R r^4 dr = -G\frac{16\pi^2\rho^2}{15}R^5.$$

Але $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$. Тоді

$$E_г = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}. \qquad (16.5)$$

Вираз (16.5) і визначає енергію гравітаційного поля, пов’язану з гравітаційним притяганням елементів мас, із яких складається куля.

16.3 Гравітаційний радіус

Відомо, що енергія спокою тіла масою M дорівнює Mc^2. Виникає питання, чи не буде ця енергія енергією гравітаційного поля, яка перетворилась в енергію маси спокою при стяганні матерії із розсіяного на нескінченності стану?

Для того, щоб знайти радіус кулі, для якої відповідь на поставлене запитання була б позитивною, здійснимо грубе порівняння гравітаційної енергії з енергією маси спокою, відкинувши числові коефіцієнти

$$G\frac{M^2}{R} \sim Mc^2 \quad \Rightarrow \quad r \sim \frac{GM}{c^2}.$$

Величину $r_г = \frac{GM}{c^2}$ називають гравітаційним радіусом.

Якщо обчислити гравітаційний радіус Землі, то він буде рівним приблизно 0,4 см. А це означає, що якби гравітаційна енергія маси Землі дорівнювала б енергії маси спокою, то потрібно було б всю масу стиснути в кульку діаметром близько 1 см. Реальний же радіус Землі має порядок 10^9 см. Таким чином, у загальному енергетичному балансі Землі гравітаційна енергія відіграє настільки незначну роль, що нею у переважній більшості розрахунків можна нехтувати.

16.4 Основні закони руху планет і комет

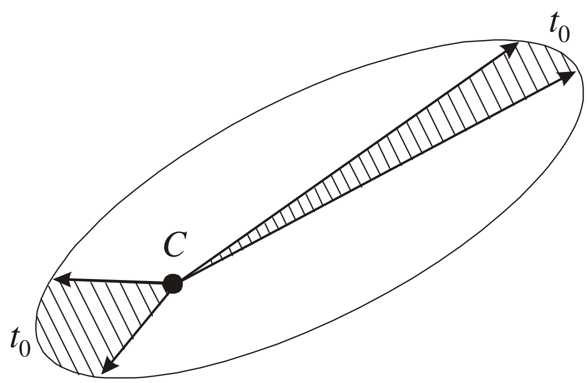
Рух небесних тіл може бути описаним за допомогою трьох основних законів механіки і закону всесвітнього тяжіння.

На основі спостережень Тіхо Браге німецький астроном Йоган Кеплер відкрив такі закони руху планет навколо Сонця.

Перший закон Кеплера. ***Орбіти всіх планет являють собою еліпси, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.***

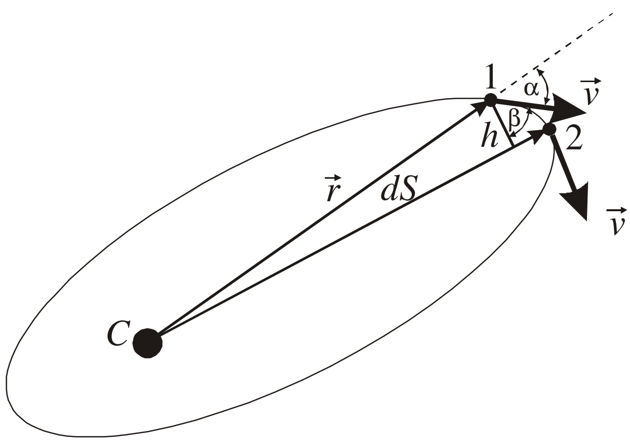
Цей закон випливає безпосередньо з означення траєкторії руху матеріальної точки під дією центральної сили, величина якої є обернено пропорційною квадрату відстані від центра.

Другий закон Кеплера. ***Рух кожної планети відбувається так, що радіус-вектор, який з'єднує центр Сонця з планетою, за рівні проміжки часу описує однакові площі.***



Доведення

На планету, що рухається навколо Сонця, діє сила тяжіння, модуль якої дорівнює $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ (де M – маса Сонця, m – маса планети). Ця сила завжди направлена до Сонця. Тоді момент імпульсу планети відносно центра Сонця буде постійним, тобто $\vec{r} \times m\vec{v} = const$.



Оскільки $m = const$, то це рівняння можна записати у вигляді добутку $\vec{r} \times \vec{v} = const$. Припустимо, що пройдений планетою шлях ds за час dt з точки 1 до точки 2 є настільки малим, що його можна апроксимувати відрізком прямої (тобто $ds = vdt$). Тоді згідно з рисунком маємо:

$$dS = \frac{1}{2}rh = \frac{1}{2}rvdt\cos\beta = \frac{1}{2}rvdt\cos\left(90^{\circ} - \alpha\right) = \frac{1}{2}rv\sin\alpha dt, \qquad (16.6)$$

де α - кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{v}$.

Але $rv\sin\alpha = const$, оскільки $\vec{r} \times \vec{v} = const$. Тоді вираз (16.6) можна записати так:

$$dS = \frac{1}{2}const \cdot dt \quad \Rightarrow \quad 2\frac{dS}{dt} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = const,$$

а це й треба було довести.

Третій закон Кеплера. ***Квадрати періодів обертання різних планет навколо Сонця відносяться як куби більших напівосей еліпсів орбіт.***

Доведення

Припустимо, що орбітами планет є кола, а не еліпси. Таке припущення є цілком можливим, оскільки ексцентриситети ε еліптичних орбіт малі (для орбіти Землі, наприклад $\varepsilon \approx 0{,}017$ ($\varepsilon = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}$, де a і b – напівосі).

Нехай планети мають маси m_1 і m_2, орбіти з радіусами r_1 і r_2 та періоди обертання T_1 і T_2. Тоді для першої планети можна записати

$$v_1^2 = \frac{GM}{r_1}, \qquad (16.7)$$

де M – маса Сонця.

Дійсно, $\dfrac{v_1^2}{r_1} = a_n$, але $a_n = \dfrac{F}{m}$, а $F = G\dfrac{mM}{r_1^2} \Rightarrow \dfrac{v_1^2}{r_1} = \dfrac{G\dfrac{mM}{r_1^2}}{m} \Rightarrow v_1^2 = \dfrac{GM}{r_1}$.

З іншого боку,

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}. \qquad (16.8)$$

Підставивши (16.8) в (16.7), маємо

$$\frac{4\pi^2 r_1^2}{T_1^2} = \frac{GM}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \tag{16.9}$$

Такий же вираз одержимо й для іншої планети

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \tag{16.10}$$

Порівнявши вирази (16.9) і (16.10), маємо

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

що й треба було довести.

16.5 Рух штучних супутників Землі (ШСЗ). Космічні швидкості

Припустимо, що ШСЗ – це тіло, якому на деякій висоті h надано швидкості v.

При невисокій початковій швидкості v, яка є меншою за критичну $v_{кр} = r_0\sqrt{\frac{g_0}{r_0 + h}}$, траєкторіями ШСЗ будуть відрізки еліпсів, а при зовсім малих швидкостях v – відрізки парабол. При $v = v_{кр} \approx 7{,}93$ км/с траєкторія тіла стане колом, а саме тіло стане ШСЗ. Доведемо це.

Модуль доцентрового прискорення тіла $a_n = \frac{v_{кр}^2}{r_0 + h}$ повинен дорівнювати модулю прискорення вільного падіння g, який на висоті h може бути записаним так

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2},$$

де r_0 – радіус Землі, а g_0 – прискорення на поверхні Землі. Тоді

$$\frac{v_{кр}^2}{r_0 + h} = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2} \quad \Rightarrow \quad v_{кр} = r_0\sqrt{\frac{g_0}{r_0 + h}}.$$

Якщо $h << r_0 \quad \Rightarrow v_{кр} = \sqrt{r_0 g_0} \approx 7{,}93$ км/с. Цю швидкість називають ***першою космічною швидкістю***.

Другою космічною швидкістю v_2 називають таку швидкість, яку повинне мати тіло поблизу поверхні Землі для того, щоб покинути межі земного тяжіння.

Якщо не приймати до уваги опір повітря, то згідно із законом збереження енергії

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{r_0}.$$

Але $\dfrac{GM}{r_0^2} = g \quad \Rightarrow \quad \dfrac{mv^2}{2} = mgr_0$. Тоді маємо

$$v_2 = \sqrt{2gr_0} \approx 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Третьою космічною швидкістю v_3 називають таку швидкість, яку необхідно надати тілу, віддаленому від Сонця на відстань радіуса орбіти Землі R_0, для того, щоб воно покинуло межі Сонячної системи. Знаходять v_3 із закону збереження енергії:

$$\frac{Mv_3^2}{2} = G\frac{MM_C}{R_0} \quad .$$

Тоді

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_0}} \approx 42 \text{ км/с}.$$

Існує ще один спосіб визначення v_3. Вважають, що це така швидкість, яку повинне мати тіло відносно Землі поблизу її поверхні, щоб покинути межі Сонячної системи. Але в залежності від напрямку запуску тіла (протилежно чи співнаправлено зі швидкістю руху Землі навколо Сонця) буде існувати невизначеність у числовому значенні v_3 (відповідно, 72 км/с та 16,5 км/с). Тому перший варіант визначення v_3 є більш загальним.

17 Деформації і напруження в твердих тілах

17.1 Ідеально пружні тіла

Зміна зовнішніх сил, які діють на тіло, викликає зміну форми тіла та його об'єму. Такі зміни називаються ***деформаціями***. При вивченні твердих тіл розрізняють два граничних випадки: ***пружні деформації*** та ***пластичні деформації***.

Пружними називають такі деформації, які зникають після припинення дії прикладених сил.

Пластичними (або залишковими) називають такі деформації, які зберігаються в тілі (хоча б частково) після припинення дії зовнішніх сил.

Вид деформації залежить не тільки від матеріалу тіла, але й від величини прикладених сил. Якщо відношення сили до площі, тобто ***механічне напруження*** $\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{S}$, не перевищує деякої певної величини, яку називають ***границею пружності***, то виникаюча деформація буде пружною, а коли перевищує - то пластичною. Для різних матеріалів границя пружності має різні значення. В реальних матеріалах практично всі деформації після припинення дії зовнішніх сил повністю не зникають. Але, якщо величини залишкових деформацій досить малі, то в багатьох випадках їх не беруть до уваги (нехтують).

Будемо вивчати лише пружні деформації, а самі тіла будемо вважати ***абсолютно пружними***, тобто такими, які можуть зазнавати лише пружних деформацій. Для ідеально пружних тіл існує однозначна залежність між діючими силами та деформаціями, які вони викликають. Обмежимось вивченням малих деформацій, тобто таких, які описуються ***законом Гука***, згідно з яким ***деформації завжди є прямо пропорційними силам, що їх викликають***.

Розглянемо деформацію, що виникає у довгому стальному стержні під час його розтягання. У випадку однорідності (ізотропності) стержня він буде мати однорідну деформацію розтягання, яку можна характеризувати відносним видовженням

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_i}{l_i}, \tag{17.1}$$

де Δl_i - видовження деякого відрізка стержня, який мав початкову довжину l_i. Величини напружень, виникаючих при цьому в стержні, будуть визначатися співвідношенням

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{17.2}$$

де S - площа поперечного перерізу стержня.

Згідно з дослідними даними, при малих деформаціях відносна деформація ε пов'язана з напруженням простим законом пропорційності (інший варіант запису закону Гука)

$$\sigma = \varepsilon E. \tag{17.3}$$

Коефіцієнт пропорційності E для даного матеріалу є величиною постійною, має розмірність механічного напруження і називається ***модулем Юнга.***

З формули (17.3) безпосередньо випливає фізичний зміст модуля Юнга: ***модуль Юнга чисельно дорівнює механічним напруженням, які призводять до такої деформації стержня, при якій його відносне видовження дорівнює одиниці або (що те саме), при якому його довжина зростає вдвічі.*** Звичайно, в межах пружних деформацій таке здійснити неможливо, тому модуль Юнга розраховують теоретично.

Дослід показує, що під дією розтягуючої або стискуючої сили змінюються не лише поздовжні, а й поперечні розміри стержня Якщо прикладена сила є розтягуючою, то поперечні розміри стержня зменшуються, якщо стискуючою - то зростають.

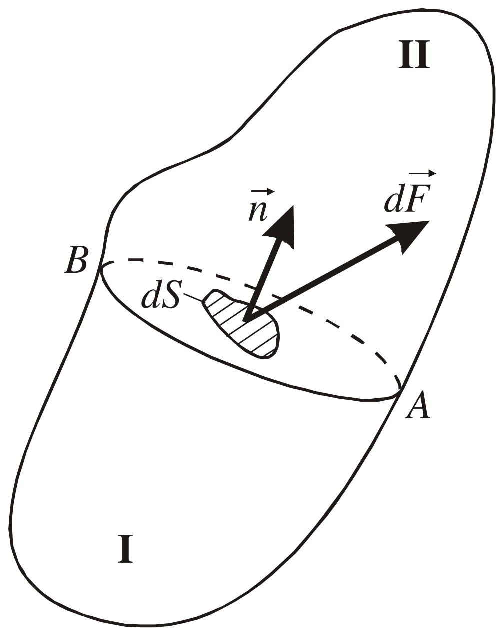
Нехай a_0 - товщина стержня до деформації, a – після деформації. Якщо сила $\vec{F}$ – розтягуюча, то величину $-\frac{\Delta a_0}{a} \approx -\frac{\Delta a}{a}$ називають відносним поперечним стисненням стержня. ***Відношення відносного поперечного стиснення до відповідного відносного поздовжнього видовження називають коефіцієнтом Пуасона*** (μ)**:**

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \frac{l}{a}. \tag{17.4}$$

Отже, модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона μ повністю характеризують пружні характеристики ізотропного матеріалу. Всі останні пружні константи можуть бути вираженими через E і μ.

17.2 Пружні напруження

Розглянемо довільно деформоване тіло. Уявно розділимо його на дві частини: тіло I і тіло II. Позначимо через AB поверхню розділу обох цих тіл. Оскільки тіло I є деформованим, то воно діє на тіло II з деякою силою; точно так тіло II діє на тіло I з протилежно направленою силою. Але для визначення деформацій недостатньо знати сумарні сили в перерізі *AB*, потрібно знайти ще й їх розподіл за перерізом.



Виберемо на поверхні *AB* нескінченно малу ділянку dS. Нехай $d\vec{F}$ - сила, з якою на цій ділянці тіло II діє на тіло I. Тоді напруження $\frac{d\vec{F}}{dS}$, яке діє у відповідній точці на тіло I, буде протилежним за напрямком і рівним за модулем напруженню, що діє в цій точці на тіло II.

Орієнтацію ділянки dS задамо за допомогою вектора її нормалі. Нехай $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі, а $\vec{\sigma}_n$ - відповідне напруження. Тоді $\vec{\sigma}_n$ буде визначати напруження на поверхні *AB* тіла II, з яким межує тіло I.

Вектор $\vec{\sigma}_n$ можна розкласти на нормальну та тангенціальну складові напруження, що діють на ділянці dS. Як і будь-який інший вектор, напруження $\vec{\sigma}_n$ можна характеризувати трьома проекціями: σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}. Перша літера кожного нижнього індексу визначає напрям зовнішньої нормалі до поверхні ділянки dS, а друга – координату осі, на яку проектується вектор $\vec{\sigma}_n$. Зокрема, вектор $\vec{\sigma}_x$ означає напруження на ділянці, зовнішня нормаль до якої паралельна додатному напрямку осі абсцис. Величини σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} означають проекції вектора $\vec{\sigma}_x$ на всі координатні осі.

Якщо треба визначити в тілі напруження на довільно орієнтованій у просторі ділянці у будь-якій її точці, достатньо задати напруження на трьох взаємно-перпендикулярних ділянках, що проходять через цю точку, тобто можна записати

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cdot n_x + \vec{\sigma}_y \cdot n_y + \vec{\sigma}_z \cdot n_z . \tag{17.5}$$

З виразу (17.5) випливає, що напруження у кожній точці пружно деформованого тіла можна визначити за допомогою трьох векторів $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$, $\vec{\sigma}_z$ або за допомогою їхніх дев'яти проекцій:

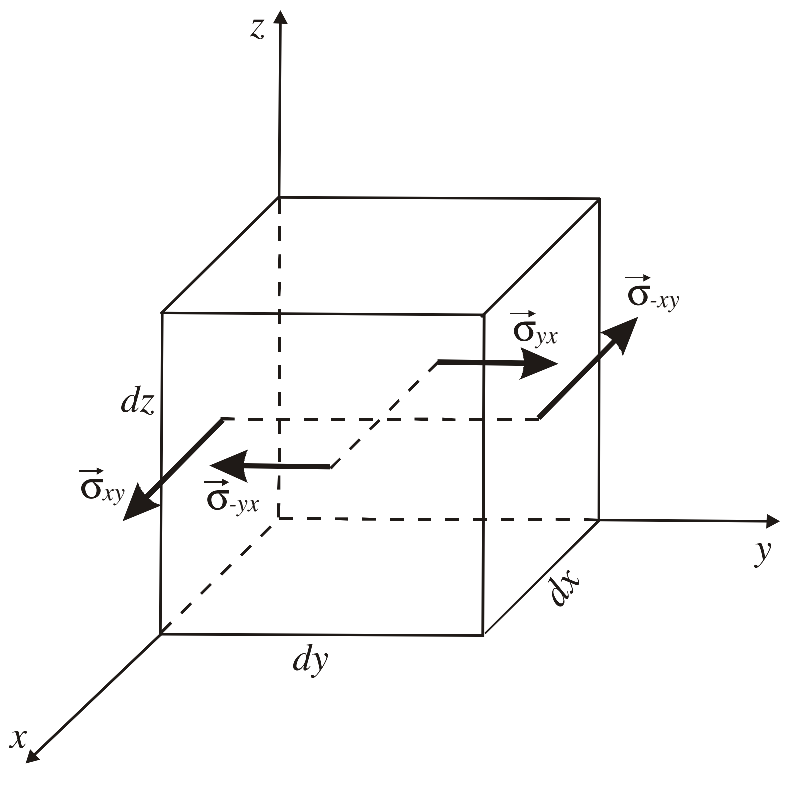
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{17.6}$$

Сукупність цих дев'яти величин називається ***тензором поля напружєєнь пружних деформацій.***

Теорема. Тензор поля напружень пружних деформацій є симетричним тензором, тобто $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (i, j = x, y, z)$.

Доведення

Розглянемо елементарний паралелепіпед речовини зі сторонами *dx*, *dy*, *dz*.



Обчислимо величину моменту сил M_z, діючого на цей паралелепіпед, відносно осі Z

$$M_z = (\sigma_{-xy} dzdx)dy - (\sigma_{-yx} dydz)dx = (\sigma_{-xy} - \sigma_{-yx})dV,$$

де $dV = dxdydz$ - об'єм паралелепіпеда.

Згідно з рівнянням моментів

$$(\sigma_{-xy} - \sigma_{-yx})dV = I_z \frac{d\omega_z}{dt}, \tag{17.7}$$

де I_z, ω_z - момент інерції та кутова швидкість відносно осі Z, відповідно.

Але величина I_z є пропорційною добутку маси на квадрат лінійних розмірів паралелепіпеда, тобто є величиною більш високого порядку малості, ніж dV. Внаслідок цього, при стяганні паралелепіпеда в точку права частина рівняння (17.7) швидше збігається до нуля, ніж ліва. Тоді одержимо, що в граничному випадку $\sigma_{-xy} = \sigma_{-yx}$. Розмірковуючи аналогічно, можна довести, що $\sigma_{-xz} = \sigma_{-zx}$ і $\sigma_{-yz} = \sigma_{-zy}$.

Необхідно зауважити, що, внаслідок доведеної теореми, координатну систему *XYZ* можна обрати таким чином, щоб у цій системі всі недіагональні елементи тензора стали дорівнювати нулю, тобто $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тоді в такій системі координат пружні напруження в кожній точці будуть визначатися лише трьома величинами $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$, які позначають ще $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Такі осі координат, вибір яких призводить до перетворення в нуль недіагональних елементів тензора, називають ***головними осями тензора пружних напружень***.

17.3 Енергія пружних деформацій

Обчислимо енергію пружних деформацій розтягнутого стержня. Для цього прикладемо до нього розтягуючу силу $f(x)$ і будемо повільно і безперервно збільшувати її від нуля до деякого кінцевого значення F. Оскільки сила є направленою вздовж стержня, то відразу будемо користуватися проекціями цієї сили на вісь, яку спрямуємо вздовж стержня. При цьому видовження стержня буде зростати від $x = 0$ до $x = \Delta l$. Згідно із законом Гука, $f(x) = kx$, де k - коефіцієнт, який визначається через модуль Юнга E. У процесі, що розглядається, вся робота, затрачена на розтягання стержня, піде на приріст енергії пружних деформацій U. Тому можна записати

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x)dx = k\int_0^{\Delta l} xdx = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{17.8}$$

Але, оскільки в кінцевому стані $x = \Delta l$, то $F = f(\Delta l)$.

Тоді

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l . \tag{17.9}$$

Якби ми відразу (миттєво) всю силу F приклали до недеформованого стержня, то при зміні його довжини на Δl було б виконано більшу роботу $A = F\Delta l$. А оскільки запас пружної потенціальної енергії в стержні одержався б таким, як і у виразі (17.9), то зрозуміло, що лише половина роботи A витрачається на приріст пружної енергії стержня. Інша половина витрачається на кінетичну енергію пружних коливань та хвиль, які завжди будуть збуджуватися у твердому тілі при квазістатичній (як у першому випадку) дії сили на нього. Тому у формулах (17.8) та (17.9) і виник коефіцієнт $\frac{1}{2}$.

Знайдемо об'ємну густину пружної енергії, тобто пружну енергію одиниці об'єму розтягнутого (або стиснутого) стержня. Для цього поділимо обидві частини виразу (17.9) на об'єм стержня $V = Sl$. В результаті отримаємо

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon . \tag{17.10}$$

Якщо врахувати те, що згідно із законом Гука $\sigma = E\varepsilon$, то формулу (17.10) можна записати ще й так

$$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 . \tag{17.11}$$

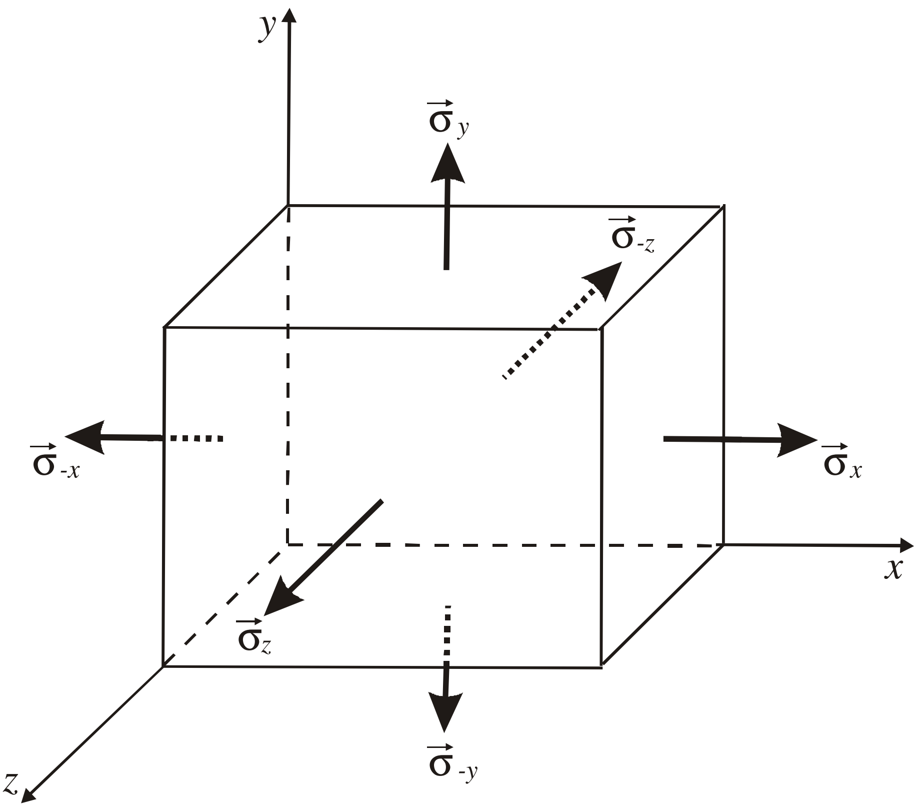
17.4 Деформації прямокутного паралелепіпеда під дією трьох взаємно перпендикулярних сил

Нехай деяке ізотропне тіло має форму паралелепіпеда, до протилежних граней якого прикладено сили F_x, F_y, F_z, причому ці сили є нормальними до граней. Відповідні напруження позначимо через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Визначимо виникаючі під дією зазначених сил деформації. Нехай *x*, *y*, *z* – довжини ребер паралелепіпеда. Якби на паралелепіпед діяла лише сила F_x, то ребро *x* одержало б приріст $\Delta_1 x$, який визначається із співвідношення

$$\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{\sigma_x}{E},$$

оскільки $\sigma_x = \varepsilon E = \dfrac{\Delta_1 x}{x} E$.



Далі, якби діяла лише сила F_y, то розміри паралелепіпеда, перпендикулярні до осі *Y*, скоротилися б. Ребро *x* одержало б при цьому від'ємний приріст $\Delta_2 x$, який визначається за формулою:

$$\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}.$$

А при дії лише сили F_z приріст ребра *x* буде

$$\frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Оскільки всі сили F_x, F_y, F_z діють одночасно, то згідно з принципом суперпозиції малих деформацій загальне видовження ребра *x* можна записати так: $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x + \Delta_3 x$.

Аналогічно обчислюються видовження ребер y і z. Тоді відносні видовження усіх трьох ребер паралелепіпеда можна записати у вигляді таких співвідношень:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\mu}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_z\right). \\ \varepsilon_z = \dfrac{\Delta z}{z} = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{cases} \tag{17.12}$$

При квазістатичному розтягуванні паралелепіпеда вздовж осі X виконується робота $A_1 = \frac{1}{2} S_x \sigma_x \Delta x$, де $S_x = yz$ – площа грані, перпендикулярної до осі X. Цю ж роботу можна записати і в такому вигляді

$$A_1 = \frac{1}{2} xyz \cdot \sigma_x \cdot \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2} V \sigma_x \varepsilon_x, \tag{17.13}$$

де V - об'єм паралелепіпеда.

Аналогічно, при квазістатичних розтяганнях в напрямках осей Y та Z, відповідні роботи можна записати так:

$$A_2 = \frac{1}{2} xyz \cdot \sigma_y \cdot \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{2} V \sigma_y \varepsilon_y. \tag{17.14}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} xyz \cdot \sigma_z \cdot \frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{2} V \sigma_z \varepsilon_z. \tag{17.15}$$

Тоді повна енергія деформованого паралелепіпеда складе $U = A_1 + A_2 + A_3$, або

$$U = \frac{1}{2} V \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} V \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} V \sigma_z \varepsilon_z = \frac{1}{2} V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z\right). \tag{17.16}$$

А густина цієї енергії

$$u = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z\right). \tag{17.17}$$

Підставимо у вираз (17.17) значення ε_i з формул (20.1):

$$u = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma_x^2}{E} - \frac{\sigma_x\mu}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) + \left(\frac{\sigma_y^2}{E} - \frac{\sigma_y\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right) + \left(\frac{\sigma_z^2}{E} - \frac{\sigma_z\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 - \mu\sigma_x\sigma_y - \mu\sigma_x\sigma_z + \sigma_y^2 - \mu\sigma_x\sigma_y - \mu\sigma_y\sigma_z + \sigma_z^2 - \mu\sigma_x\sigma_z - \mu\sigma_y\sigma_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right)\right] \tag{17.18}$$

Таким чином, з формули (17.18) випливає, що густина пружної енергії є квадратичною однорідною функцією від $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. При заданих напруженнях вона є обернено пропорційною до модуля Юнга.

17.5 Деформація зсуву

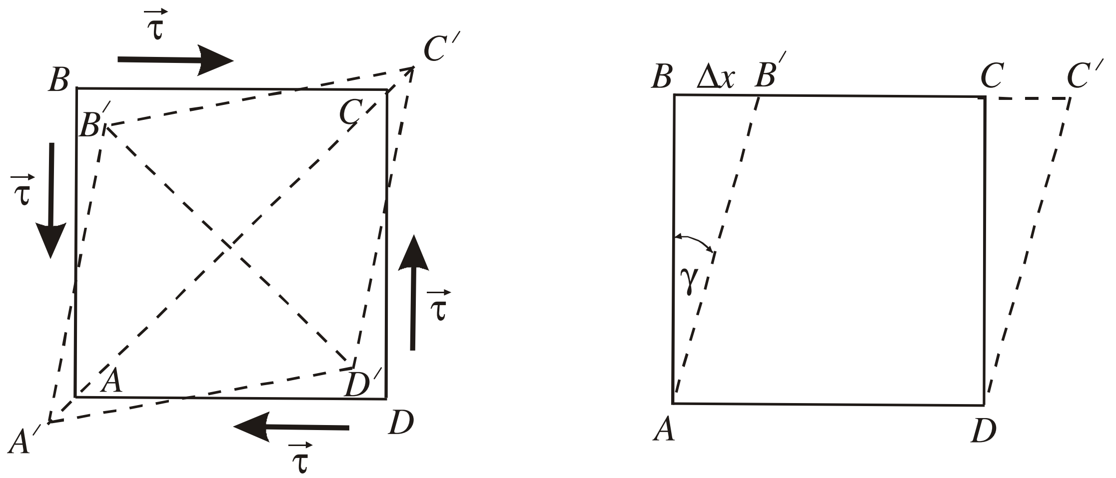
Виберемо ізотропне тіло кубічної форми і до протилежних його граней *AD* і *BC* прикладемо рівні і протилежно напрямлені дотичні сили. Вони утворюють пару сил, під дією яких куб починає обертатися. Щоб усунути обертання, прикладемо такі ж тангенціальні сили і до граней *AB* і *CD*. Тоді куб буде тільки деформуватися.

Під дією прикладених сил квадрат *ABCD* перетвориться в ромб *A'B'C'D'*, з видовженням діагоналі *AC* і скороченням діагоналі *BD* (рис. *а*). Об'єм при цьому практично змінюватися не буде, а відносні зміни об'єму будуть величинами більш високого порядку малості, ніж відносні зміни довжини діагоналей. Тому такими змінами об'єму знехтуємо. Внаслідок зазначених припущень після деформації куб можна умовно повернути так, щоб нова основа *A'D'* сумістилась з попередньою *AD* (рис. *б*).

З рис. *б* видно, що деформація полягає в тому, що всі шари куба, які є паралельними основі *AD*, зсуваються в одному і тому ж напрямку, паралельному цій же основі *AD*. Таку деформацію називають ***зсувом***. Кут γ називають ***кутом зсуву***. Припустимо, що кут γ є малим і скористуємося законом Гука у вигляді

$$\tau = G\gamma, \tag{17.19}$$

де τ – величина дотичного напруження, що діє на гранях куба. Постійну величину *G* називають ***модулем зсуву.*** Її величина залежить від властивостей матеріалу.



а *б*

З формули (17.19) безпосередньо випливає фізичний зміст модуля зсуву: ***модуль зсуву чисельно дорівнює величині таких тангенціальних (дотичних) механічних напружень, які призводять до зсуву на кут в один радіан.***

Знайдемо густину пружної енергії при деформації зсуву. Для цього, закріпивши сторону *AD* нерухомо, здійснимо квазістатичний зсув. Тоді вся робота піде на зростання пружної енергії і запишеться так

$$A = \frac{1}{2}\tau \cdot S \cdot \Delta x, \qquad (17.20)$$

де Δx – зміщення грані *BC* при зсуві, S - площа цієї грані.

Якщо позначити через *а* довжину ребра, то за умови, що кут γ є малим, $\Delta x \approx a\gamma$. Тоді

$$A = \frac{1}{2}\tau \cdot S \cdot a\gamma = \frac{1}{2}V\tau\gamma, \qquad (17.21)$$

де V - об’єм куба. Поділивши обидві частини виразу (17.21) на об’єм і врахувавши, що $\tau = G\gamma$, одержимо густину енергії:

$$u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (17.22)$$

Направимо осі координат по діагоналях. Нехай в напрямку осі X (вздовж діагоналі AC) квадрат (куб) є розтягнутим, а в напрямку осі Y – стиснутим. При цьому нехай розтягування забезпечується напруженням $\sigma_x = \tau$, а стиснення - напруженням $\sigma_y = -\tau$, а $\sigma_z = 0$ (для спрощення будемо розглядати двомірний випадок). Підставимо значення $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ у формулу (17.12). Тоді будемо мати:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\tau}{E} + \dfrac{\mu\tau}{E} = \dfrac{\tau}{E}(1+\mu) \\ \varepsilon_y = -\dfrac{\tau}{E} - \dfrac{\mu\tau}{E} = -\dfrac{\tau}{E}(1+\mu) \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases}$$

З цих співвідношень легко бачити, що

$$\begin{cases} \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases}$$

і, як наслідок,

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \qquad (17.23)$$

Нехай об’єм паралелепіпеда (куба) $V = xyz$. Прологарифмуємо обидві частини цього виразу. Тоді

$$\ln V = \ln x + \ln y + \ln z \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}.$$

Переходячи до кінцевих приростів, будемо мати

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Тоді, враховуючи (17.23), остаточно отримуємо $\dfrac{\Delta V}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 0$.

Цим самим доведено, що деформація зсуву не супроводжується зміною об’єму тіла.

Підставимо тепер значення $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ у формулу (17.18). Отримаємо

$$u = \frac{1}{2E}\left[\tau^2 + \tau^2 - 2\mu\left(-\tau^2\right)\right] = \frac{1}{2E}\left(2\tau^2 + 2\tau^2\mu\right) = \frac{\tau^2}{E}(1+\mu). \qquad (17.24)$$

Порівнявши вирази (17.22) і (17.24), маємо зв'язок між модулем зсуву G, коефіцієнтом Пуасона μ та модулем Юнга E

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2}{E}(1+\mu) \quad \Rightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (17.25)$$

17.6 Деформація кручення

Розглянемо неоднорідну деформацію кручення (***неоднорідними*** називають деформації, що змінюються від однієї точки до іншої точки).

Якщо закріпити дріт за верхній кінець, а до нижнього прикласти закручуючі тангенціальні сили, котрі призводять до виникнення обертового моменту, то дріт почне закручуватися. Кожний радіус нижньої основи повернеться навколо поздовжньої осі на кут φ. Така деформація називається деформацією ***кручення***. У цьому випадку закон Гука запишеться у вигляді

$$M = f\varphi, \qquad (17.26)$$

де f - постійна для даного дроту величина, яку називають ***модулем кручення***.

На відміну від модулів E, μ та G модуль кручення f залежить не тільки від матеріалу, з якого виготовлене тіло, що деформується, але й від його геометричних розмірів.

Отримаємо формулу для визначення модуля кручення f. Зробимо це для циліндричної трубки радіусом r і довжиною l, вважаючи, що товщина стінок dr є набагато меншою від радіуса трубки ($dr << r$). Площа основи такої трубки буде $S = 2\pi rdr$, а величина моменту сил, діючих на цю основу, складе

$$M = 2\pi rdr \cdot \tau \cdot r,$$

де τ – величина дотичного напруження в цій основі.

Якщо закручення дроту є квазістатичним, то робота, що виконується при цьому, запишеться так:

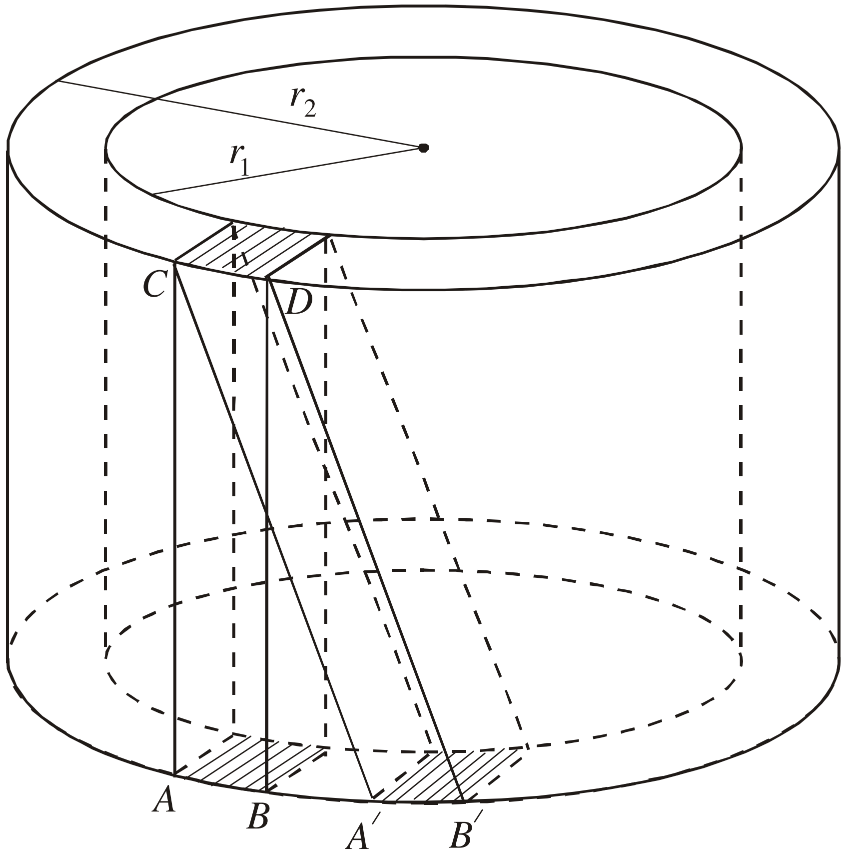
$$A = \frac{1}{2}M\varphi = \frac{M^2}{2f} \qquad (17.27)$$

Густину пружної енергії може бути знайдено після ділення виразу (17.27) на об’єм трубки $V = 2\pi rldr$

$$u = \frac{M^2}{2fV} = \frac{4\pi^2 r^2 (dr)^2 \tau^2 \cdot r^2}{2f \cdot 2\pi rldr} = \frac{\pi r^3 \tau^2}{f \cdot l} dr. \qquad (17.28)$$

Обчислимо густину пружної енергії дещо в інший спосіб.

Уявно виділимо з трубки нескінченно коротку частину. В результаті деформації кручення малий елемент об’єму $ABCD$ перейде в положення $A'B'C'D'$. А це є зсув.



Таким чином, при зазначеному припущенні деформацію кручення можна розглядати як неоднорідний зсув. Густина пружної енергії при деформації зсуву визначається формулою (17.22). Порівнявши формули (17.22) і (17.28), маємо

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\pi r^3 \tau^2}{f \cdot l} dr \;\Rightarrow\; f = \frac{2\pi G r^3}{l} dr. \qquad (17.29)$$

Якщо зовнішнім радіусом трубки є r_2, а внутрішнім - r_1, величину модуля кручення можна знайти шляхом інтегрування формули (17.29) в межах від r_1 до r_2:

$$f = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2\pi G r^3}{l} dr = \frac{2\pi G}{l} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{2\pi G}{l} \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_1}^{r_2} = \frac{\pi G}{2l}\left(r_2^4 - r_1^4\right). \qquad (17.30)$$

Для суцільного ж дроту радіуса r вираз (17.30) набуває вигляду:

$$f = \frac{\pi G}{2l} r^4. \qquad (17.31)$$

Експериментально модуль кручення f знаходять, досліджуючи крутильні коливання важкого тіла, підвішеного за нижній кінець дроту. Період таких гармонічних коливань буде дорівнювати

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}.$$

І якщо відомо момент інерції тіла I, то з останньої формули легко знайти модуль кручення f

$$f = \frac{4\pi^2 I}{T^2}.$$

18 Механіка рідин і газів

18.1 Загальні властивості рідин і газів

Рідини та гази в стані рівноваги не мають пружності форми. Вони мають лише об’ємну пружність. В стані рівноваги напруження в рідинах та газах завжди є перпендикулярними до площадки, на яку вони діють. Дотичні напруження в рідинах і газах не викликають зміни величини їх об’ємів. Вони викликають лише зміну форми елементарних об’ємів. Проте для таких деформацій практично ніяких зусиль не потрібно. А це означає, що в таких середовищах при рівновазі дотичні напруження не виникають. З цього випливає висновок, що в стані рівноваги величина нормального напруження (тиску) в рідинах або газах не залежить від орієнтації площадки, на яку вона діє. Цей факт носить назву закону Паскаля, який можна сформулювати так:

Тиск у будь-якому місці рідини чи газу, які знаходяться в стані спокою, є однаковим у всіх напрямках, причому тиск однаково передається по всьому об’єму, який займає рідина чи газ.

Розглянемо розподіл тиску в рідині, що знаходиться в стані спокою.

В горизонтальному напрямку тиск буде завжди однаковим, оскільки в іншому випадку рівноваги не буде. А це означає, що ***на деякій відстані від стінок посудини, де міститься рідина, її поверхня завжди буде горизонтальною***.

По вертикалі ж тиск буде змінюватись, зростаючи з глибиною занурення.

Якщо знехтувати стисканням рідини, то питома вага (тобто вага (не маса!) одиниці об’єму) γ не буде залежати від тиску і вага уявного стовпчика рідини може бути записана як

$$P = \gamma S_0 l\,, \tag{18.1}$$

де S_0 - поперечний переріз стовпчика, l - його довжина (висота).

Тоді тиск на нижню основу стовпчика зростає на величину

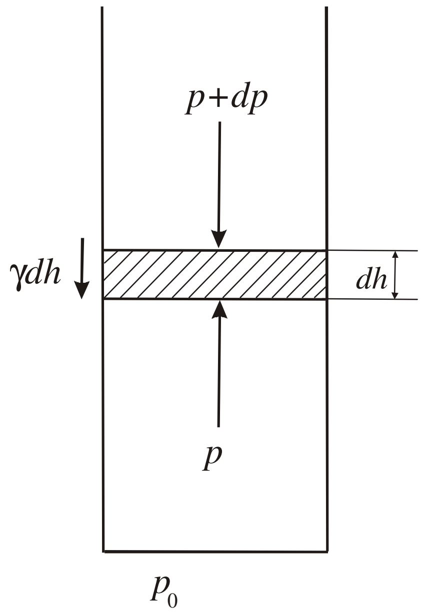
$$p = \frac{P}{S_0} = \gamma l\,, \tag{18.2}$$

тобто тиск лінійно змінюється зі зміною висоти.

Розподілом тиску в рідині пояснюють так званий “гідростатичний парадокс”, згідно з яким сила тиску на дно посудини не залежить від її форми, оскільки ця сила згідно з (18.2) не дорівнює вазі рідини в посудині, а залежить лише від висоти рідини та її питомої ваги.

18.2 Розподіл тиску в газі. Барометрична формула

Нехай деякий газ знаходиться в циліндрі і нехай тиск газу на дно циліндра дорівнює p_0.



Запишемо умову рівноваги для циліндра одиничного перерізу і нескінченно малої висоти dh

$$p + dp + \gamma dh - p = 0 \qquad (18.3)$$

або

$$dp = -\gamma dh, \qquad (18.4)$$

де dp - різниця тисків на верхній та нижній основах циліндра. Тоді зміна тиску при зміні висоти на величину h буде дорівнювати

$$p_h - p_0 = \int_0^h dp = -\int_0^h \gamma dh \quad \Rightarrow \quad p_h - p_0 = \int_0^h \gamma dh. \qquad (18.5)$$

При постійній температурі питома вага γ і тиск p пов'язані між собою згідно із законом Бойля-Маріотта співвідношенням:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \quad \Rightarrow \quad p = \gamma \frac{p_0}{\gamma_0} \quad \text{або} \quad \gamma = p\frac{\gamma_0}{p_0}.$$

Тоді

$$dp = \gamma dh = p\frac{\gamma_0}{p_0}dh \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0}dh.$$

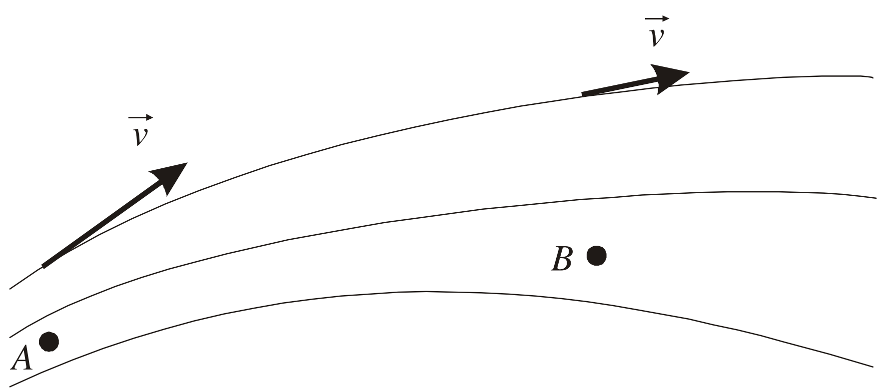
Як наслідок,

$$\int\limits_{p_0}^{p_h}\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0}\int\limits_0^h dh \;\Rightarrow\; \ln\frac{p_h}{p_o} = -\frac{\gamma_0}{p_0}h \;\;\Rightarrow\;\; p_h = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{p_0}h}. \qquad (18.6)$$

Вираз (18.6) має назву ***барометричної формули***, яка показує, що тиск спадає зі зростанням висоти за показниковим законом, де γ_0 і p_0 - питома вага та тиск на поверхні Землі, відповідно.

18.3 Стаціонарна течія рідини. Трубки течії. Рівняння нерозривності струменя

Вивчаючи рух рідин, будемо розглядати їх як суцільний неперервний струмінь, не вникаючи в сутність молекулярної будови цього струменя. Можливими є два способи описання руху рідини. Перший полягає в тому, що визначається положення і швидкість руху усіх частинок рідини для будь-якого моменту часу. Проте простіше спостерігати не за частинками рідини, а за окремими точками простору і помічати швидкість, з якою проходять через кожну точку окремі частинки рідини. При такому способі описання процес руху рідини буде характеризуватися сукупністю функцій $v(t)$, визначених для всіх точок простору. Сукупність векторів $\vec{v}(t)$ називається ***полем вектора швидкості***. Це поле можна зобразити з допомогою так званих ***ліній течії***.



Лінію течії можна провести крізь будь-яку точку простору. Для наглядного уявлення течії рідини будують лише частину ліній, обираючи їх так, щоб густина ліній течії чисельно дорівнювала модулеві швидкості в даному місці.

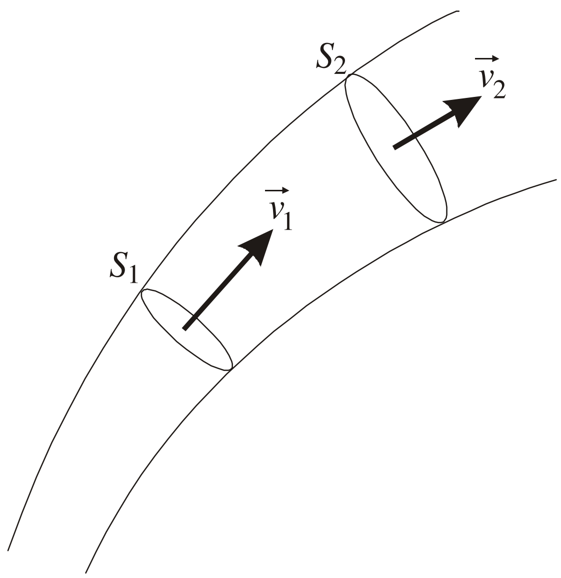
Тоді за картиною ліній течії можна мати уявлення не лише про напрямок, а ще й про модуль вектора $\vec{v}$ у різних точках простору. Наприклад, у точці A густина ліній, а значить і $|\vec{v}|$, більша ніж у точці B. Якщо швидкість у кожній точці простору залишається постійною ($\vec{v} = const$), то течію рідини називають ***стаціонарною***. Картина ліній течії при стаціонарному процесі залишається незмінною, і лінії течії в цьому випадку співпадають з траєкторіями частинок.

Якщо крізь усі точки невеликого замкненого контуру провести лінії течії, то отримаємо поверхню, яка називається ***трубкою течії***. Частинки рідини при своєму русі не будуть перетинати стінок трубки течії.

Виберемо трубку течії так, щоб в усіх точках її поперечного перерізу S швидкість частинок $\vec{v}$ була однаковою. Тоді за час Δt через переріз S пройде об'єм рідини, який дорівнює $Sv\Delta t$. За одиницю ж часу через поперечний переріз пройде об'єм, котрий буде чисельно дорівнювати

$$V = Sv. \tag{18.7}$$

Будемо розглядати рідину, густина якої з часом не змінюється, тобто ***нестисливу рідину***.



Оберемо в дуже тонкій трубці два перерізи S_1 та S_2. Якщо рідина є нестисливою, то її кількість між цими перерізами весь час залишається постійною. А це означає, що об'єми рідини, які проходять за одиницю часу крізь перерізи S_1 та S_2, повинні бути рівними, тобто

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{18.8}$$

На основі виразу (18.8) можна зробити висновок:

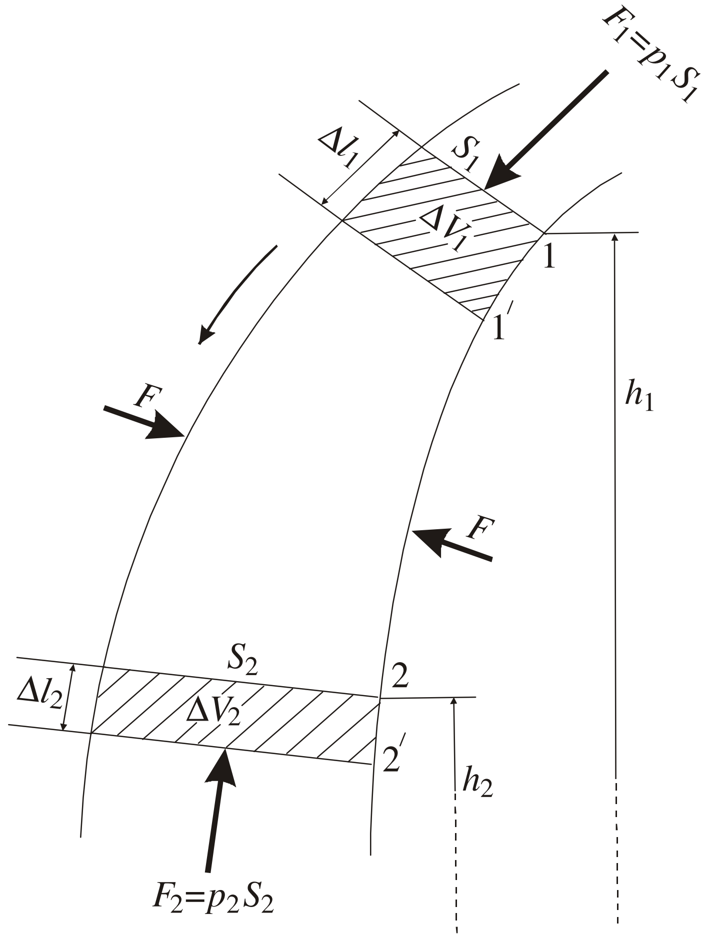
Для нестисливої рідини при стаціонарній течії добуток Sv ***у будь-якому перерізі даної трубки течії має однакове значення, тобто***

$$Sv = const. \tag{18.9}$$

Цей висновок має назву ***теореми про нерозривність струменя***.

18.4 Рівняння Бернуллі

Розглянемо стаціонарну течію нестисливої ідеальної (без внутрішнього тертя) рідини. Виділимо об'єм рідини, обмежений стінками вузької трубки течії і перпендикулярними до ліній течії перерізами S_1 та S_2. За час Δt цей об'єм зміститься, причому межа об'єму S_1 отримає зміщення Δl_1, а S_2 - відповідно Δl_2.



Робота, що виконується при цьому силами тиску, буде дорівнювати зміні повної енергії системи.

Робота сил $\vec{F}$, перпендикулярних до стінок трубки, дорівнює нулю (оскільки $A = F \cdot l \cdot \cos 90^{\circ}$). Від нуля буде відрізнятися лише робота сил тиску, прикладених до перерізів S_1 та S_2

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V \,. \tag{18.10}$$

Оскільки течія є стаціонарною, то повна енергія частини рідини, обмеженої перерізами $1'$ і $2'$ не змінюється. Тоді приріст (зміна) повної енергії дорівнює різниці значень повної енергії заштрихованих об'ємів ΔV_2 і ΔV_1 з масою $\Delta m = \rho \Delta V$.

Оберемо перерізи S_1 та S_2 і переміщення Δl_1 та Δl_2 настільки малими, щоб для всіх точок значення швидкості v, тиску p і висоти h були однаковими.

Тоді зміна повної енергії складе

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right). \tag{18.11}$$

Порівнявши (18.10) та (18.11), маємо

$$\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 - \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} - \rho \Delta V g h_1 = (p_1 - p_2)\Delta V \,.$$

Звідки

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 \,. \tag{18.12}$$

Отже, для ідеальної рідини отримуємо вираз

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const \,. \tag{18.13}$$

Рівняння (18.13) називається ***рівнянням Бернуллі***.

Для горизонтальної лінії течії рівняння Бернуллі має вигляд

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const \tag{18.14}$$

Тиск p називають статичним тиском, а доданок $\frac{\rho v^2}{2}$ - динамічним тиском.

18.5 В'язкість. Течія рідини в трубах

Всі реальні рідини і гази мають внутрішнє тертя, або характеризуються ***в'язкістю***. Прикладом може бути рух рідини в склянці з чаєм після того, як його закінчують розмішувати.

Розглянемо рух рідини у круглій трубі. При повільній течії, згідно з експериментом, швидкість частинок змінюється від нуля біля стінок до максимуму навколо осі труби. При цьому рідина ніби розділяється на тонкі циліндричні шари, які ковзають один відносно одного не перемішуючись. Така течія називається ***ламінарною***.

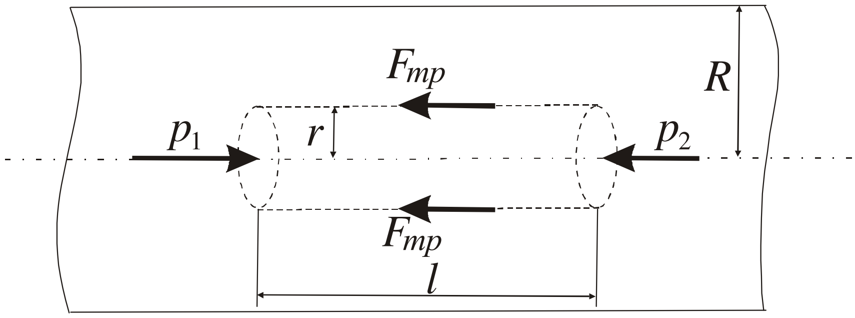
З досліду відомо, що для того, щоб створити і підтримувати постійною течію рідини у трубі, між кінцями труби необхідна наявність різниці тисків. А це означає, що сили тиску зрівноважуються якимись силами, що гальмують рух. Цими силами є ***сили внутрішнього тертя***. Більш швидкий шар намагається збільшити швидкість більш повільного, діючи на нього з деякою силою $\vec{F}_1$. Повільний же шар намагається загальмувати рух більш швидкого шару, діючи на нього з силою $\vec{F}_2$, зворотньою за напрямком.

Експериментально встановлено, що модуль сили внутрішнього тертя визначається співвідношенням

$$F=\eta\left|\frac{dv}{dz}\right|S\,, \tag{18.15}$$

де η - коефіцієнт в'язкості, величина якого залежить від властивостей рідини; $\frac{dv}{dz}$ - похідна, яка показує, як швидко у даному місці змінюється швидкість у напрямку z, перпендикулярному до обраної площадки S. Цей множник називають ***градієнтом швидкості*** $\left(\frac{dv}{dz}=grad\,v\right)$. У випадку руху рідини по трубі $\frac{dv}{dz}=\frac{dv}{dr}$.

Знайдемо закон зміни швидкості. Для цього виділимо у потоці уявний циліндр радіусом r і довжиною l.



При стаціонарній течії цей об’єм рухається не змінюючись. Це означає, що сума прикладених до нього сил буде дорівнювати нулю. В напрямку руху на циліндр діє сила тиску $\vec{F}_1 = \vec{p}_1 \pi r^2$, у зустрічному напрямку – сила $-\vec{F}_2 = \vec{p}_2 \pi r^2$. Тоді результуюча сил тиску буде в проекціях на напрямок руху дорівнювати

$$F_{тиск} = (p_1 - p_2)\pi r^2. \tag{18.16}$$

На бічну поверхню діє гальмівна сила $\vec{F}_{тр}$, яка з урахуванням (18.15) в проекціях на той же напрямок запишеться так

$$F_{тр} = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot 2\pi r l = -\eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l, \tag{18.17}$$

де $2\pi r l$ - площа бічної поверхні циліндра; $\frac{dv}{dr}$ - значення похідної на відстані r від осі трубки. Оскільки з наближенням до стінок швидкість зменшується, то $\frac{dv}{dr} < 0$.

Порівнявши вирази (18.16) та (18.17), маємо

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l.$$

Розділимо в останньому рівнянні змінні

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr.$$

Після інтегрування отримуємо

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \tag{18.18}$$

Постійну величину *C* знайдемо за умови, що при $r = R, \quad v = 0$. Тоді

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Підставимо значення постійної *C* в (18.18):

$$v(r) = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (18.19)$$

Швидкість на осі труби буде дорівнювати

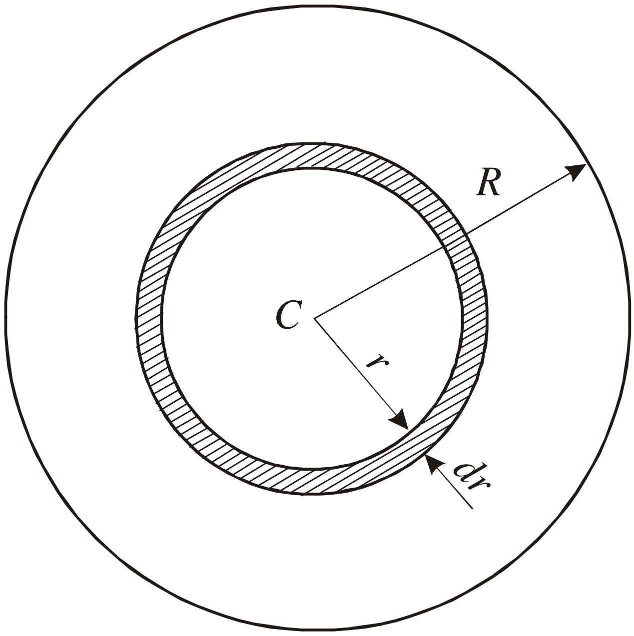
$$v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (18.20)$$

З урахуванням (18.20) формула (18.19) набуває вигляду

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (18.21)$$

З формули (18.21) випливає, що при ламінарній течії швидкість змінюється з відстанню від осі труби за параболічним законом.

За допомогою виразу (18.21) можна обчислити об'єм рідини Q, який за одиницю часу проходить крізь поперечний переріз труби.



Для цього розіб'ємо переріз труби на нескінченно тонкі кільця шириною dr. Через кільце радіуса r за одиницю часу пройде об'єм рідини dQ, що дорівнює добутку площі кільця $2\pi r dr$ на швидкість $v(r)$ на відстані r від осі труби

$$dQ = v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\cdot 2\pi r dr .$$

Після інтегрування маємо

$$Q = \int_0^R v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\cdot 2\pi r dr = 2\pi v_0 \int_0^R r dr - 2\pi v_0 \cdot \frac{1}{R^2}\int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi v_0 \cdot \frac{R^2}{2} - 2\pi v_0 \cdot \frac{1}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} = \pi v_0 R^2 - \pi v_0 \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}\pi v_0 R^2 = \frac{1}{2} S v_0 . \quad (18.22)$$

Підставимо у вираз (18.22) значення v_0 з формули (18.20)

$$Q = \frac{1}{2} S \cdot \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l} . \quad (18.23)$$

Отриманий вираз має назву ***формули Пуазейля***.

Якщо швидкість руху часток у кожній точці потоку змінюється, то така течія називається ***турбулентною***.

Англійським фізиком Рейнольдсом було встановлено, що характер течії визначається значенням безрозмірної величини

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (18.24)$$

яка отримала назву ***числа Рейнольдса***, де ρ - густина рідини, η - її коефіцієнт в'язкості, l - характерний для поперечного перерізу розмір.

Якщо за характерний розмір труби взяти її радіус, то критичне значення $\mathrm{Re} \approx 1000$. При $\mathrm{Re} < 1000$ потік є ламінарним, а при $\mathrm{Re} > 1000$ - турбулентним.

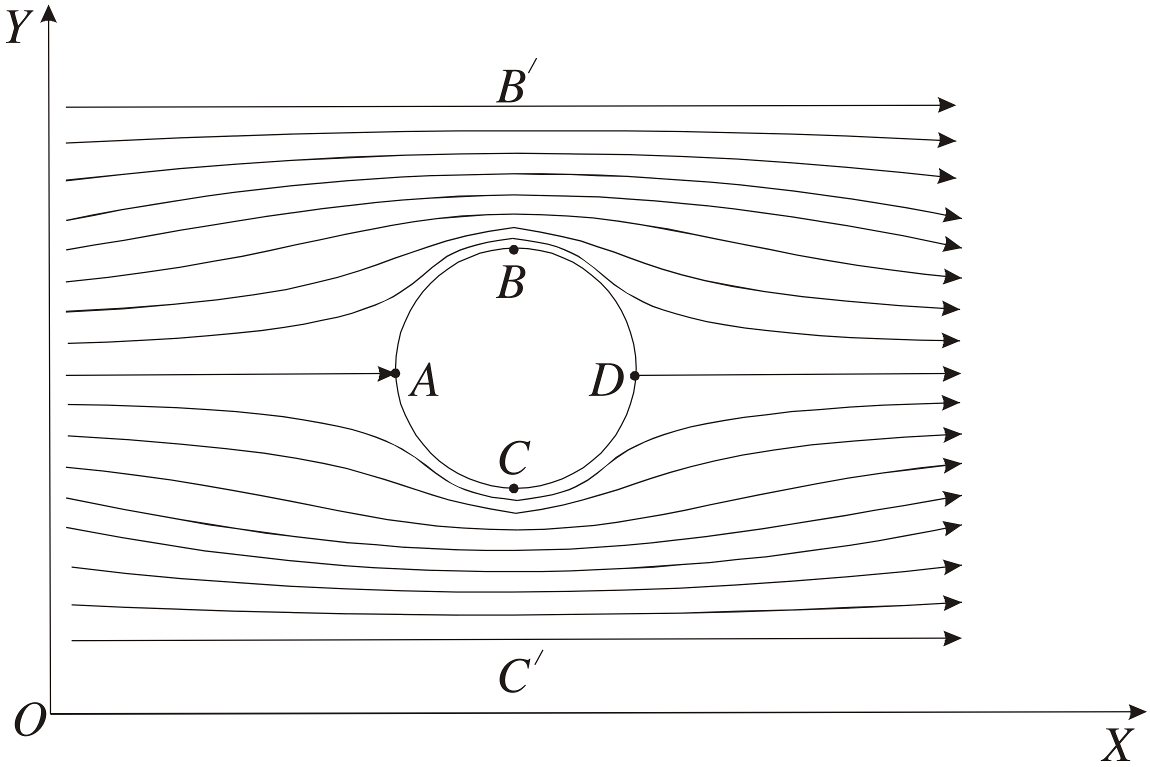
Величину $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ називають ***кінематичною в'язкістю***. Використовуючи поняття кінематичної в'язкості, формулу (18.24) можна записати так:

$$\mathrm{Re} = \frac{v l}{\nu} .$$

18.6 Обтікання тіл рідиною і газом

Обтікання тіл потоком залежить від геометричної форми тіл, що обтікаються.

Розглянемо випадок обтікання рідиною без в'язкості циліндра, розташованого, згідно з рисунком, перпендикулярно до площини *XOY*.



Лінії течії будуть омивати циліндр з двох боків. Біля точки *A* швидкість рідини дорівнює нулю, а біля точок *B* і *C* лінії течії будуть розташовані більш щільно, а це свідчить, що швидкість рідини у цих місцях є більшою, ніж у потоку, що набігає. Тоді, згідно з рівнянням Бернуллі, тиск у точці $A\ (p_A)$ буде більшим за тиск у потоці, що набігає, тобто $p_A > p$; і, навпаки, $p_C < p$ і $p_B < p$. Оцінимо феноменологічно зміну тиску в точках *A* і *B*. Біля точки *A* (де швидкість дорівнює нулю), тиск приблизно на величину $\frac{\rho v^2}{2}$ є більшим, ніж тиск p у потоці. Якщо знайти швидкість рідини в точках *B* і *C*, то можна оцінити величину зниження тиску в цих точках. Це можна зробити за допомогою таких міркувань. Припустимо, що у точках *B′* і *C′* згущення ліній течії буде вже малим, якщо вони знаходяться від точок *B* і *C* приблизно на відстані радіуса циліндра. Тоді можна вважати, що площа перерізу *B′C′* (внаслідок присутності циліндра) немов би зменшилась у 2 рази. Але якщо швидкість потоку біля точок *B* і *C* дорівнює 2*v*, то згідно з формулою Бернуллі

$$p_B + \frac{4\rho v^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p_B = p - \frac{3\rho v^2}{2}.$$

Такий грубий розрахунок показує, що зменшення тиску в точках B і C може в декілька разів перевищувати збільшення тиску біля точки A.

Якщо в'язкість відсутня, то тиск у точці D буде дорівнювати тиску в точці A $\left(p_A = p_D\right)$, тобто в цьому випадку може відбуватися повне обтікання тіла.

У реальній (в'язкій) рідині шар, який безпосередньо прилягає до твердої стінки, не ковзає вздовж неї, а немов би "прилипає" до неї. Наступні за ним шари рідини ковзають один відносно іншого. Тому з віддаленням від стінки швидкість потоку поступово зростає. При цьому, внаслідок існування градієнта швидкості в перпендикулярному до стінки напрямку, між шарами діють сили в'язкості (внутрішнього тертя), які є направленими назустріч ковзанню.

Таким чином, на будь-який шар рідини з боку сусіднього шару, розташованого ближче до стінки, діє тангенціальна сила, яка є напрямленою проти потоку, а з боку шару, розташованого далі від стінки, – сила, яка напрямлена за рухом потоку. На саму ж стінку з боку рідини діє тангенціальна сила, спрямована в бік руху потоку. Всі такі тангенціальні сили є силами внутрішнього тертя.

Коли швидкий потік рідини з невисокою в'язкістю омиває тіло, то швидкість рідини, яка дорівнює нулю на поверхні тіла, дуже швидко зростає з віддаленням від поверхні і вже на незначній відстані від неї швидкість рідини стає майже такою, як і у потоці, що набігає. Тобто високі градієнти швидкості існують лише в тонкому шарі рідини, розташованому безпосередньо біля стінки. Такий, прилягаючий до поверхні тонкий шар рідини (чи газу), у якому діють значні сили в'язкості, називають ***граничним шаром***.

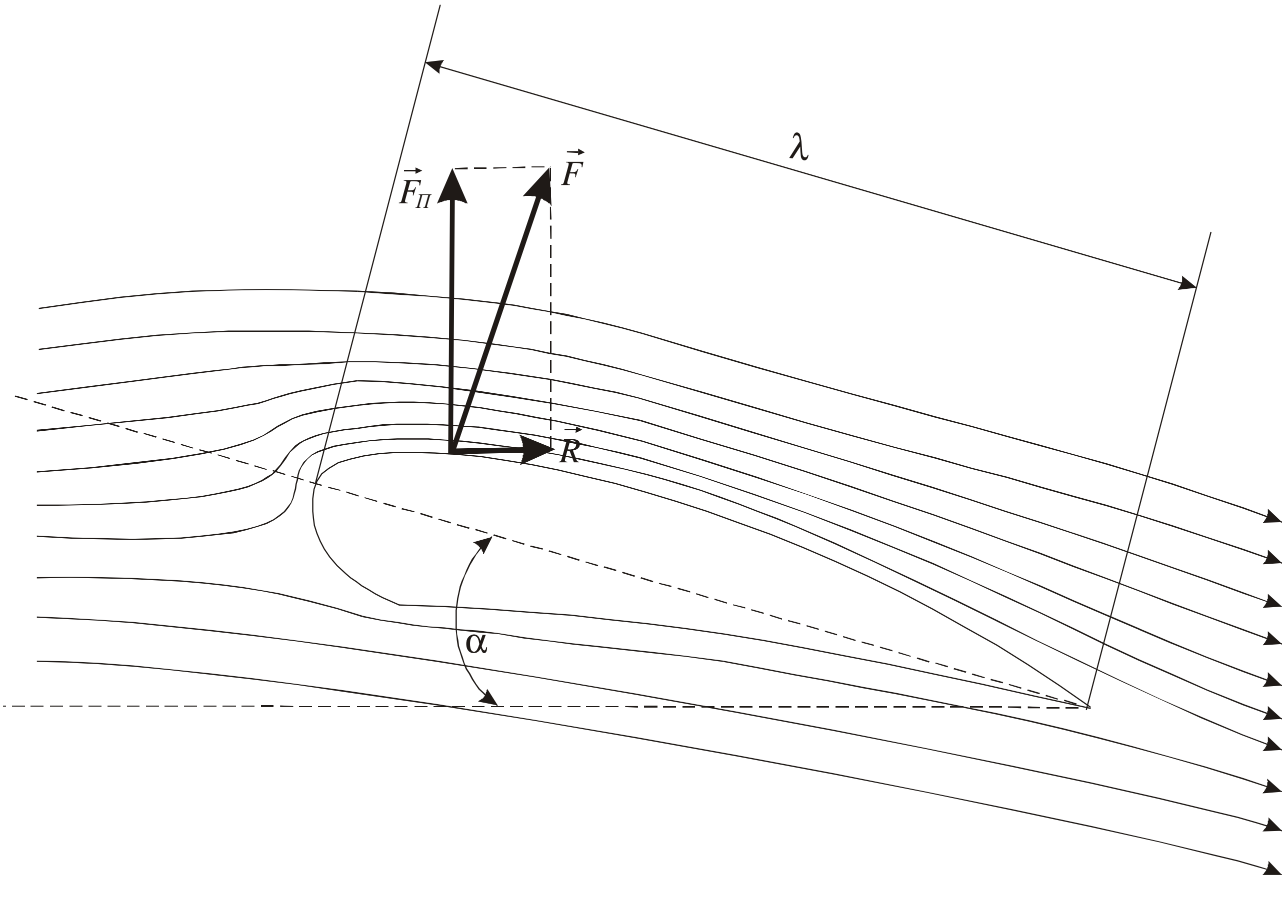
За межами граничного шару сили в'язкості мало впливають на характер течії. Це означає, що для описання руху всього потоку, окрім граничного шару, можна використовувати закони, які виконуються для ідеальних рідин (наприклад, закон Бернуллі). У граничному ж шарі сили в'язкості не дають можливості відбуватися повному обтіканню, і призводять до відривання потоку від стінок тіла. Внаслідок цього за тілом виникає вихороподібний рух рідини.

Отже, в'язкість рідини робить неможливим повне обтікання тіла і призводить до того, що результуюча сила тисків на тіло, яке обтікається, не буде дорівнювати нулеві. При цьому, вона є напрямленою у бік руху потоку. Цю силу називають ***опором тиску***.

Підсумовуючи можна стверджувати, що ***опір, якого зазнає тіло з боку в'язкої рідини, що його обтікає, являє собою суму опорів тертя і тиску.***

18.7 Підіймальна сила крила літака

Напрям результуючої сили, діючої з боку потоку на тіло, залежить від форми тіла та характеру його розташування у потоці. Крило літака у першому наближенні можна розглядати як пластину з деяким визначеним профілем, нахилену під кутом до потоку. Ця пластина (крило) звичайно є закругленою спереду і загостреною позаду. Припустимо, що пластину розташовано під кутом α до потоку (цей кут називається ***кутом атаки***). В цьому випадку реакцію потоку на пластину можна розкласти на дві складових: нормальну до потоку силу $\vec{F}_П$ (***підіймальну сил***у) і ***силу лобового опору*** $\vec{R}$. При малих кутах $\vec{F}_П >> \vec{R}$.



Ньютон пояснив виникнення підіймальної сили так. До проходження крила літака поблизу частинок повітря останні знаходились у стані спокою. Коли до них підійшло крило, тиск на частинки повітря під крилом підвищився і вони почали рухатися вперед і вниз. Тоді підіймальну силу можна розрахувати, якщо визначити щосекундну зміну імпульсу частинок, напрямлену вниз, і різницю тисків на поверхні крила. Крило відштовхує частинки вниз, передаючи їм деякий імпульс. Це означає, що частки, в свою чергу, тиснуть на крило угору.

Розглядаючи картину обтікання крила потоком, видно, що швидкість частинок біля верхньої його поверхні є більшою, ніж біля нижньої. Згідно з рівнянням Бернуллі тиск більший там, де швидкість менша, тобто тиск на верхню поверхню крила є меншим, ніж той, що діє на нижню. Цей факт і є причиною виникнення підіймальної сили.

Ньютон зробив спробу розрахувати величину підіймальної сили. Нехай на пластинку площею S, яка має кут атаки α, за секунду попадає маса частинок $m = \rho S v_0 \cdot \sin\alpha$, де ρ - густина повітря, а v_0 - швидкість.

Ці частинки змінюють свою швидкість при взаємодії з крилом і отримують компоненту швидкості, спрямовану вниз. Щосекунди повітря одержує імпульс $p = \rho S v_0^2 \sin^2\alpha$, напрямлений вниз. Тоді модуль підіймальної сили можна записати так:

$$F_П = k\rho S v_0^2 \sin^2\alpha\,. \tag{18.25}$$

Це є дуже грубим розрахунком. Експериментально було доведено, що формула (18.25) є невірною. Для малих кутів α сила $\vec{F}_П$ дійсно є пропорційною v_0^2, але вона пропорційна також $\sin\alpha$ (або α – для малих кутів), а не $\sin^2\alpha$, як у свій час запропонував Ньютон.

Помилка Ньютона полягала в тому, що він не враховував взаємодію частинок повітря між собою. На шляху руху крила існують частинки, які тільки при зіткненні з ним повинні рухатися вниз. За Ньютоном, до удару в крило частинка знаходилась у стані спокою і немов би “не підозрювала” про наближення до неї крила. В реальному ж випадку така картина, внаслідок взаємодії частинок, є неправильною, оскільки завдяки наявності тиску в газі рух частинок навколо крила передається у всі боки. Тому частинки, що розташовані перед крилом, уже стануть рухатись внаслідок наближення до них крила. Оскільки всі частинки рухаються, то розрахунок підіймальної сили є далеко не таким простим, як це є на погляд Ньютона. Дійсно, найзначніша зміна швидкості відбувається у тих частинок, які знаходяться поблизу крила. Зміна ж швидкості у частинок на віддалі від крила є незначною, але, внаслідок надто великої кількості таких частинок, зміною їхнього імпульсу нехтувати не можна.

При дуже високих швидкостях польоту (так званих ***гіперзвукових швидкостях***) картина обтікання крила дуже змінюється. З крилом будуть взаємодіяти лише ті частинки, які знаходяться у дуже вузькому шарі повітря і “відчувають” наближення крила. В цьому випадку формула (18.25) буде достатньо точно визначати підіймальну силу.

В звичайних умовах вже на початку руху біля заднього кінця крила, внаслідок існування в’язкості, можна помітити виникнення вихору, який, зриваючись із задньої частини крила, відноситься потоком. Повітря, яке відійшло з вихором, має деякий імпульс, а це означає, що та частина повітря, яка залишилась, одержує протилежний імпульс. Тому повітря буде обертатись навколо крила у напрямку, протилежному обертанню у вихорі. Внаслідок цього виникає циркулярний рух повітря навколо крила (***циркулярний рух – це рух***

частинок по замкнених лініях). Експериментально було встановлено таку властивість циркулярного руху: ***циркуляція швидкості по будь-якому замкненому геометричному контуру, який охоплює тіло, є постійною величиною***. ***Циркуляцією швидкості по замкненому контуру називають скалярну величину Г, яка визначається інтегралом по поверхні***

$$Г = \oint \vec{v} ds, \tag{18.26}$$

де $\vec{v}$ - швидкість, ds - елемент контуру.

М.Є.Жуковським було показано, що реальний потік біля крила можна уявити собі, як потік ідеальної рідини, що складається з двох потоків: 1) неперервного обтікання крила ідеальною рідиною і 2) циркуляційного руху навколо крила. При умові плавного обтікання задньої частини крила, вибір величини циркуляції $Г$ фактично дозволяє врахувати значний вплив в'язкості, який призводить до утворення циркуляції повітря і плавного обтікання крила.

З цієї, так званої умови Жуковського, можна визначити величину циркуляції $Г_0$:

$$Г_0 = \frac{1}{2}\pi\lambda v\alpha, \tag{18.27}$$

де λ - хорда крила, α - кут атаки.

Якщо відома циркуляція навколо крила, то можна знайти і величину підіймальної сили.

Припустимо, що крило має кут атаки α, потік обтікає крило з циркуляцією $Г_0$, швидкість потоку v_0, а його тиск p_0. Нехай на верхньому боці крила швидкість потоку є $v_в(x)$, а тиск – $p_в(x)$, де x - відстань від переднього краю крила, а на нижньому боці - відповідно маємо $v_н(x)$ і $p_н(x)$.

Тоді модуль сили, діючої з боку потоку на елемент шириною dx і довжиною l, буде дорівнювати

$$dF = (p_н - p_в) l dx.$$

Модуль сили дії потоку на все крило запишемо у вигляді

$$F_П = \int_0^{\lambda} (p_н - p_в) l dx. \tag{18.28}$$

Згідно з рівнянням Бернуллі

$$\left.\begin{array}{l} p_н = p_0 + \dfrac{\rho v_0^2}{2} - \dfrac{\rho v_н^2}{2} \\ p_в = p_0 + \dfrac{\rho v_0^2}{2} - \dfrac{\rho v_в^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; p_н - p_в = \frac{1}{2}\rho\left(v_в^2 - v_н^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(v_в + v_н\right)\left(v_в - v_н\right). \quad (18.29)$$

Для малих α виконується рівність

$$v_в + v_н \approx 2v_0 . \quad (18.30)$$

Тоді, враховуючи вирази (18.29) та (18.30), отримуємо:

$$F_П = \int_0^\lambda \frac{\rho}{2} \cdot 2v_0\left(v_в - v_н\right) \cdot l dx = \rho v_0 l \int_0^\lambda \left(v_в - v_н\right) dx .$$

Але, згідно з означенням, $\int_0^\lambda \left(v_в - v_н\right) dx = \Gamma_0$.

Тоді

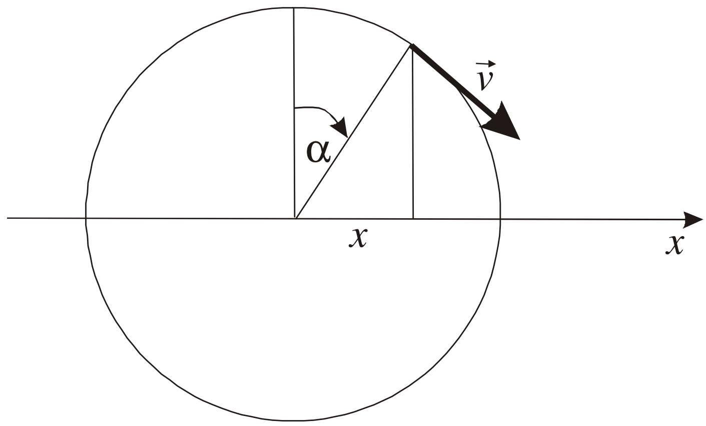
$$F_П = \rho l \Gamma_0 v_0 .$$

Отриману формулу називають ***формулою Жуковського-Кутта***.

Оскільки, згідно з (18.27), Γ_0 зростає пропорційно куту α та швидкості v, то підіймальна сила буде зростати пропорційно квадратові швидкості, густині повітря, та куту атаки α. Це добре узгоджується з теорією для малих кутів α.

19 Коливання

Серед різних видів коливань найважливішу роль відіграють так звані ***гармонічні коливання***. Вони являють собою періодичний процес, у якому деяка величина змінюється за законом синуса або косинуса. Як приклад розглянемо проекцію руху точки по колу на вісь абсцис.



Якщо рух точки по колу відбувається із постійною кутовою швидкістю, то шукана проекція буде змінюватись за синусоїдальним законом. Нехай радіус кола дорівнює *R*, а модуль кутової швидкості точки – ω. Тоді $x = R\sin\alpha$ або

$$x = R\sin\omega t\,. \tag{19.1}$$

Період же зміни величини *x* буде

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{19.2}$$

Він називається ***періодом гармонічних коливань***, а ω – ***круговою***, або ***циклічною частотою*** гармонічних коливань.

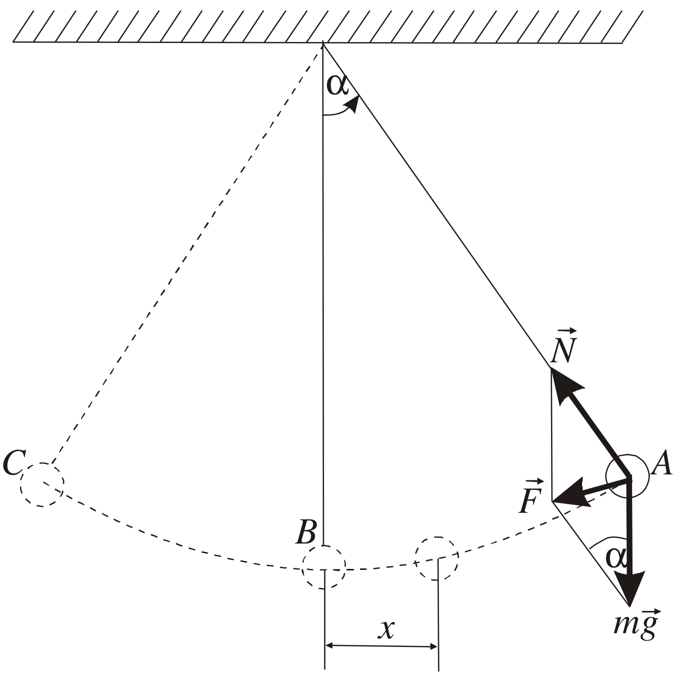
Число коливань за одну секунду (одиницю часу) називають ***частотою коливань*** і визначають у ***герцах***.

$$\nu = T^{-1}.$$

$$[\nu] = 1\ c^{-1} = 1\ Гц\,.$$

19.1 Власні коливання математичного маятника

Розглянемо коливання тягарця, підвішеного на нитці.



Він буде рухатися до положення рівноваги з деяким прискоренням, викликаним дією рівнодіючої сил $m\vec{g}$ та $\vec{N}$ (сили $\vec{F}$). Після проходження положення рівноваги (точки *B*) за інерцією, сила $\vec{F}$ буде вже гальмувати рух маятника, і в деякій точці *C* він зупиниться. Після чого процес почне повторюватися. Такий процес називають ***власними коливаннями маятника***, оскільки на тягарець протягом усього часу діють сили, визначені будовою самого маятника, а не з боку інших тіл. З часом коливання будуть згасати, внаслідок наявності сил тертя, тобто вони будуть ***негармонічними*** і ***неперіодичними***. Але, якщо сили тертя малі, то такий коливальний процес є наближеним до гармонічного.

Припустимо, що маятник є ***математичним*** (тобто маса тягарця є точковою, а нитка не розтягується і є невагомою), а сили тертя – відсутніми. Будемо розглядати малі коливання маятника, тобто будемо вважати кут α весь час малим. Це дає змогу (в граничному наближенні) дугу траєкторії вважати відрізком прямої. Тоді

$$x \approx l\alpha, \tag{19.3}$$

де l - довжина маятника.

За цієї умови рівнодіючу силу $\vec{F} = m\vec{g}\sin\alpha$ можна вважати рівною

$$\vec{F} \approx m\vec{g}\alpha. \tag{19.4}$$

У нашому випадку рівняння руху маятника в проекціях на вісь абсцис буде мати вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F. \tag{19.5}$$

Знак (−) виникає тому, що сила $\vec{F}$ є напрямленою проти додатного зміщення x. Якщо з рівняння (19.3) записати $\alpha = \frac{x}{l}$, то рівняння (19.5) набуває вигляду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x}{l} \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0. \tag{19.6}$$

Розв’язком цього рівняння є

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \varphi\right), \tag{19.7}$$

де A і φ - константи.

Введемо позначення

$$\frac{g}{l} = \omega^2. \tag{19.8}$$

Тоді формула (19.7) перетворюється у вираз

$$x = A\sin(\omega t + \varphi). \tag{19.9}$$

Величину A в рівнянні (19.9), що дорівнює максимальному відхиленню від положення рівноваги, називають ***амплітудою гармонічних коливань***. Величину $(\omega t + \varphi)$ називають ***фазою коливань***, а величину φ - ***початковою фазою***, або фазою в момент часу $t = 0$.

Оскільки коливання відбуваються за синусоїдальним законом, то вони є періодичними. А це означає, що зі зростанням фази на величину 2π, час збільшується на величину періода коливань, тобто

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot T \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{19.10}$$

Тоді власна частота коливань при малих кутах відхилення запишеться так:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{19.11}$$

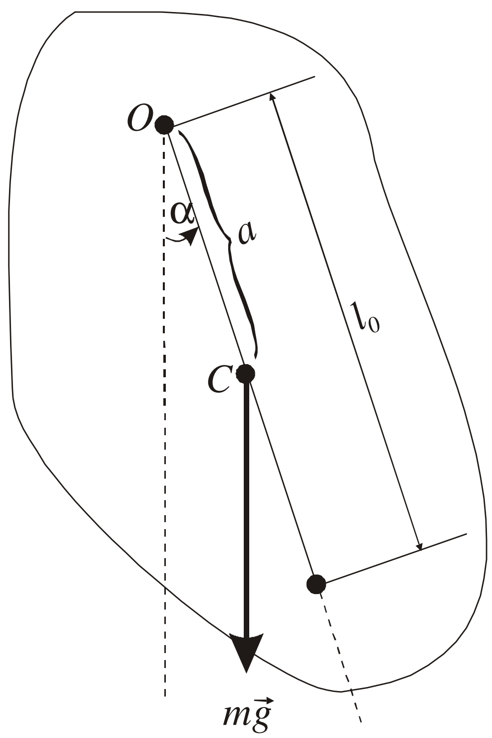
Величину $\sqrt{\frac{g}{l}}$ називають ***власною круговою частотою маятника***.

Таким чином, ***при малих кутах α, період і частота коливань математичного маятника залежать лише від його довжини та прискорення сили тяжіння у місці проведення експерименту***.

19.2 Власні коливання фізичного маятника

Фізичний маятник - це масивне тіло, яке може вільно коливатися навколо деякої осі, що не проходить крізь центр маси.

Припустимо, що така вісь O є розташованою нормально до площини рисунка. Нехай відстань від центра маси до осі дорівнює a. При повороті тіла від положення рівноваги на кут α виникає зворотний момент $M = mga\sin\alpha$, де m - маса тіла.



Тоді, згідно з основним законом динаміки обертового руху, можна записати

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-mga\sin\alpha, \qquad (19.12)$$

де I - момент інерції тіла відносно осі O.

Оскільки при малих кутах $\sin\alpha\approx\alpha$, то

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-mga\cdot\alpha \;\Rightarrow\; I\frac{d^2\alpha}{dt^2}+mga\cdot\alpha=0; \qquad (19.13)$$

або

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{mga}{I}\alpha=0. \qquad (19.14)$$

Рівняння (19.14) за зовнішнім виглядом співпадає з рівнянням (19.6). А це означає, що кут α буде змінюватись гармонічно. При цьому його власна кругова частота складе $\omega=\sqrt{\dfrac{mga}{I}}$.

Аналізуючи формули (19.6) та (19.14), з урахуванням (19.11), легко бачити, що математичний маятник довжиною $l_0'=\dfrac{I}{ma}$ буде мати ту ж саму частоту коливань, що й фізичний. Точку, яка знаходиться на відстані l_0 від осі обертання на лінії, що проходить через центр маси, називають ***центром хитання*** фізичного маятника. Якщо вісь обертання розмістити в центрі хитання, то коливання будуть відбуватися з такою ж частотою. Відстань l_0 називають ***зведеною довжиною фізичного маятника***.

19.3 Згасаючі власні коливання

Припустимо, що при малих швидкостях руху сили тертя є пропорційними швидкості руху. В цьому випадку рівняння руху, наприклад для малих коливань тягарця на пружині, мають вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-h\frac{dx}{dt}, \qquad (19.15)$$

де $h\dfrac{dx}{dt}$ - сила тертя, $h=const$.

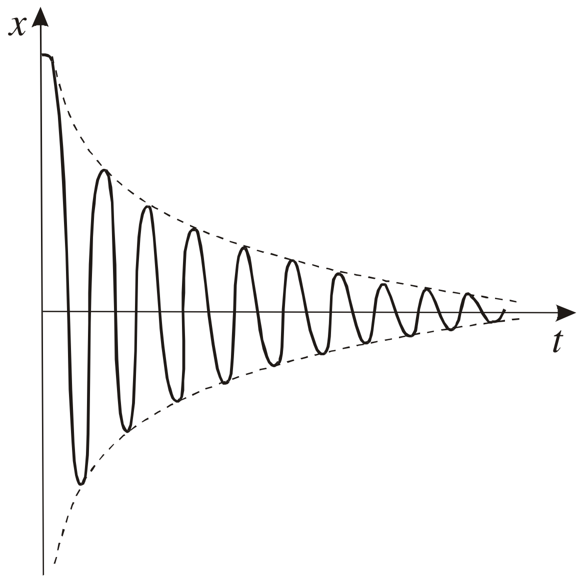
Розв’язок рівняння (19.15) має вигляд

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi), \tag{19.16}$$

де A і φ - константи, які визначаються з початкових умов.

$$\delta = \frac{h}{2m}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}. \tag{19.17}$$

Коливальний процес у цьому випадку можна характеризувати добутком згасаючої експоненціальної функції $e^{-\delta t}$ на періодичну функцію $\cos(\omega_1 t + \varphi)$, яка має період $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Величину T_1 називають ще ***умовним періодом згасаючих коливань***. Графічно такі коливання зображуються так.



Коефіцієнт $\delta = \frac{h}{2m}$, що характеризує швидкість згасання з часом, називають ***коефіцієнтом згасання*** і визначають відношенням коефіцієнта сили тертя до подвійної величини маси, яка коливається.

Коливання, що описуються формулою (19.16) теоретично можуть продовжуватися нескінченно довгий час. Тому для оцінки тривалості таких процесів вводять умовну величину $\tau = \frac{1}{\delta}$, яка має розмірність часу і називається ***часом релаксації***.

За час релаксації τ відхилення від положення рівноваги в системі зменшується приблизно в e разів (у 2,73 рази).

Проте коефіцієнти τ і δ не можуть характеризувати весь коливальний процес, оскільки в залежності від величини умовного періоду при одному і тому ж значенні τ різні системи можуть виконувати різне число коливань.

Для оцінки згасання коливального процесу в залежності від числа коливань користуються не коефіцієнтом затухання δ, а ***декрементом згасання*** (або ***логарифмічним декрементом згасання***), що є безрозмірною величиною і визначається із співвідношення

$$\Theta = \frac{T}{\tau} = \delta T_1, \tag{19.18}$$

де T_1 – умовний період згасаючого коливання.

Величина $\frac{1}{\Theta} = \frac{\tau}{T_1} = \delta T_1$ показує, скільки коливань встигне виконати система поки амплітуда їх не зменшиться у e разів.

Припустимо, що в деякий момент часу відхилення точки від положення рівноваги було x_1, тоді через час T_1, рівний умовному періоду, це відхилення буде складати

$$x_2 = x_1 e^{-\delta T_1}. \tag{19.19}$$

Формулу (19.19) можна отримати з таких міркувань:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = Ae^{-\delta t_1}\cos(\omega_1 t_1 + \varphi) \\ x_2 = Ae^{-\delta t_1 - \delta T_1}\cos(\omega_1 t_1 + \varphi + 2\pi) = x_1 e^{-\delta T_1} \end{array}\right\}$$

З формули (19.19) знайдемо відношення $\frac{x_2}{x_1}$:

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\delta T_1} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{x_1}{x_2} = \delta T_1.$$

$$\text{Але } \delta T_1 = \Theta \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{x_1}{x_2} = \Theta. \tag{19.20}$$

Ось чому величину Θ називають ще логарифмічним декрементом згасання.

19.4 Вимушені коливання

Введемо поняття ***лінійного осцилятора***, як системи, що здійснює малі гармонічні коливання. Припустимо, що на лінійний осцилятор окрім сили тертя впливає ще якась зовнішня сила. Будемо вважати, що модуль діючої зовнішньої сили змінюється за гармонічним законом, тобто $F = F_0 \cos pt$, де F_0 - амплітудне значення сили, p - її кругова частота.

Зовнішня періодична сила може почати діяти на осцилятор у будь-який момент часу. В цьому випадку рух осцилятора на протязі деякого проміжку часу буде залежати від руху в момент початку дії сили. Проте з часом вплив початкових умов буде слабшати і рух осцилятора перейде в режим деяких установлених коливань. Процес установлення коливань називається ***перехідним режимом***. Тривалість перехідного режиму визначається часом згасання коливань, які були у наявності в момент початку дії зовнішньої сили. Цей час τ відомий: $\tau = \dfrac{1}{\delta}$.

Для спрощення будемо розглядати такі вимушені гармонічні коливання, які здійснюються через час $t > \tau$ (після початку дії зовнішньої сили).

Запишемо рівняння таких коливань, використавши, як приклад, „реальний” математичний маятник, що рухається з тертям під дією зовнішньої періодичної сили. Тоді до повертаючої сили $\dfrac{mg}{l}x$ і до сили тертя $h\dfrac{dx}{dt}$ додається ще й зовнішня сила $F = F_0 \cos pt$. Таким чином, для малих кутів відхилення рівняння руху зазначеного маятника набуває вигляду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} \cdot x - h\frac{dx}{dt} + F_0 \cos pt. \qquad (19.21)$$

Як і раніше, позначимо коефіцієнт згасання через $\delta = \dfrac{h}{2m}$, а власну частоту – через $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Тоді, поділивши обидві частини рівняння (19.21) на масу осцилятора, маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{h}{2m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \cdot x = \frac{F_0}{m}\cos pt$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_0}{m}\cos pt\,. \qquad (19.22)$$

Згідно з експериментальними даними коливання цієї системи будуть відбуватися з частотою p. Припустимо, що коливання мають початкову фазу φ і амплітуду B. Тоді зміщення x може бути записаним у вигляді

$$x = B\cos(pt + \varphi). \qquad (19.23)$$

Визначимо початкову фазу φ і амплітуду B вимушених гармонічних коливань. Для цього підставимо вираз (19.23) в (19.22), продиференціювавши останній відповідну кількість разів:

$$\frac{dx}{dt} = -Bp\sin(pt + \varphi); \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -Bp^2\cos(pt + \varphi).$$

В результаті маємо

$$-Bp^2\cos(pt + \varphi) - 2\delta Bp\sin(pt + \varphi) + \omega^2 B\cos(pt + \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos pt\,.$$

Або

$$B\left[\omega^2\cos(pt + \varphi) - p^2\cos(pt + \varphi) - 2\delta p\sin(pt + \varphi)\right] = \frac{F_0}{m}\cos pt \qquad \Rightarrow$$

$$B\left[\left(\omega^2 - p^2\right)\cos(pt + \varphi) - 2\delta p\sin(pt + \varphi)\right] = \frac{F_0}{m}\cos pt\,. \qquad (19.24)$$

Перетворимо формулу (19.24), використовуючи формули синуса і косинуса суми. Одержимо

$$B\left[\left(\omega^2 - p^2\right)(\cos pt\cos\varphi - \sin pt\sin\varphi) - 2\delta p(\sin pt\cos\varphi = \cos pt\sin\varphi)\right] - \frac{F_0}{m}\cos pt = 0.$$

Або

$$B\left(\omega^2 - p^2\right)\cos pt\cos\varphi - B\left(\omega^2 - p^2\right)\sin pt\sin\varphi -$$

$$-2\delta pB\sin pt\cos\varphi - 2\delta pB\cos pt\sin\varphi - \frac{F_0}{m}\cos pt = 0.$$

Звідки

$$\left\{B\left[\left(\omega^2-p^2\right)\cos\varphi-2\delta p\sin\varphi\right]-\frac{F_0}{m}\right\}\cos pt+ \\ +B\left[-\left(\omega^2-p^2\right)\sin\varphi-2\delta p\cos\varphi\right]\sin pt=0 \quad (19.25)$$

Результатом є рівняння, яке складається з двох доданків, і яке являє собою суму двох гармонічних членів:

$$a\cos pt+b\sin pt=0, \quad (19.26)$$

де

$$a=B\left[\left(\omega^2-p^2\right)\cos\varphi-2\delta p\sin\varphi\right]-\frac{F_0}{m}=const;$$
$$b=B\left[-\left(\omega^2-p^2\right)\sin\varphi-2\delta p\cos\varphi\right]=const$$

Рівність (19.26) може виконуватись лише тоді, коли водночас $a = 0$ і $b = 0$. Тоді, з рівняння (19.25) випливає:

$$\begin{cases} B\left[\left(\omega^2-p^2\right)\cos\varphi-2\delta p\sin\varphi\right]=\dfrac{F_0}{m}; \\ \left(\omega^2-p^2\right)\sin\varphi+2\delta p\cos\varphi=0. \end{cases} \quad (19.27)$$

Визначимо із системи рівнянь (19.27) величини B та φ.

З другого рівняння системи маємо

$$2\delta p\cos\varphi=\left(p^2-\omega^2\right)\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\delta p}{p^2-\omega^2}=\mathrm{tg}\,\varphi;$$

або

$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{2\delta p}{p^2-\omega^2}. \quad (19.28)$$

Домножимо перше рівняння системи (19.27) на $\sin\varphi$ і поділимо на B, а друге домножимо на $\cos\varphi$. Отримуємо:

$$\begin{cases} \left(\omega^2-p^2\right)\cos\varphi\sin\varphi-2\delta p\sin^2\varphi=\dfrac{F_0}{mB}\sin\varphi; \\ \left(\omega^2-p^2\right)\sin\varphi\cos\varphi+2\delta p\cos^2\varphi=0. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге, маємо

$$2\delta p\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=-\frac{F_0}{mB}\sin\varphi \;\Rightarrow\; \frac{F_0}{mB}\sin\varphi=-2\delta p\,. \qquad (19.29)$$

Звідси

$$\sin\varphi=-\frac{2\delta pmB}{F_0}\,.$$

Підставимо значення $\sin\varphi$ в друге рівняння системи (19.27)

$$-\left(\omega^2-p^2\right)\frac{2\delta pmB}{F_0}+2\delta p\cos\varphi=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi=\frac{mB}{F_0}\left(\omega^2-p^2\right). \qquad (19.30)$$

Піднесемо рівняння (19.29) і (19.30) до квадрату і складемо

$$\left.\begin{aligned}&\frac{F_0}{mB}\sin\varphi=-2\delta p\\&\cos\varphi=\frac{mB}{F_0}\left(\omega^2-p^2\right)\end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned}&\sin^2\varphi=\frac{4\delta^2p^2m^2B^2}{F_0^2}\\&\cos^2\varphi=\frac{m^2B^2}{F_0^2}\left(\omega^2-p^2\right)^2\end{aligned}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\frac{m^2B^2}{F_0^2}\left(\omega^2-p^2\right)^2+\frac{4\delta^2p^2m^2B^2}{F_0^2}=1\,.$$

З останньої рівності знайдемо *B*

$$\frac{m^2B^2}{F_0^2}\left[\left(\omega^2-p^2\right)^2+4\delta^2p^2\right]=1 \;\;\Rightarrow\;\; B^2=\frac{F_0^2}{m^2}\cdot\frac{1}{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4\delta^2p^2}\,.$$

Тобто

$$B=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4\delta^2p^2}}\,. \qquad (19.31)$$

Знайшовши значення В та φ, розв’язок рівняння (19.22) запишемо так

$$x=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4\delta^2p^2}}\cos\left(pt+\operatorname{arctg}\frac{2\delta p}{p^2-\omega^2}\right). \qquad (19.32)$$

З виразу (19.31) випливає, що амплітуда вимушених коливань є пропорційною амплітудному значенню діючої сили і обернено пропорційною масі осцилятора. Крім того, якщо величина згасання є малою ($\omega << \delta$), то корінь у знаменнику буде мати мінімум поблизу точки $p = \omega$. Тому, при частотах p близьких до ω, амплітуда вимушених коливань B буде набувати максимального значення, тобто буде спостерігатись явище ***резонансу***.

Розглянемо, як змінюється співвідношення між різними силами при вимушених коливаннях в залежності від частоти. Цим самим з'ясуємо причини зміни амплітуди коливань при зміні частоти.

Згідно з рівнянням (19.21), результуюче прискорення, з яким рухається система, є наслідком дії трьох сил: повертаючої сили, сили тертя і зовнішньої сили. У випадку вимушених коливань усі три сили будуть виконувати гармонічні коливання з частотою p.

Скориставшись виразом (19.24), запишемо співвідношення між цими силами

$$Bm\left(\omega^2 - p^2\right)\cos(pt+\varphi) - 2\delta pBm\sin(pt+\varphi) = F_0\cos pt, \tag{19.33}$$

де $F_0\cos pt$ - зовнішня сила, $-2\delta pBm\sin(pt+\varphi)$ - сила тертя

Перший доданок у формулі (19.33) перетворимо так:

$$Bm\left(\omega^2 - p^2\right)\cos(pt+\varphi) = \omega^2 Bm\cos(pt+\varphi) - p^2 Bm\cos(pt+\varphi), \tag{19.34}$$

де $Bm\left(\omega^2 - p^2\right)\cos(pt+\varphi)$ - консервативна сила;

$\omega^2 Bm\cos(pt+\varphi)$ - повертаюча сила;

$p^2 Bm\cos(pt+\varphi) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Доданок $Bm\left(\omega^2 - p^2\right)\cos(pt+\varphi)$ у формулі (19.33) можна назвати консервативною силою, оскільки робота цієї сили буде дорівнювати нулю.

Отже, з рівняння (19.33) випливає, що зовнішня сила F зрівноважується силою тертя та консервативною силою.

У випадку малих частот ($p \to 0$), сила тертя $-2\delta pBm\sin(pt+\varphi)$ і компонента консервативної сили $p^2 Bm\cos(pt+\varphi) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ є дуже малими, тому зовнішня сила $F = F_0\cos pt$ зрівноважується лише повертаючою силою $\omega^2 Bm\cos(pt+\varphi)$, тобто $F_0\cos pt \approx \omega^2 Bm\cos(pt+\varphi), \;\Rightarrow\; \varphi = 0$. Це означає, що при малих частотах зовнішня сила є синфазною зі зміщенням і система осцилює (коливається) так, ніби існує лише одна повертаюча сила, а маса і сила тертя є відсутніми.

У випадку дуже високих частот ($p \to \infty$), над всіма доданками переважає другий член консервативної сили $p^2 Bm\cos(pt+\varphi)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Цей член буде набагато більшим за повертаючу силу та силу тертя. Наслідком є те, що прискорення, якого набуває осцилятор, практично буде визначатись лише зовнішньою силою, тобто справедливою буде рівність

$$-p^2 Bm\cos(pt+\varphi)\approx F_0\cos pt. \tag{19.35}$$

З формули (19.35) випливає, що $\varphi\approx 180^{\circ}$, а $B\approx\dfrac{F_0}{mp^2}$. Такий же результат отримуємо і з формули (19.31), поклавши $p >> \omega$ і $p >> \delta$.

Таким чином, при високих частотах зміщення і зовнішня сила знаходяться у протифазі і коливання відбуваються так, начебто зовнішня сила прикладена лише до вільної маси m. Тобто, при високих частотах визначальним фактором є маса, а при малих – повертаюча сила.

Розглянемо вимушені коливання при середніх частотах. При $p = \omega$ консервативна сила буде дорівнювати нулю, а зовнішня сила буде зрівноважуватися лише силою тертя

$$F_0\cos pt=-2\delta BmB\sin(pt+\varphi)$$

або

$$F_0\cos pt=-hpB\sin(pt+\varphi),$$

оскільки $\delta=\dfrac{h}{2m}$.

Остання рівність буде справедливою лише при $\varphi=-90^{\circ}$, або коли зміщення відповідає залежності $x=B\cos\left(pt-90^{\circ}\right)$. Випадок, коли $p = \omega$, називають ***резонансом***. Отже, коливання зміщення при резонансі завжди відстають від коливань сили на 90^0. Визначаючою при резонансі є сила тертя. Якщо знехтувати цією силою, поклавши $h = 0$, то з’ясувалось би, що амплітуда коливань B при $p = \omega$ дорівнює нескінченності. Цей висновок випливає як з формули (19.31), так і з формули (19.33) при $h = p = 0$ і $p = \omega$, а це є фізичним абсурдом. Проте при малій силі тертя амплітуда коливань при резонансі буде мати високе значення. З виразу (19.33) випливає, що при $p = \omega$

$$B_{рез}=\frac{F_0}{2\delta m\omega}=\frac{F_0}{2\delta mp}=\frac{F_0}{h\omega}.$$

Тому, при малих значеннях h резонансна амплітуда може бути високою, що є небезпечним явищем у техніці, а також для різних споруд.

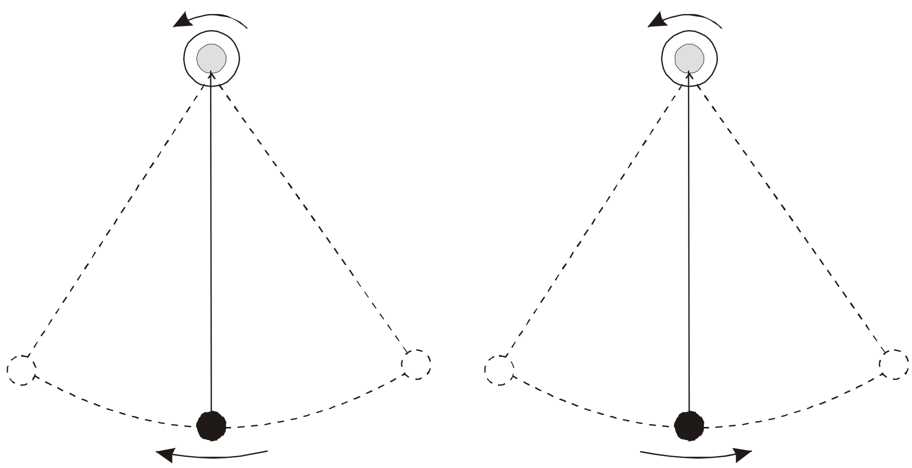
19.5 Автоколивання

Вище було показано, що якщо розглядати власні коливання гармонічного осцилятора, то при наявності сил тертя вони будуть поступово згасати. Якщо ж підводити до осцилятора енергію від джерела зовнішньої гармонічної сили, то він буде коливатися з такою ж частотою, з якою змінюється зовнішня сила. До того ж, частота зміни зовнішньої сили буде відрізнятися від власної частоти осцилятора.

Проте в техніці існують такі механізми, в яких осцилятор сам регулює підвід енергії від зовнішнього джерела для компенсації втрат на подолання сил тертя. В цьому випадку енергія, яку одержує осцилятор за один період, буде дорівнювати енергії, що витрачається на подолання сил тертя за цей же час. Такі коливання, які самостійно підтримуються, називають ***автоколиваннями***.

Якщо, сила тертя, діюча на осцилятор, є малою, то за один період коливання енергія, що підводиться зовні, буде складати лише незначну частку від усієї енергії осцилятора. Тоді автоколивання будуть мати частоту, величина якої буде близькою до частоти власних коливань, а самі коливання будуть близькими до гармонічних. У випадку ж значної сили тертя коливання хоча й будуть періодичними, але будуть значно відрізнятись від гармонічних. Період таких коливань не буде співпадати з періодом власних коливань.

Як приклад розглянемо коливання маятника, підвішеного на осі до муфти, що обертається.



а) *б*)

Якщо маятник знаходиться в стані спокою, то в результаті обертання муфта, ковзаючи по валові, виконує роботу по подоланню сил тертя. Така робота повністю переходить у внутрішню енергію, нагріваючи вал та муфту. Нехай маятник коливається. Розглянемо роботу сил тертя за один період. За одну половину періоду така робота дорівнює енергії, витраченій маятником, коли маятник і вал оберталися в протилежних напрямках (*а*). За другу частину періоду, коли вал і маятник оберталися в однакових напрямках, така робота буде додавати маятникові енергії (*б*). Припустимо, що сила тертя не залежить від швидкості ковзання. В цьому випадку робота сил тертя, яка передається маятникові, буде дорівнювати нулю. Тоді існуюче тертя не буде вносити згасання в систему, що коливається.

Якщо сила тертя між муфтою та валом зростає зі зростанням швидкості ковзання, то робота сил тертя в тому випадку, коли маятник рухається проти обертання вала (*а*) буде більшою, ніж у випадку, зображеному на рисунку (*б*). Фізично це означає, що дія сил тертя призводить до того, що енергія маятника за період буде зменшуватись, а це означає, що його коливання будуть швидше згасати.

Розглянемо третій випадок, коли сила тертя зменшується зі зростанням швидкості ковзання. Тоді енергія, яку отримує маятник за півперіоду у випадку, коли напрямки обертання осі маятника і вала співпадають (*б*), буде більшою за енергію, витрачену маятником на роботу проти сил тертя в іншому півперіоді (*а*). В цьому випадку обертання муфти призводить до зростання амплітуди коливань маятника. Але при цьому можуть підвищуватись інші втрати енергії (внаслідок тертя об повітря, наприклад).

Коли ж енергія, яка за період підводиться до системи, стане дорівнювати енергії, що витрачається на подолання сил тертя за цей же час, виникає режим коливань із постійними амплітудою та частотою. Такий режим називають ***автоколивальним***, а сам маятник буде виконувати при цьому ***стаціонарні коливання*** або ***автоколивання.***

19.6 Коливання зв'язаних систем

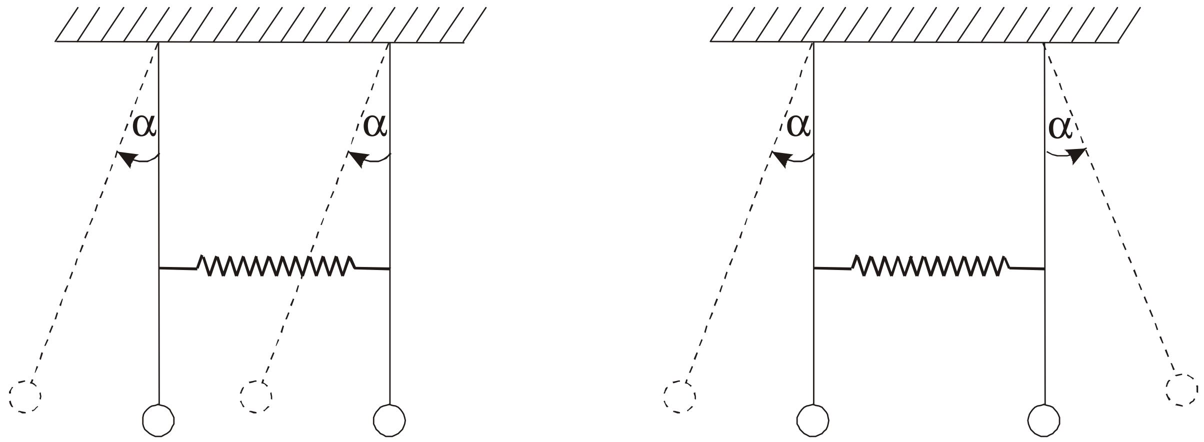
У випадку, коли система має декілька ступенів свободи, при малих відхиленнях від положення рівноваги можливі коливання за всіма ступенями свободи. Звичайний маятник має два ступені свободи, оскільки він може коливатися у двох взаємно перпендикулярних вертикальних площинах, які проходять крізь точку підвісу.

Якщо коливання за одним ступенем свободи є незалежними від коливань за іншим, то опис руху такої системи з багатьма ступенями свободи призводить до розв'язку чисто кінематичної задачі. Інакше кажучи, якщо відомі рухи за кожним ступенем свободи, то необхідно виконувати кінематичне додавання рухів.

У випадку ж існування взаємозв'язку між різними ступенями свободи коливання систем з багатьма ступенями свободи набувають нових фізичних закономірностей.

Розглянемо ***зв'язані системи***, тобто такі системи, між якими існують ***зв'язки***, що дозволяють проводити обмін енергією між різними ступенями свободи. За приклад можуть правити два маятники, скріплені між собою пружиною. Така система має чотири ступеня свободи. Якщо вивести з положення рівноваги один з маятників і потім його відпустити, то через деякий час, внаслідок можливості обміну енергією, почне коливатися й інший маятник. В результаті утвориться досить складна картина коливань. Але ці коливання завжди можна подати у вигляді суперпозиції чотирьох гармонічних коливань, частоти яких називають ***нормальними частотами зв'язаної системи***. Їх число дорівнює числу ступенів свободи (у даному випадку - чотири).

Вивчимо коливання маятників у вертикальній площині, яка проходить крізь їхню точку підвісу.



а) *б*)

Розглянемо два найпростіші випадки:

1) обидва маятники відхиляються в один і той же бік на однаковий кут α (*а*);
2) обидва маятники відхиляються у різні боки на однаковий кут α (б).

Такі прості відхилення називають ***нормальними***. Довільне ж відхилення маятників можна подати у вигляді суперпозиції станів 1) і 2).

Розглянемо рисунок *а*. У цьому випадку обидва маятники будуть коливатися з однаковою, так званою, ***нормальною частотою*** ω_1.

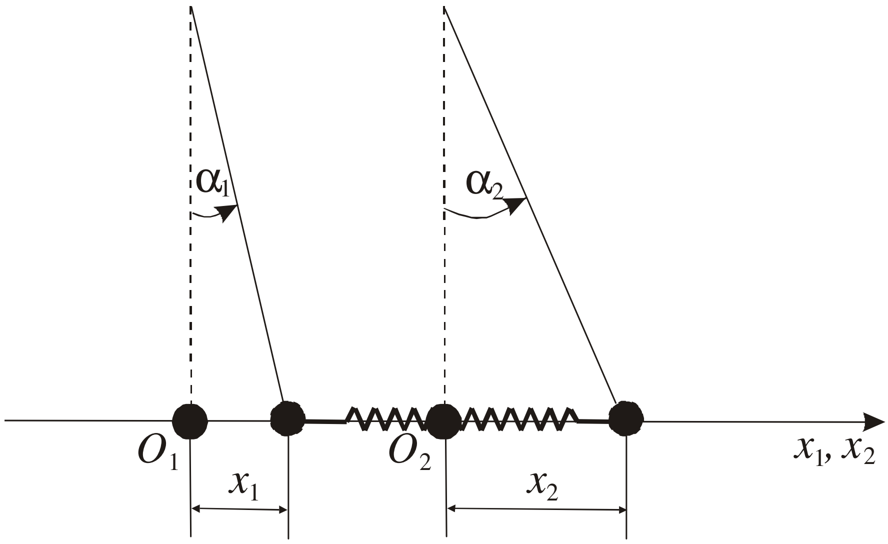
У випадку, зображеному на рисунку *б*, частота коливань також буде нормальною. Позначимо її ω_2.

Подібно розглянутим випадкам можна виразити коливання маятників і в іншій вертикальній площині, яка проходить перпендикулярно до лінії, що з'єднує їхні точки підвісу.

Отже, повний рух двох зв'язаних маятників, що мають чотири ступеня свободи, буде виражатись ні чим іншим, як суперпозицією чотирьох нормальних коливань з чотирма нормальними частотами.

Таким чином, щоб описати рух зв'язаних систем, потрібно знайти їхні нормальні коливання і нормальні частоти.

Для математичного опису коливань зв'язаних систем обмежимося двома ступенями свободи, тобто припустимо, що маятники можуть коливатися лише у тій площині, яку зображено на рисунках *а* та *б*. Будемо розглядати малі коливання. Це дає право знехтувати вертикальним зміщенням маятників і вважати, що матеріальні точки (маятники) рухаються вздовж однієї і тієї ж прямої. Тоді положення точок при коливаннях можна характеризувати їхніми зміщеннями x_1 та x_2 від положення рівноваги - точок O_1 та O_2.



Врахуємо, що коли обидва маятники знаходяться в положенні рівноваги (тобто в точках O_1 та O_2) пружина буде недеформованою і з її боку на маятники не буде здійснено ніякої дії.

У випадку ***синфазного коливання*** позначимо частоту нормального коливання маятників через ω_1, а у випадку ***протифазного коливання*** – через ω_2. При цьому очевидно, що $\omega_2 > \omega_1$. Тоді для кожної матеріальної точки можна записати такі рівняння, враховуючи, що коливання можуть бути вираженими у вигляді суперпозиції двох нормальних коливань:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}. \tag{19.36}$$

Постійні величини A, B, φ_1 і φ_2 можна знайти з початкових умов, які визначають, наприклад, значення зміщень x_{10} та x_{20} і швидкостей $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{10}$ та $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{20}$ в момент часу $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_{10} &= A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2 \\ x_{20} &= A\sin\varphi_1 - B\sin\varphi_2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} &= A\omega_1\cos\varphi_1 + B\omega_2\cos\varphi_2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{20} &= A\omega_1\cos\varphi_1 - B\omega_2\cos\varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{19.37}$$

Отже, маємо чотири рівняння і чотири невідомих величини. А це означає, що можна знайти A, B, φ_1 та φ_2 і повністю описати рух за допомогою формул (19.36).

Додавши два перших і два останніх рівняння, маємо систему

$$\left.\begin{aligned} x_{10} + x_{20} &= 2A\sin\varphi_1 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{20} &= 2A\omega_1\cos\varphi_1 \end{aligned}\right\}.$$

Тоді з першого рівняння системи маємо

$$A = \frac{x_{10} + x_{20}}{2\sin\varphi_1}.$$

Водночас, з другого рівняння отримуємо

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{20} = 2\cdot\frac{x_{10} + x_{20}}{2\sin\varphi_1}\omega_1\cos\varphi_1 \;\Rightarrow\; (x_{10} + x_{20})\omega_1 = \operatorname{tg}\varphi_1\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{20}\right]$$

або

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{(x_{10} + x_{20})\omega_1}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{20}\right]};$$

Тоді

$$A = \operatorname{arctg}\frac{x_{10} + x_{20}}{2\sin\left[\operatorname{arctg}\frac{(x_{10} + x_{20})\omega_1}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{20}\right]}\right]};$$

Абсолютно аналогічно визначаються φ_2 і B.

Розв'яжемо цю ж задачу, використовуючи закони динаміки.

Рівняння руху математичних маятників однакової довжини l мають такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} &= -\frac{g}{l}\alpha_1 \\ \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} &= -\frac{g}{l}\alpha_2 \end{aligned}\right\}, \tag{19.38}$$

де α_1 і α_2 - кути відхилення кожного маятника від вертикалі.

Але $x_1 = \alpha_1 l$, а $x_2 = \alpha_2 l$. Звідси: $\alpha_1 = \frac{x_1}{l}$, а $\alpha_2 = \frac{x_2}{l}$. Тоді, без урахування зв'язку з пружиною, рівняння руху матеріальних точок можна записати так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x_1 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{19.39}$$

При деформації пружини (в області пружних напружень) виникають сили, що є пропорційними згідно із законом Гука видовженню пружини $\Delta x = x_2 - x_1$. Тому модулі сил, діючих на матеріальні точки, будуть дорівнювати

$$F_1 = -F_2 = D(x_2 - x_1), \tag{19.40}$$

де D – коефіцієнт пропорціональності.

З урахуванням (19.40) рівняння (19.39) набувають вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{D}{m}(x_2 - x_1) \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{D}{m}(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\}. \tag{19.41}$$

З (19.41) випливає, що

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x_2}{dt^2}&=-\frac{g}{l}(x_1+x_2)\\ \frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}&=-\frac{g}{l}(x_1-x_2)-\frac{2D}{m}(x_1-x_2)\end{aligned}\right\}$$

або

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{g}{l}(x_1+x_2)=0\\ &\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{g}{l}(x_1-x_2)+\frac{2D}{m}(x_1-x_2)=0\end{aligned}\right\}$$

і остаточно

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)+\omega_1^2(x_1+x_2)=0\\ &\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)+\omega_2^2(x_1-x_2)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}+\omega_1^2(x_1+x_2)=0\\ &\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2}+\omega_2^2(x_1-x_2)=0\end{aligned}\right\}, \tag{19.42}$$

де

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}};\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2D}{m}}\,. \tag{19.43}$$

Розв’язок рівнянь (19.42) є відомим:

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2&=A_0\sin(\omega_1t+\varphi_1)\\ x_1-x_2&=B_0\sin(\omega_2t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}. \tag{19.44}$$

Тоді

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{2}A_0\sin(\omega_1t+\varphi_1)+\frac{1}{2}B_0\sin(\omega_2t+\varphi_2)\\ x_2&=\frac{1}{2}A_0\sin(\omega_1t+\varphi_1)-\frac{1}{2}B_0\sin(\omega_2t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}. \tag{19.45}$$

Формули (19.45) співпадають з формулами (19.36), коли $A = \frac{1}{2} A_0$, а $B = \frac{1}{2} B_0$.

Тому величини ω_1 і ω_2, які було знайдено за допомогою виразів (19.43) будуть ***нормальними частотами коливань системи з двома ступенями свободи***.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хайкин С. Э. Физические основы механики. – М: Наука, 1971.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. – М.: Наука, 1979.
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1986.
4. Стрелков С.П. Механика. – М,: Наука, 1975.
5. Фриш С.Э., Тиморева А.В. Курс общей физики. Т 1. – М.: ГИФИМЛ, 1962.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. – М.: Наука, 1986.
7. Пономаренко В.И., Ильин Ю.М. Курс общей физики. Т.1. – К.: «ВИПОЛ», 1997.