Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

В. М. Кадец

КУРС ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Харьков – 2006

УДК 517.98 517.51
ББК 22.162
К 13

Рекомендовано к печати ученым советом механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 8 от 15.10.04)

Рецензенты: Кировоградский государственный педагогический университет имени В. Винниченко – доктор физико-математических наук, профессор А. Н. Пличко и В. О. Романов
Черновицкий национальный университет имени Ю. Федьковича − заведующий кафедрой математического анализа доктор физико-математических наук, профессор В. К. Маслюченко и кандидат физико-математических наук, доцент Попов М. М.

ISBN 966-623-199-9

К 13 **Кадец В. М. Курс функционального анализа**: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006 − 607 с.

Данная книга написана на основе курса функционального анализа, читающегося автором с 1990 года на отделении «Математика» механико-математического факультета Харьковского национального университета, и включает в себя все основные разделы курса: теорию меры и интеграла Лебега, теорию нормированных и гильбертовых пространств и элементы теории операторов. Часть включённого материала выходит за рамки основного курса и может рассматриваться как мост, связывающий стандартный курс со спецкурсами «Топологические векторные пространства» и «Введение в теорию банаховых пространств».

ISBN 966-623-199-9

© Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2006
© Кадец В. М., 2006
© Дончик И. Н., макет обложки, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Функциональный анализ посвящён изучению различных структур, определённых на бесконечномерных линейных пространствах. Нормированные, банаховы и топологические векторные пространства, гильбертово пространство, пространства функций, банаховы алгебры, пространства операторов – вот весьма неполный перечень основных объектов функционального анализа. Хотя некоторые результаты, относящиеся к данному направлению, появлялись и раньше, в самостоятельную дисциплину функциональный анализ выделился в 20-х годах XX века. Знаменитая монография Банаха [Ban], в первоначальном варианте опубликованная в 1931 году на польском языке, подвела итог этапу становления нового математического направления, этапу, на котором ведущую роль играли представители Львовской математической школы во главе со Стефаном Банахом (S. Banach). Усилиями многих математиков функциональный анализ развился в одно из интереснейших направлений современной математики, в направление, активное развитие которого продолжается и в наши дни.

Предлагаемый учебник составлен на основе курса функционального анализа, читающегося автором с 1990 года на отделении «Математика» механико-математического факультета Харьковского национального университета. Упомянутый курс состоит из трёх семестров. Первый семестр посвящён в первую очередь изучению теории меры и интеграла Лебега, второй и третий семестры – основным структурам функционального анализа и теории операторов. Кроме того, для студентов, желающих глубже познакомиться с предметом, обычно читаются такие спецкурсы, как «Топологические векторные пространства» и «Введение в теорию банаховых пространств». Часть материала (и чем ближе к концу учебника, тем больше такого материала включено в текст) может рассматриваться не как часть основного курса, а как мост, связывающий стандартный курс со спецкурсами. Для удобства читателя в учебник добавлены некоторые разделы из прочитанных ранее курсов. Так, мы напоминаем необходимую терминологию из линейной алгебры и повторяем вводные разделы теории метрических пространств и компактных множеств, относящиеся скорее к математическому анализу и топологии.

Для усиления аналогии с интегралом Римана, теория интеграла Лебега излагается на основе определения Фреше: через сходимость интегральных сумм, аналогичных интегральным суммам Римана. Одно из достоинств этого подхода − простота, с которой такое определение распространяется на векторнозначные функции.

В математике невозможно ничему научиться, не решая задач. В тексте много задач, как простых, предназначенных для овладения новыми понятиями, так и более сложных, помогающих глубже познакомиться с предметом. Материал, выходящий за рамки стандартного курса, часто представлен в обзорном виде. Доказательства в таком случае нередко заменены цепочками упражнений, решив которые, читатель сможет получить сформулированные результаты самостоятельно. В упражнения вынесены также и некоторые используемые в основном тексте утверждения. Это сделано в тех случаях, когда утверждения представляются нам слишком простыми, чтобы явно выписывать их доказательства, либо хотя и не совсем очевидными, но вполне доступными для студента и представляющими хороший объект для тренировки. Некоторые упражнения снабжены комментариями: указаниями к решению либо ссылками на литературу. Такие комментарии размещаются в конце соответствующей главы.

В основе функционального анализа лежит геометрический подход к изучению аналитических по своей природе объектов: функций, уравнений, рядов, последовательностей. Этот подход, позволяющий применять геометрическую интуицию в сложных аналитических задачах, оказался весьма продуктивным. Благодаря этому в рамках функционального анализа возникли и развились мощные методы, нашедшие применения в разнообразных математических дисциплинах. Язык функционального анализа проник в такие отрасли чистой и прикладной математики, как гармонический анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, методы приближённых вычислений, линейное программирование, методы оптимизации, и этот список применений можно продолжить. В настоящем курсе мы постарались дать также некоторое представление об основных идеях и направлениях такого применения, прежде всего к вопросам гармонического анализа.

Данная книга создавалась на протяжении ряда лет, и на разных стадиях её написания многие преподаватели и студенты участвовали в обсуждении курса и помогали автору советом. Мне хотелось бы поблагодарить всех слушателей этого курса, особенно моих бывших студентов Ю. Забелышинского и И. Рудя, предоставивших в моё распоряжение записанный ими конспект лекций; моих коллег А. Вишнякову и Л. Безуглую, использовавших черновой вариант учебника при чтении курса функционального анализа и своими замечаниями способствовавших улучшению текста, а также многих студентов, пользовавшихся учебником при изучении функционального анализа и сообщавших мне о замеченных опечатках. Я глубоко признателен В. Маслюченко, А. Пличко, М. Попову и В. Романову, приславшим рецензии на данный учебник, и Т. Банаху, высказавшему ряд полезных замечаний, учтённых мною при работе над рукописью.

Настоящая электронная версия книги отличается от оригинала исправлением опечаток, замеченных за прошедшее после издания время. Последнее обновление − 23.11.2006.

1. Метрические и топологические пространства

Топологические и особенно метрические пространства неоднократно упоминались и использовались в курсах математического анализа, линейной алгебры (где разбирался один из важнейших примеров метрического пространства – конечномерное евклидово пространство), дифференциальной геометрии (где изучались геодезические кривые и внутренняя метрика поверхности), а также, само собой разумеется, в курсе топологии. Поэтому мы лишь бегло напомним общеизвестные определения и факты, обсудим принятую в этой книге терминологию и систему обозначений, а более подробно остановимся на вопросах, возможно не освещавшихся в других курсах.

1.1. Множества и отображения

При изложении функционального анализа предполагается знакомство читателя с понятием множества и простейшими операциями над множествами – объединением и пересечением конечного или бесконечного числа множеств, разностью, дополнением, симметрической разностью, декартовым произведением множеств, равно как и с понятиями отношения, функции, графика отношения или функции, классов эквивалентности; такими терминами, как счётность или несчётность множества и т. д. Мы не будем пользоваться в основной части курса техникой трансфинитных чисел и трансфинитной индукции; но читатель, безусловно, окажется в выигрыше, ознакомившись с элементами теории трансфинитных чисел, скажем, по учебнику Келли [Kel], где в «Добавлении» даётся строгое формальное изложение теории, или по книге Натансона [Nat], где изложение не столь формально, но зато хорошо понятно. Некоторые тонкие вопросы теории меры и функционального анализа требуют владения методом трансфинитной индукции. Мы будем касаться таких вопросов только в упражнениях и комментариях к ним (впрочем, довольно редко).

Множества, как правило, будут обозначаться большими латинскими буквами, а элементы множеств – маленькими буквами. Термины «совокупность», «набор» будут использоваться в том же смысле, что и термин «множество». Приведём расшифровку некоторых терминов и обозначений.

- $A \setminus B$ – (теоретико-множественная) разность множеств A и B: $A \setminus B$ состоит из всех элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B.
- $A \Delta B$ – симметрическая разность множеств A и B: $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup \bigcup (B \setminus A)$.
- Другое, эквивалентное определение: $A \Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.
  $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup$

– $A \times B$ – декартово произведение множеств A и B: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. То есть декартово произведение множеств A и B – это множество упорядоченных пар, где первая координата принадлежит A, а вторая – B.

– $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ – декартово произведение множеств A_1, ... , A_n: $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k = \{(a_1,...,a_n) : a_k \in A_k\}$. Формально операция декартова произведения не ассоциативна. Скажем, $(A \times B) \times C$ в качестве элементов имеет пары вида $((a,b),c)$, а $A \times (B \times C)$ – вида $(a,(b,c))$. В то же время и $((a,b),c)$, и $(a,(b,c))$ естественно отождествить с тройкой (a,b,c). Если условиться о таком отождествлении, то операция декартова произведения станет ассоциативной, и будет выполняться формула $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \times \left(\prod\limits_{k=n+1}^{m} A_k\right) = \prod\limits_{k=1}^{m} A_k$.

– 2^A – совокупность всех подмножеств множества A.

– $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел (другое название – вещественная ось).

– $\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных вещественных чисел.

– $\mathbb{Z}$ – множество всех целых вещественных чисел.

– $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел.

– $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел.

– $\mathbb{R}^n$ – n-мерное координатное пространство: декартово произведение n экземпляров вещественной оси.

– $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

В упражнениях, приведенных ниже, собраны некоторые соотношения между множествами, применяющиеся нами в дальнейшем в тех или иных рассуждениях. Обычно подобные соотношения будут использоваться без доказательства: проверка их носит чисто технический характер и требует лишь небольшого навыка манипулирования с логическими выражениями и перебора случаев.

Упражнения

1. Пусть $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Тогда $A \cap B = \bigcup\limits_{k,j=1}^{\infty} (A_k \cap B_j)$.
2. Пусть $A, B \subset \Omega$. Тогда $(\Omega \setminus A)\Delta(\Omega \setminus B) = A \Delta B$.
3. Для любых множеств A_1, A_2, A_3 выполнено включение $A_1 \Delta A_3 \subset (A_1 \Delta A_2) \cup (A_2 \Delta A_3)$.

4. Пусть $\{A_n\}_{n\in M}$, $\{B_n\}_{n\in M}$ – два набора множеств. Тогда $\left(\bigcap_{n\in M} A_n\right)\Delta\left(\bigcap_{n\in M} B_n\right)\subset \bigcup_{n\in M}(A_n\Delta B_n)$ и $\left(\bigcup_{n\in M} A_n\right)\Delta\left(\bigcup_{n\in M} B_n\right)\subset \bigcup_{n\in M}(A_n\Delta B_n)$.
5. Для любого отображения $f: X\to Y$ и любых подмножеств $A,B\subset X$ выполнено соотношение $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$. Далее,
6. $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
7. Приведите пример, когда $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$.
8. Отображение $f: X\to Y$ будет инъективным в том и только том случае, если для любых подмножеств $A,B\subset X$ выполнено соотношение $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.
9. Пусть $f_1: X\to Y_1$, $f_2: X\to Y_2$ и функция $f: X\to Y_1\times Y_2$ действует по правилу $f(x)=(f_1(x), f_2(x))$. Тогда $f^{-1}(A_1\times A_2)=f_1^{-1}(A_1)\cap f_2^{-1}(A_2)$ для любых $A_1\subset Y_1$, $A_2\subset Y_2$.
10. Пусть $\{A_n\}_{n\in M}$ – некоторый набор подмножеств множества Ω. Тогда имеют место следующие *формулы де-Моргана*: $\Omega\setminus \bigcap_{n\in M} A_n = \bigcup_{n\in M}(\Omega\setminus A_n)$ и $\Omega\setminus \bigcup_{n\in M} A_n = \bigcap_{n\in M}(\Omega\setminus A_n)$.

1.2. Топологические пространства

1.2.1. Терминология

Семейство τ подмножеств множества X называется *топологией*, если оно подчиняется следующим аксиомам:

1. Как пустое множество, так и само X принадлежат τ.
2. Объединение любого набора множеств семейства τ снова лежит в τ.
3. Пересечение любого конечного числа множеств семейства τ принадлежит τ.

Множество, наделённое топологией, называется *топологическим пространством*. Если на множестве рассматривается только одна топология, соответствующее топологическое пространство мы будем обозначать той же буквой, что и само множество. В случае, если выбор топологии нуждается в уточнении, для топологического пространства будет применяться обозначение вида (X,τ). Множества, принадлежащие семейству τ, называются *открытыми в топологии* τ (или просто *открытыми*, если понятно, о какой топологии идёт речь).

Простейший пример топологии на произвольном множестве X – это *дискретная топология* 2^X, где открытыми считаются все подмножества. Другой стандартный пример топологического пространства – это вещественная ось $\mathbb{R}$, где открытыми множествами считаются конечные или счётные объединения открытых интервалов.

Пусть X – топологическое пространство, $x \in X$. Подмножество $U \subset X$ называется *открытой окрестностью* точки x, если U открыто и $x \in U$. Подмножество U называется *окрестностью* точки x, если оно содержит открытую окрестность точки x. Топологическое пространство X называется *отделимым по Хаусдорфу*, или *хаусдорфовым*, если оно подчиняется следующей *аксиоме отделимости*:

4. Для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, существуют окрестности U и V точек x и y соответственно, не пересекающиеся между собой.

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, отделимые по Хаусдорфу пространства.

Пусть X – топологическое пространство, $x \in X$. Семейство подмножеств $\mathbb{U}$ называется *базой окрестностей* точки x, если все элементы семейства $\mathbb{U}$ – окрестности, и для любой окрестности U точки x существует окрестность $V \in \mathbb{U}$, целиком содержащаяся в U.

Топологию можно определять локально, то есть начиная не со всей системы открытых множеств, а с баз открытых окрестностей. Пусть для каждой точки x множества X задано непустое семейство подмножеств $\mathbb{U}_x$, обладающее следующими свойствами:

– если $U \in \mathbb{U}_x$, то $x \in U$;
– если $U_1, U_2 \in \mathbb{U}_x$, то существует такое $U_3 \in \mathbb{U}_x$, что $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$;
– если $U \in \mathbb{U}_x$ и $y \in U$, то существует такое $V \in \mathbb{U}_y$, что $V \subset U$.

Тогда существует единственная топология на X, для которой семейства $\mathbb{U}_x$ будут базами окрестностей соответствующих точек. Эта топология задаётся следующим образом: точка x называется *внутренней точкой множества* A, если некоторая окрестность $U \in \mathbb{U}_x$ точки x содержится в A; множество A называется открытым, если все его точки – внутренние. Другими словами, множество открыто в том и только том случае, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую окрестность этой точки.

Пусть A – подмножество топологического пространства X. Множество A называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто; пересечение любого числа замкнутых множеств снова замкнуто. *Замыканием* множества A называется множество $\overline{A}$, равное пересечению всех замкнутых множеств, содержащих A. $\overline{A}$ – это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A. Точка $x \in X$ называется *предельной* для множества A, если каждая окрестность точки x содержит точку множества A, отличную от x. Замыкание множества A состоит из точек самого множества A и всех его предельных точек. Множество A называется *плотным в* *множестве* B, если $\overline{A} \supset B$. Множество A называется *плотным*, если оно плотно во всём пространстве. Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если в X есть счётное плотное подмножество.

Пусть x_n – последовательность элементов топологического пространства X. Точка $x \in X$ называется *пределом последовательности* x_n, если для любой окрестности U точки x все члены последовательности, начиная с некоторого, содержатся в U. Точка x называется *предельной* для последовательности x_n, если любая окрестность U точки x содержит бесконечное число членов последовательности.

Функция f, действующая из топологического пространства X в топологическое пространство Y, называется *непрерывной*, если для любого открытого множества A в Y его прообраз $f^{-1}(A)$ – открытое множество в X. Непрерывность можно переформулировать на языке окрестностей: функция непрерывна, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки $f(x)$ существует такая окрестность V точки x, что $f(V) \subset U$. Функция $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если она биективна, непрерывна и обратная функция $f^{-1} : Y \to X$ непрерывна. Два пространства называются *гомеоморфными*, если между ними существует гомеоморфизм.

Пусть на множестве X задано две топологии: τ_1 и τ_2. По определению, топология τ_1 *сильнее* топологии τ_2 (или, эквивалентно, τ_2 *слабее* τ_1), если каждое множество, открытое в топологии τ_2, открыто и в топологии τ_1. Другими словами, топология τ_1 сильнее топологии τ_2, если тождественное отображение $x \mapsto x$ непрерывно как функция, действующая из топологического пространства (X, τ_1) в топологическое пространство (X, τ_2). Отношение «τ_1 сильнее τ_2» записывают $\tau_1 \succ \tau_2$.

Если множество замкнуто, то оно замкнуто и в любой более сильной топологии. Соответственно, замыкание любого множества в более слабой топологии содержит замыкание этого множества в более сильной топологии. Предельная точка множества остаётся предельной при замене топологии на более слабую. Если последовательность x_n сходится к x в топологии τ_1 и $\tau_1 \succ \tau_2$, то x_n сходится к x и в топологии τ_2.

Пусть A – подмножество топологического пространства X. Множество $B \subset A$ называется *открытым в* A, если B можно представить как пересечение множества A с некоторым открытым подмножеством пространства X. Открытые в A подмножества задают на A топологию, называемую *индуцированной топологией*. Подмножество топологического пространства X, наделённое индуцированной топологией, называется *подпространством топологического пространства* X. Например, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, наделённое дискретной топологией, – подпространство пространства $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$, в свою очередь, – подпространство пространства $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел. Индуцированную топологию называют ещё *ограничением топологии пространства X на подмножество A.*

Упражнения

1. В хаусдорфовом пространстве каждая точка – это замкнутое множество.
2. Пусть топологическое пространство X подчиняется следующей аксиоме отделимости: каждая точка образует замкнутое множество в X. Пусть, далее, точка $x \in X$ – предельная для множества A. Тогда каждая окрестность точки x содержит бесконечное число точек множества A.
3. Пусть топологическое пространство X содержит несчётное число непересекающихся открытых множеств. Тогда X несепарабельно.
4. Пусть A, B, C – подмножества топологического пространства X, A плотно в B, а B плотно в C. Тогда A плотно в C.
5. Если система окрестностей точки x имеет счётную базу, то существует убывающая по включению последовательность окрестностей, образующая базу окрестностей этой точки.
6. Пусть A – подмножество топологического пространства X, x – предельная точка множества A и система окрестностей точки x имеет счётную базу. Тогда существует последовательность элементов множества A, сходящаяся к x.
7. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывная функция, A – плотное подмножество в X. Тогда $f(A)$ плотно в $f(X)$.
8. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывная функция, A – плотное подмножество в X и $f(X)$ плотно в Y. Тогда $f(A)$ плотно в Y.
9. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывная функция, A – плотное подмножество в X, B – замкнутое подмножество в Y. Тогда если $f(A) \subset B$, то и $f(X) \subset B$.
10. Привести пример непрерывной функции $f : [0,1] \to [0,1]$ и плотного подмножества $A \subset [0,1]$, для которых $f^{-1}(A)$ не плотно в $[0,1]$.
11. Могут ли два плотных подмножества топологического пространства не пересекаться?
12. Две непрерывные функции, действующие из топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y и совпадающие на плотном подмножестве $X_1 \subset X$, совпадают всюду на X.
13. *Внутренностью* множества A называется множество всех внутренних точек множества A. Показать, что внутренность – открытое множество.
14. Пусть множество $A \subset X$ пересекается со всеми плотными подмножествами пространства X. Тогда A имеет непустую внутренность.
15. Композиция двух непрерывных функций непрерывна.

16. Рассмотрим следующую топологию τ на $\mathbb{R}$: для каждого числа x в качестве базы окрестностей возьмём семейство всех множеств вида $\{x\} \bigcup ((x-a, x+a) \bigcap \mathbb{Q})$, $a > 0$. Докажите, что построенное пространство $(\mathbb{R}, \tau)$ сепарабельно, но содержит несепарабельное подпространство.

1.2.2. Произведение двух топологических пространств

Пусть X_1, X_2 – топологические пространства. Определим на декартовом произведении $X_1 \times X_2$ этих пространств топологию, задав для каждой точки $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ базу окрестностей $\mathbb{U}_x$, состоящую из всех множеств вида $U_1 \times U_2$, где U_1 – окрестность точки x_1 в X_1, а U_2 – окрестность точки x_2 в X_2. Описанная топология называется *топологией произведения*, а множество $X_1 \times X_2$, наделённое топологией произведения, называется *произведением топологических пространств* X_1 и X_2.

Рассмотрим отображения $P_j : X_1 \times X_2 \to X_j$, $j = 1,2$, ставящие элементу $x = (x_1, x_2)$ в соответствие его j-ю координату: $P_1(x) = x_1$, $P_2(x) = x_2$. Эти отображения называются *координатными проекторами*.

Упражнения

1. Координатные проекторы непрерывны.
2. Среди всех топологий на $X_1 \times X_2$, в которых непрерывны координатные проекторы, топология произведения – самая слабая.
3. Обычная топология на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ совпадает с соответствующей топологией произведения.
4. Пусть $x, x_n \in X_1 \times X_2$. Докажите, что сходимость последовательности x_n к элементу x в топологии произведения эквивалентна одновременной сходимости последовательности $P_1(x_n)$ к $P_1(x)$ и $P_2(x_n)$ к $P_2(x)$. Этим будет обосновано ещё одно название топологии произведения: «*топология покоординатной сходимости*».
5. Пусть X, Y_1, Y_2 – топологические пространства; $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ и функция $f : X \to Y_1 \times Y_2$ действует по правилу $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Тогда функция будет непрерывной в том и только том случае, если непрерывны обе функции f_1 и f_2.
6. Функции $(x, y) \mapsto x + y$ и $(x, y) \mapsto x \cdot y$ непрерывны как функции, действующие из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$.
7. Из предыдущих двух упражнений и теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций выведите теоремы о непрерывности суммы и произведения функций, действующих из топологического пространства в $\mathbb{R}$.

8. Выведите теоремы о пределе суммы и произведения сходящихся числовых последовательностей из упражнений 3, 4 и 6.
9. Обозначим через $[0,1]$ отрезок в обычной топологии, а через $[0,1]_d$ – тот же отрезок в дискретной топологии. Опишите топологию произведения на $X_1 \times X_2$, если

– $X_1 = X_2 = [0,1]$;

– $X_1 = X_2 = [0,1]_d$;

– $X_1 = [0,1]$, $X_2 = [0,1]_d$.

10. Произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.
11. Координатные проекторы – это *открытые отображения*: образ открытого множества под действием координатного проектора – снова открытое множество.

1.2.3. Компакты

Хаусдорфово топологическое пространство X называется *компактом*, если оно непусто и из любого открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие. Подробнее: X – компакт, если для любого семейства $\mathbb{U}$ открытых множеств, дающих в объединении всё X, существует конечное число $U_1, \dots, U_n$ элементов семейства $\mathbb{U}$, по-прежнему дающих в объединении всё X. Подмножество A топологического пространства X называется *компактным множеством*, если A – компакт в индуцированной топологии. Другими словами, A – компактное множество, если для любого семейства $\mathbb{U}$ открытых множеств в X, объединение которых содержит A, существует конечное число $U_1, \dots, U_n$ элементов семейства $\mathbb{U}$, объединение которых по-прежнему содержит A. Любое компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто; замкнутое подмножество компакта само компактно.

Пусть X, Y – хаусдорфовы пространства, функция $f: X \to Y$ непрерывна и X – компакт. Тогда $f(X)$ – компактное подмножество в Y (эта теорема легко следует из определения). В частности, при непрерывном отображении компакта K в хаусдорфово пространство Y образ любого замкнутого подмножества X замкнут. Следовательно, если отображение $f: K \to Y$ не только непрерывно, но и биективно, то и $f^{-1}: Y \to K$ непрерывно, то есть f – гомеоморфизм. Последнее утверждение формулируют ещё таким образом: пусть на X заданы две отделимые топологии $\tau_1 \succ \tau_2$ и в топологии τ_1 X – компакт. Тогда $\tau_1 = \tau_2$.

Семейство множеств $\mathbb{W}$ называется *центрированным*, если пересечение любого конечного набора множеств из $\mathbb{W}$ не пусто.

Теорема 1. Хаусдорфово топологическое пространство K является компактом в том и только том случае, если любое центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства K имеет общую точку.

Доказательство. Пусть K – компакт, $\mathbb{W}$ – центрированное семейство замкнутых подмножеств K. Предположим, что у элементов этого семейства нет общей точки, то есть $\bigcap\limits_{W \in \mathbb{W}} W$ пусто. Перейдя к дополнениям, получаем, что $\bigcup\limits_{W \in \mathbb{W}} (K \setminus W) = K$. Таким образом, открытые множества вида $K \setminus W$ образуют покрытие компакта K. Выберем конечное подпокрытие: $K \setminus W_1, \ldots, K \setminus W_n$, $W_i \in \mathbb{W}$, $\bigcup\limits_1^n (K \setminus W_i) = K$. Но последнее условие означает, что $\bigcap\limits_1^n W_i$ пусто. Противоречие с центрированностью семейства $\mathbb{W}$.

Обратно, предположим, что любое центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства K имеет общую точку, и докажем, что K – компакт. Пусть семейство $\mathbb{U}$ открытых множеств образует покрытие пространства K. Тогда дополнения к элементам семейства $\mathbb{U}$ – это система $\mathbb{W}$ замкнутых множеств с пустым пересечением. По условию $\mathbb{W}$ не может быть центрированным семейством множеств, следовательно, существует конечный набор $W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{W}$, имеющий пустое пересечение. Тогда $\bigcup\limits_1^n (K \setminus W_i) = K$, $K \setminus W_i \in \mathbb{U}$, то есть из покрытия $\mathbb{U}$ можно выбрать конечное подпокрытие. Теорема доказана. □

Теорема 2. Любое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

Доказательство. Пусть A – бесконечное подмножество компакта K, Рассмотрим семейство $\mathbb{W}$ всех таких замкнутых подмножеств W компакта K, что разность $A \setminus W$ содержит конечное число точек. Семейство $\mathbb{W}$ центрировано, следовательно существует точка x, принадлежащая всем элементам семейства $\mathbb{W}$. Эта точка x будет предельной для A. Действительно, если U – произвольная открытая окрестность точки x, то дополнение $K \setminus U$ не содержит x и, следовательно, не лежит в $\mathbb{W}$. То есть $A \setminus (K \setminus U) = A \bigcap U$ состоит из бесконечного числа точек. □

Приведём без доказательства лемму Урысона о функциональной отделимости множеств и теорему Титце о продолжении. Доказательство этих общеизвестных фактов (даже в несколько более общей формулировке) можно найти, скажем, в учебнике Куратовского [Kur], т. 1, с. 132-135.

Лемма Урысона. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые подмножества компакта K. Тогда существует непрерывная функция $f: K \to [0,1]$, равная 0 на A и равная 1 на B. □

Теорема Титце. Любая непрерывная вещественная функция, заданная на замкнутом подмножестве компакта, продолжается до непрерывной функции, заданной на всём компакте.

Упражнения

1. Пусть K – компакт, $x \in K$, A – замкнутое подмножество компакта K, $x \notin A$. Тогда в K существуют такие непересекающиеся открытые подмножества U и V, что $x \in U$ и $A \subset V$,

2. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые подмножества компакта K. Тогда в K существуют такие непересекающиеся открытые подмножества U и V, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

Свойства компактов, сформулированные в предыдущих двух упражнениях, можно рассматривать как усиления аксиомы отделимости Хаусдорфа (п. 1.2.1, аксиома 4). Топологические пространства, где любые непересекающиеся замкнутые подмножества можно разделить непересекающимися окрестностями (как в упражнении 2), называются *нормальными* пространствами. Лемма Урысона верна не только для компактов, но и для любых нормальных пространств. Читатель сможет самостоятельно восстановить доказательство этого факта, разобрав следующие упражнения.

3. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые подмножества K, $f: K \to [0,1]$ – непрерывная функция, равная 0 на A и равная 1 на B. Через D обозначим множество $\left\{\frac{n}{2^m} : m = 1,2,\ldots;\ 1 \le n < 2^m\right\}$ всех двоично-рациональных точек отрезка $(0,1)$; и, наконец, для любого $r \in D$ определим $F_r = f^{-1}[r,1]$. Тогда множества F_r обладают следующими свойствами:

   (1) все F_r замкнуты;

   (2) для любых $r_1 < r_2$ существует открытое множество $G = G_{r_1,r_2}$, подчиняющееся условию $F_{r_1} \supset G \supset F_{r_2}$ (в частности, $F_{r_1} \supset F_{r_2}$);

   (3) $B \subset F_r \subset K \setminus A$ для любого $r \in D$.

4. Пусть некоторое семейство множеств F_r обладает вышеперечисленными свойствами (1) – (3). Зададим функцию $f: K \to [0,1]$ равенством $f(x) = \sup\{r \in D : x \in F_r\}$ (в этом равенстве если множество пусто, то его супремум полагают равным нулю). Тогда функция f непрерывна, $F_r = f^{-1}[r,1]$ при $r \in D$; $f(x) = 0$ на A и $f(x) = 1$ на B.

5. Пусть K – нормальное топологическое пространство, F – замкнутое, а G – открытое множество в K, $F \subset G$. Тогда существуют такие множества $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ в K, что $\widetilde{F}$ – замкнутое, $\widetilde{G}$ – открытое множество и $F \subset \widetilde{G} \subset \widetilde{F} \subset G$.
6. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые подмножества нормального топологического пространства K. Тогда существует семейство множеств F_r, $r \in D$, обладающее свойствами (1) – (3). (Множества F_r нужно строить в такой последовательности: вначале $F_{1/2}$, затем $F_{1/4}$ и $F_{3/4}$ и т. д., следя за выполнением на каждом шаге свойств (1) – (3).)

1.2.4. Полунепрерывные функции

Функция $f : X \to \mathbb{R}$, заданная на топологическом пространстве X, называется *полунепрерывной снизу*, если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(a,+\infty)$ открыто. Другими словами, функция f полунепрерывна снизу, если для любой точки $x \in X$ и любого $a \in \mathbb{R}$, из условия $f(x) > a$ следует существование целой окрестности элемента x, на которой все значения функции f также больше чем a. Функция f называется *полунепрерывной сверху*, если функция $-f$ полунепрерывна снизу. Функция f будет полунепрерывной сверху в том и только том случае, если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(-\infty, a)$ открыто. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда она одновременно полунепрерывна снизу и сверху. Множество полунепрерывных снизу вещественных функций на X обозначим $LSC(X)$, полунепрерывных сверху – через $USC(X)$, а множество непрерывных вещественных функций на X обозначим $C(X)$ (от *lower semicontinuous, upper semicontinuous* и *continuous* соответственно).

Пример. Пусть $A \subset X$ – произвольное подмножество,

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in A \\ 0 \text{ при } x \in X \setminus A \end{cases}$$

(такая функция называется характеристической функцией множества A). Функция $\mathbf{1}_A$ будет полунепрерывной снизу в том и только том случае, если множество A открыто, и полунепрерывной сверху в том и только том случае, если A замкнуто.

Теорема 1. Класс $LSC(X)$ обладает следующими свойствами:

1. Если $f, g \in LSC(X)$, то $f + g \in LSC(X)$.
2. Если $f \in LSC(X)$, $g \in C(X)$, то $f - g \in LSC(X)$.
3. Если $f \in LSC(X)$, $\lambda \in [0,+\infty)$, то $\lambda f \in LSC(X)$.

4. Супремум любого числа полунепрерывных снизу функций снова лежит в $LSC(X)$. Подробнее: пусть $S \subset LSC(X)$ и функция $f : X \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = \sup\{g(x) : g \in S\}$. Тогда $f \in LSC(X)$.
5. Если $f, g \in LSC(X)$, то $\min(f, g) \in LSC(X)$.

Доказательство.

1. Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $(f+g)^{-1}(a,+\infty)$ представимо в виде объединения открытых множеств:
$$(f+g)^{-1}(a,+\infty) = \bigcup_{t \in \boldsymbol{R}} \left(f^{-1}(t,+\infty) \cap g^{-1}(a-t,+\infty) \right).$$

Следовательно, это множество само открыто.

2. Следует из предыдущего пункта, так как $-g \in C(X) \subset LSC(X)$.
3. $(\lambda f)^{-1}(a,+\infty) = f^{-1}(a/\lambda,+\infty)$.
4. Супремум числового набора будет больше, чем a, в том и только том случае, если хотя бы одно из чисел этого набора больше, чем a. Поэтому прообраз $f^{-1}(a,+\infty)$ представим в виде объединения открытых множеств $\bigcup_{g \in S} g^{-1}(a,+\infty)$ и, следовательно, является открытым множеством.
5. $\min(f, g)^{-1}(a,+\infty) = f^{-1}(a,+\infty) \cap g^{-1}(a,+\infty)$, а пересечение двух открытых множеств открыто.□

Теорема 2. Любая полунепрерывная снизу функция на компакте ограничена снизу.

Доказательство. Пусть $f \in LSC(X)$ и X – компакт. Рассмотрим множества $A_n = f^{-1}(-n,+\infty)$, $n = 1,2,...$ Эти множества возрастают с ростом n и образуют открытое покрытие компакта X. Следовательно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, при котором $A_{n_0} = X$, и, соответственно, $f(t) > -n_0$ во всех точках. □

Теорема 3. Пусть X – компакт и $f \in LSC(X)$. Тогда f совпадает с супремумом семейства всех непрерывных функций, мажорируемых этой функцией f. Другими словами, для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in C(X)$, что $g \le f$ во всех точках, и $g(x) \ge f(x) - \varepsilon$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать функцию f неотрицательной: ввиду предыдущей теоремы этого можно добиться, прибавив к f достаточно большую константу. Зафиксируем точку $x \in X$ и обозначим $f(x) - \varepsilon$ через a. Если $a \le 0$, то $g \equiv 0$ будет удовлетворять всем условиям теоремы. Поэтому можем считать $a > 0$. Применив лемму Урысона к паре непересекающихся замкнутых множеств $A = f^{-1}(-\infty, a]$ и $B = \{x\}$, получим существование непрерывной функции $h : X \to [0,1]$, равной 0 на A и равной 1 на B. Проверим, что $g = ah$ будет требуемой функцией. Действительно, в точках $t \in X$, где $g(t) = 0$, неравенство $0 \le g(t) \le f(t)$ очевидно. Те же точки, где $g(t) \ne 0$, лежат в $X \setminus A$, то есть в этих точках $f(t) > a \ge g(t)$. □

Упражнения

1. Пусть X – компакт, $f \in LSC(X)$. Тогда существует точка $x \in X$, в которой $f(x) = \min_{t \in X} f(t)$.

Пусть X – топологическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}$, а $\mathbb{U}_x$ – система окрестностей точки $x \in X$. *Нижним пределом* функции f в точке x называется число $\underline{\lim}_{t \to x} f(t) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определяемое формулой $\underline{\lim}_{t \to x} f(t) =$ $= \sup_{V \in \mathbb{U}_x} \inf_{t \in V \setminus \{x\}} f(t)$. Аналогичным образом определяется *верхний предел*: $\overline{\lim}_{t \to x} f(t) = \inf_{V \in \mathbb{U}_x} \sup_{t \in V \setminus \{x\}} f(t)$.

2. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ на топологическом пространстве X будет полунепрерывной снизу в том и только том случае, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство $f(x) \le \underline{\lim}_{t \to x} f(t)$.
3. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – произвольная ограниченная функция на топологическом пространстве X. Функция $\underline{f}(x) = \min\left\{ f(x), \underline{\lim}_{t \to x} f(t) \right\}$ называется *нижней огибающей* функции f, а $\overline{f}(x) = \max\left\{ f(x), \overline{\lim}_{t \to x} f(t) \right\}$ называется *верхней огибающей* функции f. Проверьте полунепрерывность снизу нижней огибающей и полунепрерывность сверху верхней огибающей.
4. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, $g \in LSC(X)$ и $g \le f$. Тогда $g \le \underline{f}$.

1.3. Метрические пространства

1.3.1. Метрика. Последовательности и топология

Функция двух переменных $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ называется *метрикой* на множестве X, если она обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, x) = 0$
2. Если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$ (невырожденность).
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность).
4. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Невырожденность, симметричность и неравенство треугольника – это аксиомы метрики. Для величины $\rho(x, y)$ используют ещё термин расстояние (или дистанция) между элементами x и y. Множество с введённой на нём метрикой называется метрическим пространством.

Подмножество метрического пространства X, наделённое метрикой из X, называется *подпространством метрического пространства* X.

Пусть X – метрическое пространство, $x_0 \in X$, $r > 0$. Символом $B_X(x_0, r)$ (или $B(x_0, r)$, если понятно, о каком пространстве идёт речь) обозначается открытый шар радиуса r с центром в x_0: $B_X(x_0, r) = \{ x \in X : \rho(x, x_0) < r \}$. *Топология метрического пространства* задаётся с помощью шаров: шары с центром в x_0 образуют базу окрестностей точки x_0. Другими словами, подмножество A метрического пространства X называется открытым, если вместе с любой своей точкой множество A содержит и некоторый шар с центром в этой точке: $\forall x \in A\, \exists r > 0 : B_X(x, r) \subset A$. Последовательность x_n элементов метрического пространства сходится к элементу x, если $\rho(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Поскольку метрическое пространство является одновременно и топологическим, в метрических пространствах определены все основные топологические понятия. Особенностью же метрических пространств служит возможность эквивалентного определения топологических понятий через сходимость последовательностей (*секвенциальные определения*). Некоторые из таких определений приведены ниже.

Пусть A – подмножество метрического пространства X. Точка $x \in X$ называется предельной для A, если существует последовательность элементов $x_n \in A \setminus \{x\}$, сходящаяся к x. Подмножество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Подмножество $A \subset X$ называется открытым, если его дополнение $X \setminus A$ замкнуто.

Таким образом, в метрических пространствах сходимость последовательностей однозначно определяет топологию. По другому этот же факт можно пояснить, дав секвенциальные определения непрерывности и гомеоморфизма. Пусть X, Y – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется непрерывной, если она переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся: $\forall x_n, x \in X\, (x_n \to x) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x))$. Понятия же гомеоморфизма и гомеоморфных пространств определяются через непрерывность (см. п. 1.2.1). И ещё одно определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрией*, если оно биективно и сохраняет метрику: $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Метрические пространства X и Y называются *изометричными*, если между ними существует изометрия.

1.3.2. Упражнения

1. В метрическом пространстве система окрестностей любой точки имеет счётную базу.
2. Показать эквивалентность для метрических пространств вышеприведенных секвенциальных определений определениям топологическим.
3. Для подмножеств метрического пространства расстоянием принято называть нижнюю грань попарных расстояний между элементами: $\rho(A,B)=\inf\limits_{a\in A,b\in B}\rho(a,b)$. Покажите, что такое «расстояние» не подчиняется ни аксиоме невырожденности, ни неравенству треугольника.
4. Пусть X,Y – метрические пространства. На декартовом произведении $X\times Y$ определим метрику равенством $\rho\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)=\rho\left(x_1,x_2\right)+$ $+\rho\left(y_1,y_2\right)$. Проверьте аксиомы метрики для этого выражения. Покажите, что эта метрика задаёт топологию на $X\times Y$, совпадающую с обычной топологией произведения. В частности, сходимость в этой метрике совпадает с покоординатной сходимостью: $\left(x_n,y_n\right)\to\left(x,y\right)$ в $X\times Y$ в том и только том случае, если $x_n\to x$ в X и $y_n\to y$ в Y.
5. Пусть X,Y – метрические пространства, $f:X\to Y$ – непрерывная функция. Тогда график $\Gamma(f)=\left\{(x,f(x)):x\in X\right\}$ функции f замкнут в $X\times Y$. Результат этого упражнения переносится на отделимые топологические пространства. Отделимость какого из пространств X,Y здесь важна, а какого – нет?
6. Приведите пример разрывной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с замкнутым графиком.
7. Покажите, что график непрерывной функции $f:X\to Y$ гомеоморфен пространству X.
8. Пусть Y – подпространство метрического пространства X. Тогда на Y есть топология, индуцированная из пространства X, а есть топология, задаваемая метрикой пространства Y. Докажите совпадение этих топологий.
9. Замкнутым шаром радиуса r с центром в x_0 метрического пространства X называется множество $\overline{B}_X(x_0,r)=\left\{x\in X:\rho(x,x_0)\le r\right\}$. На примере метрического пространства, состоящего из двух точек: $X=\{0,1\}$, $\rho(0,1)=1$ – покажите, что замыкание открытого шара может не быть соответствующим замкнутым шаром. На примере метрического пространства, состоящего из трёх точек $\{0,1,2\}$ с естественной метрикой, покажите, что шар большего радиуса может строго содержаться в шаре меньшего радиуса (конечно, центры шаров при этом совпадать не должны). Каким может быть соотношение радиусов у строго вложенных замкнутых шаров?

10. На пространстве $\mathbb{R}^{\omega}$ всех числовых последовательностей введём метрику $\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$, где x_n и y_n – это координаты элементов x и y соответственно. Проверьте аксиомы метрики. Докажите, что сходимость в этой метрике совпадает с покоординатной сходимостью.
11. Другая метрика на $\mathbb{R}^{\omega}$, задающая ту же топологию, – это метрика Фреше: $\rho_1(x,y)=\inf_{n\in\mathbf{N}}\left\{\frac{1}{n}+\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|\right\}$.
12. Подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно. (Для общих топологических пространств это не так: см. упражнение 16 п. 1.2.1.)
13. Какие из известных Вам метрических пространств сепарабельны, а какие – нет?

1.3.3. Расстояние от точки до множества

Расстоянием от точки x метрического пространства X до подмножества $A\subset X$ называется точная нижняя грань расстояний от x до элементов множества A: $\rho(x,A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a)$. Отметим, что точка x принадлежит замыканию множества A в том и только том случае, если $\rho(x,A)=0$.

Утверждение. Функция $\rho(x,A)$ непрерывна по x.

Доказательство. Пусть $x,y\in X$. По неравенству треугольника

$$\rho(x,A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a)\le\inf_{a\in A}\rho(y,a)+\rho(x,y)=\rho(y,A)+\rho(x,y).$$

Следовательно, $\rho(x,A)-\rho(y,A)\le\rho(x,y)$. Ввиду равноправия точек x и y $\rho(y,A)-\rho(x,A)\le\rho(x,y)$, то есть для любых $x,y\in X$

$$|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\le\rho(x,y).$$

Таким образом, мы доказали не только непрерывность, но и выполнение условия Липшица с единичной константой. □

Упражнения

1. *Дистанцией Хаусдорфа* между двумя замкнутыми подмножествами A и B метрического пространства X называется величина

$$\rho_H(A,B)=\max\left\{\sup_{b\in B}\rho(b,A),\sup_{a\in A}\rho(a,B)\right\}.$$

Покажите, что дистанция Хаусдорфа действительно задаёт метрику на семействе всех ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства X (для сравнения – см. упражнение 3 п. 1.3.1).

2. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства X. Рассмотрим множества $A_1 = \{x \in X : \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$ и $B_1 = \{x \in X : \rho(x, A) > \rho(x, B)\}$. Проверьте, что A_1 и B_1 – это непересекающиеся открытые окрестности множеств A и B соответственно. Этим будет доказано, что любое метрическое пространство – это нормальное топологическое пространство (см. упражнения п. 1.2.3).
3. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства X. Для любого $x \in X$ положим $f(x) = \dfrac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$. Тогда f – это непрерывная функция, равная 0 на A, 1 на B и принимающая всюду значения из отрезка $[0,1]$. Этим будет дано простое доказательство леммы Урысона в метрических пространствах (см. п. 1.2.3). Более того, в отличие от общей леммы Урысона, построенная выше функция f равна 0 **только** в точках множества A и 1 **только** в точках множества B.
4. Пусть A – замкнутое подмножество метрического пространства X, $f : A \to [0,1]$ – непрерывная функция. Доопределим функцию f на $X \setminus A$ с помощью следующей формулы Хаусдорфа: $f(x) = \inf\limits_{t \in A}\left\{ f(t) + \dfrac{\rho(t, x)}{\rho(x, A)} - 1 \right\}$. Проверьте, что при таком доопределении функция f будет непрерывна на всём X. Выведите отсюда теорему Титце (п. 1.2.3) для случая метрических пространств.

1.3.4. Полнота

Последовательность x_n элементов метрического пространства X называется *фундаментальной*, если $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$. Более подробно: последовательность x_n фундаментальна, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, начиная с которого все попарные расстояния между элементами x_n становятся меньше ε. Фундаментальные последовательности называют ещё *последовательностями Коши.* Если последовательность $x_n \in X$ имеет предел $x \in X$, то она фундаментальна: $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в X имеет предел. Как известно из курса анализа, пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и, более того, любое конечномерное евклидово пространство полны.

Напомним некоторые факты.

Теорема 1. Замкнутое подпространство полного метрического пространства само полно; полное подпространство любого метрического пространства замкнуто.

Доказательство. Пусть A – замкнутое подмножество метрического пространства X, $x_n \in A$ – фундаментальная последовательность. Поскольку X полно, последовательность x_n имеет некоторый предел $x \in X$. Так как A замкнуто, этот предел лежит в A. Полнота подпространства A доказана.

Обратно, пусть A полно, а последовательность $x_n \in A$ имеет некоторый предел $x \in X$. Тогда эта последовательность фундаментальна. Ввиду полноты у x_n есть предел в A, а ввиду единственности предела этот предел совпадает с x. То есть $x \in A$. Замкнутость множества A, а с ней и теорема доказаны. □

Пусть A – подмножество метрического пространства X. *Диаметром* множества A называется величина $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x, y \in A} \rho(x, y)$.

Теорема 2 (принцип вложенных множеств). Пусть $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ – убывающая цепочка замкнутых подмножеств полного метрического пространства X и $\operatorname{diam} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ не пусто и состоит ровно из одной точки.

Доказательство. Выделим в каждом из A_n по точке a_n. Пусть N – некоторое натуральное число, $k, j > N$. Тогда ввиду убывания последовательности множеств A_n точки a_k и a_j принадлежат множеству A_N. Следовательно, $\rho(a_j, a_k) \le \operatorname{diam} A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, то есть a_n образуют фундаментальную последовательность. Обозначим предел этой последовательности через a. Для любого N и любого $k > N$ точка a_k лежит в A_N. Следовательно, и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_k$ также лежит в A_N. Мы показали, что $a \in A_N$ для любого N, то есть пересечение множеств A_n не пусто. Заметим, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_N$ при любом N, следовательно,

$$\operatorname{diam} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \le \operatorname{diam} A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Множество нулевого диаметра не может содержать более одной точки. Теорема доказана. □

1.3.5. Упражнения

1. Пусть последовательность Коши x_n в метрическом пространстве X содержит сходящуюся подпоследовательность. Тогда и сама последовательность x_n сходится.
2. Метрическое пространство X будет полным в том и только том случае, если любая последовательность x_n с $\sum_1^\infty \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$ сходится.
3. Рассмотрим куб со стороной единица и шар единичного радиуса в трёхмерном евклидовом пространстве. Какая из этих фигур имеет больший диаметр? Изменится ли ответ, если аналогичные фигуры рассмотреть в четырёхмерном пространстве? В пятимерном? (Единичный куб в $\mathbb{R}^n$ – это множество тех векторов, все координаты которых лежат между 0 и 1, единичный шар – это множество тех векторов, сумма квадратов координат которых не превосходит единицы.)
4. Показать, что в неполном пространстве принцип вложенных множеств выполняться не может.
5. Привести пример убывающей цепочки $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ замкнутых подмножеств вещественной оси с пустым пересечением.
6. Построить гомеоморфизм между открытым отрезком (0,1) и вещественной осью $\mathbb{R}$. Этим будет доказано, что полнота – это метрическое, а не топологическое свойство: неполное и полное пространства могут быть гомеоморфны.
7. Проверить, что если X, Y – полные метрические пространства, то декартово произведение $X \times Y$ в метрике из упражнения 4 п. 1.3.2 также полно.
8. Проверить полноту пространства $\mathbb{R}^\omega$ из упражнения 10 п. 1.3.2.
9. В евклидовом пространстве диаметр шара равен удвоенному радиусу. Распространяется ли это утверждение на шары в произвольном метрическом пространстве?
10. Доказать, что на евклидовой плоскости любое множество единичного диаметра может быть заключено в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга).
11. Доказать, что на евклидовой плоскости любое множество единичного диаметра может быть разбито на 3 части диаметра, меньшего единицы (теорема Борсука).

Упражнения 10 и 11 относятся к направлению математики, называемому *комбинаторной геометрией*. Комбинаторная геометрия изучает задачи взаимного расположения фигур, оптимальные покрытия, разбиения на меньшие части и т. д. Несмотря на кажущуюся простоту формулировок, такие задачи часто оказываются весьма нетривиальными; многие естественные вопросы до сих пор остаются нерешёнными. Примером может служить *проблема Борсука*: любое ли множество единичного диаметра в четырёхмерном евклидовом пространстве может быть разбито на 5 частей диаметра, меньшего единицы? Подробнее об этой проблеме и других задачах комбинаторной геометрии – см. монографии [B-H], [Gru] и [H-D].

12. Замкнутое подмножество топологического пространства называется *совершенным множеством*, если оно не имеет изолированных точек (другими словами, если каждая точка множества – предельная для самого множества). Доказать, что в полном метрическом пространстве мощность любого совершенного множества не меньше мощности континуума.
13. Показать, что метрическое пространство сепарабельно в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто счётным числом шаров радиуса ε.
14. Пусть A – несчётное подмножество полного сепарабельного метрического пространства X. Точка $x \in X$ называется *точкой конденсации* множества A, если пересечение множества A с любой окрестностью точки x несчётно. Доказать, что множество A_c точек конденсации множества A не пусто, совершенно и разность $A \setminus A_c$ не более чем счётна.

1.3.6. Равномерная непрерывность. Теорема о продолжении

Определение. Пусть X, Y – метрические пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ с $\rho(x_1, x_2) < \delta$ расстояние между их образами не превосходит ε: $\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le \varepsilon$.

Отметим, что любое равномерно непрерывное отображение непрерывно, но из непрерывности равномерная непрерывность, вообще говоря, не следует. Пример – функция $1/x$ на открытом отрезке $(0,1)$.

Лемма. Пусть $f: X \to Y$ – равномерно непрерывное отображение метрического пространства X в метрические пространство Y. Тогда для любой фундаментальной последовательности x_n элементов пространства X её образ $f(x_n)$ – фундаментальная последовательность в Y.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta(\varepsilon)$ из определения равномерной непрерывности. По определению последовательности Коши, существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все попарные расстояния между элементами x_n становятся меньше $\delta(\varepsilon)$, то есть для любых $n, m > N$ имеем $\rho(x_n, x_m) < \delta(\varepsilon)$. Но тогда для любых $n, m > N$ выполнено и неравенство $\rho\big(f(x_n), f(x_m)\big) \le \varepsilon$. □

Теорема. Пусть X_1 – подпространство метрического пространства X, $\overline{X}_1$ – замыкание множества X_1 в X, а Y – полное метрические пространство. Тогда любое равномерно непрерывное отображение $f: X_1 \to Y$ продолжается единственным образом до равномерно непрерывного отображения $\bar{f}: \overline{X}_1 \to Y$.

Доказательство. Для любой точки $x \in \overline{X}_1$ существует последовательность элементов $x_n \in X_1$, сходящаяся к x. Ввиду полноты пространства Y, по предыдущей лемме последовательность $f(x_n)$ имеет предел. Более того, этот предел не зависит от выбора последовательности x_n, а зависит только от элемента x. Действительно, если $x_n, y_n \in X_1$ – две разные последовательности, сходящиеся к x, то «перемешанная» последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ также сходится к x. Следовательно, последовательность образов $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$ стремится к некоторому пределу, и, следовательно, подпоследовательности $f(x_n)$ и $f(y_n)$ должны иметь один и тот же предел. Обозначим через $\bar{f}(x)$ этот общий предел для всех последовательностей вида $f(x_n)$, где $x_n \in X_1$ и $x_n \to x$.

Если $x \in X_1$, то в качестве x_n можно взять последовательность $(x, x, x, \ldots)$. Поэтому в этом случае $\bar{f}(x) = f(x)$. Этим доказано, что отображение $\bar{f}$ – продолжение отображения f. Проверим равномерную непрерывность отображения $\bar{f}$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения равномерной непрерывности отображения f будет подходить и для отображения $\bar{f}$. Пусть $x, y \in \overline{X}_1$ – любые элементы с $\rho(x, y) < \delta$, $x_n, y_n \in X_1$, $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Поскольку $\rho(x_n, y_n) < \rho(x_n, y) + \rho(x, y) + \rho(x, y_n)$, то $\rho(x_n, y_n) < \delta$ при достаточно больших n. Следовательно, при больших n имеем оценку $\rho\big(f(x_n), f(y_n)\big) \le \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое неравенство $\rho\big(\bar{f}(x), \bar{f}(y)\big) \le \varepsilon$. □

Упражнения

Количественной характеристикой равномерной непрерывности отображения служит величина

$$\omega(f, \varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : (\rho(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow (\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le \varepsilon)\}$$

(условимся здесь считать, что супремум пустого множества равен 0).

1. Функция f будет равномерно непрерывной в том и только том случае, если $\omega(f, \varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon > 0$.
2. Для функции f на отрезке или на прямой модуль непрерывности *полуаддитивен*: $\omega(f, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ge \omega(f, \varepsilon_1) + \omega(f, \varepsilon_2)$ при всех $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

3. Приведите пример метрического пространства X и вещественнозначной функции f на X, для которой модуль непрерывности не будет полуаддитивным.
4. Пусть отображение $f: X \to Y$ подчиняется условию Липшица ($\exists\, C > 0$ $\forall x_1, x_2 \in X$ $\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le C\rho(x_1, x_2)$). Тогда f равномерно непрерывно. Оцените снизу модуль непрерывности отображения.
5. Вычислите модуль непрерывности изометрии.

1.3.7. Псевдометрика и ассоциированное метрическое пространство. Пополнение метрического пространства

Функция двух переменных $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^+$ называется *псевдометрикой* на множестве X, если она подчиняется аксиомам 1, 3 и 4 метрики (аксиоме симметричности и неравенству треугольника), но, возможно, не подчиняется аксиоме 2 (аксиоме невырожденности). Множество с псевдометрикой называется *псевдометрическим пространством*. Топология на псевдометрическом пространстве задаётся так же, как и на метрическом пространстве, – с помощью шаров. Основное отличие псевдометрических пространств от метрических – это неотделимость топологии, задаваемой псевдометрикой. Покажем, что «склеив» те точки псевдометрического пространства, которые нельзя отделить друг от друга, можно естественным образом получить метрическое пространство.

Пусть (X, ρ) – псевдометрическое пространство. Элементы $x, y \in X$ назовем *ρ-эквивалентными* ($x \approx y$), если $\rho(x, y) = 0$.

Теорема. Отношение $\approx$ – это отношение эквивалентности на X. Если A, B – классы эквивалентности, $a \in A$, $b \in B$ – произвольные представители этих классов, то величина $\rho(A, B) = \rho(a, b)$ не зависит от выбора представителей классов эквивалентности и задаёт метрику на множестве $X/\!\approx$ всех классов эквивалентности, порождённых отношением $\approx$.

Доказательство. Симметричность отношения $\approx$ очевидна. Далее, отметим, что

$$\text{если } x, y, z \in X,\ z \approx y, \text{ то } \rho(x, y) = \rho(x, z). \qquad \text{(i)}$$

Действительно, по неравенству треугольника, $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,z)$ и $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) = \rho(x,y)$. Отсюда сразу же следует транзитивность отношения $\approx$. Независимость величины $\rho(a,b)$ от выбора представителей $a \in A$, $b \in B$ классов эквивалентности A, B также с очевидностью вытекает из соотношения (i). Симметричность и неравенство треугольника для величины ρ на $X/\!\approx$ следуют из соответствующих свойств исходной псевдометрики ρ на X. Наконец, невырожденность метрики ρ на $X/\approx$ – это результат произведённого «склеивания»: если $A, B \in X/\approx$ – классы эквивалентности, для которых $\rho(A, B) = 0,$ то существуют представители $a \in A,$ $b \in B,$ для которых $\rho(a, b) = 0.$ То есть $a \approx b,$ и, следовательно, классы A и B – это один и тот же класс эквивалентности. □

Описанное пространство $X/\approx$ называется *метрическим пространством, ассоциированным с псевдометрическим пространством* X.

Так же, как и для метрического пространства, последовательность x_n элементов псевдометрического пространства X называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$ Псевдометрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в X имеет предел. Отображение $F : X \to X/\approx,$ ставящее элементу в соответствие его класс эквивалентности, сохраняет расстояния и, следовательно, сохраняет фундаментальность и сходимость последовательностей. Поэтому псевдометрическое пространство X будет полным в том и только том случае, если полно метрическое пространство $X/\approx$.

Определение. Пусть X – неполное метрическое пространство. Метрическое пространство $Y \supset X$ называется *пополнением* пространства X, если Y – полное пространство, ограничение метрики пространства Y на X совпадает с исходной метрикой пространства X (то есть X – подпространство пространства Y) и X – плотное подмножество в Y.

Решив нижеприведенную цепочку упражнений, читатель докажет существование пополнения у любого неполного пространства и единственность этого пополнения с точностью до изометрии.

Упражнения

1. Пусть X – метрическое пространство. Определим пространство $\widetilde{X}$ как пространство всех последовательностей Коши в X. Пусть $x, y \in \widetilde{X}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $\rho(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$ Проверьте, что величина $\rho(x, y)$ корректно определена для любых $x, y \in \widetilde{X}$ и задаёт псевдометрику на $\widetilde{X}$.
2. Докажите, что $\widetilde{X}$ – это полное псевдометрическое пространство.
3. Обозначим через $\widetilde{\widetilde{X}}$ метрическое пространство, ассоциированное с псевдометрическим пространством $\widetilde{X}$. Каждый элемент x пространства X отождествим с классом эквивалентности последовательности Коши $(x, x, x, \ldots)$. Проверьте, что при таком отождествлении X – это подпространство пространства $\widetilde{\widetilde{X}}$.
4. $\widetilde{\widetilde{X}}$ – это пополнение пространства X.

5. Единственность пополнения: пусть Y_1, Y_2 – два пополнения метрического пространства X. Тогда существует биективная изометрия $S: Y_1 \to Y_2$, оставляющая элементы пространства X на месте ($S(x) = x$ для любого $x \in X$). То есть, с точки зрения их метрической структуры, пространства Y_1 и Y_2 не различимы.
6. Используя существование пополнения, распространите результат упражнения 14 п. 1.3.5 на неполное сепарабельное пространство.

1.3.8. Множества первой категории и теорема Бэра

Подмножество A топологического пространства X называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном непустом открытом множестве в X. Другими словами, подмножество A нигде не плотно, если его замыкание не содержит ни одного открытого множества. Поскольку в метрическом пространстве у любой точки замкнутые шары ненулевого радиуса образуют базу окрестностей, для случая метрического пространства определение можно переформулировать так: подмножество A нигде не плотно, если в любом шаре $\overline{B}_X(x_0, r)$, $r > 0$ найдётся меньший замкнутый шар ненулевого радиуса, не содержащий ни одной точки множества A.

Типичные примеры нигде не плотных множеств: канторово множество на отрезке (см. п. 1.4.4), спрямляемая кривая на плоскости. Следует обратить внимание, что, говоря о нигде не плотном множестве, необходимо указывать, как подмножество какого пространства его рассматривают. Скажем, отрезок будет нигде не плотным множеством на плоскости, но не на прямой; $A = \{0\}$ нигде не плотно на оси, но во множестве натуральных чисел то же самое A будет открытым.

Теорема Бэра. Полное метрическое пространство не может быть покрыто счётным числом своих нигде не плотных подмножеств.

Доказательство. Пусть X – полное метрическое пространство, $A_1, A_2, \ldots$ – нигде не плотные подмножества в X. Нам требуется доказать, что $\bigcup_1^\infty A_n$ не совпадает с X. Поскольку A_1 нигде не плотно в X, существует замкнутый шар $B_1 = \overline{B}_X(x_1, r_1)$ с $0 < r_1 < 1/2$, не пересекающий A_1. Поскольку A_2, в свою очередь, нигде не плотно (в частности, A_2 не плотно в B_1), существует шар $B_2 = \overline{B}_X(x_2, r_2)$, $0 < r_1 < 1/4$, содержащийся в B_1 и не пересекающийся с A_2. Продолжая это рассуждение, получим убывающую цепочку $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами, причем каждый из B_n не пересекается с соответствующим A_n. Согласно принципу вложенных множеств (п. 1.3.4), у множеств B_n есть общая точка. Обозначим эту точку через x. Поскольку $x \in B_n$ при любом n, а B_n не пересекается с A_n, получаем, что x не принадлежит ни одному из A_n, Мы показали, что существует точка $x \in X \setminus \bigcup_1^\infty A_n$, то есть множества A_n не покрывают всего пространства X. □

В связи с доказанной теоремой Бэром была введена следующая терминология. Подмножество A топологического пространства X называется *множеством первой категории* в X, если A можно представить как счётное объединение нигде не плотных в X подмножеств. Подмножество в X, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории* в X. В этих терминах теорема Бэра утверждает, что полное метрическое пространство – множество второй категории в себе.

Упражнения

1. Проверьте, что дополнение к плотному открытому множеству – это нигде не плотное множество.
2. Покажите, что любое открытое подмножество полного метрического пространства X – это множество второй категории в X.
3. Покажите, что для неполного метрического пространства утверждение теоремы Бэра может не выполняться.
4. Проверьте следующие свойства: подмножество множества первой категории снова имеет первую категорию, конечное или счётное объединение множеств первой категории – множество первой категории; если множество содержит подмножество второй категории, то оно само имеет вторую категорию.
5. Верно ли, что пересечение двух множеств второй категории имеет вторую категорию?
6. Докажите теорему Кантора о несчётности отрезка $[0,1]$, опираясь на теорему Бэра.
7. Покажите, что одноточечное подмножество $A = \{x\}$ топологического пространства X будет нигде не плотным в том и только том случае, если x – предельная точка в X. Отсюда и из теоремы Бэра легко вывести следующую ослабленную версию упражнения 12 п. 1.3.5: любое совершенное множество в полном метрическом пространстве несчётно.
8. Пусть бесконечно дифференцируемая функция f на отрезке $[0,1]$ обладает следующим свойством: для любой точки $t \in [0,1]$ существует такой номер $n = n(t)$, что n-я производная функции f в точке t равна нулю. Используя множества $A_n = \left\{ t \in [0,1] : f^{(n)}(t) = 0 \right\}$ и теорему Бэра, покажите, что на некотором отрезке $[a,b] \subset [0,1]$ функция f – полином.
9. В условиях предыдущего упражнения покажите, что функция f – полином на всём отрезке $[0,1]$.

10. Подмножество A топологического пространства X называется *множеством первой категории в точке* $x \in X$, если существует окрестность U точки x, для которой $A \bigcap U$ – это множество первой категории в X. Подмножество A *имеет вторую категорию в точке* x, если оно не является множеством первой категории в этой точке. Пусть X – метрическое пространство. Докажите, что для любого множества A второй категории в X существует такой шар B, что A имеет вторую категорию в каждой точке множества $A \bigcap B$.
11. Докажите следующий аналог теоремы Бэра: компактное топологическое пространство – это множество второй категории в себе.

1.4. Компактные множества в метрических пространствах

1.4.1. Предкомпакты

Пусть X – метрическое пространство, $A, C \subset X$, $\varepsilon \geq 0$. Множество C называется ε-*сетью* для A, если $\bigcup_{x \in C} B(x, \varepsilon) \supset A$. Другими словами, для любого $a \in A$ существует $x \in C$ с $\rho(x, a) < \varepsilon$. Ещё одна переформулировка: множество C будет ε-сетью для A в том и только том случае, если для любого $a \in A$ $\rho(a, C) < \varepsilon$. Из неравенства треугольника следует, что если C – ε-сеть для A и D – ε-сеть для C, то D – 2ε-сеть для A. Например, центр открытого шара радиуса r будет r-сетью для этого шара, множество $C = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ будет $\frac{1}{3}$-сетью для отрезка (0,1). Множество C называется *конечной* ε-*сетью* для A, если C – ε-сеть для A и C состоит из конечного числа элементов.

Лемма 1. Если для множества A существует конечная ε-сеть, то для A существует конечная 2ε-сеть, состоящая из элементов множества A.

Доказательство. Пусть C – конечная ε-сеть для A. В каждом шаре $B(c, \varepsilon)$, $c \in C$, если только этот шар пересекается с A, выберем по элементу $x \in B(c, \varepsilon) \bigcap A$. Полученное конечное множество элементов и будет требуемой 2ε-сетью. □

Подмножество A метрического пространства X называется *предкомпактом*, если для любого $\varepsilon > 0$ у A существует конечная ε-сеть. Согласно предыдущей лемме, можно требовать, чтобы ε-сеть в определении предкомпакта состояла из элементов самого множества A.

Отметим очевидные свойства предкомпактов: если $A \supset B$ и A – предкомпакт, то и B – предкомпакт; объединение конечного числа предкомпактов – предкомпакт. Каждый предкомпакт – ограниченное множество, то есть содержится в некотором шаре конечного радиуса (для этого достаточно даже существования конечной ε-сети при каком-то одном фиксированном значении ε). Множество в $\mathbb{R}^n$ будет предкомпактом в том и только том случае, если оно ограничено.

Лемма 2. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ множество A обладает предкомпактной ε-сетью. Тогда A – предкомпакт.

Доказательство. Выберем для A предкомпактную $\varepsilon/2$ -сеть B, а для B – конечную $\varepsilon/2$ -сеть C. Тогда C будет конечной ε-сетью для A. □

Теорема 1. Пусть A – подмножество метрического пространства X. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. A – предкомпакт.
2. Для любого $\varepsilon > 0$ из любой последовательности элементов множества A можно выделить подпоследовательность, все попарные расстояния между элементами которой не превосходят ε.
3. Из любой последовательности элементов множества A можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Доказательство. $1. \Rightarrow 2.$ Пусть A – предкомпакт, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Покроем множество A конечным числом шаров радиуса $\varepsilon/2$. Хотя бы один из этих шаров содержит бесконечную подпоследовательность последовательности a_n.

$2. \Rightarrow 3.$ Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Применяя последовательно условие 2 с $\varepsilon = 1$. $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon = 1/3$, ..., получим бесконечные множества индексов $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$, для которых $\operatorname{diam}\{a_n\}_{n\in N_k} \le 1/k$. Образуем возрастающую последовательность индексов M, выбрав первый элемент в N_1, второй – в N_2, третий – в N_3 и т. д. Подпоследовательность $\{a_n\}_{n\in M}$ будет последовательностью Коши, так как для любого $k \in \mathbb{N}$ все попарные расстояния между членами этой последовательности, начиная с k-го, не превосходят $1/k$.

$3. \Rightarrow 1.$ Предположим, что множество A не является предкомпактом. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что ни одно конечное множество не служит ε-сетью для A. Докажем существование последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, у которой все попарные расстояния между элементами больше или равны ε. У такой последовательности не может быть подпоследовательностей Коши. Построение осуществляется следующим образом. В качестве a_1 возьмём произвольный элемент множества A. Множество $C_1 = \{a_1\}$ не образует ε-сети, следовательно, существует $a_2 \in A$ с $\rho(a_2, C_1) \ge \varepsilon$. У множества $C_2 = \{a_1, a_2\}$ попарные расстояния между элементами больше или равны ε. C_2 не образует ε-сети, следовательно, существует $a_3 \in A$ с

$\rho(a_3, C_2) \ge \varepsilon$. Пусть уже построены элементы $a_1, ..., a_n$ требуемой последовательности с попарными расстояниями не меньшими ε. Множество $C_n = \{a_1, ..., a_n\}$ конечно и, следовательно, не служит ε-сетью для A. Точку $a_{n+1} \in A$ выберем так, чтобы расстояние от a_{n+1} до C_n было не меньше, чем ε. Продолжив описанный процесс неограниченно, получим требуемую последовательность. □

В полных пространствах результат может быть усилен.

Теорема 2. Пусть A – замкнутое подмножество полного метрического пространства X. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. A – компактное множество.
2. A – предкомпакт.
3. Из любой последовательности элементов множества A можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Эквивалентность $2. \Leftrightarrow 3.$ следует из предыдущей теоремы; импликация $1. \Rightarrow 3.$ – из наличия предельной точки у любого подмножества компакта, в частности у любой подпоследовательности. Осталось доказать импликацию $2. \Rightarrow 1.$ Для этого заметим вначале, что для любого центрированного семейства $\mathbb{W}$ подмножеств замкнутого предкомпакта и любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое подмножество B этого предкомпакта, что семейство $\mathbb{W}_1 = \left\{V \bigcap B : V \in \mathbb{W}\right\}$ будет снова центрированным семейством и $\operatorname{diam}(B) < \varepsilon$. Действительно, достаточно покрыть предкомпакт конечным числом замкнутых подмножеств диаметра меньшего ε; тогда хотя бы одно из этих подмножеств можно взять в качестве B. Докажем теперь, что любое центрированное семейство $\mathbb{W}$ замкнутых подмножеств нашего предкомпакта A имеет общий элемент. По теореме 1 п. 1.2.3 это будет означать компактность множества A.

Итак, A – предкомпакт, $\mathbb{W}$ – центрированное семейство, следовательно, существует такое замкнутое подмножество $B_1 \subset A$ с $\operatorname{diam}(B_1) < 1$, что семейство $\mathbb{W}_1 = \left\{V \bigcap B_1 : V \in \mathbb{W}\right\}$ будет снова центрированным. B_1 – снова предкомпакт, следовательно, существует такое замкнутое подмножество $B_2 \subset B_1$ с $\operatorname{diam}(B_2) < 1/2$, что семейство $\mathbb{W}_2 = \left\{V \bigcap B_2 : V \in \mathbb{W}\right\}$ будет центрированным. Продолжая этот процесс, получим убывающую цепочку $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset ...$ замкнутых подмножеств с $\operatorname{diam}(B_n) \to 0$, для каждого из которых семейство $\left\{V \bigcap B_n : V \in \mathbb{W}\right\}$ центрировано. В частности, все пересечения $V \bigcap B_n$, $V \in \mathbb{W}$, $n \in \mathbb{N}$ не пусты. Согласно принципу вложенных множеств (п. 1.3.4), $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ не пусто и состоит ровно из одной точки, которую мы обозначим буквой x. Рассмотрим произвольный элемент $V \in \mathbb{W}$ и покажем, что $x \in V$, то есть x будет требуемой общей точкой всех множеств семейства $\mathbb{W}$. Действительно, поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ пересечение $V \bigcap B_n$ не пусто и $x \in B_n$, то $\rho(x,V) < \operatorname{diam}(B_n)$ при всех n. То есть $\rho(x,V) = 0$. □

Упражнения

1. Любое компактное метрическое пространство сепарабельно.
2. Декартово произведение предкомпактов в метрике из упражнения 4 п. 1.3.2 – снова предкомпакт, а компактов – компакт.
3. Пусть K, X – метрические пространства, $f : K \to X$ – непрерывная функция и K – компакт. Тогда f равномерно непрерывна.

Для подмножества A метрического пространства X через $n_A(r)$ обозначим наибольшее возможное число попарно непересекающихся шаров радиуса r с центрами в точках множества A. Покажите, что:

4. A – предкомпакт в том и только том случае, если $n_A(r)$ конечно при любом r.
5. Функция $n_A(r)$ не возрастает с ростом r.
6. Функция $n_A(r)$ ограничена (в окрестности нуля) в том и только том случае, если множество A конечно.
7. Пусть A – ограниченное множество с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^m$. Тогда $n_A(r)$ имеет тот же порядок роста в нуле, что и r^{-m}. То есть $n_A(r)$ можно использовать для определения размерности множества A.

Отметим, что точные значения $n_A(r)$ бывает нелегко посчитать даже для относительно простых множеств, как, скажем, для шара в $\mathbb{R}^3$. Классическая задача о наиболее плотной упаковке шаров в $\mathbb{R}^3$ была решена лишь в 1998 году! Задача же о по возможности точной оценке чисел $n_A(r)$ для множеств в $\mathbb{R}^m$ имеет важное прикладное значение. Скажем, если сигнал, состоящий из m числовых компонент, отождествить с точкой в $\mathbb{R}^m$, то расстояние характеризует лёгкость распознавания этих сигналов. Соответственно, вопрос о возможном числе распознаваемых сигналов данной мощности сводится к поиску возможно большего числа попарно непересекающихся шаров радиуса r в фиксированном шаре.

1.4.2. Пространство непрерывных функций. Теорема Арцела

Пусть Γ – некоторое множество, а X – метрическое пространство. На множестве всех ограниченных функций, определённых на Γ и принимающих значения в X, зададим метрику равенством

$\rho(f,g)=\sup_{t\in K}\rho(f(t),g(t)).$[1] Полученное метрическое пространство ограниченных функций обозначается $l_\infty(\Gamma,X)$. Метрика этого пространства называется *равномерной метрикой*, и сходимость в $l_\infty(\Gamma,X)$ совпадает с равномерной сходимостью.

Теорема 1. Если X – полное метрическое пространство, то $l_\infty(\Gamma,X)$ также полно.

Доказательство. Пусть f_n – произвольная последовательность Коши в $l_\infty(\Gamma,X)$. Тогда для любого $t\in\Gamma$ значения $f_n(t)$ также образуют последовательность Коши в X: $\rho(f_n(t),f_m(t))\le\rho(f_n,f_m)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Поскольку пространство X полно, у последовательности $f_n(t)$ существует предел, который мы обозначим $f(t)$. Чтобы доказать, что f_n сходится к f равномерно, распишем подробнее определение последовательности Коши: $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n,m>N$ выполнено неравенство $\rho(f_n,f_m)\le\varepsilon$. Расписав определение расстояния в $l_\infty(\Gamma,X)$, получаем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N\in\mathbb{N}$, что для любых $t\in\Gamma$ и любых $n,m>N$ имеет место оценка $\rho(f_n(t),f_m(t))\le\varepsilon$. Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $m\to\infty$, получим, что $\rho(f_n(t),f(t))\le\varepsilon$ для всех $t\in\Gamma$. Из последнего соотношения и ограниченности функции f_n следует ограниченность функции f, то есть $f\in l_\infty(\Gamma,X)$. Далее, при $n>N$ возьмём в неравенстве $\rho(f_n(t),f(t))\le\varepsilon$ супремум по $t\in\Gamma$ и получим, что $\rho(f_n,f)\le\varepsilon$ для любого $n>N$. Таким образом, $f_n\to f$ в метрике пространства $l_\infty(\Gamma,X)$, чем и доказана полнота этого пространства. □

Пусть K – компактное топологическое пространство, а X – метрическое пространство. Множество непрерывных функций, действующих из K в X, наделённое равномерной метрикой, называется *пространством непрерывных функций* и обозначается $C(K,X)$. Расстояние в $C(K,X)$ можно выразить формулой $\rho(f,g)=\max_{t\in K}\rho(f(t),g(t))$. Согласно известной из курса анализа теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, $C(K,X)$ – замкнутое подмножество пространства $l_\infty(K,X)$. Поэтому если X – полное метрическое пространство, то $C(K,X)$ также полно.

[1] Буква ρ в последней формуле используется в двух разных смыслах: слева – как расстояние в $l_\infty(\Gamma,X)$, а справа – как расстояние в X. Устранить эту нечёткость можно, обозначив метрику пространства X через ρ_X.

Напомним также, что любая функция $f \in C(K, X)$ равномерно непрерывна (как непрерывная функция на метрическом компакте).

Лемма 1. Если X – предкомпакт, а множество Γ конечно, то $l_\infty(\Gamma, X)$ – предкомпакт.

Доказательство. Пусть A – конечная ε-сеть для X. Тогда множество $l_\infty(\Gamma, A)$ всех функций, действующих из Γ в A, будет конечной ε-сетью для $l_\infty(\Gamma, X)$. □

Лемма 2. Пусть семейство G непрерывных функций образует предкомпакт в $C(K, X)$. Тогда множество $G(K) = \bigcup_{f \in G} f(K)$ – предкомпакт в X.

Доказательство. Пусть $G_1 \subset G$ – конечная ε-сеть для G. Рассмотрим $G_1(K) = \bigcup_{f \in G_1} f(K)$. Так как каждое из множеств $f(K)$ – компактно (образ компакта при непрерывном отображении), то $G_1(K)$ компактно как конечное объединение компактов. В то же время $G_1(K)$ образует ε-сеть для $G(K)$. Согласно лемме 2 предыдущего пункта 1.4.1, $G(K)$ – предкомпакт в X. □

Определение. Пусть K, X – метрические пространства. Семейство G функций, действующих из K в X, называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $f \in G$ и любых точек $t_1, t_2 \in K$ с $\rho(t_1, t_2) < \delta$ расстояние между образами этих точек не превосходит ε: $\rho(t_1, t_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(t_1), f(t_2)) \le \varepsilon$.

Лемма 3. Пусть K, X – метрические пространства, K – компакт и семейство G непрерывных функций – предкомпакт в $C(K, X)$. Тогда семейство G равностепенно непрерывно.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $G_1 \subset G$ – конечную ε-сеть для G. Так как каждая функция $g \in G_1$ равномерно непрерывна и этих функций конечное число, существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $g \in G_1$ и любых точек $t_1, t_2 \in K$ с $\rho(t_1, t_2) < \delta$ выполнена оценка $\rho(g(t_1), g(t_2)) \le \varepsilon$. Пусть $f \in G$. Согласно определению ε-сети, существует $g \in G_1$ с $\rho(f, g) < \varepsilon$. По неравенству треугольника, для любых $t_1, t_2 \in K$ с $\rho(t_1, t_2) < \delta$ имеем:

$$\rho(f(t_1), f(t_2)) \le \rho(f(t_1), g(t_1)) + \rho(g(t_1), g(t_2)) + \rho(g(t_2), f(t_2)) \le 3\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε равностепенная непрерывность семейства G доказана. □

Теорема Арцела. Пусть K, X – метрические пространства, K – компакт и $G \subset C(K, X)$. Для того, чтобы семейство функций G было предкомпактом, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия: 1) G равностепенно непрерывно и 2) образы функций семейства G содержатся в некотором предкомпакте $Y \subset X$, общем для всех функций семейства G.

Доказательство. Необходимость уже доказана в вышеприведенных леммах 2 и 3. Докажем достаточность. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения равностепенной непрерывности семейства G. Выберем конечную δ-сеть Γ в K. Рассмотрим отображение ограничения $F : G \to l_\infty(\Gamma, Y)$, ставящее в соответствие каждой функции $f \in G$ её ограничение на Γ. Согласно лемме 1, всё $l_\infty(\Gamma, Y)$ – предкомпакт, следовательно, $F(G)$ – также предкомпакт. Таким образом, существует конечное множество $G_1 \subset G$, для которого $F(G_1)$ – ε-сеть в $F(G)$. Докажем, что это множество G_1 будет 3ε-сетью для G.

Действительно, пусть $f \in G$ – произвольная функция. Согласно определению множества G_1, существует элемент $g \in G_1$ с $\rho(F(f), F(g)) < \varepsilon$. Расшифровав определение отображения F и метрики в $l_\infty(\Gamma, Y)$, получаем, что $\rho(f(t), g(t)) < \varepsilon$ для любого $t \in \Gamma$. Далее, для любого $x \in K$ существует $t \in \Gamma$ с $\rho(x, t) < \delta$ (Γ – это δ-сеть в K). Вспомнив, наконец, что δ было взято из определения равностепенной непрерывности, имеем:

$$\rho(f(x), g(x)) \le \rho(f(x), f(t)) + \rho(f(t), g(t)) + \rho(g(t), g(x)) < 3\varepsilon.$$

Поскольку неравенство имеет место для всех $x \in K$, то и

$$\rho(f, g) = \max_{x \in K} \rho(f(x), g(x)) < 3\varepsilon.$$

Итак, у G для любого $\varepsilon > 0$ есть конечная 3ε-сеть. Теорема доказана. □

Следствие. Если в условиях теоремы Арцела пространство X полно, то для компактности множества $G \subset C(K, X)$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись три условия: 1) G равностепенно непрерывно, 2) образы функций семейства G содержатся в некотором предкомпакте $Y \subset X$, общем для всех функций семейства G, и 3) G – замкнутое подмножество пространства $C(K, X)$. □

В наиболее важных частных случаях, когда пространство значений X – это $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^n$, предкомпакты в X – это просто ограниченные множества. Условие 2 теоремы Арцела в этом случае может быть сформулировано проще: семейство G равномерно ограничено, то есть $\sup_{f \in G, t \in K} \rho(0, f(t)) < \infty$. Что же касается равностепенной непрерывности, приведём одно простое, но весьма удобное в применении достаточное условие: если все функции семейства G подчиняются условию Липшица с общей константой (то есть $\exists c>0\ \forall f\in G\ \forall t,\tau\in K\ \rho(f(t),f(\tau))\le c\rho(t,\tau)$), то G равностепенно непрерывно.

Упражнения

1. Почему расстояние между двумя элементами пространства $C(K,X)$ конечно?
2. Почему в определении равномерной метрики в $C(K,X)$ можно писать «$\max$», а не «$\sup$»?
3. Проверьте аксиомы метрики для равномерной метрики.
4. Если $C(K,X)$ – полное метрическое пространство, то X также полно.

Обозначим через $C[0,1]$ метрическое пространство $C([0,1],\mathbb{R})$.

5. Ни одно непустое открытое множество в $C[0,1]$ не будет равностепенно непрерывным. В частности, в $C[0,1]$ есть ограниченные, но в то же время не предкомпактные множества.

Для следующих множеств в $C[0,1]$ проверьте, будут ли они a) ограниченными, b) открытыми, c) замкнутыми, d) равностепенно непрерывными, e) предкомпактными, f) компактными:

6. $A_1=\{f:\forall t\in[0,1]\quad 0\le f(t\}\le 1\}$.
7. $A_2=\{f:\forall t\in[0,1]\quad f(t)>0\}$.
8. Множество A_3 тех функций из A_2, для которых $\int_0^1 f(t)dt<1$.
9. Множество A_4 непрерывно дифференцируемых функций с $\max\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|\le 1$.
10. Множество A_5 непрерывно дифференцируемых функций с $\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt\le 1$.
11. Множество A_6 непрерывно дифференцируемых функций с $\int_0^1 |f'(t)|\,dt\le 1$.
12. $A_7=A_1\bigcap A_4$.
13. Множество A_8 всех выпуклых функций из A_1.

1.4.3. Приложение: изопериметрическая задача

Изопериметрической задачей на плоскости называется задача об отыскании среди всех замкнутых выпуклых кривых данной длины кривую, ограничивающую максимальную возможную площадь. Эта классическая задача, рассматривавшаяся ещё древними греками[2], имеет многочисленные обобщения, играющие важную роль в геометрии выпуклых тел (см. замечательную старую книгу Бляшке [Bla]) и функциональном анализе (см. небольшую, но весьма насыщенную идеями и результатами монографию В. Мильмана и Г. Шехтмана [M-S]).

В предположении существования решения изопериметрической задачи можно доказать элементарными методами, что требуемой оптимальной кривой может быть только окружность. Некоторые из этих элементарных доказательств, скажем, четырёхшарнирный метод Штейнера (§1 книги Бляшке), настолько просты и изящны, что их нередко включают в программу школьных математических кружков. Доказательство же существования решения оказалось весьма непростым и было впервые получено Вейерштрассом в 70-х годах XIX века. С тех пор математика в своём развитии прошла большой путь, и мы, вооружённые такими мощными средствами, как теория компактов и, в частности, теорема Арцела, способны доказать упомянутую теорему Вейерштрасса без особых усилий.

Обозначим через G семейство функций $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $f(0)=f(2\pi)=0$, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1 и для которых $f([0,2\pi])$ − выпуклая кривая (т.е. функции из G − это параметрически заданные выпуклые кривые). Каждую выпуклую кривую длины не большей 2π, начинающуюся и заканчивающуюся в нуле, можно отождествить с некоторой функцией из G. Для этого достаточно рассмотреть естественную параметризацию кривой, то есть в качестве параметра взять длину отрезка кривой от нуля до данной точки. Для каждой функции $g\in G$ через $s(g)$ обозначим площадь, ограниченную кривой $f([0,2\pi])$.

Теорема. Семейство функций G представляет собой компакт в $C[0,2\pi]$; s − непрерывная функция на G, и, следовательно, s достигает своей верхней грани на G.

Доказательство. Как отмечено в конце предыдущего параграфа, наличие общей константы Липшица означает равностепенную непрерывность семейства. Далее, для любой функции $g\in G$ имеем $\rho(0,g(t))=\rho(g(0),g(t))\le|t|\le 2\pi$; то есть семейство G равномерно ограничено. Равномерный (и даже поточечный) предел функций, удовлетво-

[2] С изопериметрической задачей связана легенда о царице Дидоне − основательнице Карфагена. Когда колонисты прибыли на новое место, туземцы приняли их не очень любезно. В ответ на просьбу выделить участок для строительства города был дан фактический отказ, сформулированный так: «Вам позволено занять под свой город столько места, сколько можно отгородить одной бычьей шкурой». Однако Дидона не растерялась. Она приказала разрезать шкуру на тонкие ремешки и, связав их вместе, обозначить границу будущего поселения. При этом, разумеется, желательно было получить площадь побольше, то есть решить изопериметрическую задачу.

ряющих условию Липшица с константой 1, снова подчиняется условию Липшица с той же константой. Выпуклость также не нарушается при таком предельном переходе, то есть семейство G замкнуто. Итак, компактность семейства G доказана. Осталось проверить непрерывность функции s. Пусть $f_1, f_2 \in G$, обозначим фигуры на плоскости, ограниченные этими кривыми, через F_1 и F_2 соответственно, а $\rho(f_1, f_2)$ обозначим через ε. Через $F_{1,\varepsilon}$ обозначим множество всех точек, находящихся от F_1 на расстоянии, не превосходящем ε. Выберем на отрезке $[0,2\pi]$ ε-сеть $t_1,...,t_n$ с $n < 2\pi/\varepsilon$. Ввиду условия Липшица, множество $f_1(t_1),...,f_1(t_n)$ будет ε-сетью на кривой $f_1([0,2\pi])$. С центром в каждой из точек $f_1(t_k)$ построим круг радиуса 2ε. Объединение этих n кругов и множества F_1 будет покрывать всё множество $F_{1,\varepsilon}$ и, следовательно, будет покрывать множество F_2. Имеем $s(f_2) \le s(f_1) + 4n\pi\varepsilon^2 \le s(f_1) + 8\pi^2\varepsilon$. Учитывая равноправность функций f_1 и f_2, то есть что в вышеприведенном рассуждении их можно было поменять ролями, заключаем, что $|s(f_2) - s(f_1)| \le 8\pi^2\varepsilon =$ $= 8\pi^2\rho(f_2, f_1)$, то есть отображение s не просто непрерывно, а даже подчиняется условию Липшица. □

Упражнения

1. Докажите выпуклость множества $F_{1,\varepsilon}$ из доказательства предыдущей теоремы.
2. Докажите включение $F_{1,\varepsilon} \supset F_2$.
3. Восстановите подробности доказательства замкнутости семейства G в $C[0,2\pi]$.
4. Докажите, что супремум площадей всех выпуклых фигур заданного периметра l совпадает с супремум площадей всех фигур, ограниченных спрямляемыми кривыми длины l. Другими словами, условие выпуклости в изопериметрической задаче несущественно.

1.4.4. Канторово множество

Троичным разложением числа $x \in [0,1]$ называется представление числа в виде $x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + ...$, где *цифры разложения* x_k – это 0, 1 или 2. Сокращённая запись – $x = (0.x_1x_2...)_3$. Некоторые числа имеют по два троичных разложения. Например, $(0.10000...)_3 = (0.02222...)_3$. По определению, *канторово множество* – это подмножество K отрезка $[0,1]$, состоящее из чисел, имеющих хотя бы одно разложение в троичную дробь, не содержащее цифры 1. Структуру канторова множества проще понять, рассмотрев его дополнение. Так, числа, чьи троичные разложения обязательно имеют 1 в качестве первой цифры, образуют интервал $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Числа, у которых первая цифра не равна 1, а вторая – обязательно равна 1, вместе образуют два интервала $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ и $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Такое рассуждение даёт описание всго дополнения к K. Соответственно, K можно представить себе как результат следующего построения: на первом шаге из отрезка $[0,1]$ выбросим его среднюю треть – отрезок $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Останутся два отезка – $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$. В каждом из оставшихся отрезков выбросим его среднюю треть. Останутся уже четыре отрезка. Снова в каждом из оставшихся отрезков выбросим среднюю треть. То, что останется по окончании такого бесконечного процесса – это и есть канторово множество K.

Упражнения

1. Канторово множество K замкнуто.
2. K – совершенное множество, то есть не имеет изолированных точек.
3. Мощность канторова множества равна мощности континуума.
4. Опишите скорость роста в нуле величины $n_K(r)$ для канторова множества (определение см. в упражнениях п. 1.4.1).
5. Канторово множество нигде не плотно на отрезке.
6. Для любого компактного метрического пространства X существует сюръективное непрерывное отображение $f : K \to X$.
7. Рассмотрим множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств натурального ряда в следующей топологии: базу окрестностей подмножества $A \subset \mathbb{N}$ образуют семейства подмножеств $U_n(A) = \{B \subset \mathbb{N} : B \cap \{1,2,...,n\} = A \cap \{1,2,...,n\}\}$. Проверьте, что $2^{\mathbb{N}}$ в этой топологии гомеоморфно канторову множеству.

2. Теория меры

2.1. Системы множеств и меры

2.1.1. Алгебры множеств

Пусть в фиксированном множестве Ω выделено некоторое семейство подмножеств $\mathbf{A}$. Семейство $\mathbf{A}$ называется алгеброй множеств на Ω, если оно подчиняется следующим аксиомам:

1. $\Omega \in \mathbf{A}$;
2. Если $A \in \mathbf{A}$, то и $\Omega \setminus A \in \mathbf{A}$;
3. Если $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$, то и $A_1 \bigcap A_2 \in \mathbf{A}$.

Читатель легко убедится, что если $\mathbf{A}$ – это алгебра множеств, то

- $\varnothing \in \mathbf{A}$;
- пересечение любого конечного числа множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$;
- объединение двух множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$ (здесь поможет тот факт, что дополнение к объединению есть пересечение дополнений);
- объединение любого конечного числа множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$;
- разность и симметрическая разность множеств из $\mathbf{A}$ снова принадлежит семейству $\mathbf{A}$.

Введём одно полезное обозначение. Пусть множества $A_1, A_2, \ldots$ дизъюнктны (то есть попарно не пересекаются). Тогда их объединение будем обозначать значком *дизъюнктного объединения*: $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. При этом, если мы употребляем где-либо знак $\coprod$ дизъюнктного объединения, это означает, что мы требуем дизъюнктность входящих в объединение множеств. Скажем, запись $C = A \coprod B$ следует понимать так: A и B дизъюнктны и $A \bigcup B = C$.

Утверждение 1. Для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ элементов алгебры $\mathbf{A}$ существуют такие $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots \in \mathbf{A}$, что $\widetilde{A}_k \subset A_k$ при всех k, и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{A}_k$.

Доказательство. Требуемые попарно не пересекающиеся множества $\widetilde{A}_k$ можно, в принципе, строить разными способами. Простейший – удалить из каждого множества точки, принадлежащие предыдущим множествам, то есть положить $\widetilde{A}_1 = A_1$ и $\widetilde{A}_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j \right)$ при $k > 1$. □

Ясно, что последнее утверждение выполнено как для счётных, так и для конечных последовательностей множеств.

Примером алгебры множеств может служить семейство 2^{Ω} всех подмножеств множества Ω. Другие, менее тривиальные примеры приведены в упражнениях.

Теорема 1. Пусть Φ – некоторое семейство подмножеств множества Ω. Тогда среди всех алгебр множеств, содержащих Φ в качестве подсемейства, существует наименьшая по включению.

Доказательство. Определим $\mathbf{A}$ как пересечение всех алгебр на Ω, содержащих Φ. Другими словами, множество A принадлежит $\mathbf{A}$ в том и только том случае, если A принадлежит всем алгебрам множеств, содержащим Φ в качестве подсемейства. Очевидно, любая алгебра множеств, содержащая Φ, содержит и $\mathbf{A}$. В то же время для семейства множеств $\mathbf{A}$ легко проверяются аксиомы алгебры множеств:

1. Ω принадлежит всем алгебрам множеств, содержащим Φ, следовательно, $\Omega \in \mathbf{A}$.
2. Если $A \in \mathbf{A}$, то A принадлежит всем алгебрам множеств, содержащим Φ. Следовательно, $\Omega \setminus A$ принадлежит всем алгебрам множеств, содержащим Φ, и $\Omega \setminus A \in \mathbf{A}$.
3. Если $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$, то оба множества лежат во всех алгебрах множеств, содержащих Φ. Следовательно, $A_1 \bigcap A_2$ принадлежит всем алгебрам множеств, содержащим Φ, и $A_1 \bigcap A_2 \in \mathbf{A}$. $\square$

Наименьшая алгебра $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Phi)$, содержащая Φ, называется *алгеброй, порождённой семейством* Φ. В этом случае говорят также, что Φ *порождает алгебру* $\mathbf{A}$. Конструктивное описание алгебры, порождённой данным семейством, можно найти ниже в упражнении 6.

Упражнения

1. Каким из аксиом алгебры множеств не подчиняется семейство всех конечных подмножеств отрезка $[0,1]$? Семейство всех бесконечных подмножеств отрезка?
2. Опишите наименьшую алгебру множеств на $[0,1]$, содержащую все одноточечные подмножества.
3. Проверьте, что следующее семейство множеств является алгеброй на $[0,1]$: $\left\{\varnothing, [0,\frac{1}{2}],]\frac{1}{2},1], [0,1]\right\}$.
4. Подотрезками отрезка $[0,1]$ будем называть любые открытые, замкнутые или полуоткрытые отрезки, лежащие в $[0,1]$. Проверьте, что множества, составленные из конечных объединений подотрезков, образуют

алгебру на $[0,1]$. Будет ли эта алгебра порождаться системой всех открытых подотрезков? Системой всех полуоткрытых подотрезков?

5. Проверьте, что пересечение любого набора алгебр на множестве Ω – снова алгебра.
6. Пусть Φ – некоторое семейство подмножеств множества Ω, содержащее Ω в качестве элемента. Покажите, что множества, получаемые из элементов семейства Φ конечным числом операций пересечения и перехода к дополнению, вместе образуют алгебру. Эта алгебра будет совпадать с алгеброй, порождённой семейством Φ.
7. Пусть $\mathbf{A}$ – семейство подмножеств множества Ω, подчиняющееся аксиомам 1 и 2 алгебры и устойчивое относительно операции объединения пары множеств. Тогда $\mathbf{A}$ – алгебра.

2.1.2. σ-Алгебры множеств. Борелевские множества

Семейство Σ подмножеств множества Ω называется *σ-алгеброй*, если оно является алгеброй множеств и устойчиво относительно операции счётного объединения: для любой последовательности A_n элементов алгебры Σ их объединение – также элемент алгебры Σ. Переходом к дополнениям сразу получаем, что σ-алгебра устойчива и относительно операции счётного пересечения (формулы де-Моргана: п 1.1, упражнение 10).

Из утверждения 1 предыдущего параграфа следует, что если семейство Σ образует алгебру множеств, то проверку того, что Σ – это σ-алгебра, достаточно осуществлять не для всех счетных объединений, а лишь для счетных объединений попарно не пересекающихся множеств.

Проверка корректности следующего определения осуществляется таким же образом, как доказательство теоремы 1 п. 2.1.1.

Определение 1. Пусть Φ – семейство подмножеств множества Ω. Наименьшая σ-алгебра Σ, содержащая Φ, называется *σ-алгеброй, порождённой семейством* Φ. Σ совпадает с пересечением всех σ-алгебр на Ω, содержащих Φ.

Перефразируем определение в виде следующего утверждения:

Утверждение 1. Если некоторая σ-алгебра Σ_0 содержит семейство Φ, то Σ_0 содержит и всю σ-алгебру, порождённую семейством Φ.

Пусть Ω – топологическое пространство. σ-Алгебра $\mathfrak{B}$, порождённая семейством всех открытых подмножеств Ω, называется *σ-алгеброй борелевских множеств на* Ω. Элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}$ называются *борелевскими множествами*.

К сожалению, в общем случае для σ-алгебры, порождённой семейством множеств, и, в частности, для системы борелевских подмножеств топологического пространства, нет хорошего конструктивного описания, аналогичного упражнению 6 предыдущего пункта. Тем не менее, некоторое представление о борелевских множествах можно составить, исходя из следующих соображений. Семейство $\mathfrak{B}$ содержит все открытые подмножества пространства Ω. Поскольку $\mathfrak{B}$ – алгебра, $\mathfrak{B}$ содержит и дополнения ко всем открытым множествам, то есть все замкнутые множества. Как σ-алгебра, $\mathfrak{B}$ содержит все счётные объединения замкнутых множеств (такие множества называются *множествами класса* F_σ). Также $\mathfrak{B}$ содержит все счётные пересечения открытых множеств – *множества класса* G_δ. Счётные объединения множеств класса G_δ называются множествами класса $G_{\delta\sigma}$; счётные пересечения множеств класса F_σ называются множествами класса $F_{\sigma\delta}$; счётные объединения множеств класса $F_{\sigma\delta}$ образуют класс $F_{\sigma\delta\sigma}$; аналогичным образом вводятся борелевские классы $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$ и так далее до бесконечности. Все эти классы множеств содержатся в σ-алгебре борелевских множеств, но даже борелевские множества на отрезке не исчерпываются множествами вышеперечисленных борелевских классов.[1] Подробно о борелевских классах можно прочитать в учебнике Куратовского [Kur], гл. 2, §30. Важность изучения борелевских множеств обусловлена тем, что множества, естественно возникающие в задачах анализа, – множества точек непрерывности, точек гладкости, точек сходимости и т. д., – как правило, являются борелевскими множествами, причём не очень далёких борелевских классов.

Следующее полезное утверждение служит иллюстрацией того, что одна и та же σ-алгебра может порождаться различными системами множеств.

Утверждение 2. Совокупность множеств вида $(a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ порождает σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских множеств на оси.

Доказательство. Обозначим σ-алгебру, порождённую семейством множеств $(a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, через B_1. Нам нужно доказать, что $\mathrm{B}_1 = \mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{B}$ содержит все открытые множества, $\mathfrak{B}$, в частности, содержит и множества вида $(a,+\infty)$. По утверждению 1 это означает, что $\mathrm{B}_1 \subset \mathfrak{B}$. Согласно тому же утверждению 1, для доказательства обратного включения достаточно показать, что все открытые множества лежат в B_1. Пусть $b \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Замкнутая полуось $[b,+\infty)$ представима в виде счёт-

[1] Чтобы получить все борелевские множества, нужно определить классы $G_{\delta\sigma\delta\ldots}$ и $F_{\sigma\delta\sigma\ldots}$ не только для случая, когда индекс $\sigma\delta\sigma\ldots$ – конечная последовательность, но и для любых счётных ординалов. Тут мы сталкиваемся с одним из вопросов теории меры, где нужно знание порядковых чисел и трансфинитной индукции.

ного пересечения множеств вида $(a,+\infty)$: $[b,+\infty)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(b-\frac{1}{n},+\infty)$. Следовательно, $[b,+\infty)\in \mathrm{B}_1$. Также в B_1 лежат все открытые отрезки: $(a,b)=(a,+\infty)\setminus[b,+\infty)$. Поскольку каждое открытое множество на оси есть объединение не более чем счётного числа открытых отрезков, все открытые множества служат элементами σ-алгебры B_1. Утверждение доказано. □

Определение 2. *Ограничением* семейства подмножеств Φ на подмножество $A\subset\Omega$ называется совокупность Φ_A всех пересечений элементов семейства Φ с множеством A: $\Phi_A=\{A\bigcap B : B\in\Phi\}$.

Упражнения

1. Определим семейство подмножеств Σ отрезка $[0,1]$ следующим образом: множество принадлежит семейству Σ, если либо оно само, либо его дополнение не более чем счётно. Будет ли семейство Σ σ-алгеброй?
2. Будет ли семейство счётных объединений подотрезков отрезка $[0,1]$ σ-алгеброй?
3. Пусть Ω – множество, Σ – σ-алгебра на Ω, $A\subset\Omega$. Тогда Σ_A будет σ-алгеброй на A.
4. Пусть X – топологическое пространство, A – борелевское подмножество в X. Рассмотрим A как подпространство в X. Докажите, что каждое подмножество $B\subset A$, борелевское в подпространстве A, будет борелевским множеством и в исходном пространстве X.
5. Образуют ли множества первой категории на отрезке $[0,1]$ σ-алгебру? Опишите наименьшую σ-алгебру множеств на отрезке $[0,1]$, содержащую все подмножества первой категории.
6. Опишите наименьшую σ-алгебру множеств на отрезке $[0,1]$, содержащую все подмножества второй категории.
7. Пусть A – плотное множество класса G_δ в полном метрическом пространстве X. Тогда $X\setminus A$ – множество первой категории в X.
8. Пересечение конечного или счётного числа плотных множеств класса G_δ в полном метрическом пространстве – снова плотное множество класса G_δ.
9. Пусть A – множество класса G_δ в полном метрическом пространстве X. $\overline{A}$ – замыкание множества A. Тогда $\overline{A}\setminus A$ – множество первой категории в X.
10. Приведите пример убывающей цепочки счётных плотных подмножеств отрезка с пустым пересечением.

11. Счётное плотное подмножество отрезка не может принадлежать классу G_{δ}.
12. Пусть f – вещественнозначная функция на отрезке. Докажите, что множество $dc(f)$ всех точек разрыва функции f – множество класса F_{σ}.
13. Выпишем все открытые отрезки с рациональными концами в последовательность (a_n, b_n), $n = 1,2,\ldots$, и рассмотрим $A_n = (-\infty, a_n] \bigcup [b_n, +\infty)$. В этих обозначениях $dc(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\overline{f^{-1}(A_n)} \setminus f^{-1}(A_n)\right)$.

Определение. Функция $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ называется *функцией первого класса*, если f можно представить в виде поточечного предела последовательности непрерывных функций $f_n \in C[0,1]$.

Подробно о функциях первого класса см. [Kur], гл. 2, § 31.

14. Пусть $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ – функция первого класса. Тогда $f^{-1}([a,b]) \in G_{\delta}$ для любого замкнутого отрезка $[a,b]$.
15. Для функции f первого класса множество $dc(f)$ – множество первой категории, и, следовательно, у f есть точки непрерывности.
16. Докажите, что множество всех точек дифференцируемости непрерывной функции на отрезке – борелевское множество. Какому борелевскому классу оно принадлежит?
17. Пусть f_n – последовательность непрерывных вещественных функций на отрезке. Проверьте, что множество всех точек сходимости последовательности f_n – борелевское множество. Какому борелевскому классу оно принадлежит?
18. Докажите, что любое открытое подмножество метрического пространства принадлежит классу F_{σ} и, соответственно, любое замкнутое – классу G_{δ}. В общих топологических пространствах это утверждение, вообще говоря, неверно.
19. Докажите, что классы F_{σ} и G_{δ} на отрезке не совпадают.
20. Докажите, что в сепарабельном метрическом пространстве σ-алгебра, порождённая семейством всех открытых шаров, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.
21. Сохраняется ли утверждение предыдущего утверждения в силе, если отказаться от условия сепарабельности?
22. Докажите, что σ-алгебра борелевских множеств на оси порождается неким счетным набором множеств (такие σ-алгебры называются *счётно-порождёнными*).

23. Докажите, что мощность любой счётно-порождённой σ-алгебры не превосходит мощности континуума. Докажите, что, в частности, существует ровно континуум борелевских множеств на оси.

2.1.3. Произведение σ-алгебр

Пусть (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами. *«Прямоугольниками»* в $\Omega_1 \times \Omega_2$ назовём множества вида $A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Определим σ-алгебру $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ на декартовом произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ как наименьшую σ-алгебру, содержащую все «прямоугольники».

Упражнения

1. Пусть $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ – борелевские σ-алгебры на топологических пространствах X_1 и X_2 соответственно, $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств на $X_1 \times X_2$. Тогда $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.
2. Произведение σ-алгебр борелевских множеств на двух сепарабельных метрических пространствах X_1 и X_2 совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств на $X_1 \times X_2$. В частности, произведение σ-алгебр борелевских множеств на оси совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств на плоскости.
3. Сохраняется ли утверждение предыдущего утверждения в силе, если отказаться от условия сепарабельности?
4. $2^{\mathbb{N}} \otimes 2^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.
5. Верно ли, что $2^{[0,1]} \otimes 2^{[0,1]} = 2^{[0,1] \times [0,1]}$?
6. Пусть $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, $t_1 \in \Omega_1$. Положим $A_{t_1} = \{t_2 \in \Omega_2 : (t_1, t_2) \in A\}$. Докажите, что $A_{t_1} \in \Sigma_2$.

2.1.4. Меры: конечная и счётная аддитивность

Читатель уже встречался с понятием меры, хотя, возможно, и без упоминания этого термина. Скажем, число элементов множества – это мера на семействе N_f всех конечных подмножеств натурального ряда; площадь – это мера на семействе плоских фигур, имеющих площадь; длина спрямляемой кривой, объём, масса – это всё примеры мер. В п. 2.3.1 будет построен центральный в рамках теории меры пример – мера Лебега на отрезке.

Определение 1. Пусть Ω – множество с заданным на нём семейством подмножеств Φ. Функция множества $\mu : \Phi \to \mathbb{R}$ называется *конечно-аддитивной мерой*, если она подчиняется следующим требованиям:

1. $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \Phi$;

2. Если $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Phi$, множества A_k попарно не пересекаются, и $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \Phi$, то $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

Пусть $\varnothing \in \Phi$. Тогда по второму условию $\mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) = \mu(\varnothing \cup \varnothing) = \mu(\varnothing)$, то есть $\mu(\varnothing) = 0$. При этом могут быть и непустые множества нулевой меры.

Если областью определения конечно-аддитивной меры служит некоторая алгебра множеств, то условие 2 можно переформулировать проще:

2'. Для любой пары непересекающихся множеств $A_1, A_2 \in \Phi$ мера их объединения равна сумме мер: $\mu(A_1 \coprod A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Отметим некоторые свойства конечно-аддитивных мер:

Утверждение 1. Пусть μ – конечно-аддитивная мера на некоторой алгебре $\mathbf{A}$ подмножеств множества Ω. Тогда

a) если $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$, то $\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2)$. Если при этом $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2)$.

b) Если $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$, и $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_2) \le \mu(A_1)$. В частности, если $\mu(A_1) = 0$, то и $\mu(A_2) = 0$.

c) Если $\mu(A_2) = 0$, то $\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1)$.

d) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \le \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

e) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ для любых $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbf{A}$.

Доказательство. a) $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \coprod (A_1 \cap A_2)$. Следовательно, $\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$.

b) – прямое следствие пункта a): $\mu(A_1) - \mu(A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) \ge 0$.

c) Если $\mu(A_2) = 0$, то и $\mu(A_2 \cap A_1) = 0$. Остаётся применить пункт a).

d) Запишем $A_1 \cup A_2$ как объединение трёх непересекающихся множеств: $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \coprod (A_2 \setminus A_1) \coprod (A_2 \cap A_1)$. Имеем:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) = \big(\mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)\big) + \\ + \big(\mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)\big) - \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

e) выводится индукцией по n из d). □

Наиболее изученными и полезными в приложениях конечно-аддитивными мерами являются *счётно-аддитивные меры*, то есть меры, подчиняющиеся, наряду с аксиомами 1 и 2 определения 1, следующей *аксиоме счётной аддитивности*:

$$\text{если } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Phi \text{ и } \coprod_{k=1}^{\infty} A_k \in \Phi, \text{ то } \mu\left(\coprod_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Счётно-аддитивные меры называют ещё *σ-аддитивными*.

Для меры, заданной на σ-алгебре, проверка счётной аддитивности несколько упрощается: если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$, то автоматически и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Счётно-аддитивная мера μ, заданная на σ-алгебре Σ подмножеств множества Ω, называется *вероятностной мерой*, если $\mu(\Omega) = 1$.

Утверждение 2. Пусть μ – счётно-аддитивная мера, заданная на σ-алгебре Σ подмножеств множества Ω. Тогда

1. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ – возрастающая цепочка множеств (то есть $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$), то $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$;
2. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ – убывающая цепочка множеств (то есть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$), то $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Доказательство. Обе части утверждения доказываются аналогично, более того, одну часть можно вывести из другой переходом к дополнениям. Докажем, для примера, первое из утверждений. Итак, пусть A_n образуют возрастающую цепочку множеств. Положим $A_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Рассмотрим множества $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$. Последовательность множеств $A_1, B_1, B_2, B_3, \dots$ дизъюнктна (то есть множества попарно не пересекаются), $A_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = A_{n+1}$, $A_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = A_\infty$. Воспользуемся условием счётной аддитивности и определением суммы ряда:

$$\mu(A_\infty) = \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty}\left(\mu(A_1) + \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Утверждение доказано. □

Ещё пара чрезвычайно простых, но тем не менее полезных замечаний.

Утверждение 3. Пусть μ – счётно-аддитивная мера, заданная на σ-алгебре Σ подмножеств множества Ω, $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$. Тогда

1. $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. В частности, если все $\mu(A_k)$ равны 0, то и $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$.

2. Если $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, то $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Доказательство. 1. Поскольку множества $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ образуют возрастающую по n цепочку множеств, согласно п. 1 утверждения 2, мы имеем право в неравенстве $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, доказанном в утверждении 1, перейти к пределу при n, стремящемся к бесконечности.

2. Рассмотрим множества $D = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} (A_i \cap A_j)$ и $A_k' = A_k \setminus D$. Вспомогательные множества A_k' уже не пересекаются между собой. Так как $\mu(D) = 0$, то $\mu(A_k') = \mu(A_k)$ и $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k'\right)$. Остаётся воспользоваться счётной аддитивностью. □

Упражнения

1. Докажите вторую часть утверждения 2.
2. Если счётно-аддитивная мера μ задана на σ-алгебре, то $\mu(A_n) \to 0$ для любой дизъюнктной последовательности множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$.
3. Пусть μ – конечно-аддитивная мера, заданная на σ-алгебре Σ подмножеств множества Ω и для любой возрастающей цепочки множеств выполнено соотношение $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Тогда мера μ счётно-аддитивна.
4. Счётная аддитивность меры, заданной на σ-алгебре, эквивалентна следующему условию: для любых $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$, образующих убывающую цепочку множеств с пустым пересечением, $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$.
5. Пусть b_m – последовательность положительных чисел, $\sum_{1}^{\infty} b_m < \infty$. На множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел рассмотрим σ-алгебру $2^{\mathbb{N}}$ всех

подмножеств. Определим для любого $A \in 2^{\mathbb{N}}$ меру $\mu(A)$ равенством $\mu(A) = \sum\limits_{m \in A} b_m$. Проверить, что μ – это счётно-аддитивная мера.

6. Докажите, что в предыдущем упражнении описан общий вид счётно-аддитивной меры на $2^{\mathbb{N}}$.
7. Привести пример конечно-аддитивной, но не счётно-аддитивной меры на некоторой алгебре подмножеств натурального ряда.
8. Привести пример конечно-аддитивной, но не счётно-аддитивной меры на σ-алгебре $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств натурального ряда.
9. Докажите пункт е) утверждения 1 и утверждение 3, опираясь на утверждение 1 п. 2.1.1.
10. Пусть на некоторой алгебре Σ подмножеств множества Ω задана конечно-аддитивная мера μ; $A, A_j \in \Sigma$, $A \subset \bigcup\limits_1^n A_j$. Тогда $\mu(A) \le \sum\limits_1^n \mu(A_j)$.

    Сохранится ли утверждение в силе при замене n на $+\infty$?
11. Пусть в условиях предыдущего упражнения для некоторого $k \in \mathbb{N}$ каждая точка множества A принадлежит по крайней мере k различным множествам A_j, $1 \le j \le n$ (так называемое k-кратное покрытие). Тогда $\mu(A) \le \frac{1}{k} \sum\limits_1^n \mu(A_j)$.

2.1.5. Пространства с мерой. Полнота. Пополнение σ-алгебры по мере

Тройка (Ω, Σ, μ), где Ω – множество с заданной на нём σ-алгеброй Σ, а μ – счётно-аддитивная мера на Σ, называется *пространством с мерой*. Если к тому же μ – вероятностная мера ($\mu(\Omega) = 1$), то (Ω, Σ, μ) называется *вероятностным пространством*. В теории вероятностей множество Ω называется пространством элементарных событий, элементы σ-алгебры Σ – событиями, а $\mu(A)$ – вероятностью выполнения события A. Измеримые функции, рассматриваемые в следующей главе, в рамках теории вероятностей называются случайными величинами, интеграл случайной величины – математическим ожиданием. Хотя мы и не будем пользоваться вероятностной терминологией, многие из изучаемых в ближайших главах вопросов играют роль и в теории вероятностей.

Определение. Пространство с мерой (Ω, Σ, μ) называется *полным* (другой термин – Σ полна по отношению к мере μ) при выполнении следующего условия: для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) = 0$, если $B \subset A$, то $B \in \Sigma$.

Если σ-алгебра Σ не полна по отношению к мере μ, то μ можно естественным образом доопределить на более широкую σ-алгебру Σ', которая уже будет полна по отношению к μ. Эта описанная ниже процедура доопределения называется пополнением σ-алгебры Σ по мере μ.[2]

Итак, пусть (Ω, Σ, μ) – неполное пространство с мерой. Подмножество $B \subset \Omega$ назовём *пренебрежимым*, если существует такое $A \in \Sigma$, что $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$. Отметим следующие очевидные свойства пренебрежимых множеств:

– если множество B пренебрежимо и $B \in \Sigma$, то $\mu(B) = 0$;
– если множество B пренебрежимо, то и все его подмножества пренебрежимы;
– объединение конечного или счётного семейства пренебрежимых множеств пренебрежимо (следует из утверждения 3 п. 2.1.4).

Два множества $A_1, A_2 \subset \Omega$ назовём *эквивалентными* ($A_1 \sim A_2$), если их симметрическая разность $A_1 \Delta A_2$ пренебрежима. Отношение $\sim$ рефлексивно и симметрично (очевидно), а также транзитивно: если $A_1 \sim A_2$, $A_2 \sim A_3$, то симметрическая разность $A_1 \Delta A_3 \subset (A_1 \Delta A_2) \bigcup (A_2 \Delta A_3)$ пренебрежима, то есть $A_1 \sim A_3$. Отметим ещё несколько свойств.

Лемма

1. Если $A \sim B$, то $(\Omega \setminus A) \sim (\Omega \setminus B)$;
2. Если $A_n \sim B_n$, $n \in M$, где M – конечный или счётный набор индексов, то $\bigcup\limits_{n \in M} A_n \sim \bigcup\limits_{n \in M} B_n$ и $\bigcap\limits_{n \in M} A_n \sim \bigcap\limits_{n \in M} B_n$;
3. Если $B_1 \sim B_2$, $B_1, B_2 \in \Sigma$, то $\mu(B_1) = \mu(B_2)$.

Доказательство. Первый пункт следует из соотношения $(\Omega \setminus A) \Delta (\Omega \setminus B) = A \Delta B$, второй – из соотношений

$$\left(\bigcap_{n \in M} A_n \right) \Delta \left(\bigcap_{n \in M} B_n \right) \subset \bigcup_{n \in M} (A_n \Delta B_n) \text{ и } \left(\bigcup_{n \in M} A_n \right) \Delta \left(\bigcup_{n \in M} B_n \right) \subset \bigcup_{n \in M} (A_n \Delta B_n).$$

Докажем третий пункт. Поскольку $\mu(B_1 \Delta B_2) = 0$, множества $B_1 \setminus B_2$ и $B_2 \setminus B_1$ имеют нулевую меру. Имеем $\mu(B_1) = \mu(B_1 \bigcap B_2) + \mu(B_1 \setminus B_2) =$ $= \mu(B_1 \bigcap B_2) = \mu(B_1 \bigcap B_2) + \mu(B_2 \setminus B_1) = \mu(B_2)$. □

Определим семейство множеств Σ' следующим образом: $A \in \Sigma'$, если существует такое $B \in \Sigma$, что $A \sim B$.

Теорема 1. Семейство множеств Σ' содержит σ-алгебру Σ и, в свою очередь, образует σ-алгебру на Ω.

[2] Мы советуем читателю отнестись к утверждениям, доказываемым в этом параграфе, как к упражнениям, и попробовать найти доказательства самостоятельно.

Доказательство. Если $A \in \Sigma$, то $A \in \Sigma'$: достаточно в определении взять $B = A$. Проверим теперь для Σ' выполнение аксиом σ-алгебры.

1. $\Omega \in \Sigma'$.
2. Если $A \in \Sigma'$, то и $\Omega \setminus A \in \Sigma'$. Действительно, по определению, существует такое $B \in \Sigma$, что $A \sim B$. Но тогда $\Omega \setminus B \in \Sigma$ и $(\Omega \setminus A) \sim (\Omega \setminus B)$.
3. Пусть множества A_n принадлежат семейству Σ', $B_n \in \Sigma$, $A_n \sim B_n$, $n = 1,2,\dots$. Тогда $\bigcup_1^\infty B_n \in \Sigma$ и $\bigcup_1^\infty A_n \sim \bigcup_1^\infty B_n$. Следовательно, $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma'$. □

Доопределим меру μ до меры μ', заданной уже на Σ'. Пусть $A \in \Sigma'$, $B \in \Sigma$ и $A \sim B$. Положим $\mu'(A) = \mu(B)$. Это определение корректно ввиду п. 3 леммы, то есть $\mu'(A)$ зависит только от A и не зависит от выбора B.

Теорема 2. Мера μ' счётно-аддитивна.

Доказательство. Пусть $A_n \in \Sigma'$ – дизъюнктная последовательность множеств, $B_n \in \Sigma$ и $A_n \sim B_n$. Поскольку для любых $i, j \in \mathbb{N}$ пересечение $A_i \cap A_j$ пусто, а $B_i \cap B_j \sim A_i \cap A_j$, то $\mu(B_i \cap B_j) = 0$. Воспользуемся пунктом 2 утверждения 3 предыдущего параграфа и соотношениями $A_n \sim B_n$, $\bigcup_1^\infty A_n \sim \bigcup_1^\infty B_n$: $\mu'\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu'(A_k)$. □

Построенное пространство с мерой (Ω, Σ', μ') называется *пополнением* пространства с мерой (Ω, Σ, μ). Часто меру μ' обозначают той же буквой, что и μ. Это не приводит к недоразумениям, так как по построению $\mu' = \mu$ на Σ.

Упражнения

1. Пополнение пространства с мерой – это полное пространство.
2. Пространство с мерой полно тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим пополнением.
3. Пусть (Ω, Σ', μ') – пополнение пространства с мерой (Ω, Σ, μ), $A \subset \Omega$. Покажите, что

– $A \in \Sigma'$ в том и только том случае, если существуют такие $B, C \in \Sigma$, что $B \subset A \subset C$ и $\mu(B) = \mu(C)$;

– $A \in \Sigma'$ в том и только том случае, если существуют такое $B \in \Sigma$ и такое пренебрежимое множество C, что $A = B \cup C$.

4. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой. Покажите, что выражение $\rho(A, B) = \mu(A \Delta B)$ задаёт псевдометрику на Σ.

5. Пусть $A_n \in \Sigma$ и ряд $\sum_1^{\infty} \rho(A_n, A_{n+1})$ сходится. Тогда в псевдометрике ρ последовательность A_n сходится к множеству $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$.
6. (Σ, ρ) – полное псевдометрическое пространство.

2.1.6. Операции над мерами. δ-Мера. Атомы, чисто атомарные и безатомные меры

Пусть Ω – множество с заданной на нём σ-алгеброй Σ. Для мер на Σ определены естественным образом операции сложения и умножения на положительный скаляр: $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$; $(a\mu)(A) = a\mu(A)$. Предлагаем читателю самостоятельно проверить, что описанные операции над счётно-аддитивными мерами не выводят за пределы класса счётно-аддитивных мер.

Определение. *Атомом* меры μ называется такое подмножество $A \in \Sigma$, что $\mu(A) > 0$ и для любого $B \in \Sigma_A$ либо $\mu(B) = 0$, либо $\mu(A \setminus B) = 0$. Если у меры есть атомы, мера называется *атомарной*, если же атомов нет, то *безатомной*. Мера называется *чисто атомарной*, если Ω можно представить в виде объединения конечного или счётного числа непересекающихся атомов.

Типичным примером чисто атомарной меры служит *δ-мера*. Пусть x – произвольная точка множества Ω. δ-Мерой, сосредоточенной в точке x, называется мера δ_x, определённая правилом: $\delta_x(A) = 1$, если $x \in A$, и $\delta_x(A) = 0$, если $x \notin A$.

Напомним, что множества $A_1, A_2 \in \Sigma$ называются эквивалентными ($A_1 \sim A_2$), если $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$. Скажем, для меры δ_x её атом Ω эквивалентен одноточечному множеству $\{x\}$.

Решив нижеприведенные упражнения, читатель получит, в частности, доказательства следующих теорем:

Теорема 1. Любая счётно-аддитивная мера на σ-алгебре может быть представлена в виде суммы чисто атомарной и безатомной мер, причём такое представление единственно.

Теорема 2. Пусть Ω – сепарабельное метрическое пространство, σ-алгебра Σ содержит все борелевские множества, μ – счётно-аддитивная мера на Σ. Тогда каждый атом меры μ эквивалентен некоторому одноточечному множеству.

Упражнения

1. Если множество эквивалентно атому, то оно само является атомом.
2. Если атомы A_1, A_2 меры μ не эквивалентны, то $\mu\left(A_1 \cap A_2\right) = 0$.
3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ – конечная или счётная последовательность попарно не эквивалентных атомов меры μ. Тогда существует такая дизъюнктная последовательность $A_1', A_2', \dots, A_n', \dots \in \Sigma$ атомов меры μ, что $A_k' \sim A_k$, $k = 1,2,\dots$ (воспользуйтесь утверждением 1 п. 2.1.1).
4. Меры всех представителей одного класса эквивалентности совпадают. В связи с этим мерой класса эквивалентности будем называть меру представителя этого класса.
5. Класс эквивалентности атома будем называть атомарным классом. Сумма мер любого конечного числа попарно различных атомарных классов не превосходит $\mu(\Omega)$.
6. Существует не более чем счётное число различных атомарных классов.
7. Существует такая конечная или счётная дизъюнктная последовательность $A_1, A_2, \dots$ атомов меры μ, что любой атом меры μ эквивалентен одному из A_n.
8. В условиях предыдущего упражнения положим $A_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и определим меры μ_1 и μ_2 на Σ следующим образом: $\mu_1(A) = \mu(A \cap A_\infty)$, $\mu_2(A) = \mu(A \setminus A_\infty)$. Проверьте, что μ_1 и μ_2 будут счётно-аддитивными мерами, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, мера μ_1 чисто атомарна и μ_2 безатомна. Этим будет доказано существование разложения в теореме 1.
9. Пусть $\mu = \mu_1' + \mu_2'$ – какое-то разложение на чисто атомарную и безатомную меры, B – атом меры μ. Тогда B – атом для μ_1' и $\mu(B) = \mu_1'(B)$. Обратно, все атомы меры μ_1' будут атомами и для меры μ.
10. В условиях предыдущего упражнения мера μ_1' совпадает с мерой μ_1 из упражнения 8. Этим будет доказана единственность разложения в теореме 1.
11. Пусть Ω и Σ – из формулировки теоремы 2, $A \in \Sigma$. Тогда множество A можно разбить на не более чем счётное число попарно не пересекающихся множеств из Σ, с диаметрами, не превосходящими ε.
12. В условиях теоремы 2 для каждого атома A меры μ и для любого $\varepsilon > 0$ существует атом $A_1 \subset A$ (автоматически эквивалентный атому A) с $\operatorname{diam}(A_1) < \varepsilon$.
13. В условиях теоремы 2 пусть A – атом меры μ. Воспользовавшись предыдущим упражнением, построим цепочку $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ атомов с $\operatorname{diam}(A_n) < 1/n$. Докажите, что пе-

ресечение этой цепочки множеств состоит из одной точки и что полученное одноточечное множество будет атомом. Этим будет доказана теорема 2.

14. Пусть Σ – σ-алгебра на $[0,1]$ из упражнения 1 п. 2.1.2. Положим $\mu(A) = 0$, если A не более чем счётно, и $\mu(A) = 1$, если дополнение к A не более чем счётно. Проверить, что отрезок $[0,1]$ будет атомом этой меры, но не будет эквивалентен какой бы то ни было точке.
15. Пусть μ – счётно-аддитивная безатомная мера на σ-алгебре Σ. Тогда для любого $A \in \Sigma$ и любого $\alpha \in (0,1)$ существует подмножество $B \in \Sigma_A$ с $\mu(B) = \alpha\mu(A)$.

2.2. Продолжения мер

Часто меры первоначально определены естественным образом на каком-то относительно узком классе множеств, и, прежде чем начать ими пользоваться, их нужно доопределить на множествах более широкого класса. Такая ситуация встречается даже в школьном курсе математики: площадь определяется вначале для прямоугольников, затем для треугольников, потом – через разбиение на меньшие части – для произвольных многоугольников. Через приближение круга многоугольниками определяется площадь круга. Аналогичный путь нужно пройти для определения объёма. В настоящем разделе мы изучим общую схему продолжения мер и применим её для построения самого важного для нас примера – меры Лебега на отрезке.

2.2.1. Продолжение меры с полукольца множеств на порождённую им алгебру

Определение 1. Семейство Φ подмножеств множества Ω называется *полукольцом с единицей*, если

1. $\Omega \in \Phi$;
2. Если $A, B \in \Phi$, то и $A \bigcap B \in \Phi$;
3. Для любого множества $A \in \Phi$ его дополнение $\Omega \setminus A$ может быть представлено как объединение конечного числа попарно не пересекающихся элементов семейства Φ.

Для множества $A \subset \Omega$ *базовым представлением* назовём представление в виде $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in \Phi$. Разумеется, могут найтись множества, и не имеющие базового представления.

Теорема 1. Пусть Φ – полукольцо с единицей. Тогда семейство $\mathbf{A}$ всех множеств, имеющих базовые представления, образует наименьшую алгебру $\mathbf{A}(\Phi)$, содержащую Φ.

Доказательство. Докажем, что $\mathbf{A}$ – алгебра множеств. Пусть $A, B \in \mathbf{A}$; $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, $B = \coprod_{j=1}^{m} B_k$ – соответствующие базовые представления. Тогда $A \cap B = \coprod_{k=1}^{n} \coprod_{j=1}^{m} A_k \cap B_j$ – базовое представление для $A \cap B$. То есть семейство $\mathbf{A}$ устойчиво по отношению к операции пересечения конечного числа множеств.

Теперь докажем, что семейство $\mathbf{A}$ устойчиво по отношению к операции дополнения. Итак, пусть $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ – произвольный элемент из $\mathbf{A}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \Phi$. По аксиоме 3 полукольца с единицей все множества $\Omega \setminus A_k$ принадлежат $\mathbf{A}$. Следовательно, по уже доказанному, $\Omega \setminus A = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$ также принадлежит $\mathbf{A}$. Таким образом, $\mathbf{A}$ – алгебра. Осталось заметить, что любая алгебра множеств, содержащая все элементы полукольца Φ, обязана содержать и все их конечные объединения, то есть все элементы семейства $\mathbf{A}$. Этим доказано, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Phi)$. □

Теорема 2. Любая конечно-аддитивная мера μ, заданная на полукольце с единицей Φ, единственным образом продолжается до конечно-аддитивной меры, заданной на алгебре $\mathbf{A}(\Phi)$, порождённой семейством Φ.

Доказательство. Начнём с единственности. Пусть μ' – некоторое продолжение на $\mathbf{A}(\Phi)$ меры μ, $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ – базовое представление произвольного элемента алгебры $\mathbf{A}(\Phi)$. Тогда $\mu'(A) = \sum_{1}^{n} \mu'(A_n) = \sum_{1}^{n} \mu(A_n)$. Таким образом, $\mu'(A)$ определяется однозначно мерой μ.

Покажем теперь, что полученное выше выражение $\mu'(A) = \sum_{1}^{n} \mu(A_n)$ действительно задаёт конечно-аддитивную меру на $\mathbf{A}(\Phi)$. Начнем с проверки корректности такого определения, то есть с того, что $\mu'(A)$ определяется множеством A, а не выбором его базового представления. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ и $A = \coprod_{j=1}^{m} B_k$ – два разных базовых представления множества

$A \in \mathbf{A}(\Phi)$. Введём в рассмотрение множества $C_{i,j} = A_i \bigcap B_j$. Эти множества попарно не пересекаются, $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} C_{ij}$; $B_j = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{ij}$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Корректность определения обоснована. Конечная же аддитивность меры μ' проверяется совсем просто. Пусть $A, B \in \mathbf{A}(\Phi)$ – дизъюнктные множества, $A = \coprod\limits_{j=1}^{m} A_k$, $B = \coprod\limits_{j=1}^{m} B_j$ – их базовые представления. Множества A_k и B_j, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$ в совокупности образуют базовое представление для $A \bigcup B$. Таким образом, $\mu(A \bigcup B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \mu(A) + \mu(B)$. □

Теорема 3. Если μ – счётно-аддитивная мера на полукольце с единицей Ф, то её продолжение μ' на алгебру $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Phi)$, порождённую полукольцом Ф, также будет счётно-аддитивным.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathbf{A}$ – дизъюнктная последовательность множеств и их объединение $B = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ также принадлежит алгебре $\mathbf{A}$. Далее, пусть $B = \coprod\limits_{j=1}^{m} B_j$ – базовое представление для B, $A_k = \coprod\limits_{i=1}^{m_k} A_{ki}$ – базовые представления для A_k. Тогда $B_j = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} \left(A_k \bigcap B_j \right) = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} \coprod\limits_{i=1}^{m_k} \left(A_{ki} \bigcap B_j \right)$ и все входящие в последнее представление множества принадлежат полукольцу Ф. Ввиду счётной аддитивности меры μ на Ф $\mu(B_j) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \bigcap B_j)$. Следовательно,

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \bigcap B_j) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \bigcap B_j) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu \left(\bigcup_{i=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{m} A_{ki} \bigcap B_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \ \square$$

Определение 2. Пусть Φ – семейство множеств, $\mu:\Phi\to\mathbb{R}_+$. Функция множества μ называется *счётно полуаддитивной*, если для любых $A, B_k \in \Phi$ из включения $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ следует, что $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$.

Теорема 4 (критерий счётной аддитивности). Пусть μ – конечно-аддитивная мера на полукольце с единицей Φ, подчиняющаяся условию счётной полуаддитивности. Тогда μ счётно-аддитивна.

Доказательство. Пусть $A, B_k \in \Phi$, $A = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$. Нам нужно доказать, что $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$, а для этого ввиду данной по условию счётной полуаддитивности достаточно доказать неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \le \mu(A)$. Пусть μ' – продолжение меры μ на алгебру $\mathbf{A}(\Phi)$, построенное в теореме 2. Из включения $A \supset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ и уже доказанной конечной аддитивности меры μ' выводим, что $\mu(A) = \mu'(A) \ge \mu'\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu'(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$. Остаётся устремить n к бесконечности. □

Упражнения

1. На каком основании в доказательстве теремы 3 мы позволили себе перегруппировывать слагаемые в бесконечной сумме? Вообще говоря, сумма ряда может изменяться в результате такой процедуры. Почему этого не могло произойти в данном случае?
2. Приведите пример такого семейства множеств Φ на отрезке и такой конечно-аддитивной меры μ на Φ, что любое продолжение меры μ на алгебру, порождённую Φ, не будет конечно-аддитивной мерой.
3. Пусть Φ – семейство множеств, μ – конечно-аддитивная меры μ на Φ. Может ли быть так, что существует более одного продолжения меры μ на алгебру, порождённую Φ, с сохранением конечной аддитивности?
4. Обоснуйте равенство $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$ из доказательства теоремы 2. Где аналогичное соотношение использовалось в доказательстве теоремы 3?
5. Пусть Φ – полукольцо с единицей. Докажите, что $\varnothing \in \Phi$.

6. Пусть Φ – семейство всех треугольников на плоскости (треугольники рассматриваются вместе с внутренностью). Для каждого $A \in \Phi$ через $r(A)$ обозначим радиус вписанного в треугольник A круга. Проверить, что функция множества r счётно полуаддитивна на Ф. Будет ли r конечно-аддитивной мерой на Φ?

2.2.2. Внешняя мера

Пусть Ω – множество с заданной на нём алгеброй подмножеств $\mathbf{A}$ и счётно-аддитивной мерой μ. Как мы уже упоминали, наиболее естественной областью определения для счётно-аддитивной меры была бы не алгебра, а σ-алгебра множеств. Поэтому было бы очень хорошо уметь доопределять счётно-аддитивную меру на σ-алгебру, порождённую алгеброй $\mathbf{A}$. Первая приходящая на ум идея такого продолжения – действовать по аналогии с теоремой 2 предыдущего параграфа. А именно, рассмотреть дизъюнктные счётные объединения множеств из $\mathbf{A}$. Если все такие множества снова лежат в $\mathbf{A}$, то мы с самого начала имеем дело с σ-алгеброй. В противном случае меру таких объединений определим как сумму мер составных частей. Можно обосновать корректность такого определения, но в отличие от упомянутой теоремы 2 класс множеств, на который мы продолжим таким образом меру, ещё не будет σ-алгеброй. Более того, он будет неустойчив по отношению к операции перехода к дополнению, то есть даже перестаёт быть алгеброй! Следовательно, дальше нужно как-то определить меру на дополнениях полученных множеств. А что тогда делать с объединениями этих дополнений? Хотя эту идею в принципе и можно реализовать (некоторые замечания на эту тему см. ниже в п. 2.2.4), многих технических трудностей позволяет избежать другой подход, базирующийся на понятии внешней меры. Изобретением этого подхода мы обязаны Лебегу (H. Lebesgue).

Определение. Пусть $A \subset \Omega$ – произвольное множество. *Внешней мерой* множества A называется величина

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_k \in \mathbf{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}.$$

Внешняя мера определена уже на всех подмножествах множества Ω, но на таком широком классе множеств она не обладает даже конечной аддитивностью. В следующем параграфе будет построена σ-алгебра множеств $\Sigma \supset \mathbf{A}$, на которой μ^* будет счётно-аддитивной мерой, чем будет решена задача продолжения меры μ. В настоящем же параграфе мы проведём некоторую подготовительную работу.

Свойства внешней меры:

1. *Монотонность*: если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

2. *Полуаддитивность:* для любых $A, B \subset \Omega$ выполнено неравенство $\mu^*(A \bigcup B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

3. *Счётная полуаддитивность:* если $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$.

4. $\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : B_k \in \mathbf{A}, A \subset \coprod_{k=1}^{\infty} B_k \right\}$.

5. Если $A \in \mathbf{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$, то есть μ^* – это продолжение меры μ.

Доказательство. 1. Для $\mu^*(A)$ инфимум в определении берётся по более широкому семейству наборов $\{A_k\}_1^{\infty}$, чем для $\mu^*(B)$: если $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Инфимум же по более широкому семейству не превосходит инфимума по более узкому.

2. Опять вместо инфимума по всем покрытиям рассмотрим инфимум по более узкому классу:

$$\mu^*(A \bigcup B) \le \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : A_k, B_k \in \mathbf{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\} =$$
$$= \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

3. Здесь аргументация та же, что для 2.

4. Пусть $A \subset \Omega$ – произвольное множество. Обозначим $\inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : B_k \in \mathbf{A}, A \subset \coprod_{n=1}^{\infty} B_k \right\}$ через $\nu(A)$. Согласно утверждению 1 п. 2.1.1, для любого набора $A_k \in \mathbf{A}$, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, найдётся дизъюнктный набор $B_k \in \mathbf{A}$, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, подчиняющийся условию $B_k \subset A_k$. Для этого набора $\mu(B_k) \le \mu(A_k)$ и, соответственно, $\sum_1^{\infty} \mu(B_k) \le \sum_1^{\infty} \mu(A_k)$. Следовательно, $\nu(A) \le \mu^*(A)$. Обратное неравенство следует из того, что инфимум в определении $\nu(A)$ берётся по более узкому классу множеств, чем в определении внешней меры.

5. Пусть $A \in \mathbf{A}$, $A_k \in \mathbf{A}$ и $A \subset \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$. Положим $B_k = A \bigcap A_k$. Тогда $B_k \in \mathbf{A}$, $A = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$ и $\mu(B_k) \le \mu(A_k)$. Воспользуемся счётной аддитивно-

стью меры μ: $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$. Перейдя к инфимуму по всем таким наборам $\{A_k\}_1^{\infty}$, получаем неравенство $\mu(A)\le\mu^*(A)$. Обратное неравенство получим, если в определение внешней меры подставим следующий конкретный набор $\{A_k\}_1^{\infty}$: $A_1=A$, а в качестве остальных A_k возьмём пустые множества. □

По аналогии с упражнениями 4-6 п. 2.1.5 введём на семействе всех подмножеств множества Ω *псевдометрику* ρ, *порождённую внешней мерой*: $\rho(A,B)=\mu^*(A\Delta B)$.

Свойства псевдометрики ρ:

1. Для любых $A,B,C\subset\Omega$ выполнено неравенство треугольника: $\rho(A,C)\le\rho(A,B)+\rho(B,C)$ (этим обосновывается законность употребления термина «псевдометрика» по отношению к ρ).
2. $|\mu^*(A)-\mu^*(B)|\le\rho(A,B)$ для любых $A,B\subset\Omega$. В частности, внешняя мера непрерывна по отношению к ρ.
3. $\rho(A,B)=\rho(\Omega\setminus A,\Omega\setminus B)$, то есть переход к дополнению – это изометрия.
4. $\rho(A_1\cap A_2,B_1\cap B_2)\le\rho(A_1,B_1)+\rho(A_2,B_2)$.
5. $\rho(\bigcup\limits_{n\in M}A_n,\bigcup\limits_{n\in M}B_n)\le\sum\limits_{n\in M}\rho(A_n,B_n)$ для любых конечных или счётных наборов множеств $A_n,B_n\subset\Omega$.

Доказательство. Для каждого из перечисленных свойств выпишем соотношения, из которых оно следует:

1. $A\Delta C\subset(A\Delta B)\cup(B\Delta C)$;
2. $A\subset B\cup(A\Delta B)$, $B\subset A\cup(A\Delta B)$;
3. $(\Omega\setminus A)\Delta(\Omega\setminus B)=A\Delta B$;
4. $\left(\bigcap\limits_{n\in M}A_n\right)\Delta\left(\bigcap\limits_{n\in M}B_n\right)\subset\bigcup\limits_{n\in M}(A_n\Delta B_n)$;
5. $\left(\bigcup\limits_{n\in M}A_n\right)\Delta\left(\bigcup\limits_{n\in M}B_n\right)\subset\bigcup\limits_{n\in M}(A_n\Delta B_n)$.

Упражнения

1. Восстановите подробное доказательство счётной полуаддитивности внешней меры.

2. $\rho(\bigcap_{n\in M} A_n, \bigcap_{n\in M} B_n) \le \sum_{n\in M} \rho(A_n, B_n)$ для любых конечных или счётных наборов множеств $A_n, B_n \subset \Omega$.
3. Функция $(A,B) \to A \bigcap B$ непрерывна как функция двух переменных по отношению к псевдометрике ρ.

Множество A называется ρ-*пренебрежимым*, если $\rho(A,\varnothing) = 0$.

Выведите следующие свойства пренебрежимых множеств:

4. A является ρ-пренебрежимым в том и только том случае, если $\mu^*(A) = 0$;
5. Если $A \subset B$ и B ρ-пренебрежимо, то A также ρ-пренебрежимо;
6. Конечное или счётное объединение ρ-пренебрежимых множеств ρ-пренебрежимо.

2.2.3. Продолжение меры с алгебры на σ-алгебру

Пусть, как и в предыдущем пункте, Ω – множество с заданной на нём алгеброй подмножеств $\mathbf{A}$ и счётно-аддитивной мерой μ. Множество $A \subset \Omega$ назовём *измеримым*, если оно принадлежит замыканию по ρ семейства $\mathbf{A}$. Семейство всех измеримых подмножеств множества Ω обозначим через Σ. Более подробно: $A \in \Sigma$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in \mathbf{A}$, что $\rho(A,B) < \varepsilon$. Очевидно, $\mathbf{A} \subset \Sigma$. Отметим, что класс измеримых множеств зависит не только от исходной алгебры $\mathbf{A}$, но и от меры μ. Если нужно подчеркнуть, что рассматриваемые измеримые множества порождены именно мерой μ, их называют не просто измеримыми, а μ- измеримыми.

Пример. Если множество A ρ-пренебрежимо (то есть $\rho(A,\varnothing) = 0$ или, эквивалентно, $\mu^*(A) = 0$), то A измеримо.

Лемма 1. Пусть $A \subset \Omega$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in \Sigma$, что $\rho(A,B) < \varepsilon$. Тогда $A \in \Sigma$.

Доказательство. Можно просто сослаться на то, что замыкание множества – это замкнутое множество. Можно расписать и подробнее. Выберем $B \in \Sigma$ с $\rho(A,B) < \frac{\varepsilon}{2}$. По определению измеримого множества для этого B существует $C \in \mathbf{A}$ с $\rho(B,C) < \frac{\varepsilon}{2}$. По неравенству треугольника $\rho(A,C) < \varepsilon$. □

Лемма 2. Объединение счетного числа элементов алгебры $\mathbf{A}$ измеримо.

Доказательство. Пусть $A_n \in \mathbf{A}$ – дизъюнктная последовательность, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu(\Omega)$, то ряд сходится, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n, что $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Обозначим $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ через B. Имеем: $B \in \mathbf{A}$ и $\rho(A,B) = \mu^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Чтобы свести случай произвольной последовательность множеств $A_n \in \mathbf{A}$ к уже разобранному, достаточно применить утверждение 1 п. 2.1.1. □

Теорема 1. Семейство Σ всех измеримых подмножеств множества Ω образует σ-алгебру.

Доказательство. Во-первых, $\Omega \in \Sigma$, так как $\Omega \in \mathbf{A}$. Далее, пусть $A \in \Sigma$, а $A_n \in \mathbf{A}$ – последовательность, аппроксимирующая A: $\rho(A, A_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\Omega \setminus A_n \in \mathbf{A}$ и $\rho(\Omega \setminus A, \Omega \setminus A_n) = \rho(A, A_n) \to 0$. То есть $\Omega \setminus A \in \Sigma$. Осталось проверить устойчивость по отношению к операции счётного объединения. Пусть $A_n \in \Sigma$, $n = 1,2,\ldots$. Выберем множества $B_n \in \mathbf{A}$ таким образом, чтобы выполнялась оценка $\rho(A_n, B_n) \le \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ – это измеримое множество, аппроксимирующее $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ с точностью до ε: $\rho(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n, B_n) = \varepsilon$. □

Теорема 2. Ограничение внешней меры μ^* на σ-алгебру Σ счётно-аддитивно.

Доказательство. Докажем вначале конечную аддитивность внешней меры на Σ. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$ – дизъюнктная пара, $\varepsilon > 0$. По определению измеримого множества существуют $B_1, B_2 \in \mathbf{A}$, для которых $\rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) < \varepsilon$. Множества B_j могут пересекаться между собой, но это пересечение не может быть большим. Действительно, по свойству 4 псевдометрики ρ

$$\mu(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) = \rho(\varnothing, B_1 \cap B_2) = \rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \le$$
$$\le \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) \le \varepsilon.$$

Воспользуемся теперь свойствами 2 и 5 функции ρ:

$$\left|\mu^*(A_1 \cup A_2) - \left(\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)\right)\right| \le \left|\mu(B_1 \cup B_2) - \left(\mu(B_1) + \mu(B_2)\right)\right| + 2\varepsilon =$$

$$= \mu(B_1 \cap B_2) + 2\varepsilon \le 3\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε равенство $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, а с ним и конечная аддитивность доказаны.

Для завершения доказательства воспользуемся теоремой 4 п. 2.2.1: конечно-аддитивная мера на полукольце с единицей (а значит, и на σ-алгебре, так как σ-алгебра – тоже полукольцо), подчиняющаяся условию счётной полуаддитивности, автоматически счётно-аддитивна.[1] □

Итак, мы построили продолжение меры μ до счётно-аддитивной меры, заданной на σ-алгебре $\Sigma \supset \mathbf{A}$. Таким образом, одновременно доказано существование такого продолжения на σ-алгебру, порождённую алгеброй $\mathbf{A}$. Соединив это с результатами предыдущего параграфа, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Любая счётно-аддитивная мера, заданная на полукольце с единицей, продолжается до счётно-аддитивной меры, заданной на σ-алгебре, порождённой этим полукольцом. □

Полученное продолжение меры на σ-алгебру μ-измеримых множеств мы будем обозначать той же буквой, что и исходную меру. То есть, по определению, $\mu(A) = \mu^*(A)$ для $A \in \Sigma$. Единственность продолжения и другие полезные свойства описанной конструкции читатель найдёт в нижеприведенных упражнениях.

Упражнения

1. Пусть Ω – множество с заданной на нём алгеброй подмножеств $\mathbf{A}$ и счётно-аддитивной мерой μ; Σ_1 – σ-алгебра, порождённая алгеброй $\mathbf{A}$, μ_1 – некоторое счётно-аддитивное продолжение меры μ на Σ_1. Тогда $\mu_1(A) \le \mu^*(A)$ для любого $A \in \Sigma_1$.
2. Пусть на некоторой алгебре множеств $\widetilde{\Sigma}$ заданы две конечно-аддитивные меры μ_1 и μ_2, $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ и $\mu_1(A) \le \mu_2(A)$ для любого $A \in \widetilde{\Sigma}$. Тогда меры μ_1 и μ_2 совпадают.
3. Из предыдущих двух упражнений вывести единственность счётно-аддитивного продолжения с алгебры на порождённую ею σ-алгебру. Отсюда вывести единственность продолжения в теореме 3.
4. Докажите единственность продолжения на любую σ-алгебру, лежащую между Σ_1 и Σ.

---

[1] Если математик в понедельник нашёл пустой чайник, набрал воду, закипятил её и заварил чай, то во вторник для приготовления чая он вначале выльет всю воду из чайника, чтобы свести задачу к предыдущей. Мы действовали похожим образом. Мера уже задана на σ-алгебре. Чтобы получить счётную аддитивность, мы сводим к критерию, где мера задана на полукольце и где в доказательстве нужно продолжать меру с полукольца на алгебру.

5. Пополнение пространства с мерой $(\Omega, \Sigma_1, \mu^*)$ совпадает с пространством (Ω, Σ, μ^*).
6. Пусть $(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ – полное пространство с мерой. Показать, что семейство Σ измеримых подмножеств, построенное для $(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ по описанной в настоящем параграфе схеме, будет совпадать с $\mathbf{A}$.

2.2.4. Теорема о монотонном классе множеств

В настоящем параграфе мы углубим наше представление об устройстве измеримых множеств и докажем одну теорему, которая пригодится нам в п. 4.4.4.

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, полученное, как описано выше, продолжением меры μ с некоторого полукольца с единицей $\Phi \subset \Sigma$. То есть по полукольцу была построена порождённая им алгебра $\mathbf{A}(\Phi)$, по алгебре – внешняя мера μ^*, по внешней мере – класс измеримых множеств (это и есть наше Σ) и мера на Σ определена равенством $\mu(A) = \mu^*(A)$. Обозначим через Φ_1 семейство всех множеств, представимых в виде объединения конечного или счётного дизъюнктного набора элементов полукольца Φ. Через Φ_2 обозначим семейство всех множеств, представимых в виде пересечения убывающей последовательности множеств семейства Φ_1. Поскольку семейство измеримых множеств Σ – это σ- алгебра, Φ_1 и Φ_2 состоят из измеримых множеств.

Утверждение 1. Класс множеств Φ_1 устойчив по отношению к операции пересечения конечного числа множеств и к операции объединения конечного или счётного дизъюнктного набора множеств.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ – два произвольных элемента семейства Φ_1, записанные как соответствующие счётные объединения дизъюнктных наборов элементов полукольца Φ (чтобы избежать отдельного рассмотрения конечных представлений, напомним, что какие-то из множеств A_k, B_k могут быть пустыми). Тогда пересечение множеств A и B также записывается как счётное дизъюнктное объединение элементов полукольца Φ: $A \bigcap B = \bigcup_{k,j=1}^{\infty} (A_k \bigcap B_j) \in \Phi_1$.

Далее, пусть $A_n = \coprod_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \in \Phi_1$ записаны как соответствующие дизъюнктные объединения и сами дизъюнктны. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \coprod_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k} \in \Phi_1$. □

Утверждение 2. Для любого множества $A \subset \Omega$

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \Phi_1 \text{ и } B \supset A\}.$$

Доказательство. Каждый элемент алгебры $\mathbf{A}$ как конечное дизъюнктное объединение элементов полукольца Φ – это элемент семейства Φ_1. Следовательно, и счётное дизъюнктное объединение элементов алгебры $\mathbf{A}$ лежит в Φ_1. Остаётся воспользоваться свойством 4 внешней меры (п. 2.2.2), с заменой $\coprod_{k=1}^{\infty} B_k$ на B. □

Утверждение 3. Для любого множества $A \subset \Omega$ существует такое множество $B \in \Phi_2$, что $A \subset B$ и $\mu^*(A) = \mu(B)$.

Доказательство. По предыдущему утверждению для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $B_n \in \Phi_1$, $B_n \supset A$ с $\mu(B_n) < \mu^*(A) + 1/n$. Не нарушая общности, можно считать, что B_n образуют убывающую цепочку множеств (иначе заменим B_n на $B_n' = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$). Пересечение этой убывающей цепочки и будет требуемым множеством. □

Определение. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой. Семейство $\mathrm{M} \subset \Sigma$ называется *монотонным классом множеств*, если оно подчиняется следующим аксиомам:

A. Если $A, B \in \mathrm{M}$, $A \bigcap B = \varnothing$, то $A \bigcup B \in \mathrm{M}$.

B. Если $A, B \in \mathrm{M}$, $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathrm{M}$.

C. Если $A, B \in \mathrm{M}$, $A \subset B$ и $\mu(B) = 0$, то $A \in \mathrm{M}$.

D. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathrm{M}$ – возрастающая цепочка множеств, то $\bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathrm{M}$.

Отметим, что из аксиомы A следует, что монотонный класс устойчив относительно операции объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств. Отсюда, применив D, выводим, что монотонный класс устойчив относительно объединения счётного дизъюнктного набора множеств.

Теорема (теорема о монотонном классе множеств). Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой, полученное, как описано в разделе 2.2, продолжением меры μ с некоторого полукольца с единицей $\Phi \subset \Sigma$. Пусть, далее, $\mathrm{M} \subset \Sigma$ – монотонный класс множеств, содержащий все элементы полукольца Φ. Тогда $\mathrm{M} = \Sigma$.

Доказательство. Поскольку $\Omega \in \mathrm{M} \subset \Sigma$, то по аксиоме B монотонного класса вместе с каждым своим элементом A класс M содержит и дополнение $\Omega \setminus A$. Перейдя в аксиоме D к дополнениям, получаем устойчивость класса M к операции пересечения убывающей цепочки множеств.

Введённые в начале параграфа семейства Φ_1 и Φ_2 лежат в M. Согласно утверждению 3, для любого множества $A \in \Sigma$ меры 0 существует такое множество $B \in \Phi_2 \subset \mathrm{M}$, что $A \subset B$ и $\mu(B) = 0$. Следовательно, по аксиоме C, любое множество A меры 0 – это элемент класса M. Наконец, рассмотрим произвольное $A \in \Sigma$. Снова воспользуемся утверждением 3 и выберем такое $B \in \mathrm{M}$, что $A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$. Тогда $C = B \setminus A$ – это множество меры 0; следовательно, $C \in \mathrm{M}$. Осталось применить аксиому B и получить, что $A = B \setminus C \in \mathrm{M}$. □

Упражнения

1. Класс Φ_1 – это семейство всех множеств, представимых в виде объединения конечного или счётного (не обязательно дизъюнктного) набора элементов алгебры $\mathbf{A}$.
2. Класс Φ_1 – это семейство всех множеств, представимых в виде объединения конечного или счётного (не обязательно дизъюнктного) набора элементов полукольца Φ.
3. Класс множеств Φ_1 устойчив по отношению к операции объединения конечного или счётного числа множеств (возможно, пересекающихся).
4. Класс множеств Φ_2 устойчив по отношению к операции пересечения конечного или счётного числа множеств .
5. Обоснуйте включение $\Phi_2 \subset \mathrm{M}$ в доказательстве последней теоремы.
6. Где при завершении доказательства теоремы использовалось условие $A \in \Sigma$ (то есть измеримость)? Нельзя ли таким же способом доказать, что любое подмножество $A \subset \Omega$ принадлежит M?
7. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим полукольцо (точнее, даже алгебру) Φ множеств, состоящую из конечных множеств и дополнений к ним. Докажите, что класс Φ_1 в этом случае не будет алгеброй множеств.
8. Опишите в условиях предыдущего упражнения класс Φ_2. Докажите, что в этом случае Φ_2 будет σ-алгеброй множеств.
9. Пусть Ω – множество, состоящее из четырёх точек, $\Sigma = 2^{\Omega}$, мера множества определяется как количество элементов этого множества (*«считающая мера»*). Докажите, что семейство M всех подмножеств, состоящих из чётного числа элементов, – это монотонный класс, не совпадающий с Σ. Не противоречит ли этот пример последней теореме?
10. Докажите следующий вариант теоремы о монотонном классе множеств: пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой, $\Phi \subset \Sigma$ – полукольцо с

единицей, порождающее σ-алгебру Σ. Пусть, далее, $\mathrm{M} \subset 2^{\Omega}$ – монотонный класс множеств, содержащий все элементы полукольца Φ. Тогда $\mathrm{M} \supset \Sigma$.

2.3. Меры на отрезке и на оси

2.3.1. Мера Лебега на отрезке

Как мы уже упоминали, длина – это мера на семействе отрезков. В настоящем параграфе мы применим общую теорию продолжения меры к этому исторически первому и базовому для всей теории меры примеру.

Пусть $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ – это конечный открытый невырожденный отрезок. *Подотрезком* отрезка Ω будем называть любой открытый, замкнутый или полуоткрытый отрезок, лежащий в Ω, то есть любое подмножество вида $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b) или $(a,b]$, содержащееся в Ω. В частности, пустое множество, равно как и все одноточечные множества, – это подотрезки.

Семейство всех подотрезков отрезка Ω образует полукольцо множеств, которое мы, как обычно, обозначим буквой Φ. Для любого подотрезка $\Delta \in \Phi$ через $\lambda(\Delta)$ обозначим его длину. То есть $\lambda(\Delta) = b - a$, где a и b – соответственно левый и правый концы отрезка Δ.

Теорема 1. λ – это счётно-аддитивная мера на полукольце Φ.

Доказательство. Согласно критерию счётной аддитивности (теорема 4 п. 2.2.1), нам нужно проверить конечную аддитивность и счётную полуаддитивность меры λ.

Конечная аддитивность. Пусть Δ_k, $k = 1,2,...,n$ – непересекающиеся подотрезки, выписанные в порядке возрастания, a_k, b_k – концы соответствующих Δ_k и пусть $\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = \Delta \in \Phi$. Тогда a_1 и b_n совпадают с концами отрезка Δ и $a_{k+1} = b_k$, $k = 1,2,...,n-1$. Имеем $\sum_1^n \lambda(\Delta_k) = \sum_1^n (b_k - a_k) = b_n - a_1 = \lambda(\Delta)$.

Счётная полуаддитивность. Пусть $\Delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$; $\Delta_k, \Delta \in \Phi$, a и b – концы отрезка Δ, а a_k, b_k – концы соответствующих Δ_k. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и, немного отступив от концов исходных отрезков, введём вспомогательные отрезки $\Delta' \subset \Delta$ и $\Delta_k' \supset \Delta_k$ так, чтобы Δ' был замкнутым, а Δ_k' были открытыми подмножествами отрезка Ω, и

$$\lambda(\Delta) - \lambda(\Delta') + \sum_{1}^{\infty}\big(\lambda(\Delta_k') - \lambda(\Delta_k)\big) < \varepsilon, \qquad (1)$$

то есть чтобы концы были передвинуты не слишком сильно.

Для новых отрезков по-прежнему выполнено включение $\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta'_k$, но теперь это включение уже несёт другую смысловую нагрузку: это так хорошо нам знакомое открытое покрытие компакта! Выберем конечное подпокрытие, то есть возьмём такое конечное множество индексов $N \subset \mathbb{N}$, что $\Delta' \subset \bigcup_{k \in N} \Delta'_k$. Ввиду конечной аддитивности $\lambda(\Delta') \le \sum_{k \in N} \lambda(\Delta'_k) \le \sum_{1}^{\infty} \lambda(\Delta'_k)$. Воспользовавшись условием (1), получим, что $\lambda(\Delta) \le \sum_{1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) + \varepsilon$. Ввиду произвольности ε счётная полуаддитивность доказана. □

Применив к мере λ схему продолжения мер, изложенную в разделе 2.2, мы получим такую счётно-аддитивную меру (будем её тоже обозначать буквой λ), заданную на σ-алгебре $\Sigma \supset \Phi$, что $\lambda\big((a,b)\big) = b - a$ для любого отрезка (a,b). Элементы σ-алгебры Σ называются множествами, *измеримыми по Лебегу*, а построенная мера λ на Σ называется *мерой Лебега.*

Пока что определение меры Лебега дано в несколько зашифрованном виде, с отсылкой к общей схеме продолжения мер. Цель нижеперечисленных замечаний – расписать это определение максимально подробным и понятным способом.

Замечания

1. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset \Omega$ (напомним, что это – общий вид открытого подмножества отрезка Ω). Тогда A измеримо по Лебегу, и $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k|$.
2. Множество, состоящее из одной точки, измеримо и имеет нулевую меру Лебега. Следовательно, мера Лебега любого конечного или счётного множества также равна нулю.
3. Внешняя мера любого множества $A \subset \Omega$ может быть вычислена по правилу $\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \supset A \right\}$.

4. Если $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]\supset A$, то каждый отрезок $[a_k,b_k]$ может быть заменён чуть большим открытым отрезком так, чтобы сумма длин изменилась сколь угодно мало. То есть в вышеприведенной формуле могут с тем же успехом использоваться вместо замкнутых открытые отрезки:

$$\lambda^*(A)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|c_k-d_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty}(c_k,d_k)\supset A\right\}=\inf\{\lambda(B): B \text{ открыто, и } B\supset A\}=$$

$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-a_k| : \coprod_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)\supset A\right\}. \qquad (2)$$

5. По определению, подмножество A отрезка Ω измеримо по Лебегу, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое множество B, имеющее вид конечного объединения отрезков, что $\lambda^*(A\Delta B)<\varepsilon$.
6. Для любого измеримого по Лебегу множества A, по определению продолжения меры, $\lambda(A)=\lambda^*(A)$.
7. Внешняя мера и, следовательно, мера Лебега множества A не зависят от отрезка $\Omega\supset A$, с которого начиналось построение. Поэтому в дальнейшем мы можем не уточнять, на каком именно отрезке рассматриваются все множества.
8. Мера Лебега множества сохраняется при параллельном переносе множества.
9. Если $\lambda^*(A)=0$, то A измеримо по Лебегу, и $\lambda(A)=0$ (пример в начале п. 2.2.3). Такие множества называют *пренебрежимыми,* или *множествами меры 0*.
10. Поскольку любое открытое множество на отрезке измеримо по Лебегу, то и любое борелевское подмножество отрезка измеримо по Лебегу (Σ – это σ-алгебра, содержащая все открытые множества, а $\mathfrak{B}$, по определению, – **наименьшая** σ-алгебра, содержащая все открытые множества). В частности, все замкнутые множества, множества классов G_δ, F_σ и т. д. измеримы по Лебегу.

Теорема 2. Множество $A\subset\Omega$ измеримо по Лебегу в том и только том случае, если оно представимо в виде разности $B\setminus C$ множества B класса G_δ и множества $C\subset B$ с $\lambda^*(C)=0$.

Доказательство. Поскольку множества класса G_δ, равно как и пренебрежимые множества, измеримы, разности таких множеств также измеримы. Поэтому в доказательстве нуждается только обратное утверждение. Итак, пусть подмножество $A\subset\Omega$ измеримо по Лебегу. По определению, $\lambda(A)=\lambda^*(A)$. Согласно формуле (2) для внешней меры, для любого $n\in\mathbb{N}$ существует открытое множество $B_n\supset A$ с $\lambda(B_n)<\lambda(A)+1/n$. Положим $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Множество B, как и требуется, принадлежит классу G_δ и содержит множество A. Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(A) \le \lambda(B) \le \lambda(B_n) < \lambda(A) + 1/n$. Следовательно, $\lambda(A) = \lambda(B)$. Остаётся положить $C = B \setminus A$. □

Переходом к дополнениям получаем следующее:

Следствие. Множество $A \subset \Omega$ измеримо по Лебегу в том и только том случае, если оно представимо в виде дизъюнктного объединения множества класса F_σ и пренебрежимого множества. □

Так как борелевские множества на отрезке измеримы по Лебегу, к ним также можно применять предыдущую теорему и следствие из неё. Получаем, что, хотя борелевские подмножества отрезка и не исчерпываются множествами классов F_σ и G_δ, они не сильно отличаются от множеств этих классов. Более того, сами множества классов F_σ и G_δ могут быть получены друг из друга добавлением или вычитанием пренебрежимых множеств.

Отмеченные выражения измеримых множеств через борелевские классы и пренебрежимые множества дают полезную информацию об устройстве меры Лебега и множеств, измеримых по Лебегу. Однако не следует чрезмерно обольщаться кажущейся простотой полученной картины: пренебрежимыми множествами можно пренебрегать с точки зрения меры, но во многих других смыслах они могут быть устроены весьма непросто.

Пример. Множество нулевой меры, имеющее мощность континуума.

Напомним, что канторово множество – это замкнутое подмножество K отрезка $[0,1]$, состоящее из чисел, чьи разложения в троичную дробь либо вообще не содержат цифры 1, либо содержат её только в качестве последней цифры разложения. Построить канторово множество можно с помощью следующей процедуры пошагового выбрасывания из отрезка $[0,1]$ лишних частей. На первом шаге выбрасывается множество $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Обозначим $K_1 = [0,1] \setminus \Delta_1^1$. Множество K_1 состоит из двух отрезков длины $1/3$. На каждом из этих отрезков отступим от концов на одну треть их длины и выбросим получившиеся в середине подотрезки $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ и $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Обозначим $K_2 = K_1 \setminus (\Delta_1^2 \cup \Delta_2^2)$. На n-ном шаге множество K_n будет состоять из 2^n отрезков длины $1/3^n$, и для получения K_{n+1} из середины каждого из составляющих K_n отрезков удаляется его треть. Канторово множество совпадает с $\bigcap_{1}^{\infty} K_n$. Мера множества K_n – это сумма мер составляющих его отрезков, то есть $\lambda(K_n) = 2^n / 3^n$, что стремится к нулю при $n \to \infty$. Поскольку $\lambda(K) \le \lambda(K_n)$ при всех n, $\lambda(K) = 0$.

Континуальность канторова множества можно доказывать по-разному. Вот один из простейших способов. K – подмножество отрезка, следовательно, $\operatorname{card} K$ не превосходит мощности континуума. Для доказательства обратного неравенства построим инъективное отображение множества континуальной мощности в K. Каждой двоичной дроби $x \in (0,1)$ поставим в соответствие троичную дробь $f(x)$, оставив нули дроби x без изменения, а единицы заменив двойками. Функция f и будет требуемым инъективным отображением. Другим доказательством континуальности K будет упражнение 12 п. 1.3.5.

Упражнения

1. Вычислите меры Лебега следующих множеств:
   A. $[1,3] \bigcup [5,6]$;

   B. $(2,4) \setminus \left([1,3] \bigcup [5,6]\right)$;

   C. $\left((2,4) \setminus [1,3]\right) \bigcup [5,6]$;

   D. $[1,4] \Delta [2,6]$;

   E. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$;

   F. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right]$;

   G. Множества рациональных чисел на отрезке $[0,1]$;

   H. Множества иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$.
2. Пусть $A \subset [0,1]$ и дополнение к A имеет нулевую меру. Тогда A плотно в $[0,1]$.
3. Для любого $A \subset [0,1]$ рассмотрим на отрезке функцию $f(x) = \lambda^* \left(A \bigcap [0,x]\right)$. Докажите непрерывность функции f.
4. Постройте на отрезке $[0,1]$ нигде не плотное множество, имеющее положительную меру Лебега.
5. Постройте множество второй категории на отрезке, имеющее нулевую меру.
6. Мера Лебега атомарна или безатомна?

Докажите, что:

7. Если измеримое множество имеет ненулевую меру Лебега, то его мощность равна мощности континуума.
8. Мощность семейства пренебрежимых множеств на отрезке равна мощности семейства всех подмножеств отрезка. Следовательно (см. упражнение 23 п. 2.1.2), существуют не борелевские пренебрежимые множества.
9. Каждое пренебрежимое множество содержится в пренебрежимом множестве класса G_δ.

Внутренней мерой множества $A \subset \Omega$ называется величина $\mu_*(A) = \sup\{\lambda(B) : B \subset A \text{ и } B \text{ замкнуто}\}$. Докажите, что:

10. $\mu_* \le \mu^*$.
11. Множество $A \subset \Omega$ измеримо по Лебегу в том и только том случае, если $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

2.3.2. Ещё немного терминологии. Смысл термина «почти всюду»

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой. Элементы σ-алгебры Σ будем называть измеримыми множествами. Если же на Ω рассматривается одновременно несколько σ-алгебр и нужно уточнить, о какой именно σ-алгебре идёт речь, то элементы σ-алгебры Σ будем называть Σ-*измеримыми* множествами. Скажем, на отрезке наряду с измеримыми по Лебегу множествами есть ещё σ-алгебра $\mathfrak{B}$ борелевских множеств. В соответствии с введённой терминологией, борелевские множества можно называть ещё $\mathfrak{B}$-измеримыми, или измеримыми по Борелю.

Напомним, что множество $A \subset \Omega$ называется пренебрежимым (см. п. 2.1.5), если A содержится в измеримом множестве нулевой меры. Если (Ω, Σ, μ) – полное пространство с мерой (как, скажем, отрезок с мерой Лебега), то определение упрощается: термины «пренебрежимое множество» и «множество меры 0» становятся синонимами. Множество называется *множеством полной меры*, если его дополнение пренебрежимо.

Предложение P, касающееся точек множества Ω, называется выполненным *для почти всех* $t \in \Omega$, или выполненным *почти всюду*, если множество тех t, где предложение P не выполнено, пренебрежимо. Например, функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ равна нулю почти всюду (сокращённая запись – $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$), если множество тех t, где $f(t) \ne 0$, пренебрежимо. $f \overset{\text{п.в.}}{\ge} g$, если множество тех t, где $f(t) < g(t)$, пренебрежимо, и т. д. Рассуждения и оценки, проводимые почти всюду, гораздо удобнее обычных поточечных рассуждений. Так, на отрезке (а отрезок по умолчанию мы предполагаем наделённым мерой Лебега), если у функции конечное или счётное число точек разрыва, в этих точках мы часто можем не определять функцию или определять наиболее удобным нам в данный момент способом, ведь для почти всех значений аргумента это никак не скажется на функции.

Отметим два важных свойства, вытекающих непосредственно из свойств пренебрежимых множеств (п. 2.1.5).

– Пусть предложение P_1 влечёт предложение P_2, и P_1 выполнено почти всюду. Тогда и P_2 выполнено почти всюду.
– Пусть P_j, $j \in M$ – конечный или счётный набор предложений, а P – предложение, состоящее в одновременном выполнении всех предложений P_j. Тогда если все P_j выполнены почти всюду, то предложение P выполнено почти всюду.

Упражнения

1. Докажите два последних утверждения.
2. Распишите, в чём заключается отрицание утверждения $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} g$. Будет ли это отрицание совпадать с утверждением $f \overset{\text{п.в.}}{<} g$?
3. Могут ли одновременно выполняться утверждения $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} g$ и $f \overset{\text{п.в.}}{<} g$?
4. Если $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} g$ и $g \overset{\text{п.в.}}{\geq} h$, то $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} h$.
5. Если $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} g$ и одновременно $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$, то $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$.
6. Пусть две непрерывные функции на отрезке совпадают почти всюду по мере Лебега. Тогда эти функции совпадают во всех точках.
7. Сохраняется ли предыдущее утверждение в силе при замене меры Лебега на произвольную счётно-аддитивную меру, заданную на борелевских подмножествах отрезка?

2.3.3. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции

Для доказательства теорем существования нередко используется следующая идея: вместо того, чтобы конструировать требуемый объект явно, доказывают, что таких объектов в том или ином смысле «много». Ну а уж если их много, то они точно существуют. Так, простейшее доказательство существования трансцендентных чисел получается из соображений мощности: алгебраических чисел счётное число, следовательно, трансцендентные не просто существуют, а составляют «основную массу» всех чисел. В упражнении 12 п. 2.1.2 показано, как таким же образом для доказательства теорем существования (в данном случае – для доказательства существования точек непрерывности у поточечного предела последовательности непрерывных функций) можно использовать множества первой и второй категории. В каждом таком рассуждении главное – это правильно выбрать, каким понятием «малости» следует воспользоваться. В настоящем параграфе в качестве первого неочевидного приложения теории меры будет доказано существование точек дифференцируемости у любой монотонной функции. Точнее, будет доказано больше.

Теорема. Каждая монотонная функция на отрезке дифференцируема почти всюду, то есть множество точек, где функция не дифференцируема, – это множество лебеговой меры 0.

Чтобы читатель мог по достоинству оценить глубину и изящество данного результата, мы настоятельно советуем отложить на время книжку и подумать над этим утверждением хотя бы пару дней. Честно признаюсь, что, хотя в своё время меня эта задача крепко «зацепила», решить самостоятельно мне её не удалось. Зато потом у меня был хороший стимул для изучения теории меры, и преподавателю не нужно было меня убеждать в важности этой науки.

Определение. Пусть g – вещественная функция, заданная на отрезке $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. Внутренняя точка x отрезка Ω называется *невидимой справа для функции* g, если существует такое $t > x$, $t \in \Omega$, что $g(x) < g(t)$.

Лемма 1 (лемма Ф. Рисса о светотени). Пусть g – полунепрерывная сверху функция на Ω. Тогда множество A всех точек, невидимых справа для функции g, открыто. Более того, если A записать каноническим образом как дизъюнктное объединение подотрезков $\Delta_k = (a_k, b_k)$, то $g(a_k + 0) \le g(b_k)$. (Под $g(a_k + 0)$ понимается верхний предел функции $g(t)$ при $t \to a_k + 0$.)

Доказательство. Если x_0 – точка, невидимая справа, $t_0 > x_0$ и $g(x_0) < g(t_0)$, то ввиду полунепрерывности у точки x_0 есть целая окрестность, где $g(x) < g(t_0)$. Вся эта окрестность будет состоять из точек, невидимых справа. Итак, A – открытое множество. Пусть теперь $\Delta = (a, b)$ – один из отрезков, составляющих A, то есть $(a,b) \subset A$, $a, b \notin A$. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует точка $x_0 \in \Delta$, для которой $g(x_0) > g(b)$. Рассмотрим множество D тех $x \in [x_0, b)$, для которых $g(x) \ge g(x_0)$. D – это непустое замкнутое ограниченное множество. Обозначим самую правую точку множества D через x_1. Так как x_1 невидима справа, в Ω найдётся точка $t_0 > x_1$ с $g(t_0) > g(x_1)$. Ясно, что t_0 не может лежать правее точки b, иначе b была бы также невидимой справа: $g(t_0) > g(x_1) \ge g(x_0) > g(b)$. Следовательно, $t_0 \in (x_1, b)$. Но тогда $t_0 \in D$, то есть x_1 – это не самая правая точка множества D. Противоречие. □

Отметим, что по симметрии аналогичное утверждение выполнено для точек, невидимых слева (точка x невидима слева, если существует $t < x$,

$t \in \Omega$, для которого $g(x) < g(t)$), только в концах интервалов, составляющих множество точек, невидимых слева, будет выполнено противоположное условие $g(a_k) \geq g(b_k - 0)$.

Лемма 2 (критерий пренебрежимости). Пусть множество $A \subset \Omega$ обладает следующим свойством: существует такое $\theta \in (0,1)$, что $\lambda^*\left(A \bigcap (a,b)\right) \leq \theta(b-a)$ для любого подотрезка $(a,b) \subset \Omega$. Тогда A пренебрежимо.

Доказательство. Пусть $B = \coprod\limits_{k \in M} \Delta_k$ – произвольное открытое множество, содержащее A, Δ_k – составляющие это множество открытые подотрезки (в конечном или счётном числе). Согласно условию, $\lambda^*(A) = \sum\limits_{k \in M} \lambda^*\left(A \bigcap \Delta_k\right) \leq \theta \sum\limits_{k \in M} \lambda(\Delta_k) = \theta\lambda(B)$. Перейдя к инфимуму по всем таким B, получаем неравенство $\lambda^*(A) \leq \theta\lambda^*(A)$, которое может быть выполнено только при $\lambda^*(A) = 0$. □

Перед началом доказательства основной теоремы ещё несколько вводных замечаний. Термин «возрастающая функция» мы будем использовать в том же смысле, что и «неубывающая функция», то есть мы не будем требовать строгого возрастания. Теорему достаточно доказывать для возрастающих функций: убывающие получаются умножением на минус единицу. Пусть $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – возрастающая функция. Для любой внутренней точки x отрезка Ω определим четыре величины, конечные, или равные $+\infty$:

– правое верхнее производное число $R(x) = \overline{\lim\limits_{t \to x+0}} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$;

– правое нижнее производное число $r(x) = \underline{\lim\limits_{t \to x+0}} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$;

– левое верхнее производное число $L(x) = \overline{\lim\limits_{t \to x-0}} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$;

– левое нижнее производное число $l(x) = \underline{\lim\limits_{t \to x-0}} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$.

Для доказательства теоремы нам нужно показать, что все перечисленные производные числа почти всюду равны между собой и конечны. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для любой возрастающей функции f на отрезке выполнены соотношения:

(1) $R(x) \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$ и

(2) $\quad R(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} l(x).$

Действительно, применив (2) к вспомогательной функции $g(x) = -f(-x)$ и вернувшись к исходной функции, получаем условие $L(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} r(x).$ Сопоставив эти условия с очевидными неравенствами $r(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} R(x)$ и $l(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} L(x),$ получаем, что $R(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} l(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} L(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} r(x) \overset{\text{п.в.}}{\le} R(x),$ то есть все неравенства в этой цепочке в самом деле являются равенствами.

Доказательство теоремы Лебега. Пусть $f : [\omega_1, \omega_2] \to \mathbb{R}$ – возрастающая функция. Так как у монотонной функции разрывы только первого рода, мы для нашего удобства можем считать функцию полунепрерывной сверху. Для этого достаточно переопределить функцию в точках разрыва, положив $f(t) = \overline{\lim\limits_{x \to t}} f(x).$ Проверьте сами, что при таком переопределении множество точек дифференцируемости не изменится, а производные числа изменятся не более чем в счётном числе точек (в точках разрыва f), то есть почти всюду останутся теми же.

Для любого $C > 0$ рассмотрим множество $R_{>C} = \{x \in (\omega_1, \omega_2) : R(x) > C\}.$ Чтобы доказать соотношение $R(x) \overset{\text{п.в.}}{<} \infty,$ нам нужно оценить сверху нулём внешнюю меру множества R_∞ тех точек интервала $(\omega_1, \omega_2),$ где $R(x) = \infty.$ Поскольку $R_\infty \subset R_{>C},$ нам достаточно показать, что $\lambda^*(R_{>C}) \to 0$ при $C \to \infty.$

Пусть $x \in R_{>C}.$ Тогда существует точка $t > x,$ для которой $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} > C,$ или $f(t) - Ct > f(x) - Cx.$ Таким образом, множество $R_{>C}$ состоит из точек, невидимых справа для функции $g(x) = f(x) - Cx.$ По лемме о светотени, $R_{>C}$ содержится в открытом множестве $B = \coprod\limits_{k \in M} (a_k, b_k)$ с $g(a_k + 0) \le g(b_k).$ То есть

$$b_k - a_k \le \frac{1}{C}(f(b_k) - f(a_k + 0)) \le \frac{1}{C}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Отрезки $\big(f(a_k), f(b_k)\big)$ – это непересекающиеся подотрезки отрезка $\big(f(\omega_1), f(\omega_2 - 0)\big).$ Следовательно,

$$\lambda^*(R_{>C}) \le \sum_{k \in M} (b_k - a_k) \le \frac{1}{C} \sum_{k \in M} (f(b_k) - f(a_k)) \le \frac{1}{C}(f(\omega_2 - 0) - f(\omega_1)). \quad (3)$$

Последнее выражение стремится к 0 при $C \to \infty.$

Перейдём к доказательству соотношения $R(x) \overset{\text{п.в.}}{\leq} l(x)$. Обозначим через D множество тех $x \in (\omega_1, \omega_2)$, где $R(x) > l(x)$. Далее, для любой пары рациональных чисел (C, c) с $0 < c < C$ через $D(C, c)$ обозначим множество тех $x \in (\omega_1, \omega_2)$, где одновременно $l(x) < c$ и $R(x) > C$. Поскольку пар рациональных чисел – счётное число, то и выделенных множеств $D(C, c)$ – счётное число. Множество D – это объединение указанных множеств $D(C, c)$, следовательно, для доказательства пренебрежимости множества D достаточно проверить, что все $D(C, c)$ имеют нулевую меру. При этой проверке мы будем опираться на критерий пренебрежимости, доказанный в лемме 2, с $\theta = \dfrac{c}{C}$.

Итак, пусть $(a, b) \subset \Omega$ – произвольный интервал, $x \in D(C, c) \bigcap (a, b)$. Так как $l(x) < c$, существует $t \in (a, x)$, для которого $\dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} < c$. Тогда $f(x) - cx < f(t) - ct$, то есть x – точка, невидимая слева для функции $g(y) = f(y) - cy$ на отрезке (a, b). Применив ещё раз лемму о светотени, получаем, что множество $D(C, c) \bigcap (a, b)$ содержится в конечном или счётном дизъюнктном объединении отрезков $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$, $k \in \mathbb{N}$, и в концах этих отрезков выполнено неравенство $f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k)$.

Условие (3) было доказано для возрастающей функции на любом отрезке. Вспомним, что $D(C, c) \subset R_{>C}$, и применим условие (3) к функции f на отрезке (α_k, β_k):

$$\lambda^*\left(D(C, c) \bigcap (\alpha_k, \beta_k)\right) \leq \lambda^*\left(R_{>C} \bigcap (\alpha_k, \beta_k)\right) \leq \frac{1}{C}\left(f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k)\right) \leq \frac{c}{C}(\beta_k - \alpha_k).$$

Остаётся воспользоваться тем, что по построению

$$D(C, c) \bigcap (a, b) = \bigcup_{k \in N}\left(D(C, c) \bigcap (\alpha_k, \beta_k)\right)$$

и счётной полуаддитивностью внешней меры:

$$\lambda^*\left(D(C, c) \bigcap (a, b)\right) \leq \sum_{k \in N} \lambda^*\left(D(C, c) \bigcap (\alpha_k, \beta_k)\right) \leq \frac{c}{C} \sum_{k \in N} (\alpha_k - \beta_k) \leq \frac{c}{C}(b - a).$$

Мы попали в условия критерия пренебрежимости, следовательно, $\lambda^*\left(D(C, c)\right) = 0$. □

Упражнения

1. Приведите пример непрерывной монотонной функции с плотным множеством точек недифференцируемости.

2. Докажите измеримость по Борелю всех множеств, встречавшихся в доказательстве теоремы о дифференцируемости монотонной функции (множества $R_{>C}$, множества D тех $x \in (\alpha, \beta)$, где $R(x) > l(x)$, и т. д.)
3. Докажите следующую **теорему Фубини о дифференцировании ряда**: если ряд $\sum_1^\infty f_n$ возрастающих функций на отрезке сходится в каждой точке к функции f, то ряд из производных $\sum_1^\infty f_n'$ сходится почти всюду к f'.
4. Пусть A – измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a,b]$. *Плотностью множества A в точке $x \in [a,b]$* называется предел (если он существует) при $\alpha, \beta \to +0$ выражения $\dfrac{\lambda([x-\alpha, x+\beta] \cap A)}{\alpha+\beta}$. Докажите, что для почти всех точек множества A плотность существует и равняется 1. (Теорема Лебега о точках плотности.)

2.3.4. Тонкая задача теории меры. Существование неизмеримых по Лебегу множеств

Тонкая задача теории меры заключается в построении σ-аддитивной меры μ с $\mu([0,1]) = 1$, определённой на семействе **всех** подмножеств отрезка $[0,1]$ и инвариантной относительно сдвигов: если как множество A, так и его сдвиг $A+t$ лежат на отрезке, то $\mu(A) = \mu(A+t)$. В этом параграфе будет показана неразрешимость этой задачи, то есть что не существует меры с указанными свойствами. Излагаемая конструкция принадлежит Витали (G. Vitali).

План рассуждения будет естественным. Мы предположим существование такой меры μ, изучим её свойства и прийдём в результате к противоречию. Вначале отметим, что мера любого одноточечного множества равна 0. Действительно, точки получаются друг из друга сдвигами, значит, их меры равны между собой и равны некоторому числу α. Если бы α было строго больше нуля, то мера всего отрезка была бы бесконечной: на отрезке ведь бесконечно много точек. Следовательно, $\alpha = 0$. Поэтому мы можем отождествить точки 0 и 1: на мерах множеств это не скажется. Таким образом, отрезок можно представлять себе свёрнутым в окружность. Введём на отрезке операцию $+_1$ суммы по модулю 1: $a +_1 b$ равно дробной части числа $a+b$. На окружности этой операции соответствует поворот точки $2\pi a$ против часовой стрелки на угол $2\pi b$. Если $A \subset [0,1]$, $t \in [0,1]$, то вместо обычного сдвига $A+t$ удобнее рассматривать сдвиг $A +_1 t$, соответствующий повороту на окружности, так как здесь не нужно следить, не выпала ли часть множества за пределы отрезка. Очевидно, $\mu(A) = \mu(A +_1 t)$, так как $A +_1 t = \left(A \bigcap [0,1-t) + t\right) \coprod \left(A \bigcap [1-t,1] + t - 1\right)$, то есть множество A разбивается на две части, одна из которых переносится вправо, а другая влево по отрезку $[0,1]$.

Введём на $[0,1]$ следующее отношение эквивалентности: $a \sim b$, если $a - b \in \mathbb{Q}$ (через $\mathbb{Q}$, как обычно, обозначается множество рациональных чисел). В каждом классе эквивалентности выберем по одному элементу. Полученное множество выбранных элементов обозначим буквой E. Отметим, что все множества $E +_1 t$, $t \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1)$ попарно не пересекаются. Действительно, если $E +_1 t$ пересекается с $E +_1 \tau$ в точке x, $t, \tau \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1)$, то элементы $x -_1 t$ и $x -_1 \tau$, лежащие в одном классе эквивалентности, оба принадлежат E, что невозможно по построению. Множеств вида $E +_1 t$ бесконечно много, они получаются друг из друга сдвигами и дизъюнктны, значит, их меры равны между собой и равны нулю. Но $[0,1] = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1)} \left(E +_1 t\right)$, следовательно, $\mu\left([0,1]\right) = 0$. Противоречие. □

Теорема. Существуют неизмеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0,1]$.

Доказательство. Если бы все подмножества отрезка были измеримы по Лебегу, то мера Лебега была бы инвариантной относительно сдвигов σ-аддитивной вероятностной мерой, определённой на семействе всех подмножеств отрезка $[0,1]$. Мы же только что доказали, что меры с такими свойствами не существует. □

Упражнения

1. Найдите место в доказательстве неразрешимости тонкой задачи теории меры, где использовалась аксиома выбора.
2. Приведите пример счётно-аддитивной вероятностной меры, определённой на всех подмножествах отрезка. (Разумеется, она не будет инвариантной относительно сдвигов!)
3. Докажите, что отрезок $[0,1]$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств A, B с $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = 1$. Покажите, что оба эти множества должны быть неизмеримы. Этим будет дано другое доказательство существования неизмеримых множеств.
4. В условиях предыдущего упражнения $\lambda^*(A \bigcap C) = \lambda^*(B \bigcap C) = \lambda(C)$ для любого измеримого по Лебегу множества C.
5. Отрезок $[0,1]$ можно представить в виде объединения континуального числа непересекающихся множеств, имеющих единичную внешнюю меру.

2.3.5. Функция распределения и общий вид борелевской меры на отрезке

Борелевской мерой на топологическом пространстве X называется счётно-аддитивная мера, заданная на σ-алгебре всех борелевских подмножеств пространства X. Скажем, ограничение меры Лебега на систему борелевских подмножеств отрезка $\Omega=[\omega_1,\omega_2]$ будет борелевской мерой на отрезке. В этом параграфе мы установим взаимно-однозначное соответствие между борелевскими мерами на отрезке и возрастающими непрерывными справа функциями на этом отрезке.

Определение. Пусть μ – борелевская мера на отрезке $\Omega=[\omega_1,\omega_2]$. *Функцией распределения* меры μ называется функция $F:\Omega\to\mathbb{R}^+$, определяемая равенством $F(t)=\mu([\omega_1,t])$.

Теорема 1. Функция распределения борелевской меры на отрезке – это (нестрого) возрастающая непрерывная справа функция.

Доказательство. Если $\omega_1\le a<b\le\omega_2$, то $[\omega_1,a]\subset[\omega_1,b]$, и, соответственно, $F(a)=\mu([\omega_1,a])\le\mu([\omega_1,b])=F(b)$. Перейдем к доказательству непрерывности справа. Пусть $t_n\in\Omega$ – убывающая последовательность, стремящаяся к t. Тогда $[\omega_1,t_n]$ – это убывающая последовательность множеств, и $[\omega_1,t]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[\omega_1,t_n]$. Следовательно, $F(t)=\mu([\omega_1,t])=\lim\limits_{n\to\infty}\mu([\omega_1,t_n])=\lim\limits_{n\to\infty}F(t_n)$. □

Теорема 2. Пусть $F:\Omega\to\mathbb{R}^+$ – возрастающая непрерывная справа функция на отрезке $\Omega=[\omega_1,\omega_2]$. Тогда существует единственная борелевская мера μ на $[\alpha,\beta]$, для которой F будет функцией распределения.

Доказательство. Рассуждение будет идти по аналогии с построением меры Лебега. Пусть Φ – полукольцо всех подотрезков отрезка Ω. Определим меру μ на Φ следующими равенствами: $\mu([\omega_1,a])=F(a)$, $\mu([a,b])=F(b)-F(a-0)$ при $a>\omega_1$ (эти две формулы объединяются в одну, если условиться, что $F(\omega_1-0)=0$); $\mu((a,b])=F(b)-F(a)$, $\mu((a,b))=F(b-0)-F(a)$ и $\mu([a,b))=F(b-0)-F(a-0)$.

Эти соотношения выбраны не случайно: именно так должны быть связаны борелевская мера и её функция распределения. Конечная аддитивность так построенной меры проверяется без труда. Для проверки счётной полуаддитивности (откуда будет вытекать и счётная аддитивность) нужно вначале заметить, что мера любого подотрезка совпадает с супремумом мер содержащихся в нём замкнутых подотрезков и с инфимумом мер содержащих его открытых подотрезков. Дальше нужно использовать лемму о конечном покрытии таким же образом, как это делалось при доказательстве теоремы о счётной полуаддитивности меры Лебега на Φ (теорема 1 п. 2.3.1). Для завершения доказательства остаётся воспользоваться теоремой существования и единственности продолжения меры с полукольца с единицей на порождённую им σ-алгебру (теорема 3 и упражнения 1-3 п. 2.2.3). □

Выпишем цепочку простых упражнений, решив которые, читатель самостоятельно получит важную теорему об устройстве монотонных функций: теорему о представлении в виде суммы непрерывной функции и функции скачков.

Упражнения

1. Отображение, ставящее каждой борелевской мере на отрезке в соответствие её функцию распределения, аддитивно, то есть переводит сумму мер в сумму соответствующих функций распределения.

Пусть M – конечное или счётное подмножество отрезка $[\alpha, \beta]$, $\delta : M \to \mathbb{R}^+$ – функция, $\sum\limits_{x \in M} \delta(x) < \infty$. *Функция скачков*, соответствующая множеству M и функции δ, определяется формулой $f_{M,\delta}(t) = \sum\limits_{x \in M \bigcap [\alpha, t]} \delta(x)$.

2. Чтобы понять термин «функция скачков», постройте график функции $f_{M,\delta}$ на отрезке $[0,3]$ для $M = \{1,2\}$, $\delta(1) = \delta(2) = 1$.
3. Пусть μ – чисто атомарная борелевская мера на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда её функция распределения будет иметь вид функции скачков.
4. Пусть μ – борелевская мера на отрезке $[\alpha, \beta]$, F – её функция распределения, $\alpha < t \le \beta$. Тогда $\mu(\{t\}) = F(t) - F(t-0)$, $\mu(\{\alpha\}) = F(\alpha)$.
5. Борелевская мера на отрезке $[\alpha, \beta]$ безатомна в том и только том случае, если её функция распределения непрерывна и в точке α равна нулю.
6. Из представления меры в виде суммы безатомной и чисто атомарной следует, что любая неотрицательная непрерывная справа возрастающая функция на отрезке $[\alpha, \beta]$ однозначно представляется в виде суммы непрерывной возрастающей функции, равной нулю в точке α, и некоторой функции скачков.
7. Любая непрерывная справа возрастающая функция на отрезке $[\alpha, \beta]$ представляется в виде суммы непрерывной возрастающей функции и некоторой функции скачков. Такое представление единственно с точностью до постоянного слагаемого. То есть к одному слагаемому можно добавить, а из другого – вычесть одно и то же число, и сумма не изменится; а других причин неединственности нет.

8. Любая возрастающая функция на отрезке $[\alpha,\beta]$ однозначно представляется в виде суммы непрерывной справа функции и функции, отличающейся от нуля не более чем в счётном множестве точек.
9. Любая возрастающая функция f на отрезке $[\alpha,\beta]$ однозначно с точностью до постоянного слагаемого представляется в виде суммы таких трёх слагаемых: f_1 – непрерывной функции, f_2 – функции скачков и f_3 – функции, отличающейся от нуля не более чем в счётном множестве точек.

2.3.6. Канторова лестница и мера, равномерно распределённая на канторовом множестве

Данное в предыдущем пункте описание борелевских мер на отрезке может вызвать впечатление, что все такие меры очень похожи на меру Лебега (по крайней мере после удаления атомов). В каком-то смысле это впечатление верно, но всё-таки картина выглядит не настолько простой, как это может показаться на первый взгляд. Ниже мы построим безатомную вероятностную борелевскую меру на отрезке $[0,1]$, сосредоточенную на канторовом множестве: дополнение к канторову множеству будет пренебрежимым с точки зрения этой меры. То есть, с некоторой точки зрения, эта мера будет противоположна по свойствам мере Лебега, ведь мера Лебега канторова множества равна нулю, а дополнения к канторову множеству – единице. Эта мера и её функция распределения – канторова лестница – будут в дальнейшем источником важных примеров.

Как обычно, канторово множество будем обозначать через K, а отрезки длины $1/3^n$, выбрасываемые из $[0,1]$ на n-ном шаге построения канторова множества, – через Δ_j^n, $j=1,2,...,2^{n-1}$. При фиксированном n отрезки Δ_j^n будем нумеровать в порядке возрастания: $\Delta_1^1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\Delta_1^2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$, $\Delta_2^2=(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ и т. д.

Основная идея построения требуемой меры – определить её функцию распределения F так, чтобы меры всех отрезков Δ_j^n были равными нулю, а меры симметричных частей множества K были равны между собой. Так, $K=\left(K\bigcap[0,\frac{1}{3}]\right)\bigcup\left(K\bigcap[\frac{2}{3},1]\right)$, причём части $K\bigcap[0,\frac{1}{3}]$ и $K\bigcap[\frac{2}{3},1]$ симметричны между собой, поэтому их меры естественно положить равными $\frac{1}{2}$. По тем же соображениям симметрии, меры множеств $K\bigcap[0,\frac{1}{9}]$, $K\bigcap[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]$, $K\bigcap[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]$ и $K\bigcap[\frac{8}{9},1]$ должны быть равны $\frac{1}{4}$ и т. д. Итак, функцию распределения F определим следующим образом: положим $F(t)=\frac{1}{2}$ на Δ_1^1, $F(t)=\frac{1}{4}$ на Δ_1^2, $F(t)=\frac{3}{4}$ на Δ_2^2, ... , на Δ_j^n зададим $F(t)=\frac{2j-1}{2^n}$, ... Мы уже определили функцию распределения на плотном множестве – дополнении к K. Легко видеть, что эта функция равномерно непрерывна на $[0,1]\setminus K$: если $|x-y|<\frac{1}{3^n}$, то $|F(x)-F(y)|\le\frac{1}{2^n}$. Следовательно, F единственным образом продолжается до непрерывной функции на всём отрезке. Полученная монотонная непрерывная функция называется *лестницей Кантора* и обозначается F_K. Борелевская мера μ_K на [0,1], для которой эта функция будет функцией распределения, называется *мерой, равномерно распределённой на канторовом множестве*.

Упражнения

1. Чтобы понять происхождение термина «канторова лестница», сделайте набросок графика этой функции.
2. Запишите явное выражение значения $F_K(t)$ через троичное разложение числа t.
3. Докажите, что образ канторова множества под действием функции F_K – это весь отрезок [0,1].
4. Пусть Ω_1 – множество, (Ω,Σ,μ) – пространство с мерой, $f:\Omega_1\to\Omega$ – сюръективное отображение. Тогда семейство множеств $\Sigma_1=\left\{f^{-1}(A):A\in\Sigma\right\}$ образует σ-алгебру на Ω, а формула $\mu_1\left(f^{-1}(A)\right)=\mu(A)$ задаёт счётно-аддитивную меру μ_1 на Σ_1. Если (Ω,Σ,μ) – полное пространство с мерой, обязано ли пространство с мерой $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ быть полным?
5. Для функции $f:[0,1]\to[0,1]$ точку $x\in[0,1]$ назовём *точкой слипания*, если $f^{-1}(x)$ состоит более чем из одной точки. Докажите, что у монотонной функции может быть не более счётного числа точек слипания.
6. Пусть $f:[0,1]\to[0,1]$ – возрастающая функция. Тогда для любого набора подмножеств $A_n\subset[0,1]$, $n\in M$ симметрическая разность множеств $\bigcup_{n\in M} f(A_n)$ и $f\left(\bigcup_{n\in M} A_n\right)$ не более чем счётна.
7. Пусть $f:[0,1]\to[0,1]$ – возрастающая функция. Тогда семейство тех подмножеств $A\subset[0,1]$, для которых $f(A)$ – борелевское множество, – это σ-алгебра, содержащая все отрезки.

8. Из предыдущего упражнения следует, что образ борелевского множества под действием монотонной функции – борелевское множество.
9. Пусть μ – безатомная борелевская мера на $[0,1]$, F – её функция распределения, λ – мера Лебега. Тогда $\mu(A) = \lambda(F(A))$ для любого борелевского множества $A \subset [0,1]$.

2.3.7. σ-Конечные меры и мера Лебега на оси

Во многих задачах бывает разумным позволять мере принимать не только конечные положительные значения, но на каких-то множествах и значение $+\infty$. Одним из таких обобщений служит понятие σ-конечной меры.

Определение. Пусть Σ – σ-алгебра подмножеств множества Ω. Отображение $\mu : \Sigma \to [0,+\infty]$ называется *σ-конечной мерой*, если оно подчиняется следующим аксиомам:

1. Счётная аддитивность: $\mu\left(\coprod_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ для любых $A_k \in \Sigma$.

2. σ-Конечность: всё Ω представимо в виде $\Omega = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \Sigma$ и $\mu(A_k) < \infty$.

Типичный пример σ-конечной меры – это *мера Лебега на оси*.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется измеримым по Лебегу, если его пересечение с любым конечным отрезком измеримо по Лебегу как подмножество этого отрезка. Мера Лебега множества A определяется через меры его пересечений с конечными отрезками: $\lambda(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda(A \cap [n, n+1))$.

Тройка (Ω, Σ, μ), где Ω – множество с заданной на нём σ-алгеброй Σ, а μ – σ-конечная мера на Σ, называется *пространством с σ-конечной мерой*. Обычное пространство с мерой называют ещё *пространством с конечной мерой* , если нужно подчеркнуть её конечность.

Упражнения

1. Измеримые по Лебегу подмножества вещественной оси образуют σ-алгебру, а мера Лебега на оси – это σ-конечная мера.
2. Каждое борелевское множество на оси измеримо по Лебегу.
3. Для измеримого подмножества вещественной оси применимы следующие формулы вычисления меры Лебега:
$$\lambda(A) = \lim_{n,m\to\infty} \lambda(A \cap [-n, m]) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap [-n, n]).$$

4. Мера Лебега открытого множества на оси равна сумме длин составляющих его отрезков.
5. Мера Лебега измеримого по Лебегу множества A на оси совпадает с его внешней мерой $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \text{ открыто, и } B \supset A\}$.
6. Каждое измеримое по Лебегу подмножество оси представимо как объединение борелевского множества и множества меры ноль.
7. Пусть M – некоторое индексное множество, $(\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$, $n \in M$ – пространства с конечной мерой и Ω_n попарно не пересекаются. Положим $\Omega = \bigcup\limits_{n\in M} \Omega_n$, σ-алгебру Σ определим как семейство всех множеств вида $A = \bigcup\limits_{n\in M} A_n$, $A_n \in \Sigma_n$, и положим $\mu(A) = \sum\limits_{n\in M} \mu(A_n)$. При каком условии (Ω, Σ, μ) будет пространством с σ-конечной мерой? Пространством с конечной мерой?
8. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой. Тогда для любой возрастающей последовательности A_n измеримых множеств $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.
9. Для конечных мер мы отмечали следующее свойство (утверждение 2 п. 2.1.4): если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ – убывающая цепочка множеств (то есть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$), то $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Покажите на примере меры Лебега на оси, что для σ-конечных мер это утверждение неверно: существует убывающая цепочка измеримых множеств A_n с $\lambda(A_n) = +\infty$ и $\lambda\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$ (то есть $\neq \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$). Тем не менее при условии конечности мер множеств A_n утверждение выполнено и в пространствах с σ-конечной мерой.

2.4. Комментарии к упражнениям

Параграф 2.1.2

Упражнение 7. Представить A как $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n открыты. Тогда $A_n \supset A$ и, следовательно, плотны. Соответственно $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$ и все множества $X \setminus A_n$ замкнуты и нигде не плотны (см. упражнение 1 п. 1.3.9).

Упражнение 8. Перейти к дополнениям и воспользоваться предыдущим упражнением.

Упражнение 9. Согласно упражнению 7, $\overline{A} \setminus A$ – множество первой категории в $\overline{A}$.

Упражнение 11. Счётное подмножество отрезка – множество первой категории, а плотное G_δ – второй.

Упражнение 12. Пусть $\underline{f}$ и $\overline{f}$ – нижняя и верхняя огибающие функции f (упражнение 3 п. 1.2.4). Тогда $dc(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t : \overline{f}(t) - \underline{f}(t) \geq \frac{1}{n} \right\}$, а каждое из множеств $\left\{ t : \overline{f}(t) - \underline{f}(t) \geq \frac{1}{n} \right\}$ замкнуто.

Упражнение 14. Пусть f_n непрерывны и в каждой точке сходятся к f. Тогда $f^{-1}([a, +\infty)) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} f_k^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{m}, +\infty\right)\right) \in G_\delta$.

Упражнение 15. Воспользоваться упражнениями 13, 9 и 14.

Упражнение 19. Воспользоваться упражнением 11.

Параграф 2.1.3

Упражнение 1. Зафиксируем открытое множество $U \subset X_1$ и рассмотрим семейство Σ тех подмножеств $V \subset X_2$, что $U \times V \in \mathfrak{B}$. Σ – это σ-алгебра, содержащая все открытые множества, следовательно, $\Sigma \supset \mathfrak{B}_2$. То есть борелевскими будут все множества вида $U \times V$, где $U \subset X_1$ открыто, а $V \in \mathfrak{B}_2$. Теперь зафиксируем $V \in \mathfrak{B}_2$ и рассмотрим семейство Ψ тех подмножеств $U \subset X_1$, что $U \times V \in \mathfrak{B}$. Ψ – это σ-алгебра на X_1, содержащая все открытые множества, следовательно, $\Psi \supset \mathfrak{B}_1$. Таким образом, все «прямоугольники» $A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{B}_1$, $A_2 \in \mathfrak{B}_2$ лежат в $\mathfrak{B}$. Значит, $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.

Упражнение 2. Для любого $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ произведение $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ содержит все окрестности вида $B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2)$ точки x, то есть базу окрестностей точки. Ввиду сепарабельности, любое открытое множество в $X_1 \times X_2$ представимо как счётное объединение множеств вида $B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2)$. Поэтому $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ содержит все открытые множества, следовательно, и все борелевские множества на $X_1 \times X_2$.

Упражнение 5. Ответ зависит от аксиоматики теории множеств (скажем, какая версия континуум-гипотезы считается выполненой). Как нам сообщил недавно Т. Банах, из результатов Д. Фремлина (1996 г.) следует, что в одной из аксиоматик эти семейства множеств не совпадают.

Упражнение 6. Зафиксируем $t_1 \in \Omega_1$ и рассмотрим семейство Σ тех $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, для которых $A_{t_1} \in \Sigma_2$. Σ – это σ-алгебра, содержащая все «прямоугольники». Поэтому $\Sigma \supset \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

Параграф 2.1.6

Упражнение 2. Пусть $\mu(A_1 \cap A_2) \neq 0$. Поскольку A_1 – атом, то для любого подмножества множества A_1 ненулевой меры его дополнение в A_1 имеет меру 0. Следовательно, $\mu(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) = 0$. По той же причине $\mu(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = 0$. Таким образом, и $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$.

Параграф 2.2.1

Упражнение 6. Данное утверждение, согласно теореме автора [Kad3], сохраняет силу в гораздо более общей ситуации: для выпуклых тел в гильбертовом пространстве и вписанных шаров, вместо треугольников на плоскости и кругов. Забавно, но для плоского случая нам неизвестно, существует ли доказательство, отличающееся по своей идее от бесконечномерной теоремы, доказанной в [Kad3].

Параграф 2.3.1

Упражнение 4. Требуемое множество A можно строить аналогично канторову множеству с тем отличием, что удаляемые отрезки нужно выбирать «маленькими»: с суммарной длиной меньшей 1. При этом можно добиться, чтобы $\lambda(A)$ было сколь угодно близко к 1.

Упражнение 5. Взяв $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n – нигде не плотные множества с $\lambda(A_n) \geq 1 - 1/n$, получим множество первой категории с $\lambda(A) = 1$. Дополнение к A будет требуемым множеством.

Параграф 2.3.3

Упражнение 3. См. [R-Se], с. 21-22.

Упражнение 4. См. [R-Se], с. 22-23. Другое, более естественное решение будет следовать из результатов п. 7.2.2.

Параграф 2.3.4

Упражнение 3. Чтобы $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы и A, и B пересекались со всеми замкнутыми множествами ненулевой меры. Поскольку существует только континуум замкнутых подмножеств отрезка, можно выписать замкнутые подмножества положительной меры в трансфинитную последовательность $K_\gamma, \gamma < c$, где c – наименьший ординал континуальной мощности. Теперь для каждого $\gamma < c$ выберем две различные точки $a_\gamma, b_\gamma \in K_\gamma \setminus (\{a_\beta\}_{\beta<\gamma} \cup \{b_\beta\}_{\beta<\gamma})$. Возможность такого выбора обосновывается тем, что на каждом шаге множество K_γ континуально, а множество $\{a_\beta\}_{\beta<\gamma} \cup \{b_\beta\}_{\beta<\gamma}$ уже выбранных точек имеет мощность меньшую континуума. Остаётся положить $A = \{a_\gamma\}_{\gamma<c}$, $B = [0,1] \setminus A \supset \{b_\gamma\}_{\gamma<c}$.

Упражнение 5. Одна из возможных конструкций приведена в замечании в конце доказательства теоремы 2.16 работы [K-T] .

3. Измеримые функции

В теории меры и интеграла изучаются в первую очередь вещественнозначные функции. Чтобы избежать ненужных повторений, договоримся, если не оговорено противное, термин «функция» использовать для функций, принимающих вещественные значения. Скажем, если мы говорим «функция f на Ω», подразумеваться будет функция f, действующая из Ω в $\mathbb{R}$. Для функций же, область значений которых не лежит в $\mathbb{R}$, будем использовать термин «отображение».

Операции над функциями будут пониматься в поточечном смысле. Скажем, $f_1 + f_2$ – это функция, задаваемая на Ω равенством $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$, функция $\max\{f, g\}$ определяется как $\max\{f, g\}(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ и т. д. Предел последовательности функций, сумма ряда также понимаются в поточечном смысле.

3.1. Класс измеримых функций и операции на нём

В этом разделе (Ω, Σ) будет множеством с заданной на нём σ-алгеброй. Все функции будут, если не оговорено противное, считаться определёнными на Ω; элементы σ-алгебры Σ будут называться измеримыми подмножествами.

3.1.1. Критерий измеримости

Определение 1. Пусть (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств. Отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется измеримым, если $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ для любого $A \in \Sigma_2$.

Как видно из определения, измеримые отображения играют такую же роль в теории меры, как непрерывные – в теории топологических пространств. Частный случай измеримого отображения – это измеримая функция:

Определение 2. Функция f на Ω называется *измеримой* (более подробно: *измеримой по отношению к σ-алгебре* Σ), если для любого борелевского подмножества A в $\mathbb{R}$ множество $f^{-1}(A)$ измеримо.

Теорема 1. Пусть (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств, Λ – семейство подмножеств в Ω_2, порождающее σ-алгебру Σ_2. Для того, чтобы отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $A \in \Lambda$ его полный прообраз $f^{-1}(A)$ принадлежал σ-алгебре Σ_1.

Доказательство. Если отображение f измеримо, то прообраз любого $A \in \Sigma_2$ лежит в Σ_1. В частности, в Σ_1 лежат прообразы всех $A \in \Lambda$.

Обратно, пусть Σ_1 содержит все множества вида $f^{-1}(A)$ для $A \in \Lambda$. Нам нужно показать, что прообразы всех элементов системы Σ_2 лежат в Σ_1. Для этого определим следующее семейство Λ_1 подмножеств множества Ω_2: множество A служит элементом семейства Λ_1, если $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Легко видеть, что Λ_1 образует σ-алгебру множеств и содержит все элементы семейства Λ. Поскольку Σ_2 – это наименьшая σ-алгебра множеств, содержащая Λ, отсюда следует, что $\Sigma_2 \subset \Lambda_1$, что и требовалось доказать. □

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – некоторая функция, $a \in \mathbb{R}$. Обозначим $f^{-1}((a,+\infty))$ через $f_{>a}$, то есть $f_{>a}$ – это множество тех $t \in \Omega$, где $f(t) > a$. Поскольку (см. п. 2.1.2) множества вида $(a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ в совокупности порождают σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских множеств на оси, получаем следующий удобный критерий измеримости:

Следствие 1. Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима в том и только том случае, если все множества $f_{>a}$, $a \in \mathbb{R}$, измеримы. □

Следствие 2. Пусть (Ω, Σ), (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств. Наделим, как обычно, декартово произведение $\Omega_1 \times \Omega_2$ σ-алгеброй $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ (см. п. 2.1.3). Тогда для любых измеримых отображений $f_1 : \Omega \to \Omega_2$ и $f_2 : \Omega \to \Omega_2$ отображение $f : \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$, действующее по правилу $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, также измеримо.

Доказательство. По определению, σ-алгебра $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ порождена множествами вида $A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Имеем $f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \bigcap f_2^{-1}(A_2) \in \Sigma$. □

Взяв в качестве Ω топологическое пространство, а в качестве Σ – σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских множеств на Ω, получаем частный случай измеримости – измеримость по Борелю:

Определение 3. Функция f на топологическом пространстве Ω называется *измеримой по Борелю*, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого борелевского множества A вещественной оси снова является борелевским множеством.

В качестве примера измеримой по Борелю функции можно взять любую непрерывную функцию. Действительно, для непрерывной функции f все множества $f_{>a}$ открыты, а значит, принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских множеств, то есть выполнен вышеприведенный критерий измеримости.

Для произвольного множества $A \in \Sigma$ можно рассмотреть σ-алгебру Σ_A всех измеримых подмножеств множества A. Если ограничение функции f на подмножество A измеримо по отношению к σ-алгебре Σ_A, то функцию называют *измеримой на подмножестве* A.

Упражнения

1. Если функция f измерима, то для любого $a \in \mathbb{R}$ измеримы множества $f_{\neq a} = \{t \in \Omega : f(t) \neq a\}$, $f_{=a} = \{t \in \Omega : f(t) = a\}$, $f_{\leq a} = \{t \in \Omega : f(t) \leq a\}$, $f_{<a} = \{t \in \Omega : f(t) < a\}$ и $f_{\geq a} = \{t \in \Omega : f(t) \geq a\}$.
2. Пусть f – измеримая по Борелю функции на отрезке $[a,b]$. Тогда множество точек максимума функции f – борелевское множество.
3. Множество точек локального максимума борелевской функции на оси – борелевское множество.
4. Пусть (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств и $\Omega_1 \times \Omega_2$ наделено σ-алгеброй $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Докажите измеримость координатных проекторов P_1 и P_2, ставящих элементу $(t_1, t_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ координаты t_1 и t_2 соответственно.
5. Докажите утверждение, обратное к следствию 2: если отображение $f : \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ измеримо, то отображения f_1 и f_2 также измеримы.
6. Приведите пример разрывной измеримой по Борелю функции на $\mathbb{R}$.
7. Любая монотонная функция на оси измерима по Борелю.
8. Пусть f – измеримая функция на Ω. Докажите, что $|f|$, $sign\, f$, f^+ и f^- – измеримые функции.
9. Если функция f измерима, то λf измерима для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.
10. Пусть f – измеримая функция на Ω. Тогда f измерима на каждом подмножестве $A \in \Sigma$.
11. Пусть Ω представлено в виде объединения своих измеримых подмножеств A и B; функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима как на A, так и на B. Тогда f измерима на Ω.
12. Приведите пример биективного измеримого отображения $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, обратное к которому неизмеримо.
13. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, A – измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}$.

а) Должно ли $g(A)$ быть борелевским множеством?

б) Измеримым по Лебегу?

в) Может ли $g^{-1}(A)$ быть неизмеримым по Лебегу?

14. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, A – открытое множество в $\mathbb{R}$. Тогда $g(A)$ – борелевское множество. Более того, $g(A)$ – множество класса F_σ.

15. Пусть $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, A – борелевское множество в $\mathbb{R}$. Может ли $g(A)$ не быть борелевским множеством?
16. Две измеримые функции f и g на Ω называются *равноизмеримыми*, если $\mu(f_{>a})=\mu(g_{>a})$ для любого $a\in\mathbb{R}$. Докажите, что если f и g равноизмеримы, то $\mu(f^{-1}(A))=\mu(g^{-1}(A))$ для любого борелевского множества A вещественных чисел.

3.1.2. Элементарные свойства измеримых функций

Теорема 1. Пусть (Ω_1,Σ_1), (Ω_2,Σ_2) и (Ω_3,Σ_3) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств, отображения $f:\Omega_1\to\Omega_2$ и $g:\Omega_2\to\Omega_3$ измеримы. Тогда композиция $g\circ f:\Omega_1\to\Omega_3$ также будет измеримым отображением.

Доказательство. Пусть $A\in\Sigma_3$. Тогда $g^{-1}(A)\in\Sigma_2$, и, следовательно, $(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)\in\Sigma_1$. □

Следствия

1. Пусть функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ измерима, а $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ измерима по Борелю. Тогда композиция $g\circ f$ этих функций также измерима.
2. В частности, если $f:\Omega\to\mathbb{R}$ измерима, а $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна, то $g\circ f$ измерима.
3. Пусть функции $f_1,f_2:\Omega\to\mathbb{R}$ измеримы, а функция двух переменных $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция $f(t)=g(f_1(t),f_2(t))$ измерима.

Доказательство. В доказательстве нуждается только третий пункт. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, наделённую σ-алгеброй борелевских множеств или, что то же самое, произведением σ-алгебр борелевских множеств на оси. Согласно следствию 2 предыдущего параграфа, отображение $F:\Omega\to\mathbb{R}^2$, действующее по правилу $F(t)=(f_1(t),f_2(t))$, измеримо. Остаётся заметить, что $f=g\circ F$ и применить последнюю теорему. □

Теорема 2. Класс измеримых функций на (Ω,Σ) обладает следующими свойствами: если функции f и g измеримы, то измеримы функции $f+g$, fg, $\max\{f,g\}$ и $\min\{f,g\}$. Также будут измеримы функции $|f|$, $\operatorname{sign} f$, $f^+=\max\{f,0\}$, $f^-=(-f)^+$ и λf при любом $\lambda\in\mathbb{R}$. Если f нигде не обращается в ноль, то измерима функция $1/f$.

Доказательство. Функции двух переменных $g_1(x,y)=x+y$, $g_2(x,y)=xy$ непрерывны, равно как и функции $\max\{x,y\}$ и $\min\{x,y\}$. Согласно п. 3 только что доказанного следствия, это даёт измеримость функций $f+g$, fg, $\max\{f,g\}$ и $\min\{f,g\}$. Непрерывность функций $|t|$, t^+, t^- и λt в совокупности с п. 2 предыдущего следствия обеспечивают измеримость $|f|$, f^+, f^- и λf. Измеримость функции $\mathrm{sign} f$ следует из п. 1 того же следствия и измеримости по Борелю функции $\mathrm{sign}\, t$. Наконец, если f нигде не обращается в ноль, то $1/f$ представима как композиция измеримой функции $f : \Omega \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (где $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ наделено σ-алгеброй борелевских множеств) и непрерывной, а следовательно, и измеримой по Борелю функции $1/t : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. □

Теорема 3. Пусть последовательность f_n измеримых функций сходится поточечно к функции f, то есть $\forall t \in \Omega$ $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$. Тогда f – измеримая функция.

Доказательство. Зафиксируем число $a \in \mathbb{R}$. Значение функции f в точке $t \in \Omega$ будет больше, чем a, в том и только том случае, если существуют такое рациональное число $r \in \mathbb{Q}$ и такой номер $n \in \mathbb{N}$, что для любого $m > n$ выполнено неравенство $f_m(t) > a + r$. Переведя это утверждение на язык теории множеств, получаем, что $f_{>a} = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n+1}^{\infty} (f_m)_{>a+r} \in \Sigma$. □

Применив последнюю теорему к последовательности частных сумм ряда, получаем такое следствие.

Следствие. Если ряд из измеримых функций сходится поточечно, то его сумма – измеримая функция. □

Упражнения

1. Докажите напрямую, что если функции f и g измеримы, то при любом $a \in \mathbb{R}$ множество $(f + g)_{>a}$ принадлежит Σ. Согласно критерию из предыдущего параграфа, этим будет дано другое доказательство измеримости суммы двух измеримых функций.
2. Запишите выражения для множеств $(\max\{f, g\})_{>a}$ и $(\min\{f, g\})_{>a}$ через аналогичные множества для функций f и g.
3. Если функции f и g измеримы, то измеримы множества тех $t \in \Omega$, где $f = g$, $f \neq g$, $f > g$ и $f < g$.
4. Пусть f_n – поточечно ограниченная последовательность измеримых функций. Тогда измеримы также функции $f = \sup\limits_n f_n$ и $g = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$.
5. Пусть A – множество всех точек дифференцируемости непрерывной функции f на оси (см. упражнение 13 п. 2.1.2). Тогда производная f' измерима по Борелю на A.
6. Отождествим поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел стандартным образом с плоскостью $\mathbb{R}^2$ и наделим $\mathbb{C}$ σ-алгеброй $\mathfrak{B}^2$ борелевских подмножеств плоскости. Измеримое отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$ будем называть *измеримой комплекснозначной функцией*. Докажите, что отображение

$f:\Omega\to\mathbb{C}$ измеримо в том и только том случае, если измеримы вещественнозначные функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$.

7. Докажите следующие свойства комплекснозначных измеримых функций:
   (1) если функции f и g измеримы, то функция $f+g$ также измерима;
   (2) если f измерима, то λf измерима для любого $\lambda\in\mathbb{C}$;
   (3) если функции f и g измеримы, то и их произведение fg измеримо;
   (4) если функция f измерима, то $|f|$ – это измеримая вещественнозначная функция.

3.1.3. Характеристическая функция множества

Пусть A – подмножество выделенного множества Ω. *Характеристической функцией* множества A называется функция $\mathbf{1}_A$ на Ω, равная 1 на A и нулю вне множества A. Другие принятые в литературе обозначения для характеристической функции множества A – это χ_A и I_A. Последнее обозначение чаще всего используется в теории вероятностей, где характеристическая функция множества называется *индикатором* множества, а термин «характеристическая функция» используется для совсем другого объекта. Конечно, было бы разумным в обозначении для характеристической функции как-то учитывать не только множество A, но и Ω. Скажем, одно и то же множество A вещественных чисел в одной ситуации может рассматриваться как подмножество отрезка, а в другой – оси. В первом случае $\mathbf{1}_A$ будет определена на отрезке, во втором – на оси, а символ для обозначения используется один и тот же. Это небольшое несогласование обычно не вызывает неудобств: здесь, как и во многих других случаях, функцию, определённую на подмножестве, по умолчанию доопределяют на более широкое множество нулём.

Перечисленными в нижеприведенных упражнениях 1-5 свойствами мы будем пользоваться. Поэтому настоятельно рекомендуем читателю обратить на эти упражнения внимание.

Упражнения

1. Пусть (Ω,Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй, $A\subset\Omega$. Функция $\mathbf{1}_A$ будет измеримой в том и только том случае, если измеримо множество A.
2. $\mathbf{1}_{A\cup B}=\max\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_B\}$.
3. $\mathbf{1}_{A\cap B}=\min\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_B\}=\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_B$.
4. Если множества A и B не пересекаются, то $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B$.

5. Пусть $A=\coprod\limits_1^\infty A_n$. Тогда $\mathbf{1}_A=\sum\limits_1^\infty \mathbf{1}_{A_n}$.
6. Пусть A_n – некоторая последовательность множеств. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mathbf{1}_{A_n}$ – это характеристическая функция некоторого множества A, называемого *верхним пределом последовательности множеств* A_n. Найдите выражение множества A через A_n с помощью обычных операций объединения и пересечения множеств.
7. Рассмотрим множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств натурального ряда в топологии, описанной в упражнении 7 п. 1.4.4. Проверьте, что последовательность множеств сходится в этой топологии к некоторому множеству в том и только том случае, если характеристические функции поточечно сходятся к соответствующей характеристической функции.

3.1.4. Простые функции. Лебеговская аппроксимация измеримой функции простыми. Измеримость на пополнении пространства с мерой

Пусть (Ω,Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй. Функция f на Ω называется *простой функцией*, если она представима в виде $f=\sum\limits_{n=1}^\infty a_n\mathbf{1}_{A_n}$, где $A_n\in\Sigma$ – дизъюнктная последовательность множеств, а a_n– числа. Ввиду дизъюнктности множеств A_n ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n\mathbf{1}_{A_n}$ не просто сходится поточечно, а более того, для любого $t\in\Omega$ все слагаемые указанного ряда равны нулю, за исключением, быть может, одного (с тем номером n, для которого $t\in A_n$). На каждом из множеств A_n функция f равна константе a_n, и $f(t)=0$ за пределами объединения всех A_n. Простые функции ещё называют *счётнозначными функциями*, или, более подробно, *счётнозначными измеримыми функциями*. Обоснованием этого термина служит следующее утверждение.

Теорема 1. Функция f будет простой функцией в том и только том случае, если f измерима и множество всех её значений не более чем счётно.

Доказательство. Измеримость простой функции $f=\sum\limits_{n=1}^\infty a_n\mathbf{1}_{A_n}$ можно проверить непосредственно (прообраз любого множества будет конечным или счётным объединением каких-то из A_n), а можно сослаться на измеримость суммы ряда измеримых функций. Далее, $f(\Omega)\subset\{a_n\}_{n=1}^\infty\bigcup\{0\}$, откуда вытекает не более чем счётность множества всех значений функции. Обратно, пусть f измерима и множество M всех её значений не более чем счётно. Тогда для любого $t \in M$ множество $f^{-1}(t)$ измеримо и $f = \sum_{t \in M} t\mathbf{1}_{f^{-1}(t)}$. □

Если множество значений простой функции конечно, функция называется *конечнозначной функцией.*

Теорема 2. Классы конечнозначных и счётнозначных функций устойчивы по отношению к операциям суммы, произведения, взятия максимума и минимума двух функций.

Доказательство. То, что эти операции сохраняют измеримость, нам уже известно. Теперь пусть f и g – две функции на Ω, M и N – их множества значений. Если M и N конечны, то множества $M + N = \{t + r : t \in M, r \in N\}$ и $M \cdot N = \{t \cdot r : t \in M, r \in N\}$ конечны, если счётны – то счётны. Утверждение теоремы следует из того, что образы функций $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ лежат в $M + N$, $M \cdot N$, $M \bigcup N$ и $M \bigcup N$ соответственно. □

Измеримые функции могут быть устроены довольно сложно. Поэтому для облегчения исследования их структуры используют приближение измеримой функции простыми.

Теорема 3. Пусть f – измеримая функция на Ω. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует простая функция $f_\varepsilon \le f$, во всех точках отличающаяся от f не больше чем на ε. При этом если $f \ge 0$, то f_ε может быть также выбрана неотрицательной, а если f ограничена, то в качестве f_ε может быть выбрана конечнозначная функция.

Доказательство. Для любого целого n определим числа $t_n = n\varepsilon$ и отрезки $\Delta_n = [t_n, t_{n+1})$. Через A_n обозначим $f^{-1}(\Delta_n)$. Какие-то из A_n могут быть и пустыми. В частности, если $f \ge 0$, то пустыми будут все A_n с номерами, меньшими нуля. Если же f ограничена по модулю некой константой C, то все A_n с $|n| > C/\varepsilon + 1$ будут пустыми. Множества A_n попарно не пересекаются, в объединении дают всё множество Ω, и на A_n значения функции f подчиняются неравенству $t_n \le f(t) < t_{n+1}$. Функцию f_ε определим так, чтобы на A_n она равнялась соответствующему t_n: $f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathbf{1}_{A_n}$.

Такая функция будет подчиняться всем условиям теоремы. Так, на каждом из A_n выполнена оценка $t_n = f_\varepsilon(t) \le f(t) < t_{n+1}$, то есть $f(t) - \varepsilon < f_\varepsilon(t) \le f(t)$ в каждой точке $t \in \Omega$. Если $f \ge 0$, то функция f_ε не будет принимать отрицательных значений t_n: множества A_n, соответствующие отрицательным t_n, будут пустыми. Если же f ограничена, то пустыми будут все A_n, за исключением конечного числа, и f_ε будет конечнозначной. □

Следствие. Для любой измеримой функции f существует неубывающая последовательность $f_1 \le f_2 \le \dots$ простых функций, равномерно сходящаяся к f. При этом если f неотрицательна (ограничена), то f_n могут быть выбраны неотрицательными (конечнозначными).

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой и выберем простую функцию f_1 так, чтобы она подчинялась условию $0 \le f - f_1 \le 1$. Функция $f - f_1$ будет измеримой неотрицательной функцией, и, по предыдущей теореме, существует неотрицательная простая функция g_1, удовлетворяющая неравенствам $0 \le f - f_1 - g_1 \le 1/2$. Положим $f_2 = f_1 + g_1$. Имеем $f_1 \le f_2$ и $0 \le f - f_2 \le 1/2$. Функция $f - f_2$ снова будет измеримой неотрицательной функцией, и снова её можно приблизить некоторой простой функцией g_2: $0 \le f - f_2 - g_2 \le 1/3$. Функцию f_3 определим как $f_2 + g_2$. Продолжив этот процесс, получим возрастающую последовательность простых функций с условием $0 \le f - f_n \le 1/n$, обеспечивающим равномерную сходимость. Удовлетворить дополнительные требования неотрицательности или конечнозначности, указанные в формулировке следствия, также не представляет труда. □

Доказательство следующей теоремы опирается на возможность аппроксимации измеримой функции простыми.

Теорема 4. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой, (Ω, Σ', μ) – его пополнение. Тогда для любой функции f на Ω, измеримой по отношению к σ-алгебре Σ', существует Σ-измеримая функция g, совпадающая с f почти всюду.

Доказательство. Вначале докажем это утверждение для случая простой функции. Пусть $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$, $A_n \in \Sigma'$ и дизъюнктны. В каждом из A_n выберем по подмножеству $B_n \in \Sigma$, с $\mu(A_n \setminus B_n) = 0$ (см. упражнение 3 п. 2.1.5). Тогда $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{B_n}$ будет требуемой функцией. Теперь пусть f – произвольная Σ' -измеримая функция, f_n – последовательность простых Σ' -измеримых функций, поточечно сходящаяся к f, g_n – Σ-измеримые функции, почти всюду совпадающие с соответствующими f_n. Пусть $A \subset \Omega$ – то пренебрежимое множество, за пределами которого $f_n = g_n$, $n = 1, 2, \dots$. Согласно определению пренебрежимого множества, существует Σ-измеримое множество B нулевой меры, содержащее A. Рассмотрим множество полной меры $C = \Omega \setminus A$. Функции $g_n \cdot \mathbf{1}_C$ образуют последовательность Σ-измеримых функций, сходящуюся на C к f, а за пределами множества C равных 0. То есть $g_n \cdot \mathbf{1}_C$ стремятся поточечно к функции $g = f \cdot \mathbf{1}_C$, и, согласно теореме 3 п. 3.1.2, эта предельная функция Σ-измерима. Остаётся заметить, что $g = f$ почти всюду, так как множество B, где это равенство может быть не выполнено, пренебрежимо. □

Упражнения

1. Функция f_ε из формулировки теоремы 3 может быть выбрана так, что $f_\varepsilon(\Omega) \subset f(\Omega)$.
2. Пусть X – метрическое пространство, наделённое σ-алгеброй борелевских множеств, $f : \Omega \to X$ – измеримое отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

– для любого $\varepsilon > 0$ существует счётнозначное измеримое отображение $f_\varepsilon : \Omega \to X$ с $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ во всех $t \in \Omega$;

– множество $f(\Omega)$ сепарабельно.

3. В условиях предыдущего упражнения эквивалентны следующие условия:

– для любого $\varepsilon > 0$ существует конечнозначное измеримое отображение $f_\varepsilon : \Omega \to X$ с $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ во всех $t \in \Omega$;

– множество $f(\Omega)$ – предкомпакт.

4. Отображение f_ε в предыдущих двух упражнениях может быть выбрано удовлетворяющим условию $f_\varepsilon(\Omega) \subset f(\Omega)$.
5. Докажите, что для любой измеримой по Лебегу функции f на отрезке найдётся равноизмеримая с ней убывающая функция $\tilde{f}$ (определение равноизмеримости см. упражнение 17 п. 3.1.1). Такая функция $\tilde{f}$ называется *убывающей перестановкой функции* f.

3.2. Основные виды сходимости

В этом разделе (Ω, Σ, μ) будет неким фиксированным пространством с конечной мерой, функции f, f_n и все остальные функции, если не оговорено противное, будут по умолчанию считаться определенными на Ω, измеримыми и принимающими вещественные значения.

3.2.1. Сходимость почти всюду

Последовательность функций f_n называется *почти всюду сходящейся* к функции f (обозначение: $f_n \xrightarrow{п.в.} f$), если множество тех $t \in \Omega$, где $f_n(t)$ не стремится к $f(t)$, пренебрежимо. Отметим простейшие свойства сходимости почти всюду, проверку которых оставим читателю в качестве упражнения.

A. Если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ и $f_n \xrightarrow{п.в.} g$, то $f \overset{п.в.}{=} g$.

B. Если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ и $f_n \overset{п.в.}{=} g_n$, то $g_n \xrightarrow{п.в.} f$.

C. Если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$, $g_n \xrightarrow{п.в.} g$ и $f_n \overset{п.в.}{\le} g_n$, то $f \overset{п.в.}{\le} g$.

D. Если $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $f_n \xrightarrow{п.в.} f$, $g_n \xrightarrow{п.в.} g$, то $G(f_n, g_n) \xrightarrow{п.в.} G(f, g)$. Отсюда вытекают, в частности, теоремы о пределе суммы и произведения.

Сходимость почти всюду играет важную роль в теории интеграла Лебега. При относительно необременительных дополнительных предположениях (см. раздел 4.4) интеграл предельной функции можно вычислять как предел интегралов. При этом сходимость почти всюду гораздо удобнее во многих отношениях обычной поточечной сходимости. Во-первых, это более общий вид сходимости, поэтому такую сходимость легче проверять. Далее, здесь, как и вообще при работе со свойствами, выполняющимися почти всюду, можно не обращать внимания на поведение функций на пренебрежимых множествах. Скажем, для кусочно-непрерывной или для монотонной функции можно вообще не определять значения в точках разрыва – на сходимости почти всюду это никак не скажется! Однако у сходимости почти всюду есть один существенный недостаток: эта сходимость не порождается никакой метрикой или топологией, и поэтому нет естественного способа определить «скорость сходимости». Приведём пример задачи, где этот недостаток даёт себя почувствовать.

Определение. Пусть X, Y – два семейства измеримых функций на Ω. Будем говорить, что X *п.в.-плотно* в Y (плотно в смысле сходимости почти всюду), если для любого $f \in Y$ существует такая последовательность f_n элементов семейства X, что $f_n \xrightarrow{п.в.} f$.

Теорема. Пусть X п.в.-плотно в Y, Y п.в.-плотно в Z, тогда X п.в.-плотно в Z.

Это естественное свойство важно не только с точки зрения внутренней стройности теории сходимости почти всюду, но и с точки зрения приложений. Так, на нём основывается вывод п.в.-плотности семейства непрерывных функций на отрезке в множестве всех измеримых по Лебегу функций на том же отрезке. Хотя эти результаты и можно доказать, опираясь только на определение сходимости почти всюду, придумать такие доказательства совсем не просто (предлагаем читателю попробовать свои силы!). А ведь если бы сходимость задавалась какой-то топологией, задача была бы совсем тривиальной (см. упражнение 4 п. 1.2.1). К счастью, тут приходит на выручку более изысканная идея. Оказывается, существует топология на пространстве измеримых функций, для которой понятие плотности подмножества в точности совпадает с п.в.-плотностью, хотя сходимость (так называемая сходимость по мере) и не совпадает со сходимостью почти всюду. К изучению этой топологии и соответствующей сходимости мы и переходим сейчас.

3.2.2. Сходимость по мере. Примеры

Пусть a и ε – строго положительные числа, f – измеримая функция. Через $U_{a,\varepsilon}(f)$ обозначим множество тех измеримых функций g, для которых $\mu\left(|g-f|_{>a}\right)<\varepsilon$. (Здесь, как и раньше, символ $h_{>a}$ означает множество всех $t\in\Omega$, для которых $h(t)>a$). *Топологией сходимости по мере* на пространстве всех измеримых функций на Ω называется топология, в которой базу окрестностей каждой функции f образуют множества $U_{a,\varepsilon}(f)$, $a,\varepsilon>0$. Соответственно, последовательность функций f_n называется *сходящейся по мере* к функции f (обозначение: $f_n \xrightarrow{\mu} f$), если для любого $a>0$

$$\mu\left(|f_n-f|_{>a}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Теорема 1. Сходимость по мере обладает следующими свойствами:

A. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ в том и только том случае, если $f_n-f \xrightarrow{\mu} 0$.

B. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f \overset{п.в.}{=} g$.

C. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \overset{п.в.}{=} g_n$, то $g_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доказательство. Первое и третье свойства очевидны. Докажем второе свойство. Пусть A – это множество тех $t\in\Omega$, где $f(t)\neq g(t)$, а A_n – множество тех $t\in\Omega$, где $|f(t)-g(t)|>\frac{1}{n}$. Поскольку $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$, нам достаточно доказать, что $\mu(A_n)=0$ при всех n. Для любого $k\in\mathbb{N}$ в каждой точке $t\in A_n$ или $|f(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$, или $|g(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$. Следовательно, если множество точек, где $|f(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$ обозначить через $B_{n,k}$, а точек, где $|g(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$ – через $C_{n,k}$, то $A_n\subset B_{n,k}\cup C_{n,k}$. По определению сходимости по мере, при фиксированном n и $k\to\infty$ меры множеств $B_{n,k}$ и $C_{n,k}$ стремятся к 0. Таким образом, $\mu(A_n)$ может быть только нулевой. □

Теорема 2. Пусть X – некоторое семейство измеримых функций на Ω. Тогда каждая точка замыкания множества X в топологии сходимости по мере будет пределом некоторой сходящейся по мере последовательности элементов множества X.

Доказательство. Мы будем пользоваться идеей упражнения 6 п. 1.2.1. Пусть f – точка замыкания множества X. Отметим, что окрестность $U_{a,\varepsilon}(f)$ увеличивается как с ростом a, так и с ростом ε. Рассмотрим окрестности $U_n = U_{1/n,1/n}(f)$. Ясно, что $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ и окрестности U_n образуют в совокупности базу окрестностей для f (если $U_{a,\varepsilon}(f)$ – произвольная окрестность функции f, то $U_{a,\varepsilon}(f) \supset U_n$ при $n > \max\{1/a, 1/\varepsilon\}$). По определению замыкания, все множества $X \bigcap U_n$ не пусты. Выделим в каждом из $X \bigcap U_n$ по элементу f_n. Последовательность f_n и будет требуемой последовательностью элементов множества X, сходящейся к f по мере. □

Пример (скользящий горб). Выделим на отрезке [0,1] подотрезки $\mathrm{I}_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $n = 0,1,2,\ldots$, $k = 1,\ldots,2^n$. При фиксированном n отрезки $\mathrm{I}_{n,k}$, $k = 1,\ldots,2^n$, покрывают весь отрезок [0,1]. Рассмотрим следующую последовательность функций: $f_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $f_2 = \mathbf{1}_{[0,1/2]}$, $f_3 = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$, ... , $f_{2^n+k} = \mathbf{1}_{\mathrm{I}_{n,k}}$, ... Для любого $a > 0$ множество точек отрезка, где $\left|f_{2^n+k}\right|$ больше a, либо пусто (если $a \geq 1$), либо совпадает с $\mathrm{I}_{n,k}$. Поскольку длины отрезков $\mathrm{I}_{n,k}$ стремятся к нулю при $k \to \infty$, последовательность f_n стремится к нулю по мере (в смысле меры Лебега). В то же время последовательность f_n не стремится к нулю **ни в одной точке**, так как каждая точка отрезка [0,1] принадлежит бесконечному числу отрезков $\mathrm{I}_{n,k}$. Этот пример, с одной стороны, позволяет почувствовать смысл сходимости по мере, а с другой – доказывает, что сходимость по мере не эквивалентна сходимости почти всюду.

Упражнения

1. В вышеприведенном примере найдите подпоследовательность последовательности f_n, стремящуюся к 0 в каждой точке.
2. Почему множества $|f_n - f|_{>a}$ в определении сходимости по мере измеримы?
3. Проверьте, что мы дали правильное определение сходимости по мере, то есть что сходимость в топологии сходимости по мере действительно эквивалентна выписанному в определении условию.
4. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$ и $f_n \overset{п.в.}{\leq} g_n$, то $f \overset{п.в.}{\leq} g$.

5. На отрезке [0,1] рассмотрим последовательность функций $g_n(x) = x^n$. Докажите, что $g_n \xrightarrow{\mu} 0$ (в смысле меры Лебега). Будет ли эта последовательность сходиться поточечно к нулю? Почти всюду?
6. Восстановите подробности доказательства теоремы 2.
7. $\mu(|f-h|_{>a}) \le \mu\left(|f-g|_{>\frac{a}{2}}\right) + \mu\left(|g-h|_{>\frac{a}{2}}\right)$ для любых измеримых функций f, g, h и любого $a > 0$.
8. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, Тогда $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.
9. По определению, последовательность f_n будет последовательностью Коши в смысле сходимости по мере, если $\mu(|f_n - f_m|_{>a})$ стремится к нулю при $n, m \to \infty$. Докажите, что каждая сходящаяся по мере последовательность будет последовательностью Коши в указанном смысле.
10. Последовательность функций $\sin(\pi n x)$ на [0,1] не стремится по мере ни к какой функции и, более того, не содержит сходящихся по мере подпоследовательностей.
11. Пусть f_n – возрастающая последовательность функций, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тогда $f_n \xrightarrow{п.в.} f$.
12. Выражение $\rho(f,g) = \inf\limits_{a\in(0,+\infty)} \{a + \mu(|f-g|_{>a})\}$ – это псевдометрика, задающая топологию сходимости по мере.
13. Другой пример: псевдометрика $d(f,g) = \inf\{a > 0 : \mu(|f-g|_{>a}) \le a\}$ также задаёт топологию сходимости по мере.
14. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой и мера μ чисто атомарна. Тогда для функций на Ω сходимость по мере совпадает со сходимостью почти всюду. Если же μ не чисто атомарна, то эти два вида сходимости не эквивалентны.

3.2.3. Теоремы о связи сходимости по мере со сходимостью почти всюду

Определение 1. *Верхним пределом последовательности множеств* A_n называется множество $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Естественность применения здесь термина «верхний предел» становится ясной после решения упражнения 6 п. 3.1.3.

Лемма 1 (лемма о верхнем пределе множеств). Пусть $A_n \in \Sigma$, $A_\infty = \overline{\lim} A_n$. Тогда

(i) $\mu(A_\infty) \ge \overline{\lim}\mu(A_n)$. В частности, если $\mu(A_\infty) = 0$, то $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) Если $\sum_{1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$, то $\mu(A_\infty)=0$.

Доказательство. Рассмотрим $B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. Тогда $A_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. Поскольку B_n образуют убывающую цепочку множеств, то

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(A_\infty). \tag{1}$$

Для доказательства утверждения (i) остаётся заметить, что $B_n\supset A_n$, соответственно, и $\mu(B_n)\geq\mu(A_n)$. Далее, если $\sum_{1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$, то $\mu(B_n)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, что в сочетании с соотношением (1) даёт утверждение (ii). □

Теорема 1. Из сходимости почти всюду следует сходимость по мере. Более подробно: если f, f_n – измеримые функции на Ω и $f_n\xrightarrow{п.в.}f$, то $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

Доказательство. По условию, множество D всех точек, где f_n не стремится к f, пренебрежимо. Зафиксируем $a>0$. Рассмотрим множества $A_n=|f_n-f|_{>a}$ и $A_\infty=\overline{\lim}A_n$. По определению верхнего предела, $A_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, то есть A_∞ – это множество таких точек $t\in\Omega$, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует $k>n$, при котором $|f_n(t)-f(t)|>a$. Таким образом, $A_\infty\subset D$ и $\mu(A_\infty)=0$. По предыдущей лемме, $\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то есть $\mu\left(|f_n-f|_{>a}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. □

Лемма 2. Пусть f_n – измеримые функции, a_n и ε_n – положительные числа, $a_n\to 0$, $\sum_{1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$. Далее, пусть f_n подчиняются условию $\mu\left(|f_n|_{>a_n}\right)<\varepsilon_n$. Тогда $f_n\xrightarrow{п.в.}0$.

Доказательство. Введём обозначения: D – это множество всех точек, где f_n не стремится к 0, $A_n=|f_n|_{>a_n}$, $B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, $A_\infty=\overline{\lim}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. Пусть $t\in\Omega$ – произвольная точка, где $f_n(t)$ не стремится к нулю. Для любого $n\in\mathbb{N}$ существует $k\geq n$, при котором $f_k(t)>a_k$, то есть $t\in B_n$. Таким образом, $D\subset B_n$ при всех n и $D\subset A_\infty$. В то же время, по условию,

$\sum_1^\infty \mu(A_n) < \sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$. Применим часть (ii) леммы о верхнем пределе множеств: $\mu(D) \le \mu(A_\infty) = 0$. □

Теорема 2. Любая последовательность измеримых функций, сходящаяся по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Доказательство. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Зафиксируем $a_n, \varepsilon_n > 0$, удовлетворяющие условию предыдущей леммы, и выберем возрастающую последовательность индексов m_n так, что $\mu\left(| f_{m_n} - f |_{>a_n}\right) < \varepsilon_n$. Согласно лемме 2, $f_{m_n} - f \xrightarrow{п.в.} 0$ и $f_{m_n} \xrightarrow{п.в.} f$. □

Теорема 3 (критерий сходимости по мере). Последовательность измеримых функций f_n сходится по мере к функции f в том и только том случае, если любая подпоследовательность последовательности f_n, в свою очередь, содержит подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.

Доказательство. Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тогда каждая подпоследовательность последовательности f_n также сходится по мере и, согласно предыдущей теореме, содержит подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду. Обратно, пусть f_n не сходится по мере к f. Тогда существуют такие $a, \varepsilon > 0$ и такая подпоследовательность g_n последовательности f_n, что ни одна из функций g_n не лежит в окрестности $U_{a,\varepsilon}(f)$. Тогда подпоследовательность g_n не содержит сходящихся по мере к f подпоследовательностей, а следовательно, согласно теореме 1, не содержит и сходящихся почти всюду к f подпоследовательностей. □

Следствие 1. Если $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $G(f_n, g_n) \xrightarrow{\mu} G(f, g)$. Отсюда следует, в частности, что $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$; $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$.

Доказательство. Нужно воспользоваться предыдущим критерием и соответствующим свойством сходимости почти всюду. □

Следствие 2 (теорема п. 3.2.1). Пусть X, Y и Z – множества измеримых функций на Ω; X п.в.-плотно в Y, Y п.в.-плотно в Z, тогда X п.в.-плотно в Z.

Доказательство. Согласно теореме 1, X плотно в Y и Y плотно в Z в топологии сходимости по мере. Следовательно (упражнение 4 п. 1.2.1), X плотно в Z в топологии сходимости по мере. Следовательно, по теореме 2 п. 3.2.2, X будет и *секвенциально плотным* в Z в смысле сходимости по мере, то есть для любого $f \in Z$ существует такая последовательность

f_n элементов множества X, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Остаётся воспользоваться теоремой 2. □

Упражнения

1. Решите упражнение 4 п. 3.2.2, опираясь на результаты настоящего параграфа.
2. Пусть f_n – это последовательность Коши в смысле сходимости по мере (см. упражнение 9 п. 3.2.2). Тогда она содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.
3. Если последовательность измеримых функций – это последовательность Коши в смысле сходимости по мере, то она имеет предел в том же смысле.
4. Пусть в каком-то пространстве X измеримых функций на некотором пространстве с мерой сходимость почти всюду совпадает со сходимостью в какой-то топологии τ на X. Тогда в X сходимость почти всюду совпадает со сходимостью по мере.
5. Сходимость почти всюду в пространстве всех измеримых функций на отрезке нельзя задать никакой топологией.
6. Подмножество всех непрерывных функций п.в.-плотно в пространстве всех измеримых функций на отрезке.
7. Пусть A_n – убывающая последовательность множеств. Тогда $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$.
8. Для возрастающей цепочки множеств A_n также $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$, так как в этом случае $\overline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
9. Приведите пример, где $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) \neq \overline{\lim} \mu(A_n)$.

3.2.4. Теорема Егорова

Функции $g_n(x) = x^n$ на отрезке $[0,1]$ представляют собой типичный пример последовательности, сходящейся в каждой точке, но не сходящейся равномерно. В то же время сходимость можно улучшить, убрав сколь угодно малую окрестность точки 1: на оставшемся отрезке $[0,1-\varepsilon]$ сходимость уже будет равномерной. Аналогичная ситуация возникает в теории степенных рядов: ряд сходится к своей сумме равномерно не во всём круге сходимости, но в любом круге чуть меньшего радиуса. Эти эффекты служат частными случаями следующего весьма общего результата.

Теорема Егорова. Пусть $f_n \to f$ почти всюду на Ω. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A = A_\varepsilon \in \Sigma$ с $\mu(A) < \varepsilon$, на дополнении к которому последовательность f_n равномерно сходится к f.

Доказательство. Зафиксируем $a_n, \varepsilon_n > 0,\ a_n \to 0,\ \sum_1^\infty \varepsilon_n < \varepsilon.$ Рассмотрим множества $A_{m,n} = |f_m - f|_{>a_n}$ и $B_{m,n} = \bigcup_{k=m}^\infty A_{k,n}$. При фиксированном n множества $B_{m,n}$ образуют убывающую по m цепочку множеств, и $\mu\left(\bigcap_{m=1}^\infty B_{m,n}\right) = 0$ (поскольку $\bigcap_{m=1}^\infty B_{m,n}$ содержится в пренебрежимом множестве – множестве D всех точек, где f_n не стремится к f). Следовательно, $\mu(B_{m,n}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$ Для каждого n выберем такой индекс m_n, что $\mu(B_{m_n,n}) < \varepsilon_n$. Докажем, что $A = \bigcup_{n=1}^\infty B_{m_n,n}$ и будет требуемым множеством. Во-первых, $\mu(A) \le \sum_1^\infty \varepsilon_n < \varepsilon.$ Далее, $\Omega \setminus A \subset \Omega \setminus B_{m_n,n}$, то есть для любого $k > m_n$ множество $A_{k,n} = |f_k - f|_{>a_n}$ не содержит точек множества $\Omega \setminus A.$ Следовательно, $\sup\limits_{t\in\Omega\setminus A} |f_k(t) - f(t)| \le a_n$ при $k > m_n$. Это и означает требуемую равномерную сходимость на $\Omega \setminus A.$ □

Упражнения

1. Из упражнения 6 предыдущего пункта и теоремы Егорова выведите следующую теорему Лузина: для любой измеримой по Лебегу функции f на отрезке $[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество A с $\mu(A) < \varepsilon,$ что ограничение функции f на $[a,b] \setminus A$ непрерывно.
2. В формулировке теоремы Лузина множество A можно выбрать открытым.
3. Можно ли в формулировке теоремы Егорова условие $\mu(A) < \varepsilon$ заменить условием $\mu(A) = 0$? Аналогичный вопрос для теоремы Лузина.
4. Можно ли в формулировке теоремы Егорова последовательность f_n, сходящуюся почти всюду, заменить последовательностью, сходящейся по мере?
5. Где в доказательстве теоремы Егорова сыграла свою роль измеримость участвующих в формулировке функций?

3.3. Комментарии к упражнениям

Параграф 3.1.1

Упражнение 2. Обозначим супремум значений функции f на $[a,b]$ через a. Тогда множество точек максимума функции f совпадает с $f_{=a}$.

Упражнение 3. Выпишем все интервалы с рациональными концами в последовательность $(a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N},$ а множество точек «настоящего» максимума функции f на (a_n, b_n) обозначим M_n. Искомое множество точек локального максимума функции f совпадает с $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Упражнение 12. Взять в качестве (Ω_1, Σ_1) отрезок $[0,1]$, наделённый σ-алгеброй измеримых по Лебегу множеств, в качестве (Ω_2, Σ_2) – тот же отрезок с σ-алгеброй борелевских множеств, а в качестве f – тождественное отображение.

Упражнение 13. а) Не должно (даже для функциии $g(x) = x$).

б) Не должно. Пусть g – это лестница Кантора (п. 2.3.6), продолженная на $(-\infty, 0)$ нулём, а на $(1, +\infty)$ – единицей. Пусть $B \subset [0,1]$ – какое-то неизмеримое по Лебегу множество. Не нарушая общности, можно считать, что B состоит только из иррациональных чисел (иначе заменим B на $B \setminus \mathbb{Q}$). В качестве требуемого A возьмём $g^{-1}(B)$. A – подмножество канторова множества, следовательно, $\lambda(A) = 0$, то есть A измеримо по Лебегу. При этом $f(A) = B$ – неизмеримо.

в) Может. Для построения примера нужно придумать непрерывную строго монотонную функцию, переводящую некоторое множество положительной меры в множество меры 0.

Упражнение 14. Нужно представить A в виде объединения последовательности компактов, а образ компакта при непрерывном отображении – снова компакт.

Упражнение 15. Может. Простого примера автор не знает. Множество, являющееся образом борелевского при непрерывном отображении, называется аналитическим множеством, или проективным множеством класса 1. Существование аналитического множества, не являющегося борелевским, – это частный случай теоремы VI § 38 гл. 3 учебника [Kur], т. 1.

Параграф 3.2.3

Упражнение 6. Непрерывными функциями можно приблизить характеристические функции отрезков; линейными комбинациями характеристических функций отрезков – характеристические функции открытых множеств; характеристическими функциями открытых множеств – характеристические функции любых измеримых по Лебегу множеств, линейными комбинациями характеристических функций измеримых множеств (то есть конечнозначными функциями) – простые функции, а простыми – любые измеримые. В гораздо более общей ситуации аналогичное утверждение будет доказано в п. 8.3.3.

Параграф 3.2.4

Упражнение 1. В более общей ситуации теорема Лузина будет доказана в п. 8.3.3.

4. Интеграл Лебега

4.1. Сходимость по направленности. Разбиения

4.1.1. Направленности

Напомним, что отношение $\succ$ на множестве G называется *отношением порядка*, если оно подчиняется следующим условиям:

1. $g \succ g$ для любого $g \in G$ (рефлексивность);
2. Если $g_2 \succ g_1$ и $g_1 \succ g_2$, то $g_1 = g_2$ (антисимметричность);
3. Если $g_2 \succ g_1$ и $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$ (транзитивность).

Множество G с введённым на нём бинарным отношением $\succ$ называется *направленным множеством* или *направленностью*, если выполнены следующие аксиомы:

(a) $g \succ g$ для любого $g \in G$;

(b) если $g_2 \succ g_1$ и $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$;

(c) для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$ существует элемент g_3, следующий за ними обоими: $g_3 \succ g_1$ и $g_3 \succ g_2$.

Отметим, что часто в определении направленного множества требуют, чтобы отношение $\succ$ было отношением порядка, в нашем же определении направленность может не подчиняться аксиоме 2 отношения порядка.

Упражнения

В каких из нижеперечисленных примеров отношение $\succ$ на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел будет отношением порядка? В каких примерах $(\mathbb{Z}, \succ)$ будет направленным множеством?

1. $n_1 \succ n_2$, если $n_1 > n_2$.
2. $n_1 \succ n_2$, если $n_1 \geq n_2$.
3. $n_1 \succ n_2$, если $n_1 \leq n_2$.
4. $n_1 \succ n_2$, если $|n_1| \geq |n_2|$.
5. $n_1 \succ n_2$, если $n_1 \geq n_2$ и n_1 делится нацело на n_2.
6. $n_1 \succ n_2$, если $n_1 \geq n_2$ и $n_1 - n_2$ делится нацело на 2.

Пусть $(G, \succ)$ – направленное множество. Назовём элементы $g_1, g_2 \in G$ эквивалентными $(g_1 \sim g_2)$, если $g_2 \succ g_1$ и $g_1 \succ g_2$.

7. Проверьте, что отношение «~» будет отношением эквивалентности.

4.1.2. Предел по направленности. Критерий Коши

Пусть $(G, \succ)$ – направленное множество, $f : G \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* f *по направленности* $(G, \succ)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $g \in G$, что для любого $g_1 \succ g$ выполнено неравенство $|f(g_1) - a| < \varepsilon$. Обозначения: $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, или, если направленность понятна из контекста, $a = \lim\limits_{g} f(g)$. Функция $f : G \to \mathbb{R}$ называется *сходящейся по направленности* $(G,\succ)$, если существует $\lim\limits_{(G,\succ)} f$.

Отметим простейшие свойства предела по направленности:

1. Если $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, то для любого $g \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $g_1 \succ g$, что $|f(h) - a| < \varepsilon$ для любого $h \succ g_1$.
2. Если $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$ и $b = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, то $a = b$ (единственность предела).
3. Пусть для функций f_1, f_2 существует такое $g \in G$, что $f_1(h) = f_2(h)$ для любого $h \succ g$. Тогда если одна из этих функций сходится по направленности $(G,\succ)$, то и другая сходится, и $\lim\limits_{(G,\succ)} f_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$. Поэтому для определения предела функция не обязана быть определённой на всём G. Достаточно, чтобы функция была определена для всех h, следующих за некоторым фиксированным элементом $g \in G$.
4. Пусть $f_1 \le f_2$ и пределы функций f_1 и f_2 по направленности G существуют. Тогда $\lim\limits_{(G,\succ)} f_1 \le \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$.
5. Пусть $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$, $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$ и функция двух переменных $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке (a_1, a_2). Тогда $\lim\limits_{g} F(f_1(g), f_2(g))$ существует и равен $F(a_1, a_2)$.
6. Для любого скаляра $t \in \mathbb{R}$, если существует $\lim\limits_{(G,\succ)} f$, то существует $\lim\limits_{(G,\succ)} tf$ и $\lim\limits_{(G,\succ)} tf = t \lim\limits_{(G,\succ)} f$.
7. Если $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$ и $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$, то $a_1 + a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} (f_1 + f_2)$.

Докажем для примера свойство 5 (кстати, свойства 6 и 7 следуют из 5). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ таким образом, что для любой точки $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, если $\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} < \delta$, то $|F(a_1, a_2) - F(b_1, b_2)| < \varepsilon$. Так как $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$, то существует такое $g \in G$, что для любого $h \succ g$ выполнено неравенство $|f_1(h) - a_1| < \delta$. Поскольку $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$, то по первому из вышеперечисленных свойств существует такой элемент $g_1 \succ g$, что $|f_2(h) - a_2| < \delta$ для любого $h \succ g_1$. Тогда для любого $h \succ g_1$ одновременно выполняются оба неравенства $|f_1(h) - a_1| < \delta$ и

$|f_2(h)-a_2|<\delta.$ Таким образом, для любого $h \succ g_1$ имеем $|F(a_1,a_2)-F(f_1(h),f_2(h))|<\varepsilon,$ что и требовалось доказать.

Теорема (критерий Коши сходимости по направленности). Для того, чтобы функция $f: G \to \mathbb{R}$ сходилась по направленности $(G,\succ)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой элемент $g \in G,$ что $|f(g)-f(h)|<\varepsilon$ для любого $h \succ g$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f сходится по $(G,\succ)$ и $\lim\limits_{g} f(g)=a$. По определению предела, для любого $\varepsilon>0$ существует такой элемент $g \in G,$ что для любого $h \succ g$ выполнено неравенство $|f(h)-a|<\varepsilon/2$. Тогда для любого h, следующего за g, $|f(g)-f(h)| \le |f(g)-a|+|a-f(h)|<\varepsilon$.

Достаточность. Воспользуемся вначале условием с $\varepsilon=1$. Пусть $g_1 \in G$ – такой элемент, что $|f(g_1)-f(h)|<1$ для любого $h \succ g_1$. Теперь воспользуемся условием с $\varepsilon=1/2$. Обозначим через g_2 такой элемент, что $g_2 \succ g_1$ и $|f(g_2)-f(h)|<1/2$ для любого h, следующего за g_2. Продолжая это рассуждение, получим такую последовательность $g_1 \prec g_2 \prec g_3 \prec \ldots$, что для любого $h \succ g_n$ выполнено неравенство $|f(g_n)-f(h)|<1/n$. В частности, $|f(g_n)-f(g_m)|<1/n$ для любых $m,n \in \mathbb{N},\ \ m>n$. Таким образом, числовая последовательность $f(g_n)$ подчиняется условию Коши и, следовательно, сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} f(g_n)$ через a. Докажем, что $\lim\limits_{g} f(g)=a$. Действительно, для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что $\dfrac{2}{n_0}<\varepsilon$. По построению, для любого $h \succ g_{n_0}$ имеем $\left|f(g_{n_0})-f(h)\right|<\dfrac{1}{n_0}$. В частности, так как $g_n \succ g_{n_0}$ для любого $n>n_0$, получаем, что для любого $n>n_0$ и любого $h \succ g_{n_0}$ выполнена оценка

$$|f(g_n)-f(h)| \le \left|f(g_n)-f(g_{n_0})\right|+\left|f(g_{n_0})-f(h)\right|<\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

Перейдя в полученном неравенстве $|f(g_n)-f(h)|<\varepsilon$ к пределу при $n\to\infty$, получим, что $|a-f(h)|\le\varepsilon$ для любого $h \succ g_{n_0}$. □

Упражнения

1. Зададим на $\mathbb{R}$ естественную направленность: $a \succ b$, если $a \geq b$. Проверьте, что предел функции по этой направленности совпадает с пределом при $t \to +\infty$.
2. Опишите другие известные из курса анализа примеры пределов ($\lim\limits_{t\to-\infty}$, $\lim\limits_{t\to\infty}$, $\lim\limits_{t\to a}$, $\lim\limits_{t\to a-0}$) как пределы по соответствующим направленностям.
3. Интеграл Римана определяется как предел интегральных сумм. Запишите этот тип пределов также как предел по некоторой направленности.
4. Пусть $\mathbb{N}_f$ – семейство всех конечных подмножеств множества натуральных чисел. Будем считать, что конечное множество A следует за конечным множеством B, если $A \supset B$. Проверьте, что в таком отношении порядка $\mathbb{N}_f$ – направленное множество.
5. Пусть a_n – произвольная числовая последовательность. Определим функцию $s : \mathbb{N}_f \to \mathbb{R}$ формулой $s(A) = \sum\limits_{n\in A} a_n$. Докажите, что у функции s существует предел по направленности $\mathbb{N}_f$ в том и только том случае, если ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится абсолютно. В этом случае $\lim\limits_A s(A) = \sum\limits_1^\infty a_n$.
6. Определить предел по направленности для функций со значениями в произвольном топологическом пространстве. Доказать, что для функций со значениями в полных метрических пространствах выполнен критерий Коши сходимости по направленности.

4.1.3. Разбиения

Начиная с этого момента и вплоть до конца раздела 4.5, (Ω, Σ, μ) будет фиксированным пространством с конечной мерой, A будет измеримым подмножеством в Ω (то есть $A \in \Sigma$). Функции f, f_n, если не оговорено противное, определены на A и принимают вещественные значения.

Пусть $A \in \Sigma$ – произвольное непустое множество. *Разбиением множества A* называется конечный или счётный набор D попарно непересекающихся непустых измеримых подмножеств $\Delta_k \subset A$, $k = 1,2,\ldots$, дающих в объединении всё A. Чтобы не разбирать каждый раз отдельно случаи конечного и счётного числа элементов в разбиении, в дальнейшем мы будем записывать разбиения как наборы счётного числа измеримых подмножеств, подразумевая, что случай конечного числа также возможен.

Разбиение $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества A назовём *допустимым* для функции f, если для каждого элемента $\Delta_k \in D$ ненулевой меры $\sup\limits_{t\in\Delta_k}|f(t)|<\infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sup\limits_{t\in\Delta_k}\big[|f(t)|\mu(\Delta_k)\big]<\infty$.

По определению, разбиение $D_1=\{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ следует за разбиением $D_2=\{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, если D_1 является измельчением разбиения D_2. Другими словами, $D_1 \succ D_2$, если для любых $k, j\in\mathbb{N}$ из того, что Δ_k^1 пересекается с Δ_j^2, следует, что Δ_k^1 содержится в Δ_j^2.

Теорема 1. Если разбиение $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества A допустимо для функции f, то любое более мелкое разбиение $D_1=\{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}\succ D$ также допустимо.

Доказательство. Сгруппируем множества Δ_k^1, попавшие на один и тот же элемент разбиения D:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k^1}|f(t_k)|\mu(\Delta_k^1)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j}\sup_{t\in\Delta_k^1}|f(t)|\mu(\Delta_k^1)\le\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_j}|f(t)|\sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j}\mu(\Delta_k^1)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_j}|f(t)|\mu(\Delta_j)<\infty.$$

Теорема доказана. □

Следующие свойства допустимых разбиений предлагаем читателю проверить самостоятельно.

1. Пусть разбиение D допустимо для функции f, $a\in\mathbb{R}$ − произвольный скаляр. Тогда разбиение D допустимо для функции af.
2. Пусть разбиение D допустимо одновременно для двух функций f и g. Тогда это разбиение D допустимо для функции $f+g$.

Пусть $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ − разбиение множества A. Последовательность $T=\{t_k\}_1^{\infty}\subset\Omega$ называется *набором отмеченных точек для* D, если $t_k\in\Delta_k$ для любого $k\in\mathbb{N}$. Пусть (D_1,T_1) и (D_2,T_2) − разбиения с соответствующими наборами отмеченных точек. По определению, пара (D_1,T_1) следует за парой (D_2,T_2), если D_1 следует за D_2.

Упражнения

1. Проверьте, что для разбиений $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ множества A следующие условия эквивалентны:
   (a) $D_1 \succ D_2$;
   (b) для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $j \in \mathbb{N}$, что $\Delta_k^1 \subset \Delta_j^2$;
   (c) для любого $j \in \mathbb{N}$ существует такое подмножество индексов $A \subset \mathbb{N}$, что $\bigcup\limits_{k \in A} \Delta_k^1 = \Delta_j^2$.
2. Проверьте, что введённое отношение $\succ$ на множестве всех разбиений множества A есть отношение порядка.
3. Пусть $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ и $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ – разбиения множества A. Определим разбиение D_3, выписав в последовательность все непустые множества вида $\Delta_k^1 \cap \Delta_j^2$, $k, j \in \mathbb{N}$. Докажите, что D_3 следует как за D_1, так и за D_2, то есть семейство всех разбиений множества A образует направленность.
4. Пусть D_1, D_2 и D_3 – разбиения из предыдущего упражнения. Покажите, что если разбиение D следует одновременно за D_1 и D_2, то $D \succ D_3$.
5. Докажите, что множество всех пар вида (D, T) – разбиений с выделенными точками, образует направленность.

4.2. Интегрируемые функции

4.2.1. Интегральные суммы

Определение 1. Пусть $A \in \Sigma$, $f : A \to \mathbb{R}$ – некоторая функция; $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустимое разбиение множества A, $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ – набор отмеченных точек. *Интегральной суммой* функции f по множеству A, соответствующей паре (D, T), называется число $S_A(f, D, T) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$.

Отметим, что допустимость разбиения D гарантирует абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$ в определении интегральной суммы. Эта абсолютная сходимость нужна для того, чтобы интегральная сумма зависела от самого разбиения с выделенными точками, а не от того, в каком порядке выписаны элементы этого разбиения.

Следующие свойства интегральных сумм предлагаем читателю проверить самостоятельно.

1. $S_A(af,D,T)=aS_A(f,D,T)$.
2. $S_A(f+g,D,T)=S_A(f,D,T)+S_A(g,D,T)$.
3. Если $f\ge 0$ на множестве A, то $S_A(f,D,T)\ge 0$.
4. Если $f\ge g$ на множестве A, то $S_A(f,D,T)\ge S_A(g,D,T)$.
5. Если на множестве A функция f тождественно равна некоторой константе a, то любое разбиение D допустимо для f и $S_A(f,D,T)=a\mu(A)$.
6. Если на множестве A выполнена оценка $a\le f$, то $a\mu(A)\le S_A(f,D,T)$.
7. Если на множестве A выполнена оценка $f\le b$, то $S_A(f,D,T)\le b\mu(A)$.

По аналогии с интегральными суммами Римана можно ввести верхние и нижние интегральные суммы для разбиений общего вида.

Определение 2. Пусть $f:A\to\mathbb{R}$ – некоторая функция на измеримом множестве A, $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустимое разбиение множества A. *Верхней интегральной суммой функции* f по разбиению D называется число $\overline{S}_A(f,D)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sup\limits_{\mathbf{t}\in\Delta_\mathbf{k}}[f(t)\mu(\Delta_k)]$, а *нижней интегральной суммой* – число $\underline{S}_A(f,D)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\inf\limits_{\mathbf{t}\in\Delta_\mathbf{k}}[f(t)\mu(\Delta_k)]$.

Замечание. Согласно определению допустимого разбиения, для каждого $\Delta_k\in D$ ненулевой меры $\sup\limits_{t\in\Delta_k}|f(t)|<\infty$. Поэтому все слагаемые $\sup\limits_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu(\Delta_k)]$ и $\inf\limits_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu(\Delta_k)]$ в определении вехней и нижней интегральной суммы конечны. Конечными будут и сами суммы ввиду условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sup\limits_{t\in\Delta_k}\big[|f(t)|\mu(\Delta_k)\big]<\infty$. В дальнейшем при записи верхних и нижних интегральных сумм мы будем учитывать, что слагаемые, соответствующие $\Delta_k\in D$ с $\mu(\Delta_k)=0$, сами равны нулю. Остальные же слагаемые можно записывать в виде $\sup\limits_{t\in\Delta_k}f(t)\mu(\Delta_k)$ и $\inf\limits_{t\in\Delta_k}f(t)\mu(\Delta_k)$, не опасаясь получить неопределённое выражение вида $\infty\cdot 0$.

Лемма. Пусть $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – допустимое для функции f разбиение множества A. Тогда

(1) для любого выбора T отмеченных точек $\underline{S}_A(f,D)\le S_A(f,D,T)\le$ $\le\overline{S}_A(f,D)$.

(2) Пусть, далее, $D_1\succ D$. Тогда $\underline{S}_A(f,D)\le\underline{S}_A(f,D_1)\le\overline{S}_A(f,D_1)\le\overline{S}_A(f,D)$.

Наконец,
(3) $\underline{S}_A(f,D)=\inf\limits_T S_A(f,D,T)$ и $\overline{S}_A(f,D)=\sup\limits_T S_A(f,D,T)$.

Доказательство

(1) Так как $t_k\in\Delta_k$, то $\inf\limits_{t\in\Delta_k} f(t)\le f(t_k)\le \sup\limits_{t\in\Delta_k} f(t)$ для любого $k\in\mathbb{N}$, откуда следует требуемая оценка.

(2) Пусть $D_1=\{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$. Сгруппируем множества Δ_k^1, попавшие на один и тот же элемент разбиения D:

$$\overline{S}_A(f,D_1)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j}\sup_{t\in\Delta_k^1} f(t)\mu(\Delta_k^1)\le\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_j} f(t)\sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j}\mu(\Delta_k^1)=\overline{S}_A(f,D).$$

Аналогично проверяется и неравенство $\underline{S}_A(f,D)\le\underline{S}_A(f,D_1)$.

(3) Чтобы доказать равенство $\overline{S}_A(f,D)=\sup\limits_T S_A(f,D,T)$, для любого $\delta>0$ построим такой набор $T_\delta=\{t_k\}_1^{\infty}$ отмеченных точек, что $f(t_k)\ge\sup\limits_{t\in\Delta_k} f(t)-\delta$. Имеем

$$S_A(f,D,T_\delta)\ge\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu(\Delta_k)\right]-\sum_{k=1}^{\infty}\delta\mu(\Delta_k)=\overline{S}_A(f,D)-\delta\mu(A),$$

что ввиду произвольности δ доказывает требуемое соотношение. Равенство $\underline{S}_A(f,D)=\inf\limits_T S_A(f,D,T)$ выводится аналогично. □

Упражнения

1. Вообще говоря, сумма ряда может изменяться при перестановке слагаемых. Почему мы имели право перегруппировывать слагаемые в оценках из доказательства леммы?

2. Пусть $D_1=\{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ – допустимое для f разбиение множества A, $D_2\succ D_1$, $D_2=\{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$. Определим счётнозначные функции $\bar{f}_i,\underline{f}_i$, $i=1,2$ по правилу $\bar{f}_i=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sup\limits_{t\in\Delta_k^i} f(t)\mathbf{1}_{\Delta_k^i}$, $\underline{f}_i=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\inf\limits_{t\in\Delta_k^i} f(t)\mathbf{1}_{\Delta_k^i}$. Проверьте, что в каждой точке множества A выполнены неравенства $\underline{f}_1\le\underline{f}_2\le\bar{f}_2\le\bar{f}_1$.

4.2.2. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега

Определение 1. Пусть $A\in\Sigma$ – измеримое множество, $f:A\to\mathbb{R}$ – некоторая функция на A. Число $a\in\mathbb{R}$ называется *интегралом* (интегралом Лебега) функции f на множестве A по мере μ (обозначение: $a = \int\limits_A f d\mu$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое допустимое разбиение D_ε множества A, что для любого разбиения D, следующего за D_ε, и любого выбора отмеченных точек T для D, $\left|a - S_A(f, D, T)\right| \le \varepsilon$. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой* на множестве A по мере μ, если для неё существует соответствующий интеграл.

Другими словами, функция f интегрируема на A, если, начиная с некоторого разбиения, интегральные суммы определены и существует предел интегральных сумм по направленности разбиений с отмеченными точками, описанной в п. 4.1.3. Этот предел называется интегралом Лебега и обозначается $\int\limits_A f d\mu$.

Следующие утверждения об интеграле Лебега непосредственно вытекают из соответствующих свойств интегральных сумм и свойств предела по направленности.

1. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функция λf также интегрируема и $\int\limits_A \lambda f d\mu = \lambda \int\limits_A f d\mu$.
2. Если функции f и g интегрируемы на A, то $f + g$ также интегрируема и $\int\limits_A (f + g) d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_A g d\mu$.
3. Если интегрируемая функция f больше или равна нуля на множестве A, то $\int\limits_A f d\mu \ge 0$.
4. Если $f \ge g$ на множестве A, f и g интегрируемы на A, то $\int\limits_A f d\mu \ge \int\limits_A g d\mu$.
5. Если $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция, $f \ge 0$ и $\int\limits_A f d\mu = 0$, то все функции g, подчиняющиеся неравенству $0 \le g \le f$, также интегрируемы на A с $\int\limits_A g d\mu = 0$.
6. Пусть $a \in \mathbb{R}$ – некоторая константа. Тогда $\int\limits_A a d\mu = a\mu(A)$.
7. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция, $a \in \mathbb{R}$ и $f \le a$ на A. Тогда $\int\limits_A f d\mu \le a\mu(A)$. Аналогично, если $f \ge b$, то $\int\limits_A f d\mu \ge b\mu(A)$.

Теорема 1. Для функции $f : A \to \mathbb{R}$, $A \in \Sigma$, следующие условия эквивалентны:

(1) функция интегрируема и $\int\limits_A f d\mu = a$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое допустимое разбиение D_ε множества A, что при любом выборе T отмеченных точек $\left|a - S_A\left(f, D_\varepsilon, T\right)\right| < \varepsilon$;

(3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое допустимое разбиение D_ε множества A, что соответствующие верхняя и нижняя интегральные суммы функции f приближают a с точностью до ε: $\left|a - \overline{S}_A\left(f, D_\varepsilon\right)\right| \le \varepsilon$ и $\left|a - \underline{S}_A\left(f, D_\varepsilon\right)\right| \le \varepsilon$.

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна. Импликация $(2) \Rightarrow (3)$ вытекает из леммы, доказанной в предыдущем параграфе (п. (3) леммы). Действительно, по условию все интегральные суммы $S_A\left(f, D_\varepsilon, T\right)$ лежат на отрезке $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, следовательно, $\underline{S}_A\left(f, D\right) = \inf\limits_T S_A\left(f, D, T\right)$ и $\overline{S}_A\left(f, D\right) = \sup\limits_T S_A\left(f, D, T\right)$ лежат на том же отрезке. Из той же леммы вытекает и импликация $(3) \Rightarrow (1)$. А именно, пусть D_ε – разбиение из условия (3). Согласно отмеченной лемме, для любого разбиения D, следующего за D_ε, имеют место оценки

$$a - \varepsilon \le \underline{S}_A\left(f, D_\varepsilon\right) \le \underline{S}_A\left(f, D\right) \le \overline{S}_A\left(f, D\right) \le \overline{S}_A\left(f, D_\varepsilon\right) \le a + \varepsilon.$$

Далее, для любого выбора отмеченных точек $T = \{t_k\}_1^\infty$ для D, $\underline{S}_A\left(f, D\right) \le S_A\left(f, D, T\right) \le \overline{S}_A\left(f, D\right)$. Следовательно, $a - \varepsilon \le S_A\left(f, D, T\right) \le a + \varepsilon$ и $\left|a - S_A\left(f, D, T\right)\right| \le \varepsilon$. □

Пример 1. Пусть $\{A_k\}_1^\infty$ – разбиение множества $A \in \Sigma$ на измеримые подмножества, $f = \sum\limits_1^\infty a_k \mathbf{1}_{A_k}$ – счётнозначная измеримая функция и ряд $\sum\limits_1^\infty a_k \mu\left(A_k\right)$ сходится абсолютно. Тогда функция f интегрируема на A и $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_1^\infty a_k \mu\left(A_k\right)$.

Действительно, если в качестве разбиения D взять разбиение множества A на $\{A_k\}_1^\infty$, то $\underline{S}_A\left(f, D\right) = \overline{S}_A\left(f, D\right) = \sum\limits_1^\infty a_k \mu\left(A_k\right)$. Остаётся применить условие (3) теоремы 1 с $D_\varepsilon = D$. □

Согласно критерию Коши сходимости по направленности, функция $f : A \to \mathbb{R}$ интегрируема на множестве A в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такое допустимое разбиение D_ε множества

A и такой выбор T отмеченных точек, что $\left|S_A(f,D_\varepsilon,T)-S_A\left(f,D,\widetilde{T}\right)\right|<\varepsilon$ для любого $D\succ D_\varepsilon$ и любого выбора $\widetilde{T}$ отмеченных точек разбиения D.

Так как по лемме предыдущего пункта все возможные значения сумм вида $S_A\left(f,D,\widetilde{T}\right)$ заполняют отрезок $\left[\underline{S}_A(f,D_\varepsilon),\overline{S}_A(f,D_\varepsilon)\right]$, получаем следующую полезную переформулировку критерия Коши.

Теорема 2. Функция $f:A\to\mathbb{R}$ интегрируема на множестве A в том и только том случае, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое допустимое разбиение D_ε множества A, что соответствующие верхняя и нижняя интегральные суммы функции f отличаются меньше чем на ε: $\left|\overline{S}_A(f,D_\varepsilon)-\underline{S}_A(f,D_\varepsilon)\right|<\varepsilon$. □

Теорема 3. Пусть $f:A\to\mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Тогда $|f|$ также интегрируем.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, а $D_\varepsilon=\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ – разбиение из предыдущей теоремы для функции f. Тогда

$$\left|\overline{S}_A(|f|,D_\varepsilon)-\underline{S}_A(|f|,D_\varepsilon)\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{t\in\Delta_k}\left[|f(t)|\mu(\Delta_k)\right]-\inf_{t\in\Delta_k}\left[|f(t)|\mu(\Delta_k)\right]\right)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu(\Delta_k)\right]-\inf_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu(\Delta_k)\right]\right)=\overline{S}_A(f,D_\varepsilon)-\underline{S}_A(f,D_\varepsilon)<\varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon>0$ мы доказали существование разбиения D_ε с $\left|\overline{S}_A(|f|,D_\varepsilon)-\underline{S}_A(|f|,D_\varepsilon)\right|<\varepsilon.$ По теореме 2 этим доказана интегрируемость функции $|f|$. □

Следствие 1. Пусть $f:A\to\mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Тогда функции f^+ и f^- также интегрируемы.

Доказательство. Напомним, что, по определению, $f^+(t)$ совпадает с $f(t)$ для тех t, где $f(t)>0$; для тех же t, где $f(t)\le 0$, $f^+(t)=0.$ Аналогично, $f^-(t)=|f(t)|$ в точках, где $f(t)\le 0$, в остальных же точках $f^-(t)=0.$ Ввиду равенств $f^+=\frac{1}{2}\left(f+|f|\right)$ и $f^-=\frac{1}{2}\left(|f|-f\right)$ требуемое утверждение следует из предыдущей теоремы и уже отмеченных свойств интеграла. □

Следствие 2. Пусть f и g – две интегрируемые функции. Тогда функции $\max\{f,g\}$ и $\min\{f,g\}$ тоже интегрируемы.

Доказательство. Непосредственно вытекает из формул $\max\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ и $\min\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$. □

4.2.3. Упражнения

1. Докажите импликацию $(1)\Rightarrow(2)$ теоремы 1 п. 4.2.2.
2. Докажите теорему 2 п. 4.2.2.
3. Почему в доказательстве теоремы 3 п. 4.2.2 D_ε – допустимое разбиение для функции $|f|$?
4. Проверьте формулы $f^+=\frac{1}{2}(f+|f|)$, $f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)$, $\max\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ и $\min\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ из доказательств двух последних следствий.
5. Пусть A – множество меры 0. Докажите, что любая функция f на A интегрируема и $\int_A fd\mu=0$.
6. Пусть f и g – две функции, заданные на измеримом множестве A и совпадающие почти всюду. Тогда, если f интегрируема, то g также интегрируема и $\int_A gd\mu=\int_A fd\mu$.
7. Пусть функции f и g интегрируемы на A и $f\le g$ почти всюду. Тогда $\int_A fd\mu\le\int_A gd\mu$.
8. Пусть Σ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[a,b]$, λ – мера Лебега на отрезке, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – интегрируемая по Риману функция. Опираясь на теорему 1 п. 4.2.2, докажите, что функция f будет интегрируема по Лебегу на $[a,b]$ и $\int_{[a,b]} fd\lambda=\int_a^b f(t)dt$.
9. Более общий результат. Пусть $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ – монотонно неубывающая функция Стилтьеса, μ – соответствующая борелевская мера, порождённые F как функцией распределения (см. п. 2.3.5). Тогда каждая интегрируемая по Стилтьесу функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема на $[a,b]$ по мере μ и $\int_{[a,b]} fd\mu=\int_a^b f(t)dF(t)$.

10. Пусть $A \subset [a,b]$ – плотное на отрезке множество лебеговской меры ноль. Докажите, что функция $\mathbf{1}_A$ не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу на $[a,b]$. Чему равен $\int\limits_{[a,b]} \mathbf{1}_A d\lambda$?
11. Докажите, что функция $f(x) = 1/x$ неинтегрируема по мере Лебега на отрезке $(0,1]$.
12. Докажите следующую переформулировку теоремы 2 п. 4.2.2: функция $f : A \to \mathbb{R}$ интегрируема на множестве A в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого разбиения D множества A существует такое допустимое разбиение $D_\varepsilon \succ D$, что соответствующие верхняя и нижняя интегральные суммы функции f отличаются меньше чем на ε: $\left|\overline{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon$.
13. Приведите пример двух счётнозначных интегрируемых функций, произведение которых не интегрируемо.
14. Пусть μ – мера на $\mathbb{N}$, описанная в упражнении 5 п. 2.1.4. Тогда функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ интегрируема на $\mathbb{N}$ по мере μ в том и только том случае, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) b_n$ абсолютно сходится. В этом случае $\int\limits_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) b_n$.
15. Определение интеграла сохраняет смысл и для функций, принимающих комплексные значения. Проверьте выполнение свойств $\int\limits_A \lambda f d\mu = \lambda \int\limits_A f d\mu$, $\int\limits_A (f+g) d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_A g d\mu$ и неравенства $\left|\int\limits_A f d\mu\right| \le \int\limits_A |f| d\mu$ для комплекснозначных функций и комплексных скаляров.
16. Пусть f – комплекснозначная функция на A, f_1 и f_2 – соответственно вещественная и мнимая части функции f. Докажите, что f интегрируема в том и только том случае, если f_1 и f_2 интегрируемы, и $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A f_1 d\mu + i \int\limits_A f_2 d\mu$.
17. Проверьте для комплекснозначных функций выполнение эквивалентности $(1) \Leftrightarrow (2)$ теоремы 1, выполнение критерия интегрируемости счётнозначной функции (пример 1), а также утверждение теоремы 3 (все – из п. 4.2.2).

4.2.4. Интеграл как функция множества

Теорема 1. Пусть $f: A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция на A; B – измеримое подмножество в A. Тогда функция f интегрируема на B.

Доказательство. По теореме 2 параграфа 4.2.2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое допустимое разбиение $D_\varepsilon = \{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ множества A, что соответствующие верхняя и нижняя интегральные суммы функции f отличаются меньше, чем на ε: $\left|\overline{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon$. Рассмотрим множество K тех индексов k, для которых Δ_k пересекается с B. Тогда множества $\Delta_k^1 = B \bigcap \Delta_k$, $k \in K$ образуют допустимое разбиение множества B. Обозначим это разбиение через D_ε^1. Отметим, что $\sup\limits_{t \in \Delta_k^1} f(t) \le \sup\limits_{t \in \Delta_k} f(t)$, $\inf\limits_{t \in \Delta_k^1} f(t) \ge \inf\limits_{t \in \Delta_k} f(t)$ и $\mu(\Delta_k^1) \le \mu(\Delta_k)$. Оценим величину $\left|\overline{S}_A\left(f, D_\varepsilon^1\right) - \right.$ $\left. -\underline{S}_A\left(f, D_\varepsilon^1\right)\right|$.

$$\left|\overline{S}_B\left(f, D_\varepsilon^1\right) - \underline{S}_B\left(f, D_\varepsilon^1\right)\right| = \sum_{k \in K}\left(\sup_{t \in \Delta_k^1}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k^1\right)\right] - \inf_{t \in \Delta_k^1}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k^1\right)\right]\right)$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{t \in \Delta_k}\left[f(t)\mu(\Delta_k)\right] - \inf_{t \in \Delta_k}\left[f(t)\mu(\Delta_k)\right]\right) = \left|\overline{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon.$$

Мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение множества B, верхняя и нижняя интегральные суммы которого отличаются меньше, чем на ε. По теореме 2 п. 4.2.2 этим доказана интегрируемость функции f на B.

Теорема 2. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$ – непересекающиеся множества и функция f интегрируема как на A_1, так и на A_2. Тогда f интегрируема на $A_1 \bigcup A_2$ и $\int\limits_{A_1 \bigcup A_2} f d\mu = \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu$.

Доказательство. Обозначим $\int\limits_{A_i} f d\mu$ через a_i, $i = 1,2$. Воспользуемся условием (2) теоремы 1 параграфа 4.2.2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такие допустимые разбиения D_1 и D_2 множеств A_1 и A_2, что при любом выборе T_1, T_2 отмеченных точек $\left|a_i - S_{A_i}\left(f, D_i, T_i\right)\right| < \varepsilon$, $i = 1,2$. Образуем разбиение D множества $A_1 \bigcup A_2$, взяв в качестве элементов этого разбиения все элементы разбиений D_1 и D_2. Пусть T – произвольный выбор отмеченных точек для D. Через T_i, $i = 1,2$ обозначим часть T, попавшую на соответствующее A_i. Тогда $S_{A_1\cup A_2}(f,D,T)=S_{A_1}(f,D_1,T_1)+S_{A_2}(f,D_2,T_2)$ и, соответственно:

$$\left|a_1+a_2-S_{A_1\cup A_2}(f,D,T)\right|\le\left|a_1-S_{A_1}(f,D_1,T_1)\right|+\left|a_2-S_{A_2}(f,D_2,T_2)\right|<2\varepsilon .$$

Ввиду произвольности ε мы находимся в условиях уже упомянутого критерия интегрируемости. □

Следствие 1. Если функция f интегрируема и неотрицательна на A, то функция множества $G(B)=\int\limits_B fd\mu$ будет конечно-аддитивной мерой на семействе $\Sigma_A=\{B\in\Sigma: B\subset A\}$. □

Теорема 3. Пусть функция f принимает на A только неотрицательные значения, $\{A_k\}_1^\infty$ – некоторое разбиение множества A на измеримые подмножества. Пусть, далее, на каждом из A_k функция f интегрируема и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} fd\mu$ сходится. Тогда f интегрируема на всём множестве A и $\int\limits_A fd\mu=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} fd\mu$.

Доказательство. Будем рассуждать по аналогии с предыдущим доказательством. Обозначим $\int\limits_{A_k} fd\mu$ через a_k, $k=1,2,\ldots$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и такие допустимые разбиения D_k множеств A_k, $k=1,2,\ldots$, что при любом выборе T_k отмеченных точек для соответствующего D_k $\left|a_k-S_{A_k}(f,D_k,T_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2^k}$. Образуем разбиение $D=\{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ множества A, взяв в качестве элементов этого разбиения все элементы разбиений D_k, $k=1,2,\ldots$. Для любого T – набора отмеченных точек, соответствующего D, обозначим через T_k, $k=1,2,\ldots$, часть набора T, попавшую на соответствующее A_k. Имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_j}\left[\left|f(t)\right|\mu(\Delta_j)\right]=\sup_T\sum_{j=1}^{\infty}f(t_j)\mu(\Delta_j)=\sup_T\sum_{k=1}^{\infty}S_{A_k}(f,D_k,T_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)<\infty.$$

Мы доказали, что разбиение D допустимо. Далее,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k-S_A(f,D,T)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k-S_{A_k}(f,D_k,T_k)\right|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon .$$

Ввиду пункта 2 теоремы 1 параграфа 4.2.2 наша теорема этим доказана. □

Следствие 2. В условиях следствия 1 функция множества $G(B)=\int\limits_B f d\mu$ будет не только конечно-аддитивной, но и счётно-аддитивной мерой на Σ_A.

Доказательство. Пусть $\{B_k\}_1^\infty$ – разбиение некоторого множества $B\in\Sigma$ на измеримые подмножества. Ввиду уже доказанной конечной аддитивности функции множества G для любого $n\in\mathbb{N}$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{B_k} f d\mu=\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k} f d\mu\le\int\limits_B f d\mu$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k} f d\mu\le\int\limits_B f d\mu<\infty$, и мы попадаем в условия предыдущей теоремы. Применяя теорему, получаем, что $\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k} f d\mu=\int\limits_B f d\mu=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k} f d\mu$. □

Теперь мы готовы доказать основной результат параграфа:

Теорема 4. Пусть $\{B_k\}_1^\infty$ – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств и $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$. Тогда функция f будет интегрируемой на A в том и только том случае, если f интегрируема на каждом из B_k и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k}|f| d\mu$ сходится. При этом $\int\limits_B f d\mu=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k} f d\mu$.

Доказательство. В случае $f\ge 0$ результат вытекает из теоремы 3 и следствия 2. Поэтому утверждение верно для функций f^+ и f^-. Для завершения доказательства остаётся применить формулы $|f|=f^+ + f^-$ и $f=f^+ - f^-$. □

Следствие 3. Пусть $\{B_k\}_1^\infty$ – разбиение множества $A\in\Sigma$ на измеримые подмножества, $f=\sum\limits_1^\infty b_k \mathbf{1}_{B_k}$ – счётнозначная измеримая функция. Для того чтобы функция f была интегрируемой на A необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_1^\infty b_k\mu(B_k)$ сходился абсолютно. В этом случае $\int\limits_A f d\mu=\sum\limits_1^\infty b_k\mu(B_k)$. □

Пример 1. Пусть $\{A_k\}_1^\infty$ – последовательность попарно непересекающихся подмножеств ненулевой меры отрезка $[0,1]$, $\bigcup\limits_1^\infty A_k = [0,1]$. Рассмотрим счётнозначную измеримую функцию $f = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$. По следствию 3, функция f не интегрируема на $[0,1]$ по мере Лебега. Положим $B_n = A_{2n-1} \cup A_{2n}$. Тогда $\{B_n\}_1^\infty$ – снова последовательность попарно непересекающихся подмножеств ненулевой меры отрезка $[0,1]$, $\bigcup\limits_1^\infty B_n = [0,1]$. Отметим, что на каждом из B_n функция f интегрируема и $\int\limits_{B_n} f d\lambda = 0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_{B_n} f d\lambda$ абсолютно сходится. Итак, сходимость (и даже абсолютная сходимость) ряда из интегралов на подмножествах не влечёт, вообще говоря, интегрируемости функции на объединении этих множеств.

Замечание 1. Пусть функция f определена почти всюду на множестве A, то есть существует такое множество $B \subset A$ меры ноль, что f определена на $A \setminus B$. Как легко следует из упражнения 5 п. 4.2.3, следующие условия эквивалентны:

(a) функция f интегрируема на $A \setminus B$;

(b) функцию f можно так продолжить на всё A, чтобы она стала интегрируемой на A;

(c) при любом продолжении на всё A функция f интегрируема на A.

Также очевидно, что значение интеграла не изменится, если значения функции изменить на каком-то пренебрежимом подмножестве. Поэтому в рамках теории интеграла можно рассматривать функции, определённые почти всюду. Это оказывается весьма удобным при рассмотрении функций типа $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{x}{|x|}$ и т. д.: мы можем не заботиться о том, как доопределить функцию в точке разрыва.

Упражнения

1. Не противоречит ли утверждение теоремы 4 примеру 1?
2. Пусть $A \in \Sigma$. Обозначим через Σ_A семейство всех элементов σ-алгебры Σ, являющихся подмножествами множества A, $\mu_1 : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ –

ограничение меры μ на Σ_A (то есть $\mu_1(B) = \mu(B)$ для любого $B \in \Sigma_A$). Проверьте, что (A, Σ_A, μ_1) – снова пространство с мерой.

3. Пусть $A \in \Sigma$, f определена и интегрируема на A. Доопределим на $\Omega \setminus A$ функцию f нулём. Проверьте, что так доопределённая функция f будет интегрируема на всём Ω.
4. Как мы уже отмечали (упражнения 15-17 п. 4.2.3), определение интеграла имеет смысл и для функций, принимающих комплексные значения. Проверьте для комплекснозначных функций выполнение теорем 1, 2 и 4.

4.3. Измеримость и интегрируемость

4.3.1. Измеримость интегрируемой функции

Следующая простая оценка оказывается весьма полезной при работе с интегралом Лебега.

Лемма (неравенство Чебышева). Пусть $a > 0$ – некоторая константа, g – интегрируемая функция на A, $g \ge 0$, $B \subset A$ – такое измеримое подмножество, что $g(t) \ge a$ для любого $t \in B$. Тогда $\mu(B) \le \frac{1}{a} \int_A g d\mu$.

Доказательство. $\int_A g d\mu \ge \int_B g d\mu \ge \int_B a d\mu = a\mu(B)$.□

Теорема. Если пространство с мерой полно, то каждая интегрируемая на множестве функция измерима на этом множестве.

Доказательство. Пусть f – интегрируемая функция на A. Выберем измельчающуюся последовательность допустимых разбиений $D_j = \{\Delta_k^j\}_{k=1}^{\infty}$, $D_1 \prec D_2 \prec D_3 \prec \ldots$, для каждого из которых $\left| \overline{S}_A(f, D_j) - \underline{S}_A(f, D_j) \right| < 1/j$. По аналогии с упражнением 2 п. 4.2.1 определим две последовательности счётнозначных функций $\bar{f}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k^j} f(t) \mathbf{1}_{\Delta_k^j}$ и $\underline{f}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{t \in \Delta_k^j} f(t) \mathbf{1}_{\Delta_k^j}$. Эти функции интегрируемы на A, $\int_A \bar{f}_j d\mu = \overline{S}_A(f, D_j)$ и $\int_A \underline{f}_j d\mu = \underline{S}_A(f, D_j)$. Последовательность $\bar{f}_j$ поточечно невозрастает и ограничена снизу функцией f. Следовательно, у $\bar{f}_j$ существует поточечный предел при $j \to \infty$, который мы обозначим $\bar{f}$. Аналогично, обозначим через $\underline{f}$ поточечный предел функций $\underline{f}_j$ при $j \to \infty$. Функции $\underline{f}$ и $\bar{f}$ измеримы (как пределы последовательностей измеримых функций), $\underline{f} \le f \le \bar{f}$. Если мы докажем, что $\underline{f} = \bar{f}$ почти всюду, то получим, что $\underline{f} = f = \bar{f}$ почти всюду, и, следовательно, функция f измерима (здесь мы пользуемся полнотой меры). Обозначим через B множество тех точек, где $\underline{f} \ne \bar{f}$, а через B_n – множество тех точек, где $\bar{f} - \underline{f} > \frac{1}{n}$. Поскольку $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, нам достаточно доказать, что $\mu(B_n) = 0$ при любом n. Отметим, что $\bar{f}_j - \underline{f}_j \ge \bar{f} - \underline{f}$ для любого $j \in \mathbb{N}$, следовательно, на B_n выполнена оценка $\bar{f}_j - \underline{f}_j > \frac{1}{n}$. По неравенству Чебышева, $\mu(B_n) \le n\int\limits_A \left(\bar{f}_j - \underline{f}_j\right) d\mu = n\left(\bar{S}_A(f, D_j) - \underline{S}_A(f, D_j)\right) < \frac{n}{j}$. Устремив j к бесконечности, получим требуемое равенство $\mu(B_n) = 0$.□

Замечание. Если (Ω, Σ, μ) – неполное пространство с мерой, (Ω, Σ', μ) – его пополнение, то интегрируемая функция на (Ω, Σ, μ) может не быть Σ-измеримой, но обязательно будет Σ'-измеримой. Как мы знаем, эти два вида измеримости не сильно отличаются: для каждой Σ'-измеримой функции существует почти всюду совпадающая с ней Σ-измеримая функция. Чтобы не задерживаться каждый раз на этом несущественном отличии, в рамках теории интегрирования мы, если не оговорено противное, будем предполагать полноту рассматриваемых пространств с мерой. Поэтому в дальнейшем **все интегрируемые функции будут предполагаться измеримыми**. Другой чаще всего встречающийся в литературе приём – на неполных пространствах с мерой рассматривать только измеримые интегрируемые функции, то есть измеримость считать необходимой частью определения интегрируемости.

Упражнения

1. Обоснуйте существование последовательности разбиений D_j из доказательства последней теоремы.
2. В доказательстве использовалась полнота меры μ в утверждении, что если $f \overset{п.в.}{=} g$ и f измерима, то g измерима. Проверьте это утверждение! Можно ли здесь обойтись без полноты?

Функции $\bar{f}_j$, $\underline{f}_j$ и , соответственно, $\bar{f}$ и $\underline{f}$ в каких-то точках могут принимать бесконечные значения. При определении интегрируемой функции мы не учитывали такую возможность (хотя, в принципе, это можно сделать без большого труда). Таким образом, теорема по сути доказана в дополнительном предположении существования последовательности разбиений D_j, для которых не только $\left|\overline{S}_A(f,D_j)-\underline{S}_A(f,D_j)\right|<\frac{1}{j}$, но и соответствующие функции $\bar{f}_j$ и $\underline{f}_j$ принимают всюду конечные значения. Это затруднение в доказательстве можно обойти, доказав, что такой выбор D_j действительно возможен. Однако это можно сделать проще в духе замечания 1 п. 4.2.4, решив следующие упражнения.

3. Опираясь на определение верхней и нижней интегральных сумм, докажите, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ функции $\bar{f}_j$, $\underline{f}_j$ почти всюду принимают конечные значения.
4. Докажите, что в A существует такое подмножество E меры ноль, что на $G=A\setminus E$ все функции $\bar{f}_j$, $\underline{f}_j$, $j\in\mathbb{N}$ принимают конечные значения. Докажите, что функция f измерима на G, и, следовательно, измерима на всём множестве A.

Из измеримости интегрируемой функции и доказанной в начале параграфа леммы легко вытекает следующее полезное утверждение.

5. Пусть $\int\limits_A |f|d\mu=0$. Тогда на множестве A функция f почти всюду равна нулю.

4.3.2. Теорема о равномерном пределе

Теорема. Пусть последовательность функций f_n равномерно сходится на множестве A к функции f. Тогда если все функций f_n интегрируемы на A, то и f интегрируема на A, и $\int\limits_A fd\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_A f_n d\mu$.

Доказательство. Введём обозначение $a_n=\int\limits_A f_n d\mu$. Последовательность a_n фундаментальна:

$$|a_n-a_m|\le\int\limits_A |f_n-f_m|d\mu\le\sup_{t\in A}|f_n(t)-f_m(t)|\mu(A)\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0.$$

Обозначим предел последовательности a_n через a. Пусть ε – произвольное положительное число. Ввиду равномерной сходимости последовательности f_n к f существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для любого $n>N$ и любого $t\in A$ $|f_n(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{4\mu(A)}$. Зафиксируем такое $n>N$, что $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4}$. Воспользовавшись интегрируемостью функции f_n, построим такое допустимое разбиение $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества A, что при любом выборе $T=\{t_k\}_1^{\infty}$ отмеченных точек $\left|a_n - S_A(f_n, D, T)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ввиду неравенства $\left|f_n(t) - f(t)\right| < \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}$ разбиение D допустимо и для функции f: $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k}\left[\left|f(t)\right|\mu(\Delta_k)\right] \le \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k}\left[\left|f_n(t)\right|\mu(\Delta_k)\right] + \frac{\varepsilon}{4} < \infty$. Далее, для любого выбора $T=\{t_k\}_1^{\infty}$ отмеченных точек

$$\left|a - S_A(f, D, T)\right| = \left|a - \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)\right| \le \left|a - a_n\right| + \left|a_n - \sum_{k=1}^{\infty} f_n(t_k)\mu(\Delta_k)\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_n(t_k) - f(t_k)\right)\mu(\Delta_k)\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon .$$

По критерию (2) теоремы 1 п. 4.2.2, функция f интегрируема и $\int_A f d\mu = a$. Для завершения доказательства остаётся вспомнить, что через a был обозначен $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$.□

4.3.3. Условие интегрируемости измеримой функции

Теорема. Если для измеримой функции f существует интегрируемая мажоранта, то и сама функция f интегрируема. Более подробная формулировка: пусть на множестве A функция f измерима, $|f| \le g$ и функция g интегрируема. Тогда функция f также интегрируема.

Доказательство. Вначале разберём частный случай, когда f – счётнозначная функция, то есть функция f имеет вид $f = \sum_1^{\infty} a_k \mathbf{1}_{A_k}$, где A_k – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств. Неравенство $|f| \le g$ означает, что $|a_k| \le g(t)$ при $t \in A_k$. Следовательно, ряд $\sum_1^{\infty} a_k \mu(A_k)$ сходится абсолютно: $\sum_1^{\infty}|a_k|\mu(A_k) \le \sum_1^{\infty}\int_{A_k} g d\mu \le \int_A g d\mu < \infty$. Согласно примеру 1 п. 4.2.2, функция f интегрируема.

Общий случай мы выведем из двух уже известных результатов: теоремы о приближении измеримой функции счётнозначными и теоремы о равномерном пределе. Итак, пусть f измерима, $|f| \le g$ и g интегрируема. Построим такую последовательность f_n измеримых счётнозначных функций, что $\sup\limits_A |f_n(t) - f(t)| < 1/n$. Тогда $|f_n| \le g + 1/n$, и по уже доказанному частному случаю настоящей теоремы f_n интегрируемы. Итак, мы смогли представить функцию f как предел равномерно сходящейся последовательности интегрируемых функций. Этим доказана интегрируемость функции f.□

Доказанное условие интегрируемости измеримой функции бывает полезным во многих ситуациях. Дело в том, что измеримость сохраняется при всех обычных операциях над функциями: сумме, произведении, предельном переходе и т. д. Поэтому проверка измеримости какой-либо конкретной функции обычно не составляет большого труда. Найти же интегрируемую мажоранту проще, чем проверять интегрируемость, исходя из определения.

Упражнения

1. Пусть f – измеримая функция и $|f|$ интегрируем. Тогда f интегрируема.
2. Пусть для измеримой функции f существует допустимое разбиение. Тогда f интегрируема.
3. Каждая ограниченная измеримая функция интегрируема.
4. Произведение ограниченной измеримой функции на интегрируемую снова интегрируемо.
5. Опишите те пространства с мерой, на которых каждая измеримая функция интегрируема.
6. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, E – линейное пространство всех измеримых скалярных функций на Ω, F – подпространство в E, состоящее из всех функций, равных почти всюду нулю. Через $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначим факторпространство E/F. Для упрощения терминологии принято говорить, что элементами пространства $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ служат измеримые функции на Ω, но при этом функции, равные почти всюду, отождествляют между собой. Пусть $f, g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Положим $\rho(f, g) = \int\limits_\Omega \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$. Покажите, что ρ задаёт метрику на $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, причём сходимость в этой метрике совпадает со сходимостью по мере.

4.4. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла

В разделе 4.2 мы познакомились с определением интеграла Лебега и увидели, что, хотя интеграл Лебега и является более общим понятием, чем интеграл Римана, но сохраняет по-прежнему все удобные свойства интеграла, знакомые нам из курса анализа. Теперь же мы переходим к изучению преимуществ интеграла Лебега перед интегралом Римана. Мы убедимся, что для интеграла Лебега выполнена не только теорема о равномерном пределе, но и гораздо более общие и удобные в применениях теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

4.4.1. Лемма Фату

Теорема (лемма Фату). Пусть на множестве A задана последовательность f_n неотрицательных интегрируемых функций; последовательность f_n сходится почти всюду к некоторой функции f, и интегралы функций f_n ограничены в совокупности: $\int\limits_A f_n d\mu \le C < \infty$. Тогда f интегрируема и $\int\limits_A f d\mu \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Егорова (п. 3.2.4). Выделим в A измеримое подмножество A_1 с $\mu(A \setminus A_1) \le \frac{1}{2}$, на котором f_n равномерно сходятся к f. Обозначим $A \setminus A_1$ через B_1. Снова воспользовавшись теоремой Егорова, выделим в B_1 измеримое подмножество A_2 с $\mu(B_1 \setminus A_2) \le \frac{1}{4}$, на котором f_n также равномерно сходятся к f. Обозначим $B_1 \setminus A_2$ через B_2. Продолжив этот процесс, получим последовательность A_n попарно непересекающихся измеримых множеств и убывающую последовательность множеств B_n, $A_{n+1} \subset B_n$, $B_{n+1} = B_n \setminus A_{n+1}$, $\mu(B_n) \le \frac{1}{2^n}$, обладающие тем свойством, что на каждом из A_j последовательность f_n равномерно сходится к f.

По теореме о равномерном пределе, на каждом из A_j функция f интегрируема. Далее, для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k} f_n d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu,$$

следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. По теореме 3 п. 4.2.4, функция f интегрируема на $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\int\limits_D f d\mu \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. Остаётся заметить, что, по построению, дополнение в A к D имеет меру ноль:

$\mu\left(A \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Следовательно, f интегрируема на всём множестве A и $\int\limits_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.□

Замечание. Условие неотрицательности функций f_n в формулировке леммы Фату можно несколько ослабить: достаточно потребовать, чтобы все f_n были больше или равны некоторой интегрируемой функции g. Действительно, в этом случае функции $f_n - g$ неотрицательны, и к ним можно применить лемму Фату в первоначальной формулировке. То есть функция $f - g$ интегрируема (а, следовательно, интегрируема и $f = g + (f - g)$) и $\int\limits_A (f - g) d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_A (f_n - g) d\mu$. Осталось прибавить к обеим частям последнего неравенства $\int\limits_A g d\mu$, чтобы получить требуемую оценку $\int\limits_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. □

Упражнения

1. Если измеримая функция f положительна и интегралы всех меньших интегрируемых функций ограничены в совокупности, то f интегрируема.
2. На примере ступенчатых функций $f_n = n\mathbf{1}_{(0,1/n)}$, заданных на $A = [0,1]$, покажите, что в условиях леммы Фату $\int\limits_A f d\mu$ может не равняться $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.
3. Приведите пример, показывающий, что в условиях леммы Фату может не существовать $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.
4. Докажите, что условие неотрицательности функций f_n в формулировке леммы Фату можно заменить условием $f_n \ge 0$ почти всюду.
5. Пусть $\{A_k\}_1^{\infty}$ – последовательность попарно непересекающихся подмножеств ненулевой меры отрезка $[0,1]$. Рассмотрим последовательность интегрируемых функций $f_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$. Проверьте, что интегралы этих функций равны 0 (и, следовательно, ограничены в совокупности), сходятся в каждой точке к $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$, но предельная функция f не интегрируема. Какое из условий леммы Фату здесь не выполнено?

4.4.2. Теорема Лебега о мажорированной сходимости

Теорема. Пусть на множестве A задана последовательность f_n интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду к некоторой функции f. Пусть, далее, у последовательности f_n есть интегрируемая мажоранта g (то есть $|f_n| \le g$ при всех n). Тогда предельная функция f интегрируема и $\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

Доказательство. Все функции f_n ограничены снизу интегрируемой функцией $-g$, и интегралы функций f_n ограничены в совокупности: $\int_A f_n d\mu \le \int_A g d\mu < \infty$. Согласно замечанию, приведенному после доказательства леммы Фату, отсюда следует, что функция f интегрируема и $\int_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Применив то же самое рассуждение к функциям $-f_n$, получим, что $\int_A (-f) d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A (-f_n) d\mu = -\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, то есть $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Но в каком случае верхний предел последовательности может оцениваться сверху нижним пределом этой же последовательности? Только если у последовательности есть настоящий предел. Таким образом, из двустороннего неравенства $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ следует, что существует $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, и $\int_A f d\mu$ равен этому пределу. □

Упражнения

1. Опираясь на теорему Лебега и упражнение 14 п. 4.2.3, докажите следующую *теорему о мажорированной сходимости для рядов*. Пусть задана бесконечная матрица $\{a_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$, каждый столбец которой сходится к соответствующему числу a_m: $\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = a_m$. Пусть, далее, существует последовательность b_m положительных чисел, $\sum_1^{\infty} b_m < \infty$, мажорирующая все строки матрицы: $|a_{n,m}| \le b_m$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_1^{\infty} a_m$ абсолютно сходится и $\sum_1^{\infty} a_m = \lim_{n\to\infty} \sum_1^{\infty} a_{n,m}$.
2. Сформулируйте и докажите аналог леммы Фату для рядов.

3. Докажите, что условие $|f_n| \le g$ в формулировке теоремы Лебега о мажорированной сходимости можно заменить условием $|f_n| \le g$ почти всюду.

4.4.3. Теоремы Ле́ви о последовательностях и рядах

Теорема Ле́ви о монотонных последовательностях. Пусть $f_1 \le f_2 \le f_3 \le \ldots$ – неубывающая последовательность интегрируемых функций на A, и интегралы функций f_n ограничены в совокупности некоторой константой $C < \infty$. Тогда последовательность f_n стремится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f, и $\int_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что все $f_n \ge 0$ (общий случай сводится к этому частному случаю введением вспомогательных функций $f_n - f_1$). Ввиду монотонности в каждой точке $t \in A$ последовательность $f_n(t)$ стремится либо к конечному пределу, либо к $+\infty$. Обозначим через B множество тех $t \in A$, где $f_n(t) \to +\infty$. Докажем, что B – множество нулевой меры. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ положим $B_{n,m} = \{t \in A : f_n(t) > m\}$, $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{n,m}$. Другими словами, B_m – это множество тех точек $t \in A$, где все f_n, начиная с некоторого, больше числа m. Соответственно, $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} B_m$. По неравенству Чебышева (лемма из п. 4.3.1), $\mu(B_{n,m}) \le \frac{1}{m}\int_A f_n d\mu \le \frac{C}{m}$. Поскольку при фиксированном m множества $B_{n,m}$ возрастают с ростом n, $\mu(B_m) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_{n,m}) \le \frac{C}{m}$. В свою очередь, множества B_m убывают с ростом m, то есть $\mu(B) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(B_m) \le \lim\limits_{m\to\infty} \frac{C}{m} = 0$.

Теперь определим функцию f на B произвольным образом (скажем, положим $f = 0$ на B), а на $A \setminus B$, где, по построению, в каждой точке существует конечный предел $f_n(t)$, положим $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. При таком определении последовательность f_n сходится почти всюду к f, и, по лемме Фату, функция f интегрируема. Далее, f служит интегрируемой мажорантой для всех f_n, и для завершения доказательства нам остаётся применить теорему Лебега о мажорированной сходимости. □

Теорема Ле́ви о рядах. Пусть на множестве A задана последовательность f_n неотрицательных интегрируемых функций и $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f, и $\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu$.

Доказательство. Достаточно заметить, что последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ подчиняется условиям теоремы Ле́ви о монотонных последовательностях. □

Упражнения

1. Докажите, что условие $f_n \le f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ в формулировке теоремы Ле́ви о монотонных последовательностях можно заменить условием «при всех $n \in \mathbb{N}$ $f_n \le f_{n+1}$ почти всюду».
2. Запишите подробнее доказательство теоремы Ле́ви о рядах.
3. Используя представление функции в виде разности её положительной и отрицательной частей, докажите следующее усиление теоремы Ле́ви о рядах: пусть функции f_n интегрируемы на множестве A и $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A |f_n| d\mu < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f, и $\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu$. Мы будем пользоваться этим утверждением ниже в п. 6.3.2 при доказательстве полноты пространства L_1.
4. Выведите решение упражнения 5 п. 4.3.1, применив теорему Ле́ви о монотонных последовательностях к последовательности $f_n = n|f|$.

4.4.4. Теорема о монотонном классе функций

Определение. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой. Семейство E интегрируемых на Ω функций называется *монотонным классом функций*, если оно подчиняется следующим аксиомам:

(1) если $f_1, f_2 \in E$, то $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in E$ для любых скаляров a_1, a_2 (линейность);

(2) если $f_1, f_2, ..., f_n, ... \in E$, f_n образуют неубывающую последовательность, сходятся в каждой точке к некоторой функции f, и $\sup_n \int_\Omega f_n d\mu = C < \infty$, то $f \in E$ (аналог теоремы Ле́ви);

(3) если $f \in E$, $f \geq 0$ и $\int_\Omega f d\mu = 0$, то все функции g, подчиняющиеся неравенству $0 \leq g \leq f$, тоже лежат в E (аналог полноты).

Отметим, что переходом от f_n к $-f_n$ легко получить ещё одно свойство монотонного класса:

(2′) если $f_1, f_2, ..., f_n, ... \in E$, f_n образуют невозрастающую последовательность, сходятся в каждой точке к некоторой функции f и $\inf_n \int_\Omega f_n d\mu > -\infty$, то $f \in E$.

Теорема. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, полученное, как описано в разделе 2.2, продолжением меры μ с некоторого полукольца с единицей $\Phi \subset \Sigma$, E – монотонный класс функций, содержащий характеристические функции всех элементов полукольца Φ. Тогда E совпадает с множеством всех интегрируемых на Ω функций.

Доказательство. Обозначим через M семейство всех множеств, характеристические функции которых принадлежат E. M – это монотонный класс множеств, содержащий Φ в качестве подкласса. По теореме о монотонном классе множеств (п. 2.2.4), $\mathrm{M} = \Sigma$. Следовательно, классу E принадлежат характеристические функции всех измеримых подмножеств.

Каждая конечнозначная интегрируемая функция имеет вид $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ с $A_k \in \Sigma$, и по линейности все такие функции лежат в E. Любая неотрицательная счётнозначная интегрируемая функция $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{1}_{A_k}$, $a_k \geq 0$ служит пределом неубывающей последовательности $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ конечнозначных и, следовательно, также лежит в E. Любую интегрируемую неотрицательную функцию можно представить в виде предела неубывающей последовательности неотрицательных счётнозначных интегрируемых функций, и, наконец, любая интегрируемая функция f представима в виде разности $f = f^+ - f^-$ двух неотрицательных интегрируемых функций. □

Упражнения

1. Пусть E – монотонный класс, $f \in E$, $f \geq 0$ и $\int\limits_{\Omega} f d\mu = 0$. Тогда все функции g, подчиняющиеся неравенству $|g| \leq f$, также лежат в E.
2. Докажите независимость аксиом монотонного класса. Другими словами, приведите примеры семейств интегрируемых функций, подчиняющихся двум аксиомам монотонного класса, но не подчиняющихся оставшейся аксиоме. Скажем, пример семейства, подчиняющегося аксиомам (1) и (3), но не подчиняющегося аксиоме (2), и т. д.

4.5. Кратный интеграл

4.5.1. Произведение пространств с мерой

Пусть $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – пространства с конечными мерами, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Следуя п. 2.1.3, прямоугольниками в Ω назовем множества вида $A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Через Φ обозначим семейство всех прямоугольников в Ω.

Теорема 1. Семейство Φ всех прямоугольников в Ω образует полукольцо с единицей.

Доказательство. Пусть $A = A_1 \times A_2$ и $B = B_1 \times B_2$ – произвольные прямоугольники. Тогда $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$, то есть снова является прямоугольником. Далее, $\Omega \setminus A = \big((\Omega_1 \setminus A_1) \times \Omega_2\big) \cup \big(A_1 \times (\Omega_2 \setminus A_2)\big)$, то есть дополнение к прямоугольнику представимо в виде дизъюнктного объединения двух прямоугольников. Наконец, всё Ω – также прямоугольник.

Определим меру μ на Φ равенством $\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$.

Теорема 2. Мера μ на Φ счётно-аддитивна.

Доказательство. Пусть $A = A_1 \times A_2$, $B_n = A_{1,n} \times A_{2,n}$, прямоугольники B_n попарно не пересекаются и в объединении дают прямоугольник A. Для любого $t \in A_1$ обозначим через $N(t)$ множество тех индексов n, для которых $A_{1,n}$ содержит t. Тогда семейство множеств $A_{2,n}$, $n \in N(t)$ дизъюнктно, и $\bigcup\limits_{n \in N(t)} A_{2,n} = A_2$. Введём в рассмотрение вспомогательные функции на A_1: $f_n = \mu_2(A_{2,n}) \mathbf{1}_{A_{1,n}}$. Эти функции интегрируемы по мере μ_1, и интегралы равны $\mu(B_n)$. Отметим, что для любого $t \in A_1$ выполнены соотношения

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n \in N(t)} \mu_2(A_{2,n}) = \mu_2\Big(\bigcup_{n \in N(t)} A_{2,n}\Big) = \mu_2(A_2).$$

Остаётся проинтегрировать обе части равенства, что возможно по тереме Ле́ви о рядах, чтобы получить требуемое равенство $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu(A)$. □

Применим схему продолжения мер, описанную в разделе 2.2, к мере μ на Ф. Полученное пространство с мерой (Ω, Σ, μ) называется произведением пространств $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Для меры μ используют обозначение $\mu_1 \times \mu_2$, а элементы полученной σ-алгебры Σ называют ещё $\mu_1 \times \mu_2$-измеримыми множествами. Ясно, что σ-алгебра Σ включает как подсистему наименьшую σ-алгебру, содержащую все прямоугольники (последнюю мы обозначали $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$).

Замечание 1. Пусть $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ – конечный набор пространств с мерой. *Параллелепипедом* в $\prod_{k=1}^{n} \Omega_k = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$ называется множество вида $\prod_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \Sigma_k$. Положим $\mu\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Можно доказать, что параллелепипеды образуют полукольцо с единицей и что μ – счётно-аддитивная мера на этом полукольце. Снова применив процедуру продолжения, получим пространство с мерой, являющееся произведением пространств $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$. Однако, чтобы не повторять в случае n сомножителей рассуждения, уже проведённые для $n = 2$, удобнее произведение конечного числа пространств с мерой определять индукцией по числу сомножителей. То есть вначале перемножить первые два пространства, затем полученное произведение умножить на третье пространство, затем ещё на одно и т. д. Второй путь удобнее ещё и тем, что и теоремы, полученные для произведения пары пространств с мерой, можно затем по индукции переносить на любое конечное число сомножителей.

Замечание 2. Пока что мы дали лишь формальное определение произведения пространств с мерой. Глубже прочувствовать содержание этого понятия читатель сможет после изучения следующего параграфа. В частности, этому поможет упражнение 1 п. 4.5.2, где дана явная формула для вычисления меры, аналогичная формуле площади криволинейной трапеции. Однако можно вполне успешно оперировать с произведением мер и без этой формулы, пользуясь только счётной аддитивностью, полнотой меры и формулой для меры прямоугольника.

Упражнения

Рассмотрим единичный квадрат K как произведение отрезков $[0,1] \times [0,1]$ и плоскую меру Лебега $\lambda \times \lambda$ на K определим как произведение обычных линейных мер Лебега на отрезке.

1. Проверьте, что диагональ квадрата – это множество плоской меры ноль.
2. Пусть множество $A \subset [0,1]$ имеет линейную меру ноль. Докажите, что множество тех $x = (x_1, x_2) \in K$, для которых $x_1 - x_2 \in A$, имеет плоскую меру ноль.
3. Пусть A – подмножество в K, имеющее площадь. Проверьте, что $(\lambda \times \lambda)(A)$ совпадает с площадью множества A.
4. Пусть f – произвольная измеримая функция на $[0,1]$. Докажите, что функция $g : K \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $g(x_1, x_2) = f(x_1)$, измерима на K.
5. Докажите, что функция $g(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ измерима на K.
6. Докажите, что функция из предыдущего упражнения обладает следующим свойством: для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset [0,1]$ множество $f^{-1}(A)$ измеримо по мере Лебега на квадрате.
7. Пусть f – произвольная измеримая функция на $[0,1]$. Докажите, что функция $g : K \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $g(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$, измерима на K.
8. Рассмотрим функцию $g : K \to \mathbb{R}$, действующую по правилу $g(x_1, x_2) = x_1$. Через D обозначим главную диагональ квадрата K. Зададим на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств квадрата K меру μ следующим образом: $\mu(A) = \lambda(g(A \cap D))$. Проверьте, что μ – счётно-аддтитивная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, что значения мер μ и $\lambda \times \lambda$ совпадают на прямоугольниках вида $[a,b] \times [0,1]$ и $[0,1] \times [a,b]$, но на квадратах вида $[a,b] \times [a,b]$ значения этих мер уже отличаются.
9. Докажите, что $\mathfrak{B}$ – это наименьшая σ-алгебра подмножеств квадрата K, содержащая все прямоугольники вида $[a,b] \times [0,1]$ и $[0,1] \times [a,b]$. Этот факт вместе с предыдущим примером показывает, что две счётно-аддитивные меры могут совпадать на семействе подмножеств, порождающем данную σ-алгебру, но при этом не совпадать на всей σ-алгебре.

4.5.2. Повторный интеграл и теорема Фубини

Начиная с этого момента и до конца параграфа 4.5.3, $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ будут пространствами с конечными мерами, а через (Ω, Σ, μ) будет обозначено произведение этих пространств. Каждый элемент множества Ω имеет вид (t_1, t_2), где $t_1 \in \Omega_1$, $t_2 \in \Omega_2$. Поэтому каждую функцию f, определённую на Ω, естественно рассматривать как функцию двух переменных $f(t_1, t_2)$, а интеграл $\int\limits_{\Omega} f d\mu$ по аналогии с тем, как это делалось в курсе анализа, естественно называть *двойным интегралом*. При рассмотрении интеграла по одной из переменных при фиксированной второй переменной мы будем использовать выражения типа $\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)$, где условное обозначение $d\mu_1(t_1)$ подчёркивает, по какой переменной идёт интегрирование.

Определение. Для функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$ существует *повторный интеграл* $\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)$, если для почти всех значений переменной $t_2\in\Omega_2$ функция $f(t_1,t_2)$ интегрируема на Ω_1 по мере μ_1 как функция переменной t_1 и функция $g(t_2)=\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)$ интегрируема на Ω_2 по мере μ_2 как функция переменной t_2.

Теорема Фубини. Если функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ интегрируема на Ω по совокупности переменных (то есть существует $\int\limits_{\Omega} fd\mu$), то для f существует повторный интеграл, и двойной интеграл равен повторному: $\int\limits_{\Omega} fd\mu=\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)$.

Доказательство. Будем говорить, что функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ принадлежит *классу Фубини* ($f\in Fub(\mu)$), если f интегрируема по мере μ на Ω, для f существует повторный интеграл, и двойной интеграл равен повторному: $\int\limits_{\Omega} fd\mu=\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)$. Нам требуется доказать, что класс Фубини совпадает с классом всех функций, интегрируемых по совокупности переменных. Поскольку класс Фубини содержит характеристические функции всех прямоугольников, нам достаточно показать (см. п. 4.4.4), что класс Фубини является монотонным классом. Первая из аксиом монотонного класса – линейность – проверяется совсем просто. Проверка же второй и третей аксиом требует некоторых усилий.

Нам нужно доказать следующие два утверждения.

A. Если $f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots\in Fub(\mu)$, f_n образуют неубывающую последовательность, сходятся в каждой точке к некоторой функции f и $\sup\limits_n\int\limits_{\Omega} f_n d\mu=C<\infty$, то $f\in Fub(\mu)$.

В. Если $f \in Fub(\mu)$, $f \geq 0$, $\int\limits_{\Omega} f d\mu = 0$ и функция g подчиняется неравенству $0 \leq g \leq f$, то $g \in Fub(\mu)$.

Начнём с утверждения А. Обозначим $\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2) d\mu_1(t_1)$ через $g_n(t_2)$. По условию, функции g_n определены почти всюду и интегрируемы на Ω_2; $\int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \int\limits_{\Omega} f_n d\mu$. Далее, g_n образуют почти всюду неубывающую последовательность функций, и $\sup\limits_n \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \sup\limits_n \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = C < \infty$. Согласно теореме Леви, последовательность g_n почти всюду на Ω_2 сходится к некоторой интегрируемой функции g, и

$$\int\limits_{\Omega_2} g d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu. \qquad (1)$$

Обозначим через D множество тех точек $t_2 \in \Omega_2$, для которых определены $g_n(t_2)$ и $g(t_2)$, $\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2) d\mu_1(t_1) = g_n(t_2)$, $g_n(t_2)$ не убывают с ростом n и сходятся к $g(t_2)$. По построению, $\mu_2(\Omega_2 \setminus D) = 0$. В каждой точке $t_2 \in D$ функции f_n интегрируемы по переменной t_1, не убывают с ростом n и сходятся к функции f. Кроме того, выполнены соотношения $\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2) d\mu_1(t_1) = g_n(t_2) \leq g(t_2) < \infty$. Снова применяя теорему Леви, но теперь уже по переменной t_1, получаем, что для любого $t_2 \in D$ (то есть для почти всех значений переменной t_2) функция f интегрируема по t_1, и

$$\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2) d\mu_1(t_1) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2) d\mu_1(t_1) = \lim_{n\to\infty} g_n(t_2) = g(t_2). \qquad (2)$$

Наконец, теорема Леви, применённая к функциям f_n на Ω (то есть по совокупности переменных), даёт равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu$. Сопоставляя соотношения (1), (2) и последнее равенство, получаем, что

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2) d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2) = \int\limits_{\Omega_2} g d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu,$$

то есть $f \in Fub(\mu)$.

Теперь докажем утверждение В. Во-первых, из соотношений $0 \leq g \leq f$ и $\int\limits_{\Omega} f d\mu = 0$ следует, что

$$\int_{\Omega} g d\mu = 0. \tag{3}$$

Далее, обозначим $\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)$ через $h(t_2)$. Поскольку $f \in Fub(\mu)$, функция h определена почти всюду на Ω_2, интегрируема, и $\int_{\Omega_2} hd\mu_2 = \int_{\Omega} fd\mu = 0$. Ввиду неотрицательности, функция h почти всюду на Ω_2 равна нулю (уверен, уважаемый читатель справился с упражнением 5 п. 4.3.1). Обозначим через D множество тех точек $t_2 \in \Omega_2$, для которых $h(t_2) = 0$. Дополнение к множеству D в Ω_2 имеет нулевую меру, и при каждом фиксированном $t_2 \in D$ функция $f(t_1,t_2)$ интегрируема на Ω_1 по переменной t_1, и $\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1) = 0$. Снова ввиду положительности при каждом фиксированном $t_2 \in D$ для почти всех $t_1 \in \Omega_1$ значение $f(t_1,t_2)$ равно нулю. Но ввиду неравенства $0 \le g \le f$ в тех точках, где $f(t_1,t_2) = 0$, там и $g(t_1,t_2) = 0$. Следовательно, при каждом фиксированном $t_2 \in D$ для почти всех $t_1 \in \Omega_1$ значение $g(t_1,t_2)$ равно нулю. Таким образом, при $t_2 \in D$ (то есть для почти всех значений переменной t_2) функция g интегрируема по t_1, и $\int_{\Omega_1} g(t_1,t_2)d\mu_1(t_1) = 0$. Сопоставив последнюю запись с равенством (3), получаем требуемую принадлежность функции g классу Фубини. □

Замечание 1. Поскольку переменные t_1 и t_2 в условии теоремы Фубини равноправны, то можно поменять их ролями и в утверждении теоремы. Следовательно, если существует двойной интеграл, то определены повторные интегралы в обоих возможных порядках интегрирования, и оба эти интеграла равны двойному интегралу. Таким образом, если существует двойной интеграл, то можно менять порядок интегрирования в повторном интеграле: $\int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(t_1,t_2)d\mu_2(t_2) \right] d\mu_1(t_1)$. Именно в этой форме теорема Фубини чаще всего встречается в применениях.

Упражнения

1. Пусть A – измеримое подмножество в $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Для любого $t_1 \in \Omega_1$ обозначим через A_{t_1} множество тех $t_2 \in \Omega_2$, для которых $(t_1,t_2) \in A$. Докажите, опираясь на теорему Фубини, что $A_{t_1} \in \Sigma_2$ для почти всех $t_1 \in \Omega_1$ и $\mu(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{t_1})d\mu_1(t_1)$.

2. Пусть в условиях предыдущего упражнения функция двух переменных f интегрируема на A по мере μ. Докажите, что
$$\int_A f d\mu = \int_{\Omega_1}\left[\int_{A_{t_1}} f(t_1,t_2)d\mu_2(t_2)\right]d\mu_1(t_1).$$
3. Пусть A_1 – неизмеримое по Лебегу подмножество отрезка $[0,1]$. Определим подмножество $A \subset [0,1]\times[0,1]$ как объединение множеств $A_1 \times [0,\ 1/2]$ и $([0,1]\setminus A_1)\times(1/2,\ 1]$. Покажите, что для функции $f = \mathbf{1}_A$ существует повторный интеграл $\int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} f(t,\tau)d\lambda(\tau)\right]d\lambda(t)$. Чему он равен? Покажите, что интеграл $\int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} f(t,\tau)d\lambda(t)\right]d\lambda(\tau)$ не существует.

   Будет ли функция f интегрируема по совокупности переменных? Измерима?
4. Приведите пример функции на квадрате, для которой повторные интегралы существуют, но отличаются между собой.
5. Приведите пример функции на квадрате, для которой повторные интегралы существуют, совпадают между собой, но по совокупности переменных функция не интегрируема.

4.5.3. Обратная теорема Фубини

Как показывают вышеприведенные упражнения, изменять порядок интегрирования в повторном интеграле можно не всегда. Условие, при котором это можно делать, – интегрируемость функции по совокупности переменных – звучит, конечно, приятно, но как-то уж слишком абстрактно. Действительно, как определить для конкретной функции, скажем двух вещественных переменных, интегрируема ли она по совокупности переменных? Насколько проще было бы обращаться с повторным интегралом, если бы, убедившись, что он существует для какой-то функции в одном порядке, можно было бы быть уверенным, что эта функция интегрируема и в другом порядке, да и как функция двух переменных тоже. Но, увы, не всё в жизни так просто. Впрочем, как показывает следующая теорема, особых оснований жаловаться на жизнь (по крайней мере, по этому поводу) нет.

Теорема. Пусть f – измеримая неотрицательная функция на Ω, для которой существует повторный интеграл $\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)$. Тогда для f существует двойной интеграл, и, следовательно,

$$\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)=\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f(t_1,t_2)d\mu_2(t_2)\right]d\mu_1(t_1).$$

Доказательство. Введём в рассмотрение множества $A_n=\{t\in\Omega: f(t)\le n\}$ и функции $f_n=f\cdot\mathbf{1}_{A_n}$. Каждая функция f_n измерима и ограничена на Ω, следовательно, интегрируема по совокупности переменных (см. 4.3.3). Далее,

$$\int_{\Omega} f_n d\mu=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f_n(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)\le\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2),$$

то есть $\int_{\Omega} f_n d\mu$ ограничены сверху константой, не зависящей от n. Наконец, f_n образуют неубывающую последовательность и стремятся поточечно к f. Для завершения доказательства остаётся применить теорему Леви. □

Если функция измерима, то её интегрируемость эквивалентна интегрируемости её модуля. Получаем:

Следствие. Для измеримой функции f на Ω следующие условия эквивалентны:

(1) f интегрируема на Ω по совокупности переменных,

(2) для функции $|f|$ существует повторный интеграл $\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} |f(t_1,t_2)|d\mu_1(t_1)\right]d\mu_2(t_2)$. □

Замечание 1. Так как произведение $\prod_{k=1}^{n}(\Omega_k,\Sigma_k,\mu_k)$ конечного числа пространств с мерой строится индуктивно, как $\left(\prod_{k=1}^{n-1}(\Omega_k,\Sigma_k,\mu_k)\right)\times(\Omega_n,\Sigma_n,\mu_n)$, результаты последних двух параграфов без труда переносятся на случай кратного интеграла.

Замечание 2. Как мы уже отмечали, для неполных пространств с мерой интегрируемость функции не обязательно означает измеримость: для получения измеримости нужно ещё удалить некоторое множество меры 0. Произведение пространств с мерой полно по построению, но сами сомножители в принципе могут быть и неполными пространствами. В этом случае, если по какой-либо причине нужна измеримость функции двух переменных по первой или второй переменной, следует ограничиться $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$-измеримыми функциями. Предлагаем читателю самому проверить, что в этом случае функция f при каждом фиксированном значении одной переменной измерима по другой переменной. Для доказательства разумно вначале рассмотреть характеристические функции множеств (см. упражнение 6 п. 2.1.3), а затем воспользоваться аппроксимацией измеримой функции счётнозначными.

Упражнения

1. Докажите, что если функция f на $[0,1]\times[0,1]$ интегрируема как функция двух переменных по Риману, то она интегрируема и по Лебегу как функция двух переменных.
2. Докажите формулу перехода к полярным координатам для интеграла Лебега.

4.6. Интеграл Лебега на отрезке и на оси

4.6.1. Интеграл Лебега и несобственный интеграл на отрезке

Как уже было отмечено в упражнении 8 п. 4.2.3, из условия (2) теоремы 1 п. 4.2.2 с очевидностью следует, что каждая интегрируемая по Риману функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема и по Лебегу. Более того, по теореме п. 4.3.3, интегрируемыми по Лебегу будут все ограниченные измеримые функции на отрезке.

Если функция интегрируема по Риману, то она должна быть ограниченной. Поэтому в курсе математического анализа подробно изучался несобственный интеграл как способ определения интеграла для некоторых неограниченных на отрезке функций. Чтобы лучше почувствовать природу интеграла Лебега, ниже мы разберём связь между несобственным интегралом и интегралом Лебега.

Теорема 1. Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна всюду кроме точки a и интегрируема по Лебегу на $[a,b]$. Тогда у f существует несобственный интеграл, и этот несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(t)dt$ равен соответствующему интегралу Лебега $\int\limits_{[a,b]} fd\lambda$.

Доказательство. Пусть $a_n\in[a,b]$, $a_n\to a$. Введём в рассмотрение вспомогательные функции $f_n=f\cdot 1_{[a_n,b]}$. Функции f_n образуют почти всюду сходящуюся к f последовательность интегрируемых (как по Риману, так и по Лебегу) функций, причём $|f|$ служит интегрируемой мажорантой для всех f_n. Согласно теореме Лебега, $\int\limits_{[a,b]} f_n d\lambda=\int\limits_{[a_n,b]} fd\lambda$ стремится к

$\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$. Но, по определению несобственного интеграла, это и означает, что у f существует несобственный интеграл, равный $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$. □

Теорема 2. Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна всюду кроме точки a и неотрицательна. Тогда если у f существует несобственный интеграл, то f интегрируема по Лебегу на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть a_n и f_n – те же, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Последовательность f_n не убывает и стремится почти всюду к функции f. Далее, по определению несобственного интеграла, $\int\limits_{[a,b]} f_n d\lambda = \int\limits_{[a_n,b]} f d\lambda$ стремится к $\int\limits_a^b f(t)dt$. Остаётся применить теорему Ле́ви о монотонных последовательностях. □

Из курса математического анализа читателю хорошо известны примеры функций, для которых существует несобственный интеграл, но модуль которых не интегрируем даже в несобственном смысле. Такие функции будут неинтегрируемыми по Лебегу, поскольку у интегрируемой по Лебегу функции модуль также должен быть интегрируем по Лебегу.

В дальнейшем если функция интегрируема по Лебегу на отрезке, то для интеграла Лебега мы будем использовать как обозначение $\int\limits_{[a,b]} f(t)d\lambda$, так и более привычное по курсу анализа $\int\limits_a^b f(t)dt$.

Упражнения Какие из нижеперечисленных функций f интегрируемы по Лебегу на отрезке $[a,b]$?

1. $f(t)=t^2$, $[a,b]=[0,1]$.
2. $f(t)=t^{-2}$, $[a,b]=[0,1]$.
3. $f(t)=t^{-2}$, $[a,b]=[1,2]$.
4. $f(t)=\sin t^{-2}$, $[a,b]=[0,1]$.
5. $f(t)=\sin^{-2} t$, $[a,b]=[0,1]$.
6. $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}$, $[a,b]=[0,1]$.
7. $f(t)=\dfrac{1}{t}$, $[a,b]=[-1,1]$.

Какие из нижеперечисленных функций на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ интегрируемы, а какие – нет по отношению к плоской мере Лебега?

8. $f(x,y) = x + y$.

9. $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$.

10. $f(x,y) = x - y$.

11. $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$.

12. $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{1}{x-y}\right)$.

13. При каких значениях параметра α функция $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(x^2 + y^2\right)^{\alpha}}$ интегрируема на $[0,1]\times[0,1]$?

4.6.2. Интеграл по σ-конечной мере

В разделах 4.2 – 4.5 мы изучали теорию интеграла Лебега на пространстве (Ω,Σ,μ) с конечной мерой. Чтобы успешно определить интеграл Лебега на оси или, скажем, на неограниченном подмножестве плоскости, нам нужно рассмотреть и случай счётно-аддитивных мер, принимающих на каких-то элементах σ-алгебры Σ значение $+\infty$. Такие меры будем называть бесконечными.

Итак, пусть (Ω,Σ,μ) – пространство с бесконечной мерой. Подмножество $A\in\Sigma$ называется *множеством σ-конечной меры* (другой термин – мера μ σ-конечна на A), если A можно представить в виде объединения счётного числа множеств конечной меры. σ-Конечные меры уже упоминались нами в п. 2.3.7. Если мера μ σ-конечна на A, то A можно записать в виде $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $0 < \mu(A_n) < \infty$, таким образом, чтобы A_j попарно не пересекались. Отметим также, что счётное объединение множеств σ-конечной меры снова будет множеством σ-конечной меры.

Для функций, определенных на множестве A σ-конечной меры, можно ввести разбиения множества A на подмножества конечной меры. Можно также ввести интегральные суммы и интеграл Лебега точно таким же образом, как мы это делали выше для множеств конечной меры. Читатель может самостоятельно проверить, что доказательства основных свойств интеграла сохраняют свою силу и в этом случае. Единственным затруднением, которое приходится преодолевать при распространении свойств интеграла со случая конечной на случай σ-конечной меры – это неинтегрируемость постоянной на A функции. Мы настоятельно советуем читателю пройтись ещё раз по всей вышеизложенной схеме построения интеграла Лебега с тем, чтобы самостоятельно построить по уже имеющемуся образцу теорию интеграла на множестве σ-конечной меры. В настоящем же параграфе будет предложен обходной путь, позволяющий с помощью некоторого искусственного приёма свести интегрирование по σ-конечной мере к уже разобранному случаю интеграла по конечной мере. Это позволит свести свойства интеграла по σ-конечной мере к уже известным нам результатам.

Пусть A – множество σ-конечной меры. Зафиксируем некоторое представление множества A в виде $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \Sigma$ и $0 < \mu(A_n) < \infty$. Понятие интеграла на каждом множестве конечной меры, в частности на каждом из A_n, нам уже знакомо. Отталкиваясь от этого, можно ввести следующее определение:

Определение 1. Назовём функцию f интегрируемой на A по σ-конечной мере μ, если f μ-интегрируема на каждом из A_k и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| \, d\mu < \infty$. Положим, по определению, $\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$.

Введём обозначение $a_n = 2^n \mu(A_n)$. Определим на семействе Σ_A всех измеримых подмножеств множества A новую меру μ_1 формулой $\mu_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B \cap A_n)}{a_n}$. При таком определении тройка (A, Σ_A, μ_1) будет пространством с конечной мерой. Зададим на A функцию $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$.

Лемма 1. Пусть $B \in \Sigma_A$ и $\mu(B) < \infty$. Тогда функция $h : B \to \mathbb{R}$ будет интегрируемой на B по мере μ в том и только том случае, если функция $f \cdot g$ интегрируема на B по мере μ_1. При этом $\int_B h d\mu = \int_B hg d\mu_1$.

Доказательство. На Σ_{A_n} имеем $\mu_1 = \frac{1}{a_n}\mu$, а функция g на A_n равна постоянной a_n. Поэтому для $B \subset A_n$ утверждение очевидно: $\int_B h d\mu = \int_B a_n h \, d\left(\frac{1}{a_n}\mu\right) = \int_B hg d\mu_1$. Произвольное же множество B можно представить в виде $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)$, где множества $B \cap A_n$ дизъюнктны и каждое из них содержится в своём A_n. Так как на B по условию не только μ_1, но и μ конечна, мы можем применить теорему 4 п. 4.2.4 о счётной аддитивности интеграла как функции множества к интегралу на B как по μ_1, так и по μ, и составить наше утверждение из уже доказанных утверждений на подмножествах $B \bigcap A_n$. □

Лемма 2. Функция f интегрируема на A по мере μ в том и только том случае, если функция $f \cdot g$ интегрируема на A по мере μ_1. При этом $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A fg d\mu_1$.

Доказательство. Нужно применить лемму 1 к каждому из множеств A_k, воспользоваться определением 1 и применить теорему 4 п. 4.2.4 к мере μ_1. □

Ввиду леммы 2 линейность интеграла, возможность интегрирования неравенств, измеримость интегрируемой функции, критерий интегрируемости измеримой функции, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости, теоремы Леви – все эти свойства для интеграла по мере μ с очевидностью вытекают из соответствующих свойств для интеграла по мере μ_1.

Следующее свойство интеграла по σ-конечной мере означает, что интеграл не зависит от выбора представления множества A в виде $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (этот вопрос наверняка возник у читателя по прочтении определения 1).

Теорема 1. Пусть A – множество σ-конечной меры, $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n \in \Sigma$ и $\mu(B_n) < \infty$. Тогда $\int\limits_A f d\mu$ существует в том и только том случае, если f интегрируема на каждом из B_n и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| d\mu < \infty$. При этом

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu.$$

Доказательство. Пусть μ_1 – конечная мера из лемм 1 и 2. Воспользовавшись леммой 2 и применив теорему 4 п. 4.2.4 к конечной мере μ_1, получаем, что функция f интегрируема на A по мере μ тогда и только тогда, когда функция $f \cdot g$ интегрируема на каждом из B_n по μ_1 и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| g d\mu_1$. При этом $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} fg d\mu_1$. Для завершения доказательства остаётся применить лемму 1 на множествах B_k, что возможно ввиду конечности меры μ на каждом из этих множеств. □

Упражнения

Всюду в нижеприведенных упражнениях A_n и μ_1 взяты из определения 1 и леммы 1.

1. Пусть $B \subset A_n$ при каком-то n. Тогда $\mu_1(B) = \mu(B)/a_n$.
2. Пусть D – разбиение множества A на подмножества A_n. Тогда для любого разбиения $D_1 = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty} \succ D$ и любого выбора T отмеченных точек, интегральная сумма $S_A(f,D,T) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$ по мере μ совпадает с интегральной суммой $S_A(fg,D,T) = \sum_{k=1}^{\infty}(fg)(t_k)\mu_1(\Delta_k)$ по мере μ_1. Следовательно, $\int_A f d\mu$ можно определить как предел интегральных сумм, и по лемме 2 это определение будет эквивалентно исходному.
3. Докажите, что для множества $B \subset A$ условия $\mu(B) = 0$ и $\mu_1(B) = 0$ эквивалентны.
4. Для последовательности функций f_n на A следующие условия эквивалентны: $f_n \to f$ почти всюду в смысле меры μ; $f_n \to f$ почти всюду в смысле меры μ_1; $f_n g \to fg$ почти всюду в смысле меры μ_1.
5. Пусть λ – мера Лебега на оси. Измеримая функция f на оси интегрируема по λ в том и только том случае, если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{[k,k+1)} |f| d\lambda < \infty$ и
$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{[k,k+1)} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n)} f d\lambda.$$
6. Опираясь на уже доказанные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла для интеграла по конечной мере, докажите лемму Фату, теорему Лебега о мажорированной сходимости, теоремы Леви о последовательностях и рядах для случая σ-конечной меры.
7. **(Внимание!)** Теорема о равномерном пределе для интеграла по σ-конечной мере **не выполняется**. Покажите это на следующем примере: последовательность $f_n = \frac{1}{2n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$ интегрируемых на оси функций стремится равномерно к нулю, но интегралы всех этих функций равны единице.
8. Докажите теорему 1 без дополнительного предположения $\mu(B_n) < \infty$.
9. Пусть $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – пространства с σ-конечными мерами, $\{A_k\}_1^{\infty}$, $\{B_k\}_1^{\infty}$ – соответствующие разбиения множеств Ω_1 и Ω_2 на под-

множества конечной меры. Тогда прямоугольники $\{A_k \times B_j\}_{k,j=1}^{\infty}$ образуют разбиение декартова произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$ на подмножества конечной меры. Используя это разбиение, докажите теорему Фубини для произведения пространств с σ-конечными мерами.

10. Можно определить интеграл на множествах, не являющихся множествами σ-конечной меры, но это определение не расширяет существенно наших представлений об интеграле. Напомним, что носителем функции $f : A \to \mathbb{R}$ называется множество $\operatorname{supp} f = \{t \in A : f(t) \neq 0\}$. Назовём функцию f *интегрируемой на* A, если $\operatorname{supp} f$ является множеством σ-конечной меры и f интегрируема на $\operatorname{supp} f$. По определению, $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_{\operatorname{supp} f} f d\mu$. Проверьте, что основные свойства интеграла по множеству σ-конечной меры распространяются и на этот более общий случай.
11. Докажите, что невозможно распространить понятие интеграла на функции, носители которых не являются множествами σ-конечной меры, с сохранением основных свойств интеграла, а именно, с сохранением свойств (a) если $f \geq g$ на множестве A, f и g интегрируемы на A, то $\int\limits_A f d\mu \geq \int\limits_A g d\mu$ и (b) $\int\limits_A a d\mu = a\mu(A)$ для любой константы $a \in \mathbb{R}$ и любого измеримого множества A конечной меры.

4.6.3. Свёртка

Определение. Для функций f и g на оси *определена свёртка*, если для почти всех $t \in \mathbb{R}$ функция $f(\tau)g(t-\tau)$ интегрируема по мере Лебега на $\mathbb{R}$ как функция переменной τ. В этом случае *свёрткой* функций f и g называется функция $f * g$, определённая для почти всех $t \in \mathbb{R}$ равенством
$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t-\tau)d\lambda(\tau)$.

Понятие свёртки оказывается важным в теории вероятностей (плотность распределения суммы двух независимых случайных величин равна свёртке плотностей распределения исходных величин) и в теории преобразования Фурье (преобразование Фурье свёртки двух функций равно произведению преобразований Фурье исходных функций). В настоящем параграфе будет доказан следующий полезный результат.

Теорема. Если функции f и g интегрируемы на оси по мере Лебега, то для них определена свёртка. Далее, функция $f * g$ интегрируема на оси и $\int\limits_{\mathbb{R}} |f * g| d\lambda \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |f| d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}} |g| d\lambda$.

Доказательство. Прежде всего, напомним, что произведение интегрируемых функций не обязано быть интегрируемым, то есть при каких-то значениях параметра t функция $f(\tau)g(t-\tau)$ вполне может быть и неинтегрируемой по переменной τ. Попробуем вспомнить, где у нас уже встречалось утверждение типа «для почти всех значений первой переменной функция интегрируема по второй переменной»? Ну, конечно же, в теореме Фубини! Именно к теореме Фубини мы и будем сводить наше утверждение.

Отметим, что функции $f(\tau)$, $g(t-\tau)$, а следовательно, и их произведение $f(\tau)g(t-\tau)$ измеримы как функции двух переменных (см. упражнения 3, 6 п. 4.5.1). Чтобы доказать интегрируемость $f(\tau)g(t-\tau)$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, согласно критерию интегрируемости измеримой функции (п. 4.3.3), достаточно доказать интегрируемость положительной функции $|f(\tau)g(t-\tau)|$. Для этого же, в свою очередь, достаточно (см. п. 4.5.3) проверить существование повторного интеграла.

По условию, функция g интегрируема, следовательно, функция $g(t-\tau)$ интегрируема по t при любом значении τ. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}}|f(\tau)g(t-\tau)|d\lambda(t)=|f(\tau)|\int_{\mathbb{R}}|g(t-\tau)|d\lambda(t)=|f(\tau)|\int_{\mathbb{R}}|g(t)|d\lambda(t).$$

Теперь легко можно вычислить повторный интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}|f(\tau)g(t-\tau)|d\lambda(t)\right]d\lambda(\tau)=\int_{\mathbb{R}}|f(\tau)|d\lambda(\tau)\int_{\mathbb{R}}|g(t)|d\lambda(t). \tag{1}$$

Таким образом, произведение $f(\tau)g(t-\tau)$ интегрируемо как функция двух переменных. Применяя теорему Фубини, получаем, что для почти всех $t\in\mathbb{R}$ функция $f(\tau)g(t-\tau)$ интегрируема по мере Лебега на $\mathbb{R}$ как функция переменной τ и функция $(f*g)(t)=\int_{\mathbb{R}}f(\tau)g(t-\tau)d\lambda(\tau)$ интегрируема по переменной t, то есть свёртка определена и интегрируема. Требуемое же неравенство $\int_{\mathbb{R}}|f*g|d\lambda\le\int_{\mathbb{R}}|f|d\lambda\int_{\mathbb{R}}|g|d\lambda$ непосредственно следует из формулы (1). □

Упражнения

1. Операция свёртки коммутативна, то есть $f*g=g*f$ для любых интегрируемых функций f и g.

Как мы уже отмечали выше, для комплекснозначных функций определение и свойства интеграла ничем существенным не отличаются от соответствующих определений и свойств в вещественном случае. Одним из разделов математики, где постоянно используется интегрирование комплекснозначных функций, является гармонический анализ: теория рядов Фурье, интеграла Фурье и связанных с этим вопросов. В нашем курсе мы будем многократно обращаться к тем или иным вопросам гармонического анализа для демонстрации идей и методов применения изучаемого нами материала.

2. Пусть f – комплекснозначная интегрируемая функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что при любом $t \in \mathbb{R}$ функция $f(\tau)e^{it\tau}$ интегрируема на $\mathbb{R}$ как функция переменной τ.
3. Преобразованием Фурье интегрируемой функции f на оси называется функция $\hat{f}$ на $\mathbb{R}$ (другое обозначение: $F(f)$), задаваемая формулой $\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)e^{it\tau} d\lambda(\tau)$. Докажите, что функция $\hat{f}$ ограничена на $\mathbb{R}$.
4. Докажите, что функция $\hat{f}$ непрерывна и на бесконечности стремится к нулю.
5. Пусть функции f и g интегрируемы на оси. Тогда $F(f * g) = F(f)F(g)$.
6. Пусть функции f и g – 2π-периодические функции на оси, интегрируемые на отрезке $[0,2\pi]$. Свёрткой функций f и g на отрезке $[0,2\pi]$ называется функция $f * g$, определённая для почти всех $t \in [0,2\pi]$ равенством $(f * g)(t) = \int\limits_{[0,2\pi]} f(\tau)g(t-\tau)d\lambda_1(\tau)$, где $\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi}$ – нормированная мера Лебега на отрезке. Докажите, что, как и в случае свёртки на оси, свёртка интегрируемых функций на отрезке корректно определена, функция $f * g$ сама интегрируема на отрезке и $\int\limits_{[0,2\pi]} |f * g| d\lambda_1 \le \int\limits_{[0,2\pi]} |f| d\lambda_1 \int\limits_{[0,2\pi]} |g| d\lambda_1$.
7. Напомним, что коэффициентами Фурье интегрируемой функции f на отрезке $[0,2\pi]$ называются числа $\hat{f}_n = \int\limits_{[0,2\pi]} f(t)e^{int} d\lambda_1$, $n \in \mathbb{Z}$. В условиях предыдущего упражнения докажите, что коэффициенты Фурье функции $f * g$ на отрезке $[0,2\pi]$ равны произведениям соответствующих коэффициентов Фурье функций f и g.
8. Докажите, что $\hat{f}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

4.7. Комментарии к упражнениям

Параграф 4.2.3

Упражнение 8. Интегрируемая по Риману функция подчиняется условию (2) теоремы 1 п. 4.2.2, причём, по определению интеграла Римана, в качестве разбиения можно взять любое разбиение на конечное число достаточно мелких отрезков.

Параграф 4.3.1

Упражнение 5. По неравенству Чебышева (п. 4.3.1), все множества $|f|_{>1/n} = \left\{ t \in A : |f(t)| > \frac{1}{n} \right\}$ имеют меру ноль. Значит, их объединение – множество тех точек, где $f(t) \neq 0$, имеет меру ноль.

Параграф 4.6.3

Упражнения 3-5. См. раздел 14.2.

Упражнение 8. См. следствие 1 п. 10.4.3.

5. Линейные пространства, линейные функционалы и теорема Хана – Банаха

5.1. Линейные пространства

5.1.1. Основные определения

Пусть $\boldsymbol{K}$ – некоторое поле. Множество X с заданными на нём операциями сложения элементов и умножения на элементы из $\boldsymbol{K}$ называется *линейным пространством над* $\boldsymbol{K}$, если X является абелевой группой по сложению и для любых λ, μ из $\boldsymbol{K}$ и любых x, y из X выполнены следующие соотношения, связывающие умножение на элементы из $\boldsymbol{K}$ со сложением:

– $1 \cdot x = x$;

– $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

– $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

– $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

В курсе функционального анализа рассматриваются линейные пространства над полем вещественных или комплексных чисел. В дальнейшем мы будем использовать символ $\boldsymbol{K}$ для обозначения поля, если рассуждение применимо в равной степени как для вещественных, так и для комплексных чисел. Элементы поля $\boldsymbol{K}$ мы будем называть также числами или скалярами, для элементов же линейного пространства будем использовать также термин «векторы».

Пусть A – подмножество линейного пространства X. Элемент $x \in X$ называется *линейной комбинацией* элементов множества A, если он представим в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

где $\lambda_k \in \boldsymbol{K}$, $x_k \in A$. Множество всех линейных комбинаций элементов множества A называется *линейной оболочкой* множества A и обозначается $\operatorname{Lin} A$. Отметим, что, даже если множество A бесконечно, при составлении линейных комбинаций используются лишь конечные (хотя и сколь угодно большие) наборы элементов из A.

Подмножество Y линейного пространства X называется *линейным подпространством*, если для любых λ, μ из $\boldsymbol{K}$ и любых x, y из Y линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ также лежит в Y. Линейная оболочка множества A – это наименьшее линейное подпространство, содержащее A.

Подмножество A линейного пространства X называется *полным*, если $\operatorname{Lin} A = X$; A называется *линейно независимым*, если для любого конечного набора элементов $x_k \in A$, $k = 1, 2, ..., n$, равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ может быть выполнено, только если все коэффициенты λ_k равны 0. Полное линейно независимое подмножество называется *базисом Гамеля*. Если в пространстве X существует конечный базис Гамеля, пространство называется *конечномерным*, в противном случае пространство называется *бесконечномерным*. В отличие от линейной алгебры, функциональный анализ изучает в основном бесконечномерные пространства.

Упражнения

1. Вспомните, как доказывается то, что в конечномерном пространстве X число элементов любого базиса Гамеля одно и то же (это число $\dim X$ называется размерностью пространства X). Докажите, что:
   - если в линейном пространстве существует бесконечное линейно независимое множество, то пространство бесконечномерно;
   - если в линейном пространстве существует конечная полная система векторов, то пространство конечномерно;
   - если в линейном пространстве существует счётная полная система векторов, то любой базис Гамеля не более чем счётен;
   - если в линейном пространстве существует счётная линейно независимая система векторов, то любой базис Гамеля содержит, по крайней мере, счётное число элементов;
   - если в линейном пространстве существует счётный базис Гамеля, то любой другой базис Гамеля этого пространства также счётен.

   Решите предыдущие три упражнения с заменой счётности на любую другую фиксированную мощность.

2. Докажите, что следующие пространства бесконечномерны:
   - пространство $\boldsymbol{P}$ всех многочленов от одной переменной;
   - пространство $C[a,b]$ непрерывных скалярнозначных функций на отрезке $[a,b]$;
   - пространство всех интегрируемых по Лебегу скалярнозначных функций на отрезке $[a,b]$.
3. Описать те компакты K, для которых пространство $C(K)$ конечномерно. Для каких пространств с мерой будет конечномерным пространство всех интегрируемых по Лебегу скалярнозначных функций на (Ω, Σ, μ)?

5.1.2. Упорядоченные множества и лемма Цорна

Пусть $(\Gamma, \prec)$ – упорядоченное множество, то есть множество с заданным на нём отношением порядка $\prec$. Если для элементов $a, b \in \Gamma$ выполнено соотношение $b \prec a$, – мы будем говорить, что элемент a

мажорирует элемент b. Если при этом $a \neq b$, мы говорим, что a *строго мажорирует* b. Подмножество $A \subset \Gamma$ называется *ограниченным*, если в Γ существует элемент, мажорирующий все элементы множества A. Такой элемент называется *верхней гранью* подмножества A. Подмножество $A \subset \Gamma$ называется *цепью* или *линейно упорядоченным подмножеством*, если любые два элемента $a, b \in A$ сравнимы, то есть или $a \prec b$, или $b \prec a$. Элемент $a \in \Gamma$ называется *максимальным элементом* множества Γ, если в Γ не существует элемента, строго мажорирующего a. Упорядоченное множество Γ называется *индуктивным*, если $\Gamma \neq \varnothing$ и каждая цепь в Γ ограничена.

Следующее утверждение, хотя и носит исторически сложившееся название «лемма», в наши дни часто принимается в качестве одной из аксиом теории множеств. По сути, эта аксиома служит для несчётных множеств заменой принципа математической индукции.

Лемма Цорна. Каждое индуктивное упорядоченное множество имеет максимальный элемент.

Упражнения

1. На координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим такое упорядочение: $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$, если или $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$, или $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

– Привести пример множества в $\mathbb{R}^2$, у которого в данном упорядочении нет максимального элемента.
– Привести пример множества, имеющего два максимальных элемента в данном упорядочении.
– Привести пример множества, имеющего в данном упорядочении бесконечно много максимальных элементов.

2. Доказать, что в любом упорядоченном множестве каждая конечная цепь Γ содержит наибольший элемент: $\exists a \in \Gamma \, \forall b \in \Gamma \; b \prec a$. Верно ли это утверждение для бесконечных цепей?

5.1.3. Теорема существования базиса Гамеля

Теорема. В любом линейном пространстве существует базис Гамеля.

Доказательство. Пусть X – линейное пространство. Рассмотрим Γ – семейство всех линейно независимых подмножеств пространства X и зададим на Γ естественное отношение порядка: подмножество A мажорирует подмножество B, если $A \supset B$. Докажем, что упорядоченное множество Γ индуктивно. Для этого выделим произвольную цепь $\Gamma_1 \subset \Gamma$ и покажем, что множество $M = \bigcup_{A \in \Gamma_1} A$ – объединение всех множеств, являющихся элементами цепи Γ_1, будет верхней гранью в Γ цепи Γ_1. Ввиду того, что M мажорирует все элементы цепи Γ_1, нам только требуется доказать, что $M \in \Gamma$. Другими словами, нам нужно показать, что M – линейно независимое множество. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – произвольное конечное подмножество в M; B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ – соответствующие элементы цепи Γ_1, содержащие a_k: $a_k \in B_k$. Так как множества B_k попарно сравнимы, одно из них (скажем, B_j) содержит все остальные. То есть $A \subset B_j$, B_j линейно независимо, следовательно, и A линейно независимо. Мы доказали, что любое конечное подмножество множества M линейно независимо, следовательно, и M – линейно независимое множество.

Согласно лемме Цорна, в Γ существует максимальный элемент A. Покажем, что A и есть требуемый базис Гамеля. Свойством линейной независимости обладает любой элемент семейства Γ, в частности, и множество A. Докажем полноту множества A. Пусть $\mathrm{Lin}\, A \neq X$. Выберем произвольный элемент $x \in X \setminus \mathrm{Lin}\, A$. Тогда $A \bigcup \{x\}$ будет линейно независимым множеством, строго мажорирующим A, что противоречит максимальности A. □

Упражнения

1. Доказать, что любое линейно независимое множество в линейном пространстве можно дополнить до базиса Гамеля.
2. Пусть X_1 – подпространство линейного подпространства X. Доказать, что существует подпространство $X_2 \subset X$ со следующими свойствами: $X_1 \bigcap X_2 = \{0\}$, $\mathrm{Lin}(X_1 \bigcup X_2) = X$.
3. Укажите базис Гамеля в пространстве $\boldsymbol{P}$ всех многочленов от одной переменной.[1]

5.1.4. Линейные операции над подмножествами

Пусть A_1, A_2 – подмножества линейного пространства X, λ_1, λ_2 – скаляры. Через $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ обозначим множество всех элементов вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$.

Упражнения

1. $0 \in A_1 - A_2$ в том и только том случае, если A_1 и A_2 пересекаются.
2. Если A_1 и A_2 – подпространства, то $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ также будет подпространством.
3. Если A_1 и A_2 – подпространства, то $\mathrm{Lin}(A_1 \bigcup A_2) = A_1 + A_2$.

---

[1] Интересно, что, несмотря на теорему существования, ни одного явного примера базиса Гамеля в более сложных бесконечномерных пространствах (скажем, в $C[0,1]$) не известно.

4. Если A_1 и A_2 – подпространства и $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, то любой элемент $x \in A_1 + A_2$ имеет **единственное** представление в виде $x = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. В этом случае, чтобы подчеркнуть единственность представления, используют символ $\oplus$ *прямой суммы*: вместо $A_1 + A_2$ пишут $A_1 \oplus A_2$.
5. Подмножество Y линейного пространства X будет подпространством в том и только том случае, если $\lambda_1 Y + \lambda_2 Y \subset Y$ для любых скаляров λ_1 и λ_2.
6. Пусть A_1 и A_2 – замкнутые отрезки на плоскости. Какой геометрической фигурой будет $A_1 + A_2$? В каком случае $A_1 + A_2$ будет отрезком?
7. Пусть A – замкнутое множество на плоскости. Доказать, что $A + A = 2A$ в том и только том случае, если A выпукло.

5.2. Линейные операторы

5.2.1. Инъективность и сюръективность

Пусть X, Y – линейные пространства над полем скаляров $\boldsymbol{K}$. Отображение $T : X \to Y$ называется *линейным оператором*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{K}$ выполнено соотношение $T\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\right) = = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$. В случае, если $Y = \boldsymbol{K}$, линейный оператор $T\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\right) = = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$. называется *линейным функционалом*.

Оператор $T : X \to Y$ называется *инъективным*, если его *ядро* $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ состоит только из нуля. Оператор называется *сюръективным*, если его *образ* $\operatorname{Im} T = T(X)$ совпадает со всем пространством Y. Наконец, оператор называется *биективным*, или *обратимым*, если он одновременно инъективен и сюръективен. Другими словами, если уравнение $Tx = b$ имеет решение при любой правой части $b \in Y$, то оператор T сюръективен; если из разрешимости уравнения $Tx = b$ при данной правой части следует единственность решения, то оператор T инъективен. Биективность же означает существование и единственность решения при любой правой части.

Упражнения

1. Проверить, что ядро и образ линейного оператора – это линейные подпространства.
2. Пусть X, Y – линейные пространства, X_1 – подпространство в X. Доказать, что любой линейный оператор $T : X_1 \to Y$ можно продолжить до линейного оператора, действующего из X в Y.
3. Пусть X, Y, Z – линейные пространства, $U : X \to Y$ и $V : Y \to Z$ – линейные операторы, $T = V \circ U$. Доказать, что если T инъективен, то

U инъективен; что если сюръективен T, то сюръективен и V. Выполняются ли обратные утверждения?

4. Пусть $T : X \to Y$ – линейный оператор, $A_1, A_2 \subset X$. Тогда $T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$.
5. Пусть $T_1, T_2 : X \to Y$ – линейные операторы, $A \subset X$. Тогда $(T_1 + T_2)(A) \subset T_1(A) + T_2(A)$. Привести пример, когда $(T_1 + T_2)(A) \neq T_1(A) + T_2(A)$.
6. Пусть $T : X \to Y$ – линейный оператор, $A_1, A_2 \subset Y$. Тогда $T^{-1}(A_1 + A_2) \supset T^{-1}(A_1) + T^{-1}(A_2)$. Привести пример, когда $T^{-1}(A_1 + A_2) \neq T^{-1}(A_1) + T^{-1}(A_2)$.

5.2.2. Факторпространство

Пусть X – линейное пространство, X_1 – подпространство в X. Введём следующее отношение эквивалентности на X: $x \sim y$, если $x - y \in X_1$. Классом эквивалентности элемента x будет, как нетрудно заметить, множество $[x] = x + X_1 = \{x + y : y \in X_1\}$. Множество таких классов эквивалентности, наделённое операциями, описанными в п. 5.1.4, называется *факторпространством* пространства X по подпространству X_1 и обозначается X/X_1. Отметим простейшие свойства линейных операций на факторпространстве, из которых следует в частности, что факторпространство является линейным пространством.

1. Класс эквивалентности нуля есть нулевой элемент факторпространства:
$$[0] + [x] = X_1 + \left(x + X_1\right) = x + \left(X_1 + X_1\right) = x + X_1 = [x].$$
2. $\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]$:
$$\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = \lambda_1(x_1 + X_1) + \lambda_2(x_2 + X_1) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_1) =$$
$$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + X_1 = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2].$$

С факторпространством тесно связан оператор q – фактор-отображение пространства X на X/X_1: $q(x) = [x]$. Линейность оператора факторотображения вытекает из только что выписанного свойства 2. Оператор факторотображения сюръективен.

Важный пример факторпространства возникает естественным образом в теории интегрирования. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой (конечной или бесконечной). Через $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначается факторпространство пространства X всех измеримых скалярнозначных функций на Ω по подпространству X_1 функций, имеющих пренебрежимые носители. В этом примере соответствующее отношение эквивалентности – это хорошо знакомое читателю равенство почти всюду.

5.2.3. Инъективизация линейного оператора

Пусть X, Y – линейные пространства, $T: X \to Y$ – линейный оператор, вообще говоря, не инъективный. *Инъективизацией* оператора T называется отображение $\widetilde{T}: X/\operatorname{Ker} T \to Y$, ставящее классу эквивалентности $[x]$ элемента $x \in X$ элемент Tx: $\widetilde{T}([x]) = Tx$.

Упражнения

1. Проверить корректность определения оператора $\widetilde{T}$, а именно, что если у элементов x_1 и x_2 совпадают классы эквивалентности, то $Tx_1 = Tx_2$. Другими словами, $\widetilde{T}([x])$ не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности $[x]$.
2. Проверить линейность и инъективность оператора $\widetilde{T}$.
3. Проверить, что $T = \widetilde{T} \circ q$, где $q: X \to X/\operatorname{Ker} T$ – оператор факторотображения. Таким образом, любой оператор можно разложить в композицию сюръективного и инъективного операторов. Сравните с упражнением 3 п. 5.2.1.

   Пусть X – линейное пространство, X_1 – подпространство в X, X' – пространство всех линейных функционалов на X. Аннулятором в X' подпространства X_1 называется множество $X_1^{\perp}$ всех $f \in X'$, для которых $\operatorname{Ker} f \supset X_1$. Для каждого функционала g на X/X_1 определим функционал $Ug \in X'$ равенством $Ug(x) = g([x])$. Другими словами, Ug – это композиция функционала g с факторотображением.
4. U – это линейный инъективный оператор.
5. $U\left((X/X_1)'\right) = X_1^{\perp}$, то есть $X_1^{\perp}$ – это линейное подпространство, изоморфное $(X/X_1)'$.

5.3. Выпуклость

Функциональный анализ в основном имеет дело с аналитическими объектами – функциями, последовательностями, пределами и т. д., но подход к этим объектам существенно отличается от подходов математического анализа. Вместо изучения индивидуальных функций или последовательностей с тем или иным свойством вводят в рассмотрение соответствующие пространства, подпространства или подмножества. Благодаря такому подходу многие вопросы анализа удаётся свести к задачам о взаимном расположении или свойствах множеств в тех или иных пространствах. Скажем, вопрос о возможности приближения непрерывной функции многочленом сводится к вопросу о плотности в некоторой метрике множества многочленов в пространстве непрерывных функций; вопрос об определении интеграла для неинтегрируемых по Риману функций можно сформулировать как задачу распространения линейного функционала на более широкое пространство; задача Коши дифференциального уравнения превращается в задачу поиска неподвижной точки отображения. Такой подход позволяет при поиске решения использовать геометрическое воображение, делать наброски, разбирать примеры, где моделью бесконечномерных множеств будут плоские или пространственные фигуры. Однако для успешного применения в задачах функционального анализа своей геометрической интуиции необходимо приобрести некий опыт. Нужно научиться отличать существенные свойства модели от специфики плоского рисунка, научиться переводить идеи, навеянные рисунком, на язык строгих математических рассуждений. Для этого, в частности, нужно корректно определить, там, где это возможно, бесконечномерные аналоги понятий и построений, используемых обычно в геометрических рассуждениях. В этом разделе мы введём такие аналоги для понятий прямой, отрезка, выпуклого множества, а также аналог разбиения пространства плоскостью на два полупространства.

5.3.1. Определения и свойства

Пусть X – линейное пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$. *Прямой, проходящей через точки* x *и* y, называется множество всех элементов вида $\lambda x + (1-\lambda)y$, где λ пробегает вещественную ось. *Отрезком, соединяющим* x *и* y, называется множество элементов вида $\lambda x + (1-\lambda)y$, где $\lambda \in [0,1]$. Подмножество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь соединяющий их отрезок.

Упражнения

1. Прямая и отрезок – это выпуклые множества.
2. Пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло.
3. Объединение двух выпуклых множеств может быть невыпуклым.
4. Пусть X, Y – линейные пространства, $U : X \to Y$ – линейный оператор. Проверить, что для любого A – выпуклого подмножества в X – множество $U(A)$ также выпукло. Проверить, что если B – выпуклое подмножество в Y, то $U^{-1}(B)$ выпукло.

   Какие из нижеприведенных множеств в пространстве s всех вещественных числовых последовательностей будут выпуклыми?
5. $\left\{ a = (a_n)_1^\infty : \inf a_n > 1 \right\}$.
6. $\left\{ a = (a_n)_1^\infty : \inf a_n < 1 \right\}$.
7. $\left\{ a = (a_n)_1^\infty : \sup a_n = +\infty \right\}$.
8. $\left\{ a = (a_n)_1^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \right\}$.

Какие из нижеприведенных множеств в пространстве всех вещественных функций на отрезке $[0,1]$ будут выпуклыми?

9. Множество всех непрерывных функций.
10. Множество всех разрывных функций.
11. Множество всех бесконечно дифференцируемых функций.
12. Множество всех нигде не дифференцируемых функций.

Пусть A – подмножество линейного пространства X. Доказать, что:

13. $A + A \supset 2A$.
14. Если A выпукло, то $A + A = 2A$.

5.3.2. Выпуклая оболочка

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – произвольный конечный набор элементов линейного пространства X. Элемент вида $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ называется *выпуклой комбинацией элементов* x_k, если коэффициенты $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ – неотрицательные числа и $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Утверждение. Пусть A – выпуклое множество в линейном пространстве X, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset A$. Тогда любая выпуклая комбинация элементов x_k лежит в A.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по n – числу элементов, участвующих в выпуклой комбинации. Из определения выпуклого множества сразу следует база индукции – случай $n = 2$. Рассмотрим переход от $n-1$ к n. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ – неотрицательные числа, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Если среди λ_k есть нули, то x будет на самом деле комбинацией $n-1$ элемента, то есть $x \in A$ по предположению индукции. Рассмотрим случай ненулевых λ_k. Положим $\mu = \sum_{1}^{n-1} \lambda_k$, $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\mu}$, $k = 1, \dots, n-1$. Тогда $y = \sum_{1}^{n-1} \mu_k x_k$ принадлежит A как выпуклая комбинация $n-1$ элемента из A. Ввиду равенства $x = \mu y + \lambda_n x_n$ элемент x представим в виде выпуклой комбинации двух элементов из A, то есть $x \in A$.□

Пусть A – произвольное подмножество линейного пространства X. Множество всех выпуклых комбинаций элементов из A называется *выпуклой оболочкой множества* A и обозначается $\mathrm{conv}(A)$ или $\mathrm{conv}\, A$.

Упражнения

В условиях предыдущего определения проверить, что:

1. $\operatorname{conv}(A)$ – это выпуклое множество.
2. $\operatorname{conv}(A)$ – это наименьшее среди всех выпуклых множеств, содержащих A.
3. Если A состоит из двух точек, то $\operatorname{conv}(A)$ – это отрезок, соединяющий указанные точки.

Доказать, что:

4. Выпуклая оболочка множества на плоскости, состоящего из трёх точек, – это треугольник с вершинами в этих точках.
5. Выпуклая оболочка любого множества A на плоскости – это объединение всех треугольников с вершинами в точках множества A.

Будет ли утверждение предыдущего упражнения выполнено для множеств в трёхмерном пространстве?

5.3.3. Гиперподпространства и гиперплоскости

Подпространство Y линейного пространства X называется *гиперподпространством*, если существует такой вектор $e \in X \setminus Y$, что $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$.

Утверждение. Для подпространства Y линейного пространства X следующие условия эквивалентны:

1. Y – гиперподпространство в X;
2. $\dim X / Y = 1$;
3. Существует ненулевой линейный функционал f на X, для которого $\operatorname{Ker} f = Y$.

Доказательство. $1. \Rightarrow 2.$ Пусть Y – гиперподпространство в X, $e \in X \setminus Y$ – такой элемент, что $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Рассмотрим $[e] \in X / Y$ – класс эквивалентности элемента e. $[e] \neq 0$, так как $e \notin Y$. В то же время $\operatorname{Lin}[e] = X / Y$, то есть в X / Y существует базис из одного элемента.

$2. \Rightarrow 3.$ Поскольку $\dim X / Y = 1$, существует изоморфизм $U : X / Y \to \boldsymbol{K}$ нашего факторпространства и поля скаляров. Определим функционал $f = U \circ q$, где q – фактоотображение пространства X на X / Y. Для этого функционала $\operatorname{Ker} f = Y$.

$3. \Rightarrow 1.$ Пусть f – функционал из п. 3. Выберем элемент $e \in X$, для которого $f(e) = 1$. Очевидно, $e \in X \setminus Y$. Докажем, что $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Для этого возьмём произвольный вектор $x \in X$ и представим его в виде $x = f(x)e + \left(x - f(x)e\right)$. В этой записи второе слагаемое $x - f(x)e$ лежит в $\operatorname{Ker} f = Y$, то есть мы представили элемент x в виде $ae + y$, где $a \in \boldsymbol{K}$, $y \in Y$. □

Подмножество A линейного пространства X называется *гипер-плоскостью*, если оно является сдвинутым гиперподпространством.

Другими словами, гиперплоскость в X – это множество вида $x+Y$, где $x \in X$, а Y – гиперподпространство в X.

5.3.4. Упражнения

1. Пусть f – ненулевой линейный функционал в пространстве X, a – произвольное число. Доказать, что *линия уровня* $f_a = \{x \in X : f(x) = a\}$ функционала f образует гиперплоскость в X.
2. Доказать, что любая гиперплоскость в X есть линия уровня некоторого ненулевого линейного функционала.
3. Пусть Y – гиперподпространство в X. Доказать, что $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$ для любого вектора $e \in X \setminus Y$.
4. Пусть ядра двух линейных функционалов совпадают. Доказать, что эти функционалы линейно зависимы.
5. Пусть Y – гиперплоскость в вещественном пространстве X. На $X \setminus Y$ введём следующее отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает эту гиперплоскость. Проверить, что так введённое отношение действительно будет отношением эквивалентности. $X \setminus Y$ распадается на два класса эквивалентности. Эти классы эквивалентности называются *полупространствами, порождёнными гиперплоскостью* Y.
6. Пусть гиперплоскость – это линия уровня f_a функционала f в вещественном пространстве X. Проверить, что полупространствами, порождёнными гиперплоскостью f_a, будут множества $f_{<a} = \{x \in X : f(x) < a\}$ и $f_{>a} = \{x \in X : f(x) > a\}$.
7. Почему в двух предыдущих упражнениях важна вещественность пространства?

Определение. Подпространство Y линейного пространства X имеет *коразмерность* n ($\mathrm{codim}_X Y = n$), если размерность факторпространства X/Y равна n.

8. $\mathrm{codim}_X Y \le n$ в том и только том случае, если существуют n векторов $\{x_k\}_1^n \subset X$ таких, что $\mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_n, Y\} = X$.
9. $\mathrm{codim}_X Y \le n$ в том и только том случае, если Y имеет ненулевое пересечение с любым подпространством Z в X размерности большей или равной $n+1$.
10. $\mathrm{codim}_X Y = n$ в том и только том случае, если существует подпространство Z в X такое, что $\dim Z = n$, $Z \bigcap Y = \{0\}$, $Z + Y = X$.
11. Пусть $Y \subset Z$ – подпространства пространства X. Тогда $\mathrm{codim}_X Y = \mathrm{codim}_Z Y + \mathrm{codim}_X Z$.

12. Для любых подпространств Y, Z пространства X выполнены соотношения:
$\max\{\operatorname{codim}_X Y, \operatorname{codim}_X Z\} \le \operatorname{codim}_X (Y \cap Z) \le \operatorname{codim}_X Y + \operatorname{codim}_X Z.$
13. $\operatorname{codim}_X Y = \dim Y^{\perp}$.
14. $\operatorname{codim}_X Y \le n$ в том и только том случае, если на X существует такой набор из n линейных функционалов, что пересечение их ядер содержится в Y.
15. $\operatorname{codim}_X Y = n$ в том и только том случае, если на X существует такой линейно независимый набор из n линейных функционалов, что пересечение их ядер совпадает с Y.
16. Пусть f, $\{f_k\}_{k=1}^n$ – линейные функционалы на X и $\operatorname{Ker} f \supset \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$.

Тогда $f \in \operatorname{Lin}\{f_k\}_{k=1}^n$.

5.4. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала

5.4.1. Выпуклые функционалы

Вещественнозначная функция p, заданная на линейном пространстве X, называется *выпуклым функционалом*, если она подчиняется следующим условиям:

– $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для любого вектора $x \in X$ и любого неотрицательного числа λ (положительная однородность) и
– $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Упражнения

1. Пусть $t > 0$, p – выпуклый функционал. Тогда tp – также выпуклый функционал.
2. Модуль выпуклого функционала – выпуклый функционал.
3. Пусть p_1 и p_2 – выпуклые функционалы. Тогда $p_1 + p_2$ и $\max(p_1, p_2)$ – также выпуклые функционалы.
4. Каждый линейный функционал на вещественном пространстве будет выпуклым функционалом. Проверить, что если p и $-p$ – выпуклые функционалы, то p – линейный функционал.
5. Пусть p – выпуклый функционал, $x \in X$ – фиксированный элемент, $p(x) \le 0$ и $p(-x) \le 0$. Тогда $p(x) = p(-x) = 0$.

Какие из перечисленных ниже выражений задают выпуклые функционалы в пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$?

6. $p_1(f) = \max\{f(t) : t \in [0,1]\}$;

7. $p_2(f) = \min\{f(t) : t \in [0,1]\}$;
8. $p_3(f) = p_1(f) - p_2(f)$;
9. $p_4(f) = |f|$.

Какие из нижеперечисленных выражений задают выпуклые функционалы в пространстве l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей?

10. $p_5(x) = x_5$;
11. $p_6(x) = x_5 \cdot x_6$;
12. $p_7(x) = \sum\limits_1^\infty |x_n|$;
13. $p_8(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$;
14. $p_9(x) = \sum\limits_1^\infty \frac{1}{2^n}|x_n|$.

(В последних четырёх упражнениях x – это последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$)

Существует тесная связь между выпуклыми функционалами и выпуклыми множествами. Описанию этой связи посвящён следующий параграф.

5.4.2. Функционал Минковского

Подмножество A линейного пространства X называется *поглощающим*, если для любого $x \in X$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{t}x \in A$ для любого $t > n$. Отметим, что поглощающее множество A обязано содержать нулевой элемент пространства и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nA = X$.

Пусть A – выпуклое поглощающее множество в X. *Функционалом Минковского* множества A называется вещественная функция, заданная на X формулой

$$\varphi_A(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in A\right\}.$$

Функционал φ_A связан с множеством A следующими очевидными соотношениями:

– если $x \in A$, то $\varphi_A(x) \le 1$;
– если $\varphi_A(x) < 1$, то $x \in A$.

Утверждение. Пусть A – выпуклое поглощающее множество в X. Тогда $\varphi_A(x)$ – выпуклый функционал, принимающий неотрицательные значения.

Доказательство. Докажем вначале положительную однородность функционала. Пусть $\lambda > 0$, $x \in X$. Тогда

$$\varphi_A(\lambda x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}\lambda x \in A\right\} = \inf\left\{\lambda s > 0 : \frac{1}{s}x \in A\right\} = \lambda \inf\left\{s > 0 : \frac{1}{s}x \in A\right\} = \lambda\varphi_A(x)$$

(в последней цепочке равенств было использовано переобозначение $t \to \lambda s$).

Теперь проверим неравенство треугольника. Пусть $x, y \in X$. Докажем, что $\varphi_A(x+y) \le \varphi_A(x) + \varphi_A(y)$. Очевидно, для этого достаточно показать, что для любых $a > \varphi_A(x)$, $b > \varphi_A(y)$ выполнено неравенство $\varphi_A(x+y) \le a+b$. Зафиксируем числа $a > \varphi_A(x)$, $b > \varphi_A(y)$. Тогда $\varphi_A\left(\frac{x}{a}\right) < 1, \varphi_A\left(\frac{y}{b}\right) < 1$, то есть $\frac{x}{a} \in A$, и $\frac{y}{b} \in A$. Ввиду выпуклости множества A элемент $\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$ также лежит в A. Таким образом, $\varphi_A\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le 1$, и требуемое неравенство $\varphi_A(x+y) \le a+b$ доказано. □

Упражнения

Множество A в линейном пространстве X называется *уравновешенным*, если для любого скаляра $\lambda, |\lambda| \le 1$ выполнено включение $\lambda A \subset A$.

1. Пусть A – выпуклое уравновешенное множество. Тогда $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$ – это линейное подпространство в X и A – поглощающее множество в Y.

Пусть p – выпуклый функционал, принимающий неотрицательные значения. Положим $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Проверить, что:

2. A – выпуклое поглощающее множество.
3. Для любого $x \in A$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(1+\varepsilon)x \in A$.
4. $\varphi_A = p$.

Пусть A, B – выпуклые поглощающие множества. Проверить, что:

5. $\varphi_{A \cap B} = \max(\varphi_A, \varphi_B)$.
6. $\varphi_{-A}(x) = \varphi_A(-x)$.

5.4.3. Теорема Хана – Банаха в аналитической форме

Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала, которую мы докажем в этом параграфе (другое название – теорема Хана – Банаха в аналитической форме), – это одна из самых важных теорем курса функционального анализа. Она часто используется как в рамках самого предмета, так и в применениях функционального анализа к широкому кругу смежных дисциплин. Некоторые из таких применений читатель найдёт в нашем курсе. Традиционно теорему Хана – Банаха относят к «основным принципам функционального анализа». К этим «основным принципам» относят также теорему Хана – Банаха в геометрической форме (п. 9.2), теоремы Банаха об обратном операторе, открытом отображении и замкнутом графике, а также теорему Банаха – Штейнгауза (см. главу 10).

Теорема. Пусть на вещественном линейном пространстве X задан выпуклый функционал p; Y – подпространство в X, f – линейный функционал на Y и $f(y) \le p(y)$ для любого $y \in Y$. Тогда f можно продолжить до линейного функционала g, заданного на всём X, с сохранением условия мажорации: $g(x) \le p(x)$ для любого $x \in X$.

Доказательство. Вначале разберём частный случай, когда Y – гиперподпространство в X. Пусть $e \in X \setminus Y$ – такой вектор, что $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Любой элемент пространства X однозначно представим в виде $x = \lambda e + y$, где $y \in Y$, а λ – вещественный скаляр. Поэтому требуемый функционал g – продолжение с Y функционала f – однозначно определяется своим значением в точке e: $g(\lambda e + y) = \lambda g(e) + f(y)$. Для выполнения условия мажорации число $g(e)$ должно подчиняться требованию

$$\lambda g(e) + f(y) \le p(\lambda e + y) \text{ для любых } \lambda \text{ и } y \in Y. \qquad (*)$$

При $\lambda = 0$ это требование выполнено по условию. При положительном λ требование $(*)$ переписывается в виде

$$g(e) \le \frac{1}{\lambda}\big(p(\lambda e + y) - f(y)\big) \text{ для любых } \lambda > 0 \text{ и } y \in Y,$$

а для отрицательных $\lambda = -\mu$ требование $(*)$ переписывается в виде

$$g(e) \ge -\frac{1}{\mu}\big(p(-\mu e + v) - f(v)\big) \text{ для любых } \mu > 0 \text{ и } v \in Y.$$

Таким образом, для существования требуемого продолжения необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\sup\left\{-\frac{1}{\mu}\big(p(-\mu e + v) - f(v)\big) : \mu > 0, v \in Y\right\} \le \inf\left\{\frac{1}{\lambda}\big(p(\lambda e + y) - f(y)\big) : \lambda > 0, y \in Y\right\}.$$

Проверим это соотношение. Пусть $\lambda, \mu > 0;\ \ y, v \in Y$. Перенося члены, содержащие f, в левую, а содержащие p – в правую часть, неравенство

$$-\frac{1}{\mu}\left(p(-\mu e + v) - f(v)\right) \le \ \ \frac{1}{\lambda}\left(p(\lambda e + y) - f(y)\right)$$

сведём к неравенству

$$\frac{1}{\mu} f(v) + \frac{1}{\lambda} f(y) \le \frac{1}{\mu} p(-\mu e + v) + \frac{1}{\lambda} p(\lambda e + y).$$

Последнее же следует из условия мажорации для f:

$$\frac{1}{\mu} f(v) + \frac{1}{\lambda} f(y) = f\left(\frac{1}{\mu} v + \frac{1}{\lambda} y\right) \le p\left(\frac{1}{\mu} v + \frac{1}{\lambda} y\right) \le \frac{1}{\mu} p(-\mu e + y) + \frac{1}{\lambda} p(\lambda e + y).$$

Итак, частный случай подпространства коразмерности 1 нами разобран. Доказанный факт можно сформулировать так: линейный функционал f, заданный на Y и подчиняющийся условию мажорации, можно продолжить на линейную оболочку подпространства Y и произвольного одного элемента с сохранением условия мажорации. Применяя это утверждение ещё раз, затем ещё и ещё раз, мы можем получить продолжение функционала f на линейную оболочку подпространства Y и произвольного конечного числа векторов. К сожалению, ввиду бесконечномерности пространства X подобным рассуждением не всегда удаётся получить продолжение на всё пространство. Поэтому для завершения рассуждения нам предстоит воспользоваться леммой Цорна – стандартным способом организации индуктивных рассуждений в случае несчётного числа требуемых шагов.

Рассмотрим Γ – семейство всех пар вида (Z, h), где Z – подпространство в X, содержащее Y, а h – линейный функционал на Z, совпадающий на Y с f и подчиняющийся на Z условию мажорации. По сути, элементы семейства Γ – это продолжения функционала f. Нам нужно доказать, что среди элементов $(Z, h) \in \Gamma$ существует такой, что $Z = X$. Введём на Γ отношение порядка: $(Z_1, h_1) \succ (Z_2, h_2)$, если $Z_1 \supset Z_2$ и ограничение функционала h_1 на Z_2 совпадает с h_2. Легко видеть, что упорядоченное множество Γ индуктивно. Следовательно, по лемме Цорна, в Γ существует максимальный элемент (Z_0, h_0). Если бы Z_0 не совпадало со всем X, мы могли бы, по уже доказанному частному случаю теоремы Хана – Банаха, продолжить h_0 с сохранением условия мажорации на подпространство вида $\mathrm{Lin}\{e, Z_0\}$, строго содержащее Z_0. Существование такого продолжения противоречило бы максимальности пары (Z_0, h_0), то есть $Z_0 = X$, что и требовалось доказать. □

Замечание. В теореме Хана – Банаха утверждается существование продолжения, но это продолжение может быть и не единственным (приведите пример в случае двумерного X и одномерного Y). Соответственно, во всех приложениях теоремы Хана – Банаха, которые будут у нас встречаться в дальнейшем, утверждается существование того или иного объекта, но единственности может и не быть.

Упражнения

1. Где в формулировке и доказательстве вышеприведенной теоремы Хана – Банаха играет роль вещественность рассматриваемых пространств и, следовательно, функционалов?
2. Попробуйте придумать и доказать какое-нибудь обобщение теоремы Хана – Банаха на комплексный случай.
3. В случае, если факторпространство X/Y имеет конечный или счётный базис Гамеля, теорему Хана – Банаха можно доказать без использования леммы Цорна. Как?

5.5. Некоторые приложения теоремы Хана – Банаха

5.5.1. Инвариантное среднее на коммутативной полугруппе

Пусть G – коммутативная полугруппа; полугрупповую операцию на G будем обозначать знаком +. Рассмотрим линейное пространство $l_\infty(G)$ всех ограниченных вещественнозначных функций на G. Каждый элемент $g \in G$ порождает *оператор сдвига* $S_g : l_\infty(G) \to l_\infty(G)$, действующий по правилу $(S_g F)(h) = F(g+h)$. Линейный функционал I на $l_\infty(G)$ называется *инвариантным средним* на G, если он подчиняется следующим условиям:

– $\inf\limits_{g\in G} F(g) \le I(F) \le \sup\limits_{g\in G} F(g)$ для любой функции $F \in l_\infty(G)$ (то есть $I(F)$ – среднее значение для F);
– $I(S_g F) = I(F)$ для любой функции $F \in l_\infty(G)$ и любого $g \in G$ (инвариантность относительно сдвигов).

В этом параграфе мы покажем, что инвариантное среднее существует на любой коммутативной полугруппе G.

Для функции $F \in l_\infty(G)$ определим величину $p(F) = \inf\left\{\sup\limits_{h\in G} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} F(g_k + h) : n \in \mathbb{N}, (g_k)_{k=1}^{n} \in G^n\right\}$, где инфимум берётся по всем конечным наборам $g_k \in G$, возможно, с повторениями.

Утверждение. p – выпуклый функционал на $l_\infty(G)$, удовлетворяющий для любой функции $F \in l_\infty(G)$ и любого $g \in G$ условиям:

(1) $p(S_g F - F) \le 0$;

(2) $\quad p\left(F - S_g F\right) \le 0$

(условия (1) и (2) вместе, согласно упражнению 5 параграфа 5.4.1, означают равенство нулю оцениваемых выражений).

Доказательство. Положительная однородность здесь очевидна, проверим неравенство треугольника. Пусть $F_1, F_2 \in l_\infty(G)$, $\varepsilon > 0$. Выберем такие элементы g_k^1, $k = 1,2,\dots,n_1$ и g_k^2, $k = 1,2,\dots,n_2$ полугруппы G, что $\sup\limits_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_i}\sum\limits_{k=1}^{n_i} F_i\left(g_k^i + h\right)\right\} < p(F_i) - \varepsilon,\ i = 1,2$. Тогда

$$p(F_1 + F_2) \le \sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_1}(F_1 + F_2)\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right)\right\}.$$

Воспользуемся тем, что супремум суммы не превосходит суммы супремумов, и продолжим оценку:

$$\le \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} F_1\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right)\right\} + \frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} F_2\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right)\right\}$$

$$\le p\left(F_1\right) + p\left(F_2\right) - 2\varepsilon,$$

что, ввиду произвольности ε, доказывает требуемое неравенство треугольника.

Проверим теперь условие (1).

$$p\left(S_g F - F\right) \le \sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(S_g F - F\right)\left(h + kg\right)\right\} = \sup_{h\in G}\frac{1}{n}\Big(F\left(h + \left(n+1\right)g\right) - F\left(h + g\right)\Big) \le$$

$$\le \frac{2}{n}\sup_{h\in G}\left|F\left(h\right)\right|.$$

Устремив в последнем неравенстве n к бесконечности, получим требуемую оценку. Неравенство (2) доказывается аналогичным образом. □

Обозначим функцию, равную на G тождественной единице, через $\mathbf{1}$. Отметим ещё два очевидных свойства функционала p:

- $p(\mathbf{1}) = 1$;
- если функция F всюду меньше или равна нуля, то $p(F) \le 0$.

Теорема. На любой коммутативной полугруппе G существует инвариантное среднее.

Доказательство. Рассмотрим в $l_\infty(G)$ подпространство $Y = \mathrm{Lin}\{\mathbf{1}\}$. Определим функционал на Y равенством $f(c\cdot\mathbf{1}) = c$. Очевидно, что функционал f линеен и $f \le p$. Воспользуемся теоремой Хана – Банаха и продолжим f на всё $l_\infty(G)$ до линейного функционала I с сохранением условия мажорации. Докажем, что I будет инвариантным средним. Вначале отметим свойство *монотонности* функционала I: если $F_1, F_2 \in l_\infty(G)$, $F_1 \le F_2$ во всех точках, то $I(F_1) \le I(F_2)$. Действительно, при таком условии $F_1 - F_2 \le 0$, следовательно, $I(F_1) - I(F_2) = I(F_1 - F_2) \le p(F_1 - F_2) \le 0$. Из монотонности функционала I получаем, что если функция F оценивается сверху и снизу константами: $c_1\mathbf{1} \le F \le c_2\mathbf{1}$, то $I(F)$ оценивается теми же константами: $c_1 \le I(F) \le c_2$. Таким образом, мы доказали первое условие определения инвариантного среднего. Второе условие – инвариантность относительно сдвигов – сразу следует из условия мажорации и свойств (1), (2) функционала p:

$$I(S_g F) - I(F) = I(S_g F - F) \le p(S_g F - F) \le 0;$$

$$I(F) - I(S_g F) = I(F - S_g F) \le p(F - S_g F) \le 0. \ \square$$

Замечание. Коммутативность полугруппы не является необходимым условием существования инвариантного среднего. Подробнее о группах, допускающих инвариантное среднее, можно прочитать в монографии [Pat].

5.5.2. Грубая задача теории меры

Напомним, что мы доказывали ранее (п. 2.3.4) неразрешимость так называемой *тонкой задачи теории меры*: построения инвариантной относительно сдвига счётно-аддитивной вероятностной меры μ, определённой на всех подмножествах отрезка $[0,1)$. Отсюда мы выводили существование неизмеримых по Лебегу множеств: если бы каждое подмножество отрезка было измеримым по Лебегу, то мера Лебега была бы решением тонкой задачи теории меры. В то же время аналогичная задача с заменой счётной аддитивности на конечную аддитивность (*грубая задача теории меры*) уже разрешима.

Теорема (Банах). Существует конечно-аддитивная мера μ, определённая на всех подмножествах отрезка $[0,1)$, с $\mu([0,1)) = 1$ и инвариантная относительно сдвигов (то есть $\mu(A+t) = \mu(A)$ для любого подмножества $A \subset [0,1)$ и любого $t \in \mathbb{R}$, таких, что $A + t \subset [0,1)$).

Доказательство. Наделим отрезок $[0,1)$ операцией сложения по модулю 1: сумма чисел a и b по модулю 1 – это дробная часть числа g. Зафиксируем I – инвариантное среднее на этой группе. Мера μ, определённая равенством $\mu(A) = I(\mathbf{1}_A)$, где $\mathbf{1}_A$ – характеристическая функция множества A, и будет требуемой мерой. $\square$

Интересно, что построить аналогичную меру на сфере трёхмерного евклидова пространства (то есть конечно-аддитивную вероятностную меру, определённую на всех подмножествах сферы и инвариантную относительно изометрий сферы) уже невозможно (Хаусдорф [Hau], 1914). Причиной этого служит сложная структура группы изометрий сферы. Читателю, заинтересовавшемуся вопросами существования инвариантных мер, предлагаем посмотреть монографию [Wag] и обзор [Las], где рассказывается об эффектах в духе знаменитого парадокса Банаха – Тарского, когда сфера разрезается на конечное число «кусков», из которых удаётся сложить две новые сферы того же размера. Возможность такого разрезания, разумеется, приводила бы к противоречию, если бы «куски» можно было «померять» с помощью конечно-аддитивной инвариантной меры.

5.5.3. Упражнения

Пусть μ – мера, а I – инвариантное среднее из предыдущей теоремы. Хотя мы показали, что эти объекты существуют, никаких правил вычисления мы не предъявили. Более того, инвариантное среднее (и, соответственно, инвариантная мера) на отрезке не единственно. Тем не менее, для некоторых функций инвариантное среднее можно вычислить, опираясь на определение этого объекта.

1. Доказать, что $\mu([0,1/n)) = 1/n$.
2. Пусть $m < n$. Доказать, что $\mu([0,m/n)) = m/n$.
3. Пусть $[a,b) \subset [0,1)$. Доказать, что $\mu([a,b)) = b - a$.
4. Пусть f – кусочно-постоянная функция на $[0,1)$. Тогда $I(f) = \int\limits_0^1 f(t)dt$.
5. Доказать, что $I(f) = \int\limits_0^1 f(t)dt$ для любой интегрируемой по Риману функции на отрезке.

Для интегрируемых по Лебегу ограниченных функций $I(f)$ может и не совпадать с интегралом Лебега. Тем не менее, если провести доказательство теоремы существования инвариантного среднего (п. 5.5.1) для случая отрезка, взяв в качестве подпространства Y не подпространство констант, а подпространство ограниченных интегрируемых по Лебегу функций, то можно показать, что:

6. Существует такое инвариантное среднее I на отрезке, что $I(f) = \int\limits_{[0,1)} f(t)d\lambda$ для любой интегрируемой по Лебегу ограниченной функции.
7. Опираясь на существование инвариантной меры на отрезке, выведите существование конечно-аддитивной инвариантной относительно сдвигов меры на оси, определённой на всех подмножествах, и такой, что мера любого отрезка равна его длине. Разумеется, этой мере позволяется принимать и бесконечные значения.

Рассмотрим полугруппу $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению. Функции на $\mathbb{N}$ – это последовательности; инвариантное среднее на $\mathbb{N}$ называется обобщённым банаховым пределом и обозначается значком Lim. Проверить, что:

8. Обобщённый банахов предел любой ограниченной последовательности лежит между её верхним и нижним пределами.

9. Если последовательность $x = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ имеет предел, то
$$\mathrm{Lim}\,\mathrm{x} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} x_n.$$
10. Если последовательность $x = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ сходится по Чезаро (то есть существует предел последовательности $\dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ при $n \to \infty$, называемый *пределом по Чезаро*), то $\mathrm{Lim}\,\mathrm{x}$ совпадает с пределом по Чезаро этой последовательности.
11. На примере последовательности $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ убедиться, что обобщённый банахов предел последовательности может не быть предельной точкой этой последовательности.
12. На примере последовательностей $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ и $y = (0, 1, 0, 1, \dots)$ убедиться, что обобщённый банахов предел не является мультипликативным функционалом: $\mathrm{Lim}(\mathrm{xy})$ может не равняться произведению $\mathrm{Lim}\,\mathrm{x}$ на $\mathrm{Lim}\,\mathrm{y}$.

5.6. Комментарии к упражнениям

Параграф 5.3.4

Упражнение 4. Обозначим рассматриваемые функционалы через f и g, а $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ через Y. Y – это гиперподпространство в X. Следовательно, существует такой вектор $e \in X \setminus Y$, что $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Числа $a = f(e)$ и $b = g(e)$ не равны 0, так как $e \notin Y$. Функционал $ag - bf$ – линейная комбинация функционалов f и g – равен нулю как на Y, так и в точке e. Следовательно, функционал $ag - bf$ равен 0 на всём $\mathrm{X} = \mathrm{Lin}\{e, Y\}$, то есть функционалы f и g линейно зависимы.

6. Нормированные пространства

6.1. Нормированные пространства, подпространства и факторпространства

6.1.1. Понятие нормы. Примеры

Пусть X – линейное пространство. Отображение $x \to \|x\|$, ставящее каждому элементу пространства X в соответствие неотрицательное число, называется *нормой*, если оно подчиняется следующим аксиомам:

(1) если $\|x\| = 0$, то $x = 0$ (невырожденность);

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для любого $x \in X$ и любого скаляра λ;

(3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Условия (2) и (3) показывают, что норма – это частный случай выпуклого функционала. В связи с этим советуем читателю снова вернуться к упражнениям п. 5.4.1 и посмотреть, какие из свойств 1 – 5 выпуклых функционалов выполнены и для норм, а также какие из функционалов p_i упражнений 6 – 14 будут нормами.

Определение 1. Линейное пространство X, наделённое нормой, называется *нормированным пространством*.

Отметим, что если на линейном пространстве X ввести какую-то одну норму, то это будет одно нормированное пространство, а если на том же линейном пространстве ввести другую норму, то это будет уже другое нормированное пространство. Ниже мы приведём некоторые примеры нормированных пространств, которые неоднократно будут встречаться у нас в дальнейшем. Проверку аксиом нормы для этих примеров оставляем читателю в качестве упражнения.

Примеры

1. Пусть K – компактное топологическое пространство. Через $C(K)$ обозначается нормированное пространство непрерывных скалярных функций на K с нормой $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in K\}$. Важный частный случай пространства $C(K)$ – это пространство $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.
2. l_1 – это пространство числовых последовательностей вида $x = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, подчиняющихся условию $\sum_1^\infty |x_n| < \infty$ с нормой $\|x\| = \sum_1^\infty |x_n|$. Поскольку каждую последовательность можно рассматри-

вать как функцию, заданную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, пространство l_1 – это частный случай пространства $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, изучаемого ниже в п. 6.1.3: $\Omega = \mathbb{N}$, Σ – семейство всех подмножеств в $\mathbb{N}$, μ – это считающая мера множества.

3. l_∞ – это пространство всех ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_n |x_n|$.
4. c_0 – это пространство всех стремящихся к нулю последовательностей. Норма на c_0 задаётся тем же выражением, что и на l_∞.

Определение 2. Отображение $x \to p(x)$, ставящее каждому элементу пространства X в соответствие неотрицательное число, называется *полунормой*, если оно подчиняется аксиомам (2) и (3) нормы.

Упражнения

1. Приведите пример полунормы на $\mathbb{R}^2$, не являющейся нормой.
2. Приведите пример выпуклого функционала на $\mathbb{R}^2$, не являющегося полунормой.
3. Пусть B – выпуклое, поглощающее множество в линейном пространстве X. Пусть, далее, B – *уравновешенное множество*, то есть для любого скаляра λ, $|\lambda| \le 1$, выполнено включение $\lambda B \subset B$. Тогда функционал Минковского множества B (см. п. 5.4.2) – это полунорма.

6.1.2. Метрика нормированного пространства и сходимость. Изометрии

Пусть X – нормированное пространство. *Расстоянием между элементами* x_1, x_2 *пространства* X называется величина $\rho(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|$. Из аксиом нормы следует, что ρ действительно задаёт метрику на X. Таким образом, любое нормированное пространство является одновременно и метрическим пространством, и все понятия, определённые для метрических пространств, – открытые и замкнутые множества, компакты, предельные точки, полнота и т. д. – имеют смысл и для пространств нормированных. В частности, последовательность x_n элементов нормированного пространства сходится к элементу x, если $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Существенное отличие в терминологии нормированных и метрических пространств проявляется в определении изометрии: в нормированном случае добавляется требование линейности соответствующего отображения.

Линейный оператор T, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется *изометрическим вложением*, если $\|Tx\| = \|x\|$ для любого $x \in X$. Биективное изометрическое вложение называется *изометрией*. Пространства X и Y *изометричны*, если между ними существует изометрия.

Упражнения

1. Пусть последовательность x_n элементов нормированного пространства сходится к элементу x. Покажите, что $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$.
2. Даны следующие элементы пространства l_1: $x_n = \left(\dfrac{n^k}{(n+1)^{k+1}}\right)_{k=1}^{\infty}$. Выпишите в явном виде координаты элементов x_1 и x_2. Чему равны нормы этих элементов? Вычислите $\|x_n\|$ при произвольном n.
3. Покажите, что сходимость в $C(K)$ – это равномерная сходимость на K. В частности, сходимость в $C[a,b]$ – это равномерная сходимость на $[a,b]$, – вид сходимости, хорошо знакомый из курса математического анализа.
4. При любых $a<b$ пространство $C[a,b]$ изометрично пространству $C[0,1]$.
5. Если компакты K_1 и K_2 гомеоморфны, то $C(K_1)$ изометрично $C(K_2)$. Обратно, если $C(K_1)$ изометрично $C(K_2)$, то K_1 и K_2 гомеоморфны (вторая часть утверждения отнюдь не тривиальна).
6. Покажите, что в l_1 из сходимости последовательности векторов $x_n = \left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ к вектору $x = \left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ следует покоординатная сходимость: $x_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} x^k$, $k = 1, 2, \ldots$. В то же время из покоординатной сходимости сходимость в l_1 не следует.
7. Последовательность x_n из упражнения 2 может рассматриваться как последовательность в l_1, а может – как последовательность в c_0. Чему равны $\|x_n\|$ в c_0? Покажите, что последовательность x_n сходится покоординатно к 0, сходится в c_0 к 0, но не сходится в l_1.
8. Пусть X – некоторое пространство последовательностей. Положительным конусом в X назовём множество тех векторов из X, все координаты которых неотрицательны. Рассмотрите три случая: $X = c_0$, $X = l_1$ и $X = l_\infty$. В каждом из этих трёх случаев докажите замкнутость и выпуклость положительного конуса, опишите его внутренность и границу.

6.1.3. Пространство L_1

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой (конечной или бесконечной), E – линейное пространство всех интегрируемых по мере μ скалярных функций на Ω, F – подпространство в E, состоящее из всех функций, равных почти всюду нулю. Через $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ обозначим факторпространство E/F. Аналогичное факторпространство $L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ упоминалось в п. 5.2.2. Для упрощения терминологии принято говорить, что элементами пространства $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ служат интегрируемые функции на Ω, но при этом функции, равные почти всюду, отождествляют между собой. Норма на $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ задаётся формулой $\|f\| = \int\limits_{\Omega}|f(t)|d\mu$. Важный частный случай пространства $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ – это пространство $L_1[a,b]$ интегрируемых по Лебегу функций на отрезке $[a,b]$. В этом случае $\Omega=[a,b]$, Σ – семейство всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка, а μ – мера Лебега.

Упражнения

1. $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ – нормированное пространство.
2. При любых $a<b$ пространство $L_1[a,b]$ изометрично пространству $L_1[0,1]$.
3. Пространство $L_1[0,1]$ изометрично пространству $L_1(-\infty,+\infty)$.
4. Пространство $L_1[0,1]$ изометрично пространству $L_1([0,1]\times[0,1])$.
5. Из сходимости последовательности функций в $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ следует сходимость по мере, но если мера не чисто атомарна (типичный пример – $L_1[a,b]$), то из сходимости в $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ не следует сходимость почти всюду.
6. Если (Ω,Σ,μ) – пространство с конечной мерой и последовательность интегрируемых функций сходится равномерно на Ω, то эта последовательность сходится и в $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$.
7. Покажите, что какую бы норму в $L_1[a,b]$ мы ни ввели, сходимость по этой норме не может совпадать со сходимостью по мере. (Сравните с упражнением 6 п. 4.3.3.)
8. Рассмотрим положительный конус в $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$: множество G всех функций из $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$, больших или равных нуля почти всюду. Докажите, что G – замкнутое выпуклое множество, не имеющее внутренних точек.
9. По аналогии с предыдущим упражнением рассмотрим положительный конус в $C(K)$. Докажите выпуклость и замкнутость этого множества, опишите его внутренность и границу.

   Пусть p – полунорма на линейном пространстве X. *Ядром* полунормы p называется множество $\operatorname{Ker} p$ тех $x\in X$, для которых $p(x)=0$.
10. $\operatorname{Ker} p$ – линейное подпространство в X.
11. Выражение $\rho(x_1,x_2)=p(x_2-x_1)$ задаёт псевдометрику на X.

12. Для любого $x \in X$ и любого $y \in \operatorname{Ker} p$ имеем $p(x+y) = p(x)$.
13. Выражение $\|[x]\| = p(x)$ задаёт норму на факторпространстве $X/\operatorname{Ker} p$.

Поскольку величина $p(f) = \int\limits_{\Omega} |f(t)| d\mu$ задаёт полунорму на линейном пространстве E всех интегрируемых по мере μ скалярных функций на Ω, $F = \operatorname{Ker} p$ – подпространство в E, состоящее из всех функций, равных почти всюду нулю, то приведенное выше определение пространства $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ – это частный случай построения, описанного в упражнениях 10 – 13.

6.1.4. Подпространства и факторпространства

Линейное подпространство Y нормированного пространства X, наделённое нормой из X, называется *подпространством нормированного пространства* X. Таким образом, подпространство нормированного пространства – это снова нормированное пространство.

Пусть Y – замкнутое подпространство нормированного пространства X, $x \in X$ – произвольный элемент, $[x] = x + Y$ – соответствующий элемент факторпространства X/Y. Определим следующую величину: $\|[x]\| = \inf\limits_{y \in Y} \|x + y\|$. Другими словами, $\|[x]\|$ – это расстояние в X от 0 до множества $x + Y$. Поскольку Y – подпространство и, следовательно, $Y = -Y$, следующее определение эквивалентно исходному: $\|[x]\| = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$. Геометрический смысл этого определения: $\|[x]\|$ – это расстояние в X от x до подпространства Y.

Утверждение. Введённая выше величина задаёт норму на пространстве X/Y.

Доказательство. Проверим аксиомы нормы.

1. Пусть $\|[x]\| = 0$. Тогда $\inf\limits_{y \in Y} \|x - y\| = 0$, и, следовательно, x – это предельная точка подпространства Y. Поскольку Y замкнуто, $x \in Y$ и $[x] = Y = [0]$.
2. Поскольку Y – подпространство, $\lambda Y = Y$ для любого ненулевого скаляра λ. Имеем: $\|[\lambda x]\| = \inf\limits_{y \in Y} \|\lambda x + y\| = \inf\limits_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\| = |\lambda| \inf\limits_{y \in Y} \|x + y\| = |\lambda| \cdot \|[x]\|$.
3. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$. В соответствии с определением инфимума существуют такие $y_1, y_2 \in Y$, что $\|x_1 + y_1\| < \|[x_1]\| + \varepsilon$ и $\|x_2 + y_2\| < \|[x_2]\| + \varepsilon$. Получаем оценку

$$\|[x_1 + x_2]\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 + y\| \le \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \le$$
$$\le \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \le \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon,$$
что ввиду произвольности ε означает требуемое неравенство треугольника. □

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что факторпространство нормированного пространства наделено описанной выше нормой.

Пример. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой, X – пространство всех ограниченных измеримых функций на Ω, наделённое нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in \Omega} |f(t)|$, Y – подпространство в X, состоящее из функций, равных нулю почти всюду. Соответствующее факторпространство X/Y обозначается $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Упражнения

1. Докажите следующую формулу для нормы в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$:
$$\|f\|_\infty = \inf_{A \in \Sigma, \mu(A)=0} \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus A} |f(t)| \right\}.$$
2. Докажите неравенство $|f| \overset{\text{п.в.}}{\le} \|f\|_\infty$.
3. Докажите, что $\|f\|_\infty$ равна инфимуму множества тех констант c, для которых $|f| \overset{\text{п.в.}}{\le} c$.
4. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим подпространство Y, состоящее из констант (постоянных функций). Показать, что норма элемента $[f]$ в факторпространстве $C[a,b]/Y$ вычисляется по формуле
$$\|[f]\| = \frac{1}{2}\left(\max\{f(t) : t \in [a,b]\} - \min\{f(t) : t \in [a,b]\}\right).$$
5. Пространство l_1 можно рассматривать как линейное подпространство в c_0, хотя нормированным подпространством в c_0 оно не будет: норма, заданная в l_1, не совпадает с нормой из c_0. Доказать, что l_1 незамкнуто и плотно в c_0. Доказать, что l_1 как подмножество в c_0 принадлежит классу F_σ.
6. Доказать, что подпространство c_0 всех стремящихся к нулю последовательностей замкнуто в l_∞.

7. Показать, что норма элемента $[a]$ в факторпространстве l_∞/c_0 вычисляется по формуле $\|[a]\| = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|$, где a_n – это координаты элемента $a \in l_\infty$.[1]

6.2. Связь между единичным шаром и нормой пространства. Пространства L_p

6.2.1. Свойства шаров в нормированном пространстве

Пусть X – нормированное пространство, $x_0 \in X$, $r > 0$. Символом $B_X(x_0, r)$ обозначается, как обычно, открытый шар радиуса r с центром в x_0:

$$B_X(x_0, r) = \{\, x \in X : \|x - x_0\| < r \,\}.$$

Единичным шаром B_X пространства X называется открытый шар единичного радиуса с центром в нуле: $B_X = \{\, x \in X : \|x\| < 1 \,\}$. Аналогичным образом вводятся *единичная сфера* S_X и *замкнутый единичный шар* $\overline{B}_X$:

$$S_X = \{\, x \in X : \|x\| = 1 \,\},\ \overline{B}_X = \{\, x \in X : \|x\| \le 1 \,\}.$$

Отметим простейшие свойства введённых объектов. Доказательства этих свойств оставляем читателю.

– Единичный шар – открытое множество, замкнутый единичный шар и единичная сфера – замкнутые множества.
– $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$.
– B_X – это выпуклое поглощающее множество (см. упражнение 2 п. 5.4.3).
– B_X – уравновешенное множество, то есть для любого скаляра λ, $|\lambda| \le 1$, выполнено включение $\lambda B_X \subset B_X$.
– Для любых $x_0 \in X$, $r > 0$ линейная оболочка шара $B_X(x_0, r)$ совпадает со всем пространством X.

Упражнения

1. Докажите, что замыкание открытого шара $B_X(x_0, r)$ в нормированном пространстве совпадает с $\overline{B}_X(x_0, r)$. Сравните с упражнением 9 п. 1.3.2.

---

[1] В советское время в одной из харьковских газет статья о перевыполнении плана передовиками производства называлась «Норма – не предел!». Последнее упражнение можно рассматривать как контрпример к данному утверждению.

2. Пространство числовых строк $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нормой $\|x\| = \sum_1^n |x_n|$ обозначается l_1^n; аналогичное пространство строк с нормой $\|x\| = \sup_n |x_n|$ обозначается l_∞^n. Пространства l_1^n и l_∞^n – это конечномерные аналоги пространств l_1 и l_∞. Постройте на координатной плоскости единичные шары пространств l_1^2 и l_∞^2. Найдите изометрию между этими двумя пространствами.
3. Постройте в трёхмерном координатном пространстве единичные шары пространств l_1^3 и l_∞^3. Докажите, что эти пространства не изометричны.
4. (Принцип вложенных шаров.) Пусть X – полное нормированное пространство, $B_n = \overline{B}_X(x_n, r_n)$ – убывающая по включению последовательность замкнутых шаров. Доказать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ не пусто. (В отличие от принципа вложенных множеств, здесь не предполагается стремление диаметров к нулю, но и не утверждается одноточечность пересечения.)
5. Приведите пример полного метрического пространства, где утверждение предыдущего упражнения не выполнено.

6.2.2. Определение нормы с помощью шара. Пространства L_p

Пусть B – выпуклое, поглощающее множество в линейном пространстве X. Напомним (п. 5.4.2), что функционалом Минковского множества B называется функция, заданная на X формулой $\varphi_B(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B\right\}$.

Теорема 1. Пусть B – выпуклое, поглощающее, уравновешенное множество в линейном пространстве X, подчиняющееся следующему условию *алгебраической ограниченности*: для любого $x \in X \setminus \{0\}$ существует такое $a > 0$, что $ax \notin B$. Тогда функционал Минковского задаёт норму на X.

Доказательство. То, что φ_B – это выпуклый функционал, уже было доказано в п. 5.4.2. Поскольку B уравновешено, $\varphi_B(\lambda x) = \varphi_B(|\lambda|\, x) = |\lambda|\, \varphi_B(x)$ для любого $x \in X$ и любого скаляра λ, то есть φ_B – полунорма. Наконец, если $x \in X \setminus \{0\}$, то ввиду алгебраической ограниченности существует такое $a > 0$, что $ax \notin B$. Соответственно, $\varphi_B(x) \geq \frac{1}{a} > 0$, чем доказана невырожденность функционала Минковского. □

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой (конечной или бесконечной), $p \in [1, \infty)$ – фиксированное число. Через $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначается подмножество в пространстве $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых скалярных функций на Ω, состоящее из функций, для которых существует $\int\limits_{\Omega} |f(t)|^p d\mu$. При этом функции, равные почти всюду, считают в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, так же как и в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, одним и тем же элементом. Для $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ положим $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.

Теорема 2. $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ – линейное пространство, а $\| \ \|_p$ – норма на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $B_p \subset L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, состоящее из функций, для которых $\int\limits_{\Omega} |f(t)|^p d\mu < 1$. Пусть $f, g \in B_p$, $\lambda \in [0,1]$. Поскольку функция $|x|^p$ выпукла на $\mathbb{R}$, для любого $t \in \Omega$ имеет место числовое неравенство $|\lambda f(t) + (1-\lambda) g(t)|^p \le \lambda |f(t)|^p + (1-\lambda)|g(t)|^p$. Интегрируя это неравенство, получаем, что $\lambda f + (1-\lambda) g \in B_p$, то есть B_p – выпуклое множество. Легко проверить, что B_p уравновешено и алгебраически ограничено. Из выпуклости и уравновешенности множества B_p и очевидного равенства $L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n B_p$ следует, что $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ – линейное пространство и B_p – поглощающее множество в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ (упражнение 1 п. 5.4.2). Следовательно, функционал Минковского множества B_p определён на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ и задаёт норму в этом линейном пространстве. Остаётся только заметить, что $\| \ \|_p$ совпадает с φ_{B_p}. Действительно, для любого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ включение $\frac{1}{t} f \in B_p$ выполнено в том и только том случае, если $t > \|f\|_p$, то есть $\|f\|_p = \varphi_{B_p}(f)$. □

В дальнейшем $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ будет рассматриваться как нормированное пространство, наделённое нормой $\| \ \|_p$. Важные частные случаи – это пространства $L_p[a,b]$ (то есть случай $\Omega = [a,b]$ с мерой Лебега) и пространства l_p, где в роли Ω выступает $\mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$, а μ – это считающая мера (мера множества равна числу его элементов). Поскольку каждую функцию, заданную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, можно воспринимать как последовательность, пространство l_p обычно определяют как пространство числовых последовательностей вида $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, подчиняющихся условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Упражнения

1. Пусть на линейном пространстве X заданы две нормы $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$, B_1 и B_2 – единичные шары этих норм. Тогда $B_1 \subset B_2$ в том и только том случае, если на всём X выполнено неравенство $\|\ \|_1 \geq \|\ \|_2$.
2. Пусть на линейном пространстве X заданы нормы $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ и $\|\ \|_3$, B_1, B_2 и B_3 – единичные шары этих норм. Пусть $\|\ \|_3$ выражается через $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ формулой $\|x\|_3 = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$. Тогда $B_3 = B_1 \cap B_2$.
3. l_p, рассматриваемое как множество, увеличивается с ростом p, а величина $\|x\|_p$ при фиксированном x убывает с ростом p.
4. Множество l_0 обрывающихся последовательностей (то есть таких, что, начиная с некоторого номера, все координаты равны 0) плотно в l_p при $p \in [1, \infty)$.
5. Если $p_1 < p$, то множество l_{p_1} плотно в пространстве l_p.
6. Пусть B – выпуклое, поглощающее, уравновешенное алгебраически ограниченное множество в линейном пространстве X. Зададим норму на X как функционал Минковского множества B. Для того, чтобы единичный шар этой нормы совпадал с B необходимо и достаточно, чтобы B обладало следующим свойством: любого $x \in B$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(1+\varepsilon)x \in B$.
7. При $1 \leq p < \infty$ множество ограниченных функций плотно в $L_p[a,b]$.
8. При $1 \leq p < \infty$ множество непрерывных функций плотно в $L_p[a,b]$.
9. При $1 \leq p < \infty$ множество всех многочленов плотно в $L_p[a,b]$.
10. При $1 \leq p < \infty$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$ плотно в $L_p[0,1]$.
11. В $L_\infty[a,b]$ множество непрерывных функций не плотно.

6.3. Банаховы пространства и абсолютно сходящиеся ряды

Банаховым пространством называется полное нормированное пространство, то есть нормированное пространство, где каждая последовательность Коши сходится. Банаховы пространства – это наиболее важный класс нормированных пространств: именно эти пространства чаще всего встречаются в приложениях, и именно вокруг понятия банахова пространства сгруппированы наиболее важные результаты функционального анализа [2].

6.3.1. Ряды. Критерий полноты пространства в терминах абсолютной сходимости

Пусть x_n – последовательность элементов нормированного пространства X. Частными суммами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называются векторы $s_n = \sum_{1}^{n} x_k$. Если частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходятся к элементу x, ряд называется сходящимся, а элемент x называется суммой ряда. Равенство $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ – это общепринятая сокращённая запись выражения «ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится и его сумма равна x». Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называется абсолютно сходящимся, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Утверждение 1 (критерий Коши сходимости ряда). Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ элементов банахова пространства X сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Сходимость ряда эквивалентна сходимости последовательности s_n частных сумм. В свою очередь, в полном пространстве

[2] По крайней мере, так считает автор этих строк, специализирующийся в теории банаховых пространств.

сходимость последовательности равносильна её фундаментальности. Остаётся заметить, что $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} x_k$. □

Утверждение 2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ элементов банахова пространства X абсолютно сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – это сходящийся ряд.

Доказательство. Поскольку числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится, $\sum_{k=n}^{m} \|x_k\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Следовательно, $\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k\right\| \le \sum_{k=n}^{m} \|x_k\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Для завершения доказательства воспользуемся утверждением 1. □

Утверждение 3. Пусть X – неполное нормированное пространство. Тогда в X существует абсолютно сходящийся, но при этом расходящийся ряд.

Доказательство. Ввиду неполноты пространства существует фундаментальная последовательность $v_n \in X$, не имеющая предела. По определению последовательности Коши, $\|v_n - v_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Следовательно, существует такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{2}$ для всех $n, m \ge n_1$. Аналогично выберем такое $n_2 \ge n_1$, что $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{4}$ для всех $n, m \ge n_2$. Продолжив рассуждение, получим такую возрастающую последовательность индексов n_j, что $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{2^j}$ для всех $n, m \ge n_j$. Тогда для подпоследовательности v_{n_j} имеем $\left\|v_{n_2} - v_{n_1}\right\| < \frac{1}{2}$, $\left\|v_{n_3} - v_{n_2}\right\| < \frac{1}{4}$, ... , $\left\|v_{n_{j+1}} - v_{n_j}\right\| < \frac{1}{2^j}$, ... Зададим требуемый ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ следующим образом: $x_1 = v_{n_1}$, $x_2 = v_{n_2} - v_{n_1}$, ... , $x_j = v_{n_j} - v_{n_{j-1}}$ и т. д. Построенный ряд абсолютно сходится: $\sum_{j=2}^{\infty} \|x_j\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = 1$. В то же время его частные суммы равны v_{n_j}, то есть (см. упражнение 1 п. 1.3.5) образуют расходящуюся последовательность. □

Утверждения 2 и 3 вместе дают следующую характеризацию полных нормированных пространств.

Теорема. Для полноты нормированного пространства X необходимо и достаточно, чтобы каждый абсолютно сходящийся ряд в X сходился. □

6.3.2. Полнота пространства L_1

Трезвость – норма жизни... Это правда, но полна ли жизнь по этой норме?

(Шутка времён антиалкогольной компании 1985-90-х гг. Взята из тоста,произнесённого Я. Г. Притулой на банкете конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения С. Банаха)

Начнём с доказательства одной переформулировка теоремы Ле́ви, по сути сформулированной выше в упражнении 3 п. 4.4.3.

Лемма. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функций из $L_1 = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ абсолютно сходится в норме этого пространства. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f и $\|f\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|$.

Доказательство. Согласно определению нормы в L_1, абсолютная сходимость означает, что $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu < \infty.$ По теореме Ле́ви, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | f_n |$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции g и $\int_{\Omega} g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu$. Обозначим через A множество меры 0, за пределами которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | f_n |$ сходится. В каждой точке $t \in \Omega \setminus A$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ сходится абсолютно к какому-то числу $f(t)$. Таким образом, мы определили на $\Omega \setminus A$ (то есть почти всюду на Ω) функцию f, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к f во всех точках множества $\Omega \setminus A$. Доопределим на A функцию f нулём. Функция f измерима на $\Omega \setminus A$ как поточечный предел последовательности измеримых функций, и у f есть интегрируемая мажоранта – функция g. Следовательно, f интегрируема и

$$\int\limits_{\Omega}|f|d\mu \le \int\limits_{\Omega} g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}|f_n|d\mu . \square$$

Теорема. Пространство L_1 – банахово пространство.

Доказательство. Воспользуемся теоремой из предыдущего пункта – критерием полноты в терминах абсолютной сходимости. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ функций из L_1 абсолютно сходится. По предыдущей лемме, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к f по норме пространства L_1. Действительно, $\left\| f - \sum\limits_{n=1}^{k} f_n \right\| = \left\| \sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n \right\| \le \sum\limits_{n=k}^{\infty} \| f_n \| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$ $\square$

Упражнение

Докажите самостоятельно полноту пространства L_p.

Полнота пространства L_p будет доказана из косвенных соображений ниже в главе 14. Тем не менее, читателю будет полезно найти прямое доказательство этого факта.

6.3.3. Подпространства и факторпространства банахова пространства

Пусть X – банахово пространство. Линейное подпространство $Y \subset X$, наделённое нормой из X, называется подпространством банахова пространства X, если Y замкнуто в X. Таким образом, подпространство банахова пространства – это снова банахово пространство. Как читатель уже наверняка заметил, смысл термина «подпространство» зависит от того, где это подпространство рассматривается. Так как банахово пространство одновременно является также метрическим, линейным и нормированным пространством, термин «подпространство» оказывается несколько перегруженным. Поэтому ещё раз обращаем внимание читателя на то, что по умолчанию в банаховых пространствах подпространствами мы будем называть только замкнутые линейные подпространства. Если же нам по какой-либо причине потребуется рассмотреть незамкнутое линейное подпространство, мы будем специально отмечать его незамкнутость.

Теорема. Пусть X – банахово пространство, Y – подпространство в X. Тогда факторпространство X / Y – также банахово пространство.

Доказательство. Пусть $x_n \in X$ таковы, что соответствующие классы эквивалентности образуют абсолютно сходящийся ряд: $\sum \|[x_n]\| < \infty$. Нам же, в соответствие с критерием полноты, нужно доказать, что ряд $\sum [x_n]$ сходится к некоторому элементу факторпространства. Для этого в каждом классе $[x_n]$ выберем по такому представителю y_n, что $\|y_n\| \le \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$. Тогда $\sum y_n$ – это абсолютно сходящийся ряд в X, что ввиду полноты пространства означает, что $\sum y_n$ сходится в X к некоторому элементу x. Покажем, что $\sum [x_n] = [x]$.

$$\left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k] \right\| = \left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [y_k] \right\| = \left\| [x - \sum_{k=1}^{n} y_k] \right\| \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \square$$

6.3.4. Упражнения

1. Пусть X – банахово пространство, $x_n \in X$ – фиксированная последовательность ненулевых векторов. Введём пространство E всех числовых последовательностей $a = (a_n)_1^\infty$, для которых ряд $\sum_1^\infty a_n x_n$ сходится. Наделим пространство E нормой $\|a\| = \sup\left\{ \left\| \sum_1^N a_n x_n \right\| : N = 1, 2, \ldots \right\}$. Проверить, что E – банахово пространство.
2. Пусть X – банахово пространство, Y – нетривиальное подпространство в X (то есть Y замкнуто и $Y \ne X$). Доказать, что Y нигде не плотно в X.
3. Доказать, что банахово пространство не может быть представлено как объединение счётного числа нетривиальных подпространств.
4. Доказать, что базис Гамеля бесконечномерного банахова пространства несчётен.
5. Пусть $\boldsymbol{P}$ – пространство всех полиномов (сколь угодно большой степени) с вещественными коэффициентами, наделённое нормой $\left\| a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \right\| = |a_0| + \ldots + |a_n|$. Будет ли это пространство полным?
6. Обозначим через $\{e_n\}_1^\infty$ *канонический базис* пространства l_1: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, … . Доказать, что для любого $a = (a_n)_1^\infty \in$ $\in l_1$ ряд $\sum_1^\infty a_n e_n$ сходится к a. Будет ли сходимость абсолютной?

7. Рассмотрим в l_∞ последовательность $\{e_n\}_1^\infty$ из предыдущего упражнения. Чему равны частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$? Будет ли этот ряд сходиться к элементу $x = (1,1,...) \in l_\infty$? Опишите те $a = (a_n)_1^\infty \in l_\infty$, для которых ряд $\sum_1^\infty a_n e_n$ сходится к a. Для каких a сходимость будет абсолютной?
8. Докажите полноту пространства $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.
9. Докажите в каждом из пространств $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, плотность подмножества конечнозначных измеримых функций.
10. Пространства l_p при $1 \le p < \infty$ сепарабельны, а l_∞ не сепарабельно.

6.4. Пространство непрерывных линейных операторов

6.4.1. Критерий непрерывности линейного оператора

Определение. Пусть X, Y – нормированные пространства. Линейный оператор $T: X \to Y$ называется *ограниченным*, если ограниченные последовательности он переводит в ограниченные последовательности. Другими словами, если $x_n \in X$ и $\sup_n \|x_n\| < \infty$, то $\sup_n \|Tx_n\| < \infty$.

Основная цель настоящего параграфа – доказать равносильность непрерывности и ограниченности линейного оператора.

Теорема. Пусть X, Y – нормированные пространства. Для линейного оператора $T: X \to Y$ следующие условия эквивалентны:

(1) T непрерывен;
(2) T переводит стремящиеся к нулю последовательности в стремящиеся к нулю;
(3) T переводит стремящиеся к нулю последовательности в ограниченные;
(4) T ограничен.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftarrow (4)$ очевидны: условие (2) – непрерывность оператора в нуле, – это частный случай условия (1); третье условие следует как из второго, так и из четвёртого ввиду того, что стремящиеся к нулю последовательности ограничены. Докажем теперь обратные импликации.

$(2) \Rightarrow (1)$. Пусть последовательность векторов $x_n \in X$ сходится к элементу $x \in X$. Тогда $x_n - x \to 0$, и, по условию (2),

$Tx_n - Tx = T(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ То есть из сходимости x_n к x следует сходимость Tx_n к Tx.

$(3) \Rightarrow (2).$ Будем рассуждать методом «от противного». Пусть условие (2) не выполнено: существует последовательность $x_n \in X$, стремящаяся к 0, образ Tx_n которой к нулю не стремится. Тогда из x_n можно выделить подпоследовательность v_n, для которой $\inf\|Tv_n\| = \varepsilon > 0.$ Определим векторы $w_n = \frac{1}{\sqrt{\|v_n\|}} v_n$. Последовательность w_n по-прежнему стремится к 0, но $\|Tw_n\| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\|v_n\|}} \to \infty,$ что противоречит предположению (3).

$(3) \Rightarrow (4).$ Пусть условие (4) не выполнено: существует ограниченная последовательность $x_n \in X$, для которой $\sup\|Tx_n\| = \infty.$ Тогда из x_n можно выделить подпоследовательность v_n, для которой $\|Tv_n\| \to \infty.$ Определим векторы $w_n = \frac{1}{\sqrt{\|Tv_n\|}} v_n$. Такая последовательность w_n уже стремится к 0, но $\|Tw_n\| = \sqrt{\|Tv_n\|} \to \infty,$ что противоречит предположению (3). □

Упражнения

1. Пусть X, Y – нормированные пространства, $T : X \to Y$ – непрерывный линейный оператор. Тогда $\mathrm{Ker}T$ – замкнутое линейное подпространство в X. **N.B.!** Это простой, но важный факт, который в дальнейшем будет использоваться без дополнительных пояснений.
2. Образ непрерывного оператора может быть незамкнутым. Разберите это на примере оператора интегрирования: $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$

6.4.2. Норма оператора

Нормой линейного оператора T, действующего из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется величина

$$\|T\| = \sup_{x\in S_X} \|Tx\|.$$

Утверждение 1. Пусть $\|T\| < \infty.$ Тогда для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$

Доказательство. Для $x = 0$ неравенство выполнено. Рассмотрим случай $x \neq 0$. Так как $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$, то $\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \le \|T\|$. Имеем $\|Tx\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \le \|T\| \|x\|$, что и требовалось доказать. □

Утверждение 2. Пусть X, Y – нормированные пространства. Для линейного оператора $T : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:

(1) T ограничен;

(2) $\|T\| < \infty$;

(3) существует такая константа $C > 0$, что для любого $x \in X$ выполнена оценка $\|Tx\| \le C\|x\|$.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $\|T\| = \infty$. Тогда для любого натурального числа n существует вектор $x_n \in S_X$, для которого $\|Tx_n\| > n$. Последовательность x_n ограничена, а образы её членов стремятся по норме к бесконечности. Мы получили противоречие с условием (1).

То, что условие (2) влечёт (3), доказано в утверждении 1 (с $C = \|T\|$). Осталось проверить импликацию $(3) \Rightarrow (1)$. Пусть $x_n \in X$ – ограниченная последовательность, $\|x_n\|$ не превосходят некой константы K. Тогда, по условию (3), $\|Tx_n\| \le CK$ при всех n. Таким образом, оператор T переводит ограниченные последовательности в ограниченные, что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Если выполнено условие (3) предыдущего утверждения, то $\|T\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|Tx\| \le \sup\limits_{x \in S_X} C\|x\| = C$. То есть если $\|Tx\| \le C\|x\|$ для всех $x \in X$, то $\|T\| \le C$. Этим соображением часто пользуются при оценке нормы оператора. □

Замечание 2. В литературе можно встретить ещё целую серию эквивалентных определений нормы оператора:

– $\|T\| = \sup\limits_{x \in B_X} \|Tx\|$;

– $\|T\| = \sup\limits_{x \in \overline{B}_X} \|Tx\|$;

– $\|T\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$;

– $\|T\|$ – это инфимум всех таких констант $C \ge 0$, что неравенство $\|Tx\| \le C\|x\|$ выполняется для всех $x \in X$.

Проверку эквивалентности этих определений исходному мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Через $L(X,Y)$ будем обозначать пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. На $L(X,Y)$ естественным образом вводятся линейные операции: если $T_1, T_2 \in L(X,Y)$ – операторы, λ_1, λ_2 – скаляры, то оператор $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in L(X,Y)$ действует по правилу $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)x = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x$. Выше мы описали, как вводится норма на $L(X,Y)$ – норма оператора, но ещё не проверили, что эта норма действительно подчиняется аксиомам нормы.

Утверждение 3. Пространство операторов $L(X,Y)$ – это нормированное пространство.

Доказательство. Проверим аксиомы нормы (п. 6.1.1).

1. Пусть $\|T\| = 0$. Тогда оператор T равен 0 во всех точках единичной сферы пространства X, что ввиду линейности оператора означает равенство нулю на всём X.
2. $\|\lambda T\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|\lambda T x\| = |\lambda| \sup\limits_{x \in S_X} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$.
3. Пусть $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, $x \in X$. Воспользуемся утверждением 1:

$$\|(T_1 + T_2)x\| \le \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \le \|T_1\| \cdot \|x\| + \|T_2\| \cdot \|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|) \cdot \|x\|.$$

По предыдущему замечанию отсюда вытекает требуемое неравенство треугольника: $\|T_1 + T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$. □

Норма оператора – это важное понятие, часто используемое в нашем курсе. Поэтому настоятельно рекомендуем читателю, не имевшему ранее опыта работы с этим математическим объектом, уделить серьёзное внимание приводимым ниже упражнениям.

6.4.3. Упражнения

1. Пусть $T \in L(X,Y)$, $x_1, x_2 \in X$. Тогда $\|Tx_1 - Tx_2\| \le \|T\| \cdot \|x_1 - x_2\|$.
2. Пусть $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, $x \in X$. Тогда $\|T_1 x - T_2 x\| \le \|T_1 - T_2\| \cdot \|x\|$.
3. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, $T_1 \in L(X,Y), T_2 \in L(Y,Z)$. Докажите *мультипликативное неравенство треугольника* для композиции операторов: $\|T_2 \circ T_1\| \le \|T_2\| \cdot \|T_1\|$.

4. Пусть X – банахово пространство, $\{x_n\}_1^\infty$ – ограниченная последовательность в X, $\{e_n\}_1^\infty$ – канонический базис пространства l_1 (см. упражнение 6 п. 6.3.4). Определим оператор $T : l_1 \to X$ формулой $Ta = \sum_1^\infty a_n x_n$, где $a = (a_n)_1^\infty$ – произвольный элемент пространства l_1. Доказать, что T – непрерывный линейный оператор, $Te_n = x_n$ и $\|T\| = \sup_n \|x_n\|$. Доказать, что любой непрерывный линейный оператор $T : l_1 \to X$ может быть записан указанным выше способом.
5. Пусть X – нормированное пространство, X_1 – подпространство в X. Доказать, что факторотображение q пространства X на X/X_1 (см. п. 5.2.2) – это непрерывный линейный оператор. Вычислить $\|q\|$. Доказать, что $q(B_X) = B_{X/X_1}$.
6. Пусть X, Y – нормированные пространства, $T : X \to Y$ – линейный оператор. Проверить, что инъективизация $\widetilde{T}$ оператора T (см. п. 5.2.3) – это непрерывный линейный оператор и $\| \widetilde{T} \| = \| T \|$.
7. Пусть в условиях предыдущего упражнения $T(B_X) = B_Y$. Доказать, что в этом случае $\widetilde{T}$ – это биективная изометрия пространств $X/\mathrm{Ker}\, T$ и Y.
8. Пусть $\boldsymbol{P}$ – пространство полиномов из упражнения 5 п. 6.3.4, $D_m : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1$ оператор взятия m-й производной. Проверить, что D_m – линейный оператор и вычислить его норму. Будет ли D_m непрерывным оператором?
9. Теперь на линейном пространстве $\boldsymbol{P}$ всех полиномов рассмотрим норму $\left\|a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n\right\|_1 = \sum_{k=0}^{n} k! |a_k|$. Обозначим полученное нормированное пространство через $\boldsymbol{P}_1$. Будет ли оператор $D_m : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1$ взятия m-мой производной непрерывным? Чему равна его норма?
10. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим функционал F, действующий по правилу $F(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^{1} x(t)dt$. Доказать, что $\|F\| = 1$ и что $\forall x \in S_{C[0,1]}$ $\|F(x)\| < 1$. Этот пример показывает, что супремум в определении нормы оператора может не достигаться.
11. Пусть X, Y – нормированные пространства, $T : X \to Y$ – биективный линейный оператор. Оператор T будет изометрией в том и только том случае, если $\|T\| = \left\|T^{-1}\right\| = 1$.

6.4.4. Поточечная сходимость

Теорема 1. Пусть X, Y – нормированные пространства, $T_n : X \to Y$ – линейные операторы и для любого $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Тогда отображение $T : X \to Y$, задаваемое равенством $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, будет линейным оператором.

Доказательство. $T(ax_1 + bx_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(ax_1 + bx_2) = a \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x_1) + + b \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$. □

Определение. Последовательность линейных операторов $T_n : X \to Y$ называется *поточечно сходящейся* к оператору $T : X \to Y$, если $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ для всех $x \in X$.

Теорема 2. Пусть последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$ поточечно сходится к оператору $T : X \to Y$ и $\sup\limits_n \| T_n \| = C < \infty$. Тогда $T \in L(X,Y)$ и $\| T \| \le C$.

Доказательство. Для любого $x \in X$ имеем оценку: $\| Tx \| = \lim\limits_{n\to\infty} \| T_n x \| \le C \| x \|$. □

Теорема 3. Если последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$ сходится к оператору T по норме пространства $L(X,Y)$, то она сходится к T и поточечно.

Доказательство. $\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \le \|T_n - T\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Упражнения

1. Пусть $X = C[0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ и операторы $T_n \in L(X,Y)$ действуют по правилу $T_n(f) = f(0) - f(1/n)$. Вычислить нормы операторов T_n.
2. Из поточечной сходимости не следует сходимость по норме. Пример: последовательность операторов из предыдущего упражнения стремится к 0 поточечно, но не стремится по норме.
3. Известен общий факт (Josefson-Nissenzweig, [Jos] & [Nis], см. также [Beh]): на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует последовательность непрерывных линейных функционалов, сходящаяся к 0 поточечно, но не сходящаяся по норме. Приведите такие примеры во всех известных Вам бесконечномерных нормированных пространствах.

4. В условиях теоремы 2 докажите, что $\| T \| \leq \varliminf_{n\to\infty} \| T_n \|$. Другими словами, норма на $L(X,Y)$ полунепрерывна снизу по отношению к поточечной сходимости.
5. Введите на $L(X,Y)$ такую топологию, чтобы сходимость в этой топологии совпадала с поточечной сходимостью.

6.4.5. Полнота пространства операторов. Сопряжённое пространство

Теорема. Пусть X – нормированное, а Y – банахово пространство. Тогда $L(X,Y)$ – банахово пространство.

Доказательство. Будем опираться на определение. Пусть операторы $T_n \in L(X,Y)$ образуют фундаментальную последовательность: $\|T_n - T_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Тогда в каждой точке $x \in X$ значения операторов лежат в полном пространстве Y и образуют последовательность Коши: $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Следовательно, для любого $x \in X$ существует предел последовательности $T_n x$. Определим оператор $T : X \to Y$ равенством $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. По теореме 1 предыдущего параграфа 6.4.4, оператор T линеен. Так как каждая фундаментальная последовательность ограничена, то, по теореме 2 того же параграфа, $T \in L(X,Y)$. Нам осталось проверить, что $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ в норме пространства $L(X,Y)$. Ввиду фундаментальности последовательности T_n для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $\|T_N - T_M\| < \varepsilon$ для любого $M > N > N(\varepsilon)$. Тогда для любой точки $x \in S_X$ единичной сферы при $M > N > N(\varepsilon)$ также выполнена оценка $\|T_N x - T_M x\| < \varepsilon$. Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $M \to \infty$, получим, что $\|T_N x - Tx\| < \varepsilon$. Если в левой части этого неравенства взять супремум по $x \in S_X$, мы получим, что $\|T_N - T\| \leq \varepsilon$ при $N > N(\varepsilon)$. То есть $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, что и требовалось доказать.□

Сопряжённым пространством к нормированному пространству X называется пространство X^* всех непрерывных линейных функционалов на X, наделённое нормой $\|f\| = \sup_{x\in S_X} |f(x)|$. Другими словами, если X – вещественное пространство, то $X^* = L(X;\mathbb{R})$, если же X – комплексное пространство, то $X^* = L(X;\mathbb{C})$. Поскольку и $\mathbb{R}$, и $\mathbb{C}$ – полные пространства, то ввиду только что доказанной теоремы пространство X^* полно независимо от того, полно или же неполно пространство X.

Так же, как для нормы оператора (см. замечание 2 п. 6.4.2), для нормы функционала есть другие стандартные определения. Выпишем одно из тех, где играет роль то, что речь идёт именно о функционалах, а не об операторах общего вида.

Замечание. Пусть X – вещественное нормированное пространство, $f \in X^*$. Тогда $\|f\| = \sup\limits_{x \in S_X} f(x)$.

Доказательство. Воспользуемся симметричностью сферы: $x \in S_X$ в том и только том случае, если $-x \in S_X$. Следовательно, $\sup\limits_{x \in S_X} f(x) = \sup\limits_{x \in S_X} f(-x)$. Соответственно,

$$\|f\| = \sup_{x \in S_X} |f(x)| = \sup_{x \in S_X} \max\{f(x), -f(x)\} =$$

$$= \max\left\{\sup_{x \in S_X} f(x), \sup_{x \in S_X} f(-x)\right\} = \sup_{x \in S_X} f(x). \ \square$$

Упражнения

1. Пусть X – вещественное нормированное пространство, $f \in X^*$. Тогда $\|f\| = \sup\limits_{x \in \overline{B}_X} f(x)$.

2. Пусть X – комплексное нормированное пространство, $f \in X^*$. Тогда $\|f\| = \sup\limits_{x \in S_X} \operatorname{Re} f(x)$.

3. На пространстве l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей вида $x = (x_1, x_2, ...)$, наделённом нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$, зададим функционал f формулой $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, где $a = (a_1, a_2, ...)$ – фиксированный элемент пространства l_1. Докажите, что $\|f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

6.5. *Продолжения операторов*

В этом разделе мы рассмотрим некоторые простые, но полезные условия возможности продолжения непрерывного оператора с подпространства нормированного пространства на всё пространство.

6.5.1. Продолжение по непрерывности

Теорема 1. Пусть X_1 – плотное подпространство нормированного пространства X; Y – банахово пространство, $T_1 \in L(X_1, Y)$. Тогда оператор T_1 продолжается единственным образом до оператора $T \in L(X, Y)$.

Доказательство. Ввиду плотности подпространства X_1 для любого $x \in X$ существует последовательность $x_n \in X_1$, стремящаяся к x. Тогда $T_1 x_n$ образуют в Y последовательность Коши:

$$\|T_1 x_n - T_1 x_m\| \le \|T_1\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Обозначим предел этой последовательности через $T(x)$. Тогда

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n\| \le \|T_1\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T_1\| \cdot \|x\|.$$

Отметим, что $T(x)$ действительно зависит только от x и не зависит от выбора x_n: если $x_n^1 \in X_1$ – это какая-то другая стремящаяся к x последовательность, то $\left\|T_1 x_n - T_1 x_n^1\right\| \le \|T_1\| \cdot \left\|x_n - x_n^1\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и, следовательно, пределы у $T_1 x_n$ и $T_1 x_n^1$ совпадают. Проверим линейность оператора T. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1^n, x_2^n \in X_1$, $x_2^n \to x_2$, $x_1^n \to x_1$. Имеем

$$T(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} T_1(ax_1^n + bx_2^n) = a \lim_{n\to\infty} T_1(x_1^n) + b \lim_{n\to\infty} T_1(x_2^n) = aT(x_1) + bT(x_2).$$

Ввиду уже доказанного неравенства $\|T(x)\| \le \|T_1\| \cdot \|x\|$ оператор T непрерывен, то есть $T \in L(X, Y)$. Таким образом, мы доказали существование продолжения. Единственность следует из того, что две непрерывные функции, совпадающие на плотном множестве, совпадают всюду. □

Упражнения

1. В вышеприведенном рассуждении мы опустили проверку того, что оператор T служит продолжением оператора T_1. Проверьте это самостоятельно.
2. Докажите, что в условиях предыдущей теоремы $\|T\| \le \|T_1\|$.
3. Пусть X, Y – нормированные пространства, $X_1 \subset X$ – произвольное подпространство, $T \in L(X, Y)$ – это продолжение оператора $T_1 \in L(X_1, Y)$. Тогда $\|T\| \ge \|T_1\|$.
4. Сопоставив упражнения 2 и 3, докажите, что в условиях теоремы 1 $\|T\| = \|T_1\|$.
5. Приведите пример непрерывной функции, заданной на плотном подмножестве отрезка [0,1], но не продолжающейся на весь отрезок с сохранением непрерывности.

6. Проверьте, что непрерывный линейный оператор – это равномерно непрерывное отображение. Выведите основную теорему этого параграфа из теоремы п. 1.3.6 о продолжении равномерно непрерывного отображения. При этом линейность продолженного оператора можно вывести из единственности продолжения.

6.5.2. Проекторы и продолжение с замкнутого подпространства

Пусть X_1 – подпространство нормированного пространства X. Оператор $P \in L(X,X)$ называется *проектором на* X_1, если $P(X) \subset X_1$ и $Px = x$ для любого $x \in X_1$.

Теорема. Для подпространства X_1 нормированного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) в X существует проектор на X_1;

(2) для любого нормированного пространства Y каждый оператор $T_1 \in L(X_1,Y)$ продолжается до оператора $T \in L(X,Y)$.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Определим $T \in L(X,Y)$ формулой $Tx = T_1(Px)$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Возьмём $Y = X_1$ и определим $T_1 \in L(X_1,Y)$ по правилу $T_1 x = x$. Пусть $T \in L(X,Y)$ – продолжение оператора T_1. Поскольку в нашем случае $Y \subset X$, мы можем рассматривать T как оператор, действующий из X в X. Имеем: $T(X) \subset Y = X_1$, и для любого $x \in X_1$ выполнены равенства $Tx = T_1 x = x$. То есть T и есть требуемый проектор на X_1.□

Упражнения

1. Распишите подробнее доказательство импликации $(1) \Rightarrow (2)$ последней теоремы.
2. Пусть X_1 – подпространство нормированного пространства X, $P \in L(X,X)$ – проектор на X_1. Тогда $P(X) = X_1 = \mathrm{Ker}(I - P)$ и подпространство X_1 замкнуто в X.
3. Пусть в условиях предыдущего упражнения $X_1 \neq \{0\}$. Тогда $\|P\| \geq 1$.
4. Для подпространства X_1 нормированного пространства X следующие условия эквивалентны:
   – в X существует проектор P на X_1 с $\|P\| = 1$;
   – для любого нормированного пространства Y каждый оператор $T_1 \in L(X_1,Y)$ продолжается до оператора $T \in L(X,Y)$ с $\|T\| = \|T_1\|$.
5. Пусть $X = l_1^3$ (определение см. в п. 6.2.1, упражнение 2), X_1 – подпространство, состоящее из всех элементов с нулевой суммой координат. Докажите, что в X не существует проектора P на X_1 с $\|P\| = 1$.

6.6. Комментарии к упражнениям

Параграф 6.1.2

Упражнение 5. См. п. 18.2.1.

Параграф 6.2.2

Упражнение 3. См. теорему 2 п. 14.1.2.

Упражнение 7. Пусть $g \in L_p[a,b]$. Рассмотрим последовательность срезок $g_n = \min\{n, \max\{f, -n\}\}$. Последовательность функций $|g_n - g|^p$ стремится почти всюду к нулю и имеет интегрируемую мажоранту $|g|^p$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости, $\|g_n - g\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Упражнение 8. По предыдущему упражнению, достаточно доказать, что любая ограниченная функция $f \in L_p[a,b]$ может быть приближена непрерывными в метрике L_p. Согласно упражнению 6 п. 3.2.3, существует последовательность f_n непрерывных функций, сходящаяся к f почти всюду. Не нарушая общности, можем считать, что все f_n ограничены по модулю той же константой C, что и f (иначе заменим f_n срезками $\widetilde{f}_n = \min\{C, \max\{f_n, -C\}\}$). Сходимость $\|f_n - f\|_p$ к 0 следует из теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Параграф 6.3.4

Упражнение 5.

$$[x] \in q(B_X) \Leftrightarrow \exists y \in B_X : [y] = [x] \Leftrightarrow \|[x]\| < 1 \Leftrightarrow [x] \in B_{X/X_1}.$$

Упражнение 6.

$$\|\widetilde{T}\| = \sup_{[x]\in B_{X/X_1}} \|\widetilde{T}[x]\| = \sup_{[x]\in q(B_X)} \|\widetilde{T}[x]\| = \sup_{x\in B_X} \|\widetilde{T}[x]\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| = \|T\|.$$

7. Абсолютная непрерывность мер и функций. Связь производной и интеграла

7.1. Заряды. Теоремы Хана и Радона – Никодима

Семейство всех конечных мер на фиксированной σ-алгебре не образует линейного пространства: их можно складывать, но уже разность двух мер может принимать отрицательные значения и, следовательно, не быть мерой. Это создаёт определённые неудобства, и, чтобы их избежать, вводят обобщение понятия меры, позволяя ей принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Такую обобщённую меру называют зарядом.

В этом разделе (Ω, Σ) будет множеством с заданной на нём σ-алгеброй. Все функции будут, если не оговорено противное, считаться определёнными на Ω, а меры и заряды будут определены на Σ.

7.1.1. Теорема об ограниченности заряда

Отображение $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ называется *зарядом*, если оно подчиняется условию счётной аддитивности: для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ сходится и

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Сразу заметим, что из определения следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ при всех перестановках слагаемых, то есть абсолютная сходимость. Многие свойства мер переносятся на заряды без изменения доказательств. Так, заряд пустого множества равен нулю (взять в определении счётной аддитивности все $A_n = \varnothing$); заряд конечно аддитивен (положить $A_n = \varnothing$ для всех $n > N$). В частности, мы будем пользоваться следующими утверждениями: если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ – возрастающая цепочка множеств, то $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \nu(A_k)$; если же цепочка множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ убывает, то $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \nu(A_k)$. Однако при работе с зарядами следует проявлять и некоторую осторожность: скажем, вполне может случиться, что $\nu(A) > \nu(B)$ для каких-то множеств $A \subset B \in \Sigma$ – ситуация, совершенно невозможная для мер.

Для зарядов определены естественные операции сложения и умножения на скаляр: $(a_1\nu_1 + a_2\nu_2)(A) = a_1\nu_1(A) + a_2\nu_2(A)$, а также неравенства: $\mu \geq \nu$, если $\mu(A) \geq \nu(A)$ для всех $A \in \Sigma$.

Для $A \in \Sigma$ ведём обозначение $\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$. Так как в качестве B можно взять, в частности, пустое множество, $\nu^+(A) \geq 0$.

Лемма 1. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда $\nu^+(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^+(A_k)$. Другими словами, ν^+ подчиняется условию счётной аддитивности.

Доказательство. Любое $B \in \Sigma_A$ можно представить в виде $B = \coprod_{n=1}^{\infty} B_n$ с $B_n \subset A_n$: достаточно положить $B_n = B \bigcap A_n$. Имеем

$$\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\} = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) : B_n \in \Sigma_{A_n}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\nu(B_n) : B_n \in \Sigma_{A_n}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^+(A_n). \ \square$$

Лемма 2. Пусть $\nu^+(A) = +\infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует измеримое множество $B \subset A$ с $\nu^+(B) = +\infty$ и $|\nu(B)| > n$.

Доказательство. Выберем $B_1 \in \Sigma_A$ с $\nu(B_1) > n + |\nu(A)|$ и положим $B_2 = A \setminus B_1$. Тогда $|\nu(B_2)| \geq |\nu(B_2)| - |\nu(A)| > n$. Поскольку $\nu^+(B_1) + \nu^+(B_2) = \nu^+(A) = +\infty$, хотя бы одна из величин $\nu^+(B_1)$ и $\nu^+(B_2)$ бесконечна. Соответствующее B_i и возьмём в качестве требуемого B. $\square$

Теорема 1. ν^+ – это конечная счётно-аддитивная мера на Σ.

Доказательство. Счётная аддитивность уже доказана в лемме 1. Докажем конечность. Пусть существует $A \in \Sigma$ с $\nu^+(A) = +\infty$. По лемме 2, существует $A_1 \in \Sigma_A$ с $\nu^+(A_1) = +\infty$ и $|\nu(A_1)| > 1$. Применим лемму 2 ещё раз к множеству A_1 с $n = 2$ и получим множество $A_2 \subset A_1$ с $\nu^+(A_2) = +\infty$ и $|\nu(A_2)| > 2$. Продолжая этот процесс, получим убывающую последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$ с $|\nu(A_n)| > n$, что противоречит условию $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \nu(A_k)$, отмеченному нами в начале параграфа. $\square$

Следствие (ограниченность заряда). Для любого заряда ν существуют такие константы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, что $C_1 \leq \nu(A) \leq C_2$ для любого $A \in \Sigma$.

Доказательство. Достаточно взять $C_2 = \nu^+(\Omega)$, $C_1 = -(-\nu)^+(\Omega)$. □

Определение. Мера ν^+ называется *положительной частью* заряда ν; мера $\nu^- = (-\nu)^+$ называется *отрицательной частью* заряда ν; мера $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ называется *вариацией* заряда ν.

Теорема 2. Для любого заряда ν имеет место *разложение Жордана* (Jordan): $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Следовательно, любой заряд представим в виде разности двух мер.

Доказательство. Для любого $A \in \Sigma$ имеем $\nu^+(A) - \nu(A) = = \sup\{\nu(B) - \nu(A) : B \in \Sigma_A\} = \sup\{-\nu(A \setminus B) : B \in \Sigma_A\}$. Сделаем замену $A \setminus B = C$. Когда B пробегает Σ_A, C также пробегает всё Σ_A. Соответственно,

$$\nu^+(A) - \nu(A) = \sup\{-\nu(C) : C \in \Sigma_A\} = (-\nu)^+(A) = \nu^-(A). \ \square$$

Упражнения

1. Докажите формулы $-\nu^-(A) = \inf\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$ и $\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\} + \inf\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$.
2. $|\nu(A)| \le |\nu|(A)$ для любого $A \in \Sigma$.
3. Пусть μ – мера, ν – заряд и $\mu \ge \nu$. Тогда $\mu \ge \nu^+$.
4. Пусть μ – мера, ν – заряд и $|\nu(A)| \le \mu(A)$ для любого $A \in \Sigma$. Тогда $|\nu| \le \mu$.
5. Проверьте, что для зарядов и даже для более общих функций множества сохраняет силу упражнение 4 п. 2.1.4: пусть ν – конечно-аддитивная функция множества, заданная на σ-алгебре Σ и принимающая значения в нормированном пространстве X. Пусть для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$, образующих убывающую цепочку множеств с пустым пересечением, $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$. Тогда ν – это счётно-аддитивная функция множества.
6. Проверьте, что выражение $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$ задаёт норму в пространстве $M(\Omega, \Sigma)$ всех зарядов на Σ. Докажите полноту нормированного пространства $M(\Omega, \Sigma)$.

7.1.2. Теорема Хана о множествах положительности и отрицательности

Лемма. Для любого заряда ν на Σ существует множество $\Omega^+ \in \Sigma$ с $\nu^+(\Omega^+) = \nu^+(\Omega)$ и $\nu^-(\Omega^+) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем последовательность $\varepsilon_n > 0$ с $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $A_n \in \Sigma$ с $\nu(A_n) > \nu^+(\Omega) - \varepsilon_n$. Тогда

$$\nu^+(A_n) > \nu^+(\Omega) - \varepsilon_n, \qquad (1)$$

$$\nu^-(A_n) = \nu^+(A_n) - \nu(A_n) \le \nu^+(\Omega) - \nu(A_n) \le \varepsilon_n. \qquad (2)$$

Положим $\Omega^+ = \overline{\lim} A_n$. Согласно пункту (i) леммы о верхнем пределе множеств (лемма 1 п. 3.2.3), применённому к мере ν^+, из оценки (1) вытекает, что $\nu^+(\Omega^+) \ge \overline{\lim}\, \nu^+(A_n) = \nu^+(\Omega)$. Пункт (ii) той же леммы, но применённый к ν^-, даёт равенство $\nu^-(\Omega^+) = 0$: тут помогает оценка (2). □

Теорема Хана. Для любого заряда ν существует разложение множества Ω в дизъюнктное объединение измеримых множеств Ω^+ и Ω^-, обладающее тем свойством, что для любого подмножества в Ω^+ заряд больше или равен нуля, а для любого подмножества в Ω^- заряд меньше или равен нуля. Такое разложение единственно с точностью до $|\nu|$-эквивалентности.

Доказательство. Возьмём в качестве Ω^+ соответствующее множество из предыдущей леммы. Поскольку $\nu^-(\Omega^+) = 0$, заряд ни одного подмножества в Ω^+ не может быть отрицателен. Положим $\Omega^- = \Omega \setminus \Omega^+$. Поскольку $\nu^+(\Omega^-) = \nu^+(\Omega) - \nu^+(\Omega^+) = 0$, заряд ни одного подмножества в Ω^- не может быть положителен. Этим доказано существование разложения. Перейдём к вопросу единственности. Пусть $\Omega_1^+ \coprod \Omega_1^-$ – другое разложение с теми же свойствами. Тогда $\nu^-(\Omega_1^+) = 0$, $\nu^-(\Omega^+) = 0$ и, следовательно, $\nu^-(\Omega_1^+ \Delta \Omega^+) = 0$. Аналогично, $\nu^+(\Omega_1^- \Delta \Omega^-) = 0$. Но $\Omega_1^+ \Delta \Omega^+ = \Omega_1^- \Delta \Omega^-$ (симметрическая разность множеств совпадает с симметрической разностью их дополнений), поэтому также $\nu^+(\Omega_1^+ \Delta \Omega^+) = 0$ и $\nu^-(\Omega_1^- \Delta \Omega^-) = 0$. Следовательно, $|\nu|(\Omega_1^+ \Delta \Omega^+) = |\nu|(\Omega_1^- \Delta \Omega^-) = 0$. □

Множества Ω^+ и Ω^- называются соответственно *множеством положительности* и *множеством отрицательности* заряда ν, а представление $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^-$ – *разложением Хана*.

Упражнения

1. $\nu^+(A) = \nu(A \bigcap \Omega^+)$, $\nu^-(A) = -\nu(A \bigcap \Omega^-)$.
2. Решите упражнение 3 п. 7.1.1, опираясь на предыдущее упражнение.

По аналогии с п. 2.1.6, *атомом* заряда ν назовём такое подмножество $A \in \Sigma$, что $\nu(A) \neq 0$ и для любого $B \in \Sigma_A$ либо $\nu(B) = 0$, либо $\nu(A \setminus B) = 0.$ Если у заряда есть атомы, заряд называется *атомарным*, если же атомов нет, то *безатомным*. Заряд ν называется *чисто атомарным*, если Ω можно представить в виде объединения конечного или счётного числа непересекающихся атомов заряда ν. Докажите, что:

3. Атомы заряда ν совпадают с атомами меры $|\nu|$. Заряд ν будет безатомным в том и только том случае, если $|\nu|$ – это безатомная мера.
4. Любой заряд однозначно представляется в виде суммы чисто атомарного и безатомного зарядов.

В нормированном пространстве $M(\Omega, \Sigma)$ (см. упражнение 6 п. 7.1.1) рассмотрим подмножества $M_{at}(\Omega, \Sigma)$ чисто атомарных зарядов и $M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$ безатомных зарядов. Докажите, что:

5. $M_{at}(\Omega, \Sigma)$ и $M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$ – это замкнутые подпространства в $M(\Omega, \Sigma)$ и $M(\Omega, \Sigma) = M_{at}(\Omega, \Sigma) \oplus M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$.
7. Если $\nu_1 \in M_{at}(\Omega, \Sigma)$, $\nu_2 \in M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$, то $\|\nu_1 + \nu_2\| = \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$.

Так же, как и в случае мер, определим допустимые разбиения (такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sup\limits_{t \in \Delta_k} \left[|f(t)| \cdot |\nu|(\Delta_k) \right] < \infty$) и интегральные суммы функции f по заряду ν: $S_A(f, D, T, \nu) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(t_k) \nu(\Delta_k)$. Интегрируемость и интеграл функции по заряду также определим через предел интегральных сумм.

8. Измеримая функция f будет интегрируемой по отношению к заряду ν на множестве $A \in \Sigma$ в том и только том случае, если f интегрируема по ν как на $A \cap \Omega^+$, так и на $A \cap \Omega^-$.
9. Измеримая функция f будет интегрируемой по отношению к заряду ν на множестве $A \in \Sigma$ в том и только том случае, если f интегрируема на A как по мере ν^+, так и по мере ν^-. Далее, $\int\limits_A f d\nu = \int\limits_A f d\nu^+ - \int\limits_A f d\nu^-$.
10. Измеримая функция f будет интегрируемой по отношению к заряду ν на множестве $A \in \Sigma$ в том и только том случае, если f интегрируема на A по мере $|\nu|$.
11. Докажите линейность выражения $\int\limits_A f d\nu$ как по f, так и по ν, а также счётную аддитивность по A.

12. Докажите неравенство $\left|\int\limits_A f d\nu\right| \le \int\limits_A |f| d|\nu|.$

7.1.3. Абсолютно непрерывные меры и заряды

Пусть ν – заряд, а μ – счётно-аддитивная мера на Σ. Заряд ν называется абсолютно непрерывным по отношению к мере μ (обозначение: $\nu \ll \mu$)[1], если для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) = 0$ также и $\nu(A) = 0$.

Приведенное определение абсолютной непрерывности на первый взгляд не вызывает никаких ассоциаций с привычным понятием непрерывности. Но такие ассоциации, безусловно, появятся после эквивалентной переформулировки определения:

Теорема. Для заряда ν и меры μ следующие условия эквивалентны:

(1) $\nu \ll \mu$;

(2) $|\nu| \ll \mu$;

(3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $A \in \Sigma$, если $\mu(A) < \delta$, то $|\nu|(A) < \varepsilon$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mu(A) = 0$. Тогда $\mu(B) = 0$ для любого $B \in \Sigma_A$. Следовательно, $\nu(B) = 0$ для всех $B \in \Sigma_A$, то есть величины $\nu^+(A)$, $\nu^-(A)$ и $|\nu|(A)$ равны нулю.

(2) $\Rightarrow$(3). Предположим, что условие (3) не выполнено. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \delta$ и $|\nu|(A) \ge \varepsilon$. Применив это условие с $\delta = \dfrac{1}{2^n}$, получим существование множеств $A_n \in \Sigma$ с $\mu(A_n) < \dfrac{1}{2^n}$ и $|\nu|(A_n) \ge \varepsilon$. Тогда для множества $B = \overline{\lim} A_n$ имеем $|\nu|(B) \ge \varepsilon$ и $\mu(B) = 0$, что противоречит условию $|\nu| \ll \mu$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mu(A) = 0$. Тогда $\mu(A) < \delta$ для любого $\delta > 0$, следовательно, $|\nu|(A) < \varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Таким образом, $|\nu|(A) = 0$, и, соответственно, $\nu(A) = 0$. □

Упражнения

1. Пусть $\nu \ll \mu$. Тогда $\nu^+ \ll \mu$ и $\nu^- \ll \mu$.

---

[1] Не путать с неравенством $\nu \le \mu$!

2. Через $M_{abs}(\Omega,\Sigma,\mu)$ обозначим подмножество в $M(\Omega,\Sigma)$, состоящее из абсолютно непрерывных по отношению к μ зарядов. Доказать, что $M_{abs}(\Omega,\Sigma,\mu)$ – замкнутое подпространство в $M(\Omega,\Sigma)$.
3. Наделим Σ псевдометрикой $\rho(A,B)=\mu(A\Delta B)$. Доказать, что заряд ν будет осуществлять непрерывное отображение псевдометрического пространства (Σ,ρ) в $\mathbb{R}$ в том и только том случае, если $\nu \ll \mu$.
4. Пусть μ – конечная счётно-аддитивная мера, ν – конечно-аддитивная мера на Σ и для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого $A\in\Sigma$, если $\mu(A)<\delta$, то $\nu(A)<\varepsilon$. Тогда мера ν также счётно аддитивна.
5. Распространите результаты этого параграфа на случай σ-конечной меры μ.

7.1.4. Заряд, порождённый функцией

Пусть μ – фиксированная мера. Для любого $f\in L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ определим заряд μ_f равенством $\mu_f(A)=\int\limits_A f d\mu$. Если $\mu(A)=0$, то и $\int\limits_A f d\mu=0$; следовательно, $\mu_f \ll \mu$. Ниже в п. 7.1.6 мы увидим, что μ_f – это типичный пример абсолютно непрерывного заряда.

Теорема 1. Пусть $f\in L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого $A\in\Sigma$, если $\mu(A)<\delta$, то $\int\limits_A |f| d\mu<\varepsilon$.

Доказательство. Применим к мере $\mu_{|f|}$ основную теорему предыдущего пункта. □

Теорема 2. Для $f,g\in L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ следующие условия эквивалентны:

(1) $f\le g$ почти всюду по мере μ;
(2) $\mu_f\le\mu_g$.

В частности, $f=g$ почти всюду по мере μ в том и только том случае, если $\mu_f=\mu_g$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Докажем обратную импликацию. Обозначим через A множество тех $t\in\Omega$, где $f(t)>g(t)$. Тогда, с одной стороны, $f-g>0$ на A и, с другой стороны, $\int\limits_A (f-g)d\mu=\mu_f(A)-\mu_g(A)\le 0$. То есть $\mu(A)=0$. □

Отметим ещё одну простую, но полезную переформулировку теоремы Ле́ви.

Теорема 3. Пусть $f_n \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ образуют возрастающую последовательность, и $\mu_{f_n} \le \nu$ при всех n. Тогда последовательность f_n сходится μ-почти всюду к некоторой функции $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, и $\mu_f \le \nu$. □

Упражнения

1. Найдите явные выражения для $(\mu_f)^+$, $(\mu_f)^-$ и $|\mu_f|$.
2. Проверьте, что отображение $f \to \mu_f$ – это линейное изометрическое вложение пространства $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ в $M(\Omega, \Sigma)$.
3. Найдите Ω^+ и Ω^- для заряда μ_f.

Напомним, что в упражнениях 8-12 п. 7.1.2 было введено определение интеграла функции по заряду.

4. Измеримая функция g на Ω будет интегрируемой по заряду μ_f в том и только том случае, если функция gf интегрируема по мере μ. При этом $\int_\Omega gf\, d\mu = \int_\Omega g d\mu_f$.

Последнее упражнение записывают в виде условного равенства $d\mu_f = f\, d\mu$, означающего, что под знаком интеграла одно из этих выражений можно заменять другим.

7.1.5. Строгая сингулярность

Пусть ν_1, ν_2 – заряды на Σ. Заряд ν_1 называется *строго сингулярным* по отношению к заряду ν_2 (обозначение: $\nu_1 \perp \nu_2$), если существует такое разбиение множества Ω в объединение непересекающихся множеств $A_1, A_2 \in \Sigma$, что $|\nu_1|(A_2) = |\nu_2|(A_1) = 0$. Другими словами, заряды ν_1 и ν_2 сосредоточены на двух разных, непересекающихся между собой множествах: ν_1 – на A_1, а ν_2 – на A_2. Как видно из определения, отношение строгой сингулярности симметрично: $\nu_1 \perp \nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 \perp \nu_1$. Пример: $\nu^+ \perp \nu^-$ для любого заряда ν.

Для пары μ, ν мер на Σ введём в рассмотрение семейство $F(\mu, \nu)$ μ-интегрируемых неотрицательных измеримых функций f, для которых $\mu_f \le \nu$. Далее, введём величину $m(\mu, \nu) = \sup\left\{ \int_\Omega f d\mu : f \in F(\mu, \nu) \right\}$. Отметим одно очевидное свойство введённых понятий: если $0 \le \nu_1 \le \nu_2$, то $F(\mu, \nu_1) \subset F(\mu, \nu_2)$ и, соответственно, $m(\mu, \nu_1) \le m(\mu, \nu_2)$.

Лемма. Следующие условия для пары мер μ, ν эквивалентны:

– $\mu \perp \nu$;
– $m(\mu,\nu)=0$.

Доказательство. Если $\mu \perp \nu$, то существует разбиение $\Omega = A_1 \bigcup A_2$, с $\mu(A_2)=\nu(A_1)=0$. Пусть $f \in F(\mu,\nu)$. Тогда $\int\limits_{A_1} f d\mu = \mu_f(A_1) \le \nu(A_1) = 0$ и, следовательно, $\int\limits_{\Omega} f d\mu = \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu = 0$. То есть $m(\mu,\nu)=0$.

Обратно, пусть $m(\mu,\nu)=0$. Рассмотрим вспомогательные заряды $\mu - n\nu$ и соответствующие разложения Хана $\Omega = \Omega_n^+ \coprod \Omega_n^-$ для этих зарядов. Положим $A_1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n^+$, $A_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n^-$. Покажем, что эти множества образуют требуемое разбиение $\Omega = A_1 \coprod A_2$, с $\mu(A_2)=\nu(A_1)=0$.

Поскольку $\int\limits_A \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\Omega_n^-} d\mu = \frac{1}{n} \mu\left(A \bigcap \Omega_n^-\right) \le \nu\left(A \bigcap \Omega_n^-\right) \le \nu(A)$ для любого $A \in \Sigma$, заключаем, что $\frac{1}{n} \mathbf{1}_{\Omega_n^-} \in F(\mu,\nu)$. Следовательно, $\int\limits_{\Omega} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\Omega_n^-} d\mu = 0$, то есть $\mu(\Omega_n^-)=0$ при всех n. Таким образом, мы показали, что $\mu(A_2)=0$. Далее, $A_1 \subset \Omega_n^+$, то есть $(\mu - n\nu)(A_1) \ge 0$ при всех n. Следовательно, и $\nu(A_1)=0$. □

Упражнения

1. Если $\mu \perp \nu$ и $\tilde{\mu} \ll \mu$, то $\tilde{\mu} \perp \nu$.
2. Если $\mu \perp \nu$ и $\nu \ll \mu$, то $\nu = 0$.
3. Пусть ν_1, ν_2 – заряды на Σ и $\nu_1 \perp \nu_2$. Тогда $|\nu_1 + \nu_2| = |\nu_1| + |\nu_2|$. Верно ли обратное утверждение?
4. Пусть $|\nu_1 + \nu_2| = |\nu_1 - \nu_2| = |\nu_1| + |\nu_2|$. Тогда $\nu_1 \perp \nu_2$.
5. Через $M_{ss}(\Omega,\Sigma,\mu)$ обозначим подмножество в $M(\Omega,\Sigma)$, состоящее из строго сингулярных по отношению к μ зарядов. Доказать, что $M_{ss}(\Omega,\Sigma,\mu)$ – замкнутое подпространство в $M(\Omega,\Sigma)$.
6. Пусть $\nu_1 \in M_{abs}(\Omega,\Sigma,\mu)$, $\nu_2 \in M_{ss}(\Omega,\Sigma,\mu)$. Тогда $\|\nu_1 + \nu_2\| = \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$.
7. Пусть ν_1 – безатомный, а ν_2 – чисто атомарный заряд. Тогда $\nu_1 \perp \nu_2$.
8. Величина $m(\mu,\nu)$ полуаддитивна снизу по второй переменной: $m(\mu,\nu_1+\nu_2) \ge m(\mu,\nu_1) + m(\mu,\nu_2)$.
9. Если $\nu_1 \ge \nu_2 \ge 0$, то $m(\mu,\nu_1-\nu_2) \le m(\mu,\nu_1) - m(\mu,\nu_2)$.

7.1.6. Теорема Радона – Никодима

В настоящем параграфе μ будет фиксированной мерой на Σ. Мы по-прежнему будем использовать обозначения $F(\mu,\nu)$ и $m(\mu,\nu)$, введённые в предыдущем параграфе.

Теорема 1. Для любого заряда ν на Σ существует единственное разложение $\nu=\eta_1+\eta_2$ в виде суммы абсолютно непрерывного по отношению к μ заряда η_1 и заряда $\eta_2\perp\mu$. При этом заряд η_1 имеет вид μ_f с $f\in L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Доказательство. Начнём с единственности представления. Пусть, кроме представления $\nu=\eta_1+\eta_2$, есть аналогичное представление $\nu=\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2$. Тогда $\eta_1-\tilde{\eta}_1\ll\mu$ и $\eta_1-\tilde{\eta}_1=\tilde{\eta}_2-\eta_2\perp\mu$. То есть (упражнение 2 п. 7.1.5) $\eta_1-\tilde{\eta}_1=0$, следовательно, $\tilde{\eta}_2-\eta_2=0$.

Существование требуемого разложения достаточно проводить для $\nu\geq 0$. Общий случай можно получить отдельным рассмотрением задачи на множестве положительности и множестве отрицательности заряда ν. Идея доказательства состоит в так называемом методе исчерпания: требуемая функция f строится как сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$, каждое из слагаемых которого «забирает в себя» существенную часть величины $m(\mu,\nu)$, ещё не забранную предыдущими слагаемыми.

Возьмём в качестве f_1 такой элемент множества $F(\mu,\nu)$, что $\int_\Omega f_1 d\mu\geq\frac{1}{2}m(\mu,\nu)$. Поскольку $f_1\in F(\mu,\nu)$, имеем $\nu-\mu_{f_1}\geq 0$. Функцию $f_2\in F\left(\mu,\nu-\mu_{f_1}\right)$ выберем так, что $\int_\Omega f_2 d\mu\geq\frac{1}{2}m\left(\mu,\nu-\mu_{f_1}\right)$. Поскольку $f_2\in F(\mu,\nu-\mu_{f_1})$, имеем $\nu-\mu_{f_1+f_2}\geq 0$. Продолжим этот процесс, выбирая на $n+1$-ом шаге функцию $f_{n+1}\in F(\mu,\nu-\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n})$ так, что $\int_\Omega f_{n+1}d\mu\geq\frac{1}{2}m\left(\mu,\nu-\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}\right)$. При этом на каждом шаге будет выполняться неравенство $\nu-\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}\geq 0$, или, что то же самое, $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}\leq\nu$. Так как все f_n неотрицательны, частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ образуют возрастающую последовательность функций. Согласно теореме 3 п. 7.1.4, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ сходится μ-почти всюду к некоторой функции $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, и $\mu_f \le \nu$. По построению, $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \le \mu_f$ при всех n. Следовательно,

$$m(\mu, \nu - \mu_f) \le m(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}) \le \int_\Omega f_{n+1} d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

То есть $m(\mu, \nu - \mu_f) = 0$ и, согласно лемме п. 7.1.5, $\nu - \mu_f \perp \mu$. Для завершения доказательства осталось положить $\eta_1 = \mu_f$ и $\eta_2 = \nu - \mu_f$. □

Применим последнюю теорему к частному случаю, когда $\nu \ll \mu$. В этом случае ввиду единственности представления $\nu = \eta_1 + \eta_2$ имеем $\nu = \eta_1$ и $\eta_2 = 0$. Соответственно, сам заряд ν имеет вид $\nu = \mu_f$. Расшифровав определение заряда μ_f, получаем следующий глубокий результат, принадлежащий Радону (J. Radon) и Никодиму (O. M. Nikodým).

Теорема 2. Пусть заряд ν абсолютно непрерывен по отношению к мере μ. Тогда существует такая функция $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, что $\int_A f d\mu = \nu(A)$ для всех $A \in \Sigma$. □

Как нетрудно убедиться (например, сославшись на теорему 2 п. 7.1.4), функция f в теореме Радона – Никодима определяется мерой μ и зарядом ν однозначно с точностью до равенства почти всюду по мере μ. Эта функция f называется *производной Радона – Никодима* заряда ν по мере μ и обозначается $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Упражнения

1. Обоснуйте соотношение $\int_\Omega f_{n+1} d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ из доказательства теоремы 1.
2. Пусть $\nu \ll \mu$. Измеримая функция g на Ω будет интегрируемой по заряду ν в том и только том случае, если функция $g\frac{d\nu}{d\mu}$ интегрируема по мере μ. При этом $\int_\Omega g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_\Omega g d\nu$.

7.2. Производная и интеграл на отрезке

В курсе анализа формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ была доказана только для непрерывно дифференцируемых функций. Ниже мы дадим полное описание тех функций f, для которых выполнена формула Ньютона – Лейбница, если интеграл понимать в лебеговском смысле. Мы увидим, что такое описание тесно связано с вопросами, изучавшимися выше, – зарядами и теоремой Радона – Никодима. На протяжении этого раздела будут рассматриваться вещественнозначные функции вещественной переменной, а λ будет мерой Лебега на соответствующем отрезке или на оси.

7.2.1. Интеграл производной

Теорема. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – возрастающая функция. Тогда $f'\in L_1[a,b]$, и $\int_a^b f'(t)dt \le f(b)-f(a)$.

Доказательство. Зафиксируем стремящуюся к нулю последовательность $\varepsilon_n>0$ и рассмотрим разделённые разности $f_n(t)=\dfrac{f(t+\varepsilon_n)-f(t)}{\varepsilon_n}$. Чтобы эта формула имела смысл на всём отрезке $[a,b]$, положим $f(x)=f(b)$ при $x>b$. Функции f_n интегрируемы, неотрицательны, и

$$\int_{[a,b]} f_n(t)d\lambda = \frac{1}{\varepsilon_n}\int_{[a,b]}\big(f(t+\varepsilon_n)-f(t)\big)d\lambda = \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\int_{[a+\varepsilon_n,b+\varepsilon_n]} f(t)d\lambda - \int_{[a,b]} f(t)d\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\int_{[b,b+\varepsilon_n]} f(t)d\lambda - \int_{[a,a+\varepsilon_n]} f(t)d\lambda\right) \le f(b)-f(a).$$

Далее, $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f'$ на $[a,b]$. Следовательно, по лемме Фату, функция f' интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b f'(t)dt \le \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt \le f(b)-f(a)$. □

Упражнения

1. В условиях вышеприведенной теоремы $\int_a^b f'(t)dt \le f(b-0)-f(a+0)$.

2. Пример возрастающей функции с $\int_a^b f'(t)dt \ne f(b)-f(a)$: $f=\mathbf{1}_{[1/2\ ,1]}$, $[a,b]=[0,1]$.

3. Даже для непрерывной возрастающей функции f формула Ньютона – Лейбница может быть не выполнена. Пример – «канторова лестница» (п. 2.3.6).

7.2.2. Производная интеграла как функции верхнего предела интегрирования

Пусть $f \in L_1[a,b]$, F – «первообразная» функции f: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Теорема 1. Для любой $f \in L_1[a,b]$ функция F непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. Согласно теореме 1 п. 7.1.4, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $A \in \Sigma$, если $\mu(A) < \delta$, то $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$. Применив это утверждение к $A = [x, x+\delta]$, получаем неравенство $|F(x) - F(x+\delta)| < \varepsilon$, означающее требуемую непрерывность. □

Лемма. Для любой $f \in L_1[a,b]$ функция F дифференцируема почти всюду, $F' \in L_1[a,b]$ и $\int_a^b |F'(t)| dt \le \int_a^b |f(t)| dt$.

Доказательство. Представим F в виде разности $F = F_1 - F_2$ с $F_1(x) = \int_a^x f^+(t)dt$ и $F_2(x) = \int_a^x f^-(t)dt$. Функции F_1 и F_2 монотонны, следовательно, и они, и F дифференцируемы почти всюду, и их производные интегрируемы. Далее,

$$\int_a^b |F'(t)| dt = \int_a^b |F_1' - F_2'| dt \le \int_a^b F_1'(t)dt + \int_a^b F_2'(t)dt \le F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a)$$

$$= \int_a^b f^+(t)dt + \int_a^b f^-(t)dt = \int_a^b |f(t)| dt. \ □$$

Теорема 2. $F' \overset{\text{п.в.}}{=} f$ для любой функции $f \in L_1[a,b]$. Другими словами, производная интеграла Лебега как функции верхнего предела интегрирования почти всюду равна подынтегральной функции.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор T, действующий из $L_1[a,b]$ в $L_1[a,b]$ по правилу $Tf = F' - f$. По предыдущей лемме, $\|Tf\| = \int_a^b |F'(t) - f(t)| dt \le 2\int_a^b |f(t)| dt = 2\|f\|$, то есть оператор T непрерывен. Для $f \in C[a,b]$, согласно известной теореме анализа, $Tf = 0$. Поскольку множество $C[a,b]$ непрерывных функций плотно в $L_1[a,b]$, отсюда следует, что $T = 0$ на всём $L_1[a,b]$, что и требовалось доказать. □

Упражнения

1. Пусть A – измеримое подмножество отрезка. Применив последнюю теорему к функции $f = \mathbf{1}_A$, выведите отсюда решение упражнения 4 п. 2.3.3 о точках плотности множества.
2. Докажите, что канторова лестница не может играть роли F ни для какой интегрируемой функции f.

7.2.3. Функции ограниченной вариации и общий вид борелевского заряда на отрезке

Поскольку основные свойства функций ограниченной вариации обычно излагаются в курсе математического анализа (как основа теории интеграла Стилтьеса), мы напомним здесь эти свойства, не приводя доказательств. Читатель, по какой-либо причине не встречавшийся ранее с понятиями, приводимыми ниже, может либо отнестись к материалу этого параграфа как к цепочке упражнений, предлагаемых для самостоятельного решения, либо прочитать подробное изложение, скажем, по учебнику Колмогорова-Фомина [K-F].

Определение 1. *Вариацией функции* f *на отрезке* $[a,b]$ называется величина $V_a^b(f) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|\right\}$, где супремум берётся по всем конечным дизъюнктным наборам открытых подотрезков (a_k, b_k) отрезка $[a,b]$. Если $V_a^b(f) < \infty$, то f называется *функцией ограниченной вариации* на $[a,b]$.

Согласно определению, вариация функции – величина неотрицательная.

1. Супремум в определении вариации $V_a^b(f)$ достаточно брать по таким наборам подотрезков (a_k, b_k) отрезка $[a,b]$, что $a = a_1 < b_1 = a_2 < \ldots < b_n = b$. Другими словами, по дизъюнктным наборам, дающим в объединении весь $[a,b]$, за исключением конечного числа точек. Именно в такой форме определение вариации чаще всего приводится в литературе.
2. Множество функций ограниченной вариации на фиксированном отрезке $[a,b]$ образует линейное пространство, и V_a^b – выпуклый функционал на этом пространстве.
3. Монотонные функции имеют ограниченные вариации: $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. Соответственно, и линейные комбинации монотонных функций имеют ограниченные вариации.
4. $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ для любых $a < c < b$.

5. Каждая функция f ограниченной вариации представима в виде разности двух возрастающих функций: $f = f_1 - f_2$, где $f_1(t) = V_a^t(f)$, $f_2(t) = V_a^t(f) - f(t)$.

Лемма. Каждая непрерывная справа функция f ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ представима в виде разности двух возрастающих непрерывных справа функций.

Доказательство. Вначале запишем f каким-нибудь образом как разность $f_1 - f_2$ возрастающих функций. Определим требуемые функции g_1, g_2 формулами $g_1(t) = \lim\limits_{x \to t+0} f_1(x)$ и $g_2(t) = \lim\limits_{x \to t+0} f_2(x)$ при $t \in [a,b)$ и положим $g_1(b) = f_1(b)$, $g_2(b) = f_2(b)$. Эти функции уже будут непрерывны справа, и $f(t) = \lim\limits_{x \to t+0} f(x) = \lim\limits_{x \to t+0} \big(f_1(x) - f_2(x)\big) = g_1(t) - g_2(t)$. □

Определение 2. Борелевским зарядом на отрезке $[a,b]$ называется заряд, заданный на семействе всех борелевских подмножеств отрезка $[a,b]$. Функцией распределения борелевского заряда ν на $[a,b]$ называется функция $F_\nu(t) = \nu([a,t])$.

В п. 2.3.5 нами было доказано, что, сопоставив каждой конечной борелевской мере μ на отрезке $[a,b]$ её функцию распределения $F_\mu(t) = \mu([a,t])$, можно установить взаимно однозначное соответствие между борелевскими мерами на $[a,b]$ и возрастающими непрерывными справа функциями на этом отрезке. Этот факт вместе с вышеприведенной леммой дают следующий результат.

Теорема. Отображение $\nu \to F_\nu$ осуществляет линейное биективное соответствие между семейством всех борелевских зарядов на отрезке $[a,b]$ и множеством всех непрерывных справа функций ограниченной вариации на $[a,b]$.

Доказательство. Соотношения линейности $F_{\nu_1 + \nu_2} = F_{\nu_1} + F_{\nu_2}$ и $F_{c\nu} = cF_\nu$ вытекают непосредственно из определения функции распределения борелевского заряда. Далее, $F_\nu = F_{\nu^+} - F_{\nu^-}$, то есть функция F_ν представима в виде разности двух функций распределения мер – возрастающих непрерывных справа функций. Следовательно, F_ν – это непрерывная справа функция ограниченной вариации. Обратно, любая непрерывная справа функция ограниченной вариации f представима в виде разности $f = f_1 - f_2$ двух возрастающих непрерывных справа функций, каждая из которых, в свою очередь, может быть записана как функция распределения соответствующей борелевской меры: $f_1 = F_{\mu_1}$, $f_2 = F_{\mu_2}$. Следовательно, $f = F_{\mu_1-\mu_2}$. Этим доказана сюръективность отображения. Докажем, наконец, инъективность. Пусть $F_\nu = 0$. Тогда $F_{\nu^+} = F_{\nu^-}$. Но, согласно теореме 2 п. 2.3.5, если функции распределения двух борелевских мер на отрезке совпадают, то совпадают и сами меры. Следовательно, $\nu^+ = \nu^-$, то есть $\nu = \nu^+ - \nu^- = 0$.□

Упражнения

1. Если к функции прибавить константу, то вариация не изменится.
2. Понятия вариации заряда и вариации функции согласованы: если ν – борелевский заряд на $[a,b]$ и точка a не служит атомом этого заряда, то $V_a^b(F_\nu) = |\nu|([a,b])$.
3. В общем случае $V_a^t(F_\nu) = F_{|\nu|}(t) - |\nu|(\{a\})$.
4. Пусть функция f ограниченной вариации непрерывна на $[a,b]$. Тогда функция $f_1(t) = V_a^t(f)$ также непрерывна на $[a,b]$.

7.2.4. Абсолютно непрерывные функции

Функция f на отрезке $[a,b]$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что на любом конечном наборе непересекающихся открытых подотрезков $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, $k = 1,2,...,n$, с $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \le \delta$ (то есть суммарной длины, не превосходящей δ), суммарное колебание функции не превосходит ε: $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \le \varepsilon.$

Отметим, что каждая абсолютно непрерывная функция непрерывна (применить определение, взяв в качестве набора отрезков один отрезок длины, меньшей δ, и любая линейная комбинация абсолютно непрерывных функций также абсолютно непрерывна.

Теорема. Пусть f – абсолютно непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Тогда f – это функция ограниченной вариации. Более того, функции $f_1(t) = V_a^t(f)$ и $f_2(t) = V_a^t(f) - f(t)$ также абсолютно непрерывны, то есть f представима в виде разности $f_1 - f_2$ двух возрастающих абсолютно непрерывных функций.

Доказательство. Возьмём $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ из определения абсолютной непрерывности. Пусть $[c,d] \subset [a,b]$ и $|d - c| \le \delta$. Тогда для любого конечного набора непересекающихся открытых подотрезков $(a_k, b_k) \subset [c,d]$, $k = 1,2,...,n$, сумма длин отрезков не превосходит δ, следовательно,

$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\le\varepsilon$. Взяв супремум по всем таким наборам, получим оценку

$$V_c^d(f)\le\varepsilon \quad \text{для любых} \quad a\le c<d\le b \ \text{ с } \ |d-c|\le\delta. \qquad (*)$$

Все утверждения теоремы вытекают из этой оценки. Действительно, разобьём $[a,b)$ в конечное число непересекающихся подотрезков $[c_k,d_k)\subset[a,b]$, $k=1,2,...,m$, длина каждого из которых не превосходит δ. Тогда $V_a^b(f)=\sum_{k=1}^{m}V_{c_k}^{d_k}(f)<\infty$, то есть f – это функция ограниченной вариации. Далее, согласно (∗), если $|d-c|\le\delta$, то $|f_1(d)-f_1(c)|\le\varepsilon$. Этим доказана непрерывность функции f_1, а с ней и f_2. □

Упражнения

1. Пусть последовательность f_n функций на $[a,b]$ сходится поточечно к функции f. Тогда $V_a^b(f)\le\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}V_a^b(f_n)$.
2. Обозначим через $bv[a,b]$ линейное пространство функций ограниченной вариации на $[a,b]$. Проверить, что V_a^b – это полунорма на $bv[a,b]$ (определение полунормы см. в упражнениях п. 6.1.3).
3. Доказать, что ядро полунормы V_a^b состоит из констант.
4. Рассмотрим факторпространство пространства $bv[a,b]$ по подпространству X констант. Определим норму любого класса эквивалентности $[f]\in bv[a,b]/X$ равенством $\|[f]\|=V_a^b(f)$. Проверить корректность такого определения.
5. Полученное нормированное пространство $bv[a,b]/X$ обозначается $V[a,b]$.
6. Определим оператор $T:V[a,b]\to L_1[a,b]$ равенством $Tf=f'$ (оператор взятия производной). Проверить, что T – непрерывный линейный оператор.
7. Опираясь на предыдущее упражнение, докажите теорему Фубини о дифференцировании ряда (упражнение 3 п. 2.3.3).
8. $V[a,b]$ – банахово пространство.

Через $AC[a,b]$ обозначим подмножество пространства $V[a,b]$, образованное классами эквивалентности абсолютно непрерывных функций.

9. $AC[a,b]$ – замкнутое подпространство пространства $V[a,b]$.

7.2.5. Абсолютно непрерывные функции и абсолютно непрерывные борелевские заряды

Теорема. Для функции распределения F борелевской меры μ на отрезке $[a,b]$ следующие условия эквивалентны:

A. F абсолютно непрерывна и $F(a)=0$;
B. Мера μ абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега λ.

Доказательство. B $\Rightarrow$ A. Напомним вначале, что меры полуоткрытых подотрезков можно вычислять по формуле $\mu\big((t_1,t_2]\big)=F(t_2)-F(t_1)$. Если $\mu \ll \lambda$, то, согласно теореме п. 7.1.3, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что любое борелевское множество $A\subset[a,b]$ с $\lambda(A)<\delta$ имеет $\mu(A)<\varepsilon$. Рассмотрим набор непересекающихся открытых подотрезков $(a_k,b_k)\subset[a,b]$, $k=1,2,...,n$, с $\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k-a_k|\le\delta$ и возьмём $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k]$. Тогда $\lambda(A)<\delta$ и, соответственно, $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\big(F(b_k)-F(a_k)\big)<\varepsilon$. Этим доказана абсолютная непрерывность функции F. Условие же $F(a)=0$ следует из того, что одноточечное множество $\{a\}$ имеет нулевую меру Лебега, следовательно, и $\mu\big(\{a\}\big)=0$.

A $\Rightarrow$ B. Пусть F абсолютно непрерывна, $\varepsilon>0$ – произвольное число, и $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ взято из определения абсолютно непрерывной функции. Докажем вначале, что $\mu(A)\le\varepsilon$ для любого открытого подмножества $A\subset[a,b]$ с $\lambda(A)<\delta$. Действительно, такое открытое множество имеет вид $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ с $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|b_k-a_k|\le\delta$. (Если быть совсем точным, то два из этих отрезков – лежащие в начале и в конце отрезка $[a,b]$, – могут быть полуоткрытыми.) Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\big(F(b_k)-F(a_k)\big)<\varepsilon$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Соответственно, $\mu(A)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big(F(b_k)-F(a_k)\big)\le\varepsilon$. Докажем теперь требуемую абсолютную непрерывность меры μ по отношению к мере Лебега. Пусть $D\subset[a,b]$ – множество нулевой меры Лебега. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $A\subset[a,b]$, содержащее D, с $\lambda(A)<\delta(\varepsilon)$. Следовательно, $\mu(D)\le\mu(A)\le\varepsilon$. Ввиду произвольности ε этим доказано требуемое равенство $\mu(D)=0$. □

Следствие. Пусть f – абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$ с $f(a)=0$. Тогда существует борелевский заряд ν, абсолютно непрерывный по отношению к мере Лебега, связанный на $[a,b]$ с f равенством $f(t)=\nu([a,t])$.

Доказательство. Представим f в виде разности f_1-f_2 двух возрастающих абсолютно непрерывных функций (основная теорема предыдущего параграфа), равных нулю в точке a. Для каждой из этих функций f_j построим борелевскую меру μ_j, имеющую f_j в качестве функции распределения. Заряд ν определим как $\mu_1-\mu_2$. □

Упражнения

1. Почему функции f_1, f_2 в последнем доказательстве можно выбрать равными нулю в точке a?
2. Канторова лестница (п. 2.3.6) – это пример непрерывной, но не абсолютно непрерывной функции на отрезке.

7.2.6. Восстановление функции по её производной

Мы провели большую подготовительную работу и готовы, наконец, разобраться с условием выполнения формулы Ньютона – Лейбница для интеграла Лебега. Обращаем внимание читателя, что доказательство, внешне простое и короткое, существенно использует глубокие результаты, группирующиеся вокруг теоремы Радона – Никодима.

Теорема. Для функции F на отрезке $[a,b]$ следующие условия эквивалентны:

(1) F абсолютно непрерывна;

(2) F представима в виде $F(x)=F(a)+\int\limits_a^x f(t)dt$, $f\in L_1[a,b]$ (то есть, в терминологии п. 7.2.2, $F(x)-F(a)$ – это «первообразная» некоторой функции из $L_1[a,b]$);

(3) F дифференцируема почти всюду на $[a,b]$, $F'\in L_1[a,b]$, и для любого $x\in[a,b]$ выполнена формула Ньютона – Лейбница $F(x)-F(a)=\int\limits_a^x F'(t)dt$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Согласно следствию предыдущего пункта, существует борелевский заряд μ на $[a,b]$, для которого функция $F(x)-F(a)$ будет функцией распределения. Поскольку заряд μ абсолютно непрерывен по отношению к мере Лебега λ (теорема предыдущего параграфа), мы можем воспользоваться теоремой Радона – Никодима (теорема 2 п. 7.1.6). По этой теореме, существует такая функция $f\in L_1[a,b]$, что $\int\limits_A fd\lambda=\mu(A)$ для всех борелевских подмножеств отрезка $[a,b]$. Подставив в качестве A подотрезок $[a, x]$, получим, что $F(x) - F(a) = \mu([a, x]) = \int_a^x f(t)dt.$

(2) $\Rightarrow$ (1). Условие $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ означает, что $F(x) - F(a)$ – это функция распределения заряда λ_f (см. п. 7.1.4), задаваемого равенством $\lambda_f(A) = \int_A f d\lambda$. Такой заряд абсолютно непрерывен по отношению к мере Лебега, следовательно, абсолютно непрерывна и его функция распределения.

(2) $\Rightarrow$ (3). Достаточно воспользоваться теоремой 2 п. 7.2.2 о производной интеграла как функции верхнего предела интегрирования.

(3) $\Rightarrow$ (2). В качестве f нужно взять F'. □

7.2.7. Упражнения: замена переменных в интеграле Лебега

Пусть Ω и Ω_1 – множества, Σ – σ-алгебра на Ω и $F : \Omega \to \Omega_1$ – произвольное отображение. Зададим на Ω_1 семейство подмножеств Σ_1: $A \in \Sigma_1 \Leftrightarrow F^{-1}(A) \in \Sigma$.

1. Семейство Σ_1 образует σ-алгебру на Ω_1.

Далее, пусть μ – заряд на Σ. *Образом заряда μ при отображении F* называется функция множества $F(\mu) : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $(F(\mu))(A) = \mu(F^{-1}(A))$.

2. $F(\mu)$ – это счётно-аддитивный заряд, причём если μ – мера, то $F(\mu)$ – тоже мера.
3. При фиксированном F отображение $\mu \to F(\mu)$ линейно.
4. Приведите пример, когда $F(\mu)$ – это мера, хотя заряд μ мерой не является.
5. Если (Ω, Σ, μ) – полное пространство с мерой, то пространство с мерой $(\Omega_1, \Sigma_1, F(\mu))$ также полно.
6. Может ли пространство с мерой $(\Omega_1, \Sigma_1, F(\mu))$ быть полным, если пространство с мерой (Ω, Σ, μ) неполно?
7. Пусть отображение F инъективно и пространство с мерой $(\Omega_1, \Sigma_1, F(\mu))$ полно. Тогда полно и (Ω, Σ, μ).
8. Пусть $F(\mu)$ – безатомный заряд. Тогда у μ тоже нет атомов.

9. Функция $f:\Omega_1 \to \mathbb{R}$ интегрируема по заряду $F(\mu)$ в том и только том случае, если композиция $f \circ F$ интегрируема по заряду μ. При этом $\int\limits_{\Omega} f \circ F \, d\mu = \int\limits_{F(\Omega)} f \, dF(\mu)$.

Конкретизируем описанную выше конструкцию для случая функций вещественной переменной и меры Лебега λ.

Пусть F – это возрастающая непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Не нарушая общности, можно считать, что F – это функция распределения некоторой безатомной борелевской меры μ на отрезке $[a,b]$.

10. Для любого отрезка $[c,d] \subset [F(a),F(b)]$ выполнено равенство $(F(\mu))([c,d]) = d-c$. Другими словами, ограничение меры $F(\mu)$ на σ-алгебру борелевских подмножеств отрезка $[F(a),F(b)]$ совпадает с мерой Лебега λ на $[F(a),F(b)]$.

11. В условиях предыдущего упражнения для любой функции $f \in L_1[F(a),F(b)]$ выполнено соотношение $\int\limits_a^b f \circ F \, d\mu = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f \, d\lambda$.

Напомним, что монотонная функция F на отрезке будет абсолютно непрерывной в том и только том случае, если порождённая ею мера μ абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега и производная Радона – Никодима $\frac{d\mu}{d\lambda}$ совпадает с F'. Таким образом, при условии абсолютной непрерывности функции F формула из предыдущего упражнения принимает хорошо знакомый вид:

12. $\int\limits_a^b f(F(x))F'(x)\,dx = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(t)\,dt$, где интегралы в обеих частях равенства понимаются в смысле интеграла Лебега.

13. Условимся для интеграла Лебега, как и для интеграла Римана, считать, что $\int\limits_c^d g(x)dx = -\int\limits_d^c g(x)dx$. Докажите, что формула $\int\limits_a^b f(F(x))F'(x)\,dx = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(t)\,dt$ сохраняет силу для любой, не обязательно монотонной, абсолютно непрерывной функции F на отрезке $[a,b]$ и любой функции $f \in L_1[F([a,b])]$.

7.3. Комментарии к упражнениям

Параграф 7.1.1

Упражнение 5. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств, $\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$. Тогда множества $A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k$ образуют убывающую цепочку множеств с пустым пересечением. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\left(\nu(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = 0$.

Параграф 7.1.4

Упражнение 4. Достаточно доказать утверждение для положительных f: общий сучай выводится отдельным рассмотрением множеств $\Omega^+ = \{t : f(t) > 0\}$ и $\Omega^- = \{t : f(t) < 0\}$. По той же причине можно считать, что и $g \geq 0$. По определению μ_f для $g = \mathbf{1}_A$ с $A \in \Sigma$, оба интеграла существуют и совпадают; по теореме Лéви о рядах, утверждение будет выполнено для счётнозначных функций $g \geq 0$. Теперь пусть g – произвольная неотрицательная измеримая функция. По следствию теоремы 3 п. 3.1.4 существует возрастающая последовательность $g_n \geq 0$ счётнозначных функций с $g_n - g \leq 1/n$. Предположим, что существует $\int_\Omega gf \, d\mu$. Тогда, так как $g + 1/n$ имеют μ-интегрируемую мажоранту $g + 1/n$, то существуют $\int_\Omega g_n f \, d\mu$. Для счётнозначных функций теорема уже доказана, следовательно, существуют $\int_\Omega g_n d\mu_f$, причём $\int_\Omega g_n f \, d\mu = \int_\Omega g_n d\mu_f$. Предельным переходом, применяя теорему Лéви о последовательностях, заключаем, что существует $\int_\Omega g d\mu_f$ и $\int_\Omega gf \, d\mu = \int_\Omega g d\mu_f$. Обратная импликация: (если существует $\int_\Omega g d\mu_f$, то существует и $\int_\Omega gf \, d\mu$) выводится точно так же.

Параграф 7.1.6

Упражнение 1. Из неравенства $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \leq \nu$ следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n d\mu \leq \nu(\Omega)$. Значит, общий член ряда стремится к нулю.

Упражнение 2. См. 7.1.4, упражнение 4 и комментарий к нему.

Параграф 7.2.3

Упражнение 4. Пусть ν – такой борелевский заряд, что $f - f(a) = F_\nu$. Заряд ν не имеет атомов (если t_0 – атом, то в этой точке у f был бы разрыв), следовательно, безатомна и мера $|\nu|$ (упражнение 3 п. 7.1.2). Соответственно, непрерывна и интересующая нас функция $f_1 = F_{|\nu|}$.

Однако прямым рассуждением здесь можно получить больше: если f непрерывна справа в некоторой точке $t_0 \in [a,b)$, то $f_1(t) = V_a^t(f)$ также непрерывна справа в этой точке. По симметрии (заменой функции $f(x)$ на $f(-x)$), отсюда следует аналогичный факт и для непрерывности слева.

Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такой конечный набор открытых подотрезков (a_k, b_k), $t_0 = a_1 < b_1 = a_2 < ... < b_n = b$, отрезка $[t_0, b]$, что $V_{t_0}^b(f) \le \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \varepsilon$. Выберем теперь $\delta \in (t_0, b_1]$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|f(\delta) - f(t_0)| < \varepsilon$. Тогда $V_\delta^b(f) \ge |f(b_1) - f(\delta)| + \sum_{k=2}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \ge \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| - \varepsilon \ge V_{t_0}^b(f) - 2\varepsilon.$

Соответственно, $|f_1(t_0) - f_1(\delta)| = V_{t_0}^\delta(f) = V_{t_0}^b(f) - V_\delta^b(f) \le 2\varepsilon$. □

8. Интеграл в *C(K)*

В первых трёх разделах этой главы мы рассмотрим подробнее теорию интегрирования функций на компактном топологическом пространстве K. В последнем разделе полученные результаты будут применены к доказательству теоремы Ф. Рисса – А. Маркова – С. Какутани об общем виде линейного функционала в $C(K)$. В последних двух параграфах этой главы будет рассматриваться интегрирование комплексных функций по комплексным зарядам и функционалы в комплексном $C(K)$. До этого все функции, заряды и функционалы будут предполагаться вещественными.

8.1. Регулярные борелевские меры на компакте

8.1.1. Внутренняя мера и регулярность

Напомним, что борелевской мерой на топологическом пространстве X называется конечная счётно-аддитивная мера, заданная на семействе всех борелевских подмножеств пространства X.

Определение 1. Пусть μ – борелевская мера на топологическом пространстве X. Для любого подмножества $A \subset X$ определим *внутреннюю меру* $\mu_*(A)$ как супремум мер всех замкнутых множеств, содержащихся в A. Мера μ называется *регулярной*, если для всех открытых подмножеств $\mu_*(A) = \mu(A)$. Другими словами, мера μ регулярна, если для любого открытого подмножества $A \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое подмножество $B \subset A$ с $\mu(B) \ge \mu(A) - \varepsilon$.

Лемма. Пусть X – метрическое пространство. Тогда любое открытое подмножество $A \subset X$ можно представить как объединение возрастающей последовательности замкнутых множеств.

Доказательство. Рассмотрим на X функцию $f(x) = \rho(x, X \setminus A)$. Эта функция непрерывна (п. 1.3.3), соответственно, множества $A_n = f^{-1}([1/n, +\infty))$ замкнуты. Эти множества образуют возрастающую последовательность, и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}((0,+\infty)) = A$. □

Теорема. На метрическом пространстве каждая борелевская мера регулярна.

Доказательство. Пусть μ – борелевская мера на метрическом пространстве X, $A \subset X$ – открытое подмножество. По предыдущей лемме, существует возрастающая последовательность замкнутых множеств A_n, дающая в объединении всё множество A. Воспользовавшись счётной аддитивностью, получаем, что $\lim_{n\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, то есть мера множества A может быть с любой степенью точности приближена мерами его замкнутых подмножеств. □

На общих топологических пространствах встречаются и нерегулярные борелевские меры. В качестве примера рассмотрим отрезок $[0,1]$, наделённый следующей топологией τ: открытыми в τ считаются множества, дополнения к которым конечны или счётны. В такой специальной топологии открытые и замкнутые множества вместе уже образуют σ-алгебру. Соответственно, τ-борелевскими будут только τ-открытые и τ-замкнутые множества. Определим меру μ, положив $\mu(A) = 0$, если A замкнуто в топологии τ (то есть если A – конечное или счётное множество) и взяв $\mu(A) = 1$ для τ-открытых множеств. Тогда $\mu([0,1]) = 1$, а $\mu_*([0,1]) = 0$.[1]

В разделе 8.3 в качестве следствия общих результатов будет показано, что для регулярной борелевской меры на компакте равенство $\mu_*(A) = \mu(A)$ выполнено не только для открытых, но и для любых борелевских множеств (см. упражнение 1 п. 8.3.2).

Упражнения

1. Если подмножество $A \subset K$ замкнуто, то $\mu_*(A) = \mu(A)$.
2. $\mu_*(A) \le \mu(A)$ для любого борелевского подмножества $A \subset K$.
3. Если $A \subset B \subset K$, то $\mu_*(A) \le \mu_*(B)$.
4. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ – возрастающая цепочка подмножеств компакта K, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда $\mu_*(A) \ge \lim_{n\to\infty} \mu_*(A_k)$.

---

[1] Для тех, кто знаком с понятием порядковых чисел (ординалов). Обозначим через ω_1 первый несчётный ординал. Рассмотрим множество X всех ординалов, не превосходящих ω_1. Окрестностью ординала α будем называть любое подмножество $U \subset X$, содержащее отрезок вида $(\beta, \alpha]$ с $\beta < \alpha$. В соответствующей топологии множество X будет компактом. Далее, определим борелевскую меру μ на X следующим образом: если борелевское множество A содержит подмножество вида $B \setminus \{\omega_1\}$, где B – замкнутое множество, имеющее ω_1 предельной точкой, положим $\mu(A) = 1$, в противном же случае положим $\mu(A) = 0$. Имеем $\mu\big((1, \omega_1)\big) = 1$, но в то же время мера любого замкнутого подмножества отрезка $(1, \omega_1)$ равна нулю. Таким образом, μ даёт пример нерегулярной борелевской меры на компактном топологическом пространстве.

Бэровской σ-алгеброй на топологическом пространстве K называется наименьшая σ-алгебра Σ_0, в которой все непрерывные функции, определённые на K, измеримы. Покажите, что:

5. Если K – компакт, то σ-алгебра Σ_0 порождается семейством всех открытых множеств, принадлежащих классу F_σ.
6. Если K – метрический компакт, то σ-алгебра Σ_0 совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.

8.1.2. Носитель меры

Пусть μ – регулярная борелевская мера на компакте K. Точка $x \in K$ называется *существенной точкой* меры μ, если любая окрестность точки x имеет ненулевую меру. *Носителем меры* μ называется множество $\operatorname{supp}\mu$ всех существенных точек этой меры.

Теорема 1. $\operatorname{supp}\mu$ – замкнутое множество, $\mu(K \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ и ни одно открытое множество нулевой меры не пересекается с $\operatorname{supp}\mu$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что множество $V = K \setminus \operatorname{supp}\mu$ всех несущественных точек меры μ открыто, имеет нулевую меру и каждое открытое множество нулевой меры целиком содержится в V.

Вначале отметим, что если U – открытое подмножество компакта K и $\mu(U) = 0$, то $U \subset V$. Действительно, каждая точка множества U имеет окрестность (а именно U) нулевой меры, следовательно, ни одна точка множества U не является существенной.

Пусть $x \in V$. Это означает, что существует открытая окрестность U точки x, имеющая $\mu(U) = 0$ и, следовательно, содержащаяся в V. Мы доказали, что V вместе с каждой своей точкой содержит и некоторую окрестность, то есть V открыто.

Ввиду регулярности меры для доказательства равенства $\mu(V) = 0$ достаточно проверить, что меры всех замкнутых подмножеств множества V равны нулю. Итак, пусть подмножество $W \subset V$ замкнуто. Для каждого $x \in W$ выберем открытую окрестность U_x с $\mu(U_x) = 0$. Эти окрестности вместе образуют открытое покрытие компакта W. Выберем конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$. Имеем $\mu(W) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(U_{x_k}) = 0$. □

Теорема 2. Пусть μ – регулярная борелевская мера на компакте K и две непрерывные функции f_1 и f_2 на K совпадают почти всюду по мере μ. Тогда эти функции совпадают во всех точках носителя меры μ.

Доказательство. Множество U всех точек, где $f_1 \neq f_2$, – это открытое множество нулевой меры. Следовательно, U не пересекается с $\operatorname{supp}\mu$. □

8.2. Продолжение элементарного интеграла

8.2.1. Элементарный интеграл

Определение 1. *Элементарным интегралом* на компакте K называется линейный функционал $\mathcal{I}$ на $C(K)$, подчиняющийся следующему *условию положительности*: если функция f неотрицательна, то $\mathcal{I}(f) \geq 0$.

Свойства элементарного интеграла

(1) Для любых $f, g \in C(K)$ если $f \geq g$, то $\mathcal{I}(f) \geq \mathcal{I}(g)$.

(2) Если $|f| \leq g$, то $|\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(g)$.

(3) $\mathcal{I}$ – непрерывный линейный функционал на $C(K)$ и $\|\mathcal{I}\| = \mathcal{I}(\mathbf{1})$.[2]

Доказательство

(1) $f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \Rightarrow \mathcal{I}(f-g) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{I}(f) \geq \mathcal{I}(g)$.

(2) $|f| \leq g \Rightarrow -g \leq f \leq g \Rightarrow -\mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g) \Rightarrow |\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(g)$.

(3) Пусть f – произвольная функция из единичной сферы пространства $C(K)$. Тогда $|f| \leq 1$ во всех точках и, по предыдущему пункту, $|\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(\mathbf{1})$. □

Поскольку непрерывные функции на K измеримы по Борелю и ограничены, они интегрируемы по любой борелевской мере на K. Поэтому в качестве примера элементарного интеграла можно взять интеграл по любой фиксированной борелевской мере на K.

Определение 2. *Элементарным интегралом*, порождённым борелевской мерой μ на компакте K, называется линейный функционал $\mathbf{F}_\mu$ на $C(K)$, задаваемый формулой $\mathbf{F}_\mu(f) = \int_K f d\nu$.

Ниже мы покажем, что, кроме функционалов вида $\mathbf{F}_\mu$, других примеров элементарных интегралов не существует. Более того, для любого элементарного интеграла $\mathcal{I}$ будет доказано существование **регулярной** борелевской меры μ, порождающей этот интеграл. Идея построения такой меры μ проста: нужно положить $\mu(A) = \mathcal{I}(\mathbf{1}_A)$. Однако на пути реализации этой идеи стоит существенное препятствие: функционал $\mathcal{I}$ определён

[2] Символом $\mathbf{1}$ мы обозначаем функцию, равную тождественной единице.

только для непрерывных функций, а характеристические функции множеств, как правило, разрывны. Поэтому наша ближайшая цель – распространить этот функционал на достаточно широкий класс функций, содержащий, по крайней мере, все характеристические функции борелевских множеств. Этим мы и займёмся в следующих трёх параграфах.

8.2.2. Верхний интеграл полунепрерывной снизу функции

Напомним, что через $l_\infty(K)$ и $LSC(K)$ обозначаются соответственно множества всех ограниченных и всех полунепрерывных снизу функций на K (определение и свойства полунепрерывных функций см. в п. 1.2.4). Для функций $g \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$, то есть полунепрерывных снизу ограниченных функций на K, введём в рассмотрение величину $\mathcal{I}^*(g) = \sup\{\mathcal{I}(h) : h \in C(K) \text{ и } h < g\}$.

Теорема 1. Величина $\mathcal{I}^*$ обладает следующими свойствами:

(1) если $g \in C(K)$, то $\mathcal{I}^*(g) = \mathcal{I}(g)$;

(2) если $g_1, g_2 \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$ и $g_1 \le g_2$, то $\mathcal{I}^*(g_1) \le \mathcal{I}^*(g_2)$;

(3) $\mathcal{I}^*(\lambda g) = \lambda \mathcal{I}^*(g)$ для положительных скаляров λ;

(4) $\mathcal{I}^*(g_1 + g_2) = \mathcal{I}^*(g_1) + \mathcal{I}^*(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$.

Доказательство. Первые три свойства очевидны. Докажем четвёртое свойство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем функции $h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1 < g_1$, $h_2 < g_2$, для которых $\mathcal{I}(h_1) \ge \mathcal{I}^*(g_1) - \varepsilon$ и $\mathcal{I}(h_2) \ge \mathcal{I}^*(g_2) - \varepsilon$. Имеем $\mathcal{I}^*(g_1 + g_2) \ge \mathcal{I}(h_1 + h_2) \ge \mathcal{I}^*(g_1) + \mathcal{I}^*(g_2) - 2\varepsilon$. Ввиду произвольности ε нами доказано неравенство $\mathcal{I}^*(g_1 + g_2) \ge \mathcal{I}^*(g_1) + \mathcal{I}^*(g_2)$.

Для доказательства обратного неравенства выберем функцию $h \in C(K)$, $h < g_1 + g_2$ с $\mathcal{I}(h) \ge \mathcal{I}^*(g_1 + g_2) - \varepsilon$. Согласно теореме 3 п. 1.2.4, применённой к функциям g_1, g_2, для любого $x \in K$ существуют такие функции $h_{1,x}, h_{2,x} \in C(K)$, что $h_{1,x} < g_1$, $h_{2,x} < g_2$ во всех точках компакта и $h_{1,x}(x) + h_{2,x}(x) > h(x)$. Ввиду непрерывности участвующих в последнем неравенстве функций у любого $x \in K$ существует открытая окрестность U_x, для всех точек t которой по-прежнему $h_{1,x}(t) + h_{2,x}(t) > h(t)$. Эти окрестности U_x, $x \in K$ в совокупности образуют покрытие компакта K, следовательно, можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$. Положим $h_1 = \max\limits_{k \in \{1,2,..,n\}} h_{1,x}$, $h_2 = \max\limits_{k \in \{1,2,..,n\}} h_{2,x}$. Эти непрерывные функции подчиняются неравенствам $h_1 < g_1$, $h_2 < g_2$, и по построению $h_1 + h_2 > h$ уже во всех точках. Следовательно,

$$\mathcal{I}^*(g_1+g_2) \le \mathcal{I}(h)+\varepsilon \le \mathcal{I}(h_1+h_2)+\varepsilon \le \mathcal{I}^*(g_1)+\mathcal{I}^*(g_2)+\varepsilon.$$

Осталось устремить ε к нулю. □

Замечание. Величину $\mathcal{I}^*$ мы не можем называть линейным функционалом, так как её область определения не является линейным пространством. Полунепрерывность снизу сохраняется при сложении и умножении на положительный скаляр, но при умножении на отрицательный скаляр или вычитании может теряться. Однако если $h \in C(K)$, то и $-h \in C(K) \subset LSC(K) \cap l_\infty(K)$. Тогда для любого $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$ разность $g-h$ лежит в области определения, и $\mathcal{I}^*(g-h) = \mathcal{I}^*(g) - \mathcal{I}^*(h)$.

Теорема 2. Пусть $g_n \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, g_n – возрастающая, равномерно ограниченная последовательность функций, сходящаяся поточечно к некоторой функции g. Тогда $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$ и $\mathcal{I}^*(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n)$.

Доказательство. Функция g ограничена той же константой, что и все g_n, то есть $g \in l_\infty(K)$. Далее, $g(x) = \sup\{g_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Согласно теореме 1 (подпункт 4) параграфа 1.2.4, $g \in LSC(K)$. То есть $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$.

Числа $\mathcal{I}^*(g_n)$ образуют неубывающую последовательность и ограничены сверху числом $\mathcal{I}^*(g)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n)$ существует и не превосходит $\mathcal{I}^*(g)$. Для доказательства обратного неравенства достаточно получить оценку $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n) \ge \mathcal{I}(h)$ для всех непрерывных функций h, меньших g. Рассмотрим при фиксированном h множества $A_n = \{t \in K : g_n(t) > h(t)\}$. Множества A_n открыты, образуют возрастающую цепочку и покрывают в совокупности весь компакт K. Следовательно, существует индекс $n = n_0$, для которого $A_{n_0} = K$. Это означает, что $g_{n_0}(t) > h(t)$ всюду на K. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n) \ge \mathcal{I}^*(g_{n_0}) \ge \mathcal{I}(h)$. □

8.2.3. Верхний интеграл на $l_\infty(K)$

Верхним интегралом функции $f \in l_\infty(K)$ называется величина

$$\overline{\mathcal{I}}(f) = \inf\left\{\mathcal{I}^*(g) : g \in LSC(K) \cap l_\infty(K) \text{ и } g \ge f\right\}.$$

Теорема 1. Величина $\overline{\mathcal{I}}$ обладает следующими свойствами:

(1) если $f \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$, то $\overline{\mathcal{I}}(f) = \mathcal{I}^*(f)$;[3]

(2) если $f_1, f_2 \in l_\infty(K)$ и $f_1 \le f_2$, то $\overline{\mathcal{I}}(f_1) \le \overline{\mathcal{I}}(f_2)$;

(3) $\overline{\mathcal{I}}(\lambda f) = \lambda \overline{\mathcal{I}}(f)$ для положительных скаляров λ;

(4) $\overline{\mathcal{I}}(f_1 + f_2) \le \overline{\mathcal{I}}(f_1) + \overline{\mathcal{I}}(f_2)$ для любых $f_1, f_2 \in l_\infty(K)$.

Доказательство. Как и в теореме 1 предыдущего параграфа, в доказательстве нуждается лишь четвёртое свойство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем функции $g_1, g_2 \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$, $g_i \ge f_i$ с $\mathcal{I}^*(g_i) \le \overline{\mathcal{I}}(f_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Имеем $\overline{\mathcal{I}}(f_1 + f_2) \le \mathcal{I}^*(g_1 + g_2) \le \overline{\mathcal{I}}(f_1) + \overline{\mathcal{I}}(f_2) + 2\varepsilon$. □

Замечание. Последняя теорема означает, в частности, что $\overline{\mathcal{I}}$ – это выпуклый функционал на $l_\infty(K)$, причём на $C(K)$ этот функционал мажорирует наш элементарный интеграл $\mathcal{I}$. Поэтому для требуемого продолжения элементарного интеграла и построения борелевской меры, порождающей этот интеграл, можно использовать теорему Хана – Банаха. Такой подход вполне возможен, но мы пойдём по другому пути, на котором будет получена явная конструкция продолжения. Этим мы несколько усложним само определение требуемой меры, но зато облегчим доказательство её счётной аддитивности и регулярности.

Теорема 2. Пусть $f, f_n \in l_\infty(K)$, $f_n \ge 0$ и $f \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ во всех точках. Тогда $\overline{\mathcal{I}}(f) \le \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_n)$.

Доказательство. Обозначим $\sup\{f(x) : x \in K\}$ через a. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем по функции $g_n \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$, $g_n \ge f_n$ с $\mathcal{I}^*(g_n) \le \overline{\mathcal{I}}(f_n) + \varepsilon / 2^n$. Рассмотрим вспомогательные функции $s_n(x) = \min\left\{a, \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\right\}$. Поскольку $g_n \ge 0$, последовательность s_n возрастает. Далее, $s_1 \le s_n \le a$, то есть последовательность s_n равномерно ограничена. Обозначим поточечный предел последовательности s_n через s. По теореме 2 предыдущего параграфа, $s \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$ и $\mathcal{I}^*(s) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{I}^*(s_n)$. Имеем

[3] Это свойство обосновывает применение названия «верхний интеграл» и к величине $\mathcal{I}^*$.

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \min\left\{a, \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)\right\} \geq \min\left\{a, \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\right\} \geq \min\{a, f(x)\} = f(x),$$

следовательно,

$$\overline{\mathcal{I}}(f) \leq \mathcal{I}^*(s) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(s_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}^*\left(\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}^*(g_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_j) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε теорема доказана. □

8.2.4. Пространство $L(K, I)$

Зададим на $l_\infty(K)$ полунорму $p(f) = \overline{\mathcal{I}}(|f|)$. Тогда в псевдометрике $\rho(f_1, f_2) = \overline{\mathcal{I}}(|f_1 - f_2|)$, порождённой этой полунормой, $l_\infty(K)$ будет псевдометрическим пространством. Обозначим через $L(K, \mathcal{I})$ замыкание по этой псевдометрике в $l_\infty(K)$ подмножества $C(K)$ всех непрерывных функций.

Теорема 1. $L(K, \mathcal{I})$ – это замкнутое линейное подпространство в $(l_\infty(K), p)$, и $LSC(K) \bigcap l_\infty(K) \subset L(K, \mathcal{I})$.

Доказательство. Так как $C(K)$ – линейное подпространство, то и его замыкание – это линейное подпространство. В доказательстве нуждается только включение $LSC(K) \bigcap l_\infty(K) \subset L(K, \mathcal{I})$. Пусть $f \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$. По определению функционала $\mathcal{I}^*$, для любого n существует непрерывная функция $f_n < f$, для которой $\mathcal{I}^*(f - f_n) = \mathcal{I}^*(f) - \mathcal{I}(f_n) < 1/n$. Но тогда

$$\rho(f, f_n) = \overline{\mathcal{I}}(|f - f_n|) = \mathcal{I}^*(f - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть нам удалось представить f как предел последовательности непрерывных функций. □

Теорема 2. $L(K, \mathcal{I})$ обладает следующими свойствами:

(1) если $f \in L(K, \mathcal{I})$, то $|f| \in L(K, \mathcal{I})$;

(2) если $f \in L(K, \mathcal{I})$, то $f^+ \in L(K, \mathcal{I})$ и $f^- \in L(K, \mathcal{I})$;

(3) если $f, g \in L(K, \mathcal{I})$, то $\max\{f, g\} \in L(K, \mathcal{I})$ и $\min\{f, g\} \in L(K, \mathcal{I})$.

Доказательство. (1) Пусть $f_n \in C(K)$, $\overline{\mathcal{I}}(|f - f_n|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда $|f_n| \in C(K)$ и $\rho(|f|, |f_n|) = \overline{\mathcal{I}}(||f| - |f_n||) \leq \overline{\mathcal{I}}(|f - f_n|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть функция $|f|$ – это предел последовательности $|f_n| \in C(K)$, и, следовательно, $|f| \in L(K, \mathcal{I})$.

(2) Нужно воспользоваться уже доказанным пунктом (1) и формулами $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$, $f^- = (-f)^+$.

(3) Следует из (2) и формул

$$\max\{f,g\} = f + (g-f)^+, \ \min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}. \ \square$$

Следующая теорема показывает, что элементарный интеграл $\mathcal{I}$ продолжается до линейного функционала на $L(K,\mathcal{I})$, причём в качестве этого продолжения можно взять верхний интеграл.

Теорема 3. На $L(K,\mathcal{I})$ верхний интеграл $\overline{\mathcal{I}}$ – это p-непрерывный линейный функционал.

Доказательство. Для любых $f,g \in L(K,\mathcal{I})$ имеем $\left|\overline{\mathcal{I}}(f) - \overline{\mathcal{I}}(g)\right| \le \overline{\mathcal{I}}(|f-g|) = \rho(f,g)$, то есть $\overline{\mathcal{I}}$ непрерывен (даже удовлетворяет условию Липшица). Линейность следует из непрерывности и того, что на $C(K)$ (то есть на плотном подмножестве) $\overline{\mathcal{I}}$ совпадает с линейным функционалом $\mathcal{I}$, и, следовательно, на $C(K)$ верхний интеграл и сам линеен. Действительно, пусть $f,g \in L(K,\mathcal{I})$, a,b – скаляры, f_n и g_n – последовательности непрерывных функций, стремящиеся в псевдометрике ρ к f и g соответственно. Тогда

$$\overline{\mathcal{I}}(af+bg) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{I}}(af_n + bg_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(af_n + bg_n)$$
$$= a\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(f_n) + b\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(g_n) = a\overline{\mathcal{I}}(f) + b\overline{\mathcal{I}}(g). \ \square$$

Следующая теорема – это аналог теоремы Леви о рядах для верхнего интеграла на $L(K,\mathcal{I})$.

Теорема 4. Пусть $f_n \in L(K,\mathcal{I})$, $f \in l_\infty(K)$, $f_n \ge 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к f во всех точках. Тогда $f \in L(K,\mathcal{I})$ и $\overline{\mathcal{I}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_n)$.

Доказательство. Вначале докажем, что $f \in L(K,\mathcal{I})$. Обозначим $\sup\{f(x) : x \in K\}$ через a. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и приблизим каждую из функций f_n непрерывной функцией g_n с точностью до $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$: $\overline{\mathcal{I}}(|f_n - g_n|) \le \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Заменив, если нужно, g_n на ${g_n}^+$, можем считать, что все функции g_n неотрицательны. Рассмотрим функцию

$s(x)=\min\left\{a, \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)\right\}$. Функция s полунепрерывна снизу и ограничена, то есть по теореме 1, $s \in L(K, \mathcal{I})$. При этом $|s-f| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - g_n|$ во всех точках, и, по теореме 2 предыдущего параграфа, $\overline{\mathcal{I}}(|s-f|) \le \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(|f_n - g_n|) \le \varepsilon$. То есть функцию f можно с любой степенью точности приблизить по псевдометрике ρ элементами пространства $(K, \Sigma_{\mathcal{I}}, \mu_{\mathcal{I}})$, что ввиду замкнутости $L(K, \mathcal{I})$ в $l_\infty(K)$ означает, что $f \in L(K, \mathcal{I})$.

Перейдём к доказательству равенства $\overline{\mathcal{I}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_n)$. Неравенство в одну сторону $\overline{\mathcal{I}}(f) \le \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_n)$ следует из теоремы 2 предыдущего параграфа. Неравенство же в другую сторону легко вытекает из линейности верхнего интеграла на $L(K, \mathcal{I})$. Действительно, ввиду положительности слагаемых для любого натурального n выполнено неравенство $\sum_{k=1}^{n} f_k \le f$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathcal{I}}(f_k) = \overline{\mathcal{I}}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \le \overline{\mathcal{I}}(f)$. Остаётся устремить n к бесконечности. □

Следствие (аналог теоремы Леви о последовательностях). Пусть $C(K)$, $g \in l_\infty(K)$, последовательность g_n поточечно неубывает и сходится к g. Тогда $g \in L(K, \mathcal{I})$ и $\overline{\mathcal{I}}(g) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{I}}(g_n)$.

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1} - g_n)$. Частные суммы этого ряда равны $g_{n+1} - g_1$, то есть ряд сходится к $g - g_1$. Соответственно, $g - g_1 \in L(K, \mathcal{I})$, следовательно, $g = (g - g_1) + g_1 \in L(K, \mathcal{I})$ и

$$\overline{\mathcal{I}}(g) - \overline{\mathcal{I}}(g_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\mathcal{I}}(g_{k+1} - g_k) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{I}}(g_n) - \overline{\mathcal{I}}(g_1).$$

8.3. Регулярные борелевские меры и интеграл

8.3.1. $\mathcal{I}$-Измеримые множества. Мера, порожденная интегралом

Подмножество $A \subset K$ называется $\mathcal{I}$-*измеримым*, если $\mathbf{1}_A \in L(K, \mathcal{I})$. Семейство всех $\mathcal{I}$-измеримых подмножеств компакта K обозначим $\Sigma_{\mathcal{I}}$. Для каждого множества $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ положим $\mu_{\mathcal{I}}(A) = \overline{\mathcal{I}}(\mathbf{1}_A)$.

Теорема 1. Семейство $\Sigma_{\mathcal{I}}$ образует σ-алгебру, а $\mu_{\mathcal{I}}$ – это счётно-аддитивная мера на $\Sigma_{\mathcal{I}}$.

Доказательство. Будем опираться на теоремы 1-4 предыдущего параграфа. Пусть $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Тогда $\mathbf{1}_{K \setminus A} = \mathbf{1} - \mathbf{1}_A \in L(K, \mathcal{I})$, следовательно, $K \setminus A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Пусть $A, B \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Тогда $\mathbf{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} \in L(K, \mathcal{I})$, следовательно, $A \cap B \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Наконец, пусть $A_n \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ – дизъюнктная последовательность множеств, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$ сходится поточечно к $\mathbf{1}_A$. По теореме 4 предыдущего параграфа, это означает, что $\mathbf{1}_A \in L(K, \mathcal{I})$ и $\mu_{\mathcal{I}}(A) = \overline{\mathcal{I}}(\mathbf{1}_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{I}}(A_n)$. □

Теорема 2. Множество $L(K, \mathcal{I})$ совпадает с семейством всех ограниченных $\Sigma_{\mathcal{I}}$-измеримых функций и $\int_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}(f)$ для $f \in L(K, \mathcal{I})$.

Доказательство. Вначале докажем, что $L(K, \mathcal{I})$ состоит из $\Sigma_{\mathcal{I}}$-измеримых функций. Пусть $f \in L(K, \mathcal{I})$, a – произвольное вещественное число. Рассмотрим последовательность функций $g_n = \min\{n(f - a)^+, 1\}$. Эта последовательность поточечно неубывает. Если $f(t) \le a$, то $g_n(t) = 0$, если же $f(t) > 0$, то $n(f - a)^+(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$, то есть начиная с некоторого номера $g_n(t) = 1$. Другими словами, последовательность, не убывая, поточечно стремится к характеристической функции множества $f_{>a}$. Согласно аналогу теоремы Леви (следствие в конце предыдущего параграфа), эта характеристическая функция принадлежит $L(K, \mathcal{I})$, то есть $f_{>a} \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Этим доказана измеримость функции f.

Для доказательства оставшейся части утверждения обозначим через X множество тех $f \in L(K, \mathcal{I})$, для которых $\int_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}(f)$. По определению меры $\mu_{\mathcal{I}}$, характеристические функции всех множеств из $\Sigma_{\mathcal{I}}$ лежат в X. Поскольку X – линейное пространство, отсюда следует, что все конечнозначные измеримые функции (линейные комбинации характеристических функций) также лежат в X. Каждую $\Sigma_{\mathcal{I}}$-измеримую ограниченную функцию, согласно теореме об аппроксимации (следствие теоремы 3 п. 3.1.4), можно представить как поточечный (и даже равномерный) предел возрастающей последовательности конечнозначных $\Sigma_{\mathcal{I}}$-измеримых функций. Ввиду теоремы Леви и её аналога для $L(K,\mathcal{I})$, отсюда следует, что все ограниченные $\Sigma_{\mathcal{I}}$-измеримые функции принадлежат нашему множеству X. □

Теорема 3. Семейство $\Sigma_{\mathcal{I}}$ содержит в качестве элементов все борелевские подмножества компакта K, и для любого $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U, содержащее A, с $\mu_{\mathcal{I}}(U) < \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon.$

Доказательство. Поскольку характеристические функции открытых подмножеств компакта K полунепрерывны снизу, такие функции лежат в $L(K,\mathcal{I})$, следовательно, все открытые множества принадлежат $\Sigma_{\mathcal{I}}$. А поскольку $\Sigma_{\mathcal{I}}$ – σ-алгебра, то и все борелевские подмножества также принадлежат $\Sigma_{\mathcal{I}}$.

Пусть теперь A – произвольный элемент σ-алгебры $\Sigma_{\mathcal{I}}$. Воспользовавшись определением верхнего интеграла для функции $\mathbf{1}_A$ и тем, что верхний интеграл на $L(K,\mathcal{I})$ совпадает с интегралом по мере $\mu_{\mathcal{I}}$, выберем такую функцию $f \in LSC(K) \bigcap l_\infty(K)$, что $f > \mathbf{1}_A$ и $\int_K f d\mu_{\mathcal{I}} < \int_K \mathbf{1}_A d\mu_{\mathcal{I}} + \varepsilon = \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon.$ В качестве требуемого множества U возьмём множество $f_{>1}$ тех точек $t \in K$, где $f(t) > 1.$ Ввиду полунепрерывности функции f множество U открыто. Для любой точки $t \in A$ имеем $f(t) > \mathbf{1}_A(t) = 1,$ то есть $t \in U.$ Этим доказано включение $A \subset U.$ Наконец, как легко видеть, $\mathbf{1}_U \le f$ во всех точках, следовательно, $\mu_{\mathcal{I}}(U) = \int_K \mathbf{1}_U d\mu_{\mathcal{I}} \le \int_K f d\mu_{\mathcal{I}} < \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon.$ □

Перейдя к дополнениям, получаем следующее.

Следствие. Для любого $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество V, содержащееся в A, с $\mu_{\mathcal{I}}(V) > \mu_{\mathcal{I}}(A) - \varepsilon.$ Другими словами, внутренняя мера, порождённая мерой $\mu_{\mathcal{I}}$, на $\Sigma_{\mathcal{I}}$ совпадает с самой мерой $\mu_{\mathcal{I}}$.

Упражнения

1. $(K,\Sigma_{\mathcal{I}},\mu_{\mathcal{I}})$ – это полное пространство с мерой.

2. Пополнение пространства с мерой $(K, \mathfrak{B}, \mu_{\mathcal{I}})$, где $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств компакта K, совпадает с $(K, \Sigma_{\mathcal{I}}, \mu_{\mathcal{I}})$.
3. Пусть $K = [0,1]$. В качестве элементарного интеграла $\mathcal{I}$ возьмём интеграл Римана на отрезке. Проверить, что в этом случае $\Sigma_{\mathcal{I}}$ совпадает с σ-алгеброй измеримых по Лебегу подмножеств отрезка, а $\mu_{\mathcal{I}}$ – с мерой Лебега.

8.3.2. Теорема об общем виде элементарного интеграла

Будем говорить, что борелевская мера μ *порождает элементарный интеграл* $\mathcal{I}$ на $C(K)$, если $\int\limits_K f d\mu = \mathcal{I}(f)$ для всех функций $f \in C(K)$. (В обозначениях определения 2 п. 8.2.1, $\mathcal{I} = \mathbf{F}_\mu$.)

Теорема. Для любого элементарного интеграла $\mathcal{I}$ на $C(K)$ существует единственная регулярная борелевская мера μ, порождающая этот элементарный интеграл.

Доказательство. Существование требуемой меры нами фактически уже доказано: в качестве μ можно взять ограничение меры $\mu_{\mathcal{I}}$, построенной в предыдущем параграфе, на σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств. Действительно, согласно теореме 3 п. 8.3.1 и следствию из неё, мера $\mu_{\mathcal{I}}$ определена на борелевских подмножествах и регулярна, а теорема 2 того же параграфа утверждает, что равенство $\int\limits_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}(f)$ выполнено не только для непрерывных функций, но и для любых $f \in L(K, \mathcal{I})$. Поэтому главная наша задача – доказать единственность, то есть что если μ – это регулярная борелевская мера, подчиняющаяся условию теоремы, то μ совпадает с $\mu_{\mathcal{I}}$ на $\mathfrak{B}$.

Отметим вначале, что $\mu_{\mathcal{I}}(U) \geq \mu(U)$ для любого открытого множества U. Для этого воспользуемся регулярностью меры μ. Для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество V, содержащееся в U, с $\mu(V) > \mu(U) - \varepsilon$. По лемме Урысона, существует непрерывная функция f, обладающая следующими свойствами: $0 \leq f \leq 1$ всюду на K, $f(t) = 1$ на V и $f(t) = 0$ на $K \setminus U$. Имеем $\mu_{\mathcal{I}}(U) \geq \int\limits_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \int\limits_K f d\mu \geq \mu(V) \geq \mu(U) - \varepsilon$. Остаётся устремить ε к нулю.

Докажем теперь выполнение неравенства $\mu_{\mathcal{I}}(A) \geq \mu(A)$ уже для всех борелевских множеств. Для этого снова зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем открытое множество $U \supset A$ с $\mu_{\mathcal{I}}(U) < \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon$ (это возможно, согласно теореме 3 п. 8.3.1). Имеем $\mu_{\mathcal{I}}(A) \geq \mu_{\mathcal{I}}(U) - \varepsilon \geq \mu(U) - \varepsilon \geq \mu(A) - \varepsilon$, то есть ввиду произвольности ε $\mu_{\mathcal{I}}(A) \geq \mu(A)$.

Применив доказанное неравенство к дополнению множества A и воспользовавшись очевидным равенством $\mu(K) = \int_K d\mu = \int_K d\mu_{\mathcal{I}} = \mu_{\mathcal{I}}(K)$, получаем обратное неравенство:

$$\mu_{\mathcal{I}}(A) = \mu_{\mathcal{I}}(K) - \mu_{\mathcal{I}}(K \setminus A) \leq \mu(K) - \mu(K \setminus A) = \mu(A).$$

Итак, совпадение мер μ и $\mu_{\mathcal{I}}$ на борелевских множествах доказано. □

Упражнения

1. Опираясь на следствие, приведённое в конце параграфа 8.3.1, и теорему единственности докажите, что если μ – регулярная борелевская мера на компакте, то для любого $A \in \mathfrak{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество V, содержащееся в A, с $\mu(V) > \mu(A) - \varepsilon$.

2. Опираясь на теорему об общем виде борелевской меры на отрезке (п. 2.3.5), докажите следующую теорему: для любого элементарного интеграла $\mathcal{I}$ на [0,1] существует такая монотонная функция F на [0,1], что элементарный интеграл $\mathcal{I}$ выражается интегралом Стилтьеса по dF: $\mathcal{I}(f) = \int_0^1 f dF$ для всех $f \in C[0,1]$.

Степенной проблемой моментов на отрезке [0,1] называется задача нахождения по данной последовательности чисел $a_0, a_1, ...$ такой функции F на $[0,1]$, что $\int_0^1 t^n dF(t) = a_n$ для всех $n = 0,1,2,...$. Предлагаем читателю вывести из предыдущего упражнения следующий результат.

3. Для того, чтобы степенная проблема моментов для последовательности $a_0, a_1, ...$ имела решение, являющееся неубывающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы для любого неотрицательного на [0,1] полинома $b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n$ выполнялось условие $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \geq 0$.

8.3.3. Приближение измеримых функций непрерывными. Теорема Лузина

Лемма 1. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой. Тогда подмножество всех ограниченных функций плотно в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ – произвольная функция. Определим множества $A_n = \{t \in \Omega : |f|(t) < n\}$ и рассмотрим функции

$f_n = f \cdot \mathbf{1}_{A_n}$. Функции $|f_n - f| == |f| \cdot \mathbf{1}_{\Omega \setminus A_n}$ имеют общую интегрируемую мажоранту – $|f|$, поточечно стремятся к 0; следовательно, $\|f_n - f\| = \int_K |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Поскольку функции f_n ограничены ($|f_n| < n$ во всех точках), этим требуемая плотность множества ограниченных функций в L_1 доказана. □

Пусть μ – регулярная борелевская мера на компакте K. Обозначим через $\mathfrak{B}$ σ-алгебру борелевских подмножеств компакта K, а через L_1 – банахово пространство $L_1(K, \mathfrak{B}, \mu)$.

Теорема 1. Подмножество $C(K)$ непрерывных функций плотно в L_1.

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}$ – элементарный интеграл на $C(K)$, задаваемый формулой $\mathcal{I}(f) = \int_K f d\mu$. Тогда, по теореме об общем виде элементарного интеграла, доказанной в предыдущем параграфе (в части единственности), мера $\mu_{\mathcal{I}}$, порождённая интегралом $\mathcal{I}$, совпадает на $\mathfrak{B}$ с исходной мерой μ. Следовательно, для ограниченных борелевских функций $\overline{\mathcal{I}}(f) = \int_K f d\mu$ (см. теорему 2 п. 8.3.1). Соответственно, для ограниченных функций из L_1 расстояние ρ, определённое в п. 8.2.4, совпадает с расстоянием в L_1. Так как $L(K, \mathcal{I})$ было ρ-замыканием множества $C(K)$, то, по теореме 2 п. 8.3.1, замыкание множества $C(K)$ в L_1 содержит все ограниченные функции из L_1. Остаётся воспользоваться леммой 1.□

Теорема 2. Подмножество $C(K)$ непрерывных функций плотно в пространстве L_0 всех измеримых по Борелю функций на K в смысле сходимости почти всюду.

Доказательство. Используя функции $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{A_n}$ из леммы 1, так же как и в предыдущей теореме, легко показать, что L_1 плотно в L_0 в смысле сходимости почти всюду. Далее, по предыдущей теореме, $C(K)$ плотно в L_1 по норме пространства L_1. Поскольку из сходимости по норме пространства L_1 следует сходимость по мере, а из сходящейся по мере последовательности всегда можно выделить сходящуюся почти всюду подпоследовательность, $C(K)$ плотно в L_1 и в смысле сходимости почти всюду. Для завершения доказательства остаётся воспользоваться транзитивностью в этом случае отношения «плотность» (следствие 2. п. 3.2.3). □

Теорема 3 (теорема Лузина). Пусть f – измеримая по Борелю функция на K. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое борелевское подмножество $A \subset K$ с $\mu(K \setminus A) < \varepsilon,$ что ограничение функции f на подмножество A непрерывно.

Доказательство. По предыдущей теореме, существует последовательность f_n непрерывных функций, сходящаяся к f почти всюду. Воспользовавшись теоремой Егорова, выберем такое подмножество $A \subset K$ с $\mu(K \setminus A) < \varepsilon,$ на котором последовательность f_n сходится равномерно. Тогда ограничение функции f на подмножество A – это предел уже равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, то есть непрерывная функция. □

Упражнения

1. Докажите, что множество A в формулировке теоремы Лузина всегда можно выбрать замкнутым.
2. Приведите пример (на отрезке), когда множество A в формулировке теоремы Лузина нельзя выбрать открытым.

8.4. Теорема об общем виде линейного функционала в C(K)

8.4.1. Регулярные борелевские заряды

Заряд ν, заданный на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств компакта K, называется *регулярным борелевским зарядом на* K, если для любого $A \in \mathfrak{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое подмножество $C \subset A,$ что $|\nu(A) - \nu(C)| < \varepsilon.$

Отметим, что, согласно упражнению 1 п. 8.3.2, любая регулярная борелевская мера будет одновременно и регулярным борелевским зарядом. Далее, из определения следует, что линейная комбинация регулярных борелевских зарядов – снова регулярный борелевский заряд. В частности, разность двух регулярных борелевских мер будет регулярным борелевским зарядом. Следующая теорема показывает, что такими разностями исчерпываются все регулярные борелевские заряды.

Теорема. Для борелевского заряда ν на компакте K следующие условия эквивалентны:

(1) ν – регулярный борелевский заряд;
(2) ν^+ и ν^- – регулярные борелевские меры;
(3) заряд ν представим в виде разности двух регулярных борелевских мер;
(4) $|\nu|$ – регулярная борелевская мера.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Напомним, что для любого $A \in \mathfrak{B}$ величина $\nu^{+}(A)$ определяется формулой $\nu^{+}(A) = \sup\{\nu(\Delta) : \Delta \in \mathfrak{B}, \Delta \subset A\}$. То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует борелевское подмножество $\Delta \subset A$, с $\nu(\Delta) > \nu^{+}(A) - \varepsilon$. Ввиду регулярности заряда ν можно выбрать замкнутое подмножество $C \subset \Delta$ с $\nu(C) > \nu^{+}(A) - \varepsilon$. Воспользовавшись тем, что $\nu^{+}(C) \geq \nu(C)$, в итоге получаем существование замкнутого подмножества $C \subset A$ с $\nu^{+}(C) > \nu^{+}(A) - \varepsilon$, то есть регулярность меры ν^{+}. Регулярность меры ν^{-} теперь вытекает из соотношения $\nu^{-} = \nu^{+} - \nu$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\nu = \nu^{+} - \nu^{-}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\nu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 – регулярные борелевские меры. Тогда для любого $A \in \mathfrak{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутые подмножества $C_1, C_2 \subset A$, с $\mu_1(C_1) > \mu_1(A) - \varepsilon$ и $\mu_2(C_2) > \mu_2(A) - \varepsilon$. Положим $C = C_1 \bigcup C_2$. Такое C будет замкнутым подмножеством множества A, и будут иметь место неравенства $\mu_1(A) - \varepsilon < \mu_1(C) < \mu_1(A)$ и $\mu_2(A) - \varepsilon < \mu_2(C) < \mu_2(A)$. Соответственно,

$$\left|\nu(A) - \nu(C)\right| \leq \left|\mu_1(A) - \mu_1(C)\right| + \left|\mu_2(A) - \mu_2(C)\right| < 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε этим доказана регулярность заряда ν.

(2) $\Rightarrow$ (4). Достаточно воспользоваться равенством $|\nu| = \nu^{+} + \nu^{-}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A \in \mathfrak{B}$, а $C \subset A$ – такое замкнутое подмножество, что $|\nu|(A) - |\nu|(C) < \varepsilon$. Тогда $\left|\nu(A) - \nu(C)\right| = \left|\nu(A \setminus C)\right| \leq |\nu|(A \setminus C) = |\nu|(A) - |\nu|(C) < \varepsilon$. □

Упражнения

1. Пусть борелевский заряд ν абсолютно непрерывен по отношению к регулярной борелевской мере μ. Тогда ν – регулярный борелевский заряд.
2. На метрическом компакте любой борелевский заряд регулярен.
3. Пусть $M(K, \mathfrak{B})$ – пространство всех борелевских зарядов на компакте K, наделённое нормой $\|\nu\| = |\nu|(K)$. Обозначим через $M_r(K)$ множество всех регулярных борелевских зарядов на K. Докажите, что $M_r(K)$ – замкнутое линейное подпространство пространства $M(K, \mathfrak{B})$. Отсюда и из упражнения 6 п. 7.1.1 выведите, что $M_r(K)$ в норме $\|\nu\| = |\nu|(K)$ – банахово пространство.
4. Пусть компакт K несчётен. Тогда пространство $M_r(K)$ несепарабельно.

8.4.2. Формулировка теоремы Ф. Рисса – А. Маркова – С. Какутани. Теорема единственности. Примеры

Напомним, что в упражнениях п. 7.1.2 по аналогии с интегралом по мере было введено определение интеграла по заряду как предела соответствующих интегральных сумм. Чтобы не опираться на результаты вышеупомянутых упражнений и не решать их за читателя, определим интеграл по заряду сведением к интегралу по мере. Вначале отметим одно простое свойство интеграла по мере.

Теорема 1. Пусть (Ω,Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй, $\Delta\in\Sigma$, $\mu_1,\mu_2:\Sigma\to[0,+\infty)$ – счётно-аддитивные меры и $\mu_1\le\mu_2$. Тогда если функция $f:\Delta\to\mathbb{R}$ интегрируема по μ_2, то эта функция интегрируема и по μ_1.

Доказательство. Согласно теореме 2 п. 4.2.2, функция f интегрируема на множестве Δ по мере μ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение D_ε множества Δ, что соответствующие верхняя и нижняя интегральные суммы $\overline{S}_\Delta(f,D_\varepsilon,\mu)$ и $\underline{S}_\Delta(f,D_\varepsilon,\mu)$ функции f по мере μ определены и отличаются меньше чем на ε. Утверждение теоремы вытекает из неравенства

$$\left|\overline{S}_\Delta(f,D_\varepsilon,\mu_1)-\underline{S}_\Delta(f,D_\varepsilon,\mu_1)\right|\le\left|\overline{S}_\Delta(f,D_\varepsilon,\mu_2)-\underline{S}_\Delta(f,D_\varepsilon,\mu_2)\right|. \square$$

Определение 1. Пусть (Ω,Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй, ν – заряд на компакте K и f – измеримая функция на Ω. Функция f называется интегрируемой на множестве $\Delta\in\Sigma$ по заряду ν, если f интегрируема по отношению к вариации этого заряда.

Из теоремы 1 и неравенств $\nu^+\le|\nu|$, $\nu^-\le|\nu|$ следует, что если f интегрируема по ν, то f интегрируема как по ν^+, так и по ν^-.

Определение 2. Назовём *интегралом функции f по заряду ν на подмножестве* Δ величину

$$\int_\Delta f d\nu=\int_\Delta f d\nu^+-\int_\Delta f d\nu^-. \tag{1}$$

С помощью формулы (1) на интеграл по заряду легко переносятся такие основные свойства интеграла по мере, как линейность по функции, счётная аддитивность по множеству и даже теорема Лебега о мажорированной сходимости. Несколько сложнее обстоит дело с оценками интегралов: интеграл по заряду от большей из двух функций может оказаться меньше интеграла от меньшей из них. Поэтому в случае интегрирования по заряду используют неравенство

$$\left|\int_A f d\nu\right| \le \int_A |f| d|\nu|,$$
(2)

также легко вытекающее из определения:

$$\left|\int_A f d\nu\right| = \left|\int_A f d\nu^+ - \int_A f d\nu^-\right| \le \int_A |f| d\nu^+ + \int_A |f| d\nu^- = \int_A |f| d|\nu|.$$

Покажем, что данное нами сейчас определение интеграла по заряду согласуется с определением из упражнений п. 7.1.2.

Теорема 2. Если f интегрируема на множестве $\Delta \in \Sigma$ по заряду ν, то интегральные суммы этой функции стремятся по направленности разбиений к $\int\limits_\Delta f d\nu$.

Доказательство. Применим теорему Хана к заряду ν на Δ. Пусть Δ^+ и Δ^- – соответствующие множества положительности и отрицательности. Тогда мера ν^+ сосредоточена на Δ^+, а ν^- – на Δ^-. Воспользуемся определением интеграла по мере и выберем для любого $\varepsilon > 0$ такие разбиения D_1 и D_2 множеств Δ^+ и Δ^- соответственно, что любые интегральные суммы функции f на Δ^+ по разбиениям, следующим за D_1, а на Δ^- – по разбиениям, следующим за D_2, приближают соответственно $\int\limits_{\Delta^+} f d\nu^+$ и $\int\limits_{\Delta^-} f d\nu^-$ с точностью до $\varepsilon/2$. Построим разбиение D множества Δ, взяв в качестве элементов разбиения все элементы разбиений D_1 и D_2. Тогда каждая интегральная сумма s, порождённая разбиением, следующим за D, распадается на части s_1 и s_2, порождённые кусками этого разбиения, следующими за D_1 и D_2 соответственно. Следовательно,

$$\left|s - \int_\Delta f d\nu\right| \le \left|s_1 - \int_\Delta f d\nu^+\right| + \left|s_2 - \int_\Delta f d\nu^-\right| = \left|s_1 - \int_{\Delta^+} f d\nu^+\right| + \left|s_2 - \int_{\Delta^-} f d\nu^-\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает требуемую сходимость интегральных сумм к интегралу. □

Теорема 3. Интеграл по заряду линеен как функция заряда: если $\nu_1, \nu_2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ – заряды, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ – скаляры и функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ интегрируема по зарядам ν_1 и ν_2, то эта функция интегрируема и по заряду $a_1\nu_1 + a_2\nu_2$, и

$$\int_\Delta f d(a_1\nu_1 + a_2\nu_2) = a_1\int_\Delta f d\nu_1 + a_2\int_\Delta f d\nu_2. \qquad (3)$$

Доказательство. Интегрируемость вытекает из неравенства $|a_1\nu_1 + a_2\nu_2| \le |a_1| \cdot |\nu_1| + |a_2| \cdot |\nu_2|$ и теоремы 1. Равенство (3) легко получить предельным переходом из аналогичного равенства для интегральных сумм. □

В настоящем разделе нас будет интересовать частный случай борелевских зарядов и непрерывных функций на компакте K.

Определение 3. Пусть ν – борелевский заряд на компакте K. *Функционалом, порождённым зарядом* ν, будем называть отображение $\mathbf{F}_\nu : C(K) \to \mathbb{R}$, действующее по правилу $\mathbf{F}_\nu(f) = \int\limits_K f d\nu$.

Существование интеграла здесь гарантируется формулой (1) и тем, что любая ограниченная измеримая функция интегрируема по любой конечной мере (п. 4.3.3).

Утверждение 1. $\mathbf{F}_\nu$ – непрерывный линейный функционал на $C(K)$ и $\|\mathbf{F}_\nu\| \le \|\nu\|$ (здесь и в дальнейшем мы используем введённое в упражнении 3 п. 8.4.1 обозначение $\|\nu\| = |\nu|(K)$).

Доказательство. Линейность функционала $\mathbf{F}_\nu$ очевидна. Оценим его норму. Пусть $f \in C(K)$, $\|f\| = 1$. Тогда $|f(t)| \le 1$ во всех точках компакта K. Применим неравенство (2): $|\mathbf{F}_\nu(f)| = \left|\int\limits_K f d\nu\right| \le \int\limits_K |f| d|\nu| \le \int\limits_K d|\nu| = |\nu|(K) = \|\nu\|$. □

Следующее свойство ввиду его очевидности приведём без доказательства.

Утверждение 2. Пусть ν_1, ν_2 – борелевские заряды на компакте K, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathbf{F}_{a_1\nu_1 + a_2\nu_2} = a_1\mathbf{F}_{\nu_1} + a_2\mathbf{F}_{\nu_2}$. Другими словами, отображение $\nu \to \mathbf{F}_\nu$ линейно.

Утверждение 3. Пусть ν – регулярный борелевский заряд на компакте K, для которого $\mathbf{F}_\nu = 0$. Тогда ν – это нулевой заряд. Если для регулярных борелевских зарядов ν_1, ν_2 выполнено равенство $\mathbf{F}_{\nu_1} = \mathbf{F}_{\nu_2}$, то $\nu_1 = \nu_2$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}_\nu = 0$. Тогда $\int\limits_K f d\nu^+ - \int\limits_K f d\nu^- = \int\limits_K f d\nu = 0$ для любой функции $f \in C(K)$. То есть элементарные интегралы на $C(K)$, порождённыё мерами ν^+ и ν^-, совпадают. Так как ν^+ и ν^- – регулярные борелевские меры, из единственности представления в теореме об общем виде элементарного интеграла (п. 8.3.2) следует, что меры ν^+ и ν^- совпадают. Таким образом, $\nu = \nu^+ - \nu^- = 0$.

Вторая часть утверждения сводится к первой ввиду линейности отображения $\nu \to \mathbf{F}_\nu$. Действительно, если $\mathbf{F}_{\nu_1} = \mathbf{F}_{\nu_2}$, то для вспомогательного заряда $\nu = \nu_1 - \nu_2$ имеем $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{\nu_1} - \mathbf{F}_{\nu_2} = 0$. То есть $\nu = \nu_1 - \nu_2 = 0$. □

Приведенные утверждения вместе означают, что отображение $U : \nu \to \mathbf{F}_\nu$, рассматриваемое как оператор, действующий из пространства $M_r(K)$ всех регулярных борелевских зарядов на K в пространство $C(K)^*$, – это линейный непрерывный инъективный оператор с $\|U\| \le 1$. Следующую теорему можно понимать так: U – это биективная изометрия пространств $M_r(K)$ и $C(K)^*$.

Теорема 4 (об общем виде линейного функционала в *C(K)*). Для любого непрерывного линейного функционала F на $C(K)$ существует единственный регулярный борелевский заряд ν на K, порождающий этот функционал (то есть для которого $F = \mathbf{F}_\nu$). При этом $\|F\| = \|\nu\|$.

Часть утверждений сформулированной выше теоремы Ф. Рисса – А. Маркова – С. Какутани – единственность заряда ν и неравенство $\|\mathbf{F}_\nu\| \le \|\nu\|$ – нами уже доказана. Теорема существования указанного заряда будет доказана ниже в п. 8.4.3 на основе теоремы об общем виде элементарного интеграла. Идея доказательства – представить функционал F в виде разности двух элементарных интегралов. Формула для нормы будет доказана в п. 8.4.4.

Упражнения

1. Докажите следующий аналог теоремы Лебега о мажорированной сходимости: пусть функции f_n интегрируемы на множестве Δ по заряду ν, $f_n \to f$ $|\nu|$-почти всюду и существует ν-интегрируемая функция g, мажорирующая все f_n (то есть неравенство $|f_n| \le g$ выполнено $|\nu|$-почти всюду для всех $n \in \mathbb{N}$). Тогда функция f также ν-интегрируема, и $\int\limits_\Delta f d\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Delta f_n d\nu$.

2. Пусть ν_1, ν_2 – регулярные борелевские заряды и f_1, f_2 – ограниченные функции на компакте K, обладающие следующим свойством: $\int\limits_K g f_1 d\nu_1 = \int\limits_K g f_2 d\nu_2$ для любой $g \in C(K)$. Тогда равенство

$\int\limits_K gf_1 d\nu_1 = \int\limits_K gf_2 d\nu_2$ выполнено для всех ограниченных измеримых по Борелю функций g на K.

Для каждого из нижеперечисленных функционалов G_j на $C[0,1]$ (a) проверьте линейность и непрерывность, (b) вычислите норму, (c) найдите представление в виде $\mathbf{F}_\nu$, где ν – регулярный борелевский заряд на отрезке [0,1], (d) найдите вариацию полученного заряда и проверьте на этих примерах формулу $\|\mathbf{F}_\nu\| = \|\nu\|$.

3. $G_1(f) = f(0)$.
4. $G_2(f) = f(0) - f(1)$.
5. $G_3(f) = \int\limits_0^{1/2} f(t)dt$.
6. $G_4(f) = \int\limits_0^1 f(t)(t - \frac{1}{2})dt$.

8.4.3. Положительная и отрицательная части функционала $F \in C(K)^*$

Введём в рассмотрение $C^+(K) = \{f \in C(K) : f \geq 0\}$ – *положительный конус* пространства $C(K)$. Для любого $f \in C^+(K)$ через $[0, f]_c$ обозначим следующее множество функций: $[0, f]_c = \{g \in C(K) : 0 \leq g \leq f\}$.

Пусть F – непрерывный линейный функционал на $C(K)$. Определим *положительную часть* F^+ *функционала* F следующим образом: для $f \in C^+(K)$ положим

$$F^+(f) = \sup\{F(g) : g \in [0, f]_c\}; \qquad \text{(I)}$$

для произвольной же функции $f \in C(K)$ положим

$$F^+(f) = F^+(f^+) - F^+(f^-). \qquad \text{(II)}$$

Далее, определим *отрицательную часть* F^- *функционала* F равенством $F^- = F^+ - F$.

Цель следующей цепочки утверждений – доказать, что F^+ и F^- – это элементарные интегралы.

Лемма 1. Пусть $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Тогда $[0, f_1 + f_2]_c = [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$.

Доказательство. Пусть $g_1 \in [0, f_1]_c$, $g_2 \in [0, f_2]_c$, то есть $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$. Тогда $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, то есть $g_1 + g_2 \in [0, f_1 + f_2]_c$. Этим доказано включение $[0, f_1 + f_2]_c \supset [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$.

Пусть теперь $g \in [0, f_1 + f_2]_c$. Зададим вспомогательные функции g_1, g_2 равенствами $g_1 = \min\{g, f_1\}$, $g_2 = g - g_1$. Поскольку $g_1 \in [0, f_1]_c$, а $g_2 \in [0, f_2]_c$, имеем $g = g_1 + g_2 \in [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$. Этим доказано включение $[0, f_1 + f_2]_c \subset [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$. □

Лемма 2. Пусть $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Тогда $F^+(f_1 + f_2) = F^+(f_1) + F^+(f_2)$.

Доказательство. $F^+(f_1) + F^+(f_2) = \sup\{F(g_1) : g_1 \in [0, f_1]_c\} +$
$+ \sup\{F(g_2) : g_2 \in [0, f_2]_c\} = \sup\{F(g_1 + g_2) : g_1 \in [0, f_1]_c, g_2 \in [0, f_2]_c\} =$
$= \sup\{F(g) : g \in [0, f_1]_c + [0, f_2]_c\} = \sup\{F(g) : g \in [0, f_1 + f_2]_c\} = F^+(f_1 + f_2)$.
□

Лемма 3. Пусть $f \in C^+(K)$, $a \in \mathbb{R}^+$. Тогда $F^+(af) = aF^+(f)$.

Доказательство. $F^+(af) = \sup\{F(g) : g \in [0, af]_c\} =$
$= \sup\{F(ah) : h \in [0, f]_c\} = a \sup\{F(h) : h \in [0, f]_c\} = aF^+(f)$. □

Лемма 4. Пусть $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Тогда $F^+(f_1 - f_2) = F^+(f_1) - F^+(f_2)$.

Доказательство. Поскольку функция $f = f_1 - f_2$ не обязана быть положительной, для вычисления $F^+(f)$ нужно пользоваться формулой (II). Так как $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$, $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$, то, по лемме 2, $F^+(f^+) + F^+(f_2) = F^+(f_1) + F^+(f^-)$. Соответственно,

$$F^+(f_1 - f_2) = F^+(f) = F^+(f_1) - F^+(f_2) = F^+(f^+) - F^+(f^-). \ \square$$

Теорема 1. F^+ – это элементарный интеграл на $C(K)$.

Доказательство. Вначале проверим, что F^+ – это линейный функционал. Пусть $h_1, h_2 \in C(K)$ – произвольные функции. Запишем $h_1 + h_2$ в виде $(h_1^+ + h_2^+) - (h_1^- + h_2^-)$ и воспользуемся леммами 4 и 2: $F^+(h_1 + h_2) = F^+(h_1^+ + h_2^+) - F^+(h_1^- + h_2^-) = F^+(h_1^+) - F^+(h_1^-) +$
$+ F^+(h_2^+) - F^+(h_2^-) = F^+(h_1) + F^+(h_2)$. Этим доказана аддитивность функционала. Положительная однородность вытекает из леммы 3 и формулы (II): если $f \in C(K)$, $a \in \mathbb{R}^+$, то

$$F^+(af) = F^+(af^+) - F^+(af^-) = aF^+(f^+) - aF^+(f^-) = aF^+(f).$$

Возможность вынесения минуса следует из леммы 4:

$$F^+(-f) = F^+(f^- - f^+) = F^+(f^-) - F^+(f^+) = -F^+(f).$$

Для завершения доказательства осталось проверить, что на $C^+(K)$ функционал F^+ принимает только неотрицательные значения. Действительно, пусть $f \in C^+(K)$. Воспользуемся формулой (I): $F^+(f) = \sup\{F(g) : g \in [0, f]_c\} \geq F(0) = 0$. □

Теорема 2. $F^- = (-F)^+$. В частности, F^- – это элементарный интеграл на $C(K)$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы и формулы $F^- = F^+ - F$ следует, что F^- – линейный функционал. Поэтому равенство $F^-(f) = (-F)^+(f)$ достаточно проверять для $f \in C^+(K)$: на всё $C(K)$ оно распространяется по линейности. Итак, $F^-(f) = F^+(f) - F(f) =$ $= \sup\{F(g) - F(f) : g \in [0, f]_c\} = \sup\{-F(f - g) : g \in [0, f]_c\}$. Переобозначив $f - g$ через h и заметив, что условия $g \in [0, f]_c$ и $h \in [0, f]_c$ эквивалентны, получаем требуемое равенство $F^-(f) = \sup\{-F(h) : h \in [0, f]_c\} = (-F)^+(f)$. □

В качестве следствия доказанных теорем и равенства $F = F^+ - F^-$ получаем существование требуемого заряда в теореме п. 8.4.2 об общем виде линейного функционала в $C(K)$.

Следствие. Для любого непрерывного линейного функционала F на $C(K)$ существует регулярный борелевский заряд ν на K, порождающий этот функционал по правилу $F = \mathbf{F}_\nu$.

Доказательство. Поскольку F^+ и F^- – это элементарные интегралы, существуют (теорема п. 8.3.2) регулярные борелевские меры μ_1, μ_2, порождающие эти элементарные интегралы: $F^+ = \mathbf{F}_{\mu_1}$, $F^- = \mathbf{F}_{\mu_2}$. Соответственно, $F = F^+ - F^- = \mathbf{F}_{\mu_1} - \mathbf{F}_{\mu_2} = \mathbf{F}_{\mu_1 - \mu_2}$, то есть в качестве требуемого заряда ν можно взять $\mu_1 - \mu_2$. □

Замечание. Как читатель наверняка заметил, понятия положительной и отрицательной частей можно определить для многих весьма непохожих объектов: чисел, функций, зарядов, а теперь – и для функционалов. Общий поход к таким объектам лежит в русле теории полуупорядоченных пространств, векторных и нормированных решёток. Первое представление об этом полезном и глубоко разработанном направлении функционального анализа читатель может получить из учебника Л. В. Канторовича (одного из основателей данного направления) и Г. П. Акилова [К-А], гл. 10.

Упражнения

1. Проверить, что формула (II) не противоречит формуле (I), то есть, что если для положительных функций f величину $F^+(f)$ определять по формуле (I), то формула (II) будет давать тот же результат.
2. Для функций $g_1 = \min\{g, f_1\}$, $g_2 = g - g_1$ из второй части доказательства леммы 1 проверить условия $g_1 \in [0, f_1]_c$ и $g_2 \in [0, f_2]_c$.

8.4.4. Норма функционала на *C(K)*

Как и выше, будем обозначать через $\mathbf{1}$ функцию, равную тождественной единице на K. Пусть F – непрерывный линейный функционал на $C(K)$, F^+ и F^- – его положительная и отрицательная части, μ_1 и μ_2 регулярные борелевские меры, порождающие, соответственно, элементарные интегралы F^+ и F^-: $F^+(f) = \int\limits_K f d\mu_1$ и $F^-(f) = \int\limits_K f d\mu_2$ для любой функции $f \in C(K)$.

Лемма. $\|F\| = \mu_1(K) + \mu_2(K)$.

Доказательство. Вначале отметим, что

$$\mu_1(K) + \mu_2(K) = \int\limits_K d\mu_1 + \int\limits_K d\mu_2 = F^+(\mathbf{1}) + F^-(\mathbf{1}),$$

то есть в действительности нам требуется доказать равенство $\|F\| = F^+(\mathbf{1}) + F^-(\mathbf{1})$. Имеем:

$$\|F\| = \sup\{F(f) : f \in S_{C(K)}\} = \sup\{F(f^+ - f^-) : f \in S_{C(K)}\}.$$

Поскольку f^+ и f^- в этом случае принадлежат множеству $[0,\mathbf{1}]_c$, мы можем продолжить оценку следующим образом:

$$\|F\| \le \sup\{F(f_1) - F(f_2) : f_1, f_2 \in [0,\mathbf{1}]_c\} = \sup\{F(f_1) : f_1 \in [0,\mathbf{1}]_c\} +$$

$$+ \sup\{-F(f_2) : f_2 \in [0,\mathbf{1}]_c\} = F^+(\mathbf{1}) + F^-(\mathbf{1}).$$

Теперь обратная оценка. Мы уже доказали в предыдущей выкладке, что $F^+(\mathbf{1}) + F^-(\mathbf{1}) = \sup\{F(f_1 - f_2) : f_1, f_2 \in [0,\mathbf{1}]_c\}$. Поскольку в последнем выражении $-1 \le f_1 - f_2 \le 1$, то $\|f_1 - f_2\| \le 1$ и $F(f_1 - f_2) \le \|F\|$, то есть $F^+(\mathbf{1}) + F^-(\mathbf{1}) \le \|F\|$. □

Для изучаемого функционала F ведём в рассмотрение заряд $\nu = \mu_1 - \mu_2$. Тогда $F = \mathbf{F}_\nu$.

Теорема. $\|F\| = \|\nu\|$.

Доказательство. Оценка $\|F\| \le \|\nu\|$ была доказана в утверждении 1 п. 8.4.2. Докажем обратное неравенство. Поскольку меры μ_1 и μ_2 принимают только неотрицательные значения, для любого борелевского множества $\Delta \subset K$ имеем $\nu(\Delta) = \mu_1(\Delta) - \mu_2(\Delta) \le \mu_1(\Delta) \le \mu_1(K)$. Следовательно,

$$\nu^+(K) = \sup\{\nu(\Delta) : \Delta \in \mathfrak{B}\} \le \mu_1(K).$$

Аналогично, $\nu^-(K) \le \mu_2(K)$. Остаётся воспользоваться предыдущей леммой: $\|F\| = \mu_1(K) + \mu_2(K) \ge \nu^+(K) + \nu^-(K) = \|\nu\|$. □

Последнее утверждение завершает собой доказательство теоремы об общем виде линейного функционала в $C(K)$, сформулированной в п. 8.4.2. Так как эта теорема устанавливает изоморфизм (называемый каноническим изоморфизмом) пространств $C(K)^*$ и $M_r(K)$, её часто записывают в виде условного равенства $C(K)^* = M_r(K)$.

Упражнения

1. Проверьте, что $\overline{B}_{C(K)} = [0,\mathbf{1}]_c - [0,\mathbf{1}]_c$. Отсюда выведите доказанное выше равенство $\|F\| = F^+(\mathbf{1}) + F^-(\mathbf{1})$.
2. $\|F\| = \|F^+\| + \|F^-\|$.
3. Для любого (не обязательно регулярного) борелевского заряда ν на K рассмотрим элементарный интеграл $\mathbf{F}_\nu$, порождённый зарядом ν. По элементарному интегралу $\mathbf{F}_\nu$, построим регулярный борелевский заряд $P(\nu)$, для которого $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{P(\nu)}$. Докажите, что так определённое отображение P – это проектор пространства $M(K,\mathfrak{B})$ на подпространство $M_r(K)$ (см. упражнение 3 п. 8.4.1). Докажите, что $\|P\| = 1$.
4. На примере пространства $C[0,1]$ убедитесь, что сопряжённое пространство к сепарабельному банахову пространству может быть несепарабельным.
5. Пусть σ – регулярный борелевский заряд на K и g – интегрируемая по σ функция на K. Зададим функционал $F \in C(K)^*$ формулой $F(f) = \int_K fg\,d\sigma$. Как записать этот функционал в виде, указанном в теореме об общем виде линейного функционала в $C(K)$? Докажите равенство $\|F\| = \int_K |g|\,d|\sigma|$.

8.4.5. Комплексные заряды и интеграл

В настоящем параграфе мы обратимся к интегрированию комплекснозначных функций по комплекснозначным же зарядам. Те утверждения, где, на наш взгляд, отличие с вещественным случаем несущественно, мы будем только формулировать, оставляя доказательства читателю.

Определение 1. Пусть (Ω,Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй. Комплекснозначная функция множества $\eta:\Sigma\to\mathbb{C}$ называется *комплексным зарядом* на Ω, если она подчиняется условию счётной аддитивности. Для комплексного заряда η определим естественным образом вещественные заряды $\mathrm{Re}\,\eta$ и $\mathrm{Im}\,\eta$: $(\mathrm{Re}\,\eta)(\Delta)=\mathrm{Re}(\eta(\Delta))$ и $(\mathrm{Im}\,\eta)(\Delta)=\mathrm{Im}(\eta(\Delta))$ для всех $\Delta\in\Sigma$. Тогда

$$\eta=\mathrm{Re}\,\eta+i\,\mathrm{Im}\,\eta. \qquad (*)$$

Определение 2. Вариацией комплексного заряда η на множестве $\Delta\in\Sigma$ называется величина $|\eta|(\Delta)$, определяемая как супремум сумм вида $\sum_{k=1}^{n}|\eta(\Delta_k)|$, где супремум берётся по всем конечным наборам $\{\Delta_k\}_1^n$ попарно не пересекающихся измеримых подмножеств множества Δ.

Теорема 1. Для вещественного заряда значение вариации, вычисленное по определению 2, совпадает со значением, вычисленным по правилу $|\eta|(\Delta)=\eta^+(\Delta)+\eta^-(\Delta)$. Другими словами, новое определение вариации согласуется с ранее известным. □

Теорема 2. Вариация комплексного заряда η обладает следующими свойствами:

(i) $|\eta(\Delta)|\le|\eta|(\Delta)$;

(ii) $\max\{|\mathrm{Re}\,\eta|(\Delta),|\mathrm{Im}\,\eta|(\Delta)\}\le|\eta|(\Delta)\le|\mathrm{Re}\,\eta|(\Delta)+|\mathrm{Im}\,\eta|(\Delta)$;

(iii) $|\eta|$ – это конечная счётно-аддитивная мера на Ω. □

Так же, как и в случае мер, определим допустимые разбиения (такие, что $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k}\left[|f(t)|\cdot|\nu|(\Delta_k)\right]<\infty$) и интегральные суммы комплексной функции f по комплексному заряду ν: $S_A(f,D,T,\nu)=\sum_{k=1}^{\infty}f(t_k)\nu(\Delta_k)$. Интегрируемость и интеграл функции по заряду также определим через предел интегральных сумм по измельчению разбиений.

Теорема 3. Интеграл комплекснозначной функции по комплексному заряду линейно зависит от функции при фиксированном заряде и линейно зависит от заряда при фиксированной функции:

$$\int_\Delta f\,d(a_1\eta_1+a_2\eta_2)=a_1\int_\Delta f\,d\eta_1+a_2\int_\Delta f\,d\eta_2,$$

$$\int_\Delta (a_1f_1+a_2f_2)\,d\eta=a_1\int_\Delta f_1\,d\eta+a_2\int_\Delta f_2\,d\eta,$$

причём из существования интегралов в правой части равенств следует их существование в левой части. □

Теорема 4. Измеримая функция f будет интегрируемой на множестве Δ по комплексному заряду η в том и только том случае, если существует $\int\limits_\Delta |f|\, d|\eta|$. При этом $\left|\int\limits_\Delta f\, d\eta\right| \le \int\limits_\Delta |f|\, d|\eta|$.

Доказательство. Если для измеримой функции существует $\int\limits_\Delta |f|\, d|\eta|$, то ввиду неравенств $|\mathrm{Im}\,\eta|(\Delta) \le |\eta|(\Delta)$, $|\mathrm{Re}\,\eta|(\Delta) \le |\eta|(\Delta)$ будут существовать и следующие 4 вещественных интеграла: $\int\limits_\Delta \mathrm{Re}\, f\, d\,\mathrm{Re}\,\eta$, $\int\limits_\Delta \mathrm{Re}\, f\, d\,\mathrm{Im}\,\eta$, $\int\limits_\Delta \mathrm{Im}\, f\, d\,\mathrm{Re}\,\eta$ и $\int\limits_\Delta \mathrm{Im}\, f\, d\,\mathrm{Im}\,\eta$. Воспользовавшись линейностью (предыдущая теорема), из этих интегралов можно скомбинировать $\int\limits_\Delta f\, d\eta$.

Обратно, из существования $\int\limits_\Delta f\, d\eta$ следует существование допустимого разбиения D для f по ν. Это разбиение будет допустимым и для $|f|$ по $|\nu|$, что ввиду измеримости функции $|f|$ и упражнения 2 п. 4.3.3 будет означать существование интеграла $\int\limits_\Delta |f|\, d|\eta|$.

Наконец, неравенство $\left|\int\limits_\Delta f\, d\eta\right| \le \int\limits_\Delta |f|\, d|\eta|$ получается предельным переходом из соответствующего неравенства для интегральных сумм. □

С помощью формулы (*) основные понятия и результаты, связанные с вещественными зарядами (скажем, критерий абсолютной непрерывности и теорема Радона–Никодима из раздела 7.1), легко переносятся на случай комплексных зарядов. Также отделением вещественной и мнимой частей легко распространить на комплексный случай такие свойства интеграла, как счётная аддитивность по множеству и теорема Лебега о мажорированной сходимости.

8.4.6. Регулярные комплексные заряды и функционалы в комплексном *C(K)*

Определение 1. *Комплексным борелевским зарядом* на компакте K называется комплексный заряд, заданный на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств компакта K. Комплексный борелевский заряд η на компакте K называется *регулярным*, если $|\eta|$ – регулярная борелевская мера.

Из свойства (ii) теоремы 2 п. 8.4.5 и упражнения 1 п. 8.4.1 следует, что комплексный борелевский заряд η на компакте K будет регулярным в том и только том случае, если регулярны вещественные заряды $\mathrm{Re}\eta$ и $\mathrm{Im}\eta$.

Перейдём к рассмотрению линейных функционалов на комплексном $C(K)$ – пространстве всех комплекснозначных непрерывных функций на K.

Определение 2. Пусть η – борелевский заряд на компакте K. *Функционалом, порождённым зарядом* η, будем называть отображение $\mathbf{F}_\eta : C(K) \to \mathbb{C}$, действующее по правилу $\mathbf{F}_\eta(f) = \int\limits_K f d\eta$.

Существование интеграла здесь гарантируется теоремой 4 предыдущего параграфа и критерием интегрируемости измеримой вещественной функции (п. 4.3.3).

Как и в вещественном случае, для комплексных борелевских зарядов на компакте K будем использовать обозначение $\|\eta\| = |\eta|(K)$.

Теорема 1. $\mathbf{F}_\eta$ – непрерывный линейный функционал на $C(K)$ и $\|\mathbf{F}_\eta\| \le \|\eta\|$. Более того, если заряд η регулярен, то $\|\mathbf{F}_\eta\| = \|\eta\|$.

Доказательство. Линейность функционала $\mathbf{F}_\nu$ очевидна. Оценка нормы сверху, как и для вещественного варианта, вытекает из неравенства $\left|\int\limits_K f\, d\eta\right| \le \int\limits_K |f|\, d|\eta|$. Осталось доказать в случае регулярного заряда оценку $\|\mathbf{F}_\eta\| \ge \|\eta\|$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению вариации, существует такой конечный набор $\{\Delta_k\}_1^n$ попарно не пересекающихся борелевских подмножеств компакта K, что $\sum\limits_{k=1}^n |\eta(\Delta_k)| > |\eta|(K) - \varepsilon$. Ввиду регулярности заряда можем не ограничивая общности считать все множества Δ_k замкнутыми: если это не так, их можно заменить меньшими замкнутыми множествами, имеющими примерно такой же заряд. Рассмотрим множество $K_1 = \bigcup\limits_{k=1}^n \Delta_k$. Множество K_1 замкнуто, и

$$|\eta|(K \setminus K_1) = |\eta|(K) - |\eta|(K_1) \le |\eta|(K) - \sum_{k=1}^{n} |\eta(\Delta_k)| < \varepsilon.$$

Зададим на K_1 функцию f, принимающую на каждом из Δ_k постоянное значение $\alpha_k = e^{-i \arg \eta(\Delta_k)}$. Так как множества Δ_k попарно не пересекаются, кусочно-постоянная функция f непрерывна на K_1. Продолжим f до непрерывной функции на всём K с сохранением условия $|f| \le 1$. Тогда $f \in S_{C(K)}$ и

$$\|\mathbf{F}_\eta\| \ge |\mathbf{F}_\eta(f)| = \left|\int_K f d\eta\right| \ge \left|\int_{K_1} f d\eta\right| - \varepsilon = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta(\Delta_k)\right| - \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} |\eta(\Delta_k)| - \varepsilon \ge \|\eta\| - 2\varepsilon.$$

Устремив ε к нулю, получим требуемую оценку. □

Формулировка теоремы об общем виде линейного функционала в комплексном $C(K)$ дословно повторяет вещественный вариант, и доказательство может быть получено сведением к вещественному случаю.

Теорема 2. Для любого непрерывного линейного функционала F на комплексном $C(K)$ существует единственный регулярный комплексный борелевский заряд η на K, порождающий этот функционал (то есть для которого $F = \mathbf{F}_\eta$). При этом $\|F\| = \|\eta\|$.

Доказательство. Формула $\|\mathbf{F}_\eta\| = \|\eta\|$ уже доказана. Из неё следует инъективность отображения $\eta \to \mathbf{F}_\eta$ на пространстве регулярных комплексных борелевских зарядов, то есть единственность заряда η в условиях теоремы. Осталось доказать существование требуемого заряда.

Рассмотрим пространство $C_{\mathbb{R}}(K)$ вещественных непрерывных функций на K как подмножество комплексного $C(K)$. Зададим на $C_{\mathbb{R}}(K)$ два вещественных линейных функционала F_1 и F_2 формулами $F_1(f) = \operatorname{Re} F(f)$ и $F_2(f) = \operatorname{Im} F(f)$. По вещественной версии теоремы об общем виде линейного функционала в $C(K)$, применённой к F_1 и F_2, существуют такие регулярные вещественные борелевские заряды ν_1, ν_2, что для любой функции $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ имеют место равенства $F_1(f) = \int_K f d\nu_1$ и $F_2(f) = \int_K f d\nu_2$. Подставив эти равенства в формулу $F(f) = F_1(f) + iF_2(f)$ и введя обозначение $\eta = \nu_1 + i\nu_2$, получим равенство $F(f) = \int_K f d\eta$, выполняющееся для всех $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$. Поскольку обе части последнего соотношения линейно зависят от f, соотношение легко распространяется и на комплексные функции вида $f = f_1 + if_2$, где $f_1, f_2 \in C_{\mathbb{R}}(K)$. Таким образом, равенство $F(f) = \int_K f d\eta$ выполнено на всём комплексном $C(K)$, и, следовательно, η – это тот заряд, существование которого мы должны были доказать. □

Замечание. Обращаем внимание читателя, что рассуждение из теоремы 1 даёт прямое доказательство равенства $\|\mathbf{F}_\eta\| = \|\eta\|$ и для вещественных зарядов.

Упражнения

1. В доказательстве теоремы 1 присутствует следующая фраза: «Продолжим f до непрерывной функции на всём K с сохранением условия $|f| \le 1$». Почему такое продолжение возможно?
2. Докажите следующий, исторически первый вариант теоремы об общем виде линейного функционала в $C[0,1]$. **Теорема Ф. Рисса** – для любого линейного функционала $F \in C[0,1]^*$ существует такая функция ограниченной вариации $\widetilde{F}$ на $[0,1]$ с $V_0^1(\widetilde{F}) = \|F\|$, что функционал F выражается интегралом Стилтьеса по $d\widetilde{F}$: $F(f) = \int_0^1 f d\widetilde{F}$ для всех $f \in C[0,1]$.
3. Определяется ли в вышеприведенной теореме Ф. Рисса функция $\widetilde{F}$ функционалом F однозначно?
4. Уточните теорему Ф. Рисса следующим образом: функцию $\widetilde{F}$ можно выбрать в классе непрерывных справа на $(0,1]$ функций, равных 0 в нуле, и в этом классе $\widetilde{F}$ определяется по F однозначно.
5. Решите комплексный вариант упражнения 2 п. 8.4.2.
6. Решите комплексный вариант упражнения 5 п. 8.4.4.

8.5. Комментарии к упражнениям

Параграф 8.4.2

Упражнение 2. Для доказательства нужно выбрать меру $\mu = |\nu_1| + |\nu_2|$, мажорирующую оба входящих в формулу заряда; представить борелевскую функцию g как предел μ - почти всюду сходящейся равномерно ограниченной последовательности g_n непрерывных функций и применить теорему о мажорированной сходимости.

Параграф 8.4.4

Упражнение 5. Требуемый заряд ν, для которого $F = \mathbf{F}_\nu$, определяется так: $\nu(\Delta) = \int_\Delta g d\sigma$ (обоснование аналогично комментарию к упражнению 2 п. 7.1.6). Для доказательства формулы $\|\nu\| = \int_K |g| d|\sigma|$ нужно выразить множества K_ν^+ и K_ν^- положительности и отрицательности заряда ν через множества K_σ^+ и K_σ^- положительности и отрицательности заряда σ: $K_\nu^+ = \left(K_\sigma^+ \cap g_{>0}\right) \cup \left(K_\sigma^- \cap g_{\le 0}\right)$, $K_\nu^- = \left(K_\sigma^+ \cap g_{\le 0}\right) \cup \left(K_\sigma^- \cap g_{>0}\right)$ и воспользоваться равенством $|\nu|(K) = \nu(K_\nu^+) - \nu(K_\nu^-)$.

Параграф 8.4.6

Упражнения 1-3. Воспользоваться теоремой об общем виде борелевского заряда на отрезке (п. 7.2.3): $\widetilde{F}$ следует положить равной в нуле нулю, а в остальных точках отрезка положить $\widetilde{F}$ равной функции распределения борелевского заряда, порождающего функционал F. Прямое доказательство теоремы Ф. Рисса см. в учебнике Колмогорова–Фомина [K-F], гл. IV. Там же можно найти определение и основные свойства интеграла Стилтьеса, равно как и обсуждение вопроса единственности функции $\widetilde{F}$. Правда, терминология в [K-F] не во всём совпадает с принятой в настоящем учебнике (например, функцию распределения мы определяем несколько иначе).

9. Линейные непрерывные функционалы

9.1. Терема Хана – Банаха в нормированных пространствах

Доказанная в п. 5.4.3 теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала носит чрезвычайно общий характер и применима к любому вещественному линейному пространству. В частности, ею можно пользоваться и в нормированных пространствах. Однако при таком применении требуются два уточнения. Во-первых, в нормированных пространствах среди всех линейных функционалов наибольший интерес представляют непрерывные функционалы. Соответственно, и продолжать их хотелось бы с сохранением непрерывности. Во-вторых, желательно иметь вариант теоремы, подходящий в равной степени как для вещественных, так и для комплексных пространств.

9.1.1. Связь между вещественными и комплексными функционалами

Пусть X – комплексное линейное пространство, то есть в X определено умножение на комплексные скаляры. Тогда, в частности, в X определено умножение и на вещественные числа, то есть X можно рассматривать и как вещественное пространство. Соответственно, на X можно говорить о двух типах линейных функционалов. А именно, функционал f на X называется *вещественным линейным функционалом*, если f принимает вещественные значения, аддитивен (то есть $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для любых $x, y \in X$) и *вещественно-однороден* ($f(\lambda x)=\lambda f(x)$ для любых $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$), и *комплексным линейным функционалом*, если f принимает комплексные значения, аддитивен и *комплексно-однороден* ($f(\lambda x)=\lambda f(x)$ для любых $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Для любого комплексного линейного функционала f определим естественным образом его вещественную и мнимую части: $(\operatorname{Re} f)x=\operatorname{Re}(f(x))$, $(\operatorname{Im} f)x=\operatorname{Im}(f(x))$. При таком определении $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ – это вещественные функционалы, и $f=\operatorname{Re} f+i\operatorname{Im} f$. Следующие две теоремы описывают исчерпывающим образом связь между вещественной и мнимой частями комплексного линейного функционала.

Теорема 1. Пусть f – комплексный линейный функционал на X. Тогда для любого $x \in X$ выполнено соотношение $\operatorname{Im} f(x)=-\operatorname{Re} f(ix)$.

Доказательство. В равенство $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ подставим $\lambda=i$ и вычислим вещественные части. Имеем $\operatorname{Re} f(ix)=\operatorname{Re}(if(x))=-\operatorname{Im} f(x)$. □

Теорема 2. Пусть g – вещественный линейный функционал на X. Тогда функционал f, задаваемый равенством $f(x) = g(x) - ig(ix)$, будет комплексным линейным функционалом.

Доказательство. Аддитивность функционала f и его вещественная однородность очевидны. Проверим комплексную однородность. Вначале отметим, что $f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i\big(g(x) - ig(ix)\big) = if(x)$. Пусть теперь $\lambda = a + ib$ – произвольное комплексное число. Имеем

$$f\big((a+ib)x\big) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = (a+ib)f(x). \ \square$$

Теоремы 1 и 2 означают, что соответствие $f \to \operatorname{Re} f$ между комплексными и вещественными функционалами биективно. В случае нормированного пространства X можно сказать больше.

Теорема 3. Пусть X – комплексное нормированное пространство, f – непрерывный комплексный линейный функционал на X. Тогда $\|f\| = \|\operatorname{Re} f\|$.

Доказательство. Введём обозначение $\boldsymbol{C}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Воспользуемся определением нормы функционала и тем, что множество произведений $\{\lambda x : x \in S_X,\ \lambda \in \boldsymbol{C}_1\}$ совпадает с S_X:

$$\|\operatorname{Re} f\| = \sup_{x \in S_X} |\operatorname{Re} f(x)| = \sup_{x \in S_X, \lambda \in \boldsymbol{C}_1} |\operatorname{Re} f(\lambda x)| = \sup_{x \in S_X}\left(\sup_{\lambda \in \boldsymbol{C}_1} |\operatorname{Re} \lambda f(x)|\right). \qquad (*)$$

При фиксированном x множество чисел вида $\{\lambda f(x) : \lambda \in \boldsymbol{C}_1\}$ образует окружность радиуса $|f(x)|$ с центром в нуле. Вещественные части этих чисел заполняют отрезок от $-|f(x)|$ до $|f(x)|$. Соответственно, $\sup\limits_{\lambda \in \boldsymbol{C}_1} |\operatorname{Re} \lambda f(x)| = |f(x)|$. Подставив это соотношение в (*), получаем: $\|\operatorname{Re} f\| = \sup\limits_{x \in S_X} |f(x)| = \|f\|$. $\square$

9.1.2. Теорема Хана – Банаха о продолжении

Теорема. Пусть Y – подпространство нормированного пространства X, $f \in Y^*$. Тогда существует такой функционал $\widetilde{f} \in X^*$, что $\widetilde{f}(y) = f(y)$ для всех $y \in Y$ и $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. Другими словами, любой непрерывный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, продолжается на всё пространство с сохранением нормы.

Доказательство. Формулировка теоремы включает в себя как вещественный, так и комплексный случай, но в доказательстве эти два случая мы вынуждены рассматривать отдельно. Начнём с вещественного случая. Определим на X выпуклый функционал p формулой $p(x)=\|f\|\cdot\|x\|$. При таком определении функционал f подчиняется условию мажорации: $f(y)\le p(y)$ для любого $y\in Y$. Воспользуемся теоремой Хана – Банаха в аналитической форме из п. 5.4.3. Пусть $\widetilde{f}$ – продолжение функционала f на всё X с сохранением условия мажорации. Пусть $x\in X$ – произвольный элемент. Применив условие мажорации к элементам x и $-x$, получаем два неравенства: $\widetilde{f}(x)\le p(x)$ и $-\widetilde{f}(x)\le p(x)$. Это означает, что $\left|\widetilde{f}(x)\right|\le p(x)=\|f\|\cdot\|x\|$ для любого $x\in X$. То есть $\|\widetilde{f}\|\le\|f\|$, и, следовательно, f непрерывен. Обратное неравенство $\|\widetilde{f}\|\ge\|f\|$ следует из того, что функционал $\widetilde{f}$ – это продолжение функционала f:

$$\|\widetilde{f}\|=\sup_{x\in S_X}\|\widetilde{f}(x)\|\ge\sup_{x\in S_Y}\|\widetilde{f}(x)\|=\sup_{x\in S_Y}\|f(x)\|=\|f\|.$$

Рассмотрим теперь комплексный случай. Пусть X – комплексное нормированное пространство, f – непрерывный комплексный линейный функционал на Y. Тогда $g=\operatorname{Re}f$ будет уже вещественным функционалом, и, по только что доказанному утверждению, существует такой вещественный функционал $\widetilde{g}$ на X, что $\widetilde{g}(y)=g(y)$ для всех $y\in Y$ и $\|\widetilde{g}\|=\|g\|$. Требуемый функционал $\widetilde{f}$ определим равенством $\widetilde{f}(x)=\widetilde{g}(x)-i\widetilde{g}(ix)$. Согласно теореме 2 предыдущего параграфа 9.1.1, $\widetilde{f}$ будет комплексным линейным функционалом. Далее, для любого $y\in Y$, согласно теореме 1 предыдущего параграфа, $\operatorname{Im}f(y)=-\operatorname{Re}f(iy)=-g(iy)$. Следовательно,

$$\widetilde{f}(y)=\widetilde{g}(y)-i\widetilde{g}(iy)=g(y)-ig(iy)=f(y).$$

Наконец, по теореме 3 параграфа 9.1.1, $\|\widetilde{f}\|=\|\widetilde{g}\|=\|g\|=\|f\|$. □

9.1.3. Упражнения

1. Пусть X – нормированное пространство, f – линейный функционал на X, $A=\{x\in X: f(x)=1\}$. Докажите, что $\rho(0,A)=\|f\|^{-1}$. В частности, если $\rho(0,A)\neq 0$, то функционал f непрерывен.

2. Пусть X – нормированное пространство, $x\in X$, $f\in X^*$, a – произвольный скаляр, $A=\{x\in X: f(x)=a\}$. Тогда $\rho(x,A)=\dfrac{|f(x)-a|}{\|f\|}$.

3. Для ненулевого линейного функционала f, заданного на нормированном пространстве X, следующие условия эквивалентны:

– функционал f непрерывен;
– ядро функционала f замкнуто;
– ядро функционала f не плотно в X.

4. Пусть $1 \le p < \infty$. Обозначим через $C_p[a,b]$ подпространство нормированного пространства $L_p[a,b]$, состоящее из всех непрерывных функций на $[a,b]$. Пусть $t_0 \in [a,b]$ – фиксированная точка. Докажите, что линейный функционал δ_{t_0} на $C_p[a,b]$, действующий по правилу $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$, разрывен. Отсюда и из предыдущего упражнения выведите плотность в $C_p[a,b]$ подмножества функций, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$.
5. Решите упражнение 7 п. 6.2.2: при $1 \le p < \infty$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$ плотно в $L_p[0,1]$.
6. Назовём множество $\Delta \in [a,b]$ «очень маленьким», если подпространство V_Δ пространства $C_p[a,b]$, состоящее из функций, обращающихся в тождественный 0 на Δ, плотно в $C_p[a,b]$. Докажите, что множество Δ будет «очень маленьким» в том и только том случае, если его замыкание имеет меру 0.

9.2. Некоторые приложения

9.2.1. Опорный функционал

Пусть X – нормированное пространство, $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Функционал $f_0 \in X^*$ называется *опорным функционалом в точке* x_0, если $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

Теорема 1. Для любой точки $x_0 \in X \setminus \{0\}$ существует опорный в этой точке функционал.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $Y = \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Это одномерное пространство, и x_0 – базис пространства Y. Зададим на Y линейный функционал f таким образом, что $f(x_0) = \|x_0\|$. Другими словами, для любого $y = \lambda x_0 \in Y$ положим $f(y) = \lambda \|x_0\|$. Вычислим норму функционала f. Если $y = \lambda x_0 \in S_Y$, то $|\lambda| \|x_0\| = 1$. Соответственно,

$$\|f\| = \sup_{\lambda x_0 \in S_Y} |f(\lambda x_0)| = \sup_{\lambda x_0 \in S_Y} |\lambda| \|x_0\| = 1.$$

Воспользуемся теоремой Хана – Банаха из предыдущего параграфа и продолжим функционал f до функционала $f_0 \in X^*$ с сохранением нормы.

Полученное продолжение и будет опорным функционалом: $\|f_0\| = \|f\| = 1$ и $f_0(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Следствие 1. Если X – нормированное пространство и $X \neq \{0\}$, то и $X^* \neq \{0\}$.

Напомним некоторые факты из линейной алгебры. Если X – конечномерное линейное пространство, X' – пространство всех линейных функционалов на X, то $\dim X' = \dim X$. Если $E \subset X'$ – подпространство и $E \neq X'$, то существует элемент $x_0 \in X \setminus \{0\}$, который аннулируется всеми функционалами из E: $\forall f \in E \;\; f(x_0) = 0$ (последний факт в эквивалентной формулировке звучит так: если в системе линейных однородных уравнений неизвестных больше чем уравнений, то система имеет ненулевое решение).

Следствие 2. На конечномерном нормированном пространстве любой линейный функционал непрерывен.

Доказательство. Пусть X – конечномерное нормированное пространство. Рассмотрим пространство X^* непрерывных линейных функционалов на X как линейное подпространство пространства X' всех линейных функционалов на X. Предположим, что $X^* \neq X'$. Тогда существует такой $x_0 \in X \setminus \{0\}$, что $f(x_0) = 0$ для любого $f \in X^*$. Значит, для этого элемента x_0 не существует опорного функционала. Противоречие с теоремой 1. □

Теорема 2. Пусть X, E – нормированные пространства и X конечномерно. Тогда любой линейный оператор T, действующий из X в E, непрерывен.

Доказательство. Выберем в X базис $\{x_k\}_{k=1}^n$. Для каждого $x \in X$ обозначим через $\{x_k^*(x)\}_{k=1}^n$ коэффициенты разложения элемента x по базису $\{x_k\}_{k=1}^n$: $x = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x_k$. Проверим, что x_k^* – линейные функционалы. Действительно, для любых $x, y \in X$ и любых скаляров a, b имеем:

$$\sum_{k=1}^n \left(a x_k^*(x) + b x_k^*(y)\right) x_k = a \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^*(y) x_k = ax + by = \sum_{k=1}^n x_k^*(ax + by) x_k.$$

Ввиду единственности разложения по базису это означает, что $ax_k^*(x)+bx_k^*(y)=x_k^*(ax+by)$, то есть линейность доказана. По предыдущему следствию, $x_k^*\in X^*$, $k=1,2,...,n$. Воспользовавшись линейностью оператора T и неравенством треугольника, для любого $x\in X$ получим оценку:

$$\|Tx\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k^*(x)Tx_k\right\|\le\sum_{k=1}^{n}\left|x_k^*(x)\right|\cdot\|Tx_k\|\le\sum_{k=1}^{n}\left\|x_k^*\right\|\cdot\|Tx_k\|\cdot\|x\|,$$

то есть $\|T\|\le\sum_{k=1}^{n}\left\|x_k^*\right\|\cdot\|Tx_k\|<\infty$. □

Упражнения

1. На любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.
2. Рассмотрим $l_1^{(2)}$ – двумерный аналог пространства l_1. То есть $l_1^{(2)}$ – это пространство векторов $\bar{x}=(x_1,x_2)$, наделённое нормой $\|\bar{x}\|=|x_1|+|x_2|$. Докажите, что опорный функционал в точке $\bar{x}_0=(1,0)$ не единственен. Опишите все опорные функционалы в этой точке.
3. Рассмотрим в качестве нормированного пространства X пространство $\mathbb{R}^2$, наделённое какой-то нормой. Единичная сфера этой нормы – это выпуклая замкнутая кривая γ в $\mathbb{R}^2$. Докажите эквивалентность следующих условий: 1) в каждой ненулевой точке пространства X существует единственный опорный функционал; 2) кривая γ в каждой своей точке имеет единственную касательную прямую.

9.2.2. Аннулятор подпространства

Пусть A – подмножество нормированного пространства X. *Аннулятором подмножества* A называется множество функционалов

$$A^{\perp}=\{f\in X^*: f(y)=0\text{ для всех }y\in A\}.$$

Теорема 1. $A^{\perp}$ – замкнутое подпространство пространства X^*.

Доказательство. Пусть $f_1,f_2\in A^{\perp}$. Тогда для любого $y\in A$ и любых скаляров λ_1,λ_2 имеем $(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(y)=\lambda_1f_1(y)+\lambda_2f_2(y)=0$, то есть $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2\in A^{\perp}$. Линейность доказана, проверим замкнутость. Пусть $f_1,f_2,f_3,...\in A^{\perp}$, $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$, $y\in A$. Тогда

$$|f(y)|=|f(y)-f_n(y)|=|(f-f_n)(y)|\le\|f-f_n\|\cdot\|y\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

и, следовательно, $f\in A^{\perp}$. Таким образом, предел функционалов из $A^{\perp}$ снова лежит в $A^{\perp}$. □

Отметим простейшие свойства аннуляторов.

Теорема 2. 1) Если $A \subset B$, то $A^{\perp} \supset B^{\perp}$. 2) $A^{\perp} = (\operatorname{Lin} A)^{\perp}$. 3) Пусть $\overline{B}$ – замыкание множества B. Тогда $\left(\overline{B}\right)^{\perp} = B^{\perp}$. 4) $A^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{Lin} A}\right)^{\perp}$.

Доказательство. 1) Если $f \in B^{\perp}$, то f аннулирует все элементы множества B, а значит, и все элементы множества A.

2) Включение $A^{\perp} \supset (\operatorname{Lin} A)^{\perp}$ следует из первого свойства. Докажем обратное включение. Пусть $f \in A^{\perp}$, а $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ – произвольная линейная комбинация элементов множества A. Тогда $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0$. Следовательно, $f \in (\operatorname{Lin} A)^{\perp}$.

3) Если функционал f обращается в ноль на всём множестве B и непрерывен, то f обращается в ноль и на $\overline{B}$. То есть $\left(\overline{B}\right)^{\perp} \supset B^{\perp}$. Обратное включение следует из первого свойства.

4) Это свойство вытекает из свойств 2) и 3). □

Теорема 3. Для замкнутого подпространства Y нормированного пространства X следующие условия эквивалентны:

1. $Y = X$.
2. $Y^{\perp} = \{0\}$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только импликация $2. \Rightarrow 1.$ Предположим, что первое условие не выполнено, то есть Y строго содержится в X. Тогда факторпространство X/Y состоит не только из нуля, и, согласно следствию 1 п. 9.2.1, на X/Y существует какой-то ненулевой непрерывный линейный функционал g. Пусть $q : X \to X/Y$ – факторотображение ($q(x) = [x]$). Определим функционал f как композицию: $f(x) = g(q(x))$. Так как оператор q сюръективен и g – не тождественный ноль, то и f не равен тождественному нулю. В то же время $f \in Y^{\perp}$. Противоречие. □

Упражнения

1. Пусть A, B – подмножества нормированного пространства X. Тогда $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
2. Распространите результат предыдущего упражнения на аннулятор объединения любого (в том числе и бесконечного) количества множеств.

3. Докажите, что $A^{\perp}$ замкнут в X^{*} не только в смысле сходимости по норме, но и в смысле поточечной сходимости.
4. Приведите пример двух подмножеств A и B, для которых $(A \cap B)^{\perp} \neq A^{\perp} \cup B^{\perp}$.
5. Докажите включение $(A \cap B)^{\perp} \supset A^{\perp} \cup B^{\perp}$. Выведите отсюда включение $(A \cap B)^{\perp} \supset \overline{\mathrm{Lin}}\left(A^{\perp} \cup B^{\perp}\right)$.
6. Приведите пример подмножеств, для которых $(A \cap B)^{\perp} \neq \overline{\mathrm{Lin}}\left(A^{\perp} \cup B^{\perp}\right)$.
7. Приведите пример замкнутых подпространств, для которых $(A \cap B)^{\perp} \neq \overline{\mathrm{Lin}}\left(A^{\perp} \cup B^{\perp}\right)$.

9.2.3. Полные системы элементов

Подмножество A нормированного пространства X называется *полной системой элементов нормированного пространства* X, если замыкание линейной оболочки множества A совпадает со всем пространством X.[1]

Полные системы элементов возникают в различных задачах математического анализа при приближении одних функций другими более простого вида. Так, теорему Вейерштрасса о плотности множества многочленов в пространстве непрерывных функций на отрезке можно сформулировать следующим образом: последовательность степенных функций $\{1, t, t^2, \ldots\}$ полна в $C[a,b]$. В теории тригонометрических рядов доказывается полнота в (комплексном) пространстве $C[0,2\pi]$ систем $\left\{e^{ikt}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \ldots\}$. Важные примеры полных систем возникают в курсе математической физики как системы собственных функций различных дифференциальных операторов.

Теорему 3 последнего параграфа можно переформулировать в виде следующего *критерия полноты системы*.

Теорема. Пусть X – нормированное пространство. Множество $A \subset X$ будет полной системой элементов в том и только том случае, если $A^{\perp} = \{0\}$.

Доказательство. Согласно пункту 4 теоремы 2 параграфа 9.2.2, условие $A^{\perp} = \{0\}$ эквивалентно условию $\left(\overline{\mathrm{Lin}\, A}\right)^{\perp} = \{0\}$, что, в свою очередь, согласно теореме 3 п. 9.2.2, эквивалентно равенству $\overline{\mathrm{Lin}}\, A = X$, то есть полноте системы элементов A. □

[1] Не путать с полной системой элементов линейного пространства, где определение (см. п. 5.1.1) отличается отсутствием слова «замыкание».

Этот критерий часто позволяет сводить вопрос о полноте системы элементов комплексного нормированного пространства к задачам теории функций комплексного переменного. Именно так доказывается теорема Мюнца о полноте систем степенных функций (пусть $b > a > 0$, $\lambda_k > 0$; тогда система $\left\{f_k(t) = t^{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $C[a,b]$ в том и только том случае, если $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$); теоремы Левинсона [Le] о полноте систем экспоненциальных функций (см. монографию Б. Я. Левина [Lev], Приложение 3) и многие другие. Приведём простейший пример такого рассуждения.

Пример. Пусть $b > a > 0$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$ и последовательность λ_k, $k = 1,2,...$ имеет предельную точку. Тогда система $\left\{f_k(t) = t^{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $C[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $x^* \in (C[a,b])^*$, аннулирующий все f_k. Определим функцию комплексного переменного $F(z) = x^*(t^z)$. Эта функция определена при всех $z \in \mathbb{C}$. Докажем, что F голоморфна. Действительно, $\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = x^*(\frac{t^{z+\Delta z} - t^z}{\Delta z})$. Поскольку при $\Delta z \to 0$ функция $\frac{t^{z+\Delta z} - t^z}{\Delta z}$ равномерно на $[a,b]$ стремится к $\frac{\partial}{\partial z} t^z = t^z \ln t$, а функционал x^* непрерывен именно по отношению к равномерной сходимости, $\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} x^*(t^z \ln t)$. Голоморфность доказана. Далее, по построению, $F(\lambda_k) = x^*(t^{\lambda_k}) = 0$. То есть голоморфная функция F обращается в ноль на последовательности, имеющей предельную точку в области голоморфности. По теореме единственности, $F(z) \equiv 0$. В частности, $F(n) = 0$, $n = 0,1,2,...$. Это означает, что функционал x^* аннулирует все элементы полной системы функций $\left\{1, t, t^2, ...\right\}$. То есть $x^* = 0$. Мы доказали, что аннулятор системы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит только из нулевого функционала. Таким образом, по вышедоказанному критерию, система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна. □

Упражнения

1. Нормированное пространство сепарабельно в том и только том случае, если оно содержит счётную полную систему элементов.

2. Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ из вышеприведенного примера обладает следующим необычным свойством *переполненности*: любая её бесконечная подсистема по-прежнему полна.

9.3. Выпуклые множества и теорема Хана – Банаха в геометрической форме

На протяжении этого раздела X будет вещественным нормированным пространством, A и B – непустыми подмножествами пространства X. Соответственно, все линейные функционалы будут предполагаться вещественными.

9.3.1. Несколько лемм

Лемма 1. 1. Если A – открытое множество, то для любого $b \in X$ множество $A+b$ также открыто; если A – окрестность точки $x \in X$, то $A+b$ – окрестность точки $x+b$. 2. Если $\lambda \neq 0$, A – окрестность точки $x \in X$, то λA – окрестность точки λx.

Доказательство. 1. Отображение параллельного переноса $x \to x+b$ биективно и сохраняет расстояния между элементами. Следовательно, при параллельном переносе шары переходят в шары (того же радиуса) и открытые множества – в открытые множества.

2. Отображение гомотетии $x \to \lambda x$ биективно и умножает расстояния между элементами на коэффициент $|\lambda|$. Поэтому шары переходят в шары, пусть и другого радиуса. □

Лемма 2. Если A – открытое множество, $B \subset X$, то $A+B$ также открыто.

Доказательство. $A+B = \bigcup\limits_{b \in B}(A+b)$, то есть $A+B$ представимо в виде объединения открытых множеств. □

Лемма 3. Если A и B выпуклы, то $A+B$ также выпукло.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in A+B$, $\lambda \in [0,1]$. По определению суммы двух множеств, существуют такие $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, что $x_1 = a_1 + b_1$, $x_2 = a_2 + b_2$. Соответственно, имеем

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda(a_1+b_1) + (1-\lambda)(a_2+b_2) =$$
$$= (\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2) + (\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2) \in A+B. \ \square$$

Лемма 4. Пусть A выпукло, $a_1, a_2 \in A$, $\lambda \in (0,1)$ и a_1 – внутренняя точка множества A. Тогда и выпуклая комбинация $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$ будет внутренней точкой множества A.

Доказательство. Множество A – окрестность точки a_1. По лемме 1, λA – окрестность точки λa_1, и $\lambda A + (1-\lambda)a_2$ – окрестность точки $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$. В то же время ввиду выпуклости множества A $\lambda A + (1-\lambda)a_2 \subset \lambda A + (1-\lambda)A \subset A$. То есть мы нашли окрестность точки $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$, целиком лежащую в A. □

Следствие 1. Внутренность выпуклого множества A выпукла.

Доказательство. Достаточно применить лемму 4 к случаю, когда обе точки a_1, a_2 – внутренние. □

Следствие 2. Если внутренность $\overset{o}{A}$ выпуклого множества A непуста, то $\overset{o}{A}$ плотна в A.

Доказательство. Пусть a – произвольная точка множества A. Зафиксируем $x \in \overset{o}{A}$. По лемме 4, весь отрезок $\lambda a + (1-\lambda)x$: $\lambda \in (0,1)$ состоит из внутренних точек. Поскольку $\lambda a + (1-\lambda)x \to a$ при $\lambda \to 1$, получаем, что точка a принадлежит замыканию множества $\overset{o}{A}$. □

Лемма 5. Пусть линейный функционал f на X – это не тождественный ноль, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \subset X$ – множество с непустой внутренностью и $f(a) \le \theta$ для всех $a \in A$. Тогда для всех $x \in \overset{o}{A}$ выполняется строгое неравенство $f(x) < \theta$. В частности, если A открыто, то $f(x) < \theta$ при всех $a \in A$.

Доказательство. По условию, существует $e \in X$ с $f(e) > 0$. Пусть $x \in A$ – внутренняя точка. Выберем настолько маленькое $\varepsilon > 0$, чтобы точка $x + \varepsilon e$ попала в A. Имеем $f(x) < f(x) + \varepsilon f(e) = f(x + \varepsilon e) \le \theta$. □

Отметим, что в лемме 5 функционал мог быть и разрывным, а условие открытости множества A в последней части формулировки можно заменить более общим алгебраическим условием: для любого $x \in A$ множество $A - x$ – поглощающее.

9.3.2. Теоремы об отделении выпуклых множеств

Все собранные в настоящем параграфе утверждения можно рассматривать как обобщения такого утверждения из обычной геометрии: пусть A и B – непересекающиеся выпуклые множества на плоскости. Тогда можно провести такую прямую l, что A и B окажутся по разные стороны от l. Тела в трёхмерном пространстве уже нужно разделять не прямой, а плоскостью. В случае же больших размерностей (в том числе и в бесконечномерном пространстве), роль разделяющей прямой или плоскости берёт на себя гиперплоскость – линия уровня линейного функционала.

Лемма. Пусть $A \subset X$ – открытое выпуклое подмножество нормированного пространства X, $x_0 \in X \setminus A$. Тогда существует такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$, что $f(a) \le f(x_0)$ на всех $a \in A$.

Доказательство. Вначале докажем лемму при дополнительном предположении, что A содержит нулевой элемент пространства. В этом случае множество A будет содержать и некоторый шар вида rB_X, и, следовательно, будет поглощающим множеством. Соответственно, функционал Минковского φ_A множества A будет выпуклым функционалом (см. п. 5.4.2). Включение $rB_X \subset A$ означает, что $\varphi_A(x) \le \frac{1}{r}\|x\|$. Как и в доказательстве теоремы 1 п. 9.2.1, рассмотрим подпространство $Y = \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Зададим на Y линейный функционал f таким образом, что $f(x_0) = \varphi_A(x_0)$. Докажем, что на Y линейный функционал f мажорируется выпуклым функционалом φ_A. Действительно, для $\lambda \ge 0$ ввиду положительной однородности функционала Минковского имеем $f(\lambda x_0) = \varphi_A(\lambda x_0)$. В то же время $f(-\lambda x_0) = -f(\lambda x_0) = -\varphi_A(\lambda x_0) \le 0 \le \varphi_A(-\lambda x_0)$. Таким образом, условие мажорации $f(tx_0) \le \varphi_A(tx_0)$ нами доказано как для положительных, так и для отрицательных t, то есть условие мажорации выполнено для всех элементов пространства Y.

Воспользуемся теоремой Хана – Банаха в аналитической форме и продолжим f на всё пространство X с сохранением линейности и условия мажорации. Условие мажорации, в частности, означает, что $f(x) \le \varphi_A(x) \le \frac{1}{r}\|x\|$, то есть $f \in X^*$. Напомним, что, по определению функционала Минковского, $\varphi_A(a) \le 1$ для любого $a \in A$, и, поскольку $x_0 \notin A$, $\varphi_A(x_0) \ge 1$. Сопоставив эти условия, получаем, что $f(a) \le \varphi_A(a) \le 1 \le \varphi_A(x_0) = f(x_0)$ для любого $a \in A$. Кроме того, f – это не тождественный ноль, поскольку, как мы только что проверили, $f(x_0) \ge 1$.

Итак, мы доказали лемму при дополнительном предположении $0 \in A$. Общий случай сводится к уже разобранному параллельным переносом. А именно, пусть $a_0 \in A$. Рассмотрим вспомогательное множество $B = A - a_0$.

B будет выпуклым открытым множеством, содержащим 0; $x_0 - a_0 \notin B$. Как мы уже доказали, существует такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$, что $f(b) < f(x_0 - a_0)$ для всех $b \in B$. Подставив $b = a - a_0$, где $a \in A$, в последнее неравенство, получим, что $f(a) - f(a_0) = f(a - a_0) \le f(x_0 - a_0) = f(x_0) - f(a_0)$, то есть $f(a) \le f(x_0)$. □

Теорема Хана – Банаха в геометрической форме. Пусть A и B – непресекающиеся выпуклые подмножества нормированного пространства X и множество A открыто. Тогда существуют такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ и такой скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(a) < \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) \ge \theta$ для всех $b \in B$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное множество $C = A - B$. Согласно леммам 2 и 3 параграфа 9.3.1, C – открытое выпуклое множество. Так как A и B не пересекаются, $0 \notin C$. Применив последнюю лемму к множеству C и точке $x_0 = 0$, получаем существование функционала $f \in X^* \setminus \{0\}$, для которого $f(a - b) \le 0$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Выберем $\theta = \sup\limits_{a \in A} f(a)$. Поскольку неравенство $f(a) \le f(b)$ выполнено при всех $a \in A$, $b \in B$, то и $\theta = \sup\limits_{a \in A} f(a) \le f(b)$ для всех $b \in B$. Условие же $f(a) < \theta$ для всех $a \in A$ следует из очевидного неравенства $f(a) \le \theta$ и леммы 5 п. 9.3.1. □

Следствие 1. Пусть A и B – непресекающиеся выпуклые подмножества нормированного пространства X и A имеет непустую внутренность. Тогда существуют такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ и такой скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(a) \le \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) \ge \theta$ для всех $b \in B$. При этом во внутренних точках множества A выполняется строгое неравенство $f(x) < \theta$.

Доказательство. Внутренность $\overset{o}{A}$ множества A – это выпуклое открытое множество. Остаётся применить предыдущую теорему и воспользоваться плотностью $\overset{o}{A}$ в A. □

Прямым применением леммы 5 п. 9.3.1 из основной теоремы выводим

Следствие 2. Пусть A и B – непресекающиеся выпуклые открытые подмножества нормированного пространства X. Тогда существуют такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ и такой скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(a) < \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) > \theta$ для всех $b \in B$.

И, наконец,

Следствие 3. Пусть A и B – непересекающиеся выпуклые замкнутые подмножества нормированного пространства X и одно из этих множеств – компакт. Тогда существуют такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ и такой скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(a) < \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) > \theta$ для всех $b \in B$.

Доказательство. Обозначим $\inf\limits_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$ (расстояние между множествами) через r. Из условия видно, что $r > 0$. Рассмотрим вспомогательные множества $A + \frac{r}{3} B_X$ и $B + \frac{r}{3} B_X$ – $\frac{r}{3}$-окрестности множеств A и B соответственно. Эти вспомогательные множества открыты, выпуклы и не пересекаются, следовательно, к ним можно применить предыдущее следствие. □

9.3.3. Примеры

Существенность некоторых из условий, налагаемых на множества A и B в формулировке теоремы Хана – Банаха в геометрической форме и её следствий, очевидна. Так, множества нельзя разделить гиперплоскостью, если они пересекаются. Если в качестве одного из множеств взять окружность, а другого – центр этой окружности, то становится понятным, почему теорема неверна для невыпуклых множеств. В то же время важность налагаемых условий топологического характера – открытость, замкнутость, компактность каких-то из множеств – уже не столь очевидна. Ниже приведены примеры, демонстрирующие роль таких условий.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множества $A = \{(x, y) : y \le 0\}$ (нижняя полуплоскость) и $B = \left\{(x, y) : x > 0, y \ge \frac{1}{x}\right\}$ (часть первого квадранта, лежащая над графиком $y = \frac{1}{x}$). Эти множества замкнуты, не пересекаются, но строго разделить их прямой, чтобы **ни одно** из множеств с этой прямой не пересекалось, невозможно. То есть без условия компактности одного из множеств в следствии 3 п. 9.3.2 обойтись нельзя. Правда, в этом примере ось абсцисс разделяет множества в смысле теоремы Хана – Банаха в геометрической форме: множества лежат по разные стороны от прямой, и с прямой пересекается только одно из двух множеств. В следующем примере и такое разделение уже тоже невозможно.

Пример 2. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множества $A = \{(x, 0) : x \ge 0\}$ (замкнутая правая координатная полуось) и

$B = \{(x, y) : y < 0\} \cup \{(x, 0) : x < 0\}$ (открытая нижняя полуплоскость вместе с левой координатной полуосью). Это – непересекающиеся выпуклые множества, одно из которых замкнуто. В то же время их нельзя строго разделить прямой: единственная прямая, от которой эти множества лежат (нестрого) по разные стороны, – это ось абсцисс, но оба эти множества пересекаются с осью.

Наконец, приведём пример выпуклых непересекающихся множеств, для которых не существует даже нестрогого разделения гиперплоскостью. Такой пример возможен только в бесконечномерном пространстве.

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство $\boldsymbol{P}$ всех многочленов с вещественными коэффициентами. В качестве A возьмём множество всех многочленов, имеющих строго отрицательный старший коэффициент, а в качестве B – множество всех многочленов, у которых все коэффициенты больше или равны нуля. Эти множества выпуклы и не пересекаются. Докажем, что для любого ненулевого линейного функционала f на $\boldsymbol{P}$ не существует такого скаляра $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(a) \le \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) \ge \theta$ для всех $b \in B$. Вначале отметим, что одночлены $p_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют базис Гамеля в $\boldsymbol{P}$. Соответственно, функционал f однозначно определяется своими значениями на p_n. Введём обозначение $f(p_n) = f_n$.

Предположим, что $f(a) \le \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) \ge \theta$ для всех $b \in B$. Тогда, в частности, поскольку $0 \in B$, можем заключить, что $0 = f(0) \ge \theta$, то есть $\theta \le 0$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\varepsilon p_0 \in A$ и $\varepsilon f_0 = f(\varepsilon p_0) \le \theta$. Устремив ε к 0, получаем, что $\theta \ge 0$, то есть $\theta = 0$. Далее, каждый из многочленов p_n лежит в B, соответственно, $f_n = f(p_n) \ge 0$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ имеем $p_n - \varepsilon p_{n+1} \in A$. Соответственно, $f_n - \varepsilon f_{n+1} = f(p_n - \varepsilon p_{n+1}) \le 0$, откуда, устремив ε к 0, получаем, что $f_n \le 0$. Таким образом, все f_n равны 0, и, следовательно, $f = 0$. □

9.3.4. Упражнения

1. Проверьте выпуклость множеств A и B во всех примерах 1-3 предыдущего параграфа.

Семейство множеств называется *сцепленным*, если любые два из них пересекаются. Будем говорить, что банахово пространство X обладает *свойством сцепленных шаров*, если любое сцепленное семейство непустых замкнутых шаров (с произвольными центрами и произвольных радиусов) имеет непустое пересечение. Докажите, что:

2. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ обладает свойством сцепленных шаров, а $\mathbb{C}$ не обладает.

3. Вещественное пространство l_∞ обладает свойством сцепленных шаров.

Банахово пространство E называется 1-*инъективным*, если для операторов, действующих в E, выполнен аналог теоремы Хана – Банаха о продолжении: для любого Y – подпространства произвольного нормированного пространства X и любого оператора $T \in L(Y, E)$ существует такой оператор $\widetilde{T} \in L(X, E)$, что $\widetilde{T}(y) = T(y)$ для всех $y \in Y$ и $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Если в вышеприведенном определении убрать условие $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$, то получим более общее определение *инъективного пространства*.

4. Если банахово пространство E обладает свойством сцепленных шаров, то E – 1-инъективное пространство (I. Nachbin, 1950). В частности, пространство l_∞ 1-инъективно.
5. Докажите инъективность пространства l_∞, не пользуясь свойством сцепленных шаров, а опираясь на теорему Хана – Банаха о продолжении.
6. Пусть на плоскости задано N выпуклых замкнутых ограниченных множеств, любые 3 из которых пересекаются. Тогда все N множеств имеют общую точку (Э. Хелли, 1936).
7. Покажите, что от условия ограниченности множеств в предыдущем упражнении можно отказаться.
8. Пусть на плоскости задано бесконечное семейство выпуклых замкнутых множеств, одно из которых ограничено, и любые 3 множества из этого семейства пересекаются. Тогда всё семейство имеет непустое пересечение.
9. Приведите пример, показывающий существенность условия ограниченности в формулировке предыдущего утверждения.
10. Придумайте и докажите вариант теоремы Хелли для множеств в n-мерном пространстве.

9.4. Сопряженный оператор

9.4.1. Связь между свойствами исходного оператора и сопряжённого к нему

Пусть X, E – нормированные пространства, $T \in L(X, E)$. *Сопряжённым оператором* к оператору T называется оператор $T^*: E^* \to X^*$, ставящий в соответствие каждому функционалу $f \in E^*$ функционал $T^* f = f \circ T$. Другими словами, функционал $T^* f \in X^*$ действует по правилу $(T^* f)(x) = f(Tx)$.

Лемма. Для любого элемента $e \in E$ выполнено равенство $\|e\| = \sup\limits_{f \in S_{E^*}} |f(e)|$.

Доказательство. Для любого $f \in S_{E^*}$ имеем $|f(e)| \le \|f\| \cdot \|e\| = \|e\|$, соответственно, $\sup\limits_{f \in S_{E^*}} |f(e)| \le \|e\|$. Для получения обратной оценки воспользуемся существованием опорного в точке e функционала f_0. По определению опорного функционала (п. 9.2.1), $f_0 \in S_{E^*}$ и $f_0(e) = \|e\|$. Имеем $\sup\limits_{f \in S_{E^*}} |f(e)| \ge |f_0(e)| = \|e\|$. □

Теорема 1. Оператор T^* непрерывен, и $\|T^*\| = \|T\|$.

Доказательство.

$$\|T^*\| = \sup_{f \in S_{E^*}} \|T^* f\| = \sup_{f \in S_{E^*}} \sup_{x \in S_X} |T^* f(x)| = \sup_{x \in S_X} \sup_{f \in S_{E^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| = \|T\|. \ \square$$

Теорема 2. Образы и ядра операторов T и T^* связаны следующими соотношениями:

(1) $\operatorname{Ker} T^* = (T(X))^{\perp}$;

(2) $T^*(E^*) \subset (KerT)^{\perp}$.

Доказательство. (1)

$(f \in \operatorname{Ker} T^*) \Leftrightarrow (T^* f = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in X\ (T^* f)x = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x \in X\ f(Tx) = 0) \Leftrightarrow (f \in (T(X))^{\perp})$.

(2) Пусть $g \in T^*(E^*)$, то есть $g = T^* f$ для какого-то $f \in E^*$. Тогда для любого $x \in \operatorname{Ker} T$ имеем $g(x) = (T^* f)(x) = f(Tx) = 0$, то есть $g \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. □

Следствие 1. Для того, чтобы оператор T^* был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы оператор T имел плотный образ. В частности, если оператор T сюръективен, то T^* инъективен.

Следствие 2. Если оператор T^* сюръективен, то T инъективен.

Для доказательства следствия 1 достаточно применить первую часть предыдущей теоремы 2 и теорему 3 п. 9.2.2. Следствие 2 вытекает из второй части теоремы 2.

Упражнения

1. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, $T_1 \in L(X,Y)$, $T_2 \in L(Y,Z)$. Тогда $(T_2 T_1)^* = T_1^* T_2^*$.
2. Приведите пример, где $T^*(E^*) \neq (\operatorname{Ker} T)^\perp$.
3. Если оператор T^* имеет плотный образ, то T инъективен. Обратное утверждение неверно. (В главе 17 мы увидим, что инъективность оператора T эквивалентна плотности образа T^*, но не в топологии, порождённой нормой, а в «слабой со звёздочкой» топологии $\sigma(X^*, X)$.)
4. Пусть $T \in L(X,Y)$ – биективный оператор, $T^{-1} \in L(Y,X)$. Тогда $\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^*\right)^{-1}$.

9.4.2. Двойственность между подпространствами и факторпространствами

Пусть X – нормированное пространство, Y – подпространство в X. Рассмотрим оператор $R: X^* \to Y^*$ (оператор ограничения), ставящий каждому функционалу $f \in X^*$ его ограничение на подпространство Y. Поскольку каждый функционал, заданный на Y, можно продолжить на всё X, оператор R сюръективен. Ядро оператора R совпадает с $Y^\perp$. Обозначим через U инъективизацию оператора R. Согласно определению инъективизаци, $U \in L(X^*/Y^\perp, Y^*)$, и если $f \in X^*$ и $[f]$ – соответствующий элемент факторпространства $X^*/Y^\perp$, то функционал $U[f]$ действует на элемент $y \in Y$ по правилу $(U[f])(y) = f(y)$. Оператор U биективен (как инъективизация сюръективного оператора) и называется *каноническим изоморфизмом пространств* $X^*/Y^\perp$ *и* Y^*.

Теорема 1. Канонический изоморфизм пространств $X^*/Y^\perp$ и Y^* является изометрией, то есть для любого $[f] \in X^*/Y^\perp$ имеет место равенство $\|U[f]\| = \|[f]\|$.

Доказательство. $U[f]$ – это линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве Y. По теореме Хана – Банаха, существует g – продолжение функционала $U[f]$ на всё X с $\|g\| = \|U[f]\|$. Поскольку функционалы g и f совпадают на Y, $[f] = [g]$. Имеем $\|U[f]\| = \|g\| \geq \|[g]\| = \|[f]\|$. Обратно, оператор ограничения R не увеличивает нормы функционала, то есть $\|R\| \leq 1$. Так как U – инъективизация оператора R, то и $\|U\| \leq 1$. Соответственно, $\|U[f]\| \leq \|[f]\|$.
□

Часто класс эквивалентности $[f]$ отождествляют с функционалом $U[f]$ и говорят, что класс эквивалентности $[f]$ действует на элемент $y \in Y$ по правилу $[f](y) = f(y)$. В рамках такой договорённости можно сказать, что $X^* / Y^{\perp}$ и Y^* – это одно и то же пространство: $X^* / Y^{\perp} = Y^*$.

Аналогичное описание существует и для сопряжённого к факторпространству. Это описание, выражаемое условным равенством $(X / Y)^* = Y^{\perp}$, читатель получит, решив нижеприведенные упражнения.

Упражнения

Пусть $q : X \to X / Y$ – фактороотображение ($q(x) = [x]$ для всех $x \in X$), $q^* : (X / Y)^* \to X^*$ – соответствующий сопряженный оператор. Покажите, что:

1. Оператор q^* действует по правилу $(q^* f)(x) = f([x])$.
2. Образ оператора q^* совпадает с $Y^{\perp}$.
3. Оператор q^* осуществляет биективную изометрию пространств $(X / Y)^*$ и $Y^{\perp}$.

Пусть j – оператор естественного вложения подпространства Y в объемлющее пространство X ($j(y) = y$ для всех $y \in Y$), $j^* : X^* \to Y^*$ – его сопряженный оператор.

4. Проверьте, что j^* совпадает с оператором ограничения R.

9.5. Комментарии к упражнениям

Параграф 9.1.3

Упражнение 3. См. теорему 4 п. 16.2.5.

Упражнение 6. Если непрерывная функция обращается в 0 на множестве, то она обращается в 0 и на замыкании этого множества. Поэтому, не ограничивая общности, множество Δ можно считать замкнутым. Пусть $\lambda(\Delta) \neq 0$, где λ – мера Лебега на $[a,b]$. Тогда функционал $F_{\Delta}(f) = \int\limits_{\Delta} f d\lambda$ будет ненулевым непрерывным функционалом на $C_p[a,b]$, $\operatorname{Ker} F_{\Delta}$ – не плотное множество в $C_p[a,b]$, следовательно, и $V_{\Delta} \subset \operatorname{Ker} F_{\Delta}$ не плотно. Обратное утверждение, хотя и можно доказать напрямую, удобнее вывести, опираясь на факты, которые будут изложены позднее: на теорему **Ошибка! Источник ссылки не найден.** п. 9.2.2, из которой следует, что если подпространство V_{Δ} не плотно в $C_p[a,b]$, то существует ненулевой непрерывный функционал, аннулирующий всё V_{Δ}, и на теорему об общем виде линейного функционала в L_p (глава 14).

Параграф 9.3.4

Упражнение 2. Пусть $[a_\gamma, b_\gamma]$, $\gamma \in \Gamma$ – семейство попарно пересекающихся отрезков (шары в $\mathbb{R}$ – это и есть отрезки). Тогда для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ выполнено неравенство $a_{\gamma_1} \le b_{\gamma_2}$ (иначе соответствующие отрезки не пересекались бы). Это означает, что число $a = \sup_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ лежит правее всех левых и левее всех правых концов отрезков $[a_\gamma, b_\gamma]$, то есть лежит в пересечении этих отрезков.

Упражнение 4. Доказательство этой теоремы Нахбина и основные сведения об 1-инъективных пространствах см. в учебнике Канторовича и Акилова [K-A], глава 5, п. 8.3. Об инъективных пространствах можно прочитать книге Линденштраусса и Цафрири [L-T], том 1, параграф 2.f.

Упражнение 6. Следует использовать индукцию по N. Пусть $A_1, \dots, A_N$ – выпуклые множества, подчиняющиеся условию. По предположению индукции множество $B = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k$ – непустое замкнутое выпуклое множество. Предположим, что утверждение не выполнено, то есть B не пересекается с A_N. Тогда существует такая прямая l, что B и A_N лежат строго по разные стороны от l. Рассмотрим множества $C_k = A_k \bigcap l$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Поскольку каждое из множеств $A_k \bigcap A_j$, $1 \le k \le j \le N-1$ пересекает и B и A_N, то ввиду выпуклости все множества $A_k \bigcap A_j$, $1 \le k \le j \le N-1$ пересекаются с l. Другими словами, множества C_k непусты и попарно пересекаются. Поскольку C_k – это замкнутые отрезки на l, отсюда следует (см. упражнение 2 и комментарий к нему), что пересечение всех C_k, $k = 1, 2, \dots, N-1$ непусто. То есть непустым будет и $B \bigcap l = \bigcap_{k=1}^{N-1} C_k$, что противоречит нашему выбору прямой l.

Упражнение 10. Формулировка: пусть $A_1, \dots, A_N$ – выпуклые замкнутые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$, любые $n+1$ из которых пересекаются. Тогда все N множеств имеют общую точку. Доказательство совершенно аналогично вышеприведенному доказательству плоского варианта теоремы Хелли.

Другие варианты теоремы Хелли и её приложения можно найти в брошюре Хадвигера и Дебрунера [H-D].

10. Классические теоремы о непрерывных операторах

10.1. Открытые отображения

Пусть X, Y – банаховы пространства, $T \in L(X, Y)$. По определению, оператор T осуществляет открытое отображение, если образ $T(A)$ любого открытого множества $A \subset X$ есть открытое множество в Y. Операторы, осуществляющие открытое отображение, называют ещё открытыми операторами.

Отметим элементарные свойства открытых операторов.

– Открытый оператор сюръективен. Действительно, полный образ $T(X)$ оператора открыт в Y и образует линейное подпространство. Следовательно, $T(X)$ содержит линейную оболочку некоторого шара в Y, то есть $T(X) = Y$.
– Если открытый оператор инъективен, то он биективен, и T^{-1} – непрерывный оператор. (Сразу следует из определения непрерывности через прообразы открытых множеств.)

10.1.1. Критерий открытости отображения

Теорема. Оператор $T \in L(X, Y)$ осуществляет открытое отображение в том и только том случае, если образ $T(B_X)$ единичного шара содержит некий шар вида rB_Y, $r > 0$.

Доказательство. Необходимость условия следует из того, что образ $T(B_X)$ единичного шара под действием открытого отображения есть открытое множество, содержащее нулевой элемент пространства Y. Проверим достаточность. Пусть $A \subset X$ – произвольное открытое подмножество, $x_0 \in A$. Выберем $t > 0$ таким образом, чтобы шар $B_X(x_0, t) = x_0 + tB_X$ также содержался в A. Тогда

$$T(A) \supset Tx_0 + tT(B_X) \supset Tx_0 + trB_Y,$$

то есть любая точка Tx_0 множества $T(A)$ входит туда вместе с некоторой окрестностью. Таким образом, $T(A)$ открыто, что, ввиду произвольности выбора множества A, влечёт открытость оператора T. □

Упражнения

1. Пусть X – нормированное пространство, X_1 – замкнутое подпространство в X. Тогда факторотображение $q: X \to X / X_1$ – открытый оператор.
2. Образует ли множество открытых операторов, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y,

линейное подпространство в $L(X,Y)$? Будет ли это множество замкнутым в $L(X,Y)$? Открытым?

10.1.2. Шарообразные множества

Подмножество A банахова пространства X называется *шарообразным*, если для любой последовательности $x_n \in A$ и любых скаляров λ_n, подчиняющейся условию $\sum_1^\infty |\lambda_n| \le 1$, ряд $\sum_1^\infty \lambda_n x_n$ сходится к элементу множества A.

Проверку нижеперечисленных свойств шарообразных множеств оставляем читателю в качестве упражнения.

1. Шарообразные множества ограничены.
2. Каждое замкнутое выпуклое ограниченное уравновешенное множество в банаховом пространстве шарообразно.
3. Открытый единичный шар банахова пространства – шарообразное множество. Таким образом, шарообразное множество может быть незамкнутым.
4. Образ шарообразного множества под действием непрерывного линейного оператора – снова шарообразное множество.

Теорема. Пусть замыкание $\overline{A}$ шарообразного множества A в банаховом пространстве X содержит шар rB_X, где r – некоторое положительное число. Тогда само множество A содержит этот шар.

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что $r=1$ (к этому случаю можно свести заменой множества A на $\frac{1}{r}A$). Зафиксируем $x \in B_X$ и докажем, что $x \in A$. Зададимся положительным числом ε, подчиняющимся условию $\frac{1}{1-\varepsilon}x \in B_X$, и положим $x_0 = \frac{1}{1-\varepsilon}x$. По условию, $x_0 \in \overline{A}$. Выберем $y_0 \in A$, приближающее x_0 с точностью до ε: $\|x_0 - y_0\| < \varepsilon.$ Вектор $x_1 = x_0 - y_0$ лежит в εB_X, что, в свою очередь, содержится в $\varepsilon\overline{A}$. Выберем $y_1 \in A$ таким образом, что $\|x_1 - \varepsilon y_1\| < \varepsilon^2$. Тогда элемент $x_2 = x_1 - \varepsilon y_1 = x_0 - y_0 - \varepsilon y_1$ лежит в $\varepsilon^2\overline{A}$. Продолжая этот процесс, построим такие векторы $y_n \in A$, что $\|x_0 - y_0 - \varepsilon y_1 - ... - \varepsilon^n y_n\| < \varepsilon^{n+1}$. При таком построении ряд $\sum_0^\infty \varepsilon^n y_n$ сходится к x_0. Таким образом, ввиду шарообразности множества A элемент $x = (1-\varepsilon)x_0 = \sum_0^\infty (1-\varepsilon)\varepsilon^n y_n$ лежит в A, что и требовалось доказать. □

Упражнение

Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Используя свойства шарообразных множеств и упражнение 4 п. 6.4.3, доказать, что существует непрерывный линейный оператор $T : l_1 \to X$, для которого $T\left(B_{l_1}\right) = B_X$. Отсюда следует *фактор-универсальность* пространства l_1: для любого сепарабельного банахова пространства X существует такое подпространство $Y \subset l_1$, что фактор l_1 / Y изометричен пространству X (см. упражнение 7 п. 6.4.2).

Замечание. Идея рассмотрения шарообразных множеств и их использования в решении вышеприведенного упражнения, равно как и в приводимом ниже доказательстве теоремы Банаха об открытом отображении, взята нами из статьи Т. Банаха, В. Лянце и Я. Микитюка [BLM].

10.1.3. Теорема Банаха об открытом отображении

Теорема. Пусть X, Y – банаховы пространства, $T \in L(X, Y)$ – сюръективный оператор. Тогда T осуществляет открытое отображение.

Доказательство. Введём в рассмотрение множество $A = T(B_X)$. Согласно критерию открытости отображения (см. 10.1), нам достаточно доказать, что A содержит некий шар вида rB_Y, $r > 0$. Так как A – шарообразное множество (см. 10.1.2, п. 3 и 4), то ввиду предыдущей теоремы нам достаточно доказать, что замыкание $\overline{A}$ множества A содержит шар вида rB_Y. В этом нам поможет теорема Бэра.

Воспользуемся сюръективностью оператора T и запишем пространство Y в виде

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^\infty T(nB_X) = \bigcup_{n=1}^\infty nA.$$

По теореме Бэра, получаем, что A не может быть нигде не плотным в Y, то есть $\overline{A}$ содержит некоторый шар вида $y_0 + rB_Y$. Отсюда ввиду выпуклости и симметричности множества $\overline{A}$ выводим, что

$$\overline{A} \supset \frac{1}{2}(\overline{A} - \overline{A}) \supset \frac{1}{2}\left(\left(y_0 + rB_Y\right) - \left(y_0 + rB_Y\right)\right) \supset rB_Y.$$

Теорема доказана. □

10.2. Обратимость оператора и изоморфизмы

10.2.1. Изоморфизмы. Эквивалентные нормы

Определение 1. Пусть X, Y – нормированные пространства. Оператор $T: X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если он непрерывен, биективен и обратный к нему оператор $T^{-1}: Y \to X$ также непрерывен. Нормированные пространства X и Y называются *изоморфными* (обозначение: $X \approx Y$), если существует изоморфизм $T: X \to Y$ этих пространств. Частный случай изоморфизма – изометрия – рассматривался выше, в главе 6.

Как следует из определения, изоморфизм сохраняет все топологические структуры: он переводит открытые множества в открытые, замкнутые – в замкнутые, сходящиеся последовательности и направленности – в сходящиеся. Следующая теорема даёт ещё один пример сохраняющейся при изоморфизме структуры.

Теорема 1. Пусть X, Y – изоморфные нормированные пространства и X полно. Тогда Y – это тоже полное пространство.

Доказательство. По условию, существует изоморфизм $T: X \to Y$. Для доказательства полноты пространства Y рассмотрим произвольную последовательность Коши $y_n \in Y$. Положим $x_n = T^{-1} y_n$. Ввиду непрерывности оператора T^{-1} векторы x_n также образуют последовательность Коши:

$$\|x_n - x_m\| = \left\|T^{-1}(y_n - y_m)\right\| \le \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 .$$

Поскольку X – полное пространство, последовательность x_n имеет предел. Обозначим этот предел через x. Ввиду непрерывности оператора T, $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. То есть последовательность y_n имеет предел. □

Теорема 2. Пусть X, Y – конечномерные нормированные пространства и $\dim X = \dim Y$. Тогда $X \approx Y$.

Доказательство. Ввиду равенства размерностей существует биективный линейный оператор $T: X \to Y$. Согласно теореме 2 п. 9.2.1, каждый оператор на конечномерном пространстве непрерывен. В частности, непрерывны операторы T и T^{-1}, то есть T – изоморфизм. □

Следствие 1. Каждое конечномерное нормированное пространство полно. Каждое конечномерное подпространство любого нормированного пространства замкнуто.

Доказательство. Пусть X – конечномерное нормированное пространство, $\dim X = n$. По предыдущей теореме, пространство $\mathbb{R}^n$ (в комплексном случае – $\mathbb{C}^n$), наделённое стандартной нормой $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, изоморфно пространству X. Поскольку $\mathbb{R}^n$ полно в указанной норме, теорема 1 даёт нам полноту и пространства X. Замкнутость же конечномерного подпространства – это частный случай общего утверждения о замкнутости полного подпространства метрического пространства. □

В отличие от конечномерных, большая часть упоминавшихся нами бесконечномерных пространств попарно не изоморфны. Так, среди всех пространств $L_p[0,1]$ и l_q при $1 \le p, q \le \infty$ есть только две пары изоморфных пространств: $L_2[0,1] \approx l_2$ (этот факт будет обоснован в главе 12) и $L_\infty[0,1] \approx l_\infty$ (доказательство этой совсем не очевидной теоремы А. Пелчиньского можно найти, например, в первом томе книги Линденштраусса и Цафрири [L-T], с. 111).

Определение 2. Две нормы $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ на линейном пространстве X называются *эквивалентными* (обозначение – $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$), если существуют такие две константы $C_1, C_2 > 0$, что $C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1$ для всех $x \in X$.

Теорема 3. Для норм $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ на линейном пространстве X следующие условия равносильны:

(1) $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$;

(2) тождественный оператор I на X, рассматриваемый как оператор, действующий из нормированного пространства $(X, \| \ \|_1)$ в нормированное пространство $(X, \| \ \|_2)$, является изоморфизмом;

(3) нормы $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ задают одну и ту же топологию на X.

Доказательство. Для непрерывности I как оператора, действующего из $(X, \| \ \|_1)$ в $(X, \| \ \|_2)$, необходимо и достаточно существования константы $C_2 > 0$, для которой $\|x\|_2 \le C_2\|x\|_1$ при всех $x \in X$. Для непрерывности же оператора I^{-1} необходимо и достаточно существования константы $C_1 > 0$, для которой $C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2$ при всех $x \in X$. Этим доказана равносильность условий (1) и (2).

Условие (3) означает, что в $(X, \| \ \|_1)$ и $(X, \| \ \|_2)$ один и тот же набор открытых множеств. По другому это можно сформулировать так:

множество A открыто в $\left(X, \| \ \|_1\right)$ в том и только том случае, если множество $I(A)$ открыто в $\left(X, \| \ \|_2\right)$. Ввиду биективности оператора I это равносильно условию (2) одновременной непрерывности операторов I и I^{-1}. □

Теорема 4. Пусть X – конечномерное линейное пространство. Тогда все нормы на X эквивалентны.

Доказательство. Так как каждый оператор на конечномерном пространстве непрерывен, для любых норм $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ на X оператор I из пункта (2) предыдущей теоремы 3 – изоморфизм. Следовательно, $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$. □

Упражнения

1. На любом множестве нормированных пространств отношение $\approx$ изоморфизма – это отношение эквивалентности.
2. Пусть X, Y – нормированные пространства. Если оператор $T : X \to Y$ – изоморфизм, то и сопряженный оператор $T^* : Y^* \to X^*$ – изоморфизм. В неполных пространствах обратное утверждение неверно (для случая банаховых пространств см. ниже упражнение 4 п. 10.2.3)
3. На множестве всех норм, заданных на фиксированном линейном пространстве, отношение «нормы эквивалентны» – это отношение эквивалентности.
4. На любом бесконечномерном линейном пространстве существуют неэквивалентные между собой нормы.
5. Для каждой пары из нижеперечисленных трёх норм на $\mathbb{R}^n$ доказать их эквивалентность и вычислить наилучшие возможные константы C_1, C_2 из определения эквивалентных норм: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$.
6. Для каждой пары из нижеперечисленных трёх норм на $C[0,1]$ доказать их неэквивалентность: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$, $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

10.2.2. Теорема Банаха об обратном операторе

Теорема. Пусть X, Y – банаховы пространства, $T \in L(X, Y)$ – биективный оператор. Тогда оператор T^{-1} непрерывен, то есть T – изоморфизм.

Доказательство. Поскольку T, в частности, сюръективен, T осуществляет открытое отображение. А как мы уже отмечали, если открытый оператор биективен, то T^{-1} – непрерывный оператор. □

Теорема об обратном операторе допускает следующую полезную переформулировку: пусть X, Y – банаховы пространства, $T \in L(X, Y)$. Предположим, что для любой правой части $b \in Y$ уравнение $Tx = b$ имеет решение, и это решение единственно. Тогда решение непрерывно зависит от правой части. Другими словами, имеет место *устойчивость решения* по отношению к малым возмущениям правой части.

Упражнения

1. Используя инъективизацию оператора (п. 5.2.3 и упражнения 5-6 п. 6.4.3) выведите теорему об открытом отображении из теоремы об обратном операторе.
2. Пусть на линейном пространстве X заданы нормы $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$; $\|\ \|_1 \le \|\ \|_2$ и в каждой из этих двух норм пространство X полно. Тогда $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$.
3. Выберем в бесконечномерном банаховом пространстве X линейно независимую последовательность векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и выберем множество $A \subset X$ так, чтобы $A \bigcup \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ было базисом Гамеля пространства X. Определим оператор $T : X \to X$ по следующему правилу. На элементах множества A положим $Tx = x$, на векторах $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ положим $Te_n = \dfrac{1}{n} e_n$, а на всё остальное пространство распространим оператор по линейности. Докажите, что T – биективный линейный оператор, но не изоморфизм. Какое из условий теоремы об обратном операторе не выполнено для T?
4. На любом бесконечномерном банаховом пространстве существует норма, не эквивалентная исходной, в которой, тем не менее, пространство остаётся полным.

Упражнения, приводимые ниже, показывают, в частности, существенность условия полноты пространств в тереме об обратном операторе, а следовательно, и в теореме об открытом отображении.

5. Пусть $\boldsymbol{P}$ – пространство всех полиномов (сколь угодно большой степени) с вещественными коэффициентами, наделённое нормой $\left\|a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n\right\| = |a_0| + \ldots + |a_n|$. Оператор $T : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$ зададим

равенством $T\left(a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} t + ... + \frac{a_1}{n} t^n$. Покажите, что T непрерывен, а T^{-1} разрывен.

6. В условиях упражнения 6 параграфа 10.2.1 проверить, что $\| \ \|_1 \le \| \ \|_\infty$. Опираясь на неэквивалентность этих норм, показать, что в тереме об обратном операторе нельзя ограничиться требованием полноты только пространства X, не налагая никаких дополнительных ограничений на Y.

7. В бесконечномерном вещественном банаховом пространстве X выберем базис Гамеля A. Домножив, если нужно, элементы этого базиса на положительные коэффициенты, можно добиться, чтобы выполнялось включение $A \subset B_X$. Возьмём в качестве единичного шара новой нормы $\| \ \|_1$ множество $conv\left(A \bigcup (-A)\right)$. Найдите явное выражение этой нормы через коэффициенты разложения по базису Гамеля A. Докажите, что $\| \ \|_1$ мажорирует исходную норму, но в $\| \ \|_1$ пространство X неполно. Опираясь на этот пример, показать, что в тереме об обратном операторе нельзя ограничиться требованием полноты только пространства Y, не налагая никаких дополнительных ограничений на X.

10.2.3. Ограниченные снизу операторы. Критерий замкнутости образа

Пусть X, Y – нормированные пространства. Оператор $T \in L(X,Y)$ называется *ограниченным снизу*, если существует такая константа $c > 0$, что $\|Tx\| \ge c\|x\|$ для всех $x \in X$.

Отметим сразу, что каждый ограниченный снизу оператор инъективен. Действительно, если $Tx = 0$ для какого-то $x \in X$, то неравенство $0 = \|Tx\| \ge c\|x\|$ означает, что $x = 0$. Примеры инъективных, но не ограниченных снизу операторов читатель найдёт в упражнениях.

Теорема 1. Оператор T будет неограниченным снизу в том и только том случае, если существует последовательность $x_n \in S(X)$, для которой $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Если оператор ограничен снизу с некоторой константой $c > 0$ и $x_n \in S(X)$, то ввиду неравенства $\|Tx_n\| \ge c\|x_n\| = c$ образы элементов x_n не могут стремиться к нулю. Обратно, если оператор неограничен снизу, то, в частности, он не будет ограниченным снизу с константой $c = 1/n$. То есть для любого n существует элемент y_n с

$\|Ty_n\| < \frac{1}{n}\|y_n\|$. Положим $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Это и будет требуемой последовательностью: $x_n \in S(X)$ и $\|Tx_n\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Теорема 2. Оператор T будет ограниченным снизу в том и только том случае, если T осуществляет изоморфизм нормированных пространств X и $T(X)$.

Доказательство. Если T ограничен снизу, то он инъективен. Следовательно, как оператор, действующий из X в $T(X)$, T биективен. Пусть $c > 0$ – константа из определения ограниченности снизу. Тогда для любого $y \in T(X)$ имеем $\|T^{-1}y\| \le \frac{1}{c}\|T(T^{-1}y)\| = \frac{1}{c}\|y\|$, то есть оператор $T^{-1}: T(X) \to X$ непрерывен. Обратно, если T – изоморфизм пространств X и $T(X)$, то существует $T^{-1}: T(X) \to X$ и $\|T^{-1}\| < +\infty$. Тогда для любого $x \in X$ имеем $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \le \|T^{-1}\|\|Tx\|$, то есть T ограничен снизу с константой $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. □

Ввиду последней теоремы ограниченные снизу операторы называют ещё *изоморфными вложениями*.

Теорема 3. Если X – банахово пространство и оператор $T \in L(X,Y)$ ограничен снизу, то образ оператора замкнут в Y.

Доказательство. По предыдущей теореме, подпространство $T(X)$ изоморфно пространству X. Следовательно, $T(X)$ полно, а полнота подпространства влечёт его замкнутость. □

В банаховых пространствах для инъективных операторов верна и обратная теорема.

Теорема 4. Если X, Y – банаховы пространства и инъективный оператор $T \in L(X,Y)$ имеет замкнутый образ, то оператор T ограничен снизу.

Доказательство. Поскольку замкнутое подпространство полного пространства само полно, $T(X)$ – банахово пространство. По теореме Банаха об обратном операторе, T – изоморфизм пространств X и $T(X)$. □

Напомним (п. 5.2.3, а также упражнения 5, 6 п. 6.4.3), что *инъективизацией* оператора $T \in L(X,Y)$ называется оператор

$\widetilde{T} : X / \mathrm{Ker}T \to Y$, действующий на любой элемент факторпространства по правилу $\widetilde{T}[x] = Tx$. Оператор $\widetilde{T}$ непрерывен и $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Поскольку образ инъективизации совпадает с образом исходного оператора, получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть X, Y – банаховы пространства. Оператор $T \in L(X,Y)$ имеет замкнутый образ тогда и только тогда, когда его инъективизация – оператор $\widetilde{T}$ – ограничена снизу. Другими словами, образ оператора T незамкнут в том и только том случае, если существует последовательность $[x_n] \in S(X / \mathrm{Ker}T)$, для которой $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Воспользовавшись тем, что $\|[x_n]\| = dist(x_n, \mathrm{Ker}T)$, переформулируем последнее утверждение без употребления термина «факторпространство».

Теорема 5. Пусть X, Y – банаховы пространства. Оператор $T \in L(X,Y)$ имеет незамкнутый образ в том и только том случае, если существует последовательность $x_n \in X$ со следующими свойствами:

1. $dist(x_n, \mathrm{Ker}T) = 1$;
2. $\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Если норма класса эквивалентности равна единице, то там есть представители с нормами, сколь угодно близкими к единице. Поэтому можно добавить ещё одно свойство:

3. $\|x_n\| \to 1$. □

10.2.4. Упражнения

Пусть X, E – банаховы пространства, $T \in L(X,E)$.

1. Для того, чтобы оператор T^* был ограничен снизу с константой c, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $T(B_X) \supset cB_E$.
2. Для того, чтобы оператор T был ограничен снизу с константой c, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $T^*(B_{E^*}) \supset cB_{X^*}$.
3. Для того, чтобы оператор T^* был сюръективен, необходимо и достаточно, чтобы оператор T был ограничен снизу.
4. Для того, чтобы оператор T был сюръективен, необходимо и достаточно, чтобы оператор T^* был ограничен снизу.
5. Для того, чтобы оператор T был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оператор T^* был изоморфизмом.

6. **Теорема.** Для необратимости оператора $T \in L(X, E)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих взаимно исключающих возможностей:

- оператор T не инъективен.
- Оператор T инъективен, но не ограничен снизу.
- Оператор T ограничен снизу, но не сюръективен.

7. Последняя из перечисленных в предыдущем упражнении возможностей означает, в частности, неинъективность оператора T^*.

8. На примере оператора интегрирования: $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tf)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ убедитесь, что непрерывный линейный оператор может быть инъективным, но не ограниченным снизу. Сопоставить этот пример с результатом упражнения 2 п. 6.4.1.

Пусть $g \in C[0,1]$ – фиксированная функция. Определим оператор $T_g : C[0,1] \to C[0,1]$ равенством $T_g(f) = f \cdot g$. Проверить, что:

9. Оператор T_g непрерывен и $\|T_g\| = \|g\|$;

10. Оператор T_g будет инъективным в том и только том случае, если множество $g^{-1}(0)$ не имеет внутренних точек;

11. Оператор T_g будет ограниченным снизу в том и только том случае, если функция g нигде не обращается в ноль.

12. Пусть теперь оператор T_g умножения на функцию $g \in C[0,1]$ рассматривается как оператор, действующий из $L_1[0,1]$ в $L_1[0,1]$. Чему равна норма такого оператора? Как в этом случае записываются критерии инъективности и ограниченности снизу? Критерий замкнутости образа? Изменятся ли ответы для $g \in L_\infty[0,1]$?

10.3. График оператора

10.3.1. Теорема о замкнутом графике

Пусть X, Y – нормированные пространства. Тогда декартово произведение $X \times Y$ будет линейным пространством по отношению к операциям покоординатного сложения и умножения на скаляр. Определим норму на $X \times Y$ формулой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Легко видеть, что это выражение подчиняется аксиомам нормы; что сходимость в этой норме совпадает с покоординатной сходимостью $(x_n, y_n) \to (x, y)$ в $X \times Y$ в том и только том случае, если $x_n \to x$ в X и $y_n \to y$ в Y; и что для банаховых пространств X и Y декартово произведение $X \times Y$ будет банаховым пространством.

Графиком линейного оператора $T: X \to Y$ называется множество $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$. Предлагаем читателю самостоятельно проверить, что график линейного оператора – это линейное подпространство пространства $X \times Y$.

Теорема. Пусть X, Y – банаховы пространства. Линейный оператор $T: X \to Y$ будет непрерывным в том и только том случае, если график этого оператора замкнут в $X \times Y$.

Обычно эту теорему применяют в следующей, более подробной формулировке: T непрерывен тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in X$, если $x_n \to x$ в X и $Tx_n \to y$ в Y, то $y = Tx$ (другими словами, если последовательность (x_n, Tx_n) точек графика стремится к точке $(x, y) \in X \times Y$, то $(x, y) \in \Gamma(T)$).

Доказательство. Пусть T непрерывен и $x_n \to x$. Тогда $Tx_n \to Tx$. Если к тому же $Tx_n \to y$, то $y = Tx$.

Обратно, пусть $\Gamma(T)$ – замкнутое подпространство пространства $X \times Y$. Тогда $\Gamma(T)$ – банахово пространство. Рассмотрим вспомогательный оператор $U : \Gamma(T) \to X$, действующий по правилу $U(x, Tx) = x$. Ввиду неравенства $\|U(x, Tx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$ оператор U непрерывен (и $\|U\| \le 1$). Поскольку U биективен, по теореме об обратном операторе, $\|U^{-1}\|$ конечна. Соответственно, $\|Tx\| \le \|(x, Tx)\| = \|U^{-1}x\| \le \|U^{-1}\| \cdot \|x\|$, что означает требуемую непрерывность оператора T. □

Упражнения

1. Проверить, что определения декартового произведения нормированных пространств и графика оператора согласуются с определениями, рассмотренными в упражнениях 4-7 п. 1.3.2.
2. Согласно упражнению 6 п. 1.3.2, для нелинейных отображений теорема о замкнутом графике уже не будет иметь места. Где в доказательстве теоремы о замкнутом графике использовалась линейность оператора T?
3. Приведите пример, показывающий существенность условия полноты пространств в теореме о замкнутом графике.
4. Пространство $l_1 \times l_1$ изометрично пространству l_1.
5. Пространство $c_0 \times c_0$ изоморфно, но не изометрично пространству c_0.
6. Следующие нормы на $X \times Y$ эквивалентны исходной: $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, $\|(x, y)\|_2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}$.

10.3.2. Дополняемые подпространства

Пусть X – линейное пространство, X_1 и X_2 – подпространства этого пространства. Будем говорить, что X *разбивается в прямую сумму подпространств* X_1 и X_2 (сокращённая запись: $X = X_1 \oplus X_2$), если для любого элемента $x \in X$ существует **единственное** представление в виде суммы $x = x_1 + x_2$ с $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Теорема 1. Для выполнения соотношения $X = X_1 \oplus X_2$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие два условия:

(1) $X = X_1 + X_2$, то есть для любого $x \in X$ существует представление в виде $x = x_1 + x_2$, с $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$;
(2) $X_1 \bigcap X_2 = \{0\}$, то есть подпространства имеют тривиальное пересечение.

Доказательство. Покажем, что условие (2) эквивалентно единственности представления вида $x = x_1 + x_2$. Пусть дана единственность. Рассмотрим произвольный элемент $x \in X_1 \bigcap X_2$. Запишем два равенства $0 = 0 + 0$ и $0 = x + (-x)$. В обоих равенствах первое слагаемое лежит в X_1, а второе – в X_2. Ввиду единственности $x = 0$.

Обратно, пусть $X_1 \bigcap X_2 = \{0\}$. Предположим, что для какого-то $x \in X$ есть два разложения $x = x_1 + x_2$ и $x = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2$, где $x_1, \widetilde{x}_1 \in X_1$, а $x_2, \widetilde{x}_2 \in X_2$. Тогда $x_1 - \widetilde{x}_1 \in X_1$, и в то же время $x_1 - \widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2 - x_2 \in X_2$. Следовательно, $x_1 - \widetilde{x}_1 \in X_1 \bigcap X_2 = \{0\}$, то есть $x_1 = \widetilde{x}_1$. Аналогично, $x_2 = \widetilde{x}_2$, и единственность представления доказана. □

Напомним (п. 6.5.2), что линейный оператор $P : X \to X$ называется проектором на подпространство X_1, если $P(X) \subset X_1$ и $Px = x$ для любого $x \in X_1$. Очевидно, если P – проектор, то $P(Px) = Px$ для любого $x \in X$, то есть $P^2 = P$.

Теорема 2. Пусть оператор $P : X \to X$ подчиняется равенству $P^2 = P$. Тогда оператор P – это проектор на подпространство $P(X)$; оператор $Q = I - P$ – это проектор на подпространство $\mathrm{Ker}P$ и $X = P(X) \oplus \mathrm{Ker}P$.

Доказательство. Пусть $y \in P(X)$ – произвольный элемент образа. Тогда y имеет вид Px, $x \in X$, и $Py = P(Px) = P^2 x = Px = y$. Этим показано, что P – это проектор на $P(X)$.

Поскольку для оператора Q соотношение $Q^2 = Q$ также имеет место: $(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$, Q – это проектор на $Q(X)$. Покажем, что $Q(X) = \operatorname{Ker} P$. Действительно, $x \in \operatorname{Ker} P \Leftrightarrow Px = 0 \Leftrightarrow Qx = x \Leftrightarrow x \in Q(X)$.

Осталось проверить условие $X = P(X) \oplus \operatorname{Ker} P$. Во-первых, для любого $x \in X$ имеем представление $x = Px + Qx$. Так как $Px \in P(X)$, $Qx \in \operatorname{Ker} P$, этим доказано соотношение $X = P(X) + \operatorname{Ker} P$. Ввиду теоремы 1, для завершения доказательства осталось показать, что $P(X) \bigcap \operatorname{Ker} P = \{0\}$. Предположим, что $x \in P(X) \bigcap \operatorname{Ker} P$. Тогда, с одной стороны, $x \in P(X)$, то есть $x = Px$, а с другой стороны, $x \in \operatorname{Ker} P$, то есть $P\,x = 0$. Следовательно, $x = 0$. □

Пусть X – линейное пространство, X_1 и X_2 – подпространства этого пространства и $X = X_1 \oplus X_2$. Определим оператор $P: X \to X$ по следующему правилу. Для любого $x \in X$ вначале найдём разложение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ (это разложение по условию существует и единственно), а затем положим $P(x) = x_1$. Если $x = x_1 + x_2$ – разложение вектора x, $y = y_1 + y_2$ – разложение вектора y, то $ax + by = (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2)$ – разложение вектора $ax + by$. Соответственно, $P(ax + by) = ax_1 + by_1 = aPx + bPy$, и P – линейный оператор. Далее, по определению, $P(X) \subset X_1$, и для любого $x_1 \in X_1$ разложение $x_1 = x_1 + 0$ означает, что $Px_1 = x_1$. Таким образом, P – проектор на подпространство X_1. Этот проектор называется *проектором на подпространство X_1 параллельно подпространству X_2*.

Теорема 3. Пусть X – банахово пространство, X_1 и X_2 – замкнутые подпространства этого пространства и $X = X_1 \oplus X_2$. Тогда проектор P на X_1 параллельно X_2 – это непрерывный оператор.

Доказательство. Этот результат – центральный результат данного параграфа – можно рассматривать как типичный пример применения теоремы о замкнутом графике.

Нам нужно показать, что для любой последовательности $x_n \in X$, если $x_n \to x$ и $Px_n \to y$, то $y = Px$. Запишем разложение $x_n = x_{n,1} + x_{n,2}$ с $x_{n,1} \in X_1, x_{n,2} \in X_2$. По определению, $Px_n = x_{n,1}$. Следовательно, $x_{n,1} \to y$, и ввиду замкнутости подпространства X_1 имеем $y \in X_1$. Далее, $x_{n,2} = x_n - x_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} x - y$. Опять ввиду замкнутости, но теперь уже подпространства X_2 $x - y \in X_2$. Таким образом, очевидное равенство

$x = y + (x - y)$ даёт нам разложение вектора x в сумму векторов из X_1 и X_2. Первое из этих слагаемых будет проекцией вектора x на X_1 параллельно X_2: $y = Px$. □

Замкнутое подпространство X_1 банахова пространства X называется *дополняемым подпространством*, если существует такое замкнутое подпространство $X_2 \subset X$ (называющееся *дополнением* к X_1), что $X = X_1 \oplus X_2$. Ввиду двух предыдущих теорем подпространство $X_1 \subset X$ будет дополняемым тогда и только тогда, когда существует проектор $P \in L(X, X)$ с $P(X) = X_1$. Дополняемые подпространства играют важную роль при продолжении операторов (п. 6.5.2). Легко привести примеры дополняемых подпространств (см. упражнения), но каждый пример недополняемого подпространства требует существенных усилий для своего обоснования. Классический пример недополняемого подпространства – это c_0 как подпространство пространства l_∞. Другой пример, возникающий естественным образом в теории рядов Фурье, читатель найдёт в упражнениях п. 10.4.4.

10.3.3. Упражнения

1. С помощью оператора $U: X_1 \times X_2 \to X$, $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ сведите теорему 1 к утверждению: линейный оператор инъективен в том и только том случае, если его ядро состоит только из нуля.
2. Пусть банахово пространство X разбивается в прямую сумму своих замкнутых подпространств X_1 и X_2. Тогда $X_1 \times X_2 \approx X$.
3. Доказать, что оператор, сопряженный к проектору, будет снова проектором. Описать ядро и образ сопряжённого проектора по известным ядру и образу исходного.
4. Приведите пример, показывающий существенность полноты пространства X в формулировке теоремы 3.
5. Любое одномерное подпространство банахова пространства дополняемо, и соответствующий проектор можно выбрать с $\|P\| = 1$.
6. Любое конечномерное подпространство банахова пространства дополняемо.
7. Любое замкнутое подпространство конечной коразмерности дополняемо.
8. Пусть X_1 – подпространство банахова пространства X, X_2 – подпространство пространства X_1 и X_2 дополняемо в X. Тогда X_2 дополняемо в X_1.
9. Пространство l_∞ дополняемо в любом объемлющем банаховом пространстве.

10. Более общий результат: пусть подпространство X_1 банахова пространства X инъективно (см. п. 9.3.4). Тогда X_1 дополняемо в X.
11. Докажите дополняемость в $C[-1,1]$ подпространства всех чётных функций.
12. Докажите дополняемость в $C[-1,1]$ подпространства всех нечётных функций.
13. Докажите дополняемость в $C[-1,1]$ подпространства функций, равных 0 на $[-1,0]$.
14. Пусть X_1 – дополняемое подпространство банахова пространства X. Тогда любое дополнение к X_1 изоморфно факторпространству X / X_1.

10.4. Принцип равномерной ограниченности и его приложения

10.4.1. Теорема Банаха – Штейнгауза о поточечно ограниченных семействах операторов

Определение. Пусть X, Y – нормированные пространства. Семейство $G \subset L(X,Y)$ непрерывных линейных операторов называется *поточечно ограниченным*, если для любого $x \in X$

$$\sup_{T \in G} \|Tx\| < \infty.$$

Семейство G называется *равномерно ограниченным*, если $\sup_{T \in G} \|T\| < \infty.$

Теорема (принцип равномерной ограниченности). Поточечно ограниченное семейство непрерывных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y, ограничено равномерно.

Доказательство. Пусть $G \subset L(X,Y)$ – поточечно ограниченное семейство. Для любого $x \in X$ введём обозначение $M_x = \sup_{T \in G} \|Tx\|$. Рассмотрим множества $A_n = \{x \in X : M_x \le n\}$. Эти множества замкнуты и в объединении дают всё пространство X. Следовательно, по теореме Бэра, хотя бы одно из множеств A_n не является нигде не плотным и, следовательно, содержит некоторый шар. То есть существуют номер $n \in \mathbb{N}$ и такой шар вида $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$, что для любого $x \in x_0 + rB_X$ при всех $T \in G$ выполнено неравенство $\|Tx\| \le n$. Тогда для любых $x \in B_X$, $T \in G$ выполнена оценка

$$\|Tx\| = \left\| \frac{1}{r} T(x_0 + rx) - Tx_0 \right\| \le \frac{1}{r} n + n.$$

Взяв в последнем неравенстве супремум по $x \in B_X$, получим, что $\|T\| \le \frac{1}{r}n + n$ для любого $T \in G$. Этим доказана требуемая равномерная ограниченность семейства G. □

Упражнения

1. Докажите замкнутость множеств A_n, определённых выше.
2. Где в доказательстве использовалась полнота пространства X?
3. Пусть $\boldsymbol{P}_1$ – пространство полиномов из упражнения 9 п. 6.4.3, $D_n : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1$ – операторы взятия n-ной производной. Проверить, что операторы nD_n образуют поточечно ограниченную, но не равномерно ограниченную последовательность.
4. Приведите пример поточечно ограниченной, но не равномерно ограниченной последовательности непрерывных функций на отрезке [0,1].
5. Выведите доказанный выше принцип равномерной ограниченности из теоремы о замкнутом графике по следующей схеме. Пусть $G \subset L(X,Y)$ – поточечно ограниченное семейство. Рассмотрим вспомогательное пространство $l_\infty(G \times B_{Y^*})$ всех ограниченных функций на $G \times B_{Y^*}$ с sup-нормой. Определим оператор $U : X \to l_\infty(G \times B_{Y^*})$ формулой $(Ux)(T, y^*) = y^*(Tx)$. У этого оператора замкнутый график, следовательно, он непрерывен. Имеем
$$\sup_{T\in G}\|T\| = \sup_{x\in B_X}\sup_{T\in G}\|T\| = \sup_{x\in B_X}\sup_{T\in G}\sup_{y^*\in B_{Y^*}}\left|y^*(Tx)\right| = \sup_{x\in B_X}\|Ux\| = \|U\| < \infty.$$

10.4.2. Поточечная сходимость операторов

Напомним (п. 6.4.4), что последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$ называется поточечно сходящейся к оператору $T \in L(X,Y)$, если для любого $x \in X$ последовательность значений $T_n x$ стремится к Tx. Поскольку поточечно сходящаяся последовательность будет и поточечно ограниченной, следующая теорема непосредственно вытекает из принципа равномерной ограниченности.

Теорема Банаха–Штейнгауза. Поточечно сходящаяся последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y, равномерно ограничена. □

Пусть X, Y – нормированные пространства, A – подмножество в X. Последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$ называется *поточечно* *сходящейся на* A к оператору $T \in L(X,Y)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ для любого $x \in A$.

Критерий поточечной сходимости. Если равномерно ограниченная последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, сходится поточечно на плотном подмножестве $A \subset X$ к оператору $T \in L(X,Y)$, то $T_n \to T$ поточечно на всём X.

Доказательство. Обозначим $\sup\limits_n \|T_n - T\|$ через M. Зафиксируем $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $a \in A$ приближает x с точностью до $\frac{\varepsilon}{M}$: $\|x - a\| \le \frac{\varepsilon}{M}$. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|(T_n - T)x\| \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \|(T_n - T)(x-a)\| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \|(T_n - T)a\| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \|(T_n - T)(x-a)\| \le M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε это означает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|(T_n - T)x\| = 0$, то есть $T_n x \to Tx$. □

Упражнения

1. Пусть $T_n, T \in L(X,Y)$, $\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда T_n сходится к T поточечно.
2. Пусть X, Y – банаховы пространства, $T_n, T \in L(X,Y)$, $U_n, U \in L(Y,Z)$, T_n сходится поточечно к T и U_n сходится поточечно к U. Тогда $U_n T_n$ сходится поточечно к UT.
3. Выведите критерий поточечной сходимости, опираясь на упражнение 9 п. 1.2.1, по следующей схеме: ввести в рассмотрение пространство $l_\infty(\mathbb{N}, Y)$ всех ограниченных последовательностей элементов пространства Y с нормой $\left\|(y_n)_{n=1}^\infty\right\| = \sup\limits_n \|y_n\|$. Рассмотреть подпространство $c_0(\mathbb{N}, Y) \subset l_\infty(\mathbb{N}, Y)$ стремящихся к нулю последовательностей и доказать его замкнутость. Определить оператор $U : X \to l_\infty(\mathbb{N}, Y)$ формулой $Ux = (T_1 x, T_2 x, \ldots)$. Если T_n сходится на плотном подмножестве A к 0, то $U(A) \subset c_0(\mathbb{N}, Y)$. Если к тому же T_n – ограниченная последовательность операторов, то оператор U непрерывен. Следовательно, $U(X) \subset c_0(\mathbb{N}, Y)$, то есть последовательность T_n сходится поточечно к 0 на всём X.
4. Пусть X, Y – метрические пространства, A – плотное подмножество в X, $f_n, f : X \to Y$ – функции, удовлетворяющие условию Липшица с

общей константой C. Тогда из поточечной сходимости на A последовательности f_n к f следует поточечная сходимость на всём X.

5. Пусть X, Y – банаховы пространства, A – плотное подмножество в X. Для того, чтобы последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$ поточечно сходилась на X и её предел был непрерывным оператором, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:
   (1) последовательность T_n ограничена;
   (2) для любого $x \in A$ последовательность значений $T_n x$ фундаментальна.
6. Приведите пример поточечно ограниченной последовательности непрерывных функций на отрезке [0,1], сходящейся к нулю на плотном подмножестве, но не сходящейся к нулю на всём отрезке.
7. Пусть последовательность операторов $T_n \in L(X,Y)$ сходится поточечно на подмножестве $A \subset X$ к оператору $T \in L(X,Y)$. Тогда T_n сходится к T на $\operatorname{Lin} A$.

Замечание. Ввиду последнего упражнения, требование плотности, налагаемое на множество A в вышедоказанном критерии поточечной сходимости, может быть ослаблено: достаточно требовать, чтобы $\operatorname{Lin} A$ была плотным множеством.

8. Для того, чтобы последовательность операторов $T_n \in L(l_1, Y)$ сходилась поточечно к оператору $T \in L(l_1, Y)$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия: $\sup\limits_{n,m} \|T_n e_m\| < \infty$ и $\forall m \in \mathbb{N} \quad T_n e_m \xrightarrow[n\to\infty]{} T e_m$. (терминологию см. в упражнении 6 п. 6.3.4. Также см. упражнение 4 п. 6.4.3).
9. Рассмотрим функционалы $f_n \in l_1^*$, действующие по правилу $f_n(a_1, a_2, \ldots) = a_n$. Докажите, что последовательность f_n стремится поточечно к нулю, но $\|f_n\| = 1$, и, следовательно, по норме эта последовательность к нулю не стремится.

10.4.3. Две теоремы о рядах Фурье на отрезке

Теорема 1. Пусть g_n – равномерно ограниченная на $[a,b]$ последовательность измеримых функций, подчиняющаяся следующему условию: $\int\limits_{\Delta} g_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любого отрезка $\Delta \subset [a,b]$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} f(t) g_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любой функции $f \in L_1[a,b]$.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{n,t} |g_n(t)| < \infty$. Зададим линейные функционалы F_n на $L_1[a,b]$ по правилу $F_n(f) = \int_{[a,b]} f(t) g_n(t) dt.$ Ввиду неравенства $|F_n(f)| \le M \int_{[a,b]} |f(t)| dt = M \|f\|$ функционалы F_n непрерывны и $\|F_n\| \le M$. По условию, функционалы F_n сходятся к 0 на любой функции вида $\mathbf{1}_\Delta$. Следовательно, последовательность F_n сходится к 0 и на любой кусочно-постоянной функции. Поскольку множество кусочно-постоянных функций плотно в $L_1[a,b]$ (см. ниже упражнение 1 п. 10.4.4), для завершения доказательства остаётся применить критерий поточечной сходимости, доказанный в п. 10.4.2. □

Для функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$ определим коэффициенты Фурье $\hat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ формулой $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt.$

Следствие 1. Для любой интегрируемой функции f на $[a,b]$ интегралы вида $\int_a^b f(t) e^{i\alpha t} dt,$ $\int_a^b f(t) \sin \alpha t\, dt$ или $\int_a^b f(t) \cos \alpha t\, dt$ стремятся к нулю при $\alpha \to \pm\infty.$ В частности, стремятся к нулю коэффициенты Фурье любой функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Применить предыдущую теорему на отрезке $[a,b]$ к функциям $g_n(t) = e^{i\alpha_n t},$ $g_n(t) = \sin \alpha_n t$ или $g_n(t) = \cos \alpha_n t$ с вещественными $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$ Условие $\int_\Delta g_n(t) dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любого отрезка $\Delta = [c,d]$ проверяется прямым вычислением соответствующего интеграла. □

Обозначим через $C(\mathbf{T})$ подпространство пространства $C[-\pi,\pi]$, состоящее из функций g, удовлетворяющих условию $g(-\pi) = g(\pi)$. Каждую функцию $f \in C(\mathbf{T})$ можно продолжить с отрезка $[-\pi,\pi]$ на всю ось как 2π-периодическую непрерывную функцию. Соответственно, элементы пространства $C(\mathbf{T})$ будем считать непрерывными 2π-периодическими функциями, определёнными на всей оси. Через $S_n f$ обозначим частную сумму ряда Фурье: $(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt}$. Для полноты изложения напомним формулу, наверняка знакомую читателю по курсу анализа:

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \frac{\sin(n+1/2)\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau. \qquad (1)$$

Чтобы вывести это соотношение, подставим в определение частных сумм $S_n g$ формулу для коэффициентов Фурье:

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)} dx.$$

Проведя замену переменных $\tau = x - t$ и воспользовавшись тем, что интеграл от 2π-периодической функции по любому отрезку длины 2π совпадает с интегралом по $[-\pi, \pi]$, получаем, что

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \frac{e^{-in\tau} - e^{i(n+1)\tau}}{1 - e^{i\tau}} d\tau.$$

Для получения формулы (1) остаётся поделить числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $e^{i\tau/2}$ и воспользоваться формулой $e^{ix} - e^{-ix} = 2\sin x$.

Как известно из курса анализа, ряд Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}$ непрерывно дифференцируемой функции f равномерно сходится к этой функции. В то же время, если отказаться от условия дифференцируемости, такое утверждение уже неверно. Более того, существуют непрерывные функции, для которых ряд Фурье не сходится поточечно. Следующая теорема показывает, как можно доказывать существование подобных примеров, не конструируя их явным образом. Подобное рассуждение оказывается особенно полезным в ситуациях, где явное построение и обоснование примера сопряжено со значительными трудностями.

Теорема 2. Существует функция $g \in C(\mathbf{T})$, для которой значения $(S_n g)(0)$ частных сумм ряда Фурье в нуле образуют неограниченную последовательность.

Доказательство. Зададим линейные функционалы G_n на $C(\mathbf{T})$ по правилу $G_n(g) = (S_n g)(0)$. Нам нужно доказать, что G_n не образуют поточечно ограниченной последовательности функционалов. Ввиду принципа равномерной ограниченности для этого достаточно показать, что функционалы G_n непрерывны, но их нормы не ограничены в совокупности. Согласно (1), $G_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t} dt.$

Соответственно (см. упражнение 2 п. 10.4.4),

$$\|G_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t} \right| dt < \infty,$$

то есть функционалы G_n непрерывны. Оценим их нормы снизу:

$$\|G_n\| \geq \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{t} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{\pi k}{n+1/2}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1/2}} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{t} \right| dt$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+1/2}{\pi(k+1)} \int_{\frac{\pi k}{n+1/2}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1/2}} |\sin(n+1/2)t| dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin\tau| d\tau$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)} \geq \frac{4}{\pi^2} \int_{2}^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{4}{\pi^2} \ln\frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, $\|G_n\| \geq \frac{4}{\pi^2} \ln\frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. □

10.4.4. Упражнения

1. Докажите плотность множества кусочно-постоянных функций в $L_1[-\pi,\pi]$, используя следующую схему рассуждения: во-первых, $C[-\pi,\pi]$ плотно в $L_1[-\pi,\pi]$ (этот факт нам уже знаком, даже в более общей ситуации − см. теорему 1 п. 8.3.3). Далее, каждую непрерывную функцию можно приблизить в метрике $L_1[-\pi,\pi]$ (и даже равномерно) кусочно-постоянными функциями.
2. По функции $v \in L_1[-\pi,\pi]$ зададим линейный функционал V на $C(\mathbf{T})$ формулой $V(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)v(t)dt$. Опираясь на теорему об общем виде линейного функционала в $C(K)$, докажите, что $\|V\| = \int_{-\pi}^{\pi} |v(t)|dt.$
3. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[-\pi,\pi]$ и подчиняется *условию Дини* в точке $x_0 \in [-\pi,\pi]$: $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \in L_1[-\pi,\pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.

Решив следующую цепочку упражнений, читатель, в частности, сможет обосновать недополняемость в $C(\mathbf{T})$ подпространства $A(\mathbf{T})$, образованного замыканием в $C(\mathbf{T})$ линейной оболочки последовательности функций $\left\{e^{ikt}\right\}_{k=0}^{+\infty}$.

4. Рассмотрим частную сумму ряда Фурье S_n как оператор, действующий из $C(\mathbf{T})$ в $C(\mathbf{T})$: $(S_n g)(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt}$. Докажите, что S_n – это проектор на подпространство $E_n = \mathrm{Lin}\left\{e^{ikt}\right\}_{k=-n}^{n}$. Докажите, что $\|S_n\|$ совпадает с нормой функционала G_n из доказательства теоремы 2 и, следовательно, $\|S_n\| \geq \dfrac{4}{\pi^2} \ln \dfrac{n+1}{2}$.

5. Через U_τ обозначим оператор сдвига на τ в $C(\mathbf{T})$: $(U_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. Проверьте, что U_τ биективно отображает $C(\mathbf{T})$ в $C(\mathbf{T})$ и $\|U_\tau f\| = \|f\|$ для любого $f \in C(\mathbf{T})$.

Пусть $P \in L(C(\mathbf{T}), C(\mathbf{T}))$ – какой-то проектор на $A(\mathbf{T})$. Для любого $f \in C(\mathbf{T})$ рассмотрим функцию $(\widetilde{P}f)(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (U_\tau P U_{-\tau} f)(t) d\tau$. Докажите, что так введённое «усреднение по сдвигам» оператора P обладает следующими свойствами:

6. $\widetilde{P}f \in C(\mathbf{T})$ для любого $f \in C(\mathbf{T})$.

7. $\widetilde{P} \in L(C(\mathbf{T}), C(\mathbf{T}))$ и $\|\widetilde{P}\| \leq \|P\|$.

8. $\widetilde{P}$ – проектор на $A(\mathbf{T})$.

9. Оператор $\widetilde{P}$ коммутирует со сдвигами: $\widetilde{P}U_\tau = U_\tau \widetilde{P}$ для любого τ. В частности, если ввести обозначение $g_k = \widetilde{P}(e^{ikt})$, то $g_k(t+\tau) = g_k(t) e^{ik\tau}$. При $t = 0$ имеем $g_k(\tau) = g_k(0) e^{ik\tau}$.

10. Из упражнения 8 и последнего равенства следует, что $\widetilde{P}(e^{ikt}) = e^{ikt}$ при $k \geq 0$ и $\widetilde{P}(e^{ikt}) = 0$ при $k < 0$.

11. Пусть $f \in C(\mathbf{T})$, $g = \widetilde{P}f$. Тогда $\hat{g}_k = \hat{f}_k$ при $k \geq 0$, а при $k < 0$ $\hat{g}_k = 0$.

12. Оператор $\widetilde{P}$ связан с оператором S_n частной суммы ряда Фурье тождеством $S_n(f) = e^{i(n+1)t}(I - \widetilde{P})(e^{-i(2n+1)t} \widetilde{P}(e^{int} f))$. Следовательно, $\|I - \widetilde{P}\| \cdot \|\widetilde{P}\| \geq \|S_n\|$.

13. Ввиду произвольности n в предыдущем упражнении и упражнения 4, оператор $\widetilde{P}$ разрывен. Это противоречит упражнению 7. Этим доказано, что не существует проектора из $C(\mathbf{T})$ на $A(\mathbf{T})$, то есть $A(\mathbf{T})$ – недополняемое в $C(\mathbf{T})$ подпространство.

14. Пусть $P_n \in L(C(\mathbf{T}), C(\mathbf{T}))$ – какой-то проектор на $E_n = \mathrm{Lin}\{e^{ikt}\}_{k=-n}^{n}$. Снова рассмотрев усреднение по сдвигам – проектор $(\widetilde{P}_n f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(U_\tau P_n U_{-\tau} f)(t)d\tau$, докажите, что $\|P_n\| \geq \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+1}{2}$. То есть такая оценка выполнена для любого проектора на E_n, а не только для оператора частной суммы ряда Фурье.
15. Зафиксируем для каждого $n \in \mathbb{N}$ какой-то набор $K_n \subset [-\pi, \pi)$ из $2n+1$ точки отрезка. Для любой функции $f \in C(\mathbf{T})$ обозначим через $T_n f$ интерполяционный тригонометрический полином этой функции: $T_n f \in \mathrm{Lin}\{e^{ikt}\}_{k=-n}^{n}$, и $(T_n f)(t) = f(t)$ в каждой точке $t \in K_n$. Докажите, опираясь на предыдущее упражнение и теорему Банаха – Штейнгауза, что существует функция $f \in C(\mathbf{T})$, для которой последовательность $T_n f$ её интерполяций не стремится к самой функции f.

10.5. Понятие о базисе Шаудера[1]

10.5.1. Определение и простейшие свойства

Читателю уже знакомо одно обобщение на бесконечномерный случай понятия базиса. Это – базис Гамеля, существование которого было доказано в п. 5.1.3. Хотя базис Гамеля и существует в любом линейном пространстве, для банаховых пространств он оказывается не слишком удобным в применении. Во-первых, базис Гамеля бесконечномерного банахова пространства несчётен (упражнение 4 п. 6.3.4). Далее, несмотря на теорему существования, ни в одном конкретном бесконечномерном банаховом пространстве не известно ни одного примера базиса Гамеля. Наконец, базис Гамеля никак не связан с топологической структурой пространства. Скажем, если последовательность элементов банахова пространства стремится к некоторому пределу, коэффициенты разложений по базису Гамеля могут и не стремиться к коэффициентам предельного

[1] J. Schauder. Этому представителю Львовской математической школы и ученику Банаха мы обязаны многими плодотворными идеями. Шаудер, например, первым использовал теорему Бэра для доказательства теоремы об открытом отображении; Шаудеру же принадлежит теорема о компактности сопряжённого оператора (теорема 3 п. 11.3.2), лежащая в основе теории компактных операторов. Трудно переоценить значение принципа неподвижной точки (п. 15.1.4). Так что, услышав это имя, читатель должен быть готов к восприятию чего-то ценного для своего математического образования.

элемента. Поэтому основным в теории банаховых пространств понятием базиса служит не базис Гамеля, а базис Шаудера, к изучению которого мы сейчас приступаем.

Определение. Последовательность $\{e_n\}_1^\infty$ элементов банахова пространства X называется *базисом* (или, что то же самое, *базисом Шаудера*) в X, если для любого элемента $x \in X$ существует единственная последовательность коэффициентов $\{a_n\}_1^\infty$, для которых ряд $\sum_1^\infty a_n e_n$ сходится к x. Ряд $\sum_1^\infty a_n e_n$ называется *разложением элемента* x *по базису* $\{e_n\}_1^\infty$, а числа $\{a_n\}_1^\infty$ называются *коэффициентами разложения*.

Примером базиса может служить ортонормированный базис гильбертова пространства. Этот пример будет подробно изучен в параграфе 12.3.3. Другой пример – канонический базис пространства l_1 – уже встречался нам в упражнении 6 п. 6.3.4. Ниже, в главе 14, мы покажем, что тригонометрическая система образует базис в L_p на отрезке при $1 < p < \infty$. Многочисленные примеры базисов во всех классических сепарабельных банаховых пространствах, различные классы базисов и их обобщения Читатель найдёт в фундаментальном двухтомнике Зингера [Sin1], [Sin2]. Современный обзор по различным классам базисов в пространствах функций дан Фигелем и Войтащиком в гл. 14 сборника [HAND].

Упражнения

1. Элементы базиса линейно независимы между собой. В частности, элемент базиса не может равняться нулю.
2. Базис $\{e_n\}_1^\infty$ банахова пространства X – это полное в X множество: $\overline{\mathrm{Lin}}\{e_n\}_1^\infty = X$.
3. Используя свойства рядов Тейлора докажите, что последовательность $1, t, t^2, t^3, \ldots$ не образует базиса в пространстве $C[0,1]$. Этим будет доказано, что в отличие от конечномерного случая полнота и линейная независимость не образуют вместе достаточного условия базисности.
4. Если банахово пространство X имеет базис Шаудера, то X бесконечномерно и сепарабельно.

Пусть X – одно из пространств последовательностей l_p $(1 \le p \le \infty)$ или c_0. *Каноническим базисом* пространства X называется следующая система векторов $\{e_n\}_1^\infty$: $e_1 = (1,0,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots)$, …. Докажите, что:

5. Канонический базис пространства c_0 – это базис.
6. Канонический базис пространства l_∞ не будет базисом этого пространства.
7. При $1 \le p < \infty$ канонический базис пространства l_p – это базис.
8. Пространство l_∞ несепарабельно, следовательно, там нет никакого базиса Шаудера.

Весьма непростой оказалась поставленная ещё С. Банахом проблема: каждое ли сепарабельное бесконечномерное банахово пространство имеет базис. Отрицательный ответ на этот вопрос был дан в 1973 году П. Энфло [Enf] (см. также [L-T], параграф 2.d).

10.5.2. Координатные функционалы и операторы частных сумм

Определение. Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – это базис банахова пространства X, $x \in X$. Обозначим через $e_n^*(x)$ коэффициенты разложения элемента x по базису $\{e_n\}_1^\infty$, а через $S_n(x)$ – частные суммы этого разложения: $S_n(x) = \sum_1^n e_k^*(x)\, e_k$.

Утверждение. e_n^* – это линейные функционалы на X, а S_n – линейные операторы, действующие из X в X.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, a, b – произвольные скаляры. Тогда имеем следующие разложения:

$$x = \sum_1^\infty e_k^*(x)\, e_k,\ \ y = \sum_1^\infty e_k^*(y)\, e_k,\ \ ax + by = \sum_1^\infty e_k^*(ax+by)\, e_k.$$

Следовательно, $\sum_1^\infty \left(ae_k^*(x) + be_k^*(y)\right) e_k = \sum_1^\infty e_k^*(ax+by)\, e_k$. Ввиду единственности разложения элемента по базису получаем, что $ae_k^*(x) + be_k^*(y) = e_k^*(ax+by)$. □

В дальнейшем функционалы e_n^* мы будем называть координатными функционалами, а операторы S_n – операторами частных сумм по базису $\{e_n\}_1^\infty$.

Теорема (С. Банах). Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – это базис банахова пространства X. Тогда операторы S_n частных сумм непрерывны и $\sup_n \|S_n\| = C < \infty$.

Доказательство. Введём в рассмотрение вспомогательное пространство E всех числовых последовательностей $a = (a_n)_1^\infty$, для которых ряд $\sum_1^\infty a_n e_n$ сходится. Наделим пространство E нормой $\|a\| = \sup\left\{\left\|\sum_1^N a_n e_n\right\| : N = 1, 2, \ ...\right\}$. Как отмечено в п. 6.3.4, упражнение 1, E – это банахово пространство. Определим оператор $T : E \to X$ равенством $Ta = \sum_1^\infty a_n e_n$. Оператор T биективен, так как $\{e_n\}_1^\infty$ – базис. Из очевидного неравенства $\| Ta \| \le \| a \|$ следует непрерывность оператора. Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе, оператор T^{-1} также непрерывен. Это означает существование такой константы C, что $\| a \| \le C \| Ta \|$ для любого $a \in E$. Другими словами, для любого $a \in E$

$$\sup\left\{\left\|\sum_1^N a_n e_n\right\| : N = 1,2, ...\right\} \le C\left\|\sum_1^\infty a_n e_n\right\|.$$

Последнее неравенство влечёт требуемые непрерывность и ограниченность в совокупности операторов частных сумм. □

Следствие. Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – это базис банахова пространства X. Тогда координатные функционалы e_n^* непрерывны и $\sup_n \{\| e_n \| \cdot \| e_n^* \|\} < \infty$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться оценкой $\left\|e_n^*(x) e_n\right\| = \|(S_n - S_{n-1})(x)\| \le (\|S_n\| + \|S_{n-1}\|)\|x\| \le 2C\|x\|$, где C – константа из предыдущей теоремы.□

10.5.3. Линейные функционалы в пространстве с базисом

Пусть X – банахово пространство с базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тогда любой линейный функционал $f \in X^*$ однозначно определяется своими значениями на элементах базиса. Другими словами, каждый функционал f можно отождествить с числовой последовательностью $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ...)$, а пространство X^* – с множеством всех таких числовых последовательностей. Более строго этот факт сформулирован в следующей теореме, доказательство которой, ввиду его простоты, оставляем читателю.

Теорема 1. Для любого $f \in X^*$ введём обозначение $Uf = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ...)$. Обозначим через $\widetilde{X}$ множество всех числовых последовательностей вида Uf, $f \in X^*$. Тогда $\widetilde{X}$ – это линейное пространство по отношению к покоординатным операциям, а U – это биективное линейное отображение пространства X^* на пространство $\widetilde{X}$. Далее, пусть $f \in X^*$, $Uf = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$. Тогда для любого $x = \sum_1^\infty x_n e_n \in X$ действие функционала f на элемент x можно вычислить по правилу $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n f_n$. □

Теорема 2. Пусть $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ – последовательность чисел. Введём обозначение $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^N a_n f_n\right| : N \in \mathbb{N}, \left\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\right\| \le 1\right\}$. Для того, чтобы последовательность чисел $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ принадлежала пространству $\widetilde{X}$, необходимо и достаточно, чтобы величина $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$ была конечной. При этом если $f \in X^*$ – функционал, порождающий последовательность $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$, то $\|f\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$.

Доказательство. Подпространство (незамкнутое) $Y = \mathrm{Lin}\{e_n\}_{n=1}^\infty$ плотно в X. Как легко видеть, условие $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} < \infty$ эквивалентно следующему: линейный функционал f, заданный на Y равенством $f\left(\sum_{n=1}^N a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^N a_n f_n$, непрерывен. При этом норма этого функционала совпадает с $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$. Поскольку любой непрерывный линейный функционал, заданный на Y, продолжается по непрерывности (п. 6.5.1) единственным образом на всё X, это эквивалентно существованию функционала $f \in X^*$, действующего на линейные комбинации векторов базиса по правилу $f\left(\sum_{n=1}^N a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^N a_n f_n$. Так как при этом $Uf = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$, последнее условие эквивалентно тому, что $(f_1, f_2, ..., f_n, ...) \in \widetilde{X}$. Наконец, равенство $\|f\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$ означает просто, что норма ограничения функционала $f \in X^*$ на плотное подпространство Y – величина $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}}$ – совпадает с $\|f\|$. □

В приводимых ниже примерах и упражнениях пространство $\widetilde{X}$ мы будем рассматривать как нормированное пространство, наделённое нормой из теоремы 2. Теорема 2 означает, в частности, что нормированные пространства X^* и $\widetilde{X}$ изоморфны, и оператор U осуществляет этот изоморфизм (и даже изометрию).

Пример 1. Пусть $X = c_0$ с каноническим базисом $\{e_n\}_1^\infty$: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots$. Тогда $\|(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)\|_{\widetilde{X}} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, и, следовательно, пространство $\widetilde{X}$ совпадает с l_1. Действительно, в этом случае условие $\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \le 1$ означает просто, что все a_n не превосходят 1 по модулю. При таком условии наибольшее возможное значение величины $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right|$ – это $\sum_{n=1}^{N} |f_n|$ (это значение достигается при $a_n = \operatorname{sign} f_n$). Имеем

$$\|(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)\|_{\widetilde{X}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| : N \in \mathbb{N}, \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \le 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} |f_n| : N \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|. \ \square$$

Учитывая то, что, по теореме 2, пространство $\widetilde{X}$ можно отождествить с сопряженным пространством, последний пример сокращённо записывают в виде равенства $(c_0)^* = l_1$. Подробно эта запись расшифровывается как **теорема об общем виде линейного функционала в** c_0: каждый элемент $(f_1, f_2, \ldots)$ пространства l_1 порождает непрерывный линейный функционал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ на c_0, и норма функционала f совпадает с нормой элемента $(f_1, f_2, \ldots)$ в l_1. Обратно, каждый функционал $f \in (c_0)^*$ порождается некоторым элементом $(f_1, f_2, \ldots)$ пространства l_1 по описанному выше правилу, причём элемент $(f_1, f_2, \ldots)$ определяется по функционалу f однозначно.

Пример 2. Пусть $X = l_1$ с каноническим базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тогда $\|(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)\|_{\widetilde{X}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$, и, следовательно, пространство $\widetilde{X}$ совпадает с l_∞. Другими словами, $(l_1)^* = l_\infty$.

Действительно, в этом случае, если $\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \le 1$, то $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \le 1$, и $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. Соответственно, $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. С другой стороны, подставив в определение нормы на пространстве $\widetilde{X}$ вместо линейной комбинации $\sum_{n=1}^{N} a_n e_n$ один базисный вектор e_n, получим оценку $\|(f_1, f_2, ...)\|_{\widetilde{X}} \ge |f_n|$. Перейдя супремуму по n, получаем неравенство $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\widetilde{X}} \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. □

Упражнения

1. Расшифруйте равенство $(l_1)^* = l_\infty$ из примера 2 в виде теоремы об общем виде линейного функционала в l_1.
2. Опираясь на полноту сопряжённого пространства (п. 6.4.5) и теорему 2, докажите полноту пространств l_1 и l_∞.
3. Пусть $1 < p < \infty$, p' − сопряженный показатель: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Используя неравенство Гёльдера для конечных сумм

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|^{p'}\right)^{1/p},$$

выведите теорему об общем виде линейного функционала в l_p, $1 < p < \infty$: $(l_p)^* = l_{p'}$. Докажите полноту пространств l_p при $1 < p < \infty$.
4. Как мы уже отмечали в упражнении 6 п. 10.5.1, канонический базис пространства l_∞ не будет базисом этого пространства. Соответственно, для l_∞ мы не можем пользоваться описанием функционалов в пространстве с базисом. Докажите, что существует функционал $f \in (l_\infty)^*$, который нельзя представить в виде $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ «скалярного умножения» на фиксированную числовую последовательность.

10.6. Комментарии к упражнениям

Параграф 10.4.2

Упражнение 2. По теореме Банаха – Штейнгауза, $\sup_n \|U_n\| = M < \infty.$ Для любого $x \in X$ имеем $\|(U_n T_n - UT)x\| \le \|U_n(T_n - T)x\| + \|(U_n - U)Tx\| \le$ $\le M\|(T_n - T)x\| + \|(U_n - U)Tx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Параграф 10.4.4

Упражнение 3. Обозначим $f(x_0) = a$. Имеем

$$(S_n f)(x_0) - a = (S_n(f - a))(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - a)\frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Применив теорему 1 п. 10.4.3 к $g_n(t) = \sin(n + 1/2)t,$ получаем требуемое условие $(S_n f)(x_0) \to a$. Другое оформление этого рассуждения см. п. 14.2.1.

Упражнения 6-11. Разбираемая здесь конструкция усреднения по сдвигам в более общем виде разобрана в учебнике У. Рудина [Rud], глава 5, пп. 5.15–5.19. Рудину же принадлежит и идея использования этой конструкции для доказательства недополняемости $A(\mathbf{T})$ в $C(\mathbf{T})$.

Параграф 10.5.3

Упражнение 4. Из теоремы 3 п. 9.2.2 применённой к $X = l_\infty$, $Y = c_0$ следует, что существует ненулевой функционал $f \in (l_\infty)^*$, аннулирующий всё c_0. Это и будет требуемый пример.

11. Элементы спектральной теории операторов. Компактные операторы

11.1. Алгебра операторов

Пусть X, Y – банаховы пространства. Пространство $L(X,Y)$ непрерывных операторов также образует банахово пространство в операторной норме; в этом пространстве естественным образом определены операции сложения операторов и умножения оператора на число. Читателю хорошо знакомо ещё одно действие – композиция (умножение) операторов. Отметим, что композиция, вообще говоря, не определена для пар элементов пространства $L(X,Y)$. Мы не можем задать композицию $A \circ B$, если оператор A не определён на образе оператора B. Ситуация изменится кардинальным образом в случае $X = Y$. Умножение оказывается корректно определённым, и пространство $L(X,X)$ (в дальнейшем для простоты будем обозначать его $L(X)$) будет алгеброй по отношению к операциям сложения и умножения операторов. То есть с операторами, действующими в одном пространстве, в каком-то смысле можно работать как с числами: складывать, умножать, совершать предельные переходы. Эта аналогия с числами оказывается весьма плодотворной. Она позволяет во многих случаях найти простые методы рассуждения для получения важных и полезных результатов. Чтобы понять, как пользоваться этой аналогией, удобно на какое-то время забыть, что мы имеем дело с операторами, и познакомиться с общими свойствами банаховых алгебр.

11.1.1. Банаховы алгебры: аксиоматика и примеры

Комплексное банахово пространство $\mathbf{A}$ с определённой на нем дополнительной операцией умножения элементов называется *банаховой алгеброй*, если умножение подчиняется следующим аксиомам:

- $a(bc) = (ab)c$ для любых $a, b, c \in \mathbf{A}$ (ассоциативность);
- $a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab)$ для любых $a, b \in \mathbf{A}$ и любого скаляра λ;
- $a(b+c) = ab + ac$ и $(a+b)c = ac + bc$ (распределительный закон);
- $\|ab\| \le \|a\| \cdot \|b\|$ для любых $a, b \in \mathbf{A}$ (мультипликативное неравенство треугольника);
- существует такой элемент $e \in \mathbf{A}$ (этот элемент называется единичным элементом алгебры $\mathbf{A}$), что умножение на e не изменяет элемента: $ea = ae = a$ для любого $a \in \mathbf{A}$;
- $\|e\| = 1$.

Естественным образом определяется понятие *подалгебры* (замкнутое линейное подпространство $X \subset \mathbf{A}$, устойчивое относительно операции умножения и содержащее элемент e) и *изоморфизма банаховых алгебр* (к определению изоморфизма банаховых пространств добавляется условие $T(ab) = T(a)T(b)$).

Один пример банаховой алгебры уже упоминался нами. Это – алгебра $L(X)$ непрерывных линейных операторов в банаховом пространстве X. Роль умножения здесь играет композиция операторов, а единичным элементом служит единичный оператор. Перечислим ещё несколько примеров. Проверку аксиом банаховой алгебры в этих примерах оставляем читателю в качестве упражнения.

Примеры

1. Пространство $C(K)$, наделённое обычным умножением функций. Единичным элементом здесь будет функция, равная тождественной единице.
2. Пространство $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ с обычным умножением.
3. Пространство l_∞ с покоординатным умножением.
4. Пространство l_1, где в качестве умножения рассматривается свёртка последовательностей. Напомним, что для $x, y \in l_1$, $x = (x_0, x_1, \ldots)$, $y = (y_0, y_1, \ldots)$ свёрткой $x * y$ называется вектор $\left((x*y)_0, (x*y)_1, \ldots, (x*y)_n, \ldots\right)$, координаты которого вычисляются по правилу $\left((x*y)_0, (x*y)_1, \ldots, (x*y)_n, \ldots\right)$, Единичным элементом служит вектор $e = (1,0,0,\ldots)$.
5. Пространство W, состоящее из тех функций $g \in C(\mathbf{T})$, коэффициенты Фурье которых подчиняются условию $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}_n\right| < \infty$. На этом пространстве рассматривается обычное умножение, а норма задаётся формулой $\|f\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}_n\right|$.

В примерах 1- 5 умножение коммутативно: $ab = ba$ для любых элементов $a, b \in \mathbf{A}$. Однако в аксиомы алгебры коммутативность умножения не включена. Более того, коммутативности нет в важнейшем для нас примере – алгебре операторов $L(X)$.

Так же, как и для чисел, для элементов банаховой алгебры имеет место теорема о пределе произведения.

Теорема. Умножение в банаховой алгебре непрерывно как функция двух переменных. Другими словами, если $a_n \to a$, $b_n \to b$, то $a_n b_n \to ab$.

Доказательство.
$\|a_n b_n - ab\| \le \|a_n b_n - a_n b\| + \|a_n b - ab\| \le \|a_n\| \cdot \|b_n - b\| + \|a_n - a\| \cdot \|b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Упражнения

1. В каждой банаховой алгебре есть только один единичный элемент.
2. Пространства $L_2[0,1]$ и $L_1[0,1]$ не образуют банаховых алгебр по отношению к операции умножения функций.
3. Пространства l_2 и l_1 не образуют банаховых алгебр по отношению к операции покоординатного умножения векторов.
4. Пространство W, описанное в примере 5, как банахово пространство изоморфно пространству l_1. Как нужно задать операцию умножения на l_1, чтобы l_1, наделённое этой операцией, было изоморфно W и как банахова алгебра?
5. Для каждого $a \in \mathbf{A}$ определим оператор $T_a : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ формулой $T_a(b) = ab$. Проверить, что T_a – непрерывный линейный оператор и $\|T_a\| = \|a\|$.
6. Каждая банахова алгебра $\mathbf{A}$ изоморфна некоторой подалгебре алгебры $L(\mathbf{A})$. То есть алгебра операторов – это в каком-то смысле универсальный пример банаховой алгебры.
7. Приведите пример двух не коммутирующих операторов в $\mathbb{R}^2$.

11.1.2. Обратимость в банаховых алгебрах

Элемент a банаховой алгебры $\mathbf{A}$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $a^{-1} \in \mathbf{A}$, называемый *обратным элементом*, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. Если обратный элемент существует, то он единственен. Действительно, если кроме a^{-1} какой-то элемент $b \in \mathbf{A}$ также будет обратным к a, то $b = be = baa^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$.

Отметим, что если элементы $a, b \in \mathbf{A}$ обратимы, то их произведение обратимо, и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Лемма 1. Если для элементов $a, b \in \mathbf{A}$ оба их произведения ab и ba обратимы, то и сами элементы a и b обратимы. В частности, если элементы $a, b \in \mathbf{A}$ коммутируют и их произведение ab обратимо, то a и b обратимы.

Доказательство. Ввиду симметрии условия достаточно проверить обратимость элемента a. Покажем, что элемент $g = b(ab)^{-1}$ будет обратным к a. Во-первых, $ag = ab(ab)^{-1} = e$. С другой стороны, $ga = b(ab)^{-1}a = b(ab)^{-1}aba(ba)^{-1} = ba(ba)^{-1} = e$. □

Лемма 2 (о малом возмущении единичного элемента). Пусть элемент a банаховой алгебры $\mathbf{A}$ подчиняется условию $\|a\| < 1$. Тогда элемент $e - a$ обратим, причём выполнена следующая *формула обращения*: $(e-a)^{-1} = e + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$.

Доказательство. Докажем формулу обращения. Так как $\|a^n\| \le \|a\|^n$, то ряд $e + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией и, следовательно, сходится к некоторому элементу $b \in \mathbf{A}$. Нам осталось проверить, что $b(e-a) = (e-a)b = e$. Оба требуемых равенства получаются простым раскрытием скобок:

$$(e + a + a^2 + \ldots)(e - a) = (e + a + a^2 + \ldots) - (a + a^2 + \ldots) = e;$$

$$(e - a)(e + a + a^2 + \ldots) = (e + a + a^2 + \ldots) - (a + a^2 + \ldots) = e. \ \square$$

Формула обращения – это естественный аналог формулы суммы геометрической прогрессии. В то же время при использовании подобных аналогий следует соблюдать осторожность: в отличие от чисел элементы алгебры могут не коммутировать. Возможны и другие осложнения, связанные с необратимостью, невозможностью выразить норму произведения через нормы сомножителей и т. д.

Теорема 1 (о малом возмущении обратимого элемента). Пусть $a, b \in \mathbf{A}$, a обратим и $\|b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$. Тогда элемент $a - b$ также обратим. Другими словами, если a обратим, то целый шар с центром в a и радиуса $r = \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$ состоит из обратимых элементов.

Доказательство. Запишем элемент $a - b$ в виде произведения: $a - b = a(e - a^{-1}b)$. Первый сомножитель обратим по условию, а второй подчиняется требованиям леммы 2: $\|a^{-1}b\| \le \|a^{-1}\| \cdot \|b\| < 1$. Поэтому второй сомножитель также обратим, что даёт нам требуемую обратимость элемента $a - b$. $\square$

Следствие. Множество всех обратимых элементов банаховой алгебры $\mathbf{A}$ открыто в $\mathbf{A}$, а необратимых, соответственно, замкнуто.

Теорема 2. Пусть $a \in \mathbf{A}$ – обратимый элемент и $a_n \to a$. Тогда $a_n^{-1} \to a^{-1}$. Другими словами, операция перехода к обратному элементу непрерывна в своей области определения.

Доказательство. Умножением на a^{-1} задача сводится к случаю $a = e$. Итак, пусть $a_n \to e$. Введём обозначение $e - a_n = b_n$. Зафиксируем номер N, начиная с которого $\|b_n\| < \frac{1}{2}$. Для $n > N$ имеем:

$$\left\|a_n^{-1} - e\right\| = \left\|(e - b_n)^{-1} - e\right\| = \left\|(e + b_n + b_n^2 + \ldots) - e\right\| = \left\|b_n + b_n^2 + \ldots\right\| \le$$

$$\le \|b_n\| \cdot \left\|e + b_n + b_n^2 + \ldots\right\| \le \|b_n\| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2\|b_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \square$$

11.1.3. Упражнения

1. Если только ряд $e + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$ сходится, имеет место формула обращения: $(e - a)^{-1} = e + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$.
2. На примере оператора в $\mathbb{R}^2$ с матрицей вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ покажите, что в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ существуют операторы T со сколь угодно большими нормами, для которых, тем не менее, ряд $I + T + T^2 + \ldots$ сходится. Этим будет показано, что в отличие от скалярного случая формула обращения может быть применима и для некоторых элементов с большими нормами.
3. В $L(l_2)$ множество всех необратимых операторов имеет непустую внутренность.
4. В $L(l_2)$ множество всех необратимых операторов незамкнуто в смысле поточечной сходимости.
5. Если пространство X конечномерно, то множество всех необратимых операторов имеет пустую внутренность в $L(X)$.
6. $A(\mathbf{T})$ – это подалгебра алгебры $C(\mathbf{T})$ (определение см. п. 10.4.4).
7. Приведите пример функции $f \in A(\mathbf{T})$, для которой $\frac{1}{f} \in C(\mathbf{T}) \setminus A(\mathbf{T})$. Этим будет показано, что элемент может быть необратимым в подалгебре, но при этом в более широкой алгебре уже быть обратимым.
8. Приведите пример функции $f \in C[0,1]$, которая не обратима не только в $C[0,1]$, но и ни в одной более широкой алгебре.
9. Пусть $a \in \mathbf{A}$ и оператор T_a из упражнения 5 п. 11.1.1 неограничен снизу. Тогда элемент a необратим не только в $\mathbf{A}$, но и в любой более широкой банаховой алгебре.
10. Опираясь на предыдущее упражнение и упражнение 11 п. 10.2.4, покажите, что если элемент $f \in C[0,1]$ необратим в $C[0,1]$, то он необратим и в любой более широкой банаховой алгебре.

11. Опираясь на теорему о малом возмущении обратимого элемента, докажите, что если a_n – обратимые элементы, $a_n \to a$ и $\sup\limits_n \left\| a_n^{-1} \right\| < \infty$, то a также обратим.

Элемент $a \in \mathbf{A}$ называется *обратимым справа*, если существует элемент $b \in \mathbf{A}$ (называемый *правым обратным*), для которого $ab = e$. Аналогично, $a \in \mathbf{A}$ называется *обратимым слева*, если существует элемент $d \in \mathbf{A}$ (называемый *левым обратным*), для которого $da = e$.

12. Если элемент $a \in \mathbf{A}$ обратим и справа и слева, то он обратим, и его правый обратный и левый обратный совпадают с a^{-1}.
13. На примере оператора $S_r \in L(l_2)$ сдвига вправо $S_r(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ покажите, что оператор может быть обратим слева, но не обратим справа и что левый обратный не обязательно единственен.
14. На примере оператора $S_l \in L(l_2)$ сдвига влево $S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ покажите, что оператор может быть обратим справа, но не обратим слева и что правый обратный не обязательно единственен.

11.1.4. Спектр

Определение. Комплексное число λ называется *точкой спектра* элемента $a \in \mathbf{A}$, если элемент $a - \lambda e$ необратим. Множество таких чисел называется *спектром элемента* a и обозначается $\sigma(a)$. Комплексное число, не принадлежащее спектру элемента a, называется *регулярной точкой* элемента a.

Теорема 1. Спектр любого элемента $a \in \mathbf{A}$ обладает следующими свойствами:

– $\sigma(a)$ замкнут в $\mathbb{C}$;
– спектр элемента a ограничен и лежит в замкнутом круге с центром в 0 и радиусом $\|a\|$.

Доказательство. Замкнутость. Пусть $\lambda_n \in \sigma(a)$, $\lambda_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda$. Тогда элементы $a - \lambda_n e$ необратимы, и их предел $a - \lambda e$ также необратим ввиду замкнутости множества необратимых элементов банаховой алгебры (следствие теоремы 1 п. 11.1.2). То есть $\lambda \in \sigma(a)$, и замкнутость спектра доказана.

Ограниченность. Пусть $|\lambda| > \|a\|$. Тогда $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda} a)$, а элемент $e - \frac{1}{\lambda} a$ обратим по лемме о малом возмущении единичного элемента.

Следовательно, все комплексные числа, большие по модулю нормы элемента a, – это регулярные точки, соответственно, все точки спектра не превосходят $\|a\|$ по модулю. □

Упражнения

1. Доказать, что спектр любого элемента $f \in C[0,1]$ совпадает с множеством значений функции f.
2. Дать описание спектра элемента алгебры $L_\infty[0,1]$.

Спектральным радиусом элемента a называется величина $r(a) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{1/n}$. Доказать, что:

3. $\sigma(a) \subset r(a)D \subset \|a\|D$, где D – замкнутый единичный круг в комплексной плоскости (для этого уточнить лемму о малом возмущении единичного элемента).
4. В формуле для спектрального радиуса верхний предел можно заменить просто пределом.
5. $r(a)$ – это минимальный радиус круга, в котором лежит спектр элемента a.
6. $\sigma(a+te) = \sigma(a) + t$; $\sigma(tA) = t\sigma(A)$.

11.1.5. Резольвента и непустота спектра

Резольвентой элемента $a \in \mathbf{A}$ называется функция $R_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathbf{A}$, определяемая формулой $R_a(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$.

Свойства резольвенты:

1. *Основное тождество* для резольвенты:
$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu)R_a(\lambda)R_a(\mu).$$

Доказательство: $(\lambda-\mu)(a-\lambda e)^{-1}(a-\mu e)^{-1} =$
$= (a-\lambda e)^{-1}\big((a-\mu e)-(a-\lambda e)\big)(a-\mu e)^{-1} = (a-\lambda e)^{-1} - (a-\mu e)^{-1}$. □

2. *Коммутативность*: $R_a(\lambda)R_a(\mu) = R_a(\mu)R_a(\lambda)$ – очевидным образом следует из предыдущего свойства.
3. *Непрерывность* в каждой точке λ области определения. Следует из непрерывности операций сложения, умножения и перехода к обратному элементу (по поводу последней – см. теорему 2 п. 11.1.2).
4. Резольвента стремится к нулю на бесконечности.

Доказательство. Устремление $\lambda \to \infty$ корректно, так как спектр – ограниченное множество; в доказательстве мы будем полагать $|\lambda| > 2\|a\|$.

Перепишем выражение для резольвенты: $R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}$. Так как $|\lambda| > 2\|a\|$, то $\left\|\lambda^{-1}a\right\| < \frac{1}{2}$, и мы можем применить к $e - \lambda^{-1}a$ формулу обращения: $R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}(e + \lambda^{-1}a + \lambda^{-2}a^2 + ...)$. Переходя к нормам и используя неравенство треугольника, получим: $\|R_a(\lambda)\| < \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) = \frac{2}{|\lambda|}$. Последнее выражение, очевидно, стремится к 0 при $\lambda \to \infty$. □

Определение. Пусть D – открытое множество в комплексной плоскости, E – банахово пространство. Функция $F{:}D \to E$ называется *дифференцируемой* в точке $\lambda_0 \in D$, если существует $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$. Этот предел, как и в скалярном случае, называется производной функции F в точке λ_0 и обозначается $F'(\lambda_0)$. Функция называется *аналитической* в области D, если она дифференцируема в каждой точке области.

Утверждение. Резольвента аналитична в своей области определения.

Доказательство. Воспользуемся основным тождеством для резольвенты и вычислим требуемый предел:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_a(\lambda) - R\ (\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} R_a(\lambda) R_a(\lambda_0) = (R_a(\lambda_0))^2. \ \square$$

Теорема Лиувилля для целых функций со значениями в банаховом пространстве. Если функция $F : \mathbb{C} \to E$ аналитична и ограничена, то она постоянна.

Доказательство. Пусть $F(z_1) \neq F(z_2)$ для каких-то точек $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. По теореме Хана–Банаха, существует такой функционал $f \in E^*$, что $f(F(z_1)) \neq f(F(z_2))$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(F(z))$.

Ввиду непрерывности функционал f можно переставлять со знаком предела, поэтому функция g аналитична. Кроме того, $\sup\limits_{z \in \mathbb{C}} |g(z)| \le \|f\| \cdot \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \|F(z)\| < \infty$, поэтому, согласно теореме Лиувилля для скалярных функций, g – константа, то есть $g(z_1) = g(z_2)$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теперь мы готовы доказать теорему, ради которой, собственно говоря, нам и потребовалось понятие резольвенты.

Теорема о непустоте спектра. Спектр любого элемента банаховой алгебры не пуст.

Доказательство. Будем рассуждать методом «от противного». Пусть спектр элемента $a \in \mathbf{A}$ пуст. Тогда областью определения резольвенты R_a служит вся комплексная плоскость. Так как резольвента непрерывна и стремится к 0 на ∞, то она ограничена во всей плоскости. А так как она аналитична в $\mathbb{C}$, то мы попадаем в условия теоремы Лиувилля. Поэтому $R_a = const$. Но $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$, поэтому $R_a(\lambda) \equiv 0$, что противоречит определению резольвенты: её значениями могут быть только обратимые элементы алгебры. □

Замечание. Применение теоремы Лиувилля здесь не случайно. Аналогичная теорема о непустоте спектра квадратной матрицы опиралась на существование корня уравнения $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$, которое следует из основной теоремы алгебры; а эту теорему, в свою очередь, проще всего доказывать с использованием теоремы Лиувилля.

Упражнения

1. Вычислить спектр и резольвенту единичного элемента.

2. Пусть элемент $a \in \mathbf{A}$ подчиняется уравнению $a^2 = a$ (такие элементы называются *идемпотентами*). Используя формулу обращения, вычислить резольвенту этого элемента. Каким может быть спектр идемпотента?

3. Пусть элемент $a \in \mathbf{A}$ подчиняется уравнению $a^n = 0$ (такие элементы называются *нильпотентными*). Используя формулу обращения, вычислить резольвенту и спектр этого элемента.

4. Пусть $\lambda \in \sigma(a)$, λ_n – регулярные точки элемента a и $\lambda_n \to \lambda$. Тогда $\|R_a(\lambda_n)\| \to \infty$.

5. Пусть во всей комплексной плоскости выполнено неравенство $\|R_a(\lambda)\| \le \dfrac{C}{|\lambda|}$, где $C > 0$ – некоторая константа. Доказать, что $a = 0$.

6. Пусть банахова алгебра $\mathbf{A}$ обладает следующим свойством: все её ненулевые элементы обратимы. Опираясь на теорему о непустоте спектра, докажите, что в этом случае каждый элемент $a \in \mathbf{A}$ имеет вид $a = \lambda e$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{C}$. Другими словами, с точностью до изоморфизма, единственная банахова алгебра, являющаяся полем – это поле комплексных чисел.

11.1.6. Спектр оператора и его собственные числа

В дальнейшем, до перехода к теме «операторы в гильбертовом пространстве», букву X мы будем использовать только для обозначения комплексного банахова пространства. В настоящем параграфе мы будем рассматривать линейные непрерывные операторы в пространстве X, то есть элементы алгебры $L(X)$. Спектр оператора − это частный случай спектра элемента алгебры: число λ принадлежит спектру оператора $T \in L(X)$, если оператор $T - \lambda I$ необратим.

Число λ называется *собственным числом* оператора $T \in L(X)$, если существует такой ненулевой элемент $x \in X$, называемый *собственным вектором, соответствующим числу* λ, что $Tx = \lambda x$. В этом случае $(T - \lambda I)x = 0$, то есть оператор $T - \lambda I$ неинъективен и, следовательно, необратим. Поэтому каждое собственное число оператора − это точка спектра. Однако, кроме неинъективности, причиной необратимости оператора $T - \lambda I$ может быть несюръективность. Поэтому спектр оператора, вообще говоря, не исчерпывается его собственными числами. Более того, даже у довольно простых операторов может не оказаться ни одного собственного числа, в то время как спектр всегда не пуст.

Пример 1. Рассмотрим оператор $T \in L\big(C[0,1]\big)$, действующий по правилу $(Tf)(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Предположим, что существует собственное число λ с собственным вектором f. Тогда $\int\limits_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$ и, следовательно, $f(x) = \lambda f'(x)$, $f(0) = 0$. У такой задачи Коши есть единственное решение T, то есть у оператора T нет собственных чисел. □

Разумеется, подобные примеры возможны только в бесконечномерном пространстве. Как известно из курса линейной алгебры, каждый оператор в $\mathbb{C}^n$ задаётся квадратной матрицей A, и поиск собственных чисел сводится к решению алгебраического уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$, которое, в свою очередь, всегда разрешимо.

Пусть λ − собственное число оператора $T \in L(X)$. *Собственным подпространством*, соответствующим собственному числу λ, называется множество $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$. Другими словами, собственное подпространство, соответствующее собственному числу λ, состоит из собственных векторов, соответствующих собственному числу λ, и нуля.

Определение. Подпространство $Y \subset X$ называется *инвариантным подпространством* оператора $T \in L(X)$, если $A(Y) \subset Y$.

Собственное подпространство − это очевидный пример инвариантного подпространства. Обратно, знание инвариантных подпространств может помочь при поиске собственных векторов и собственных чисел. Например, если у оператора $T \in L(X)$ есть конечномерное инвариантное подпространство Y, то ограничение оператора T на это подпространство – это уже оператор в конечномерном пространстве, и в этом подпространстве у оператора есть собственные векторы.

Теорема. Пусть операторы A и T коммутируют. Тогда любое собственное подпространство одного из этих операторов будет инвариантным подпространством для другого из них.

Доказательство. Пусть λ – собственное число, а $Y = Ker(A - \lambda I)$ – соответствующее собственное подпространство оператора A. Возьмём произвольный собственный вектор $x \in Y$ и докажем, что $Tx \in Y$, то есть что Tx также будет собственным вектором с собственным числом λ. Действительно, $A(Tx) = T(Ax) = T(\lambda x) = \lambda(Tx)$. □

Упражнения

1. Проверить, что для оператора T из примера 1 $0 \in \sigma(T)$. Вычислить резольвенту этого оператора.
2. В конечномерном пространстве X инъективность и сюръективность линейного оператора равносильны.
3. В конечномерном пространстве спектр оператора и множество его собственных чисел совпадают.
4. В конечномерном пространстве обратимость оператора слева равносильна его обратимости справа (не путать с операторами, действующими из одного пространства в другое!).
5. Утверждения упражнений 2 и 4 не выполняются в пространстве l_2 для оператора U сдвига влево: $U(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

Введём ещё одно понятие. Точка λ называется *аппроксимативным собственным числом* оператора T, если существует такая последовательность элементов $x_n \in S(X)$, что $Tx_n - \lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Элементы x_n при больших номерах будут «почти» собственными векторами оператора T, хотя настоящий собственный вектор, соответствующий числу λ, может и не существовать.

6. Число λ будет точкой спектра оператора T в том и только том случае, если имеет место одна из следующих возможностей:

– точка λ есть собственное число оператора T, то есть оператор $T - \lambda I$ неинъективен.
– Точка λ есть аппроксимативное собственное число оператора T, то есть оператор $T - \lambda I$ не ограничен снизу.
– Точка λ есть собственное число оператора T^*, то есть оператор $(T - \lambda I)^*$ неинъективен.

7. Вычислить спектр и резольвенту единичного оператора.
8. Пусть T – некоторый проектор в пространстве X. Описать спектр и резольвенту оператора T.
9. Вычислить спектры операторов:
– операторы сдвига $U(a_1, a_2,...) = (0, a_1, a_2,..)$ и $V(a_1, a_2,...) = (a_2, a_3,..)$ в пространствах последовательностей для пространств $X = l_2$ и $X = l_\infty$.
– Операторы сдвига $(T_\tau f)(t) = f(t+\tau)$ в пространствах функций для следующих пространств: X – пространство непрерывных ограниченных на оси функций с sup-нормой; $X = L_2(\mathbb{R})$.
10. Доказать, что определённый выше оператор сдвига U есть внутренняя точка множества необратимых операторов. Это позволит решить упражнение 3 п. 11.1.3. Более общий факт: любой ограниченный снизу необратимый оператор $T \in L(X,Y)$ окружён окрестностью, состоящей из необратимых операторов.
11. Доказать, что точки границы спектра оператора являются либо собственными числами, либо аппроксимативными собственными числами.
12. Доказать, что и в $L(X,Y)$ (хотя это и не алгебра) множество обратимых операторов открыто.

11.1.7. Матрица оператора

В курсе линейной алгебры операторы часто задаются[1] своими матрицами. Понятие матрицы оператора имеет смысл и для операторов в бесконечномерном пространстве (разумеется, с заменой конечных матриц на бесконечные).

Пусть X, Y – банаховы пространства, оператор $A \in L(X,Y)$, $\{e_n\}$ и $\{g_n\}$ – базисы в X и Y соответственно. Оператор задан, если известны образы Ae_n всех элементов базиса, так как линейная оболочка базиса – плотное подмножество в X, а оператор A непрерывен. Обозначим через g_n^* координатные функционалы базиса $\{g_n\}$ в Y. Каждый элемент пространства Y представим в виде ряда $y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y) g_n$, в частности,

$$Ae_n = \sum_{m=1}^{\infty} g_m^*(Ae_n) g_m.$$

Таким образом, числа $a_{n,m} = g_m^*(Ae_n)$ полностью определяют оператор A.

[1] «Задаются» ≠ «хвастаются».

Определение. Набор чисел $a_{n,m} = g_n^*(Ae_m)$, $n,m \in \mathbb{N}$ называется матрицей оператора A в базисах $\{e_n\}$, $\{g_n\}$. В этих обозначениях $Ae_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} g_m$, то есть n-ный столбец матрицы A состоит из коэффициентов разложения элемента Ae_n по базису $\{g_n\}$.

До настоящего момента мы изучали спектральную теорию, имея в своём распоряжении весьма ограниченный запас примеров. Следующие упражнения показывают, как, используя понятие матрицы, можно строить широкие классы операторов в классических пространствах.

Упражнения

1. Пусть числа $a_{n,m}$ образуют матрицу оператора A в базисах $\{e_n\}$, $\{g_n\}$ и $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$. Тогда $Ax = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} x_m g_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m g_n\right)$.
2. Пусть в каноническом базисе пространства l_2 матрица оператора $T \in L(l_2)$ имеет диагональный вид. Доказать, что спектр такого оператора совпадает с замыканием множества диагональных элементов матрицы.
3. Используя предыдущее упражнение, показать, что любое ограниченное непустое замкнутое множество комплексных чисел служит спектром некоторого оператора.
4. Пусть в условиях упражнения 2 все диагональные элементы матрицы оператора T различны. Опишите все операторы, коммутирующие с T,
5. Пусть матрица A имеет двухдиагональный вид: $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$ и т. д. до бесконечности. Доказать, что в l_2 существует непрерывный оператор, для которого A будет матрицей в каноническом базисе пространства l_2. Вычислить норму оператора и его спектр. Будут ли точки спектра собственными числами?
6. Доказать, что числа $a_{n,m}$ образуют матрицу некоторого непрерывного оператора в каноническом базисе пространства l_1 в том и только том случае, если величина $\sup_n \sum_m |a_{n,m}|$ конечна. Выразите норму такого оператора через элементы его матрицы.
7. По аналогии с предыдущим описать операторы в пространстве c_0. Для этого рассмотреть матрицу сопряженного оператора и использовать результат пункта 1.

8. Матрица называется *гильберт-шмидтовской*, если $\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |a_{nm}|^2 < \infty$. Доказать, что в этом случае она есть матрица некоторого непрерывного оператора A в каноническом базисе пространства l_2.
9. Привести пример непрерывного оператора A в l_2, матрица которого в каноническом базисе – не гильберт-шмидтовская.

Замечание. К сожалению, задание оператора матрицей становится не очень удобным, когда речь идёт о бесконечномерных пространствах. Проверка того, что матрица действительно задаёт непрерывный оператор, часто оказывается делом непростым, а подчас и совершенно невозможным. Именно поэтому для операторов в бесконечномерных пространствах матрицы применяются гораздо реже, чем в конечномерном случае.

11.2. Компактные множества в банаховых пространствах

Важная задача функционального анализа – выявлять новые эффекты, появляющиеся при переходе от конечномерных пространств к бесконечномерным. Знание этих эффектов позволяет избегать ошибок, проистекающих из поверхностного применения аналогий с конечномерным случаем или, скажем, необоснованной «аппроксимации» бесконечномерного объекта конечномерным в задачах численного решения уравнений или оптимизации в банаховом пространстве. Но ещё важнее (особенно в приложениях) научиться выделять классы объектов, для которых аналогия с конечномерным случаем, пусть и не в полном объёме, но всё-таки применима. Такие объекты часто получаются при замене конечномерности на то или иное условие компактности. Ниже, в разделе 11.3, мы изучим один из таких объектов – класс вполне непрерывных (компактных) операторов. Компактность будет играть важную роль в теоремах о неподвижных точках (глава 16), при изучении двойственности между пространством и его сопряжённым, равно как и во многих других разделах нашего курса. Хотя основные свойства компактов в топологических и метрических пространствах мы уже напомнили в главе 1, будет не лишним остановиться на особенностях, возникающих при изучении компактов в банаховых пространствах.

11.2.1. Предкомпактность: общие результаты

Так же, как и в произвольном полном метрическом пространстве (теорема 2 п. 1.4.1), для замкнутого подмножества A банахова пространства X следующие условия эквивалентны:

– A – компактное множество;
– A – предкомпакт;

– из любой последовательности элементов множества A можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Однако в банаховом пространстве есть структуры, отсутствующие в произвольном полном метрическом пространстве. Это операции сложения, умножения на скаляр и порождённые этими операциями понятия размерности, линейного подпространства, линейного оператора и т. д. На связи предкомпактности с этими линейными структурами мы остановимся в настоящем параграфе.

Теорема 1. Предкомпактность устойчива по отношению к линейным операциям: (a) если A, B – предкомпакты в нормированном пространстве, то $A+B$ – предкомпакт; (b) если $A \subset X$ – предкомпакт, $T \in L(X,Y)$, то $T(A)$ – предкомпакт в Y; (c) в частности, предкомпактность сохраняется при умножении на скаляр.

Доказательство. (a) Пусть A_1, B_1 – конечные $\frac{\varepsilon}{2}$-сети множеств A и B соответственно. Тогда $A_1 + B_1$ – конечная ε-сеть множества $A+B$. (b) Если A_1 – конечная $\frac{\varepsilon}{\|T\|}$-сеть множества A, то $T(A_1)$ – конечная ε-сеть множества $T(A)$. (c) Умножение на фиксированный скаляр – это непрерывный линейный оператор. □

Теорема 2. Для ограниченного подмножества A нормированного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) A – предкомпакт;
(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует конечномерное подпространство $Y \subset X$, образующее ε-сеть для A.

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть A_1 – конечная ε-сеть множества A. Тогда $\operatorname{Lin} A_1$ – конечномерное подпространство, образующее требуемую ε-сеть.

(2) ⇒(1). Пусть подпространство $Y \subset X$ конечномерно и является ε-сетью для A. Обозначим через r такое число, что $A \subset rB_X$. Рассмотрим множество $(r+\varepsilon)B_Y$. Это ограниченное подмножество конечномерного пространства Y, следовательно, оно – предкомпакт. Поскольку Y – ε-сеть для A, для любого $x \in A$ существует $y \in Y$ с $\|x-y\| < \varepsilon$. Но этот y лежит в $(r+\varepsilon)B_Y$: $\|y\| \le \|x\| + \|y-x\| < r+\varepsilon$. Следовательно, множество $(r+\varepsilon)B_Y$ – это тоже ε-сеть для A. То есть для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли для A предкомпактную ε-сеть, что означает предкомпактность множества A. □

Теорема 3. Выпуклая оболочка предкомпакта – снова предкомпакт.

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой. Пусть A – предкомпакт, подпространство $Y \subset X$ конечномерно и образует ε-сеть для A. Покажем, что Y – это ε-сеть и для $\mathrm{conv}A$. Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ – произвольная выпуклая комбинация элементов x_k множества A. Так как Y – это ε-сеть для A, можно выбрать $y_k \in Y$ с $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$. Рассмотрим $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$. Имеем

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - y_k) \right\| \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|x_k - y_k\| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \varepsilon.$$

Но $y \in Y$ (Y – линейное подпространство!), то есть Y – действительно ε-сеть для $\mathrm{conv}A$, и $\mathrm{conv}A$ – предкомпакт. □

Теорема 4. Пусть X, Y – банаховы пространства, $T_n, T \in L(X, Y)$ и последовательность операторов T_n поточечно сходится к T. Тогда на любом предкомпакте $A \subset X$ последовательность T_n сходится к T равномерно.

Доказательство. По теореме Банаха – Штейнгауза нормы всех операторов T_n ограничены сверху некоторой константой $C < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем для предкомпакта A конечную $\frac{\varepsilon}{4C}$-сеть B. Множество B конечно, и в каждой его точке $T_n \to T$. Поэтому можно выбрать такой номер m, что для любого $n > m$ в каждой точке $y \in B$ выполнено неравенство $\|(T_n - T)y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку B – это $\frac{\varepsilon}{4C}$-сеть для A, для любого $x \in A$ существует $y \in Y$ с $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4C}$. Следовательно, при любом $n > m$ для любого $x \in A$ имеем оценку:

$$\|(T_n - T)x\| \le \|(T_n - T)y\| + \|(T_n - T)(x - y)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|T_n - T\| \cdot \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Этим равномерная сходимость на A доказана. □

К следующей теореме нужно отнестись как к важному предостережению: в бесконечномерном пространстве **ограниченные множества не обязаны быть предкомпактами!**

Теорема 5 (Ф. Рисс). Единичный шар бесконечномерного нормированного пространства не может быть предкомпактом.

Доказательство. Предположим, что B_X – предкомпакт. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Пусть $Y \subset X$ – произвольное конечномерное подпространство. Так как $Y \neq X$, факторпространство X/Y нетривиально. Выберем элемент $[x]$ пространства X/Y, подчиняющийся условию $\varepsilon < \|[x]\| < 1$. По определению нормы в факторпространстве, существует представитель $z \in [x]$ с $\|z\| < 1$. Тогда $z \in B_X$, но в то же время $\inf\limits_{y \in Y}\|z - y\| = \|[z]\| = \|[x]\| > \varepsilon$, то есть Y не является ε-сетью для B_X. Мы доказали, что никакое конечномерное пространство не может быть ε-сетью предкомпакта B_X, что противоречит теореме 2. □

Упражнения

1. Сведите пункт (b) теоремы 1 к теореме о компактности образа компакта при непрерывном отображении.
2. С помощью оператора $U : X_1 \times X_2 \to X$, $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ сведите пункт (a) теоремы 1 к пункту (b) и утверждению о компактности декартова произведения компактов.
3. Выведите следующее обобщение теоремы 4: пусть X, Y – метрические пространства, $T_n : X \to Y$ и семейство отображений $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывно. Тогда если последовательность T_n поточечно сходится к отображению T, то на любом предкомпакте $A \subset X$ последовательность T_n сходится к T равномерно.

Определение. Метрическое пространство X обладает «*свойством маленьких шаров*» (сокращённо $X \in SBP$ от «Small Ball Property»), если для любого $\varepsilon > 0$ пространство X можно покрыть последовательностью шаров $B(x_n, r_n)$ с радиусами, подчиняющимися условиям $\sup\limits_n r_n < \varepsilon$ и $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

4. Если X – предкомпакт, то $X \in SBP$.
5. Если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и все $X_n \in SBP$, то $X \in SBP$.
6. Если X – банахово пространство и $X \in SBP$, то X конечномерно.
7. Замыкание выпуклой оболочки компакта – компакт.
8. Приведите пример, показывающий, что выпуклая оболочка компакта не обязана быть компактом.
9. Для любого предкомпакта K в банаховом пространстве существует такая стремящаяся к нулю последовательность x_n элементов пространства, что K целиком содержится в замыкании выпуклой оболочки последовательности x_n.

11.2.2. Конечномерные операторы и аппроксимационное свойство

Непрерывный оператор называется *конечномерным*, или *оператором конечного ранга*, если его образ конечномерен. Нам встречались уже разные примеры конечномерных операторов: линейные функционалы, операторы частных сумм ряда Фурье (п. 10.4.3), операторы частных сумм по базису Шаудера (п. 10.5.2).

Последовательность операторов $T_n \in L(X)$ называется *аппроксимативной единицей*, если все операторы T_n конечномерны и $T_n \to I$ поточечно. Пространство X обладает *свойством поточечной аппроксимации*[2], если в X существует аппроксимативная единица.

Примеры

1. Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – это базис банахова пространства X. Тогда операторы S_n частных сумм образуют аппроксимативную единицу. Действительно, пусть $x \in X$ – произвольный элемент, $x = \sum_1^\infty a_k e_k$ – его разложение по базису. Тогда $S_n(x) = \sum_1^n a_k e_k$ и $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Соответственно, любое пространство с базисом обладает свойством поточечной аппроксимации.

2. Для любой функции $f \in C[0,1]$ обозначим через $L_n(f)$ кусочно-линейную непрерывную функцию, совпадающую с f в точках $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, 1$ и линейную на отрезках вида $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Так определённые операторы L_n образуют аппроксимативную единицу в пространстве $C[0,1]$.

3. Введём обозначение $\Delta_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Для любой функции $f \in L_1[0,1]$ определим $E_n(f) = \sum_{k=1}^n (n \int_{\Delta_{n,k}} f(t)dt \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{n,k}})$. Другими словами, $E_n(f)$ – это кусочно-постоянная функция, принимающая на каждом из $\Delta_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ значение, равное среднему значению функции

[2] На самом деле, есть целая группа свойств, относящихся к типу «аппроксимационных свойств» (см. [L-T]). То, что мы здесь называем свойством поточечной аппроксимации, правильнее называть «ограниченным аппроксимационным свойством для сепарабельных пространств».

f на отрезке $\Delta_{n,k}$. Так определённые операторы E_n (называемые операторами усреднения) образуют аппроксимативную единицу в пространстве $L_1[0,1]$.

Теорема. Пусть X – банахово пространство, обладающее свойством поточечной аппроксимации, и последовательность $T_n \in L(X)$ – это некоторая фиксированная аппроксимативная единица в пространстве X. Тогда для любого множества $D \subset X$ следующие два условия эквивалентны:

(1) D – предкомпакт;
(2) множество D ограничено, и последовательность T_n равномерно сходится на D к единичному оператору.

Доказательство. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) – это прямое следствие теоремы 4 п. 11.2.1. Докажем обратную импликацию. Пусть $T_n \to I$ равномерно на D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $m = m(\varepsilon)$, что $\|T_m x - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in D$. Это означает, в частности, что подпространство $T_m(X)$ – это ε-сеть для D. Так как по определению аппроксимативной единицы все T_n – операторы конечного ранга, подпространство $T_m(X)$ конечномерно. Для завершения доказательства остаётся применить теорему 2 п. 11.2.1. □

Упражнения

1. Доказать, что если оператор задан матрицей, имеющей лишь конечное число ненулевых элементов, то такой оператор имеет конечный ранг. Привести пример такой матрицы с бесконечным числом ненулевых элементов, чтобы она определяла конечномерный оператор в пространстве l_2.

2. Пусть X, Y – банаховы пространства, $\{y_k\}_{k=1}^n \subset Y$ и $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – конечные наборы элементов и функционалов соответственно. Определим оператор $T \in L(X,Y)$, $T = \sum_{k=1}^n f_k \otimes y_k$ формулой $Tx = \sum_1^n f_k(x) y_k$.[3] Доказать, что T – конечномерный оператор и что любой оператор конечного ранга представим подобным образом, причём и векторы $\{y_k\}_{k=1}^n$, и функционалы $\{f_k\}_{k=1}^n$ в этом представлении могут быть выбраны линейно независимыми.

[3] Значок $\otimes$ читается здесь как «тензорное произведение».

3. Проверить, что отображения L_n, построенные во втором примере, – действительно непрерывные линейные операторы конечного ранга, образующие аппроксимативную единицу в $C[0,1]$.
4. Обосновать третий пример по следующей схеме: проверить, что операторы усреднения E_n линейны и $\dim E_n\left(L_1[0,1]\right) = n$; доказать, что $\|E_n\| = 1$. Доказать, что для любой непрерывной функции f, $E_n f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ равномерно на $[0,1]$ (а следовательно, и в метрике пространства $L_1[0,1]$). Для доказательства поточечной сходимости E_n к I на всём $L_1[0,1]$ воспользоваться критерием поточечной сходимости (п. 10.4.2).
5. Доказать конечномерность оператора $T \in L(C[0,1])$, $(Tf)(t) = \int\limits_0^1 (x+t) f(x)\,dx.$
6. Пусть $T \in L(X)$ – конечномерный оператор. Тогда образ оператора T – конечномерное инвариантное подпространство. Поскольку каждый собственный вектор с ненулевым собственным числом лежит в $T(X)$, задача поиска ненулевых собственных чисел сводится к изучению действия оператора T в подпространстве $T(X)$. Опираясь на эти соображения, найдите все ненулевые собственные числа и соответствующие собственные векторы оператора из предыдущего упражнения.

11.2.3. Критерии компактности множеств в конкретных пространствах

Поскольку в бесконечномерных пространствах уже не выполнен знакомый из анализа конечномерный критерий компактности (замкнутость + ограниченность), проверка компактности часто становится нетривиальной задачей. В решении этой задачи помогает знание специфики пространства, в котором рассматривается предполагаемый компакт. В каждом конкретном пространстве возникает свой критерий компактности. Один из таких критериев – теорема Арцела – уже знаком читателю. Как мы отмечали в п. 1.4.2, в пространстве $C(K)$ непрерывных функций на метрическом компакте предкомпактность множества эквивалентна одновременному выполнению двух условий: равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности. Все остальные классические критерии компактности опираются на теорему, приведенную в предыдущем параграфе. Схема получения таких критериев достаточно проста: нужно выбрать (по возможности удачнее) аппроксимативную единицу и расписать подробно, что означает равномерная сходимость на множестве.

Теорема 1 (критерий компактности в c_0). Для того, чтобы подмножество $D \subset c_0$ было предкомпактом, необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $z \in c_0$, покоординатно мажорирующий все элементы множества D.

Доказательство. Поскольку и предкомпактность, и существование мажоранты влекут ограниченность, доказательство достаточно проводить для ограниченных множеств. Рассмотрим последовательность операторов $P_n \in L(c_0)$, действующих по правилу $P_n(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, ..., x_n, 0, 0, 0, ...)$. Очевидно, P_n образуют аппроксимативную единицу в c_0. Согласно теореме из предыдущего параграфа, нам нужно доказать, что для ограниченного множества D существование мажоранты $z \in c_0$ эквивалентно равномерной сходимости на D последовательности P_n к I.

Равномерная сходимость P_n к I на D по определению означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n(\varepsilon)$, что для любого вектора $x = (x_1, ..., x_m, ...) \in D$ и любого $n \geq n(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\|x - P_n x\| \leq \varepsilon$. Расшифровав, что такое норма в c_0 и определение P_n, получаем эквивалентную переформулировку: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n(\varepsilon)$, что для любого $n \geq n(\varepsilon)$ $\sup\left\{|x_j| : x = (x_1, x_2, ...) \in D, j \geq n+1\right\} \leq \varepsilon$. Если ввести обозначение $y_n = \sup\left\{|x_j| : x = (x_1, x_2, ...) \in D, j \geq n\right\}$, последнее условие означает, что $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть вектор $y = (y_1, ..., y_m, ...)$ – это элемент пространства c_0. Остаётся заметить, что стремление y_n к нулю эквивалентно существованию требуемой мажоранты. Действительно, вектор $y = (y_1, ..., y_m, ...)$ – это элемент пространства c_0 и $y_n \geq |x_n|$ для любого вектора $x = (x_1, ..., x_m, ...) \in D$, то есть y – это общая мажоранта всех элементов множества D. Обратно, если у D существует мажоранта $z = (z_1, z_2, ...) \in c_0$, то $y_n \leq \sup\left\{|z_j| : j \geq n\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Применив такие же операторы $P_n(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, ..., x_n, 0,0,0, ...)$ в пространстве l_p, получаем следующий результат.

Теорема 2 (критерий компактности в l_p). Пусть $1 \leq p < \infty$. Для того, чтобы ограниченное подмножество $D \subset l_p$ было предкомпактом, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n(\varepsilon)$, что $\sum_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |x_k|^p \leq \varepsilon$ для любого $x = (x_1, ..., x_m, ...) \in D$. □

Из рассмотрения операторов частных сумм вытекает следующий критерий компактности в пространстве с базисом:

Теорема 3. Пусть X – банахово пространство с базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Для того, чтобы ограниченное подмножество $D \subset X$ было предкомпактом, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n(\varepsilon)$, что $\left\| \sum_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} x_k e_k \right\| \le \varepsilon$ для любого $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in D$. □

Точно таким же образом можно получить критерий компактности в $L_1[0,1]$, опираясь на операторы усреднения E_n из третьего примера аппроксимативной единицы, приведённого в предыдущем параграфе. Этот критерий будет правильным и во многих случаях достаточно удобным. Однако, приложив небольшие усилия, можно придумать более элегантную формулировку.

Все функции $f \in L_1[0,1]$ будем считать определёнными не только на отрезке, но и на всей оси. Для этого продолжим их периодически с периодом 1. Для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $L_\tau : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ формулой $(L_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. Как легко видеть, L_τ – это биективная изометрия; в частности, $\|L_\tau\| = 1$.

Лемма. $L_\tau f \xrightarrow[\tau \to 0]{} f$ для любого $f \in L_1[0,1]$.

Доказательство. Так как операторы L_τ ограничены в совокупности, поточечную сходимость к единичному оператору достаточно доказывать не на всём $L_1[0,1]$, а на некотором полном подмножестве этого банахова пространства. В качестве такого полного подмножества возьмём тригонометрическую систему $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Имеем

$$\left\|L_\tau e^{int} - e^{int}\right\| = \int_0^1 \left|e^{in(t+\tau)} - e^{int}\right| dt = \int_0^1 \left|e^{in\tau} - 1\right| dt = \left|e^{in\tau} - 1\right| \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0. \ \square$$

Доказанную лемму можно переформулировать следующим образом: для любой функции $f \in L_1[0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $\tau \in [-\delta, \delta]$ выполнено неравенство $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)| dt < \varepsilon.$ Такое свойство функции f называют *непрерывностью в среднем*.

Определение. Семейство функций $D \subset L_1[0,1]$ называется *равностепенно непрерывным в среднем*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $f \in D$ и любого $\tau \in [-\delta, \delta]$ выполнено неравенство $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)| dt < \varepsilon$.

Теорема 4 (критерий компактности в $L_1[0,1]$). Для того, чтобы ограниченное подмножество $D \subset L_1[0,1]$ было предкомпактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было равностепенно непрерывным в среднем.

Доказательство. Пусть D – предкомпакт. Так как, согласно лемме, $L_\tau \to I$ поточечно, $L_\tau \to I$ равномерно на D. Эта равномерная сходимость – просто другая запись требуемой равностепенной непрерывности в среднем.

Теперь обратно. Пусть дана равностепенная непрерывность в среднем множества D. Докажем, что в этом случае операторы усреднения E_n из примера 3 п. 11.2.2 равномерно на D сходятся к единичному оператору. Так как последовательность E_n – аппроксимативная единица в $L_1[0,1]$, этим будет доказана предкомпактность множества D. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta > 0$ из определения равностепенной непрерывности в среднем: $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)| dt < \varepsilon$ для всех $f \in D$ и всех $\tau \in [-\delta, \delta]$. Тогда для любого $n > \frac{1}{\delta}$ и любого $f \in D$ имеем:

$$\|E_n(f) - f\| = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\Delta_{n,k}} f(x) dx \mathbf{1}_{\Delta_{n,k}}(t) - f(t) \right| dt =$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n n \left(\int_{\Delta_{n,k}} [f(x) - f(t)] dx \right) \mathbf{1}_{\Delta_{n,k}}(t) \right| dt \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{k=1}^n n \int_{\Delta_{n,k}} |f(x) - f(t)| dx \mathbf{1}_{\Delta_{n,k}}(t) dt = n \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_{n,k}} \int_{\Delta_{n,k}} |f(x) - f(t)| dx dt.$$

Воспользовавшись тем, что все пары $(x,t) \in \bigcup_{k=1}^n \Delta_{n,k} \times \Delta_{n,k}$ подчиняются условиям $0 \le t \le 1$, $t - \frac{1}{n} \le x \le t + \frac{1}{n}$, и сделав замену переменных $x \to t + \tau$, завершим оценку: $\|E_n(f) - f\| \le n \int_{[-1/n, 1/n]} \int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)| dt d\tau < 2\varepsilon$. □

11.2.4. Упражнения

1. В определениях непрерывности и равностепенной непрерывности в среднем вместо $\tau \in [-\delta, \delta]$ можно писать $\tau \in [0, \delta]$.
2. В l_∞ операторы P_n, действующие по правилу $P_n(x_j)_{j=1}^\infty = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$, не образуют аппроксимативной единицы.
3. В l_∞ нет никакой аппроксимативной единицы (отметим, что и никакого удобного критерия компактности в l_∞ также не известно).
4. Приведите пример предкомпакта $D \subset l_p$, не имеющего общей мажоранты $z \in l_p$.
5. Для данных множеств в $C[0,1]$ выяснить, будут ли они (a) ограниченными, (b) выпуклыми, (c) замкнутыми, (d) предкомпактными. Найти (e) внутренность и (f) границу множеств.
   (i) Множество всех неубывающих функций $f \in C[0,1]$, удовлетворяющих условию $0 \le f \le 1$.
   (ii) Множество всех неубывающих функций $f \in C[0,1]$, удовлетворяющих условиям $f \ge 0$ и $\int\limits_{[0,1]} f(t)dt \le 1$.
   (iii) Множество всех непрерывно дифференцируемых функций, подчиняющихся условиям $f(0) = 0$ и $\int\limits_0^1 |f'(t)|dt \le 1$.
   (iv) Множество всех непрерывно дифференцируемых функций, подчиняющихся условиям $f(0) = 0$ и $\int\limits_0^1 |f'(t)|^2 dt \le 1$.
6. Для данных множеств в $L_1[0,1]$ выяснить, будут ли они (a) ограниченными, (b) выпуклыми, (c) замкнутыми, (d) предкомпактными. Найти (e) внутренность и (f) границу множеств.
   (i) Множество всех неубывающих функций $f \in L_1[0,1]$, удовлетворяющих условию $0 \le f \le 1$.
   (ii) Множество всех неубывающих функций $f \in L_1[0,1]$, удовлетворяющих условиям $f \ge 0$ и $\int\limits_{[0,1]} f(t)dt \le 1$.
   (iii) Множество всех непрерывно дифференцируемых функций, подчиняющихся условиям $f(0) = 0$ и $\int\limits_0^1 |f'(t)|dt \le 1$.
   (iv) Множество всех непрерывно дифференцируемых функций, подчиняющихся условиям $f(0) = 0$ и $\int\limits_0^1 |f'(t)|^2 dt \le 1$.

11.3. Компактные (вполне непрерывные) операторы

На протяжении этого раздела буквы X, Y и Z будут использоваться исключительно для обозначения банаховых пространств.

11.3.1. Определение и примеры

Определение. Оператор $T: X \to Y$ называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если образ $T(B_X)$ единичного шара пространства X есть предкомпакт в пространстве Y. Семейство всех компактных операторов, действующих из пространства X в пространство Y, обозначается $K(X,Y)$.

Поскольку любое ограниченное множество содержится в некотором шаре, образ любого ограниченного множества под действием компактного оператора будет содержаться в множестве вида $rT(B_X)$ и, следовательно, будет предкомпактом.

Пример 1. Оператор интегрирования с ядром $T: C[0,1] \to C[0,1]$: $(Tf(t))(x) = \int_0^1 K(t,x) f(t) dt$, где ядро $K: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ непрерывно по совокупности переменных.[4]

Для проверки компактности оператора интегрирования, то есть предкомпактности в $C[0,1]$ множества $T(B_{C[0,1]})$, воспользуемся теоремой Арцела. Во-первых,

$$\|Tf\| \le \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(t,x)| \cdot |f(t)| dt \le \|f\| \cdot \max_{t,x \in [0,1]} |K(t,x)|,$$

чем доказана ограниченность множества $T(B_{C[0,1]})$. Для доказательства равностепенной непрерывности множества вначале для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ таким образом, чтобы для любых $x_1, x_2 \in [0,1]$ с $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ выполнялась оценка $|K(t,x_1) - K(t,x_2)| < \varepsilon$. Пусть теперь

---

[4] Нехорошо, конечно, одну и ту же букву K использовать для обозначения, как класса компактных операторов, так и ядра в операторе интегрирования с ядром, не говоря уж об использовании этой буквы для обозначения компакта, когда идёт речь о пространстве $C(K)$. Но что поделать: все эти обозначения являются общепринятыми. Чтобы доставить читателю дополнительное удовольствие, мы могли бы, как это принято, компактный оператор тоже обозначать буквой K. Но – хорошего понемножку.

$g \in T\left(B_{C[0,1]}\right)$ – произвольный элемент. Тогда g имеет вид $g = Tf$, где $f \in B_{C[0,1]}$. Соответственно, для любых чисел $x_1, x_2 \in [0,1]$, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ имеем $|g(x_1) - g(x_2)| = |(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| \le$

$$\le \int_0^1 |K(t,x_1) - K(t,x_2)| \cdot |f(t)| dt < \varepsilon \cdot \int_0^1 |f(t)| dt \le \varepsilon \cdot \|f\| \le \varepsilon,$$

то есть множество $T(B_{C[0,1]})$ равностепенно непрерывно. □

Пример 2. Если пространство X бесконечномерно, то единичный оператор в X – это не компактный оператор. Действительно, $I(B_X) = B_X$, а единичный шар бесконечномерного пространства не является предкомпактом.

Упражнения

1. Доказать, что любой конечномерный оператор компактен.
2. Диагональный оператор $T \in L(l_p)$ (то есть матрица которого в каноническом базисе имеет диагональный вид) будет вполне непрерывным в том и только том случае, если диагональные элементы его матрицы образуют стремящуюся к нулю последовательность.
3. Вычислить норму оператора из второго упражнения.
4. Доказать, для оператора интегрирования с ядром в $C[0,1]$ формулу $\|T\| = \max\limits_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(t,x)| dt$ (см. пример 1).
5. Доказать, что оператор интегрирования с ядром из примера 1 компактен как оператор, действующий из $L_1[0,1]$ в $C[0,1]$.
6. Проверить компактность оператора интегрирования из примера п. 11.1.6.
7. Пусть $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ функция двух переменных, подчиняющаяся условию: для любого $x \in [0,1]$ функция $K_x(t) = K(t,x)$ интегрируема по переменной t. Пусть отображение $x \to K_x$ непрерывно как отображение отрезка $[0,1]$ в $L_1[0,1]$. Тогда оператор интегрирования с ядром $K(t,x)$ – это компактный оператор в $C[0,1]$.

11.3.2. Свойства компактных операторов

Теорема 1. Множество компактных операторов $K(X,Y)$ обладает следующими свойствами:

(1) $K(X,Y)$ – линейное подпространство в $L(X,Y)$.

(2) $K(X,Y)$ – *операторный идеал*, то есть если $T \in K(X,Y)$, то произведения AT и TA компактны для любого непрерывного оператора A, для которого имеет смысл соответствующая композиция.

(3) Множество $K(X,Y)$ замкнуто в $L(X,Y)$ в смысле сходимости по норме.[5]

Доказательство. (1). Устойчивость относительно умножения на скаляр очевидна, а устойчивость относительно сложения следует из соотношения

$$(T_1+T_2)(B_X)\subset T_1(B_X)+T_2(B_X)$$

и того, что сумма предкомпактов – предкомпакт.

(2). Пусть $A\in L(Z,X)$. Тогда любое ограниченное подмножество пространства Z под действием оператора A переходит в ограниченное множество, которое, в свою очередь, оператор T переводит в предкомпакт. Поэтому оператор TA компактен. Пусть теперь $A\in L(Y,Z)$. Тогда любое ограниченное подмножество пространства X переходит под действием оператора T в предкомпакт, который, в свою очередь, переводится оператором A также в предкомпакт.

(3). Пусть последовательность компактных операторов T_n сходится к оператору T. Нам требуется доказать компактность предельного оператора. Для этого зафиксируем $\varepsilon>0$ и построим предкомпактную ε-сеть для $T(B_X)$. Выберем такой номер n, что $\|T-T_n\|<\varepsilon.$ Рассмотрим предкомпакт $K=T_n(B_X)$. Для любого $x\in B_X$ имеем $\|Tx-T_nx\|\le\|T-T_n\|\cdot\|x\|<\varepsilon.$ Таким образом, K образует требуемую ε-сеть. □

Следствие. Если компактный оператор $A\in L(X,Y)$ обратим, то пространства X и Y конечномерны.

Доказательство. В этом случае $I_X=A^{-1}A$, $I_Y=AA^{-1}$, где I_X и I_Y – единичные операторы в пространствах X и Y соответственно. Следовательно, по свойству (2), I_X и I_Y – компактные операторы, что для бесконечномерных X и Y невозможно. □

Следующая теорема показывает, что в широком классе пространств (охватывающем практически все встречающиеся в приложениях пространства) компактные операторы могут быть аппроксимированы по норме конечномерными операторами. Теория компактных операторов родилась из исследований Фредгольма по теории интегральных уравнений. В этих исследованиях изучение интегральных операторов базировалось на приближении этих операторов конечномерными. Современное изложение, более общее и технически менее сложное, базируется на других идеях,

[5] Обращаем внимание читателя, что замкнутости в смысле поточечной сходимости здесь нет.

принадлежащих в первую очередь Ф. Риссу. Тем не менее, аппроксимация конечномерными бывает полезной при изучении конкретных операторов, в частности, в задачах численного решения уравнений, содержащих компактные операторы.

Теорема 2. Пусть Y – пространство со свойством поточечной аппроксимации (например, пространство с базисом), $T \in K(X,Y)$ и операторы S_n образуют аппроксимативную единицу в Y. Тогда операторы $T_n = S_n T$ образуют последовательность конечномерных операторов, сходящуюся по норме к оператору T.

Доказательство. Операторы T_n конечномерны, так как конечномерны операторы S_n. Кроме того, последовательность операторов S_n ограничена и поточечно сходится к тождественному оператору I на предкомпакте $T(B_X)$, следовательно, имеет место и равномерная сходимость на $T(B_X)$. Следовательно, $\|T_n - T\| = \sup\limits_{x \in B_X} \|T_n x - Tx\| = \sup\limits_{x \in B_X} \|(S_n - I)Tx\| = \sup\limits_{y \in T(B_X)} \|(S_n - I)y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$ □

Теорема 3 (теорема Шаудера о компактности сопряжённого оператора). Пусть X,Y – банаховы пространства, $T \in K(X,Y)$. Тогда $T^* \in K(Y^*, X^*)$.

Доказательство. Согласно определению, нам требуется доказать предкомпактность множества $G = T^*(B_{Y^*})$ в X^*. Введём обозначение $K = \overline{T(B_X)}$. По условию, K – компакт в Y. Рассмотрим пространство $C(K)$ непрерывных функций на этом компакте и отображение $U\colon G \to C(K)$, действующее по правилу $U(T^* f) = f|_K$, то есть функционалу $T^* f \in X^*$ ставится в соответствие ограничение функционала $f \in Y^*$ на K.

Докажем, что U – изометрия. Пусть $T^* f_1, T^* f_2$ – два произвольных элемента множества G. Имеем

$$\left\|T^* f_1 - T^* f_2\right\| = \left\|T^*(f_1 - f_2)\right\| = \sup_{x \in B_X} \left|T^*(f_1 - f_2)x\right| = \sup_{x \in B_X} \left|(f_1 - f_2)(Tx)\right| =$$

$$= \sup_{y \in T(B_X)} \left|(f_1 - f_2)y\right| = \sup_{y \in K} \left|(f_1 - f_2)y\right| = \left\| f_1|_K - f_2|_K \right\|_{C(K)}.$$

Этой оценкой доказана заодно и корректность определения отображения U: если $T^* f_1 = T^* f_2$, то $\left\|U(T^* f_1) - U(T^* f_2)\right\| = \left\| f_1|_K - f_2|_K \right\| = 0$, то есть $U(T^* f_1) = U(T^* f_2)$.

Ввиду изометричности отображения U предкомпактность множества G равносильна предкомпактности в $C(K)$ его образа $U(G) = \{f|_K : f \in B(Y^*)\}$. Множество $U(G)$ равномерно ограничено, так как для любого $f \in B(Y^*)$

$$\|f|_K\|_{C(K)} = \sup_{x \in B_X} \left|f|_K(Tx)\right| \le \|f\| \cdot \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \le \|T\|.$$

С другой стороны, множество $U(G)$ равностепенно непрерывно, так как его элементы – это функции, удовлетворяющие условию Липшица с константой 1:

$$\left|f|_K(y_1) - f|_K(y_2)\right| \le \left|f(y_1) - f(y_2)\right| \le \|f\| \cdot |y_1 - y_2| \le \|y_1 - y_2\|.$$

Для завершения доказательства осталось применить теорему Арцела. □

11.3.3. Упражнения

1. Пусть T – оператор интегрирования с ядром (см. пример 1 и упражнение 4 п. 11.3.1), причём ядро представимо в виде $K(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(\tau)$. Доказать, что такой оператор имеет конечный ранг.
2. Доказать, что оператор интегрирования с ядром из примера 1 п. 11.3.1 может быть приближен с любой степенью точности операторами интегрирования с ядром, имеющими конечный ранг.
3. Найти для оператора из упражнения 1 представление в виде $T = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes y_k$, как в упражнении 2 п. 11.2.2.
4. Сопряженный оператор к конечномерному оператору снова имеет конечный ранг.
5. Для конечномерного оператора $A \in L(X,Y)$

$$\operatorname{codim} \operatorname{Ker} A = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} A^* = \dim A(X) = \dim A^*(X^*).$$

Если оператор имеет бесконечный ранг, все эти четыре характеристики также бесконечны. (определение коразмерности см. п. 5.3.4)
6. Образ компактного оператора $A \in L(X,Y)$ замкнут тогда и только тогда, когда оператор конечномерен (то есть, как правило, образ компактного оператора незамкнут).
7. Приведите пример некомпактного оператора, имеющего незамкнутый образ.
8. Доказать следующую теорему, принадлежащую И. К. Даугавету: пусть $T : C[0,1] \to C[0,1]$ – компактный оператор. Тогда $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.

Подробнее об этой теореме и её роли в теории банаховых пространств см. [Kad2], [KSSW].

9. Доказать, что *равенство Даугавета* $\|I+T\| = 1 + \|T\|$ для оператора T в гильбертовом пространстве выполнено в том и только том случае, если $\|T\| \in \sigma(T)$.

11.3.4. Операторы вида I –T, где T – компактный оператор

При изучении спектра вполне непрерывного оператора центральную роль играет следующее утверждение.

Теорема. Пусть $T \in K(X, X)$. Тогда:

(1) образ оператора $I - T$ – замкнутое подпространство.
(2) Если оператор вида $I - T$ инъективен, то он сюръективен.
(3) Если оператор вида $I - T$ сюръективен, то он инъективен. □

Отметим, что вместе свойства (2) и (3) означают, что оператор $I - T$ либо обратим, либо одновременно и не инъективен, и не сюръективен.

Настоящий раздел посвящён доказательству этих свойств, причём каждое из свойств (1)-(3) будет выделено в отдельное утверждение.

Утверждение 1. Пусть $T \in K(X, X)$. Тогда образ оператора $A = I - T$ есть замкнутое подпространство.

Доказательство. Будем рассуждать методом «от противного». Обозначим $\operatorname{Ker} A$ через Y. Согласно критерию, доказанному в теореме 5 п. 10.2.3, незамкнутость образа означает, что существует последовательность x_n в X со следующими свойствами:

1. $\operatorname{dist}(x_n, Y) = 1$;
2. $\|Ax_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
3. $\|x_n\| \to 1$.

Ввиду компактности оператора T последовательность Tx_n образует предкомпакт в X. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, мы можем добиться, чтобы последовательность Tx_n имела предел. Обозначим этот предел через s. Поскольку $x_n = Ax_n + Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$, то $\operatorname{dist}(s, Y) = 1$. С другой стороны, $As = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - Tx_n) = s - s = 0$, то есть s лежит в подпространстве Y – ядре оператора A. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Утверждение 2. Если оператор вида $A = I - T$, где $T \in K(X, X)$, инъективен, то он и сюръективен.

Доказательство. Будем рассуждать методом «от противного». Пусть $A(X) \neq X$. Рассмотрим подпространства $Y_n = A^n(X)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для начала докажем, что эти подпространства образуют последовательность $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ строго вложенных подпространств. Для этого применим метод математической индукции.

Строгое вложение $Y_0 \supset Y_1$ очевидно, так как $Y_0 = X; Y_1 = A(X)$. Пусть $Y_{n-1} \supset Y_n$ строго. Инъективный оператор A сохраняет строгие вложения, поэтому $Y_n = A(Y_{n-1}) \supset A(Y_n) = Y_{n+1}$.

Продолжим наше рассуждение. Ввиду доказанных строгих вложений существуют функционалы $f_n \in S(Y_n^*)$, $f_n(Y_{n+1}) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Доопределим эти функционалы на всё X с сохранением нормы. Согласно теореме о компактности сопряжённого, оператор T^* переводит множество $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в предкомпакт. Докажем теперь, что последовательность $T^* f_n$ – разделённая, то есть $\inf\limits_{m \neq n \in \mathbf{N}} \left\| T^* f_m - T^* f_n \right\| > 0$. Этим мы придём к противоречию с предкомпактностью и завершим доказательство теоремы. Пусть $n > m$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\left\| T^* f_m - T^* f_n \right\| \geq \left\| T^* f_m - T^* f_n \right\|_{Y_n^*} = \\
&= \sup_{x \in B_{Y_n}} \left| \left((T^* - I^*) f_n + f_n + (I^* - T^*) f_m - f_m \right)(x) \right| = \\
&= \sup_{x \in B_{Y_n}} \left| \left(f_n (T - I) x + f_m (I - T) x + f_n(x) - f_m(x) \right) \right| = \\
&= \sup_{x \in B_{Y_n}} \left| \left(- f_n A(x) + f_m A(x) + f_n(x) - f_m(x) \right) \right| = \\
&= \sup_{x \in B_{Y_n}} \left| f_n(x) \right| = \left\| f_n \right\|_{Y_n^*} = 1.
\end{aligned}
$$

Здесь использовалось то, что $Ax \in Y_{n+1}$ при $x \in Y_n$ и функционалы f_j равны 0 на подпространствах с большим индексом. □

Отметим важное следствие полученного утверждения.

Следствие. Пусть оператор вида $A = I - T$, где T – компактный, необратим. Тогда оператор A неинъективен.

Доказательство. Пусть оператор A инъективен. По предыдущему утверждению, он будет сюръективным, а инъективность и сюръективность вместе означают обратимость. □

Утверждение 3. Если оператор вида $A = I - T$, где $T \in K(X, X)$, сюръективен, то он и инъективен.

Доказательство. Пусть оператор A сюръективен, тогда A^* инъективен (следствие 1 п. 9.4.1). Поскольку A^* – снова оператор вида «единичный минус компактный», то, согласно предыдущей теореме, оператор A^* будет и сюръективным. Следовательно, оператор A инъективен (следствие 2 п. 9.4.1), что и требовалось доказать. □

Замечание. Основные результаты настоящего раздела представляют собой частные случаи более общей теоремы Фредгольма, сформулированной ниже в упражнении 2 п. 11.3.5. Фредгольм изучал соответствующие явления для интегральных операторов. На общий случай вполне непрерывных операторов теоремы Фредгольма были перенесены Ф. Риссом.

11.3.5. Упражнения

1. Доказать, что для оператора вида $A = I - T$, где T – компактный, следующие условия эквивалентны:
   - уравнение $Ax = b$ разрешимо при любой правой части;
   - однородное уравнение $Ax = 0$ не имеет ненулевых решений;
   - уравнение $Ax = b$ разрешимо при любой правой части, причём единственным образом.
2. **Теорема Фредгольма.** Пусть $A = I - T$, где оператор $T \in L(X)$ компактен. Тогда $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{codim} A(X) = \operatorname{codim} A^*\left(X^*\right)$.

Операторы вида «скалярный + компактный». Оператор $A \in L(X)$ называется *оператором вида «скалярный + компактный»*, если он представим в виде $A = \lambda I + T$, где $T \in K(X, X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. У оператора в бесконечномерном пространстве не может быть двух различных представлений в виде $A = \lambda I + T$ «скалярный + компактный».
4. Операторы вида «скалярный + компактный» образуют подалгебру в $L(X)$.
5. Пусть T – диагональный оператор в l_2 (см. упражнение 2 п. 11.1.7), λ_n – диагональные элементы его матрицы в каноническом базисе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства l_2 (другими словами, $Te_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \ldots$). Доказать, что T представим в виде «скалярный + компактный» в том и только том случае, если последовательность λ_n имеет предел.

6. Пусть T – проектор. Тогда T представим в виде «скалярный + компактный» в том и только том случае, если или образ или ядро оператора T имеет конечную размерность.

Линейный функционал f, заданный на банаховой алгебре $\mathbf{A}$, называется *мультипликативным функционалом* (другой термин – *комплексный гомоморфизм*), если $f(e)=1$, и $f(xy)=f(x)f(y)$ для любых $x,y\in\mathbf{A}$.

7. Мультипликативный функционал может обращаться в ноль только на необратимых элементах алгебры.
8. Любой мультипликативный функционал, заданный на банаховой алгебре, непрерывен и его норма равна 1.
9. Постройте мультипликативный функционал на алгебре операторов вида «скалярный + компактный», действующих в банаховом пространстве X.
10. Докажите, что на $L(l_2)$ не существует мультипликативных функционалов.
11. Для мультипликативных функционалов не выполнен аналог теоремы Хана – Банаха: не каждый мультипликативный функционал, заданный на подалгебре, можно продолжить на всю банахову алгебру с сохранением линейности и мультипликативности.
12. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство. Будем говорить, что X – *скупое пространство*, если каждый непрерывный оператор $A\in L(X)$ представим в виде «скалярный + компактный». Докажите, что среди пространств $C(K)$, l_p и L_p нет скупых.

11.3.6. Структура спектра компактного оператора

Теорема. Пусть $T\in L(X)$ – компактный оператор. Тогда:

1. Спектр оператора T или конечен, или состоит из последовательности точек, стремящейся к 0.
2. Ноль принадлежит спектру.
3. Если $\lambda\neq 0$ принадлежит спектру, то λ – собственное число оператора; собственные подпространства, соответствующие ненулевым собственным числам, конечномерны.

Доказательство. Начнём с доказательства последнего свойства. Пусть $\lambda\neq 0$ принадлежит спектру. Тогда оператор $(T-\lambda I)=-\lambda\left(I-\lambda^{-1}T\right)$ необратим. Значит, по следствию из утверждения 2 п. 11.3.4, он не инъективен, то есть существует ненулевой элемент $x\in X$, на котором $(T-\lambda I)x=0$. Это и означает, что x – собственный вектор, а λ – собственное число оператора T. Далее, пусть Y – собственное подпространство, соответствующее числу λ. Ввиду того, что ограничение оператора T на подпространство Y – биективный компактный оператор, следствие из теоремы 1 п. 11.3.2 даёт требуемую конечномерность.

Принадлежность нуля спектру, то есть необратимость оператора T, вытекает из того же следствия теоремы 1 п. 11.3.2.

Докажем, наконец, пункт 1. Будем рассуждать «от противного». Пусть спектр оператора T бесконечен и имеет ненулевую предельную точку μ. Пусть, далее, $\lambda_k \neq \mu$ – это последовательность собственных чисел, стремящаяся к μ, а x_k – соответствующие собственные векторы. Введём в рассмотрение подпространство $Y=\overline{\mathrm{Lin}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}}$ и оператор $A \in L(Y)$ – ограничение на Y оператора $I - \frac{1}{\mu}T$. Отметим, что $Ax_k = \left(1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right)x_k$. Поэтому образ оператора A содержит все векторы x_k, то есть образ плотен в Y. Согласно основной теореме п. 11.3.4, образ замкнут, то есть оператор A сюръективен и, следовательно, биективен. Но это невозможно, так как оператор неограничен снизу: $\frac{\|Ax_k\|}{\|x_k\|} = \left|1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. □

Упражнения

1. Доказать, что компактный оператор не может быть внутренней точкой множества необратимых операторов в $L(X)$. Применить этот факт для решения упражнения 5 п. 11.1.3.

Найти спектры следующих операторов:

2. Оператор интегрирования из примера п. 11.1.6.

3. $T \in L(C[0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 (x+t)f(x)dx$.

4. $T \in L(C[0,1])$, $Tf(t) = f(t) + \int_0^1 (x+t)f(x)dx$.

5. $T \in L(C[0,2\pi])$, $Tf(t) = \int_0^{2\pi} \cos(x+t)f(x)dx$.

6. $T \in L(C[0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 (x+t)f(t)dx$.

11.4. Комментарии к упражнениям

Литература по теме «Банаховы алгебры»: учебники [Wer], гл. 9 и [Rud], гл. 10.

Параграф 11.1.1

Упражнение 2. Произведение может не лежать в том же пространстве.

Упражнение 3. Отсутствует единичный элемент.

Параграф 11.1.5

Упражнение 4. Воспользоваться упражнением 11 п. 11.1.3.

Параграф 11.1.6

Упражнение 6. См. упражнения 6, 7 п. 10.2.4.

Параграф 11.1.7

Упражнение 5. См. указания в конце п. 12.3.5 (сразу после доказательства теоремы об изоморфизме).

Параграф 11.2.1

Упражнения 4-6. Подробнее об этом свойстве см. статью [B-K]. Как сообщил нам Zbigniew Lipecki, под другими названиями это свойство изучалось ранее рядом авторов: E. Szpilrajn-Marczewski, Fund. Math. 15 (1930), 126-127 и Fund. Math. 22 (1934), 303-311; R. Duda and R. Telgarsky, Czechoslovak Math. J. 18(93) (1968), 66-82; Ch. Bandt, Mathematika 28 (1981), 206-210.

Упражнение 9. См. [L-T], v.1, Proposition 1.e.2.

Параграф 11.2.2

Упражнение 2. В доказательстве нуждается только вторая часть утверждения. Пусть T – конечномерный оператор, $\{y_k\}_{k=1}^n$ – базис конечномерного пространства $T(X)$. Далее, пусть $g_k \in T(X)^*$ – координатные функционалы, соответствующие базису $\{y_k\}_{k=1}^n$. Имеем $Tx = \sum_1^n g_k(Tx)y_k$, то есть в качестве требуемых $\{f_k\}_{k=1}^n$ можно взять $f_k(x) = g_k(Tx)$.

Упражнение 5. Ввиду равенства $(Tf)(t) = \int_0^1 xf(x)dx + t\int_0^1 f(x)dx$ образ оператора содержится в двумерном пространстве функций вида $g(t) = a + bt$.

Параграф 11.3.3

Упражнение 5. Воспользовавшись представлением $Ax = \sum_1^n f_k(x)y_k$ с линейно независимыми наборами $\{y_k\}_{k=1}^n$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ (упражнение 2 п. 11.2.2 и комментарий к нему), найти выражение для A^*. Отсюда вывести, что $\dim A(X) = \dim A^*(X^*) = n$. Чтобы убедиться, что коразмерность ядра равна размерности образа, воспользоваться инъективизацией линейного оператора (п. 5.2.3).

Упражнение 6. Если образ конечномерен, то он замкнут, так как конечномерное подпространство замкнуто в любом объемлющем пространстве. Обратно, предположим, что образ замкнут. Тогда $A(X)$ – банахово пространство. По теореме об открытом отображении, образ единичного шара – открытое множество в $A(X)$, поэтому предкомпакт $A(B(X))$ содержит некоторый шар U пространства $A(X)$. Тогда этот шар U – предкомпакт, следовательно, единичный шар пространства $A(X)$, который получается из U параллельным переносом и умножением на скаляр, в свою очередь, предкомпакт. Таким образом, $A(X)$ – конечномерное пространство.

Параграф 11.3.5

Упражнение 2. См. [L-S], гл. 6, с. 281-284. Указание: рассуждением из утверждения 2 п. 11.3.4 получить, что среди подпространств $Y_n = A^n(X)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, может быть лишь конечное число попарно различных. Убедиться, что подпространство $Y = \bigcap\limits_n Y_n$ – это подпространство конечной коразмерности, которое оператором A биективно отображается само в себя. Рассмотреть подпространство $Z = \bigcup\limits_n Ker A^n$. Доказать, что $X = Y \oplus Z$. Посмотреть, как A действует на каждом из этих слагаемых.

Упражнение 12. На момент написания нашей книги вопрос существования пространств с таким свойством оставался открытым.

Параграф 11.3.6

Упражнение 2. $\sigma(T) = \{0\}$. Действительно, оператор вполне непрерывен, следовательно, $0 \in \sigma(T)$. Ненулевых точек в спектре нет, так как, согласно теореме п. 11.3.6, такие точки были бы собственными числами, а собственных чисел, как показано в п. 11.1.6, у этого оператора нет.

12. Гильбертовы пространства

Среди бесконечномерных пространств Банаха гильбертово пространство выделяется относительной простотой. В гильбертовых пространствах нам в наиболее полной мере удаётся использовать свою геометрическую интуицию: измерять углы между векторами, применять теорему Пифагора и ортогональное проектирование. Здесь отсутствуют такие аномальные явления[1], как недополняемые подпространства, или как, скажем, линейные функционалы, не достигающие своей верхней грани на единичной сфере. Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой. Благодаря этой относительной простоте, гильбертово пространство часто используется в приложениях. Всюду, где это только возможно (правда, это удаётся не всегда), стараются использовать язык гильбертовых пространств, а не общих банаховых или же топологических векторных пространств. Теория операторов в гильбертовом пространстве развита гораздо глубже, чем в общем случае, что служит ещё одной причиной частого применения этой техники в приложениях.

12.1. Норма, порождённая скалярным произведением

12.1.1. Скалярное произведение

Пусть X – комплексное линейное пространство. Функция $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$, ставящая каждой паре x, y элементов пространства X в соответствие комплексное число, называется *скалярным произведением*, если она подчиняется следующим аксиомам:

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ для любого $x \in X$ (положительность);

(2) если $\langle x, x\rangle = 0$, то $x = 0$ (невырожденность);

(3) $\langle ax_1 + bx_2, y\rangle = a\langle x_1, y\rangle + b\langle x_2, y\rangle$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и $a, b \in \mathbb{C}$ (линейность по первой переменной);

(4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ для любых $x, y \in X$ (эрмитова симметричность)

(черта в последней формуле означает операцию перехода к комплексно сопряжённому числу).

Отметим, что из третьей и четвёртой аксиом следуют правила раскрытия скобок по второй переменной:

(5) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$;

[1] Насколько нам известно, летающие тарелки, полтергейст, телепатия и снежный человек никому не встречались даже в общих банаховых пространствах.

(6) $\langle x, ay \rangle = \bar{a}\langle x, y \rangle$.

Элементы x, y, для которых $\langle x, y \rangle = 0$, называются *ортогональными* между собой (сокращённая запись $-$ $x \perp y$).

Примеры

I. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$: пусть $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Положим $\langle x, y \rangle$ равным $\sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$.

II. Скалярное произведение в l_2: для любых $x, y \in l_2$, $x = (x_1, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, ..., y_n, ...)$ положим $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$.

III. Скалярное произведение в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$: $\forall f, g \in L_2$ определим скалярное произведение формулой $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f\, \bar{g}\, d\mu.$

Хотя во всех перечисленных пространствах существуют, естественно, и другие скалярные произведения, в дальнейшем, если не оговорено противное, под скалярными произведениями в $\mathbb{C}^n$, l_2 и L_2 мы будем подразумевать именно описанные выше примеры.

Упражнения

1. Опираясь на числовое неравенство $|ab| \le |a|^2 + |b|^2$, доказать сходимость ряда и существование интеграла в определениях скалярных произведений в l_2 и $L_2[0,1]$ соответственно.
2. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения во всех вышеприведенных примерах скалярных произведений.
3. Каким должен быть отрезок $[a, b]$, чтобы функции $f(t) = e^{it}$ и $g(t) = e^{2it}$ были ортогональными между собой в $L_2[a, b]$?
4. Могут ли два многочлена первой степени быть ортогональными между собой в $L_2[0,1]$?
5. Могут ли две положительные функции быть ортогональными между собой в $L_2[0,1]$? Две неотрицательные? Две знакопеременные?
6. Является ли отношение $\perp$ ортогональности отношением эквивалентности? Отношением порядка?
7. Вывести следующую формулу сокращённого умножения (квадрат суммы):
$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Внимание! Этой формулой мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

12.1.2. Неравенство Коши – Буняковского

Теорема. Пусть X – пространство со скалярным произведением. Тогда для любых $x, y \in X$ выполнено следующее *неравенство Коши – Буняковского*:

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \le \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Доказательство. Ввиду аксиомы положительности для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\langle x + ty, x + ty\rangle \ge 0.$$

Раскрыв скобки получим, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\langle x, x\rangle + 2t \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + t^2 \langle y, y\rangle \ge 0.$$

Квадратный многочлен с вещественными коэффициентами может быть неотрицательным на всей оси, только если его дискриминант меньше или равен нуля. То есть нами доказано, что для любых $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \le \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Чтобы отсюда получить требуемое неравенство Коши – Буняковского, заметим, что

$$\left|\langle x, y\rangle\right| = \operatorname{Re}\left\langle x, e^{i\arg<x,y>} y\right\rangle \le \langle x, x\rangle^{1/2} \left\langle e^{i\arg<x,y>} y, e^{i\arg<x,y>} y\right\rangle^{1/2} = \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Теорема доказана. □

Упражнения

1. Для функций $f(t) = t$ и $g(t) = t^2$ в $L_2[0,1]$ вычислить скалярные произведения $\langle f, g\rangle$, $\langle f, f\rangle$ и $\langle g, g\rangle$. Проверить выполнение в этом примере неравенства Коши – Буняковского.
2. Пусть для некоторых элементов x, y пространства со скалярным произведением неравенство Коши – Буняковского превращается в равенство: $\left|\langle x, y\rangle\right| = \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}$. Тогда эти элементы линейно зависимы.
3. Опираясь на примеры II и III п. 12.1.1, вывести следующие варианты неравенства Коши – Буняковского:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{1/2} \text{ и } \left|\int_\Omega f\, g\, d\mu\right| \le \left(\int_\Omega |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2\, d\mu\right)^{1/2}.$$

4. Пусть функция F двух переменных на линейном пространстве X подчиняется всем аксиомам скалярного произведения, за исключением аксиомы невырожденности. Проверить, что и в этом случае неравенство Коши – Буняковского $\left|F(x, y)\right| \le F(x, x)^{1/2} F(y, y)^{1/2}$ по-прежнему имеет

место. (**Внимание!** Этим фактом мы будем пользоваться при изучении самосопряжённых операторов.)

12.1.3. Понятие гильбертова пространства

Определение 1. Пусть H – пространство со скалярным произведением. Величина $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ называется *нормой, порождённой скалярным произведением.*

Используя введённое обозначение, неравенство Коши – Буняковского можно переписать в виде $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$, а формула квадрата суммы может быть записана как $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

Проверим, что норма, порождённая скалярным произведением, подчиняется неравенству треугольника. Для этого возведём требуемое неравенство $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ в квадрат и раскроем скобки:

$$\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2.$$

После приведения подобных последнее неравенство сводится к неравенству $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \le \|x\| \cdot \|y\|$ – простому следствию неравенства Коши – Буняковского. Остальные аксиомы нормы для нормы, порождённой скалярным произведением, предлагаем читателю проверить самостоятельно.

Теорема. Пусть H наделено нормой, порождённой скалярным произведением, $h \in H$. Зададим отображение $F : H \to \mathbb{C}$ формулой $F(x) = \langle x, h\rangle$. Тогда F – это непрерывный линейный функционал и $\|F\| = \|h\|$.

Доказательство. Линейность функционала F – это аксиома (3) скалярного произведения. Непрерывность функционала и неравенство $\|F\| \le \|h\|$ следуют из неравенства Коши – Буняковского. Нужно только переписать это неравенство в виде $|F(x)| = |\langle x, h\rangle| \le \|x\| \cdot \|h\|$. Для оценки же нормы функционала F снизу подставим в F вектор $\dfrac{h}{\|h\|} \in S_H$:

$$\|F\| \ge \left| F\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| = \left|\frac{\langle h, h\rangle}{\|h\|}\right| = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\|.$$

Теорема доказана. □

Определение 2. Пространство со скалярным произведением H называется *гильбертовым пространством*, если оно полно в норме, порождённой скалярным произведением.

Так же, как и для общих банаховых пространств, в теории гильбертова пространства подпространствами называются замкнутые линейные подпространства. На подпространстве гильбертова пространства определено то же скалярное произведение, что и на всём пространстве. В этом скалярном произведении подпространство гильбертова пространства само является гильбертовым пространством.

Упражнения

1. Пусть $x \perp y$. Тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (аналог теоремы Пифагора). Верно ли обратное утверждение: если $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $x \perp y$?
2. Проверить, что введённые нами ранее в п. 6.2.2 нормы пространств l_2 и L_2 порождены соответствующими скалярными произведениями (см. примеры II, III п. 12.1.1).
3. Доказать, что для любых x, y – элементов гильбертова пространства H выполнено *равенство параллелограмма*[2]: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Внимание! Равенство параллелограмма будет использоваться ниже в п. 12.2.1.

4. Пусть x_n, x, y_n и y – элементы гильбертова пространства H, $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.
5. Проверить, что в банаховых пространствах $C[0,1], L_1[0,1], c_0$ и l_1 равенство параллелограмма не имеет места.
6. Доказать, что если для любых элементов x, y нормированного пространства X выполнено равенство параллелограмма, то норма пространства X порождается некоторым скалярным произведением.

12.2. Геометрия гильбертова пространства

12.2.1. Теорема о наилучшем приближении

Теорема. Пусть H – гильбертово пространство, $A \subset H$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда для любого элемента h пространства H в A существует единственный ближайший к h элемент. Другими словами, существует единственный элемент $a_0 \in A$, для которого $\|h - a_0\| = \rho(h, A)$.

Доказательство. Поскольку $\rho(h, A) = \rho(0, A - h)$, теорему достаточно доказывать для случая $h = 0$. Обозначим $\rho(0, A)$ через r и рассмотрим

[2] Параллелограмм – известный древнегреческий математик, имевший четырёхугольную форму и попарно параллельные противоположные стороны. Его отличительная особенность – «равенство параллелограмма»: сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех сторон.

множества $A_n = \left\{ a \in A : \|a\| \le r + \frac{1}{n} \right\} = A \bigcap (r + \frac{1}{n}) \overline{B}_H$. Пересечение всех A_n – это множество элементов, находящихся на расстоянии r от нуля. То есть нам нужно доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ состоит из одной точки. Для этого воспользуемся принципом вложенных множеств (п. 1.3.4). Множества A_n образуют убывающую цепочку выпуклых замкнутых множеств. Осталось доказать, что $\operatorname{diam} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Для оценки диаметра возьмём две произвольные точки $x, y \in A_n$ применим равенство параллелограмма и неравенство $r \le \|e\| \le r + 1/n$, имеющее место для любого $e \in A_n$:

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \right) \le$$

$$\le 2\left((r+1/n)^2 + (r+1/n)^2 - 2r^2 \right) = \frac{8r}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Итак, $\operatorname{diam} A_n \le \left(\frac{8r}{n} + \frac{4}{n^2} \right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ □

Упражнения

1. Проверить выпуклость и замкнутость множеств A_n в доказательстве теоремы о наилучшем приближении.
2. Где в доказательстве использовалась выпуклость множеств A_n ?
3. Где в доказательстве использовалось то, что норма гильбертова пространства порождена скалярным произведением?
4. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим функционал F, действующий по правилу $F(x) = \int\limits_0^{1/2} x(t)dt - \int\limits_{1/2}^{1} x(t)dt.$ Тогда $A = \{x \in C[0,1] : F(x) = 1\}$ – выпуклое замкнутое множество, не имеющее в себе ближайшего к нулю элемента (см. также п. 6.4.3, упражнение 10).
5. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим множество A всех функций, принимающих в нуле значение 1. Проверьте, что расстояние от A до 0 равно 1, что это расстояние достигается, но ближайшая к нулю точка в A не единственна.
6. Для нормированного пространства X следующие свойства эквивалентны:
   – в любом выпуклом подмножестве $A \subset X$ для любой точки $x \in X$, если в A есть ближайший к x элемент, то этот элемент единственен;

– для любых двух неколлинеарных векторов $x, y \in X$ выполнено *строгое неравенство треугольника*: $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$;
– $\|x+y\| < 2$ для любых двух различных векторов $x, y \in S_X$;
– единичная сфера пространства не содержит прямолинейных отрезков ненулевой длины (последнее свойство пространства называется *строгой выпуклостью*).

7. Пусть для подмножества A нормированного пространства X выполнено утверждение теоремы о наилучшем приближении: для любого элемента h пространства X в A существует единственный ближайший к h элемент. Тогда A замкнуто.
8. Пусть для подмножества A конечномерного гильбертова пространства H выполнено утверждение теоремы о наилучшем приближении. Тогда A выпукло.
9. Распространить утверждение последнего упражнения на случай бесконечномерного гильбертова пространства.[3]

12.2.2. Ортогональные дополнения и ортопроекторы

Определение. Пусть H – гильбертово пространство. Элемент $h \in H$ называют *ортогональным* подмножеству $X \subset H$ ($h \perp X$), если h ортогонален всем элементам подмножества. Множество всех элементов, ортогональных подмножеству X, называется *ортогональным дополнением* к X и обозначается $X^{\perp}$.

Утверждение 1. $X^{\perp}$ – это подпространство в H (напомним, что в банаховых пространствах, а значит, и в гильбертовом пространстве, согласно принятой нами договорённости, термин «подпространство» без дополнительных эпитетов означает «замкнутое линейное подпространство»).

Доказательство. $X^{\perp} = \bigcap\limits_{x \in X} x^{\perp}$. Поэтому достаточно доказать, что для любого элемента x множество $x^{\perp}$ – это замкнутое линейное подпространство в H. Но $x^{\perp}$ совпадает с ядром $F^{-1}(0)$ непрерывного линейного функционала $F : y \to \langle y, x \rangle$ (см. теорему п. 12.1.3). □

Следующее утверждение служит прямым обобщением факта, хорошо известного ещё из школьной геометрии: чтобы найти в подпространстве X ближайший элемент к точке h, нужно опустить перпендикуляр на подпространство.

[3] Если Вам это удастся – публикуйте! По крайней мере, на момент написания настоящего курса лекций задача оставалась нерешённой.

Утверждение 2. Пусть X – подпространство гильбертова пространства H, $h \in H$, $h_0 \in X$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) h_0 – это ближайший в X элемент к h;

(b) $h - h_0 \in X^{\perp}$.

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$. Предположим, что условие (b) не выполнено. Тогда в X существует элемент x, для которого $\langle x, h - h_0 \rangle \neq 0$. Домножив при необходимости x на константу, получим вектор, для которого $\langle x, h - h_0 \rangle = 1$. Согласно условию (a), для любого $t > 0$

$$\|h - h_0\|^2 \leq \|h - h_0 - tx\|^2 = \|h - h_0\|^2 - 2t + t^2 \|x\|^2 .$$

То есть при любом $t > 0$

$$t^2 \|x\|^2 - 2t \geq 0,$$

что очевидным образом не выполняется при малых t.

$(b) \Rightarrow (a)$. Рассмотрим произвольный элемент $h_1 \in X$. Имеем $\|h - h_1\|^2 = \|(h - h_0) - (h_0 - h_1)\|^2 = \|h - h_0\|^2 + \|h_0 - h_1\|^2 \geq \|h - h_0\|^2$. То есть h_0 – ближайший в X элемент к h, что и требовалось доказать.□

Теорема. Пусть X – подпространство гильбертова пространства H. Тогда H распадается в прямую сумму подпространств X и $X^{\perp}$: $H = X \oplus X^{\perp}$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что 1) $X \bigcap X^{\perp} = \{0\}$, и 2) для любого $h \in H$ существуют такие $x \in X$ и $y \in X^{\perp}$, что $h = x + y$.

1) Пусть некий элемент x принадлежит одновременно подпространствам X и $X^{\perp}$. Тогда $x \perp x$, то есть $\langle x, x \rangle = 0$, и, следовательно, $x = 0$.

2) Пусть $h \in H$ – произвольный элемент. Обозначим через x ближайший к h элемент подпространства X и положим $y = h - x$. Тогда $x \in X$, $y \in X^{\perp}$ (по доказанному выше утверждению 2) и $h = x + y$. □

Поскольку $H = X \oplus X^{\perp}$, существует (см. п. 10.3.2) ограниченный проектор P на подпространство X с $\mathrm{Ker} P = X^{\perp}$. Действие этого проектора можно непосредственно описать следующим образом: для любого $h \in H$ запишем представление $h = x + y$, где $x \in X$, $y \in X^{\perp}$. Тогда $Ph = x$. Такой проектор P называется *ортопроектором* на подпространство X. Читатель лучше познакомится со свойствами ортопроекторов, прорешав нижеприведенные упражнения.

Замечание. Как мы только что доказали, в гильбертовом пространстве существует ограниченный проектор на любое подпространство. Известна и обратная теорема Линденштраусса – Цафрири [L-T1]: если в банаховом пространстве X любое подпространство дополняемо, то X изоморфно гильбертову пространству.

Упражнения

1. Ортопроектор на подпространство $X \subset H$ ставит каждому элементу $h \in H$ ближайший к h элемент подпространства X.
2. Норма ортопроектора на ненулевое подпространство равна единице.
3. Если какой-то проектор P на подпространство X имеет $\|P\| = 1$, то это – ортопроектор.
4. Докажите, что ортогональное дополнение к подмножеству – это замкнутое линейное подпространство, опираясь непосредственно на определение.
5. Пусть X – подпространство гильбертова пространства H. Тогда $(X^{\perp})^{\perp} = X$.
6. Для произвольного множества $X \subset H$ верно следующее утверждение: $(X^{\perp})^{\perp}$ совпадает с замыканием линейной оболочки множества X.
7. Пусть $e_k \in H$, $k = 1,2,...; X = \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k\}_1^{\infty}$. Тогда для того, чтобы элемент $y \in H$ принадлежал $X^{\perp}$, необходимо и достаточно, чтобы y был ортогонален всем e_k. Другими словами, $X^{\perp} = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} e_k^{\perp}$.

12.2.3. Теорема об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве

Теорема. Для любого линейного непрерывного функционала F, заданного на гильбертовом пространстве H, существует такой элемент $h \in H$, что $F(x) = \langle x, h \rangle$ для любого $x \in H$. Такой элемент h определён однозначно, и $\|F\| = \|h\|$.

Доказательство. В случае функционала F, тождественно равного нулю, утверждение очевидно. Пусть $F \neq 0$. Обозначим ядро функционала F через X. Тогда существует элемент e единичной нормы, ортогональный X. В качестве требуемого элемента возьмём $h = \overline{F(e)}\, e$. При таком выборе $F(x) = \langle x, h \rangle$ для любого $x \in X$. Равенство $F(x) = \langle x, h \rangle$ выполнено и для $x = e$. Следовательно, $F(x) = \langle x, h \rangle$ для любого $x \in \mathrm{Lin}\{e, X\}$. Но X – это гиперподпространство в H (см. п. 5.3.3), следовательно, $\mathrm{Lin}\{e, X\} = H$ и $F(x) = \langle x, h \rangle$ на всём пространстве. Равенство $\|F\| = \|h\|$ было доказано выше, в п. 12.1.3. Осталось проверить единственность элемента h. Пусть $h_1 \in H$ – такой элемент, что $F(x) = \langle x, h_1 \rangle$ для любого $x \in H$. Тогда $\langle x, h - h_1 \rangle = 0$ для любого $x \in H$, в частности $\langle h - h_1, h - h_1 \rangle = 0$. То есть $h - h_1 = 0$ и $h = h_1$. Теорема доказана. □

Замечание. Соображение, использованное в конце доказательства, может быть выделено в отдельное утверждение: если $\langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle$ для всех $x \in H$, то $h_1 = h_2$. Этим утверждением мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Упражнения

1. В вышеприведенном доказательстве разобран только случай $F \neq 0$ (кстати, где мы пользовались неявно этим условием?). Разберите сами случай $F = 0$.
2. Каким образом использовалась непрерывность функционала F?
3. Почему из выполнения равенства $F(x) = \langle x, h \rangle$ для любого $x \in X$ и для $x = e$ следует выполнение этого равенства для всех $x \in \mathrm{Lin}\{e, X\}$?
4. Важна ли в доказанной теореме полнота пространства H?
5. Определим отображение $U : H \to H^*$ следующим образом: для любого $h \in H$ функционал Uh действует по правилу $(Uh)(x) = \langle x, h \rangle$. Докажите, что отображение U биективно, аддитивно (то есть $U(h_1 + h_2) = Uh_1 + Uh_2$), но не однородно. Вместо однородности имеет место формула $U(\lambda h) = \overline{\lambda} U(h)$.
6. Пусть H – это подпространство пространства $L_2[0,1]$, состоящее из многочленов степени не выше 2. Представить функционал F на H, задаваемый формулой $F(f) = f(0)$ в виде $F(f) = \langle f, h \rangle$, указанном в теореме об общем виде линейного функционала в H. То же для функционала F_1 на H, задаваемого формулой $F_1(f) = f'(0)$.
7. Опираясь на теоремы п. 12.1.3 и упражнение 2 п. 9.1.3, докажите следующий n-мерный аналог известной формулы вычисления расстояния от точки до плоскости. Пусть гиперплоскость A в n-мерном координатном пространстве задана уравнением $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$. Тогда расстояние от любого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ до гиперплоскости A выражается формулой $\rho(x, A) = \dfrac{|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$.

8. Пусть числовая последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots)$ обладает следующим свойством: для любого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m$ сходится. Тогда $a \in l_2$ и формула $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m$ задаёт непрерывный линейный функционал на l_2.

С помощью предыдущего упражнения следующая теорема сводится к теореме о замкнутом графике.

9. Пусть бесконечная матрица $A = \left(a_{n,m}\right)_{n,m=1}^{\infty}$ обладает следующим свойством: для любого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m$ сходится, и числовая последовательность $Ax = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m \right)_{n=1}^{\infty}$ принадлежит l_2 (другими словами, оператор умножения на матрицу A отображает l_2 в l_2). Тогда оператор умножения на матрицу A непрерывен, как оператор, отображающий l_2 в l_2.

12.3. Ортогональные ряды

Мы переходим к изучению раздела, который в какой-то степени уже затрагивался в других университетских курсах: в курсе математического анализа – при изучении тригонометрических рядов и в курсе линейной алгебры – при построении ортонормированных базисов в конечномерных евклидовых пространствах.

12.3.1. Критерий сходимости ортогонального ряда

Лемма. Пусть элементы $\{x_k\}_1^n$ гильбертова пространства H попарно ортогональны: $\langle x_k, x_j \rangle = 0$ при $k \neq j$. Тогда $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

Доказательство. Нужно воспользоваться определением нормы, раскрыть скобки и вычеркнуть нулевые слагаемые:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k \rangle + \sum_{k,j=1, k \neq j}^{n} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \square$$

Теорема. Пусть $\{x_k\}_1^\infty$ – последовательность попарно ортогональных элементов гильбертова пространства H. Тогда для сходимости ряда $\sum_1^\infty x_k$ необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2$.

Доказательство. По критерию Коши, для сходимости ряда $\sum_1^\infty x_k$ необходимо и достаточно, чтобы $\left\|\sum_{k=n}^m x_k\right\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Это условие ввиду доказанной леммы эквивалентно условию $\sum_{k=n}^m \|x_k\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, что, опять-таки по критерию Коши, равносильно сходимости ряда $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2$. □

Замечание. Если ряд попарно ортогональных слагаемых $\sum_1^\infty x_k$ сходится, то простым предельным переходом при $n\to\infty$ из формулы $\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$ получаем равенство $\left\|\sum_{k=1}^\infty x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2$.

Упражнение. Пусть $\sum_{-\infty}^\infty a_k e^{ikt}$ – ряд в $L_2[0,2\pi]$. При каком условии на коэффициенты a_k ряд сходится в $L_2[0,2\pi]$? Чему равна норма суммы этого ряда?

12.3.2. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя

На протяжении этого раздела для простоты изложения через Γ будет обозначаться конечное или счётное множество индексов. Однако изложение будет построено так, чтобы читатель без большого труда мог распространить основные утверждения и на случай несчётного Γ.

Определение. Система $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ элементов гильбертова пространства H называется *ортонормированной системой*, если x_k попарно ортогональны и нормы всех x_k равны 1. Эти два условия могут быть записаны вместе формулой $\langle x_k, x_j\rangle = \delta_{k,j}$, где $\delta_{k,j}$ – это символ

Кронекера. *Коэффициентами Фурье* элемента $h \in H$ по ортонормированной системе $\{x_k\}_{k \in \Gamma}$ называются числа $\hat{h}_k = \langle h, x_k \rangle$, $k \in \Gamma$.

Следующее утверждение проясняет роль коэффициентов Фурье.

Утверждение 1. Пусть $\{x_k\}_{k \in \Gamma}$ – ортонормированная система, $\{a_k\}_{k \in \Gamma}$ – скаляры и $h = \sum_{k \in \Gamma} a_k x_k$ (если в последней сумме бесконечное число ненулевых слагаемых, то сумма понимается как ряд, записанный в некотором фиксированном порядке). Тогда $a_k = \hat{h}_k$ при всех $k \in \Gamma$.

Доказательство. Умножим скалярно обе части равенства $h = \sum_{k \in \Gamma} a_k x_k$ на элемент x_j. Получим $\langle h, x_j \rangle = \sum_{k \in \Gamma} a_k \langle x_k, x_j \rangle$. Вспомнив, что $\langle x_k, x_j \rangle = \delta_{k,j}$, то есть вся сумма в правой части последнего равенства состоит из одного слагаемого a_j, получаем требуемое равенство $a_j = \langle h, x_j \rangle$. □

Утверждение 2. Пусть $\{x_k\}_{k \in \Gamma}$ – ортонормированная система элементов гильбертова пространства H, подпространство X – это замыкание линейной оболочки множества $\{x_k\}_{k \in \Gamma}$, $h \in H$. Для того, чтобы элемент $h_0 \in X$ был ближайшим в X к h, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье элемента h_0 по системе $\{x_k\}_{k \in \Gamma}$ совпадали с соответствующими коэффициентами Фурье элемента h.

Доказательство. Согласно утверждению 2 п. 12.2.2, h_0 – это ближайший в X элемент к h в том и только том случае, если $h - h_0 \in X^{\perp}$. Поскольку $X = \overline{\mathrm{Lin}}\{x_k\}_{k \in \Gamma}$, условие $h - h_0 \in X^{\perp}$ эквивалентно одновременному выполнению равенств $\langle h - h_0, x_k \rangle = 0$ при всех $k \in \Gamma$, что, в свою очередь, означает требуемое равенство $\langle h_0, x_k \rangle = \langle h, x_k \rangle$, $k \in \Gamma$. □

Теорема (неравенство Бесселя). Пусть $\{x_k\}_{k \in \Gamma}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, $h \in H$. Тогда

$$\sum_{k \in \Gamma} \left| \hat{h}_k \right|^2 \le \|h\|^2.$$

Доказательство. Неравенство Бесселя достаточно доказать для конечных ортонормированных систем: если $\sum_{k \in \Delta} \left| \hat{h}_k \right|^2 \le \|h\|^2$ для любого конечного подмножества $\Delta \subset \Gamma$, то и сумма по всему Γ оценивается тем же числом.

Пусть множество Γ конечно. Рассмотрим элемент $x = \sum_{k \in \Gamma} \hat{h}_k x_k$. Согласно утверждению 1, $\hat{x}_k = \hat{h}_k$. По утверждению 2, x – это ближайший в подпространстве $X = \mathrm{Lin}\{x_k\}_{k \in \Gamma}$ элемент к h, следовательно, $(h - x) \perp x$ и $\|x\|^2 + \|h - x\|^2 = \|h\|^2$. Таким образом, $\sum_{k \in \Gamma} \left|\hat{h}_k\right|^2 = \|x\|^2 \le \|h\|^2$. □

Упражнения

1. Почему в доказательстве утверждения 1 мы имели право вносить скалярное произведение под знак суммы?
2. Почему в формулировке неравенства Бесселя $\sum_{k \in \Gamma} \left|\hat{h}_k\right|^2$ не зависит от порядка, в котором выписаны слагаемые?

Пусть Γ – некоторое, возможно несчётное множество индексов. По определению, ряд $\sum_{k \in \Gamma} x_k$ элементов банахова пространства *безусловно сходится* к элементу x, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное подмножество $\Delta \subset \Gamma$, что для любого конечного подмножества $\Delta_1 \subset \Gamma$, если $\Delta_1 \supset \Delta$, то $\left\| x - \sum_{k \in \Delta_1} x_k \right\| < \varepsilon$. (По сути, здесь идёт речь о сходимости по некой направленности. Сравните с упражнением 5 п. 4.1.2.)

Пусть ряд $\sum_{k \in \Gamma} x_k$ элементов банахова пространства безусловно сходится к элементу x. Тогда:

3. Для любого $\varepsilon > 0$ число слагаемых, по норме больших чем ε, конечно;
4. Число ненулевых слагаемых ряда не более чем счётно;
5. Если все ненулевые слагаемые этого ряда выписать произвольным образом в последовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, то полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ сходится к элементу x в обычном смысле.
6. Проверьте, что если под сходимостью ряда несчётного числа слагаемых понимать безусловную сходимость, то утверждения об ортогональных рядах и ортонормированных системах, доказанные в последних двух пунктах, сохраняют силу и для несчётных систем и рядов.

12.3.3. Ряды Фурье, ортонормированные базисы и равенство Парсеваля

Ряд $\sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$, где $\hat{h}_n$ – это соответствующие коэффициенты Фурье, называется *рядом Фурье* элемента $h \in H$ по системе $\{e_n\}_1^{\infty} \subset H$.

Теорема 1. Пусть $\{e_n\}_1^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, $X = \overline{\mathrm{Lin}}\{e_k\}_1^{\infty}$ и P – ортопроектор на подпространство X. Тогда ряд Фурье любого элемента $h \in H$ сходится и его сумма совпадает с Ph.

Доказательство. Сходимость ряда $\sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$ следует из неравенства Бесселя (п. 12.3.2) и критерия сходимости ортогонального ряда (п. 12.3.1). Далее, элемент h можно представить в виде $h = \left(\sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n\right) + \left(h - \sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n\right)$, где очевидным образом $\sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in X$, а $h - \sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in X^{\perp}$ (см. упражнение 7 п. 12.2.2). По определению ортопроектора, отсюда вытекает, что $Ph = \sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$. □

Определение. Полная ортонормированная система $\{e_n\}_1^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H называется *ортонормированным базисом*. Другими словами, $\{e_n\}_1^{\infty}$ образуют ортонормированный базис, если $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$ для всех $k, j \in \mathbb{N}$ и $\overline{\mathrm{Lin}}\{e_k\}_1^{\infty} = H$.

Если в условиях теоремы 1 $\{e_n\}_1^{\infty}$ – ортонормированный базис, то $X = H$ и ортопроектор P – это просто тождественный оператор. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\{e_n\}_1^{\infty}$ – ортонормированный базис в пространстве H. Тогда ряд Фурье любого элемента $h \in H$ сходится и $\sum_{1}^{\infty} \hat{h}_n e_n = h$. □

Упражнения

1. Пусть H – гильбертово пространство, $\sum_1^\infty \hat{h}_n e_n$ – ряд Фурье элемента $h \in H$. Следующие условия эквивалентны:

– $\sum_1^\infty \hat{h}_n e_n = h$;

– для элемента h выполнено *равенство Парсеваля*: $\sum_1^\infty \left|\hat{h}_k\right|^2 = \|h\|^2$.

2. Если $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированный базис, то равенство Парсеваля выполнено для любого элемента $h \in H$.
3. Подобрать коэффициенты a_k таким образом, чтобы последовательность функций $f_k = a_k e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}$ образовывала ортонормированную систему в $L_2[0,2\pi]$.
4. Пусть последовательность f_k непрерывно дифференцируемых функций образует ортонормированную систему в $L_2[0,2\pi]$. Доказать, что производные функций f_k не могут быть ограничены в совокупности.
5. Привести пример последовательности f_k непрерывно дифференцируемых функций с ограниченными в совокупности производными, образующей ортонормированную систему в $L_2(-\infty,+\infty)$.
6. (Нерешенная задача.) Пусть $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная ограниченная функция, для которой функции $f_k(t) = f(kt)$, $k = 0,1,...$ образуют ортонормированную систему в $L_2[0,2\pi]$. Должна ли функция f быть периодичной?

12.3.4. Ортогонализация по Граму – Шмидту и теорема существования ортонормированного базиса

Теорема 1. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}_1^\infty \subset H$ – линейно независимая последовательность, $X_n = \mathrm{Lin}\{x_k\}_1^n$. Тогда существует ортонормированная система $\{e_n\}_1^\infty$, обладающая следующим свойством: $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^n = X_n$ при всех n. Такая ортонормированная система $\{e_n\}_1^\infty$ называется *ортогонализацией по Граму – Шмидту* системы $\{x_n\}_1^\infty$.

Доказательство. Обозначим через P_n ортопроектор на X_n. Положим $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, $e_2 = \frac{x_2 - P_1 x_2}{\|x_2 - P_1 x_2\|}$, ... , $e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}$, ... При таком определении все e_k при $k \le n$ лежат в X_n, а e_{n+1} ортогонально X_n. То есть при каждом n вектор e_{n+1} ортогонален всем предыдущим e_k. Кроме того, нормы всех e_k равны 1. Таким образом, $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированная система. По построению, $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^n \subset X_n$ и размерности этих пространств совпадают. Следовательно, $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^n = X_n$. □

Замечание. Поскольку $\{e_k\}_1^n$ образуют ортонормированный базис в X_n, для любого $h \in H$, по теореме 1 предыдущего пункта (п. 12.3.3), $P_n h = \sum_1^n \hat{h}_k e_k$. То есть e_k можно строить по $\{x_n\}_1^\infty$ явным образом, используя следующую рекуррентную формулу:

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\left\| x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k \right\|}.$$

Теорема 2. В любом бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. В сепарабельном гильбертовом пространстве H существует счётная плотная последовательность. Выбросив из этой последовательности элементы, линейно зависимые с предыдущими, получим линейно независимую последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset H$, полную в H. Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – ортогонализация по Граму – Шмидту последовательности $\{x_n\}_1^\infty$. Тогда $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированная система, $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^\infty = \mathrm{Lin}\{x_k\}_1^\infty$. То есть построенная система $\{e_n\}_1^\infty$ полна в H, что по определению означает, что $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированный базис пространства H. □

Упражнения

1. В доказательстве теоремы 1 мы отметили, что вектор e_{n+1} ортогонален всем предыдущим e_k. Почему он ортогонален и всем последующим e_k?
2. Почему знаменатель в формуле $e_{n+1} = \dfrac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\left\| x_{n+1} - P_n x_{n+1} \right\|}$ не может быть равным нулю?
3. В теореме 1 доказано существование ортогонализации по Граму – Шмидту последовательности $\{x_n\}_1^\infty$. Единственна ли эта ортогонализация?
4. Каким свойством проектора P_n мы пользовались, утверждая, что e_{n+1} ортогонально X_n?

5. Обоснуйте равенство $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^\infty = \mathrm{Lin}\{x_k\}_1^\infty$ из доказательства теоремы 2.

6. Докажите, что семейство всех ортонормированных систем в гильбертовом пространстве H, упорядоченное по включению, подчиняется условиям леммы Цорна. Отсюда можно вывести как теорему существования ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве, так и её аналог для несепарабельного случая. Недостаток такого рассуждения – отсутствие явной конструкции базиса.

7. Пусть H – гильбертово пространство. Тогда у любых двух ортонормированных базисов в H одна и та же мощность («количество элементов»).

12.3.5. Теорема об изоморфизме

Определение. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Оператор $T: H_1 \to H_2$ называется *изоморфизмом гильбертовых пространств*, если T биективен и $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ для любых $x, y \in H_1$. Гильбертовы пространства H_1, H_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм гильбертовых пространств $T: H_1 \to H_2$.

Теорема. Любое сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2.

Доказательство. Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в H. Определим оператор $T: H \to l_2$ формулой $Th = (\langle h, e_1\rangle, \langle h, e_2\rangle, \ldots, \langle h, e_n\rangle, \ldots)$. То есть элементу $h \in H$ ставим в соответствие последовательность его коэффициентов Фурье. По неравенству Бесселя, $Th \in l_2$ и $\|Th\| \le \|h\|$. У оператора T существует обратный – T^{-1}, действующий из l_2 в H по правилу $T^{-1}(a_n)_1^\infty = \sum\limits_1^\infty a_n e_n$. Следовательно, оператор T обратим, то есть он биективен. Осталось проверить равенство $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

Итак, пусть $x = \sum\limits_1^\infty a_n e_n$ и $y = \sum\limits_1^\infty b_n e_n$ – произвольные элементы пространства H. Имеем

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^\infty a_k e_k, \sum_{j=1}^\infty b_j e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_k \overline{b}_j \langle e_k, e_j\rangle \right) = \sum_{k=1}^\infty a_k \overline{b}_k = \langle Tx, Ty\rangle. \ \square$$

Поскольку все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой, при решении конкретной задачи можно выбирать то из пространств, которое оказывается удобнее в данном случае. Приведём пример. В упражнении 5 п. 11.1.7 предлагалось проверить существование и вычислить спектр оператора A, имеющего в каноническом базисе пространства l_2 двухдиагональную матрицу, где на этих диагоналях стоят единицы. Обозначим через H_2 подпространство пространства $L_2[0,1]$, образованное замыканием линейной оболочки ортонормированной системы $e_n = e^{2\pi int}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим в H_2 оператор T умножения на функцию $g(t) = 1 + e^{2\pi it}$, действующий по правилу $Tf = g \cdot f$. Во введённом нами базисе e_n матрицей оператора T будет $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$ и т. д. до бесконечности, то есть та же матрица, что и у A. Соответственно, вместо рассмотрения оператора A в l_2 можно рассмотреть оператор T в H_2, имеющий те же свойства. Но оператор T уже определён простым явным выражением, и его свойства гораздо легче поддаются изучению. Предлагаем читателю решить упражнение 5 п. 11.1.7, опираясь на описанную идею замены пространства l_2 пространством H_2.

Упражнения

1. Доказательство теоремы об изоморфизме начато словами: «Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в H». Почему в H существует ортонормированный базис?
2. Проверьте самостоятельно, что оператор T из доказательства теоремы об изоморфизме линеен.
3. Почему ряд $\sum\limits_1^\infty a_n e_n$ в определении оператора T^{-1} сходится?
4. Проверьте, что оператор $T^{-1}(a_n)_1^\infty = \sum\limits_1^\infty a_n e_n$ действительно является обратным к T.
5. Почему любой элемент пространства H может быть представлен в виде $x = \sum\limits_1^\infty a_n e_n$ – в виде суммы сходящегося ряда по системе $\{e_n\}_1^\infty$?
6. Обоснуйте сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^\infty \left(\sum\limits_{j=1}^\infty a_k \overline{b}_j \langle e_k, e_j \rangle \right)$ и равенство $\left\langle \sum\limits_{k=1}^\infty a_k e_k, \sum\limits_{j=1}^\infty b_j e_k \right\rangle = \sum\limits_{k=1}^\infty \left(\sum\limits_{j=1}^\infty a_k \overline{b}_j \langle e_k, e_j \rangle \right)$ в доказательстве теоремы об изоморфизме.

7. Постройте какой-нибудь конкретный изоморфизм гильбертовых пространств $L_2[0,1]$ и l_2.
8. Каждый изоморфизм T гильбертовых пространств H_1, H_2 является изометрией: $\forall h \in H_1 \quad \|Th\| = \|h\|$.
9. Каждая биективная изометрия пространств H_1, H_2 является изоморфизмом этих гильбертовых пространств.
10. Может ли конечномерное гильбертово пространство быть изоморфным бесконечномерному?
11. Может ли сепарабельное гильбертово пространство быть изоморфным несепарабельному?
12. Пусть гильбертовы пространства H_1, H_2 имеют равномощные полные ортонормированные системы. Тогда эти пространства изоморфны.

12.4. Самосопряженные операторы

12.4.1. Билинейные формы в гильбертовом пространстве

Определение. Пусть H – гильбертово пространство. Отображение $F : H \times H \to \mathbb{C}$ называется *билинейной формой*, если для любых элементов x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 пространства H и произвольных комплексных чисел λ, μ выполнены соотношения:

– $F(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda F(x_1, y) + \mu F(x_2, y)$;
– $F(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda} F(x, y_1) + \overline{\mu} F(x, y_2)$.

Термин «билинейная форма» здесь не совсем точен: условие линейности по второй переменной несколько модифицировано. В некоторых учебниках такое модифицированное условие называют полулинейностью, а соответствующие формы – не билинейными, а полуторалинейными.

Примеры

1. В конечномерном координатном пространстве любая билинейная форма может быть записана в виде $F(x, y) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{k,j} x_k \overline{y}_j$, где x_k и y_j – координаты соответствующих векторов.
2. Пусть A – линейный оператор в H. Выражение $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$, равно как и $G(x, y) = \langle Ax, y \rangle$, задаёт билинейную форму.

Определение. Билинейная форма называется непрерывной, если она непрерывна по каждой переменной.

Теорема об общем виде непрерывной билинейной формы в гильбертовом пространстве. Пусть F – непрерывная билинейная форма в

H. Тогда существует такой непрерывный оператор A, что $F(x,y)=\langle x,Ay\rangle$ для любых x, y из H. Оператор A определяется формой F однозначно.

Доказательство. Зафиксируем элемент $y\in H$. Тогда $F(x,y)$ – непрерывный линейный функционал по первой переменной. Согласно теореме об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует такой элемент $A(y)\in H$, что $F(x,y)=\langle x,A(y)\rangle$. При этом элемент $A(y)$ определяется по y однозначно. Нам осталось проверить, что отображение $y\to A(y)$ линейно и непрерывно.

Линейность. $\langle x,A(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)\rangle=F(x,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=\lambda_1 F(x,y_1)+$ $+\lambda_2 F(x,y_2)=\langle x,\lambda_1 A(y_1)+\lambda_2 A(y_2)\rangle$. Ввиду произвольности элемента x это означает, что $A(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=\lambda_1 A(y_1)+\lambda_2 A(y_2)$.

Непрерывность. При любом $x\in H$ выражение $F(x,y)=\langle x,Ay\rangle$ непрерывно по y. То есть для любой стремящейся к нулю последовательности y_n в H имеем $\langle x,Ay_n\rangle\to 0$. Это означает, что последовательность функционалов $f_n(x)=\langle x,Ay_n\rangle$ поточечно стремится к нулю. По теореме Банаха – Штейнгауза, f_n – ограниченная последовательность. Учитывая, что $\|f_n\|=\|Ay_n\|$, получаем, что оператор A переводит любую стремящуюся к нулю последовательность y_n в ограниченную. Но это свойство, согласно теореме п. 6.4.1, эквивалентно непрерывности оператора. Теорема доказана. □

12.4.2. Сопряжённый оператор к оператору в гильбертовом пространстве

Читателю хорошо знакомо понятие сопряжённого оператора, как оператора, действующего в сопряжённых пространствах; но, так как в гильбертовом пространстве непрерывные линейные функционалы отождествляются с элементами самого пространства, здесь естественно ввести понятие сопряжённого оператора несколько иначе.

Определение. Пусть $A\in L(H)$. *Сопряжённым оператором* к оператору A называется такой оператор A^*, что равенство $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ выполняется для любых элементов $x,y\in H$.

Корректность определения, то есть существование и единственность оператора A^*, нам гарантирует теорема об общем виде непрерывной билинейной формы.

Отметим свойства операции перехода к сопряжённому оператору:

1. $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$;
2. $I^* = I$;
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
4. $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$;
5. $\left(A^*\right)^* = A.$

Все вышеперечисленные свойства проверяются по одной и той же схеме. Докажем для примера первое из этих свойств. Нам нужно проверить, что $(A_1 + A_2)^* y = A_1^* y + A_2^* y$ для любого $y \in H$. Для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что $\left\langle x, (A_1 + A_2)^* y \right\rangle = \left\langle x, A_1^* y + A_2^* y \right\rangle$ для всех $x \in H$. Имеем,

$$\left\langle x, (A_1 + A_2)^* y \right\rangle = \langle (A_1 + A_2)x, y \rangle = \langle A_1 x, y \rangle + \langle A_2 x, y \rangle =$$
$$= \left\langle x, A_1^* y \right\rangle + \left\langle x, A_2^* y \right\rangle = \left\langle x, A_1^* y + A_2^* y \right\rangle. \square$$

Замечание. Хотя сопряженный оператор в рамках теории гильбертова пространства определён иначе, чем для общих банаховых пространств (п. 9.4.1), по сути, мы имеем дело с частным случаем этого общего определения. Действительно, если каждый элемент $y \in H$ отождествить с порождённым им линейным функционалом на H: $y(x) = \langle x, y \rangle$, то определение $\langle Tx, y \rangle = \left\langle x, T^* y \right\rangle$ перепишется в привычном виде $(T^* y)(x) = y(Tx)$. Поэтому общие теоремы о связи образов, ядер, инъективности и сюръективности оператора и его сопряжённого, доказанные в п. 9.4.1, сохраняют свою силу. (Докажите это!) В частности, если оператор A^* инъективен, то образ оператора A плотен в H.

Лемма 1. Пусть операторы A и A^* ограничены снизу. Тогда оператор A обратим.

Доказательство. Раз A ограничен снизу, то он инъективен, и его образ замкнут. Так как A^* ограничен снизу, то он также инъективен, следовательно, образ оператора A плотен в H. Поскольку образ оператора A замкнут и плотен в H, то $A(H) = H$, то есть A сюръективен. Инъективность + сюръективность = обратимость. $\square$

12.4.3. Упражнения

1. Проверить свойства 2-5 операции перехода к сопряжённому оператору.
2. Если сопряженный оператор в гильбертовом пространстве – это частный случай сопряженного оператора, определенного для общих

банаховых пространств, то почему же свойство 3 операции перехода к сопряжённому оператору в гильбертовом пространстве отличается от аналогичного свойства в банаховых пространствах? Откуда берётся эта черта комплексного сопряжения над λ?

3. Выполнен ли в общих банаховых пространствах аналог свойства 5?
4. Доказать соотношения $\sigma\left(U^{-1}\right)=\left\{\frac{1}{\lambda}:\lambda\in\sigma(U)\right\}$ и $\sigma\left(U^{*}\right)=\left\{\overline{\lambda}:\lambda\in\sigma(U)\right\}$: первое – для обратимого, а второе для произвольного оператора $U\in L(H)$.
5. Проверить, что непрерывная билинейная форма непрерывна по совокупности переменных.
6. Будет ли вышеприведенное определение сопряжённого оператора корректным, если H – неполное пространство со скалярным произведением?
7. Пусть $P\in L(H)$ – проектор. Тогда P^{*} также проектор. На какое подпространство?

Назовём *гильберт–шмидтовской нормой* оператора A величину $\|A\|_{H-S}=\left(\sum\limits_{n,m\in\mathbb{N}}\left|\left\langle Ae_n,g_m\right\rangle\right|^2\right)^{1/2}$, где $\{e_n\}_1^{\infty}$, $\{g_n\}_1^{\infty}$ – фиксированная пара ортонормированных базисов гильбертова пространства. Оператор назовём *гильберт-шмидтовским*, если $\|A\|_{H-S}<\infty$ или, другими словами, если его матрица в этой паре базисов – гильберт-шмидтовская. Доказать, что:

8. $\|A\|\le\|A\|_{H-S}$.
9. $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\|A^{*}g_n\right\|^2\right)^{1/2}=\|A\|_{H-S}=\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\|Ae_n\right\|^2\right)^{1/2}$.
10. $\|A\|_{H-S}$ не зависит от выбора пары ортонормированных базисов $\{e_n\}_1^{\infty}$, $\{g_n\}_1^{\infty}$, и $\|A\|_{H-S}=\left\|A^{*}\right\|_{H-S}$.
11. Применить предыдущее упражнение для доказательства следующего факта: пусть U – фиксированный эллипсоид в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда у всех прямоугольных параллелепипедов, описанных вокруг U, совпадают диаметры. Отметим, что даже в трёхмерном случае доказать этот факт методами аналитической геометрии весьма непросто.
12. Каждый гильберт-шмидтовский оператор компактен.

12.4.4. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма

Определение 1. Оператор A в гильбертовом пространстве называется *самосопряжённым*, если $A^{*}=A$ или, эквивалентно, если $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ для любых элементов $x,y\in H$.

Мы упоминали ранее аналогию между операторами и комплексными числами. Для операторов в гильбертовом пространстве, благодаря понятию сопряжённого оператора, эта аналогия оказывается гораздо более эффективной, чем в общем случае. В частности, самосопряжённые операторы ($A^* = A$) аналогичны вещественным числам ($z = \bar{z}$). В то же время к этой аналогии следует относиться с некоторой осторожностью: операторы, в отличие от чисел, могут не коммутировать!

Следующая теорема даёт нам нетривиальные примеры самосопряжённых операторов.

Теорема 1. Для проектора $P \in L(H)$ следующие условия эквивалентны:

(1) P – самосопряженный оператор;
(2) P – ортопроектор.

Доказательство. Поскольку P – проектор, то пространство H разлагается в прямую сумму $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 – ядро проектора, а H_2 – образ. Докажем вначале импликацию (1) $\Rightarrow$ (2), то есть что если P – самосопряженный оператор, то $H_1 \perp H_2$. Действительно, пусть $h_1 \in H_1$ и $h_2 \in H_2$. Тогда $\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, Ph_2 \rangle = \langle Ph_1, h_2 \rangle = 0.$

Докажем теперь обратную импликацию (2) $\Rightarrow$ (1), то есть что если $H_1 \perp H_2$, то P – самосопряженный оператор. Для этого возьмём элементы $x, y \in H$ и запишем их разложения $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$. Имеем $\langle Px, y \rangle = \langle x_2, y \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x, y_2 \rangle = \langle x, Py \rangle$. □

Определение 2. Пусть A – самосопряженный оператор. *Билинейной формой оператора* A называется функция $F(x, y) = \langle Ax, y \rangle$; функция $g(x) = \langle Ax, x \rangle$ называется *квадратичной формой оператора* A.

Отметим, что $g(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{g(x)}$, поэтому **квадратичная форма самосопряженного оператора принимает только вещественные значения**. Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Re}\langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle\right).$$

Аналогичным образом можно найти и мнимую часть формы $\langle Ax, y \rangle$, то есть билинейная форма однозначно определяется по квадратичной. В свою очередь, из теоремы об общем виде билинейной формы следует, что по билинейной форме можно восстановить сам оператор. Таким образом, всю информацию о самосопряжённом операторе можно получить, зная свойства его квадратичной формы. В качестве примера приведём весьма полезную *формулу для нормы самосопряжённого оператора*.

Теорема 2. Пусть A – самосопряженный оператор. Тогда
$$\|A\| = \sup_{x\in S_H}\left|\langle Ax, x\rangle\right|. \qquad (1)$$

Доказательство. Введём обозначение $q = \sup\limits_{x\in S_H}\left|\langle Ax, x\rangle\right|$. Для любого $z \in S_H$ будет верна оценка $\left|\langle Az, z\rangle\right| \le q\|z\|^2$. По однородности, эта оценка сохранится и для любого $z \in H$. Нам требуется доказать, что $\|A\| = q$.

Имеем: $\|A\| = \sup\limits_{x\in S_H}\|Ax\| = \sup\limits_{x,y\in S_H} \mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle =$

$$= \sup_{x,y\in S_H} \frac{1}{4}\left(\langle A(x+y),(x+y)\rangle - \langle A(x-y),(x-y)\rangle\right) \le$$

$$\le \sup_{x,y\in S_H} \frac{q}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \sup_{x,y\in S_H} \frac{2q}{4}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = q,$$

то есть $\|A\| \le q$. Обратное соотношение сразу следует из неравенства Коши –Буняковского: $q = \sup\limits_{x\in S_H}\left|\langle Ax, x\rangle\right| \le \sup\limits_{x\in S_H}\|Ax\| = \|A\|$. □

12.4.5. Упражнения

1. При каких λ оператор λI будет самосопряжённым?
2. Вычислить норму оператора A, задаваемого матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в двумерном координатном пространстве (пространство рассматривается в стандартной евклидовой норме). Будет ли для этого оператора выполняться формула (1)?
3. Где в доказательстве этой формулы была использована самосопряжённость оператора, без которой формула не верна?
4. Может ли для ненулевого оператора функция $g(x) = \langle Ax, x\rangle$ быть тождественным нулём?
5. Проверить, что самосопряженные операторы образуют замкнутое линейное подпространство в $L(H)$. Будет ли это подпространство замкнуто в смысле поточечной сходимости операторов?
6. Проверить, что произведение самосопряжённых операторов будет самосопряжённым оператором в том и только том случае, если операторы коммутируют. (**N.B. Мы будем в дальнейшем использовать результаты двух последних упражнений!**)
7. Как должны быть связаны между собой подпространства $H_1, H_2 \subset H$, чтобы ортопроекторы P_1, P_2 на эти подпространства коммутировали?

8. Вычислить сопряженный оператор к оператору T интегрирования с ядром в $L_2[0,1]$: $(Tf(t))(x)=\int_0^1 K(t,x)f(t)dt$, где $K\in L_2([0,1]\times[0,1])$. При каком условии на K оператор будет самосопряжённым? Такие интегральные операторы также называются *гильберт–шмидтовскими интегральными операторами*. Используя разложение ядра K в двойной ряд Фурье, доказать, что гильберт–шмидтовский интегральный оператор будет гильберт–шмидтовским оператором в смысле, описанном в упражнениях п. 12.4.3.
9. Пусть оператор T задан своей матрицей в ортонормированном базисе. Как связаны матрицы операторов T и T^*?
10. Для оператора $T\in L(H)$ определим *вещественную и мнимую части* формулами $\operatorname{Re}T=\frac{1}{2}\left(T+T^*\right)$ и $\operatorname{Im}T=\frac{1}{2i}\left(T-T^*\right)$. Проверьте, что $\operatorname{Re}T$ и $\operatorname{Im}T$ – самосопряженные операторы и $T=\operatorname{Re}T+i\operatorname{Im}T$.
11. Пусть T и T^* коммутируют (в этом случае оператор T называется *нормальным*). Тогда $\|T\|=\sqrt{\left\|(\operatorname{Re}T)^2+(\operatorname{Im}T)^2\right\|}$.

12.4.6. Неравенства между операторами

Следующее определение поможет углубить неоднократно упоминавшуюся выше аналогию между операторами и числами.

Определение. Оператор $A\in L(H)$ называется положительным ($A\ge 0$), если он представляет собой самосопряженный оператор с неотрицательной квадратичной формой (то есть $\langle Ax,x\rangle\ge 0$ для любого $x\in H$). Пусть $A,B\in L(H)$. Будем говорить, что $A\ge B$, если $A-B\ge 0$.

Теорема 1. Пусть $A\in L(H)$ – положительный оператор. Тогда для любого элемента $x\in H$ выполнено неравенство

$$\|Ax\|\le\|A\|^{1/2}\left(\langle Ax,x\rangle\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Билинейная форма оператора A подчиняется всем аксиомам скалярного произведения, кроме невырожденности. Поэтому, как мы отмечали в упражнении 4 п. 12.1.2, для неё выполнено неравенство Коши – Буняковского: $\left|\langle Ax,y\rangle\right|\le\langle Ax,x\rangle^{1/2}\langle Ay,y\rangle^{1/2}$. Перейдя в обеих частях последнего неравенства к супремуму по $y\in S_H$, получим требуемую оценку. □

Основная цель настоящего параграфа – доказать для операторов результат, аналогичный теореме существования предела для ограниченной монотонной последовательности чисел.

Теорема 2. Пусть самосопряженные операторы $A_n \in L(H)$ образуют возрастающую ограниченную последовательность, то есть $A_1 \le A_2 \le \ldots$ и $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty.$ Тогда у этой последовательности существует поточечный предел.

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $x \in H.$ Последовательность чисел $a_n = \langle A_n x, x \rangle$ не убывает и ограничена. Таким образом, эта последовательность имеет предел, и

$$a_n - a_m = \langle (A_n - A_m)x, x \rangle \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Воспользовавшись теоремой 1, получим требуемую поточечную сходимость:

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\|^{1/2} \left(\langle (A_n - A_m)x, x \rangle\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \ \square$$

Упражнения

1. При каких λ оператор λI будет положительным оператором?
2. Любой ортопроектор – это положительный оператор.
3. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H. Проверить, что операторы частных S_n сумм образуют неубывающую ограниченную последовательность. Какой оператор будет их поточечным пределом?
4. Может ли в условиях теоремы 2 последовательность A_n не сходиться по норме пространства $L(H)$?
5. Пусть A, B – положительные операторы и $A + B = 0.$ Тогда $A = B = 0.$
6. Доказать, что произведение двух положительных коммутирующих операторов есть положительный оператор.[4]

12.4.7. Спектр самосопряжённого оператора

Поскольку квадратичная форма самосопряженного оператора принимает только вещественные значения, его собственные числа могут быть только вещественными (это рассуждение хорошо знакомо читателю по курсу линейной алгебры). Хотя спектр оператора в бесконечномерном пространстве и не исчерпывается собственными числами, утверждение о вещественности спектра всё равно сохраняет силу.

Теорема 1 (теорема о структуре спектра самосопряжённого оператора). Пусть $A \in L(H)$ – самосопряженный оператор. Введём обозначения

$$\alpha_- = \alpha_-(A) = \inf\{\langle Ax, x \rangle : x \in S_H\}, \ \alpha_+ = \alpha_+(A) = \sup\{\langle Ax, x \rangle : x \in S_H\}.$$

Тогда

[4] Несмотря на простоту формулировки, упражнение непростое.

(i) спектр оператора A состоит только из вещественных чисел;
(ii) $\sigma(A) \subset [\alpha_-, \alpha_+]$, причём
(iii) концы отрезка $[\alpha_-, \alpha_+]$ принадлежат спектру.

Доказательство. (i) Пусть $\lambda = a + bi$ – комплексное число с мнимой частью b, отличной от нуля. Нам требуется доказать обратимость оператора $A - \lambda I$. Докажем для начала ограниченность снизу такого оператора.

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(Ax - ax) - bix\|^2 = \|Ax - ax\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Ax - ax, bix\rangle + b^2\|x\|^2.$$

Величины $\langle Ax, x\rangle$ и $\langle x, x\rangle$ вещественны, поэтому $2\operatorname{Re}\langle Ax - ax, bix\rangle = 0$ и $\|(A - \lambda I)x\|^2 \ge b^2\|x\|^2$, то есть оператор $A - \lambda I$ ограничен снизу. По той же причине ограничен снизу и оператор $(A - \lambda I)^* = A - \bar{\lambda} I$ (он имеет такой же вид, только с другим коэффициентом λ). То есть, по лемме 1 п. 12.4.2, оператор $A - \lambda I$ обратим.

(ii) Отметим, что квадратичная форма оператора $A - \alpha_+ I$ принимает значения, меньшие или равные нуля. Действительно, для любого элемента $x \in S_H$ имеем $\langle (A - \alpha_+ I)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \alpha_+ \le 0$. Пусть $\lambda > \alpha_+$, $\varepsilon = \lambda - \alpha_+$. Докажем обратимость оператора $A - \lambda I = (A - \alpha_+ I) - \varepsilon I$, для чего ввиду самосопряжённости достаточно доказать его ограниченность снизу (снова пользуемся леммой 1 п. 12.4.2). Имеем

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \alpha_+ I)x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle (A - \alpha_+ I)x, \varepsilon x\rangle + \varepsilon^2\|x\|^2 \ge \varepsilon^2\|x\|^2.$$

Таким образом, оператор $A - \lambda I$ обратим, то есть λ не принадлежит спектру оператора A. Этим для произвольного самосопряженного оператора A доказано включение $\sigma(A) \subset (-\infty, \alpha_+]$. Заменой оператора A на $-A$ получим, что $-\sigma(A) = \sigma(A) \subset (-\infty, \alpha_+(-A)] = (-\infty, \alpha_-(-A)]$, то есть что $\sigma(A) \subset [\alpha_-(A), +\infty)$.

(iii) Докажем, что $\alpha_- \in \sigma(A)$, то есть что оператор $B = A - \alpha_- I$ необратим. В этом нам поможет следующее очевидное свойство квадратичной формы оператора B: $\inf\limits_{x \in S_H} \langle Bx, x\rangle = \inf\limits_{x \in S_H} \langle Ax, x\rangle - \alpha_- = 0$. В частности, оператор B положителен. Воспользуемся теоремой 1 п. 12.4.6:

$$\inf_{x \in S_H} \|Bx\| \le \|B\|^{1/2} \inf_{x \in S_H} \langle Bx, x\rangle^{1/2} = 0.$$

Итак, оператор неограничен снизу и, следовательно, необратим. Принадлежность числа α_+ спектру легко получить заменой оператора A на $-A$, как мы это уже делали выше. Теорема доказана. □

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. Самосопряженный оператор будет положительным в том и только том случае, если его спектр состоит только из неотрицательных чисел.

Доказательство. Оператор A будет положительным в том и только том случае, если $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ для всех $x \in S_H$. Это же условие эквивалентно тому, что $\alpha_-(A) \geq 0$. □

Следствие 2. Пусть A – самосопряженный оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup\{|t| : t \in \sigma(A)\}.$$

Доказательство. $\|A\| = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\} = \max\{|\alpha_-(A)|, |\alpha_+(A)|\} =$
$= \sup\{|t| : t \in \sigma(A)\}$. □

Следствие 3. Пусть A – самосопряженный оператор, $\sigma(A) = \{0\}$. Тогда $A = 0$.

Доказательство. По следствию 2, если $\sigma(A) = \{0\}$, то $\|A\| = 0$. □

Отметим, что для несамосопряженных операторов вышеприведенные следствия могут и не выполняться.

Пример 1. Оператор в двумерном пространстве задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Его спектр равен $\{0\}$, но оператор ненулевой.

Упражнения

1. Пусть $A \in L(H)$, $\sigma(A) = \{-2,1\}$. Может ли норма такого оператора равняться 3? Изменится ли ответ, если A – самосопряженный оператор?
2. Пусть A – самосопряженный оператор, $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$. Тогда $A = \lambda_0 I$.
3. Пусть K – произвольное замкнутое ограниченное множество вещественных чисел. Построить самосопряженный оператор A, для которого $\sigma(A) = K$.

12.4.8. Компактные самосопряженные операторы

В этом разделе будет доказано, что каждый компактный самосопряженный оператор подходящим выбором ортонормированного базиса может быть приведен к диагональному виду. Другими словами, для компактного самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.

Напомним, что подпространство $X \subset H$ называется *инвариантным подпространством* оператора A, если $A(X) \subset X$.

Теорема 1. Если X – инвариантное подпространство самосопряжённого оператора *A*, то ортогональное дополнение $X^{\perp}$ этого подпространства также будет инвариантным подпространством.

Доказательство. Нам требуется доказать, что для любого элемента $y \in X^{\perp}$ его образ Ay также лежит в $X^{\perp}$. Для этого нужно проверить, что $\langle x, Ay \rangle = 0$ для любого $x \in X$. Но $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$, а $\langle Ax, y \rangle = 0$, так как $Ax \in X$ (инвариантность подпространства *X*), а $y \in X^{\perp}$. □

Следующий факт хорошо знаком читателю по курсу линейной алгебры.

Теорема 2. Пусть $X_1 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)$, $X_2 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)$ – собственные подпространства самосопряженного оператора *A*, соответствующие двум разным собственным числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $X_1 \perp X_2$.

Доказательство. Для любых $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ имеем $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ax_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle$, что возможно только при $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. □

Лемма. Пусть компактный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве Y не имеет собственных векторов. Тогда пространство Y состоит только из нулевого элемента.

Доказательство. Предположим, что пространство Y не нульмерно. Согласно теореме о структуре спектра компактного оператора (п. 11.3.6), спектр оператора A состоит только из нуля (иначе у A были бы собственные векторы). По следствию 3 п. 12.4.7, $A = 0$. То есть всё пространство Y состоит из собственных векторов с собственным числом 0. □

Теорема 3. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Тогда для любого компактного самосопряжённого оператора $A \in L(H)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора.

Доказательство. Выберем в каждом из собственных подпространств оператора A по ортонормированному базису и выпишем все эти базисы в единую последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Все e_n – это собственные векторы оператора *A*, причём ввиду теоремы 2 они образуют ортонормированную систему. Нам осталось доказать полноту этой системы. Обозначим $\overline{\operatorname{Lin}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ через X. Подпространство X инвариантно для оператора A и содержит все его собственные векторы. Следовательно, подпространство $X^{\perp}$ также будет инвариантным, причём не будет содержать ни одного собственного вектора оператора A. По предыдущей лемме, это означает, что подпространство $X^{\perp}$ состоит только из нуля, то есть $X = H$. □

Замечание. В вышеприведенной теореме существенны как компактность, так и самосопряжённость оператора. Действительно, для несамосопряжённого оператора система собственных векторов может не быть полной даже в двумерном случае (пример 1 п. 12.4.7). Приведём пример самосопряжённого оператора, не имеющего собственных чисел.

Рассмотрим оператор $A \in L(L_2[0,1])$, действующий по правилу $(Af)(t) = tf(t)$. Пусть f – собственный вектор[5] оператора A для собственного числа λ, то есть $\lambda f(t) = tf(t)$ почти всюду. Но такое равенство может иметь место только в случае $f \overset{п.в}{=} 0$. Значит, собственных чисел и векторов у оператора нет.

Упражнения

Зафиксируем функцию $g \in L_1[0,1]$ и определим на $L_2[0,1]$ оператор A_g, действующий по правилу $(A_g f)(t) = g(t)f(t)$.

1. Доказать, что если образ оператора A_g снова лежит в $L_2[0,1]$, то $A_g \in L(L_2[0,1])$. (Совет: наиболее экономный способ доказательства непрерывности в подобных случаях – это использование теоремы о замкнутом графике.)
2. В условиях предыдущего упражнения вычислить норму оператора A_g. Используя этот результат, дать описание тех g, для которых $A_g \in L(L_2[0,1])$.
3. Вычислить A_g^*. При каком условии оператор A_g будет самосопряжённым? Положительным?
4. Вычислить спектр оператора A_g.
5. Охарактеризовать те g, для которых оператор A_g будет иметь собственные числа и векторы.
6. Пусть g не является тождественной постоянной. Может ли оператор A_g обладать полной системой собственных векторов? Тот же вопрос для непрерывной функции g.
7. Пусть в условиях упражнения 8 п. 12.4.5 ядро K непрерывно по совокупности переменных. Тогда собственные функции соответствующего

[5] Так как элементы пространства здесь функции, вместо термина «собственный вектор» чаще употребляют термин «собственная функция».

гильберт-шмидтовского интегрального оператора, соответствующие ненулевым собственным числам, непрерывны.

12.5. Комментарии к упражнениям

Параграф 12.1.3

Упражнение 6. P. Jordan, J. von Neumann, 1935. Ссылку на соответствующую работу и обзор различных характеризаций норм, порождённых скалярным произведением, см. [Day], глава 7, § 3.

Параграф 12.3.4

Упражнение 7. Пусть H – бесконечномерное гильбертово пространство. Обозначим через $\alpha(H)$ наименьшую возможную мощность плотного подмножества в H. Зафиксируем G – плотное в H подмножество с $\operatorname{card}(G) = \alpha(H)$. Докажем, что у любого ортонормированного базиса E в H мощность совпадает с $\alpha(H)$. С центром в каждой точке $e \in E$ построим открытый шар U_e радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку расстояние между любыми двумя различными точками множества E равно $\sqrt{2}$, построенные шары попарно не пересекаются. В то же время с плотным множеством G любой из шаров U_e должен пересекаться. Возьмём для каждого $e \in E$ по точке $f(e) \in U_e \bigcap G$. Тогда $f : E \to G$ – инъективное отображение, следовательно, $\operatorname{card}(E) \le \operatorname{card}(G) = \alpha(H)$.

Обратно, рассмотрим $\operatorname{Lin}_{\mathbb{Q}} E$ – множество конечных линейных комбинаций элементов базиса E с рациональными коэффициентами. Поскольку $\operatorname{Lin}_{\mathbb{Q}} E$ – плотное в H множество, $\operatorname{card}(\operatorname{Lin}_{\mathbb{Q}} E) \ge \alpha(H)$. В то же время $\operatorname{card}(\operatorname{Lin}_{\mathbb{Q}} E) = \operatorname{card}(E)$.

Параграф 12.4.3

Упражнение 2. Разгадка спрятана в упражнении 5 п. 12.2.3.

Упражнение 3. Если оператор A действует из X в Y, то оператор $\left(A^*\right)^*$ действует из $\left(X^*\right)^*$ в $\left(Y^*\right)^*$, то есть, вообще говоря, $A \neq \left(A^*\right)^*$. Тем не менее, некоторая аналогия с равенством $\left(A^*\right)^* = A$ по-прежнему имеет место. Чтобы понять, в чём заключается эта аналогия, нужно разобрать связь между пространством и его вторым сопряжённым – раздел 17.2.2.

Параграф 12.4.5

Упражнение 11. См. лемму п. 13.1.2.

Параграф 12.4.6

Упражнение 5. По условию, $\langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle = \langle (A+B)x, x\rangle = 0$ для всех $x \in H$ и величины $\langle Ax, x\rangle$ и $\langle Bx, x\rangle$ неотрицательны. Следовательно, $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle = 0$ для всех $x \in H$, и для завершения доказательства остаётся воспользоваться формулой для нормы самосопряженного оператора (теорема 2 п. 12.4.4).

13. Функции от оператора

Мы уже упоминали выше аналогию между операторами и числами. Одно из наиболее плодотворных применений этой аналогии можно встретить в курсе дифференциальных уравнений. Решение уравнения $y' = Ay$ в виде $y = e^{At} y_0$ оказывается возможным не только для скалярных функций и числового параметра A, но и для вектор-функций и операторов соответственно. Чтобы можно было свободно пользоваться подобными аналогиями, и создан аппарат функций от оператора.

13.1. Непрерывные функции от оператора

13.1.1. Многочлены от оператора

В настоящем параграфе мы будем рассматривать операторы в произвольном комплексном банаховом пространстве X.

Определение. Пусть даны многочлен $p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ и оператор $T \in L(X)$. Оператор вида $p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n$ называется *многочленом от оператора* T.

Отметим очевидные свойства многочленов от оператора.

Теорема 1. Пусть p_1, p_2 – многочлены, $T \in L(X)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

(i) $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(T) = \lambda_1 p_1(T) + \lambda_2 p_2(T)$;

(ii) $(p_1 p_2)(T) = p_1(T) p_2(T)$.

Далее,

(iii) пусть операторы T_1 и T_2 коммутируют, p_1, p_2 – многочлены. Тогда $p_1(T_1)$ и $p_2(T_2)$ также коммутируют между собой. □

Теорема 2. Оператор $p(T)$ обратим в том и только том случае, если многочлен p не обращается в ноль ни в одной точке спектра оператора T.

Доказательство. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ – корни многочлена p, то есть $p(t) = a_n (t - t_1) \ldots (t - t_n)$. Тогда $p(T) = a_n (T - t_1 I) \ldots (T - t_n I)$. Как следует из леммы 1 п. 11.1.2, обратимость произведения коммутирующих сомножителей эквивалентна одновременной обратимости сомножителей. Соответственно, обратимость оператора $p(T)$ равносильна одновременной обратимости множителей $T - t_i I$, то есть тому, что ни один из корней t_i многочлена p не принадлежат спектру оператора T. □

Теорема 3 (теорема об отображении спектра для многочленов от оператора). Спектр многочлена от оператора состоит из значений многочлена на элементах спектра оператора, то есть $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

Доказательство. Докажем, что для числа λ принадлежность множеству, стоящему в левой части требуемого равенства, равносильна принадлежности множеству, стоящему в правой части. Действительно, условие $\lambda \in \sigma(p(T))$ означает необратимость оператора $p(T) - \lambda I = (p - \lambda)(T)$. По предыдущему утверждению, это эквивалентно тому, что многочлен $p - \lambda$ обращается в ноль какой-то точке спектра: $\exists t \in \sigma(T) : p(t) = \lambda$. В свою очередь, это эквивалентно требуемому условию $\lambda \in p(\sigma(T))$. □

Упражнения

1. Пусть p_1, p_2 – пара взаимно простых многочленов и $p_1 p_2(T) = 0$. Доказать, что всё пространство X распадается в прямую сумму подпространств $X_1 = Ker\, p_1(T)$ и $X_2 = Ker\, p_2(T)$.
2. Пусть $f : [0,1] \to L(X)$ – дифференцируемая функция. Доказать формулу $\frac{d}{dt}\left[f^2(t)\right] = f'(t)f(t) + f(t)f'(t)$.
3. Доказать, что если все значения функции f попарно коммутируют, то f и f' также коммутируют.
4. Для любого оператора $A \in L(X)$ определим e^A формулой $e^A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots$. Верно ли, что если $f : [0,1] \to L(X)$ – дифференцируемая функция, то функция $y = e^{f(t)}$ будет решением дифференциального уравнения $y' = f'(t)y$? Почему эту формулу успешно используют для уравнений с постоянными коэффициентами?
5. Пусть в некотором базисе матрица оператора $A \in L(X)$ имеет диагональный вид. Как в этом базисе будет выглядеть матрица оператора $p(A)$, где p – полином? Матрица оператора e^A?
6. По аналогии с вышеизложенным определите многочлены от элементов банаховой алгебры $\mathbf{A}$. Проверьте, что все отмеченные нами свойства многочленов от оператора без изменений переносятся на многочлены от элементов банаховой алгебры.

Тем, кого заинтересует теория функций от элементов банаховой алгебры в общем случае, можем порекомендовать учебник Рудина [Rud].

13.1.2. Многочлены от самосопряженного оператора

Начиная с этого места и до конца главы, будут рассматриваться операторы в гильбертовом пространстве.

Лемма. Пусть $A, B \in L(H)$ – самосопряженные коммутирующие операторы. Тогда $\|A+iB\| = \sqrt{\|A^2+B^2\|}$.

Доказательство. Поскольку операторы A и B коммутируют, их произведение – самосопряженный оператор. Поэтому для любого $x \in H$ величина $\langle Ax, Bx \rangle = \langle BAx, x \rangle$ принимает только вещественные значения. Соответственно,

$\|(A+iB)x\|^2 = \|Ax\|^2 + 2\operatorname{Re}(-i)\langle Ax, Bx\rangle + \|Bx\|^2 = \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2$. Имеем:

$$\|A+iB\|^2 = \sup_{x \in S_H} \|(A+iB)x\|^2 = \sup_{x \in S_H} (\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2) =$$

$$= \sup_{x \in S_H} \left(\langle Ax, Ax\rangle + \langle Bx, Bx\rangle\right) = \sup_{x \in S_H} \left\langle (A^2+B^2)x, x \right\rangle = \left\|A^2+B^2\right\|. \square$$

Теорема. Пусть $A \in L(H)$ – самосопряжённый оператор, $p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – многочлен. Тогда оператор $p(A)$ обладает следующими свойствами:

(i) $(p(A))^* = \overline{p}(A)$, где $\overline{p} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 t + \ldots + \overline{a}_n t^n$. В частности, если все коэффициенты многочлена p вещественны, то $p(A)$ – самосопряжённый оператор.

(ii) $\|p(A)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |p(t)|$.

Доказательство. (i). $(p(A))^* = \overline{a}_0 (I)^* + \overline{a}_1 (A)^* + \ldots + \overline{a}_n (A^n)^* = \overline{p}(A)$.

(ii) Разберём вначале случай многочлена с вещественными коэффициентами. Воспользуемся следствием 2 п. 12.4.7 и теоремой об отображении спектра для многочленов от оператора (теорема 3 п. 13.1.1): $\|p(A)\| = \sup\limits_{\tau \in \sigma(p(A))} |\tau| = \sup\limits_{\tau \in p(\sigma(A))} |\tau|$. Для получения требуемой формулы осталось ввести обозначение $\tau = p(t)$ и заметить, что при t, пробегающем $\sigma(A)$, τ пробегает $p(\sigma(A))$.

Пусть теперь коэффициенты многочлена p имеют вид $a_j = u_j + iv_j$, где $u_j, v_j \in \mathbb{R}$. Введём обозначения $p_1 = u_0 + u_1 t + \ldots + u_n t^n$, $p_2 = v_0 + v_1 t + \ldots + v_n t^n$. Воспользуемся леммой и уже разобранным случаем вещественных многочленов: $\|p(A)\| = \|p_1(A) + ip_2(A)\| =$

$$= \sqrt{\left\| p_1(A)^2 + p_2(A)^2 \right\|} = \sqrt{\left\| \left(p_1{}^2 + p_1{}^2\right)(A) \right\|} = \sqrt{\sup_{t \in \sigma(A)} \left| \left(p_1{}^2 + p_1{}^2\right)(t) \right|} = \sup_{t \in \sigma(A)} |p(t)|.$$

□

Упражнения

1. Привести пример пары самосопряженных операторов $A, B \in L(H)$, для которых $\|A + iB\| \neq \sqrt{\|A^2 + B^2\|}$.
2. Привести пример пары самосопряженных коммутирующих операторов $A, B \in L(H)$, для которых $\|A + iB\| \neq \sqrt{\|A\|^2 + \|B\|^2}$.
3. Пусть $A \in L(H)$ – самосопряжённый оператор, p_1, p_2 – многочлены и $p_1(t) = p_2(t)$ для всех $t \in \sigma(A)$. Тогда $p_1(A) = p_2(A)$.

13.1.3. Определение непрерывной функции от самосопряженного оператора

Лемма 1. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ – компакт, $[a,b]$ – наименьший отрезок, содержащий K. Тогда любую функцию $f \in C(K)$ можно продолжить до непрерывной функции, заданной на $[a,b]$.

Доказательство. Множество $[a,b] \setminus K$ представляется как объединение открытых отрезков с концами в K. Доопределим функцию f на каждый такой отрезок $(c,d) \subset [a,b] \setminus K$ с помощью линейной интерполяции: $f(t) = f(c) + (t - c)\dfrac{f(d) - f(c)}{d - c}$. □

Лемма 2. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ – компакт. Тогда для любой функции $f \in C(K)$ существует последовательность многочленов p_n, равномерно сходящаяся на K к f.

Доказательство. Пусть $[a,b]$ – наименьший отрезок, содержащий K. По предыдущей лемме, функцию f можно считать определённой на всём $[a,b]$. Согласно теореме Вейерштрасса, существует последовательность многочленов p_n, равномерно сходящаяся к f на $[a,b]$. Эта последовательность многочленов будет сходиться к f и на K – подмножестве отрезка $[a,b]$. □

Лемма 3. (a) Пусть A – самосопряженный оператор, p_n – равномерно сходящаяся на $\sigma(A)$ последовательность многочленов. Тогда последовательность операторов $p_n(A)$ сходится по норме. (b) Если последовательности многочленов p_n и q_n равномерно сходятся на $\sigma(A)$ к одному и тому же пределу, то $p_n(A)$ и $q_n(A)$ также сходятся к одному и тому же пределу.

Доказательство. Воспользуемся условием (ii) теоремы, доказанной в предыдущем параграфе: $\|p_n(A)-p_m(A)\| = \sup\limits_{t\in\sigma(A)} |(p_n - p_m)(t)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

Ввиду полноты пространства операторов этим доказано условие (a). Условие (b) доказывается точно так же: $\|p_n(A)-q_n(A)\| = \sup\limits_{t\in\sigma(A)} |(p_n - q_n)(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Определение. Пусть A – самосопряженный оператор, $f \in C(\sigma(A))$ – непрерывная функция, заданная на спектре оператора A. Определим функцию f от оператора A следующим образом: $f(A) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(A)$, где p_n – произвольная последовательность многочленов, равномерно сходящаяся на $\sigma(A)$ к f.

Обоснованием корректности такого определения служат доказанные нами леммы 2 и 3.

Упражнения

1. Выведите лемму 1 из теоремы Титце о продолжении (формулировку см. п. 1.2.3).
2. Рассмотрим в $C(\sigma(A))$ подпространство $\mathbf{P}$, состоящее из всех многочленов. Зададим оператор $U : \mathbf{P} \to L(H)$ формулой $U(p) = p(A)$. Проверьте, что U – непрерывный линейный оператор. Чему равна его норма?
3. Применив теорему о продолжении по непрерывности (п. 6.5.1) к оператору U, доопределите его на всё $C(\sigma(A))$. Проверьте, что равенство $U(p) = p(A)$ выполнено не только для полиномов, но и для любых непрерывных функций.[1]

13.1.4. Свойства непрерывных функций от самосопряженного оператора

Вначале отметим свойства, получающиеся прямым предельным переходом от многочленов к непрерывным функциям от самосопряженного оператора.

---

[1] Мы могли использовать продолжение оператора U на $C(\sigma(A))$ и **определить** непрерывные функции от A равенством $f(A) = U(f)$. Однако такое определение, пожалуй, было бы излишне абстрактным и нуждалось бы в дополнительной расшифровке.

Теорема 1. Пусть A – самосопряженный оператор, $f_1, f_2 \in C(\sigma(A))$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

(1) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(A) = \lambda_1 f_1(A) + \lambda_2 f_2(A)$ и
(2) $(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$.

Далее, пусть $f \in C(\sigma(A))$ – непрерывная функция. Тогда

(3) $(f(A))^* = \bar{f}(A)$. В частности, если функция f принимает на $\sigma(A)$ только вещественные значения, то $f(A)$ – самосопряженный оператор.
(4) $\|f(A)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$.

Наконец,

(5) пусть самосопряженные операторы A и B коммутируют, f и g – непрерывные функции на спектрах операторов A и B соответственно. Тогда $f(A)$ и $g(B)$ также коммутируют между собой. □

Следующее свойство уже нуждается в обосновании.

Теорема 2 (критерий обратимости). Пусть f – непрерывная функция, заданная на спектре самосопряженного оператора *A*. Для того, чтобы оператор $f(A)$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы функция f не имела корней на спектре оператора *A*.

Доказательство. Предположим вначале, что функция f не имеет корней на спектре. Тогда $\frac{1}{f}$ также будет непрерывной функцией, и, по пункту (2) предыдущей теоремы, оператор $\frac{1}{f}(A)$ будет обратным к оператору $f(A)$. Теперь обратно, пусть функция f равна нулю в некоторой точке $t_0 \in \sigma(A)$. Выделим последовательность многочленов p_n, сходящуюся к f равномерно на $\sigma(A)$. Не ограничивая общности можно считать, что $p_n(t_0) = 0$ (в противном случае заменим эти многочлены на $p_n(t) - p_n(t_0)$). Согласно теореме 2 п. 13.1.1, операторы $p_n(A)$ необратимы. Следовательно, ввиду замкнутости множества необратимых операторов (см. следствие теоремы 1 п. 11.1.2) оператор $f(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A)$ также необратим. □

Теорема 3 (об отображении спектра для непрерывных функций). Пусть A – самосопряженный оператор, $f \in C(\sigma(A))$. Тогда $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Доказательство. Повторим рассуждение, применявшееся ранее для полиномов (теорема 3 п. 13.1.1). Условие $\lambda \in \sigma(f(A))$ означает необратимость оператора $f(A) - \lambda I = (f - \lambda)(A)$. Согласно предыдущему утверждению, это равносильно существованию такого $t \in \sigma(A)$, что $f(t) - \lambda = 0$. В свою очередь, это эквивалентно требуемому условию $\lambda \in f(\sigma(A))$. □

Теорема 4. В условиях предыдущей теоремы, если $f \geq 0$ на спектре оператора A, то $f(A) \geq 0$.

Доказательство. По теореме об отображении спектра $\sigma(p(A)) \subset [0,+\infty)$. Остаётся воспользоваться следствием 1 п. 12.4.7. □

Упражнения

1. Пусть в некотором базисе матрица самосопряжённого оператора A имеет диагональный вид. Как в этом базисе будет выглядеть матрица оператора $f(A)$, где f – непрерывная функция?

2. Согласуется ли определение оператора e^A, данное ранее в упражнении 4. п. 13.1.1, с определением непрерывной функции от самосопряженного оператора?

3. Пусть функция g непрерывна на спектре оператора $f(A)$. Доказать, что $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.

13.1.5. Применения непрерывных функций от оператора

Теорема 1. Произведение двух положительных коммутирующих операторов есть положительный оператор.

Доказательство. Пусть $A, B \in L(H)$ – пара положительных коммутирующих операторов. Так как спектр положительного оператора лежит на положительной полуоси, то функция $\sqrt{t}$ непрерывна на спектрах обоих операторов и принимает там вещественные значения. Поэтому операторы $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$ – самосопряжённые операторы, а, по свойству (5) теоремы 1 п. 13.1.4, $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$ коммутируют. Имеем:

$$\langle ABx,x\rangle = \left\langle \left(\sqrt{A}\sqrt{A}\right)\left(\sqrt{B}\sqrt{B}\right)x,x\right\rangle = \left\langle \left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x,x\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x,\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x\right\rangle = \left\|\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)x\right\|^2 \geq 0. \ \square$$

Лемма 1. Пусть $A \in L(H)$ – самосопряженный оператор, $f \in C(\sigma(A))$ и $f(\sigma(A)) = \{0,1\}$. Тогда $f(A)$ – это ортопроектор на некоторое нетривиальное (то есть не равное ни $\{0\}$, ни всему H) подпространство.

Доказательство. Так как функция f подчиняется условию $f^2 = f$, то $f(A)^2 = f(A)$, и оператор $f(A)$ будет проектором. Ввиду самосопряжённости, $f(A)$ – ортопроектор. Так как $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{0,1\}$, $f(A)$ не может совпадать ни с нулевым, ни с единичным оператором. То есть образ оператора $f(A)$ – это нетривиальное подпространство. □

Определение. Пусть $H = H_1 \oplus H_2$, $A_1 \in L(H_1)$, $A_2 \in L(H_2)$. Оператор $A \in L(H)$, совпадающий с A_j на H_j, $j = 1,2$ называется *прямой суммой операторов* A_1, A_2, *подчинённой разбиению* $H = H_1 \oplus H_2$. Сокращённая запись: $A = A_1 \oplus A_2$. Другими словами, если $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, то $(A_1 \oplus A_2)(h_1 + h_2) = A_1 h_1 + A_2 h_2$.

Предлагаем читателю проверить самостоятельно, что оператор $A = A_1 \oplus A_2$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы оба оператора A_1 и A_2. Отсюда легко вывести, что $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) = \sigma(A_1 \oplus A_2)$.

Теорема 2. Пусть $A \in L(H)$ – самосопряженный оператор, спектр которого представляет собой объединение двух непересекающихся замкнутых множеств: $\sigma(A) = K_1 \cup K_2$. Тогда пространство распадается в ортогональную прямую сумму $H = H_1 \oplus H_2$ нетривиальных инвариантных подпространств, а оператор распадается в прямую сумму $A = A_1 \oplus A_2$ операторов, $A_1 \in L(H_1)$, $A_2 \in L(H_2)$, таким образом, что $\sigma(A_1) = K_1$, а $\sigma(A_2) = K_2$.

Доказательство. Функции $f_1 = \mathbf{1}_{K_1}$ и $f_2 = \mathbf{1}_{K_2}$ непрерывны на $\sigma(A)$. Введём в рассмотрение операторы $P_1 = f_1(A)$ и $P_2 = f_2(A)$. По лемме 1, операторы P_j будут ортопроекторами. Поскольку $f_1 + f_2 \equiv 1$ на $\sigma(A)$, имеем $P_1 + P_2 = I$. Положим $H_1 = P_1(H)$, $H_2 = \operatorname{Ker} P_1$. Тогда всё пространство распадается в прямую сумму $H = H_1 \oplus H_2$; $H_2 = P_2(H)$ (теорема 2 п. 10.3.2), причём $H_1 \perp H_2$, так как P_1 – ортопроектор. H_j – это собственное подпространство оператора P_j, соответствующее собственному числу 1. Ввиду коммутирования функции от оператора с самим оператором, это означает (см. теорему п. 11.1.6), что H_j инвариантны относительно A.

Требуемые операторы $A_j \in L(H_j)$, $j = 1,2$, определим как ограничения оператора A на соответствующее подпространство H_j. При таком определении соотношения $A = A_1 \oplus A_2$ и

$\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)=\sigma(A)=K_1\cup K_2$ выполнены очевидным образом. Поэтому для завершения доказательства осталось проверить включения $\sigma(A_j)\subset K_j$, $j=1,2$. Ввиду симметрии условия нам достаточно рассмотреть случай $j=1$. Пусть $\lambda\notin K_1$. Определим функцию $g(t)$, равную $\dfrac{1}{t-\lambda}$ при $t\in K_1$ и равную 0 на K_2. Для любого $x\in H_1$ имеем:

$$g(A)(A_1-\lambda I)x=g(A)(A-\lambda I)x=f_1(A)x=P_1x=x.^2$$

Подпространство H_1 инвариантно для $g(A)$ (снова теорема п. 11.1.6), следовательно, ввиду коммутативности, последнее равенство означает, что ограничение оператора $g(A)$ на подпространство H_1 будет обратным к $A_1-\lambda I$. Мы доказали импликацию $\lambda\notin K_1 \quad\Rightarrow\quad \lambda\notin\sigma(A_1)$, эквивалентную включению $\sigma(A_1)\subset K_1$. □

Следствие. Пусть λ_0 – изолированная точка спектра самосопряжённого оператора *A*. Тогда λ_0 является собственным числом этого оператора.

Доказательство. Применим предыдущее утверждение, взяв $K_1=\{\lambda_0\}$, $K_2=\sigma(A)\setminus\{\lambda_0\}$. В этом случае $\sigma(A_1)=\{\lambda_0\}$, то есть (следствие 3 п. 12.4.7) $A_1-\lambda_0 I=0$, и любой ненулевой элемент подпространства H_1 будет требуемым собственным вектором. □

Упражнения

1. Почему в последнем следствии подпространство H_1 не может состоять только из нуля?
2. Самосопряженный оператор $A\in L(H)$ будет положительным в том и только том случае, если существует такой самосопряженный оператор $B\in L(H)$, что $B^2=A$.
3. Пусть $B\geq 0$ и $B^2=A$. Тогда $B=\sqrt{A}$.
4. Пусть $\dim H\geq 2$. Тогда существует бесконечно много самосопряженных операторов $B\in L(H)$, для которых $B^2=I$.

---

[2] Здесь и ниже буква I используется для обозначения единичного оператора как во всём пространстве, так и в подпространствах H_1 и H_2.

13.2. Унитарные операторы и формула полярного представления

13.2.1. Модуль оператора

Пусть $T \in L(H)$ – произвольный оператор. Следуя аналогии с числами, можно предположить, что оператор T^*T будет положительным самосопряжённым оператором. Проверим эту гипотезу. Ввиду равенств $\left(T^*T\right)^* = T^*\left(T^*\right)^* = T^*T$ имеем самосопряжённость. Положительность же следует из аксиом скалярного произведения: $\left\langle T^*Tx, x\right\rangle = \left\langle Tx, Tx\right\rangle \geq 0.$ Так как оператор T^*T положителен, то функция $\sqrt{t}$ непрерывна на спектре оператора, что даёт нам основание ввести следующее определение *модуля оператора*: $|T| = \sqrt{T^*T}$. Модуль оператора – это положительный оператор. Как показывает следующая теорема, модуль тесно связан с исходным оператором.

Теорема 1. Для любого элемента $x \in H$ выполнено соотношение $\||T|x\| = \|Tx\|$. В частности, $|T|x = 0$ в том и только том случае, если $Tx = 0.$

Доказательство.
$\||T|x\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \left\langle |T|^2 x, x\right\rangle = \left\langle T^*Tx, x\right\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$. □

Для дальнейшего нам пригодится следующая переформулировка.

Теорема 2 (ослабленная формула полярного разложения). Пусть X – образ оператора $|T|$, Y – образ оператора T. Тогда существует изометрический биективный оператор $V \in L(X, Y)$, такой что $T = V \circ |T|$. Более того, такой оператор не только существует, но и единственен.

Доказательство. Начнём с единственности. Пусть $x = |T|(h)$ – произвольный элемент пространства X. Чтобы требуемое равенство $T = V \circ |T|$ выполнялось для элемента h, необходимо и достаточно, чтобы оператор V подчинялся условию $Vx = Th$. Таким образом, V определён однозначно. Ввиду предыдущей теоремы если у элемента x есть два разных представления $x = |T|(h_1) = |T|(h_2)$, то $\|Th_1 - Th_2\| = 0$, то есть условие $Vx = Th$ можно взять за определение требуемого оператора V. Когда элемент h пробегает[3] всё гильбертово пространство H, элементы

[3] Если задуматься над этим общепринятым оборотом, то бросается в глаза несоответствие с возникающим здесь образом. Действительно, чтобы «пробежать» даже область на плоскости, элементу придётся приложить серьёзные усилия. Впрочем, двигаясь по кривой Пеано, эту задачу он сможет решить (хотя я на его

$x = |T|(h)$ и $Vx = Th$ пробегают всё X и Y соответственно. Таким образом, оператор V биективен. Наконец, ввиду равенств $\|Vx\| = \|Th\| = \||T|(h)\| = \|x\|$ оператор V осуществляет изометрию. □

Упражнения

Вычислить модули следующих операторов:

1. Оператора умножения A_g на ограниченную функцию g: $A_g \in L(L_2[0,1])$, $(A_g f)(t) = g(t) f(t)$;
2. Оператора $S_r \in L(l_2)$ сдвига вправо $S_r(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$;
3. Оператора $S_l \in L(l_2)$ сдвига влево $S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

13.2.2. Определение и простейшие свойства унитарных операторов

Комплексное число, лежащее на единичной окружности, подчиняется уравнению $z \cdot \bar{z} = 1$. Развивая аналогию между операторами и числами, естественно ввести соответствующий класс операторов.

Определение. Оператор $U \in L(H)$ называется унитарным, если $UU^* = U^*U = I$. Другими словами, оператор U будет унитарным, если он обратим и $U^{-1} = U^*$.

Теорема 1. Унитарный оператор сохраняет скалярное произведение: $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ для любых $x, y \in H$. Соответственно, унитарный оператор сохраняет ортогональность: если $x \perp y$, то $Ux \perp Uy$.

Доказательство. $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. □

Теорема 2 (критерий унитарности). Оператор унитарен тогда и только тогда, когда он представляет собой биективную изометрию.

Доказательство. Пусть U – унитарный оператор. Он обратим, поэтому биективен. Далее, $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, то есть U – изометрия. Обратно, пусть U – изометрия. Тогда $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle$. Таким образом, равны квадратичные формы самосопряженных операторов U^*U и I, поэтому совпадают и сами операторы: $I = U^*U$. А так как для биективного оператора понятия правого обратного и левого обратного тождественны, то и $UU^* = I$, что и требовалось доказать. □

месте нашёл бы себе более интересное занятие). Что же касается бесконечномерного пространства, то «пробежать» его целиком никак не возможно. Докажите, что непрерывное отображение $f : [0, +\infty) \to H$ не может быть сюръективным.

Теорема 3. Спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности.

Доказательство. Ввиду изометричности $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$. Поэтому, если $|\lambda| < 1$, то оператор $U\text{-}\lambda I$ обратим по теореме о малом возмущении обратимого элемента (теорема 1 п. 11.1.2), а если $|\lambda| > 1$, то обратимость оператора $U - \lambda I = \lambda(I - \lambda^{-1}U)$ нам гарантирует лемма о малом возмущении единичного элемента (лемма 2 п. 11.1.2). Выходит, что оператор $U - \lambda I$ может быть необратим только при $|\lambda| = 1$. □

Дальнейшее углубление аналогии между унитарным оператором и единичным по модулю числом см. в конце параграфа 13.3.

Упражнения

1. При каком условии на функцию g оператор умножения $A_g \in L(L_2[0,1])$, $(A_g f)(t) = g(t)f(t)$ будет унитарным оператором?
2. Для любого замкнутого подмножества K единичной окружности существует унитарный оператор U с $\sigma(U) = K$.
3. Пусть оператор $U \in L(H)$ – это изометрическое вложение (то есть $\|Ux\| = \|x\|$ для любого $x \in H$), имеющее плотный образ. Тогда U – унитарный оператор.

13.2.3. Полярное разложение

Полярным разложением оператора T называется представление оператора в виде $T = UA$, где U – унитарный, а A – положительный самосопряженный оператор. То есть полярное разложение операторов – это аналог полярного разложения $z = e^{i \arg z} \cdot |z|$ для комплексных чисел. В отличие от скалярного случая, для операторов такое представление не всегда возможно. Чтобы установить условия существования полярного разложения, рассмотрим его как уравнение с неизвестными операторами U и A.

Предположим, что U и A – требуемые решения уравнения $T = UA$. Тогда $T^* = AU^*$ (мы использовали самосопряжённость оператора A) и ввиду унитарности U имеем $T^*T = A^2$. Извлекая корень, получаем значение одного из неизвестных:

$$A = |T|.$$

Для определения второго из неизвестных имеем уравнение $T = U \circ |T|$. Чем это условие отличается от аналогичного условия на оператор V из теоремы 2 п. 13.2.1? Только тем, что оператор U требуется определить не только на подпространстве $X = |T|(H)$, а на всём пространстве с сохранением свойств изометричности и биективности, которыми обладал оператор V. Разберём, когда же такое продолжение возможно. Чтобы сформулировать результат, уточним, что такое размерность гильбертова пространства. Для конечномерного пространства размерностью называлось количество элементов в базисе этого пространства. Обобщая определение на бесконечномерный случай, назовём *размерностью гильбертова пространства* мощность его ортонормированного базиса (см. упражнение 8 п. 12.3.4). Размерности двух гильбертовых пространств совпадают в том и только том случае, если эти пространства изоморфны (упражнение 12 п. 12.3.5).

Лемма. Пусть X, Y – линейные подпространства гильбертова пространства H, $V \in L(X, Y)$ – биективная изометрия. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) отображение V можно продолжить до унитарного оператора $U \in L(H)$;

(2) $\dim X^{\perp} = \dim Y^{\perp}$, причём размерности могут быть как конечными, так и бесконечными.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Поскольку на X операторы U и V совпадают, то $U(X) = Y$. Согласно теореме 1 п. 13.2.2, унитарный оператор сохраняет ортогональность, следовательно, $U(X^{\perp}) = Y^{\perp}$. Ввиду инъективности оператора, это даёт нам требуемое равенство размерностей.

$(2) \Rightarrow (1)$. Не нарушая общности, подпространства X и Y можно считать замкнутыми (в противном случае продолжим оператор V по непрерывности на замыкание подпространства X). Ввиду равенства размерностей существует биективная изометрия $W : X^{\perp} \to Y^{\perp}$. Для произвольного $x \in H$ выпишем разложение $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X^{\perp}$. Определим требуемый оператор U по правилу $Ux = Vx_1 + Wx_2$. □

Теорема. Для существования полярного разложения оператора T необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее равенство размерностей: $\dim KerT = \dim KerT^*$.

Доказательство. Ввиду предыдущей леммы и следовавших перед ней рассуждений, требуемым необходимым и достаточным условием будет равенство $\dim(|T|(H))^{\perp} = \dim(T(H))^{\perp}$. Чтобы свести это условие к требуемому утверждению, заметим, что $(T(H))^{\perp} = KerT^*$. С другой стороны, ввиду самосопряжённости, $(|T|(H))^{\perp} = Ker|T|$. В свою очередь, по теореме 1 п. 13.2.1, $Ker|T| = KerT$. □

Отметим некоторые полезные достаточные условия существования полярного разложения.

Следствия:

1. Для существования полярного разложения оператора T достаточно, чтобы оператор был обратим.
2. Пусть T – *нормальный оператор*, то есть T коммутирует с T^*. Тогда для T существует полярное разложение.
3. Пусть оператор T имеет вид «скалярный + компактный». Тогда T обладает полярным разложением.

Доказательство:

1. Если T обратим, то и T^* обратим. Таким образом, $\dim KerT = \dim KerT^* = 0$.

2. $KerT = Ker|T| = Ker\sqrt{T^*T} = Ker\sqrt{TT^*} = Ker\left|T^*\right| = Ker(T^*)$.

3. Следует из теоремы Фредгольма (см. упражнение 2 п. 11.3.5). □

Упражнения

1. Доказать, что любой оператор $T \in L(H)$ представим, причём единственным образом, в виде $T = A + iB$, где A и B – самосопряженные операторы. При этом оператор T будет нормальным в том и только том случае, если A и B коммутируют. Такое представление служит отправной точкой для одного из способов построения функций от нормального оператора (см. [BUS]).
2. Доказать, что оператор T будет нормальным в том и только том случае, если для него существует полярное представление с коммутирующими операторами A и U.
3. Доказать, что если для оператора существует некоммутативное полярное разложение, то оператор T не будет нормальным.[4]
4. Описать операторы, для которых полярное разложение единственно.
5. Обоснуйте факт, которым мы, не акцентируя на этом внимания, уже пользовались в настоящем параграфе: если для положительных операторов выполнено равенство $A^2 = B^2$, то $A = B$. Сохраняет ли утверждение силу без условия положительности операторов? Где именно использовался этот факт?

[4] Термина «ненормальный оператор» мы стараемся избегать, хотя в математической литературе употребляется даже термин «вполне ненормальный оператор» – оператор, ограничение которого на любое инвариантное подпространство не является нормальным.

13.3. Расширение понятия функции от оператора

13.3.1. Борелевские функции от оператора

Используя возможность приближения непрерывной функции многочленами, мы смогли построить непрерывные функции от самосопряженного оператора. Ниже мы покажем, что функция от самосопряженного оператора может быть определена и в гораздо более общей ситуации, а именно: это возможно для любой ограниченной измеримой по Борелю функции. В основе конструкции лежит возможность единообразного продолжения линейных функционалов с пространства непрерывных функций на более широкое пространство ограниченных измеримых по Борелю функций.

Пусть $A \in L(H)$ – это некий фиксированный самосопряжённый оператор, а K – его спектр.

Для любых элементов $x, y \in H$ определим линейный функционал $F_{x,y} \in C(K)^*$ формулой $F_{x,y}(f) = \langle f(A)x, y\rangle$. Очевидным образом, кроме линейности по f, выполнены соотношения $F_{a_1x_1+a_2x_2,y} = a_1F_{x_1,y} + a_2F_{x_2,y}$ и $F_{y,x} = \overline{F}_{x,y}$, обычные для билинейной формы. Также нетрудно убедиться, что $\|F_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|$:

$$\left|F_{x,y}(f)\right| = \left|\langle f(A)x, y\rangle\right| \le \|f(A)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

По теореме об общем виде непрерывного линейного функционала на $C(K)$, существует регулярный комплексный борелевский заряд $\sigma_{x,y}$ на K такой, что

$$F_{x,y}(f) = \int_K f\,d\sigma_{x,y}.$$

Поскольку указанное соответствие между функционалами на $C(K)$ и зарядами есть линейная биективная изометрия, соотношения для функционалов, выписанные выше, выполнены и для зарядов:

$$\|\sigma_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|,\ \sigma_{a_1x_1+a_2x_2,y} = a_1\sigma_{x_1,y} + a_2\sigma_{x_2,y} \text{ и } \sigma_{y,x} = \overline{\sigma}_{x,y}.$$

Определение. Пусть f – ограниченная борелевская функция на K, $\sigma_{x,y}$ – определённые выше борелевские заряды. Зададим оператор $f(A)$ равенством

$$\langle f(A)x, y\rangle = \int_K f\,d\sigma_{x,y}.$$

Ввиду теоремы п. 12.4.1 (с изменением порядка сомножителей) такое определение корректно: правая часть равенства есть непрерывная билинейная форма.

Отметим, что последнее определение согласовано с определением непрерывных функций от оператора (то есть оба определения дают один и тот же результат), и многие из свойств непрерывных функций от оператора, отмеченных в п. 13.1.4, сохраняются и в более общей ситуации.

Теорема 1. Для ограниченных борелевских функций на K выполнены следующие соотношения:

1. $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(A) = \lambda_1 f_1(A) + \lambda_2 f_2(A)$;
2. $(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$;
3. $(f(A))^* = \bar{f}(A)$. В частности, если функция f принимает на $\sigma(A)$ только вещественные значения, то $f(A)$ – самосопряженный оператор.

Доказательство. Свойство 1 следует из линейности интеграла. Для проверки свойства 3 воспользуемся соотношением $\sigma_{y,x} = \overline{\sigma}_{x,y}$:

$$\left\langle (f(A))^* x, y \right\rangle = \langle x, f(A)y \rangle = \overline{\langle f(A)y, x \rangle} = \int_K \bar{f}\, d\overline{\sigma_{y,x}} = \int_K \bar{f}\, d\sigma_{x,y} = \left\langle \bar{f}(A)x, y \right\rangle.$$

Осталось проверить второе свойство.

Равенство $(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$ нам уже известно для непрерывных функций. Поэтому для любых $f_1, f_2 \in C(K)$ имеем равенство для билинейных форм:

$$\langle (f_1 f_2)(A)x, y \rangle = \langle f_1(A)(f_2(A)x), y \rangle. \tag{1}$$

Воспользуемся определением зарядов $\sigma_{x,y}$ и запишем последнее равенство в виде

$$\int_K (f_1 f_2) d\sigma_{x,y} = \int_K f_1 d\sigma_{f_2(A)x,y}.$$

Так как интегралы равны для любой непрерывной функции f_1, то они будут равны и для любой ограниченной измеримой по Борелю функции.[5] Возвращаясь обратно, получаем выполнение равенства (1) опять-таки не только для непрерывной, но и для любой ограниченной борелевской функции f_1. Переписав (1) в виде

$$\langle (f_1 f_2)(A)x, y \rangle = \langle f_2(A)x, \bar{f}_1(A)y \rangle$$

и применив определение, получим, что для любой ограниченной борелевской функции f_1 равенство интегралов

[5] Для доказательства нужно выбрать меру μ, мажорирующую оба входящих в формулу заряда; представить борелевскую функцию как предел $\mu -$почти всюду сходящейся равномерно ограниченной последовательности непрерывных функций и применить теорему о мажорированной сходимости.

$$\int_K (f_1 f_2) d\sigma_{x,y} = \int_K f_2 d\sigma_{x,\bar{f}_1(A)y} \tag{2}$$

имеет место для любой непрерывной функции f_2. Распространяя равенство (2) на более широкий класс функций и перейдя снова к билинейным формам, получим, что соотношение (1) верно для любых ограниченных измеримых по Борелю функций f_1, f_2. Из совпадения билинейных форм вытекает и совпадение соответствующих операторов. Таким образом, требуемое соотношение мультипликативности доказано. □

Остальные свойства п. 13.1.4 непрерывных функций от оператора для борелевских функций выполнены не в полном объёме. Основная причина этого заключается в том, что две различные, но совпадающие почти всюду относительно всех зарядов $\sigma_{x,y}$ функции f_1, f_2 порождают один и тот же оператор: $f_1(A) = f_2(A)$.

Теорема 2 (достаточное условие обратимости). Если ограниченная борелевская функция f отделена от 0 на $\sigma(A)$ (то есть $\exists \varepsilon > 0\ \forall t \in \sigma(A)\ |f(t)| \geq \varepsilon$), то оператор $f(A)$ обратим.

Доказательство. Оператор $\frac{1}{f}(A)$ будет обратным к $f(A)$. □

Теорема 3 (теорема об отображении спектра для ограниченных борелевских функций от оператора). Спектр функции от оператора содержится в замыкании образа спектра исходного оператора: $\sigma(f(A)) \subset \overline{f(\sigma(A))}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \overline{f(\sigma(A))}$. Тогда функция $f - \lambda$ подчиняется условиям предыдущего утверждения. Таким образом, оператор $(f - \lambda)(A) = f(A) - \lambda I$ обратим, то есть $\lambda \notin \sigma(f(A))$. Теорема доказана. □

Теорема 4 (оценка нормы функции от оператора). Пусть f – ограниченная борелевская функция на $\sigma(A)$. Тогда $\|f(A)\| \leq \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$.

Доказательство. Воспользуемся условием $\|\sigma_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$:

$$\|f(A)\| = \sup_{x,y \in S(H)} |\langle f(A)x, y \rangle| = \sup_{x,y \in S(H)} \left| \int_{\sigma(A)} f\, d\sigma_{x,y} \right| \leq \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)|. \ \square$$

Теорема 5. Пусть f_n – монотонно возрастающая равномерно ограниченная последовательность вещественных борелевских функций на

K, сходящаяся в каждой точке к функции f. Тогда последовательность операторов $f_n(A)$ сходится поточечно к оператору $f(A)$.

Доказательство. Операторы $f_n(A)$ образуют монотонную ограниченную последовательность. По теореме 2 п. 12.4.6, существует поточечный предел последовательности $f_n(A)$, который мы обозначим через T. Для доказательства требуемого равенства $f(A)=T$ сравним билинейные формы операторов.

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n(A)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\sigma(A)} f_n d\sigma_{x,y} = \int\limits_{\sigma(A)} f d\sigma_{x,y} = \langle f(A)x, y\rangle.$$

В последней выкладке мы использовали теорему Лебега о мажорированной сходимости. □

Разрывные борелевские функции от операторов можно вычислять не через определение (довольно абстрактное), а с помощью аппроксимации (в том или ином смысле) непрерывными функциями. Например, если ограниченная борелевская функция f на $\sigma(A)$ представима как поточечный предел возрастающей последовательности f_n непрерывных функций,[6] последняя теорема позволяет вычислять $f(A)$ как поточечный предел последовательности $f_n(A)$. Подробнее на подобном подходе к функциям от оператора мы остановимся в упражнениях.

13.3.2. Упражнения

1. Пусть операторы A и B коммутируют. Тогда каждый из них коммутирует с ограниченными борелевскими функциями от другого.
2. Пусть операторы A и B коммутируют, f и g – борелевские функции на спектрах операторов A и B соответственно. Тогда $f(A)$ и $g(B)$ также коммутируют между собой.
3. Пусть в некотором базисе матрица самосопряжённого оператора A имеет диагональный вид. Как в этом базисе будет выглядеть матрица оператора $f(A)$, где f – ограниченная борелевская функция?
4. Описать функции от оператора умножения A_g на ограниченную вещественную функцию g: $A_g \in L(L_2[0,1])$, $(A_g f)(t) = g(t)f(t)$.

Определение. Последовательность операторов $A_n \in L(H)$ назовём *формально сходящейся* к оператору $A \in L(H)$, если сходятся соответствующие билинейные формы: $\langle A_n x, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle Ax, y\rangle$ для всех $x, y \in H$. Обозначение: $A_n \xrightarrow{\text{form}} A$.

---

[6] Такое представление возможно только для полунепрерывной снизу функции.

5. Из поточечной сходимости операторов следует формальная сходимость.
6. Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормированная система в H. Тогда операторы A_n, действующие по правилу $A_n x = <x, e_1> e_n$, сходятся к 0 формально, но не сходятся поточечно.
7. Если $A_n \xrightarrow{\text{form}} A$, то $\|A\| \le \sup\limits_n \|A_n\| < \infty$.
8. Если $A_n \xrightarrow{\text{form}} A$, $B_n \xrightarrow{\text{form}} B$ и $a, b \in \mathbb{C}$, то $aA_n + bB_n \xrightarrow{\text{form}} aA + bB$.
9. Если $A_n \xrightarrow{\text{form}} A$, $B \in L(H)$, то $A_n B \xrightarrow{\text{form}} AB$ и $BA_n \xrightarrow{\text{form}} BA$.
10. Если $A_n \xrightarrow{\text{form}} A$, то $A_n^* \xrightarrow{\text{form}} A^*$. Выполнено ли аналогичное свойство для поточечной сходимости?
11. Привести пример, когда $A_n \xrightarrow{\text{form}} A$, $B_n \xrightarrow{\text{form}} B$, но $A_n B_n$ не сходится формально к AB.

Пусть $A \in L(H)$ – самосопряженный оператор, K – его спектр. Борелевскую меру μ на K назовём *контрольной мерой* оператора A, если все заряды $\sigma_{x,y}$, порождённые оператором A, абсолютно непрерывны по отношению к μ.

12. Для каждого самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве существует контрольная мера. Указание: выбрать плотную в $S_H \times S_H$ последовательность пар (x_n, y_n). Контрольную меру определить равенством $\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left|\sigma_{x_n, y_n}\right|$.
13. Пусть $A \in L(H)$ – самосопряженный оператор, K – его спектр, и μ – контрольная мера оператора A. Пусть, далее, f_n – равномерно ограниченная последовательность борелевских функций на K, сходящаяся μ-почти всюду к функции f. Тогда $f_n(A) \xrightarrow{\text{form}} f(A)$.
14. Пусть $A \in L(H)$ – самосопряженный оператор, K – его спектр. Тогда для любой ограниченной борелевской функции f на K существует такая последовательность f_n непрерывных функций на K, что $f_n(A) \xrightarrow{\text{form}} f(A)$.

Следующая цепочка упражнений даст читателю возможность построить самостоятельно теорию функций от унитарного оператора. На протяжении этого раздела U будет фиксированным унитарным оператором, а S – спектром оператора U. Основным отличием со случаем самосопряженного оператора будет то, что многочлены не плотны в пространстве непрерывных функций на окружности: замыкание в равномерной метрике множества многочленов содержит только граничные значения аналитических в круге функций. Скажем, функция $1/z$ не принадлежит такому замыканию.

15. Найти расстояние от функции $1/z$ до множества многочленов в пространстве непрерывных функций на окружности.

Чтобы обойти это затруднение, введём в рассмотрение множество обобщённых многочленов, содержащих и отрицательные степени свободной переменной: $P = \left\{ p \in C(S) : p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \right\}$. По аналогии с обычными многочленами определим $p(U) = \sum_{k=-n}^{n} a_k U^k$.

16. Проверить, что отображение $p \to p(U)$ обладает свойствами линейности и мультипликативности.
17. Установить критерий обратимости для оператора $p(U)$. Доказать теорему об отображении спектра.

Обобщённый многочлен $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ будем называть симметрическим многочленом[7], если для любого индекса k выполнено условие $a_{-k} = \overline{a}_k$.

18. Доказать, что симметрический многочлен принимает на единичной окружности вещественные значения. Обратно, если S – бесконечное подмножество единичной окружности и обобщённый многочлен p принимает на S только вещественные значения, то p – симметрический многочлен.
19. Для любого обобщённого многочлена p на единичной окружности функции $\operatorname{Re} p$ и $\operatorname{Im} p$ – это симметрические многочлены на единичной окружности.
20. Доказать, что любую вещественнозначную непрерывную функцию на единичной окружности можно с любой степенью точности приблизить в равномерной метрике симметрическими многочленами.
21. Доказать, что симметрический многочлен от унитарного оператора есть самосопряжённый оператор. Вывести для этого случая формулу $\|p(U)\| = \sup_{t \in \sigma(U)} |p(t)|$.

[7] Название условное и не имеет никакого отношения к симметрическим многочленам от нескольких переменных.

22. Начиная с этого места, вся схема построения функций от самосопряженного оператора переносится на функции от унитарного оператора без каких-либо изменений. Проверьте это!
23. Докажите, что любой унитарный оператор U может быть представлен в виде $U = e^{iA}$, где A – самосопряжённый оператор. (Указание. Выделите f – ветвь аргумента на окружности. Возьмите $f(U)$ в качестве A). Будет ли такое представление единственным?
24. Пусть обобщённый многочлен p принимает на S только положительные значения. Тогда p равен на S квадрату модуля некоторого обобщённого многочлена.

13.4. Функции от самосопряжённого оператора и спектральная мера

13.4.1. Интеграл по векторной мере

Пусть даны множество Ω, алгебра подмножеств Σ на Ω и банахово пространство X. Отображение $\mu : \Sigma \to X$ называется *X-значной мерой*, если оно подчиняется условию конечной аддитивности: $\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$ для любых непересекающихся подмножеств $D_1, D_2 \in \Sigma$. Меры со значениями в банаховых пространствах называются ещё *векторными мерами*.

Мы будем рассматривать в качестве основного случай комплексных скаляров. Вещественный случай практически ничем не отличается.

Пример. Пусть $X = \mathbb{C}^n$ – пространство строк. Тогда любую X-значную меру μ можно записать в виде $\mu(D) = (\mu_1(D), \mu_2(D), ..., \mu_n(D))$, где μ_j – это конечно-аддитивные комплексные заряды.

Определим интеграл скалярной функции по векторной мере по аналогии с тем, как это делалось в разделе 4.2 для обычного интеграла. Отличие будет заключаться не только в том, что мера – векторная, а и в том, что она лишь конечно-, а не счётно-аддитивна. Поэтому во всех определениях мы будем работать только с конечными разбиениями множества на подмножества.

Пусть $\Delta \in \Sigma$, $f : \Delta \to \mathbb{C}$ – некоторая функция; $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$ – конечное разбиение множества Δ на подмножества $\Delta_k \in \Sigma$, $T = \{t_k\}_1^n$ – набор отмеченных точек. *Интегральной суммой* функции f по множеству Δ, соответствующей паре (D, T), называется вектор $S_\Delta(f, D, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\mu(\Delta_k) \in X$.

Элемент $x \in X$ называется *интегралом* функции f на множестве Δ по векторной мере μ (обозначение: $x = \int\limits_{\Delta} f d\mu$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное разбиение D_ε множества Δ, что для любого конечного разбиения D, следующего за D_ε, и любого выбора отмеченных точек T для D $\|x - S_\Delta(f, D, T)\| \le \varepsilon$. Функция $f: \Delta \to \mathbb{C}$ называется *интегрируемой* на множестве Δ по мере μ, если для неё существует соответствующий интеграл.

Другими словами, функция f интегрируема на Δ, если существует предел интегральных сумм по направленности конечных разбиений с отмеченными точками, аналогичной описанной в п. 4.1.3.

Отметим без доказательства простейшие **свойства интеграла**.

(1) Линейность по функции: если функции f и g интегрируемы на Δ, a, b – скаляры, то $af + bg$ также интегрируема и $\int\limits_{\Delta}(af + bg)d\mu = a\int\limits_{\Delta} f d\mu + b\int\limits_{\Delta} g d\mu$.

(2) Аддитивность по множеству: если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ и f интегрируема на обоих множествах, то f интегрируема на их объединении и $\int\limits_{\Delta_1} f\, d\mu + \int\limits_{\Delta_2} f\, d\mu = \int\limits_{\Delta_1 \cup \Delta_2} f\, d\mu$.

(3) Характеристическая функция любого множества $\Delta \in \Sigma$ интегрируема и $\int\limits_{\Omega} \mathbf{1}_\Delta d\mu = \mu(\Delta)$.

(4) Для любого набора $\{\Delta_k\}_1^n$ измеримых подмножеств конечнозначная функция $f = \sum\limits_1^n a_k \mathbf{1}_{\Delta_k}$ интегрируема и $\int\limits_{\Omega} f d\mu = \sum\limits_1^n a_k \mu(\Delta_k)$.

(5) Пусть $G \in L(X, Y)$ – непрерывный оператор, $\mu: \Sigma \to X$ – X-значная мера. Тогда композиция $G \circ \mu$ будет Y-значной мерой. Любая μ-интегрируемая функция f будет $G \circ \mu$-интегрируемой, и $G\left(\int\limits_{\Delta} f\, d\mu\right) = \int\limits_{\Delta} f\, d(G \circ \mu)$.

13.4.2. Полувариация и теорема существования интеграла

Определение. Пусть $\mu: \Sigma \to X$ – векторная мера. Определим для любого $\Delta \in \Sigma$ величину $\|\mu\|(\Delta)$ – *полувариацию меры* μ *на множестве* Δ

как супремум величины $\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(\Delta_k) \right\|$ по всем конечным разбиениям $\{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$ множества Δ на измеримые подмножества и по всем конечным наборам $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ скаляров, подчиняющихся условию $|a_k| \le 1$. Введём обозначение $\|\mu\| = \|\mu\|(\Omega)$. Мера называется ограниченной, если $\|\mu\| < \infty$. Далее, до конца параграфа, мы будем предполагать ограниченность меры μ.

Лемма. Для любой ограниченной функции f на множестве $\Delta \in \Sigma$, любого конечного разбиения $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$ множества Δ на подмножества $\Delta_k \in \Sigma$ и любого набора $T = \{t_k\}_1^n$ отмеченных точек $t_k \in \Delta_k$ имеет место следующая оценка: $\left\| S_\Delta(f, D, T) \right\| \le \|\mu\|(\Delta) \cdot \sup_{t \in \Delta} |f(t)|$.

Доказательство. Обозначим $\sup_{t \in \Delta} |f(t)|$ через M и положим $a_k = \dfrac{f(t_k)}{M}$. Поскольку $|a_k| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем требуемую оценку:
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \mu(\Delta_k) \right\| = M \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(\Delta_k) \right\| \le M \|\mu\|(\Delta) = \|\mu\|(\Delta) \cdot \sup_{t \in \Delta} |f(t)|. \ \Box$$

Предельным переходом от интегральной суммы к интегралу получаем следующее утверждение.

Теорема 1. $\left\| \int_\Delta f \, d\mu \right\| \le \|\mu\|(\Delta) \cdot \sup_{t \in \Delta} |f(t)|$ для любой интегрируемой ограниченной функции f на Δ. $\Box$

По аналогии с п. 4.3.2 докажем теорему о равномерном пределе.

Теорема 2. Пусть f, f_n – скалярные функции на Δ, μ – ограниченная векторная мера, f_n интегрируемы по μ на Δ и последовательность f_n равномерно сходится на Δ к f. Тогда f интегрируема и $\int_\Delta f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Delta f_n \, d\mu$.

Доказательство. Введём обозначение $x_n = \int_\Delta f_n \, d\mu$. Последовательность x_n фундаментальна:
$$\|x_n - x_m\| = \left\| \int_\Delta (f_n - f_m) \, d\mu \right\| \le \sup_{t \in \Delta} \|f_n(t) - f_m(t)\| \cdot \|\mu\|(\Delta) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0.$$

Обозначим предел последовательности x_n через x. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $n \in \mathbb{N}$, что $\sup_{t \in \Delta} \|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{3\|\mu\|(\Delta)}$ и $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Далее, пусть D_ε – то разбиение, начиная с которого $\|x_n - S_\Delta(f_n, D, T)\| \le \varepsilon$. Тогда для любого $D \succ D_\varepsilon$ и любого набора отмеченных точек T, соответствующего D, имеем:

$$\|x - S_\Delta(f, D, T)\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - S_\Delta(f_n, D, T)\| + \|S_\Delta(f_n - f, D, T)\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

То есть f интегрируема и $\int_\Delta f\,d\mu = x$. Остаётся вспомнить, что, по построению, $x = \lim_{n \to \infty} \int_\Delta f_n\,d\mu$. □

Теорема 3. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – ограниченная векторная мера и $\Delta \in \Sigma$. Тогда любая ограниченная измеримая функция f интегрируема на Δ.

Доказательство. Функцию f можно представить как предел равномерно сходящейся последовательности f_n конечнозначных функций. Поскольку любая конечнозначная измеримая функция интегрируема, остаётся применить теорему 2 о равномерном пределе. □

Мы привели основные определения и простейшие свойства векторных мер, необходимые в теории операторов. При этом для упрощения изложения мы не стремились к наибольшей общности определений и формулировок. Сама же теория векторных мер – это обширная, богатая глубокими результатами и приложениями область функционального анализа. Введению в теорию векторных мер посвящена монография Дистеля и Ула [D-U].

Упражнения

1. Доказать, что для скалярных зарядов полувариация совпадает с известной из общего курса теории меры вариацией заряда.
2. Проверьте, что выражение $\|\mu\| = \|\mu\|(\Omega)$ задаёт норму в пространстве $M(\Omega, \Sigma, X)$ всех ограниченных X-значных мер на Σ. Докажите полноту нормированного пространства $M(\Omega, \Sigma, X)$.
3. Векторная мера ограничена в том и только том случае, если множество всех её значений ограничено.
4. Доказать, что если векторная мера задана на σ-алгебре и счётно-аддитивна, то она ограничена.
5. Доказать, что если векторная мера задана на σ-алгебре и счётно-аддитивна на каждом линейном функционале, то она счётно-аддитивна и в смысле сходимости по норме.

Пусть (Ω, Σ, ν) – пространство с (обычной конечной числовой) мерой. Будем говорить, что векторная мера $\mu : \Sigma \to X$ *абсолютно непрерывна по отношению к* ν, если $\mu(\Delta) = 0$ для любого $\Delta \in \Sigma$ с $\nu(\Delta) = 0$.

6. Докажите, что если векторная мера $\mu : \Sigma \to X$ счетно-аддитивна на σ-алгебре Σ и абсолютно непрерывна по отношению к ν, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $\Delta \in \Sigma$ с $\nu(\Delta) < \delta$ выполнено условие $\|\mu\|(\Delta) < \varepsilon$.
7. В условиях предыдущего упражнения выполнен следующий аналог теоремы о мажорированной сходимости: если равномерно ограниченная последовательность f_n измеримых функций сходится к функции f ν-почти всюду, то $\int\limits_\Omega f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\,d\mu$.
8. Пусть векторная мера $\mu : \Sigma \to X$ счетно-аддитивна на σ-алгебре Σ. Тогда на Σ существует числовая мера ν, по отношению к которой μ абсолютно непрерывна.

13.4.3. Спектральная мера и спектральные проекторы

Пусть $A \in L(H)$ – фиксированный самосопряженный оператор, $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств на $\sigma(A)$.

Определение. Спектральной мерой оператора A называется векторная мера $\mu_A : \mathfrak{B} \to L(H)$, задаваемая формулой $\mu_A(\Delta) = \mathbf{1}_\Delta(A)$.

Отметим, что применение термина «мера» здесь корректно ввиду выполнения для любой дизъюнктной пары множеств равенства $\mathbf{1}_{\Delta_1} + \mathbf{1}_{\Delta_2} = \mathbf{1}_{\Delta_1 \cup \Delta_2}$.

Лемма 1. Пусть $f = \sum\limits_1^n \alpha_k \mathbf{1}_{\Delta_k}$ – конечнозначная борелевская функция на $\sigma(A)$. Тогда $f(A) = \int\limits_{\sigma(A)} f\,d\mu_A$.

Доказательство. $\int\limits_{\sigma(A)} f\,d\mu_A = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \mu_A(\Delta_k) = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{\Delta_k}(A) = f(A)$. □

Теорема 1. Спектральная мера самосопряженного оператора ограничена, и $\|\mu_A\|(\Delta) \le 1$ для любого борелевского подмножества $\Delta \subset \sigma(A)$.

Доказательство. По определению, $\|\mu_A\|(\Delta)$ – это супремум величины $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k \mu_A(\Delta_k)\right\|$ по всем конечным разбиениям $\{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$ множества Δ на борелевские подмножества и по всем конечным наборам $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ скаляров, подчиняющихся условию $|a_k| \le 1$. Рассмотрим функцию $f = \sum_{1}^{n} a_k \mathbf{1}_{\Delta_k}$. Согласно теореме 4 п. 13.3.1,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k \mu_A(\Delta_k)\right\| = \|f(A)\| \le \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)| = \sup_{1 \le k \le n} |a_k| \le 1. \ \square$$

Теорема 2 (основное тождество для спектральной меры). Для любой ограниченной борелевской функции f на $\sigma(A)$ имеет место соотношение

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f \, d\mu_A.$$

Доказательство. Для случая кусочно-постоянных функций требуемое соотношение уже было доказано в лемме 1. Пусть теперь f – ограниченная борелевская функция и последовательность кусочно-постоянных функций f_n сходится к f равномерно на $\sigma(A)$. Тогда

$$\|f_n(A) - f(A)\| = \|(f_n - f)(A)\| \le \sup_{t \in \sigma(A)} |(f_n - f)(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

то есть $f_n(A) \to f(A)$. С другой стороны, согласно теореме о равномерном пределе (теорема 2 п. 13.4.2), $f_n(A) = \int_{\sigma(A)} f_n \, d\mu_A \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{\sigma(A)} f d\mu_A$. Теорема доказана. $\square$

Следствие. $A = \int_{\sigma(A)} t \, d\mu_A(t)$.

Если у оператора есть полная система собственных векторов (то есть матрица оператора диагонализуема), то структура оператора полностью проясняется после вычисления этих собственных векторов. Для операторов, часто встречающихся в различных задачах, оказывается весьма разумным один раз провести, пусть даже и непростую, работу по нахождению собственных векторов, с тем чтобы потом многократно применять результаты этого исследования. Спектральная мера и интегральные разложения по этой мере играют ту же роль для общих самосопряжённых операторов, что и разложения по собственным векторам для диагонализуемых операторов.

13.4.4. Упражнения: свойства спектральной меры

1. Все значения спектральной меры – это операторы ортогонального проектирования (так называемые *спектральные проекторы*).
2. $\mu_A(\sigma(A)) = I$.
3. Если оператор T коммутирует с A, то спектральные проекторы оператора A коммутируют с T.
4. Образ любого спектрального проектора есть инвариантное подпространство для A.
5. $\int\limits_{\sigma(A)} f_1 d\mu_A \cdot \int\limits_{\sigma(A)} f_2 d\mu_A = f_1(A) f_2(A) = (f_1 f_2)(A) = \int\limits_{\sigma(A)} (f_1 f_2) d\mu_A$, в частности, $\mu_A(D_1)\mu_A(D_2) = \mu_A(D_1 \cap D_2)$.
6. Отметим, что последнее свойство выглядит весьма необычно: скажем, для регулярного числового борелевского заряда μ на компакте оно может быть выполнено (докажите это в качестве упражнения), только если μ – вероятностная мера, сосредоточенная в одной точке.
7. Обозначим через X образ оператора $\mu_A(D)$. Доказать, что $\sigma\left(A|_X\right) \subset \overline{D}$.
8. Точка $\lambda \in \sigma(A)$ будет собственным числом оператора A в том и только том случае, если $\mu_A(\{\lambda\}) \neq 0$.
9. Спектральная мера для оператора с бесконечным спектром не обладает свойством счётной аддитивности в смысле сходимости по норме. В то же время поточечная счётная аддитивность имеет место.
10. Пусть A – диагонализуемый оператор. Доказать, что для любого множества $D \subset \sigma(A)$ образом проектора $\mu_A(D)$ будет замыкание линейной оболочки множества тех собственных векторов оператора A, собственные числа которых лежат в D.
11. Пусть A – оператор умножения в $L_2[0,1]$ на функцию $g(t) = t$, $(Af)(t) = tf(t)$. Доказать, что для любого множества $D \subset \sigma(A)$ образом проектора $\mu_A(D)$ будет множество всех функций из $L_2[0,1]$, обращающихся в ноль за пределами множества D.
12. Доказать, что оператор $\mu_A(\{0\})$ есть ортопроектор на ядро оператора A.
13. Доказать, что множество обратимых операторов в $L(H)$ связно.

13.4.5. Линейные уравнения

Сохраним обозначения предыдущего параграфа: A – самосопряжённый оператор, μ_A – его спектральная мера.

Лемма 1. Обозначим через P ортопроектор $\mu_A(\sigma(A) \setminus \{0\})$. Тогда $PA = A$.

Доказательство. Равенство $t \cdot \mathbf{1}_{\sigma(A)\setminus\{0\}}(t) = t$ выполнено всюду на $\sigma(A)$. Осталось подставить в равенство оператор A. □

Следствие. Для разрешимости уравнения $Ax = b$ необходимо, чтобы элемент b подчинялся условию $Pb = b$.

Доказательство. $Pb = PAx = Ax = b$. □

Если заметить, что оператор $Q = I - P = \mu_A(\{0\})$ будет ортопроектором на ядро оператора A, то условие $Pb = b$ может быть записано в более привычном виде: $b \perp KerA$.

Лемма 2. Пусть f_n – неубывающая последовательность ограниченных борелевских функций, поточечно сходящаяся на $\sigma(A)\setminus\{0\}$ к функции $1/t$. Тогда последовательность операторов $Af_n(A)$ сходится поточечно к оператору P из предыдущей леммы.

Доказательство. Следует применить теорему 5 п. 13.3.1. □

Теорема 1. Пусть f_n – неубывающая последовательность ограниченных борелевских функций, поточечно сходящаяся на $\sigma(A)\setminus\{0\}$ к функции $1/t$, а $b \in H$ элемент пространства, подчиняющийся условию $Pb = b$. Для разрешимости уравнения $Ax = b$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность элементов $f_n(A)(b)$ сходилась. При этом предел последовательности будет одним из решений уравнения.

Доказательство. Пусть уравнение $Ax = b$ разрешимо и x_0 – одно из решений. Тогда, по лемме 2, $f_n(A)(b) = f_n(A)(Ax_0) = Af_n(A)x_0 \to Px_0$, и сходимость доказана. Пусть, обратно, последовательность $f_n(A)(b)$ сходится к некоторому элементу x_0. Тогда ввиду той же леммы $Ax_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Af_n(A)(b) = Pb = b$. □

Отметим, что если оператор A инъективен, то $P = I$ и условие $Pb = b$ выполнено автоматически. Далее, если оператор A обратим, то ноль не лежит в спектре, и функция $1/t$ непрерывна на $\sigma(A)$. Соответственно, в качестве f_n можно взять равномерно сходящуюся последовательность полиномов, и скорость сходимости элементов $f_n(A)(b)$ к решению будет оцениваться скоростью сходимости многочленов f_n (никакая монотонность последовательности f_n в этом случае не будет нужна). Если оператор задан явным выражением, то столь же явно можно выписать и многочлены от этого оператора. Таким образом, теорема 1 в случае обратимого оператора A даёт вполне реальный способ приближённого решения уравнения $Ax = b$. Разумеется, чем ниже степень многочлена, тем легче вычислить многочлен от оператора. Поэтому в качестве f_n здесь лучше всего брать многочлены наилучшего приближения функции $1/t$ на $\sigma(A)$.

Гораздо труднее задача приближённого решения уравнения $Ax = b$ в случае необратимого оператора. Эта задача относится к классу так называемых «некорректных задач»: сколь угодно малым возмущением правой части можно нарушить разрешимость уравнения или же сильно изменить решение. Поскольку при приближённых вычислениях обычно все исходные данные также известны лишь приближённо, проблема оказывается весьма существенной. Помочь в решении задачи может использование априорной, не содержащейся в уравнении, информации о решении. При этом в любом случае точность решения зависит от величины погрешности в правой части уравнения, и устремление в последовательности $f_n(A)(b)$ индекса к бесконечности не даёт сходимости к решению. Более того, как правило, аппроксимирующая последовательность приближается к решению лишь до какого-то момента, затем же её поведение уже никакого отношения к истинному решению не имеет. Использование априорной информация для нахождения разумного номера приближения – это одна из возможных идей *регуляризации некорректной задачи*. Подробнее об этом предмете можно прочитать в монографии Тихонова и Арсенина [Т-А].

Упражнения

1. Каким должен быть спектр оператора A, чтобы существовала последовательность f_n, подчиняющаяся условиям леммы 2 и теоремы 1?
2. Используя упражнения 7, 8 п. 13.4.2 и поточечную счётную аддитивность спектральной меры (упражнение 9 п. 13.4.4), заменить условие монотонности в теореме 1 условием равномерной ограниченности на спектре оператора A последовательности $tf_n(t)$.
3. Пусть $\mu : \Sigma \to X$ – векторная мера. Множество $D \in \Sigma$ называется пренебрежимым относительно меры μ, если $\|\mu\|(D) = 0$. Равносильна ли пренебрежимость множества равенству $\mu(D) = 0$? Изменится ли ответ, если μ – спектральная мера самосопряженного оператора?
4. Доказать теорему 1 с заменой поточечной сходимости функций f_n на сходимость почти всюду по мере μ_A.
5. Будет ли связным множество необратимых операторов в $L(H)$?

13.5. Комментарии к упражнениям

Параграф 13.1.1

Упражнение 4. Для выполнения формулы дифференцирования $\left(e^{f(t)}\right)' = f'(t)e^{f(t)}$ достаточно, чтобы все значения функции f попарно коммутировали. В частности, это условие выполнено, если $f(t) = A \cdot t$, где $A \in L(X)$ – фиксированный оператор. В этом случае дифференциальное уравнение $y' = f'(t)y$ превращается в уравнение с постоянными коэффициентами $y' = Ay$.

Параграф 13.1.5

Упражнение 3. По условию, $B^2 = A$, следовательно, B коммутирует с A. Тогда B коммутирует и с $\sqrt{A}$. Имеем $\left(B - \sqrt{A}\right)\left(B + \sqrt{A}\right) = B^2 - A = 0$. Рассмотрим подпространство $X \subset H$ – замыкание образа оператора $B + \sqrt{A}$. Равенство $\left(B - \sqrt{A}\right)\left(B + \sqrt{A}\right) = 0$ означает, что на X оператор $B - \sqrt{A}$ равен нулю. Осталось доказать, что $B - \sqrt{A}$ равен нулю на $X^{\perp}$. Ввиду самосопряжённости оператора $B + \sqrt{A}$ ортогональное дополнение к образу – это ядро: $X^{\perp} = \mathrm{Ker}(B + \sqrt{A})$. Снова ввиду коммутативности $\mathrm{Ker}(B + \sqrt{A})$ – инвариантное подпространство для операторов B и $\sqrt{A}$. Так как B и $\sqrt{A}$ – положительные операторы и на $X^{\perp}$ оператор $B + \sqrt{A}$ равен нулю, то $B = \sqrt{A} = 0$ на $X^{\perp}$ (упражнение 5 п. 12.4.6). То есть оператор $B - \sqrt{A}$ действительно равен нулю на $X^{\perp}$.

Параграф 13.2.3

Упражнение 5. См. упражнение 3 п. 13.1.5 и его решение. Использовали этот факт мы в самом начале параграфа при переходе от равенства $T^*T = A^2$ к равенству $A = |T|$.

Параграф 13.3.2

Упражнение 1. Воспользоваться тем, что это свойство уже доказано для непрерывных функций от оператора.

Упражнение 2. Согласно упражнению 1, A коммутирует и с $g(B)$. Снова применяя упражнение 1, но теперь уже к операторам $g(B)$ и A, получим требуемое утверждение. □

Параграф 13.4.4

Упражнение 1. Равенство $(\mathbf{1}_{\Delta})^2 = \mathbf{1}_{\Delta}$ означает, что $\mu_A(\Delta)$ – проектор; ввиду самосопряжённости, $\mu_A(\Delta)$ – ортопроектор.

Упражнение 3. Воспользоваться упражнением 1 п. 13.3.2.

Упражнение 4. Применить упражнение 3 и теорему п. 11.1.6.

Упражнения 7 и 8. Применить рассуждения из теоремы 1 п. 13.1.5.

Упражнение 9. Поточечная счётная аддитивность следует из теоремы 5 п. 13.3.1.

Упражнение 13. Пусть $T \in L(H) -$ обратимый оператор, $T = e^{iA}|T|$ – его полярное разложение (см. п. 13.2.3 и упражнение 24 п. 13.3.2). Определим непрерывную кривую $F:[0,1] \to L(H)$ формулой $F(t) = e^{itA}|T|$. Эта кривая проходит только через обратимые операторы и связывает оператор $|T|$ с оператором T. Далее, кривая $G:[0,1] \to L(H)$, определяемая равенством $G(t) = (1-t)|T| + tI$, свяжет $|T|$ с единичным оператором. То есть в множестве обратимых операторов любой элемент может быть соединён непрерывной кривой с единичным оператором.

14. Операторы в L_p

На протяжении этой главы (Ω, Σ, μ) будет пространством с мерой (конечной или σ-конечной), а параметр p – подчиняться условию $1 \le p \le \infty$. Для удобства дальнейших применений к рядам Фурье и интегралу Фурье пространство $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ будет рассматриваться как пространство комплекснозначных функций. Отметим, что в большинстве вопросов теории пространств L_P отличие между вещественным и комплексным случаями несущественно.

14.1. Линейные функционалы в L_p

Основная задача, стоящая перед нами в этом разделе, – это доказательство теоремы об общем виде линейного функционала в L_P.

14.1.1. Неравенство Гёльдера

Определение. Для любого $1 < p < \infty$ сопряжённым показателем называется число $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Для $p = 1$ сопряжённый показатель p' полагают равным $+\infty$, а для $p = +\infty$ полагают $p' = 1$.

Величины p и p' связаны соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Отметим, что $(p')' = p$, и что если $1 \le p \le 2$, то $2 \le p' \le \infty$, и, наконец, $2' = 2$.

Лемма. Для любых скаляров $a, b \ge 0$ и $1 < p < \infty$ выполнено неравенство

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{1}$$

Доказательство. Левая часть неравенства (1) равна площади прямоугольника $[0,a] \times [0,b]$, а слагаемые, стоящие в правой части, равны соответственно площадям фигур $S_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le x^{p-1}\}$ и $S_2 = \{(x,y) : 0 \le y \le b, 0 \le x \le y^{p'-1}\}$. Ввиду равенства $p' - 1 = \dfrac{1}{p-1}$ границы $y = x^{p-1}$ и $x = y^{p'-1}$ этих фигур проходят по одной и той же кривой. Остаётся заметить, что $[0,a] \times [0,b] \subset S_1 \cup S_2$ (соответствующий рисунок предлагаем читателю сделать самостоятельно). □

Теорема. Пусть $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда $fg \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и имеет место следующее *неравенство Гёльдера*: $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Более подробная запись: $\int\limits_\Omega |fg| d\mu \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega |g|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p'}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $1 < p < \infty$. Простые случаи $p = 1, \infty$ оставим читателю. Подставив в неравенство (1) $|f(t)|$ вместо a и $|g(t)|$ вместо b, получим оценку

$$|f(t)g(t)| \le \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^{p'}}{p'}. \tag{2}$$

То есть измеримая функция fg имеет интегрируемую мажоранту и, следовательно, сама интегрируема. Далее, неравенство Гёльдера устойчиво по отношению к умножению функций f и g на скаляры. Поэтому его достаточно доказывать для случая $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Воспользуемся неравенством (2):
$\|fg\|_1 = \int\limits_\Omega |fg| d\mu \le \int\limits_\Omega \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'} \right) d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}$. □

Упражнения

1. Выведите из неравенства Гёльдера неравенство Коши – Буняковского в L_2.
2. Выведите как частный случай неравенства Гёльдера следующее неравенство Гёльдера для рядов: $\sum\limits_{k=1}^\infty |a_k b_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^\infty |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^\infty |b_k|^{p'} \right)^{1/p'}$.
3. Опишите те пары функций (f, g), для которых неравенство Гёльдера превращается в равенство.
4. В доказательстве неравенстве Гёльдера условие σ-конечности меры не использовалось и, следовательно, не существенно.

14.1.2. Связь между L_p при различных p

Теорема 1. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$. Тогда $L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \supset L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и

$$\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2} \mu(\Omega)^{1/p_1 - 1/p_2} \tag{3}$$

для любого $f \in L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Пусть $p_2 < \infty$, $f \in L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для оценки сверху выражения $\int\limits_\Omega |f|^{p_1} d\mu$ воспользуемся неравенством Гёльдера с показателем $p = \frac{p_2}{p_1}$ и, соответственно, $p' = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$:

$$\int\limits_\Omega |f|^{p_1} d\mu = \int\limits_\Omega |f|^{p_1} \cdot 1 d\mu \le \left(\int\limits_\Omega |f|^{p_1 p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_\Omega |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{p_1}{p_2}} (\mu(\Omega))^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

. Остаётся возвести обе части неравенства в степень $1/p_1$.

Случай $p_2 = \infty$ разбирается совсем просто. Пусть $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда $|f(t)| \le \|f\|_\infty$ для почти всех значений $t \in \Omega$. Следовательно,

$$\left(\int\limits_\Omega |f|^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \le \|f\|_\infty \left(\int\limits_\Omega d\mu \right)^{1/p_1} = \|f\|_\infty \mu(\Omega)^{1/p_1} . \square$$

Отметим, что проще всего неравенство (3) будет выглядеть в случае вероятностного пространства (Ω, Σ, μ), когда $\mu(\Omega) = 1$ и, соответственно, $\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2}$.

Следствие 1. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, $f_n, f \in L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $\|f_n - f\|_{p_2} \to 0$. Тогда $\|f_n - f\|_{p_1} \to 0$. Другими словами, из сходимости в L_p с бóльшим p следует сходимость в L_p с меньшим p.

Следствие 2. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, $A \subset L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и A замкнуто в метрике пространства $L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда A замкнуто и в метрике пространства $L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Теорема 2. Пусть $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$. Тогда $l_{p_1} \subset l_{p_2}$ и

$$\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} \tag{4}$$

для любого $x \in l_{p_1}$.

Доказательство. Учитывая связь между единичным шаром и нормой пространства, нам нужно доказать включение $B_{l_{p_1}} \subset B_{l_{p_2}}$. Пусть $x = (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in B_{l_{p_1}}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^{p_1} < 1$. В частности, $|x_k| < 1$ и $|x_k|^{p_2} \le |x_k|^{p_1}$ при всех k. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^{p_2} \le \sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^{p_1} < 1$, то есть $x \in B_{l_{p_2}}$. Этим разобран случай $p_2 < \infty$. При $p_2 = \infty$ неравенство (4) принимает вид $\sup\limits_k |x_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}$ и следует из того, что сумма положительных слагаемых больше любого из слагаемых. □

Хотя сходимость в L_p и нельзя удовлетворительным образом описать в терминах сходимостей, использовавшихся в теории меры и интеграла,[1] некоторая связь с этими известными нам видами сходимости всё-таки имеется. Следующая теорема поможет лучше понять, как устроена сходимость в L_p.

Теорема 3. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой (конечной или σ-конечной), $p \in [1, \infty)$, $f_n, f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда

(i) если $f_n \to f$ в L_p-метрике, то: (a) на любом множестве $A \in \Sigma$ конечной меры $f_n \to f$ по мере; и (b) существует подпоследовательность последовательности f_n, сходящаяся к f почти всюду на Ω.

(ii) если $f_n \to f$ почти всюду на Ω и у всех f_n существует общая мажоранта $g \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, то $f_n \to f$ в L_p-метрике.

Доказательство. Часть (a) утверждения (i) следует из неравенства Чебышева (лемма п. 4.3.1). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ введём обозначение $B_{n,\varepsilon} = \{t \in A : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}$. Применив неравенство Чебышева к функции $|f_n - f|^p$, большей на множестве $B_{n,\varepsilon}$ числа ε^p, получим оценку

$$\mu(B_{n,\varepsilon}) \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_A |f_n - f|^p \, d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

что и означает сходимость по мере.

Докажем часть (b). Если $\mu(\Omega) < \infty$, то, согласно (a), $f_n \to f$ по мере на всём Ω, и остаётся воспользоваться тем, что сходящаяся по мере последовательность содержит подпоследовательности, сходящиеся почти всюду. Пусть теперь Ω – множество σ-конечной меры. Разобьем Ω в дизъюнктное объединение множеств Ω_m, $m = 1, 2, \ldots$, конечной меры. Последовательно используя на каждом из Ω_m теорему о выделении сходящейся почти всюду подпоследовательности из последовательности, сходящейся по мере, построим бесконечные множества индексов

[1] За исключением L_∞, где последовательность f_n сходится в том и только том случае, если существует множество меры 0, за пределами которого f_n сходится равномерно.

$\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset ...$ таким образом, чтобы на каждом из Ω_m последовательность $\{f_n\}_{n \in N_m}$ сходилась почти всюду. Выбрав диагональную подпоследовательность n_m (то есть такую, что $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$ и $n_2 > n_1$, $n_3 \in N_3$ и $n_3 > n_2$ и т. д.), получим подпоследовательность f_{n_m}, сходящуюся почти всюду на каждом из Ω_j, то есть сходящуюся почти всюду на $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Наконец, (ii) – это очевидное следствие теоремы Лебега о мажорированной сходимости. □

14.1.3. Упражнения

1. Пусть $p_0 \in [1, \infty)$ – фиксированное число, $x \in l_{p_0}$. Тогда $\|x\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \|x\|_\infty$. Этим будут в каком-то смысле обоснованы обозначения $\|x\|_\infty$ и l_∞.
2. Пусть $p_0 \in [1, \infty)$ – фиксированное число, $x \in l_{p_0}$. Тогда при $p \in [p_0, \infty)$ величина $\|x\|_p$ непрерывно зависит от p.
3. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ в случае конечной меры μ.
4. В теоремах 1 и 2 нами доказано, что в случае конечной меры пространство $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ убывает как множество с ростом p, а пространство l_p (частный случай $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ с бесконечной мерой μ) возрастает с ростом p. Покажите, что для $L_p[0, \infty)$ ни возрастание, ни убывание с ростом p не имеют места.
5. Покажите, что $l_{p_1} \neq l_{p_2}$ при $p_1 \neq p_2$, то есть что возрастание l_p как множества с ростом p является строгим.
6. Аналогичное утверждение для $L_p[0,1]$.
7. Пусть $p_0 \in (1, \infty)$. Докажите, что $L_{p_0}[0,1] \neq \bigcap_{p < p_0} L_p[0,1]$ и $L_{p_0}[0,1] \neq \bigcup_{p > p_0} L_p[0,1]$.
8. $l_{p_0} \neq \bigcap_{p > p_0} l_p$ и $l_{p_0} \neq \bigcup_{p < p_0} l_p$.
9. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой. Тогда $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ – это плотное подмножество в любом из $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

10. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой. Тогда множество конечнозначных измеримых функций плотно в любом из $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

11. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой. Тогда множество конечнозначных измеримых функций с носителями конечной меры плотно в любом из $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $p \in [1, \infty)$. Если $\mu(\Omega) = \infty$, то в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ это множество уже не плотно.

12. Множество кусочно-постоянных функций $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{(a_k, b_k)}$ плотно при $p \in [1, \infty)$ как в любом L_p на отрезке, так и в L_p на оси.

13. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой, Σ – счётно-порождённая σ-алгебра (то есть существует счётное семейство множеств, порождающее в смысле определения 1 п. 2.1.2 эту σ-алгебру) и $p \in [1, \infty)$, Тогда $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ – это сепарабельное нормированное пространство.

14. Пространство $L_\infty[0,1]$ несепарабельно.

14.1.4. Функционал интегрирования с весом

Пусть $1 \le p \le \infty$, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Определим на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *функционал интегрирования с весом* W_g, действующий по правилу $W_g(f) = \int_\Omega fg d\mu$. Согласно теореме п. 14.1.1, для любого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ произведение fg интегрируемо, то есть функционал W_g корректно определён. Линейность этого функционала также очевидна.

Теорема. При $g \in L_{p'}$ функционал W_g непрерывен на L_p, и $\|W_g\| = \|g\|_{p'}$.

Доказательство. Неравенство $|W_g(f)| \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$, а с ним и оценка $\|W_g\| \le \|g\|_{p'}$ следуют из неравенства Гёльдера. Докажем обратную оценку. Ввиду однородности достаточно изучить случай $\|g\|_{p'} = 1$.

Пусть $1 < p < \infty$. Рассмотрим функцию $f = |g|^{p'/p} e^{-i \arg g}$. Эта функция лежит в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, и $\|f\|_p = 1$. Следовательно,

$$\|W_g\| \ge |W_g(f)| = \int_\Omega |g|^{p'/p+1} d\mu = \int_\Omega |g|^{p'} d\mu = 1 = \|g\|_{p'}.$$

При $p = \infty$ в предыдущем рассуждении в качестве f нужно взять $e^{-i \arg g}$. Несколько сложнее случай $p = 1$. В этом случае функционал W_g, вообще говоря, не достигает своей верхней грани на единичной сфере пространства $L_p = L_1$, и для оценки нормы снизу недостаточно подставить одну конкретную удачно выбранную функцию. Итак, разберём этот последний оставшийся случай. Так как $p = 1$, $p' = +\infty$, и, согласно нашему предположению, $\|g\|_\infty = 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Множество $|g|_{>1-\varepsilon} = \{t \in \Omega : |g(t)| > 1 - \varepsilon\}$ имеет положительную меру (иначе $\|g\|_\infty$ не превосходила бы $1 - \varepsilon$). Выберем в множестве $|g|_{>1-\varepsilon}$ измеримое подмножество Δ конечной ненулевой меры. Рассмотрим функцию $f = \frac{1}{\mu(\Delta)} \mathbf{1}_\Delta e^{-i \arg g} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Так как $\|f\|_1 = 1$, имеем:

$$\|W_g\| \geq |W_g(f)| = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Omega \mathbf{1}_\Delta |g| d\mu \geq \frac{1-\varepsilon}{\mu(\Delta)} \int_\Delta d\mu = 1 - \varepsilon = \|g\|_\infty - \varepsilon .$$

Остаётся устремить в полученной оценке ε к нулю. □

Упражнения

1. Приведите пример такой функции $g \in L_\infty[0,1]$, что соответствующий функционал W_g не достигает своей верхней грани на $S_{L_1[0,1]}$. Дайте полное описание тех $g \in L_\infty[0,1]$, для которых W_g достигает на $S_{L_1[0,1]}$ своей нормы.

2. Какое свойство меры μ, вытекающее из σ-конечности, использовалось в доказательстве вышеприведенной теоремы? Где именно? Какая часть утверждения теоремы верна для любой счётно-аддитивной (в том числе и не σ-конечной) меры?

Как будет показано ниже, при $1 \leq p < \infty$ нет никаких других непрерывных линейных функционалов на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, кроме функционалов W_g интегрирования с весом $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. При $p = \infty$ ситуация, как видно из нижеприведенных упражнений, изменяется кардинальным образом: большая часть функционалов на L_∞ не является функционалами интегрирования с весом.

3. Пусть ν – борелевский заряд (конечный, так как, по принятой нами аксиоматике, заряды принимают только конечные значения) на $[0,1]$, $\mathbf{F}_\nu$ – функционал на $C[0,1]$, задаваемый формулой $\mathbf{F}_\nu(f) = \int_K f d\nu$. Продолжим функционал $\mathbf{F}_\nu$ по теореме Хана – Банаха на всё $L_\infty[0,1]$ до некоторого функционала $\widetilde{\mathbf{F}}_\nu$. Доказать, что функционал $\widetilde{\mathbf{F}}_\nu$ может иметь вид W_g, только если заряд ν абсолютно непрерывен по отношению к мере Лебега.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ σ-алгебру $2^{[0,1]}$ всех подмножеств и зададим меру μ следующим образом: мера любого конечного множества равна числу элементов множества, а мера любого бесконечного множества равна $+\infty$. Пространство $L_1([0,1],2^{[0,1]},\mu)$ принято обозначать $l_1[0,1]$. Другими словами, элементы пространства $l_1[0,1]$ – это функции со счётными носителями, для которых $\|f\| = \sum\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty$. Докажите, что:

4. Сопряжённое пространство $l_1[0,1]^*$ имеет мощность, большую мощности континуума.
5. Пространство l_∞ имеет подпространство, изометричное $l_1[0,1]$.
6. Сопряжённое пространство $(l_\infty)^*$ имеет мощность, большую мощности континуума.
7. Множество функционалов на l_∞ вида «интеграл с весом» (в данном случае «сумма с весом») – имеет мощность континуума.

Как было доказано М. И. Кадецом в 1967 году, любые два сепарабельных бесконечномерных банаховых пространства гомеоморфны как топологические пространства (не путать с изоморфизмом!). Следующее упражнение даёт пример того, как могут строиться нелинейные гомеоморфизмы банаховых пространств.

8. Пусть $1 \le p_1 < p_2 < \infty$. Рассмотрим отображение Мазура (S. Mazur) $M : L_{p_1}[0,1] \to L_{p_2}[0,1]$, задаваемое формулой $M(g) = |g|^{p_1/p_2} e^{i\arg g}$. Докажите, что это отображение осуществляет (нелинейный) гомеоморфизм пространств $L_{p_1}[0,1]$ и $L_{p_2}[0,1]$, то есть что отображение M биективно и как M, так и M^{-1}, непрерывны.

14.1.5. Общий вид линейного функционала в L_p

Теорема 1. Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда любой линейный функционал $G \in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)^*$ представим единственным образом в виде функционала W_g интегрирования с весом, где функция $g \in L_{p'}(\Omega,\Sigma,\mu)$. При этом $\|G\| = \|g\|_{p'}$.

Доказательство. Формула для нормы функционала W_g уже доказана в предыдущем параграфе. Осталось доказать существование и единственность искомой функции $g \in L_{p'}(\Omega,\Sigma,\mu)$. Начнём с единственности. Пусть $G = W_{g_1} = W_{g_2}$. Тогда $W_{g_1-g_2} = W_{g_1} - W_{g_2} = 0$ и

$\|g_1 - g_2\|_{p'} = \|W_{g_1 - g_2}\| = 0$, то есть элементы g_1 и g_2 пространства $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$ равны между собой.

Доказательство существования требует определённых усилий и будет разбито в несколько лемм. При этом вначале мы разберём частный случай конечной меры. Общий случай будет сведён к частному с помощью приёма, уже встречавшегося нам в п. 4.6.2.

Лемма 1. Пусть $1 \le p < \infty$, $G \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ и $\mu(\Omega) < \infty$. Тогда существует такая функция $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, что для любого $\Delta \in \Sigma$ выполнено соотношение $G(\mathbf{1}_\Delta) = \int\limits_\Omega \mathbf{1}_\Delta g d\mu$.

Доказательство. Как читатель наверняка догадался, рассуждение будет базироваться на теореме Радона – Никодима.

Зададим на σ-алгебре Σ функцию множества ν по следующему правилу: $\nu(\Delta) = G(\mathbf{1}_\Delta)$. Ввиду линейности функционала G и равенства $\mathbf{1}_{\Delta_1} + \mathbf{1}_{\Delta_2} = \mathbf{1}_{\Delta_1 \cup \Delta_2}$, выполненного для любой дизъюнктной пары $\Delta_1, \Delta_2 \in \Sigma$, функция множества ν конечно-аддитивна. Проверим счётную аддитивность. Для этого, согласно упражнению 5 п. 7.1.1, нужно доказать, что для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$, образующих убывающую цепочку множеств с пустым пересечением, $\lim\limits_{k \to \infty} \nu(A_k) = 0$. Действительно, в этом случае $\|\mathbf{1}_{A_k}\|_p = (\mu(A_k))^{1/p} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, следовательно, ввиду непрерывности функционала G $\nu(A_k) = G(\mathbf{1}_{A_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Итак, ν – это заряд. Далее, неравенство $|\nu(\Delta)| \le \|G\| \cdot \|\mathbf{1}_\Delta\|_p = \|G\| (\mu(\Delta))^{1/p}$ означает абсолютную непрерывность заряда ν по отношению к мере μ. Требуемую функцию $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ определим как производную Радона – Никодима заряда ν по мере μ. Тогда $G(\mathbf{1}_\Delta) = \nu(\Delta) = \int\limits_\Delta g d\mu = \int\limits_\Omega \mathbf{1}_\Delta g d\mu$. □

Лемма 2. В условиях предыдущей леммы равенство

$$G(f) = \int\limits_\Omega f g d\mu \tag{5}$$

выполнено для любой функции $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Обозначим через F линейный функционал на $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, действующий по правилу $F(f) = G(f) - \int\limits_\Omega f g d\mu$. Так как все функции вида $\mathbf{1}_\Delta$, $\Delta \in \Sigma$ лежат в $\operatorname{Ker} F$, то, следовательно, $\operatorname{Ker} F$ содержит и все функции вида $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{\Delta_k}$, $\Delta_k \in \Sigma$ (все конечнозначные функции). Таким образом (упражнение 10 п. 14.1.3), ядро функционала F плотно в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Далее,

$$|F(f)| \le \|G\| \|f\|_p + \|f\|_\infty \|g\|_1 \le \|G\| \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{1/p} + \|f\|_\infty \|g\|_1 = \left(\|G\| (\mu(\Omega))^{1/p} + \|g\|_1\right) \|f\|_\infty,$$

то есть $\|F\| \le \|G\| \cdot (\mu(\Omega))^{1/p} + \|g\|_1 < \infty$ и функционал F непрерывен. Непрерывный функционал, обращающийся в ноль на плотном множестве, равен нулю на всём пространстве. □

Лемма 3. Построенная функция g принадлежит пространству $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доказательство. Воспользовавшись предыдущей леммой и непрерывностью функционала G в норме $\| \ \|_p$, получим, что для любой функции $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеет место оценка

$$\left| \int_\Omega f g d\mu \right| = |G(f)| \le \|G\| \cdot \|f\|_p . \tag{6}$$

Рассмотрим вначале случай $p > 1$ и, соответственно, $p' \ne \infty$. Зафиксируем $N > 0$ и подставим в (6) функцию $f = |g|^{p'-1} \mathbf{1}_{|g|_{<N}} \cdot e^{-i \arg g}$. Имеем

$$\int_{|g|_{<N}} |g|^{p'} d\mu = \left| \int_\Omega f g d\mu \right| \le \|G\| \cdot \|f\|_p = \|G\| \cdot \left(\int_{|g|_{<N}} |g|^{(p'-1)p} d\mu \right)^{1/p} = \|G\| \cdot \left(\int_{|g|_{<N}} |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p}$$

Разделив обе части неравенства на $\left(\int_{|g|_{<N}} |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p}$ и возведя в степень p', получим неравенство $\int_{|g|_{<N}} |g|^{p'} d\mu \le \|G\|^{p'}$. При устремлении параметра N к бесконечности последняя оценка переходит в неравенство $\int_\Omega |g|^{p'} d\mu \le \|G\|^{p'}$, означающее, в частности, что $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Перейдём к случаю $p = 1$ и $p' = \infty$. Предположим, что $g \notin L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда для любого $N > 0$ множество $|g|_{>N}$ имеет ненулевую меру. Подставим в (6) функцию $f = \mathbf{1}_{|g|_{>N}} e^{-i \arg g}$:

$$N\mu(|g|_{>N}) \le \int_{|g|_{>N}} |g| d\mu = \left|\int_\Omega fg d\mu\right| \le \|G\| \cdot \|f\|_1 = \|G\| \cdot \mu(|g|_{>N}).$$

Получаем, что любого $N > 0$ выполнено неравенство $N \le \|G\|$. Противоречие. □

Завершение доказательства теоремы. Итак, в случае конечной меры μ мы доказали существование такой функции $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, что для всех $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ выполнено соотношение (5), которое можно записать в виде $G(f) = W_g(f)$. Таким образом, G и W_g – это непрерывные линейные функционалы на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, совпадающие на плотном (упражнение 9 п. 14.1.3) подмножестве $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Следовательно, $G(f) = W_g(f)$ для всех $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Перейдём к случаю σ-конечной меры μ. Зафиксируем некое представление множества Ω в виде $\Omega = \coprod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, где $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ и $\Omega_n \in \Sigma$. Определим числа $a_n = 2^n \mu(\Omega_n)$. Введём на (Ω, Σ) новую меру μ_1 формулой $\mu_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B \cap \Omega_n)}{a_n}$. При таком определении тройка (Ω, Σ, μ_1) будет пространством с конечной мерой. Зададим на Ω функцию $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{\Omega_n}$. Напомним (п. 4.6.2), что функция f интегрируема на Ω по мере μ в том и только том случае, если функция $f \cdot h$ интегрируема на Ω по мере μ_1 и $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega fh d\mu_1$.

Определим линейный оператор $T : L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1) \to L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ формулой $Tf = f \cdot h^{-1/p}$. Оператор T осуществляет биективную изометрию пространств $L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ и $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$: $\|Tf\|^p = \int_\Omega |f|^p h^{-1} d\mu = \int_\Omega |f|^p d\mu_1 = \|f\|^p$. По функционалу $G \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ построим функционал $T^* G \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)^*$, действующий по правилу $(T^* G)(f) = G(Tf)$. Поскольку μ_1 – это конечная мера, функционал $T^* G$ попадает в условия уже доказанного частного случая теоремы: существует такая функция $g_1 \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu_1)$, что $(T^* G)(f) = \int_\Omega f g_1 d\mu_1$ для любого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$. Расшифруем это условие: для любого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$

выполнено соотношение $G(Tf) = \int\limits_{\Omega} fg_1 h d\mu = \int\limits_{\Omega} (Tf) \cdot g_1 h^{1/p'} d\mu$.

Переобозначим Tf через $\widetilde{f}$, а $g_1 h^{1/p'}$ через g. Тогда, как нам и нужно, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, и равенство $G(\widetilde{f}) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{f} g d\mu$, как мы того и желаем, выполнено для любого $\widetilde{f} \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. □

Замечание 1. Поскольку соответствие $g \to W_g$ осуществляет биективную изометрию пространств $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*$, функцию g принято отождествлять с порождённым ею функционалом W_g. Учитывая такое отождествление, теорему об общем виде линейного функционала в L_p, $1 \le p < \infty$, записывают в виде равенства $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Замечание 2. Ввиду равноправия показателей p и p' (формула $(p')' = p$) равенство $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \le p < \infty$, можно переписать в виде $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 < p \le \infty$. Поскольку сопряжённое пространство к любому нормированному пространству полно, отсюда следует, в частности, полнота пространств $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $1 < p \le \infty$.

Замечание 3. При $1 < p < \infty$ имеют место оба соотношения $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Сопоставив их, получаем при $1 < p < \infty$ соотношение $\left(L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*\right)^* = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Это свойство пространств, называемое *рефлексивностью*, играет важную роль в теории банаховых пространств, и ещё будет обсуждаться в последующих главах.

Замечание 4. Поскольку пространства l_p представляют собой частный случай пространств $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где роль интеграла функции играет сумма членов последовательности, получаем такую теорему об общем виде линейного функционала в l_p.

Теорема 2. Пусть $1 \le p < \infty$. Для любых $f = (f_1, f_2, ...) \in l_p$ и $g = (g_1, g_2, ...) \in l_{p'}$ выражение $W_g(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ корректно определено. При $g \in l_{p'}$ функционал W_g – это непрерывный линейный функционал на

l_p и $\|W_g\| = \|g\|_{p'}$. Далее, для любого линейного функционала $G \in l_p^*$ существует единственный элемент $g \in l_{p'}$, такой что $G = W_g$. □

Учитывая отождествление $g \to W_g$, теорему об общем виде линейного функционала в l_p при $1 \le p < \infty$ записывают в виде равенства $l_p^* = l_{p'}$.

Замечание 5. Хотя теорема об общем виде линейного функционала в L_p для случая $p = \infty$ уже не верна, первый шаг доказательства – введение на σ-алгебре Σ функции множества ν: $\nu(\Delta) = G(\mathbf{1}_\Delta)$ имеет смысл и для функционала $G \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)^*$. Основное отличие со случаем $p < \infty$ состоит в том, что ν будет лишь конечно-аддитивным, а не счётно-аддитивным зарядом. Поэтому, хотя условие абсолютной непрерывности $\mu(\Delta) = 0 \Rightarrow \nu(\Delta) = 0$ сохраняется, теорема Радона – Никодима уже не применима. Тем не менее, нетрудно доказать, что функция множества ν имеет конечную полувариацию и, согласно теореме 3 п. 13.4.2 (где был разобран даже более общий случай векторной меры ν), любая функция $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ будет ν-интегрируемой. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема об общем виде линейного функционала в L_∞: для любого функционала $G \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ существует единственный конечно-аддитивный ограниченный заряд $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$, обращающийся в ноль на μ-пренебрежимых множествах, порождающий функционал G по правилу $G(f) = \int_\Omega f d\nu$. Обратно, каждый такой заряд порождает по указанному правилу непрерывный функционал на $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Норма функционала G совпадает с полувариацией на Ω порождающего его заряда. □

14.1.6. Упражнения

1. Теорема об общем виде линейного функционала в L_2 может быть получена как частный случай теоремы об общем виде линейного функционала в L_p. В то же время L_2 – это гильбертово пространство, значит, там верна теорема об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве. Не будут ли эти две теоремы противоречить друг другу?
2. При $1 < p < \infty$ условие σ-конечности меры в теореме 1 излишне.
3. При $p = 1$ условие σ-конечности меры в теореме 1, хотя в принципе и можно ослабить, полностью отбросить невозможно. Покажите, что в

случае $\Omega = [0,1]$, $\Sigma = \mathfrak{B}$ и μ – считающей меры (то есть мера любого конечного множества равна числу элементов множества, а мера любого бесконечного множества равна $+\infty$), $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^* \neq L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. А именно, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ будет состоять из функционалов вида W_g, где g – любые ограниченные, а не только измеримые по Борелю ограниченные функции на $[0,1]$.

4. Восстановите подробности доказательства теоремы об общем виде линейного функционала в L_∞.

5. Докажите следующую теорему об общем виде линейного оператора на L_∞.

Пусть X – банахово пространство. Для любого линейного непрерывного оператора $T : L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to X$ существует единственная конечно-аддитивная ограниченная векторная мера $\nu : \Sigma \to X$, обращающаяся в ноль на μ-пренебрежимых множествах, порождающая оператор T по правилу $Tf = \int\limits_{\Omega} f d\nu$. Обратно, каждая такая векторная мера порождает по указанному правилу непрерывный оператор $T : L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to X$. Норма оператора T совпадает с полувариацией на Ω порождающей его векторной меры.

6. Пусть $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ – измеримая по Борелю функция двух переменных. Через $\widetilde{K}$ обозначим функцию $\widetilde{K}(t) = \int\limits_0^1 |K(t,x)| dx$. Покажите, что если $\|\widetilde{K}\|_\infty < \infty$, то выражение $(Tf(t))(x) = \int\limits_0^1 K(t,x) f(t) dt$ задаёт непрерывный линейный оператор $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ и $\|T\| \leq \|\widetilde{K}\|_\infty$. Этот оператор на $L_1[0,1]$ называется *оператором интегрирования с ядром* K.

7. В условиях предыдущего упражнения докажите, что $\|T\| = \|\widetilde{K}\|_\infty$.

8. Доказать, что в пространстве $L_1[0,1]$ каждый конечномерный оператор представим в виде оператора интегрирования с ядром.

9. Используя аппроксимацию компактного оператора конечномерными, докажите, что любой компактный оператор $T \in L(L_1[0,1])$ представим в виде оператора интегрирования с ядром.

10. Пусть $[a_n, b_n] \subset [0,1]$, $n = 1,2,\ldots$, образуют последовательность попарно не пересекающихся отрезков ненулевой длины. Тогда, если в качестве ядра взять $K = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k - a_k} \mathbf{1}_{[a_k, b_k] \times [a_k, b_k]}$, то оператор интегрирования с ядром K

в $L_1[0,1]$ не будет компактным оператором. Сравнить с упражнениями 8 п. 12.4.5. и 12 п. 12.4.3.

11. Пусть ядро из упражнения 6 подчиняется условию $\|\widetilde{K}\|_\infty < \infty$. Рассмотрим функции $K_t : [0,1] \to \mathbb{C}$, $K_t(x) = K(t,x)$. Если семейство функций $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$ образует предкомпакт в $L_1[0,1]$, то оператор интегрирования с ядром K в $L_1[0,1]$ будет компактным оператором.

12. Приведите пример оператора конечного ранга в $C[0,1]$, не имеющего представления в виде оператора интегрирования с ядром.

В свете доказанной теоремы об общем виде линейного функционала в L_p, если оператор T действует из L_p в L_r и $p, r \in [1,\infty)$, то сопряженный оператор следует рассматривать как оператор, действующий из $L_{r'}$ в $L_{p'}$. Для следующих операторов проверьте линейность и непрерывность и вычислите сопряженные операторы.

13. Оператор $j_{p,r}$ тождественного вложения пространства $L_p[0,1]$ в $L_r[0,1]$, где $r \le p$.

14. Оператор интегрирования с ядром в $L_p[0,1]$.

15. Оператор $T_g : L_p[0,1] \to L_1[0,1]$ умножения на функцию $g \in L_{p'}[0,1]$: $T_g(f) = f \cdot g$.

16. Оператор $S_g : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ композиции с монотонной непрерывной функцией $g : [0,1] \to [0,1]$: $S_g(f) = f \circ g$. При каком условии на g оператор действительно будет действовать из $L_1[0,1]$ в $L_1[0,1]$?

14.2. Преобразование Фурье на оси

Формально при определении оператора $T : X \to Y$ вначале должны быть заданы пространства X и Y и лишь затем определено, как действует оператор T на элементы пространства X. В реальной же жизни [2] часто всё происходит в обратном порядке: сначала возникает некое аналитическое выражение, которое естественно трактовать как линейный оператор, и лишь затем оно подгоняется под формальную схему. При этом, конечно, задание оператора данным аналитическим выражением получается неоднозначным, и в зависимости от выбора пространств X и Y получаются операторы с различными свойствами.

В настоящем разделе мы разберём один из таких примеров, где в качестве аналитического выражения берётся хорошо известный из курса анализа интеграл Фурье на оси.

---

[2] Интересно, в какой степени решение математических задач можно считать «реальной жизнью»?

14.2.1. δ-Образные последовательности и теорема Дини

В этом параграфе мы обсудим один полезный приём доказательства предельных теорем для интегральных выражений. Если отказаться от строгих формулировок, смысл этого приёма можно выразить так: если последовательность функций g_n стремится в некотором смысле к δ-мере, сосредоточенной в точке t_0, то для большого числа функций f выполнено предельное соотношение $\int\limits_{\Omega} f g_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0)$.

Определение 1. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с безатомной мерой (конечной или σ-конечной). Последовательность функций $g_n \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ называется *δ-обра́зной*, если существует такая возрастающая последовательность множеств $\Omega_m \in \Sigma$ конечной меры, что:

(i) $\mu\left(\Omega \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Omega_m\right) = 0;$

(ii) $\int\limits_{\Omega_m} g_n d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$ при любом $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\int\limits_{\Omega_m} h g_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любой интегрируемой на Ω_m функции h.

Замечание. Если g_n интегрируемы на всём Ω, то условие (ii) можно заменить более простым условием $\int\limits_{\Omega} g_n d\mu = 1$.

Определение 2. Пусть g_n – δ-обра́зная последовательность. Измеримая функция g называется *подходящим домножителем*, если она почти всюду отлична от нуля и $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n g\|_\infty = M < \infty$.

Теорема 1. Пусть g_n – δ-образная последовательность, f – интегрируемая функция на Ω и a – произвольный скаляр. Пусть, далее, существует такой подходящий домножитель g, что $\frac{f-a}{g} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда $\int\limits_{\Omega} f g_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Доказательство. Поскольку функция $\frac{f-a}{g}$ интегрируема на Ω, а $\|g_n g\|_\infty < \infty$, то и их произведение $(f-a)g_n$ – интегрируемая на Ω функция. Согласно условию (ii) определения 1,

$$\int_{\Omega} fg_n d\mu - a = \lim_{m\to\infty}\left(\int_{\Omega_m} fg_n d\mu - a\right) = \lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_m}(f-a)g_n d\mu = \int_{\Omega}\frac{f-a}{g}gg_n d\mu. \quad (1)$$

Воспользуемся абсолютной непрерывностью интеграла как функции множества. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем номер m таким образом, чтобы выполнялась оценка $\int_{\Omega\setminus\Omega_m}\left|\frac{f-a}{g}\right| d\mu < \varepsilon.$ Воспользуемся формулой (1) и тем, что по условию (iii) определения 1, $\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega_m}(f-a)g_n d\mu\right| = 0.$ Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{\Omega} fg_n d\mu - a\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{\Omega\setminus\Omega_m}\frac{f-a}{g}gg_n d\mu\right| \le M\varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε влечёт требуемое предельное соотношение. □

Напомним, что функция f на отрезке (a,b) (конечном или бесконечном) подчиняется условию Дини в точке $x_0 \in (a,b),$ если функция $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ интегрируема на каком-то отрезке вида $[-\varepsilon,+\varepsilon].$ Очевидно, если $f \in L_1(-\infty,\infty)$ подчиняется условию Дини в точке x_0, то $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \in L_1(-\infty,\infty).$ Отметим, что условие Дини – это не очень жёсткое требование. Скажем, дифференцируемость в точке x_0, условие Липшица или условие Гёльдера с показателем $p > 0$ налагают более серьёзные ограничения на поведение функции.

Теорема 2. Пусть $u \in L_1(-\infty,\infty)$ и подчиняется условию Дини в точке x. Тогда $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x+t)\frac{\sin Nt}{t}dt = u(x).$

Доказательство. Применим теорему 1 к $\Omega = \mathbb{R}$ с мерой Лебега, $f(t) = u(x+t)$, $g_N(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin Nt}{t}$, $\Omega_m = \left\{t \in \mathbb{R} : \frac{1}{N} \le |t| \le N\right\}$ и домножителем $g(t) = t$. При таком выборе аксиома (i) δ-образной последовательности очевидна, а аксиома (ii) следует из известной формулы $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-m}^{m}\frac{\sin t}{t}dt = 1,$ обычно приводимой в курсе комплексного анализа как одно из красивых приложений теории вычетов.[3] Проверим

[3] См., например, [Tit], п. 3.1.2.2.

выполнение для g_N аксиомы (iii). Пусть h – интегрируемая на Ω_m функция. Так как функция $\frac{1}{t}$ ограничена на Ω_m, $\frac{h(t)}{t}$ интегрируема на Ω_m. Для получения соотношения $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{\Omega_m} h(t)\frac{\sin Nt}{t}dt=0$ остаётся применить следствие 1 п. 10.4.3. Остальные условия теоремы 1 в нашем случае – это ограниченность синуса на оси и условие Дини. □

Применив теорему 1 с $\Omega_m=\Omega=[-\pi,\pi]$ к частным суммам ряда Фурье $(S_n f)(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\frac{\sin(n+1/2)\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau}d\tau$, легко получить следующий результат, сформулированный выше в п. 10.4.4, упражнение 3.

Теорема 3. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[-\pi,\pi]$ и подчиняется условию Дини в точке $x_0\in[-\pi,\pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$. □

Упражнения

1. Где в формулировке или доказательстве теоремы 1 играет роль условие $g_n\in L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ из определения 1?
2. Для каждого из условий (i)-(iii) определения 1 найдите его роль в теореме 1.

14.2.2. Преобразование Фурье в L_1 на оси

Пусть $f\in L_1(-\infty,\infty)$. Преобразованием Фурье функции f назовём функцию

$$\hat f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau. \qquad (2)$$

Так как $\left|e^{-it\tau}\right|=1$ при $t,\tau\in\mathbb{R}$, подынтегральное выражение в формуле (2) – интегрируемая функция, то есть функция $\hat f$ определена при всех $t\in\mathbb{R}$. Далее, $\left|\hat f(t)\right|\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(\tau)e^{-it\tau}\right|d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(\tau)\right|d\tau=\|f\|_1$. Перейдя к супремуму по $t\in\mathbb{R}$, получаем, что $\hat f$ – ограниченная функция и

$$\sup_{-\infty<t<+\infty}\left|\hat f(t)\right|\le\|f\|_1 \qquad (3)$$

для любого $f\in L_1(-\infty,\infty)$.

Перечислим преобразования Фурье некоторых конкретных функций. Соответствующие вычисления оставляем читателю в качестве упражнений на тему «приёмы вычисления интегралов».[4]

Пример 1. Пусть $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Тогда $\hat{f}(t) = \dfrac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}$. В частности, если $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$, то $\hat{f}(t) = 2\dfrac{\sin at}{t}$.

Пример 2. Пусть $f(t) = e^{-a|t|}$, где $a > 0$. Тогда $\hat{f}(t) = \dfrac{2a}{a^2 + t^2}$.

Пример 3. Пусть $f(t) = e^{-at^2}$, где $a > 0$. Тогда $\hat{f}(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4a}}$.

Обозначим через $l_\infty(-\infty, \infty)$ пространство всех ограниченных комплекснозначных функций на оси, наделённое нормой $\|f\| = \sup\limits_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|$. Сходимость в этом пространстве совпадает с равномерной сходимостью на оси. Через $C_0(-\infty, \infty)$ обозначим подпространство пространства $l_\infty(-\infty, \infty)$, состоящее из непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Очевидно, подпространство $C_0(-\infty, \infty)$ замкнуто в $l_\infty(-\infty, \infty)$.

Определение 1. *Оператором Фурье* в $L_1(-\infty, \infty)$ называется отображение $F : L_1(-\infty, \infty) \to l_\infty(-\infty, \infty)$, действующий по правилу $F(f) = \hat{f}$.

Теорема 1. Оператор Фурье F в $L_1(-\infty, \infty)$ – это непрерывный линейный оператор, $\|F\| = 1$, и для любой функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$ её образ $\hat{f}$ – непрерывная стремящаяся к нулю на бесконечности функция.

Доказательство. Неравенство $\|F\| \le 1$, а с ним непрерывность оператора следуют из соотношения (3). Чтобы получить обратное неравенство, подставим в оператор произвольную положительную функцию $f \in S_{L_1(-\infty,\infty)}$:

$$\|F\| \ge \|F(f)\| = \|\hat{f}\| \ge |\hat{f}(0)| = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = \|f\|_1 = 1.$$

[4] См. [K-F], гл. 8, § 4.

Осталось доказать, что $F\left(L_1(-\infty,\infty)\right) \subset C_0(-\infty,\infty)$. Согласно примеру 1, $F\left(f\right) \in C_0(-\infty,\infty)$ для любой функции вида $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Следовательно, по линейности, $F_1\left(f\right) \in C_0(-\infty,\infty)$ и для любой кусочно-постоянной функции f на оси (то есть для функции вида $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{[a_k,b_k]}$). Так как множество всех кусочно-постоянных функций плотно в $L_1(-\infty,\infty)$, а отображение F непрерывно, отсюда следует (упражнение 8 п. 1.2.1), что и весь образ оператора F лежит в подпространстве $C_0(-\infty,\infty)$. □

Замечание. Ввиду того, что $C_0(-\infty,\infty)$ − это подпространство не только в $l_\infty(-\infty,\infty)$, но и в $L_\infty(-\infty,\infty)$, отображение F. когда это удобно, можно считать действующим из $L_1(-\infty,\infty)$ в $L_\infty(-\infty,\infty)$.

Напомним, что в п. 4.6.3 было доказано, что для любых функций $f,g \in L_1(-\infty,\infty)$ их свёртка $\left(f * g\right)\!\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau\right) g\left(t-\tau\right) d\tau$ определена почти всюду и интегрируема на оси.

Теорема 2. Пусть $f,g \in L_1(-\infty,\infty)$. Тогда $F\left(f * g\right) = F\left(f\right) \cdot F\left(g\right)$. Другими словами, оператор Фурье переводит свёртку в обычное произведение.

Доказательство. $\left[F\left(f * g\right)\right](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f * g\right)\!\left(\tau\right) \cdot e^{-it\tau} d\tau =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) g\left(\tau - x\right) dx \right) e^{-it\tau} d\tau$. Поменяв порядок интегрирования в двойном интеграле и сделав замену $\tau - x = y$, получаем, что $\left[F\left(f * g\right)\right](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\tau - x\right) e^{-it\tau} d\tau \right) f\left(x\right) dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g\left(y\right) e^{-it(x+y)} dy \right) f\left(x\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g\left(y\right) e^{-ity} dy \right) e^{-itx} f\left(x\right) dx = \hat{f}(t)\hat{g}(t).$$ □

Отмеченное свойство поясняет, почему преобразование Фурье часто используется в теории вероятностей при изучении сумм независимых случайных величин и, в частности, при доказательстве предельных теорем для таких сумм. Дело в том, что плотность распределения суммы независимых величин − это свёртка соответствующих плотностей распределения, а после преобразования Фурье свёртка превращается в гораздо более удобную для изучения операцию обычного умножения.

Упражнения

1. Провести необходимые вычисления в примерах 1-3.
2. Почему множество всех кусочно-постоянных функций плотно в $L_1(-\infty,\infty)$?
3. По образцу из п. 4.6.3, обоснуйте корректность перемены порядка интегрирования в повторном интеграле, проведённой в доказательстве теоремы 2.
4. Пусть $g \in L_1(-\infty,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ и $f(t) = g(t+a)$. Тогда $\hat{f}(t) = e^{ita}\hat{g}(t)$.
5. Пусть $g \in L_1(-\infty,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ и $f(t) = e^{ita}g(t)$. Тогда $\hat{f}(t) = \hat{g}(t-a)$.
6. Пусть $g \in L_1(-\infty,\infty)$ и $f(t) = \overline{g(-t)}$. Тогда $\hat{f}(t) = \overline{\hat{g}(t)}$.
7. Пусть $f \in L_1(-\infty,\infty)$ – чётная вещественная функция. Тогда $\hat{f}$ – вещественная функция.
8. Оператор F неограничен снизу.

14.2.3. Формулы обращения

В этом параграфе мы изучим вопрос восстановления функции по её преобразованию Фурье.

Напомним, что *интегралом в смысле главного значения* функции f на оси называется величина $\text{p.v.-}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{m\to\infty} \int_{-m}^{m} f(t)dt$ (p.v. – сокращение от «principal value»). Очевидно, если $f \in L_1(-\infty,\infty)$, то $\text{p.v.-}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, но p.v.-интеграл может существовать и для неинтегрируемой по Лебегу функции на оси. Например, $\text{p.v.-}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$ для любой нечётной локально интегрируемой (то есть интегрируемой на каждом конечном отрезке) функции, но среди таких функций есть и не лежащие в $L_1(-\infty,\infty)$ (скажем, $f(t) = t$).

Теорема 1. Пусть интегрируемая на оси функция f подчиняется в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$ условию Дини. Тогда значение функции в этой точке может быть восстановлено по следующей формуле Фурье:

$$2\pi f(x) = \text{p.v.-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt.$$

Доказательство. Преобразуем величину $a_m = \int_{-m}^{m} \hat{f}(t)e^{itx}dt$ следующим образом: $a_m = \int_{-m}^{m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau \right) e^{itx}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-m}^{m} e^{it(x-\tau)}dxd\tau =$

$= 2\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\sin m(\tau - x)}{\tau - x}d\tau = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(y+\tau)\frac{\sin my}{y}d\tau.$ Для получения требуемого соотношения $2\pi f(x) = \lim_{m\to\infty} a_m$ остаётся применить теорему 2 п. 14.2.1. □

Если в условиях теоремы интегрируема не только функция f, но и её преобразование Фурье $\hat{f}$, формула Фурье переписывается в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{itx}dt. \qquad (4)$$

К сожалению, формула Фурье, несмотря на её простоту и элегантность, применима только к относительно хорошим функциям. Чтобы получить формулу восстановления функции по её преобразованию Фурье, пригодную для любой функции $f \in L_1(-\infty,\infty)$, прибегают к следующему приёму. Вначале функцию сворачивают с «хорошей» функцией, добиваясь этим достаточной степени гладкости, к «исправленной» функции применяют формулу Фурье, а затем уже находят исходную функцию f. На основе этого приёма можно получить различные формулы восстановления. Приведём лишь одну из них.

Теорема 2. Для любой функции $f \in L_1(-\infty,\infty)$ равенство

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \text{p.v.-}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\frac{n\sin\frac{t}{n}}{2\pi t}e^{itx}dt \qquad (5)$$

выполняется для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. При фиксированном $\varepsilon > 0$ рассмотрим вспомогательную функцию $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt$. Так как $g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]} * f$, то $g_\varepsilon \in L_1(-\infty,\infty)$. Далее, преобразование Фурье переводит свёртку в произведение, следовательно, $\hat{g}_\varepsilon = \hat{f}(t)\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}$ (см. также пример 1 п. 14.2.2). Функция $g_\varepsilon(x)$ подчиняется условию Дини для почти всех $x \in \mathbb{R}$ (интеграл дифференцируем почти всюду по верхнему пределу интегрирования), соответственно, к ней можно применить теорему 1:

$$g_\varepsilon(x) = \text{p.v.-}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\frac{\sin\varepsilon t}{2\pi\varepsilon t}e^{itx}dt \text{ почти всюду.} \qquad (6)$$

Далее, по той же теореме о дифференцировании интеграла по верхнему пределу интегрирования, $f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда и из (6) с $\varepsilon = 1/n$ вытекает требуемая формула обращения (5).

Следствие (теорема единственности для преобразования Фурье). Если $f, g \in L_1(-\infty,\infty)$ и $\hat{f} = \hat{g}$, то $f = g$ почти всюду. Другими словами, оператор Фурье в L_1 – инъективный оператор. □

Упражнения

1. $F(L_1(-\infty,\infty))$ – незамкнутое множество в $C_0(-\infty,\infty)$.
2. Наделим множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, считающей мерой μ: мера множества равна числу элементов этого множества. В этом случае $L_1(\mathbb{Z},\mu)$ можно отождествить с $l_1(\mathbb{Z})$. Для функции $f \in L_1(\mathbb{Z},\mu)$ определим преобразование Фурье $\hat{f} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ формулой $\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{Z}} f(x)e^{itx}d\mu(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{int}$. Докажите, что $\hat{f} \in C[0,2\pi]$.
3. Зададим оператор $F_{\mathbb{Z}} : l_1(\mathbb{Z}) \to C[0,2\pi]$ равенством $F_{\mathbb{Z}}(f) = \hat{f}$. Проверьте, что $F_{\mathbb{Z}}$ – линейный оператор, и $\|F_{\mathbb{Z}}\| = 1$. Что будет в этом случае аналогом формулы Фурье?
4. Докажите инъективность оператора $F_{\mathbb{Z}}$. Будет ли он ограниченным снизу?
5. Образ оператора $F_{\mathbb{Z}}$ совпадает с множеством W из упражнения 5 п. 11.1.1. Докажите, что образ оператора $F_{\mathbb{Z}}$ незамкнут и не плотен в $C[0,2\pi]$.
6. Замыкание в $C[0,2\pi]$ образа оператора $F_{\mathbb{Z}}$ совпадает с $C(\mathbf{T})$.
7. Определите свёртку функций из $l_1(\mathbb{Z})$ и докажите, что оператор $F_{\mathbb{Z}}$ переводит свёртку в произведение.

14.2.4. Преобразование Фурье и дифференцирование

Лемма 1. Пусть $f \in L_1(-\infty,\infty)$, f абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и $f' \in L_1(-\infty,\infty)$. Тогда $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Ввиду абсолютной непрерывности $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$. Следовательно, у f есть как предел при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ – $f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f'(t)dt$ и $f(0) + \int\limits_0^{-\infty} f'(t)dt$. Эти пределы не могут быть ничем, кроме нуля, так как иначе функция f была бы неинтегрируемой на оси. □

Теорема 1. Пусть $f \in L_1(-\infty,\infty)$, f абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и $f' \in L_1(-\infty,\infty)$. Тогда $F(f') = it \cdot F(f)$.

Доказательство. Нужно применить формулу интегрирования по частям и предыдущую лемму:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)e^{-it\tau}d\tau = f(\tau)e^{-it\tau}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau = it\,\hat{f}(t). \ \square$$

Как мы уже отмечали, преобразование Фурье интегрируемой функции стремится на бесконечности к нулю. Из предыдущей теоремы легко вывести оценку скорости стремления к нулю функции $\hat{f}$ через степень гладкости функции f:

Следствие 1. Пусть f – n-кратно непрерывно дифференцируемая функция и как f, так и все её производные до n-го порядка включительно интегрируемы на оси. Тогда $\hat{f}(t) = o(t^{-n})$ при $n \to \infty$.

Доказательство. n-Кратным применением теоремы 1 получаем, что $F(f^{(n)}) = (it)^n \cdot F(f)$. Соответственно, $\left|\hat{f}(t)\cdot t^n\right| = \left|F(f^{(n)})\right|(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ $\square$

Обозначим через $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ множество всех дважды непрерывно дифференцируемых функций на оси с ограниченными носителями (то есть носитель каждой функции $f \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ лежит на своём конечном отрезке).

Следствие 2. Пусть $f \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f}$ принадлежит всем $L_p(-\infty,\infty)$, $p \ge 1$.

Доказательство. Функция $\hat{f}$ непрерывна, а, по предыдущему следствию, на бесконечности $\hat{f}(t) = o(t^{-2})$. $\square$

Упражнения

1. Пусть функции $f(t)$ и $g(t) = tf(t)$ лежат в $L_1(-\infty,\infty)$. Тогда функция $\hat{f}$ всюду дифференцируема и $\frac{d}{dt}\hat{f} = -i\hat{g}$.

2. Пусть $f(t)$, $tf(t)$, ... , $t^n f(t)$ все лежат в $L_1(-\infty,\infty)$. Тогда функция $\hat{f}$ имеет n-ю производную и $\frac{d^n}{dt^n}\hat{f}(t) = (-i)^n F(t^n f(t))$.

3. Обозначим через $s_{(-\delta,\delta)}$ горизонтальную полосу в $\mathbb{C}$, состоящую из всех z с $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$. Пусть $f \in L_1(-\infty,\infty)$ и для некоторого $\delta > 0$ функция $f(t)e^{\delta|t|}$ также интегрируема. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iz\tau}d\tau$ существует для всех $z \in s_{(-\delta,\delta)}$ и представляет собой аналитическую в $s_{(-\delta,\delta)}$ функцию

переменной z. Другими словами, при этих условиях $\hat{f}$ можно рассматривать как аналитическую функцию в $s_{(-\delta,\delta)}$.

4. Пусть в условиях предыдущего упражнения функция f принимает только вещественные неотрицательные значения. Тогда $\hat{f}$ подчиняется следующему условию *хребтовости*: $\left|\hat{f}(z)\right| \le \hat{f}(i\,\mathrm{Im}\,z)$ для всех $z \in s_{(-\delta,\delta)}$.

5. Восполните опущенные подробности в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть (a,b) – конечный или бесконечный отрезок вещественной оси, $p \in [1,\infty)$, f – почти всюду отличная от нуля измеримая функция на (a,b), удовлетворяющая при некоторых $C,\delta > 0$ неравенству $|f(t)| \le Ce^{-\delta|t|}$. Тогда функции $f_n(t) = t^n f(t)$, $n = 0,1,2,\ldots$, образуют полную систему в $L_p(a,b)$.

Доказательство. Согласно критерию полноты системы из п. 9.2.3, нам нужно доказать, что любой элемент $g \in L_{p'}(a,b)$, аннулирующий все f_n, равен нулю. Условие аннулирования означает, что для всех $n = 0,1,2,\ldots$.

$$\int_{(a,b)} f_n g d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) g(t) \mathbf{1}_{(a,b)}(t) dt = 0. \tag{7}$$

Введя вспомогательную функцию $h(t) = f(t)g(t)\mathbf{1}_{(a,b)}(t)$, перепишем (7) в виде $\frac{d^n}{dt^n}\hat{h}(0) = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, что ввиду аналитичности функции $\hat{h}$ означает, что $\hat{h}(t) \equiv 0$. По теореме единственности, отсюда следует, что $h = 0$, следовательно, и $g = 0$. □

6. Из последней теоремы выведите полноту:
- множества многочленов в $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$;
- последовательности $f_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, в $L_p(-\infty,\infty)$, $1 \le p < \infty$;
- $f_n(t) = t^n e^{-t}$, $n = 0,1,2,\ldots$, в $L_p(0,\infty)$, $1 \le p < \infty$.

7. Все перечисленные в последнем упражнении системы функций не полны в соответствующих L_∞.

14.2.5. Преобразование Фурье в L_2 на оси

Цель этого параграфа – определить преобразование Фурье для функций из $L_2(-\infty,\infty)$. Хотя само определение, предложенное Маршерелем в 1910 году, сложнее своего аналога в $L_1(-\infty,\infty)$, оператор

Фурье в $L_2(-\infty,\infty)$ окажется гораздо проще и удобнее по своим свойствам, чем оператор Фурье в $L_1(-\infty,\infty)$. А именно, он будет с точностью до постоянного множителя унитарным оператором, к тому же обладающим полной системой собственных векторов.

Определение 1. Пусть X, Y – нормированные пространства. Множество $X \bigcap Y$ будем также считать нормированным пространством, наделённым нормой $\|u\| = \|u\|_X + \|u\|_Y$. Легко видеть, что $u_n \to u$ в $X \bigcap Y$ в том и только том случае, если $u_n \to u$ как в метрике пространства X, так и в метрике пространства Y.

Лемма 1. Пусть X_1, X_2 – нормированные пространства, (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$. Далее, пусть $T_j : X_j \to L_{p_j}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $j = 1,2$ – непрерывные линейные операторы, совпадающие на плотном в $X_1 \bigcap X_2$ подмножестве E. Тогда $T_1 x = T_2 x$ на всех $x \in X_1 \bigcap X_2$.

Доказательство. Пусть $x \in X_1 \bigcap X_2$, $x_n \in E$ и $x_n \to x$ в метрике пространства $X_1 \bigcap X_2$. Воспользовавшись совпадением на E операторов T_1, T_2, введём обозначение $f_n = T_1 x_n = T_2 x_n$. Так как $x_n \to x$ в метрике каждого из пространств X_1, X_2, $f_n = T_j x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T_j x$, $j = 1,2$, в метрике соответствующего L_{p_j}. Согласно пункту (i) теоремы 3 п. 14.1.2, отсюда следует, что функции $T_1 x$ и $T_2 x$ совпадают почти всюду на Ω. □

Частный случай пересечения пространств, интересующий нас в настоящем разделе, – это пространство $L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_2(-\infty,\infty)$, наделённое нормой $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$.

Теорема 1. Следующие подмножества плотны в $L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_2(-\infty,\infty)$:

(i) множество E_1 функций с носителями, лежащими на конечных отрезках;
(ii) множество E_2 ограниченных функций с носителями, лежащими на конечных отрезках;
(iii) множество E_3 конечнозначных измеримых функций с носителями на конечных отрезках;
(iv) множество E_4 кусочно-постоянных функций;
(v) множество $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ (см. п. 14.2.4).

Доказательство. (i) Пусть $f \in L_1(-\infty,\infty) \cap L_2(-\infty,\infty)$. Тогда $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$ принадлежат E_1 и стремятся к f.

(ii) Пусть $f \in E_1$. Положим $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{A_n}$, где $A_n = \{t \in \mathbb{R} : |f|(t) < n\}$.

(iii) Ограниченную функцию $f \in E_2$ можно приблизить на отрезке конечнозначными даже равномерно (теорема 3 п. 3.1.4).

(iv) Ввиду предыдущего пункта достаточно доказать, что замыканию множества E_4 принадлежат функции вида $\mathbf{1}_A$, где A – измеримое подмножество некоторого конечного отрезка $[a,b]$. Так как мера Лебега строилась продолжением с алгебры конечных объединений подотрезков, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой множество B, имеющее вид объединения конечного дизъюнктного набора подотрезков, что $\lambda(A \Delta B) < \varepsilon$. Соответственно, $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\| < \varepsilon + \varepsilon^{1/2}$. Остаётся заметить, что $\mathbf{1}_B$ – это кусочно-постоянная функция.

(v) Ввиду предыдущего пункта достаточно доказать возможность приближения функциями из $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ любой функции вида $\mathbf{1}_{[a,b]}$. Для этого достаточно «сгладить» функцию $\mathbf{1}_{[a,b]}$ так, чтобы площадь под графиком почти не изменилась. Недоверчивому читателю предлагаем найти требуемое приближение самостоятельно. □

Лемма 2. Для любых $f,g \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ имеет место следующая *формула Планшереля*: $\langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f},\hat{g} \rangle$. В частности (случай $f = g$), $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_2$.

Доказательство. Во-первых, как $f,g \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R}) \subset L_2(-\infty,\infty)$, так и $\hat{f},\hat{g} \in L_2(-\infty,\infty)$ (следствие 2 п. 14.2.3). Поэтому оба скалярных произведения $\langle f,g \rangle$ и $\langle \hat{f},\hat{g} \rangle$ корректно определены. Поскольку рассматриваемые функции лежат в $L_1(-\infty,\infty)$ и дифференцируемы, а, по тому же следствию 2 п. 14.2.3, их преобразования Фурье интегрируемы, к ним можно применять формулу Фурье (4), п. 14.2.3. Имеем:

$$2\pi\langle f,g \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt\,\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}dx}\,dt = \langle \hat{f},\hat{g} \rangle.$$

□

Из доказанной леммы следует, что отображение $f \to \hat{f}$, рассматриваемое как оператор, действующий из подпространства

$\mathrm{D}^2(\mathbb{R}) \subset L_2(-\infty,\infty)$ в пространство $L_2(-\infty,\infty)$, непрерывно. Поскольку $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(-\infty,\infty)$, по теореме 1 п. 6.5.1, это отображение единственным образом продолжается до непрерывного оператора, действующего из $L_2(-\infty,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$. Этими соображениями обосновывается корректность следующего определения.

Определение 2. Оператором Фурье в $L_2(-\infty,\infty)$ называется непрерывный линейный оператор $F_2 : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$, действующий на любую функцию $f \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R})$ по правилу $F_2(f) = \hat{f}$.

Теорема 2. Оператор Фурье в $L_2(-\infty,\infty)$ обладает следующими свойствами:

A. $F_2(f) = \hat{f}$ для любой функции $f \in L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_2(-\infty,\infty)$.

B. Формула Планшереля $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\langle F_2(f), F_2(g)\rangle$ имеет место для любых $f,g \in L_2(-\infty,\infty)$. В частности, $\|f\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\|F_2(f)\|_2$ для любой функции $f \in L_2(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Пункт A следует из леммы 1 и плотности в $L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_2(-\infty,\infty)$ множества $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$. Пункт B – это распространённая по непрерывности на всё $L_2(-\infty,\infty)$ лемма 2. □

Следующая простая теорема даёт более конструктивное определение преобразованию Фурье в L_2.

Теорема 3. Пусть $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Обозначим $(F_{2,n}f)(t) = \int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-it\tau}\,d\tau$. Тогда $F_2 f = \lim\limits_{n\to\infty} F_{2,n}f$, где предел понимается в метрике пространства $L_2(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}$. Очевидно, f_n стремится к f в L_2-метрике. Соответственно, ввиду непрерывности оператора F_2 последовательность $F_{2,n}(f) = F_2(f_n)$ стремится к $F_2(f)$. □

Замечание. Для предела при $n \to \infty$ интегралов вида $\int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau$ естественно использовать обозначение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau$. Поэтому для преобразования Фурье в $L_2(-\infty,\infty)$ используют ту же запись

$\hat{f}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau,$ что и в $L_1(-\infty,\infty),$ но интеграл при этом понимают не в Лебеговском смысле, а в смысле теоремы 3: как предел в $L_2(-\infty,\infty)$ функций $\int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau.$

Для дальнейшего изучения оператора Фурье F_2 разумно обратиться к многочленам от этого оператора, и простейшему из них – оператору $(F_2)^2$.

Лемма 3. Оператор $(F_2)^2$ – самосопряженный оператор.

Доказательство. По теореме 3 (см. также упражнение 2 п. 10.4.2), оператор $(F_2)^2$ – это поточечный предел операторов $(F_{2,n})^2$, последние же легко записать в виде операторов интегрирования с вещественными симметричными ядрами:

$$(F_{2,n}\circ F_{2,n}f)(t)=\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-i\tau(x+t)}dxd\tau=\int\limits_{-n}^{n} f(\tau)\frac{2\sin n(x+t)}{x+t}d\tau.$$

Таким образом, $(F_{2,n})^2$ – самосопряженные операторы, значит, будет самосопряженным и их поточечный предел. □

Теорема 4. Оператор $\widetilde{F}_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2$ – это унитарный оператор.

Доказательство. Ввиду пункта В теоремы 2 оператор $\widetilde{F}_2$ осуществляет изометрическое вложение и, в частности, ограничен снизу. Соответственно, $(\widetilde{F}_2)^2$ – самосопряженный (по предыдущей лемме) ограниченный снизу оператор. Следовательно (лемма 1 п. 12.4.2), $(\widetilde{F}_2)^2$ биективен. Поэтому биективным будет и оператор $\widetilde{F}_2$, а биективная изометрия гильбертова пространства – это унитарный оператор (теорема 2 п. 13.2.2). □

Теперь обсудим спектральные свойства оператора Фурье F_2.

Теорема 5. Оператор $\widetilde{F}_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2$ подчиняется уравнению $(\widetilde{F}_2)^4=I.$ Соответственно, спектр оператора F_2 лежит в множестве $\{1,i,-1,-i\}$, и пространство $L_2(-\infty,\infty)$ разбивается в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора F_2.

Доказательство. Согласно лемме 3 и теореме 4, $\left(\widetilde{F}_2\right)^2$ – одновременно самосопряжённый и унитарный оператор. Его спектр, соответственно, лежит одновременно на вещественной оси и на единичной окружности. То есть $\sigma\left(\left(\widetilde{F}_2\right)^2\right) \subset \{-1,1\}$. По теореме об отображении спектра, $\sigma\left(\left(\widetilde{F}_2\right)^4\right) = \{1\}$. Ввиду самосопряжённости это означает, что $\left(\widetilde{F}_2\right)^4 = I$. По той же теореме об отображении спектра, $\sigma\left(\widetilde{F}_2\right) \subset \{1, i, -1, -i\}$. Последнее же утверждение можно вывести либо из упражнения 1 п. 13.1.1, либо решив нижеприведенные упражнения, дающие явное построение полной ортонормированной системы собственных векторов оператора F_2. □

14.2.6. Упражнения

Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$ и подпространств $X_n = \mathrm{Lin}\{x_k\}_{k=0}^n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Другими словами, подпространство X_n состоит из функций вида $P_n(t)e^{-t^2/2}$, где P_n – многочлен степени не выше n.

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ плотно в $L_2(-\infty,\infty)$.
2. X_n, $n = 0,1,2,\ldots$ – инвариантные подпространства оператора F_2.
3. X_0, $X_0^{\perp} \cap X_1$, $X_1^{\perp} \cap X_2$, $X_2^{\perp} \cap X_3$, ... – последовательность одномерных инвариантных подпространств оператора F_2.
4. Если в каждом из перечисленных в предыдущем упражнении одномерных подпространств выбрать по ненулевому элементу h_n, полученная последовательность будет ортогональным базисом, состоящим из собственных векторов оператора F_2. (Фактически при построении системы проведена ортогонализация по Грамму – Шмидту системы $\{x_n\}_0^{\infty}$.)
5. Конкретным примером выбора требуемых h_n может служить последовательность *функций Эрмита*: $h_n(x) = \dfrac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \cdot e^{x^2/2}$. Проверьте требуемое включение $h_n \in X_{n-1}^{\perp} \cap X_n$.

Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$ строится по аналогии с одномерным случаем. А именно, для $f \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ полагают $\hat{f}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) e^{-i\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle} d\vec{y}$.

6. Постройте для преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$ аналог теории, изложенной выше в одномерном случае.

7. Если мера μ σ-конечна, то $L_{p_0}(\Omega,\Sigma,\mu)\cap L_{p_1}(\Omega,\Sigma,\mu)$ в норме из определения 1 – банахово пространство для любых $p_0, p_1 \in [1,+\infty]$.
8. Приведите пример банаховых пространств X, Y, для которых $X\cap Y$ не будет банаховым пространством.
9. Придумайте такое дополнительное условие, обеспечивающее полноту пространства $X\cap Y$, чтобы этому условию подчинялись пространства из упражнения 7.

14.3. Интерполяционная теорема Рисса – Торина и её следствия

14.3.1. Теорема Адамара о трёх прямых

В этом параграфе мы докажем вариант принципа Фрагмена – Линделёфа (E. Phragmén, E. Lindelöf), дающий оценку аналитической в полосе $\Pi = \{z\in\mathbb{C} : 0\le \operatorname{Re} z \le 1\}$ функции через её значения на границе.

Для функции $f:\Pi\to\mathbb{C}$ введём обозначение $M_\theta = \sup\{|f(\theta+iy)| : y\in\mathbb{R}\}$, где $\theta\in[0,1]$.

Теорема (J. Hadamard). Пусть $f:\Pi\to\mathbb{C}$ – ограниченная, аналитическая в Π и непрерывная вплоть до границы функция. Тогда для всех $\theta\in[0,1]$ выполнена оценка $M_\theta \le M_0{}^{1-\theta} M_1{}^{\theta}$. Другими словами, $\ln M_\theta$ – выпуклая функция.

Доказательство разбивается на несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть в условиях теоремы
(i) функция $f(\theta+iy)$ равномерно по $\theta\in[0,1]$ стремится к нулю при $y\to\infty$ и
(ii) $|f(z)|\le 1$ на границе полосы Π.
Тогда $|f(z)|\le 1$ во всей полосе Π.

Доказательство. Воспользовавшись условием (i), выберем $r>0$ настолько большим, чтобы на горизонтальных отрезках $\{z=\theta\pm ir : \theta\in[0,1]\}$ выполнялась оценка $|f(z)|\le 1$. Тогда оценка $|f(z)|\le 1$ выполнена на всей границе прямоугольника $\Pi_r = \{z\in\Pi : |\operatorname{Im} z|\le r\}$, и, по принципу максимума, $|f(z)|\le 1$ для всех $z\in\Pi_r$. Так как с ростом r прямоугольник Π_r захватывает все точки полосы Π, неравенство $|f(z)|\le 1$ доказано для всех $z\in\Pi$. □

Лемма 2. Пусть в условиях теоремы функция f ограничена по модулю каким-то числом C во всей полосе Π и $|f(z)| \le 1$ на границе полосы. Тогда $|f(z)| \le 1$ во всей полосе Π.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g_\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon z$, $\varepsilon > 0$. Эта функция всюду в Π по модулю больше или равна 1 и $|g_\varepsilon(\theta + iy)| \ge \varepsilon |y|$. Соответственно, вспомогательная функция f/g_ε будет подчиняться всем условиям леммы 1. Применив лемму 1, получаем для любого $z \in \Pi$ оценку $\left|\frac{f(z)}{1+\varepsilon z}\right| \le 1$. Остаётся устремить ε к нулю. □

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию $g(z) = f(z) {M_0}^{z-1} {M_1}^{-z}$. Так как $|g(z)| = |f(z)| {M_0}^{\operatorname{Re} z - 1} {M_1}^{-\operatorname{Re} z}$, для функции g выполнены условия леммы 2. Следовательно, $|f(\theta + iy)| {M_0}^{\theta-1} {M_1}^{-\theta} \le 1$. Так как M_0 и M_1 можно считать неравными нулю (иначе $f \equiv 0$), отсюда выводим требуемое неравенство $|f(\theta + iy)| \le {M_0}^{1-\theta} {M_1}^{\theta}$. □

Упражнение. Докажите следующий вариант принципа Фрагмена – Линделёфа для аналитической функции f, заданной в полуплоскости $D = \{z : \operatorname{Re} z \ge 0\}$: пусть $|f(z)| \le 1$ на мнимой оси и для некоторой функции g, такой, что $\frac{g(r)}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, оценка $|f(z)| \le e^{g(|z|)}$ выполнена для всех $z \in D$. Тогда $|f(z)| \le 1$ во всей полуплоскости D.

14.3.2. Теорема Рисса –Торина [5]

На протяжении этого параграфа $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ будут пространствами с конечной или σ-конечной мерой, $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$, $\theta \in [0,1]$, и показатели p_θ, q_θ будут определяться равенствами $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ и $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Пусть $E \subset L_p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ – линейное подпространство. Норму линейного оператора $T : (E, \| \ \|_p) \to L_q(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ будем обозначать $\|T\|_{p,q}$.

Лемма 1. Пусть E – пространство всех конечнозначных измеримых функций на Ω_1 с носителями конечной меры, $T : E \to \bigcap_{\theta\in[0,1]} L_{q_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – линейный оператор. Тогда для любого $\theta \in [0,1]$ имеет место оценка

[5] M. Riesz , G. O. Thorin.

$$\|T\|_{p_\theta,q_\theta} \le \left(\|T\|_{p_0,q_0}\right)^{1-\theta}\left(\|T\|_{p_1,q_1}\right)^{\theta}. \tag{1}$$

Доказательство. Идея доказательства, предложенная Ториным (1939), заключается в сведении неравенства (1) к теореме Адамара о трёх прямых. Введём обозначения $M_0 = \|T\|_{p_0,q_0}$, $M_1 = \|T\|_{p_1,q_1}$. Нам нужно доказать, что для любой конечнозначной функции $u = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbf{1}_{U_k} \in E$ с $\|u\|_{p_\theta} = 1$ (u_k – скаляры, а $U_k \in \Sigma_1$, $k = 1,2,...,n$ – дизъюнктный набор множеств конечной меры) выполнено неравенство $\|Tu\|_{q_\theta} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Учитывая, что норма в $L_{q_\theta}(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$ элемента Tu совпадает с нормой порождённого им функционала «интеграл с весом» на пространстве $L_{q'_\theta}(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$, лемма сводится к доказательству того, что неравенство

$$\left|\int_{\Omega_2} w \cdot Tu \, d\mu_2\right| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \tag{2}$$

выполнено для всех $w \in L_{q'_\theta}(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$ с $\|w\|_{q'_\theta} = 1$. Наконец, (2) достаточно проверять для конечнозначных функций $w = \sum_{k=1}^{m} w_k \mathbf{1}_{W_k}$.

Доопределим величины p_θ, q'_θ на случай комплексных значений параметра θ: $\frac{1}{q'_z} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}$ и $\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$. Для любого комплексного числа ξ обозначим $\operatorname{sign}\xi = \xi/|\xi|$, если $\xi \ne 0$ и $\operatorname{sign} 0 = 0$. При фиксированном $\theta \in [0,1]$ положим

$$u_z = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p_\theta/p_z} \cdot \operatorname{sign} u_k \cdot \mathbf{1}_{U_k}, \quad w_z = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^{q'_\theta/q'_z} \cdot \operatorname{sign} w_k \cdot \mathbf{1}_{W_k}.$$

Прямой подстановкой в определение L_p-нормы, учитывая, что $\left|a^z\right| = a^{\operatorname{Re} z}$ при $a > 0$, из условий $\|u\|_{p_\theta} = \|w\|_{q'_\theta} = 1$ получаем равенства

$$\|u_{iy}\|_{p_0} = \|u_{1+iy}\|_{p_1} = \|w_{iy}\|_{q'_0} = \|w_{1+iy}\|_{q'_1} = 1. \tag{3}$$

Определим функцию комплексного переменного f формулой

$$f(z) = \int_{\Omega_2} w_z \cdot Tu_z \, d\mu_2. \tag{4}$$

Подставив в (4) выражения для u_z и w_z, легко убедиться, что $f(z)$ – это линейная комбинация показательных функций вида a^z с $a > 0$:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|u_k\right|^{p_\theta/p_z}\cdot\left|w_j\right|^{q'_\theta/q'_z}\operatorname{sign}u_k w_j\int_{\Omega_2}T(\mathbf{1}_{U_k})\mathbf{1}_{W_j}\,d\mu_2.$$

Так как каждая из таких показательных функций аналитична и ограничена в полосе $\Pi=\{z\in\mathbb{C}:0\le\operatorname{Re}z\le 1\}$, этими свойствами будет обладать и функция $f(z)$. Далее, из неравенства Гёльдера и условий (3) заключаем, что

$$|f(iy)|=\left|\int_{\Omega_2}w_{iy}\cdot Tu_{iy}\,d\mu_2\right|\le\left\|Tu_{iy}\right\|_{q_0}\left\|w_{iy}\right\|_{q'_0}\le M_0\left\|u_{iy}\right\|_{p_0}\left\|w_{iy}\right\|_{q'_0}=M_0.$$

Аналогично, $|f(1+iy)|\le M_1$. Применив теорему Адамара о трёх прямых, получаем, в частности, оценку $|f(\theta)|\le M_0{}^{1-\theta}M_1{}^{\theta}$. Для получения требуемого неравенства (2) остаётся заметить, что $u_\theta=u$, $w_\theta=w$ и, следовательно, $f(\theta)=\int_{\Omega_2}w\cdot Tu\,d\mu_2$. □

Следствие 1 (неравенство Ляпунова). Пусть $f\in L_{p_0}(\Omega,\Sigma,\mu)\cap L_{p_1}(\Omega,\Sigma,\mu)$. Тогда для любого $\theta\in[0,1]$

$$\|f\|_{p_\theta}\le(\|f\|_{p_0})^{1-\theta}(\|f\|_{p_1})^{\theta}. \tag{5}$$

В частности, $L_{p_0}(\Omega,\Sigma,\mu)\cap L_{p_1}(\Omega,\Sigma,\mu)\subset L_{p_\theta}(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Доказательство. Линейный функционал – это тоже оператор, только область его значений – поле скаляров $\mathbb{C}$. Так как $\mathbb{C}$ можно отождествить с $L_2(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$, где в качестве Ω_2 взято одноточечное множество и $\mu_2(\Omega_2)=1$, предыдущую лемму можно применить с $q_0=q_1=2$ к линейному функционалу W_f интегрирования с весом f, действующему на конечнозначные функции. В качестве $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ нужно взять (Ω,Σ,μ), а в качестве показателей, к которым применяется лемма, нужно взять не сами p_0, p_1 и p_θ, а сопряжённые к ним показатели. □

Следствие 2. Пусть X – плотное подмножество пространства $L_{p_0}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)\cap L_{p_1}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$. Тогда для любого $\theta\in[0,1]$ множество X плотно в $L_{p_\theta}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$.

Доказательство. Из (5) следует, что оператор тождественного вложения $J:L_{p_0}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)\cap L_{p_1}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)\to L_{p_\theta}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$, $Jf=f$, непрерывен (например, он переводит стремящиеся к нулю последовательности в стремящиеся к нулю). $L_{p_0}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)\cap L_{p_1}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ – образ оператора J – плотное подмножество пространства $L_{p_\theta}(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$, следовательно (упражнение 8 п. 1.2.1), оператор J переводит плотное подмножество $X \subset L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ в плотное подмножество $X \subset L_{p_\theta}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. □

Теорема 1. Пусть X – плотное линейное подпространство в $L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $T : X \to L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – линейный оператор. Тогда для любого $\theta \in [0,1]$ имеет место оценка

$$\|T\|_{p_\theta, q_\theta} \le (\|T\|_{p_0, q_0})^{1-\theta} (\|T\|_{p_1, q_1})^{\theta}.$$

Доказательство. Неравенство нуждается в доказательстве, только если величины $\|T\|_{p_0, q_0}$ и $\|T\|_{p_1, q_1}$ конечны. В этом случае оператор $T : X \to L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ непрерывен и, следовательно, однозначно продолжается до непрерывного оператора

$$T : L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2).$$

То есть достаточно рассмотреть случай $X = L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. Далее, если $p_\theta = +\infty$, то и $p_0 = p_1 = +\infty$, и требуемая оценка вытекает из неравенства Ляпунова:

$$\|Tf\|_{q_\theta} \le (\|Tf\|_{q_0})^{1-\theta} (\|Tf\|_{q_1})^{\theta} \le (\|T\|_{\infty, q_0})^{1-\theta} (\|T\|_{\infty, q_1})^{\theta} \|f\|_\infty.$$

Поэтому можно считать, что $p_\theta \ne +\infty$. Рассмотрим оператор $\widetilde{T}$ – ограничение оператора T на подпространство E из леммы 1. По следствию 1,

$$T(E) \subset L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \subset \bigcap_{\theta \in [0,1]} L_{q_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2),$$

таким образом, к оператору $\widetilde{T}$ можно применять лемму 1:

$$\|\widetilde{T}\|_{p_\theta, q_\theta} \le (\|\widetilde{T}\|_{p_0, q_0})^{1-\theta} (\|\widetilde{T}\|_{p_1, q_1})^{\theta} \le (\|T\|_{p_0, q_0})^{1-\theta} (\|T\|_{p_1, q_1})^{\theta}.$$

Остаётся воспользоваться плотностью подпространства E в $L_{q_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$, ввиду которой $\|\widetilde{T}\|_{p_\theta, q_\theta} = \|T\|_{p_\theta, q_\theta}$. □

Доказанные утверждения можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим множество $D \subset [0,1] \times [0,1]$ таких пар (x, y), что $X \subset L_{1/x}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $T(X) \subset L_{1/y}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ и $\|T\|_{1/x, 1/y} < \infty$. Определим функцию $F : D \to \mathbb{R}$ формулой $F(x, y) = \ln\|T\|_{1/x, 1/y}$. Тогда D – выпуклое множество, а F – выпуклая функция.

Упражнения

1. В лемме 1 и ниже мы оперируем с параметрами p,q, которые могут принимать как конечные, так и бесконечные значения. Придайте смысл формулам $\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$ и $\frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$ в случае, когда какой-нибудь из параметров принимает значение $+\infty$.
2. Приняв «правило умножения» $\infty\cdot 0=1$, придайте смысл выражениям для u_z и w_z в случае, когда какой-нибудь из входящих в определение параметров принимает значение $+\infty$. Проверьте корректность доказательства леммы 1 для таких значений параметров.
3. Почему в доказательстве последней теоремы 1 случай $p_\theta=+\infty$ нужно было рассматривать отдельно?
4. Обосновать последнюю фразу доказательства теоремы 1 «Остаётся воспользоваться плотностью …»

14.3.3. Приложения к рядам Фурье и преобразованию Фурье

В этом параграфе будет доказано, в частности, что при $1<p<\infty$ тригонометрическая система $\{1,e^{it},e^{-it},e^{2it},e^{-2it},...\}$ образует базис в $L_p[0,2\pi]$. Доказательство будет основано на весьма элегантном соображении, предложенном В. Юдиным [Yud].

Определение 1. Введём обозначения $E[0,2\pi]=\mathrm{Lin}\{1,e^{it},e^{-it},e^{2it},e^{-2it},...\}$, $E_+[0,2\pi]=\mathrm{Lin}\{1,e^{it},e^{2it},e^{3it},...\}$ и $E_-[0,2\pi]=\mathrm{Lin}\{e^{-it},e^{-2it},e^{-3it},...\}$. *Оператором Рисса* называется отображение $R:E[0,2\pi]\to E[0,2\pi]$, действующее по правилу $R\left(\sum_{k=-m}^{n}a_k e^{ikt}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ikt}$. Другими словами, оператор Рисса – это проектор пространства $E[0,2\pi]$ на $E_+[0,2\pi]$ параллельно подпространству $E_-[0,2\pi]$.

Лемма 1 (Юдин). Пусть $p=2k$, где $k\in\mathbb{N}$; $f,g\in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $\int_\Omega f^k\bar{g}^k d\mu=0$. Тогда L_p-нормы функций связаны неравенством $\|f\|^p+\|g\|^p\le k^p\|f-g\|^p$.

Доказательство. Из условия $\int_\Omega f^k\bar{g}^k d\mu=0$ выводим, что

$$\|f\|^p+\|g\|^p=\int_\Omega |f|^{2k}+|g|^{2k}d\mu=\int_\Omega\left|f^k-g^k\right|^2 d\mu=$$

$$= \int_\Omega |f-g|^2 \left|f^{k-1} + f^{k-2}g + \ldots + g^{k-1}\right|^2 d\mu \le k^2 \int_\Omega |f-g|^2 \max\left\{|f|^{k-1}, |g|^{k-1}\right\}^2 d\mu .$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями k и $k' = \dfrac{k}{k-1}$, получаем:

$$\|f\|^p + \|g\|^p \le k^2 \left(\int_\Omega |f-g|^{2k} d\mu \right)^{1/k} \left(\int_\Omega \max\left\{|f|^{2k}, |g|^{2k}\right\} d\mu \right)^{(k-1)/k} \le$$

$$\le k^2 \left(\int_\Omega |f-g|^{2k} d\mu \right)^{1/k} \left(\int_\Omega |f|^{2k} + |g|^{2k} d\mu \right)^{(k-1)/k} =$$

$$= k^2 \left(\int_\Omega |f-g|^{2k} d\mu \right)^{1/k} \left(\|f\|^p + \|g\|^p\right)^{(k-1)/k} .$$

Остаётся поделить обе части неравенства на $\left(\|f\|^p + \|g\|^p\right)^{(k-1)/k}$ и возвести в степень k. □

Лемма 2. Пусть $f \in E_+[0,2\pi]$, $g \in E_-[0,2\pi]$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\int_0^{2\pi} f^k(t)\overline{g}^k(t)dt = 0.$

Доказательство. Ввиду ортогональности системы экспонент, $E_+[0,2\pi]$ и $E_-[0,2\pi]$ ортогональны между собой в $L_2[0,2\pi]$. В то же время $f^k \in E_+[0,2\pi]$, а $g^k \in E_-[0,2\pi]$. □

Теорема 1 (М. Рисс). Пусть $1 < p < \infty$. Тогда оператор Рисса R продолжается до непрерывного оператора, действующего из $L_p[0,2\pi]$ в $L_p[0,2\pi]$.

Доказательство. Так как $E[0,2\pi]$ – плотное в $L_p[0,2\pi]$ подпространство, для существования требуемого продолжения необходимо и достаточно, чтобы величина $\|R\|_{p,p}$ была конечна.

Разберём вначале случай $p = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть $h \in E[0,2\pi]$ – произвольный элемент. Рассмотрим функции $f = Rh \in E_+[0,2\pi]$ и $g = Rh - h \in E_-[0,2\pi]$. Тогда, по лемме 1, $\|Rh\|^p = \|f\|^p \le k^p \|f-g\|^p = k^p \|h\|^p$. То есть $\|R\|_{p,p} \le k < \infty.$

Применив интерполяционную теорему Рисса – Торина к отрезкам вида $[2k, 2k+2]$, получим, что $\|R\|_{p,p} < \infty$ при всех $p \ge 2$. Осталось разобрать случай $1 < p < 2$. В этом случае $p' \in (2, +\infty)$ и, по уже доказанному, $\|R\|_{p',p'} < \infty$. Заметим, что для любого $h \in E[0,2\pi]$

$$\|Rh\|_p = \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi}(Rh)(t)\overline{u}(t)dt\right| : \overline{u} \in E[0,2\pi], \|\overline{u}\|_{p'} \le 1\right\}. \qquad (6)$$

Введя обозначения $f = Rh,\ g = Rh - h,\ v = Ru,\ w = Ru - v$ и учитывая, что $f, v \in E_+[0,2\pi],\ g, w \in E_-[0,2\pi]$, получаем:

$$\int_0^{2\pi}(Rh)(t)\overline{u}(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)(\overline{v}(t) - \overline{w}(t))dt = \int_0^{2\pi}(f(t) - g(t))\overline{v}(t)dt = \int_0^{2\pi} h(t)\overline{(Ru)(t)}dt.$$

Подставляя в (6) и используя неравенство Гёльдера, заключаем, что $\|Rh\|_p \le \|h\|_p \|R\|_{p',p'}$ и, соответственно, $\|R\|_{p,p} \le \|R\|_{p',p'} < \infty$. □

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L_p[0,2\pi]$ частные суммы $S_n f$ её ряда Фурье сходятся к f в L_p-метрике.

Доказательство. Оператор $\widetilde{P}$ связан с оператором S_n частной суммы ряда Фурье тождеством $S_n(f) = e^{i(n+1)t}(I - R)(e^{-i(2n+1)t}R(e^{int}f))$ (равенство легко проверяется на экспонентах e^{imt}, а затем продолжается на всё $L_p[0,2\pi]$ по линейности и непрерывности). Следовательно, $\|S_n\| \le \|I - R\| \cdot \|R\|$, то есть последовательность операторов S_n равномерно ограничена. Кроме того, S_n поточечно сходятся к I на плотном в $L_p[0,2\pi]$ подпространстве $E[0,2\pi]$, что для равномерно ограниченной последовательности означает поточечную сходимость на всём пространстве. □

Другие приложения читатель найдёт в приводимых ниже упражнениях.

Упражнения

1. Пусть $1 \le p \le 2$. Тогда оператор Фурье F продолжается с $L_1(-\infty,\infty) \cap L_2(-\infty,\infty)$ до непрерывного оператора, действующего из $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_{p'}(-\infty,\infty)$.

2. Пусть $1 < p \le 2$ и $f \in L_p[0,2\pi]$. Тогда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}_n\right|^{p'} < \infty$.

3. Пусть $1 \le p \le 2$, $a_n \in \mathbb{C}$ и $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ сходится в метрике $L_{p'}[0,2\pi]$.

4. Рассмотрите оператор Рисса R как оператор, действующий из $L_p[0,2\pi]$ в $L_p[0,2\pi]$. Вычислите сопряжённый к нему оператор.

5. В упражнениях 10-13 п. 10.4.4 было доказано, что для оператора Рисса (там этот оператор появлялся под псевдонимом $\widetilde{P}$) $\|R\|_{\infty,\infty} = \infty$. Опираясь на двойственность между L_∞ и L_1, докажите, что $\|R\|_{1,1} = \infty$.

6. Опишите те пары (p,q), для которых $\|R\|_{p,q} < \infty$.

14.4. Комментарии к упражнениям

Параграф 14.1.3

Упражнение 9. По образцу леммы 1 п. 8.3.3.

Упражнение 10. Воспользоваться предыдущим упражнением и теоремой 3 п. 3.1.4.

Упражнение 12. По определению меры Лебега через внешнюю меру, любое измеримое множество A на отрезке можно приблизить открытым множеством B так, что $A \subset B$ и $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$. Открытое множество, в свою очередь, можно приблизить изнутри конечным объединением отрезков. При этом характеристические функции будут приближать соответствующие характеристические функции в L_p-метрике. Переходом к линейным комбинациям получаем, что кусочно-постоянными функциями можно приблизить в L_p на отрезке любую конечнозначную.

Упражнение 14. Множество функций вида $\mathbf{1}_{[c,d]}$, где $[c,d] \subset [0,1]$ – это несчётное множество, все попарные расстояния между элементами которого равны единице. В сепарабельном пространстве «такие звери не водятся».

Параграф 14.1.6

Упражнение 6. Аналогично теореме о свёртке функций из L_1 (п. 4.6.3).

Упражнение 7. Рассмотреть пространство E ядер K, подчиняющихся условию $\|\widetilde{K}\|_\infty < \infty$, наделив его нормой $\|K\| = \|\widetilde{K}\|_\infty$. Каждый элемент пространства E можно отождествить с функцией $s:[0,1] \to L_1[0,1]$, действующей по правилу $[s(t)](x) = K(t,x)$. Доказать, что функция s измерима по Борелю. Отсюда по аналогии с теоремой о приближении измеримой функции простыми доказать, что ядра вида $K(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(t) g_k(x)$, где A_k – попарно непересекающиеся измеримые множества, а g_k – ограниченная последовательность элементов пространства $L_1[0,1]$, образуют плотное множество в E. Требуемую формулу $\|T\| = \|\widetilde{K}\|_\infty$ доказать вначале для ядер вида $K(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(t) g_k(x)$. Общий результат получить предельным переходом.

Параграф 14.2.6

Упражнение 1. Воспользоваться упражнением 6 п. 14.2.4.

Упражнение 2. Вначале отметим, что функции $x_n(t)$ бесконечно дифференцируемы и быстро убывают на бесконечности. Соответственно, они и их линейные комбинации лежат в $L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_2(-\infty,\infty)$, и для интересующих нас функций $F_2 = F$. Более того, к ним можно применять формулу $F(f') = it \cdot F(f)$ (теорема 1 п. 14.2.4).

Доказательство будем проводить индукцией по n. При $n = 0$ утверждение следует из равенства $F(x_0) = \sqrt{2\pi}\, x_0$ (пример 3 п. 14.2.2). Пусть теперь $F(X_n) \subset X_n$, докажем, что $F(X_{n+1}) \subset X_{n+1}$. Воспользуемся формулой $x_n' = nx_{n-1} - x_{n+1}$:

$$F(x_{n+1}) = F\left(nx_{n-1} - x_n'\right) = nF(x_{n-1}) - itF(x_n) \subset X_{n-1} + tX_n \subset X_{n+1}.$$

Поскольку, по предположению индукции, функции $F(x_k)$, $k = 0,1,...,n$, также лежат в X_{n+1}, этим доказано требуемое включение.

Упражнение 8. Рассмотрим в l_2 некоторое незамкнутое линейное подпространство E (например, $E = \mathrm{Lin}\{e_n\}_1^\infty$, где $\{e_n\}_1^\infty$ – канонический базис пространства l_2). Введём $U_i : l_2 \to l_2 \times l_2$ – операторы естественного вложения: $U_1 x = (x,0)$, $U_2 x = (0,x)$. Рассмотрим $F = \{(x,-x) : x \in E\}$ – подпространство линейного пространства $l_2 \times l_2$. Пусть $j : l_2 \times l_2 \to (l_2 \times l_2)/F$ – фактор-отображение. Требуемые пространства X, Y будут подпространствами в линейном пространстве $(l_2 \times l_2)/F$: $X = jU_1(l_2)$, $Y = jU_2(l_2)$, наделённые нормами, наследуемыми из l_2: $\|jU_1(s)\|_X = \|jU_2(s)\|_Y = \|s\|_{l_2}$. Определение норм корректно, и пространства X, Y будут пространствами, изоморфными l_2: соответствующими изоморфизмами будут операторы jU_1 и jU_2. При этом на E операторы jU_1 и jU_2 совпадают и переводят E в $X \bigcap Y$. То есть $X \bigcap Y$ будет изоморфно нормированному пространству E и не будет банаховым пространством. Короче всю эту конструкцию можно описать так: мы берём две копии пространства l_2 и «склеиваем» их по неполному подпространству E.

Упражнение 9. Таким условием будет следующее: X и Y являются линейными подпространствами некоторого линейного пространства G; и на G задана сходимость $\xrightarrow{G}$, обладающая следующими свойствами:

- если $g_n, g \in X$ и $\|g_n - g\|_X \to 0$, то для некоторой подпоследовательности индексов $g_{n_k} \xrightarrow{G} g$;
- если $g_n, g \in Y$ и $\|g_n - g\|_Y \to 0$, то для некоторой подпоследовательности индексов $g_{n_k} \xrightarrow{G} g$;
- если $g_n, g, h \in G$, $g_n \xrightarrow{G} g$ и $g_n \xrightarrow{G} h$, то $g = h$.

В упражнении 7 роль такого G может играть пространство $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ измеримых функций, наделённое сходимостью почти всюду.

Параграф 14.3.3

Упражнение 4. Воспользоваться леммой 1 п. 14.2.5.

15. Теоремы о неподвижных точках и их приложения

Пусть на множестве X задано отображение $f : X \to X$. Элемент $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f(x) = x$. К задаче поиска неподвижных точек можно свести многие, весьма непохожие на первый взгляд задачи из различных областей математики. Поэтому каждая из излагаемых в этой главе теорем существования неподвижных точек имеет многочисленные и часто весьма изящные применения.

15.1. Несколько классических теорем

15.1.1. Сжимающие отображения

Пусть X – метрическое пространство. Функция $f : X \to X$ называется *сжимающим отображением*, если существует такая константа $C \in [0,1)$, что для любых $x_1, x_2 \in X$

$$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le C\rho\big(x_1, x_2\big). \tag{1}$$

Теорема (С. Банах). Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда у отображения f существует единственная неподвижная точка $x_0 \in X$. Более того, для любого $y_0 \in X$ последовательность итераций y_n, задаваемая рекуррентной формулой $y_n = f(y_{n-1})$, сходится к x_0.

Доказательство. Начнём с единственности. Пусть $x_0, x_1 \in X$ – неподвижные точки отображения f. Тогда $\rho\big(x_0, x_1\big) = \rho\big(f(x_0), f(x_1)\big) \le C\rho\big(x_0, x_1\big)$, где $C < 1$ – константа из определения сжимающего отображения. Неравенство $\rho\big(x_0, x_1\big) \le C\rho\big(x_0, x_1\big)$ может выполняться, только если $\rho\big(x_0, x_1\big) = 0$.

Перейдём к свойствам последовательности y_n. Введём обозначение $d = \rho\big(y_0, y_1\big)$. Последовательно подставляя в оценку $\rho\big(y_n, y_{n+1}\big) = \rho\big(f(y_{n-1}), f(y_n)\big) \le C\rho\big(y_{n-1}, y_n\big)$ значения $n = 1, 2, \ldots$, получим, что $\rho\big(y_1, y_2\big) \le Cd$, $\rho\big(y_2, y_3\big) \le C^2 d$, …, $\rho\big(y_n, y_{n+1}\big) \le C^n d$. Следовательно, для любых $n < m$ имеем:

$$\rho\big(y_n, y_m\big) \le \rho\big(y_n, y_{n+1}\big) + \rho\big(y_{n+1}, y_{n+2}\big) + \ldots + \rho\big(y_{m-1}, y_m\big) \le$$
$$\le \big(C^n + C^{n+1} + \ldots\big)d = \frac{C^n d}{1 - C} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0.$$

Ввиду полноты пространства это означает, что последовательность y_n сходится. Обозначим предел этой последовательности через x_0. Нам

осталось показать, что x_0 – неподвижная точка отображения f. Действительно,
$$\rho(x_0, f(x_0)) \le \rho(x_0, f(y_n)) + \rho(f(y_n), f(x_0)) \le \rho(x_0, y_{n+1}) + C\rho(y_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
то есть $\rho(x_0, f(x_0)) = 0$, и $x_0 = f(x_0)$. □

Упражнения

1. Любое сжимающее отображение непрерывно.
2. Пусть X – нормированное пространство. Для того, чтобы линейный оператор $T: X \to X$ осуществлял сжимающее отображение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\|T\| < 1$. Что будет в этом случае неподвижной точкой?
3. Теорема Банаха даёт не только существование неподвижной точки, но и способ её приближённого вычисления. Докажите следующую оценку скорости сходимости приближений y_n к неподвижной точке x_0: $\rho(y_n, x_0) \le \dfrac{C^n d}{1-C}$, где C – константа из (1), а $d = \rho(y_0, y_1)$. Приведите пример сжимающего отображения на прямой, для которого эта оценка не улучшаема.
4. Приведите пример отображения $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не имеющего неподвижных точек и подчиняющегося следующему ослабленному варианту условия (1): для любых $x_1, x_2 \in X$, не равных между собой, $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2)$.
5. Свойство быть сжимающим отображением в нормированном пространстве может нарушаться при замене исходной нормы на эквивалентную. Приведите пример.
6. Опишите отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, являющиеся сжимающими во всех нормах на $\mathbb{R}^2$.
7. Пусть X – полное метрическое пространство, K – компакт и непрерывная функция $F: K \times X \to X$ является равномерно сжимающей по второй переменной: существует такая константа $C \in [0,1)$, что для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого $t \in K$ выполнено неравенство $\rho(F(t, x_1), F(t, x_2)) \le C\rho(x_1, x_2)$. Тогда для любого $t \in K$ существует единственное решение x уравнения $F(t, x) = x$, причём это решение $x(t)$ непрерывно зависит от t.
8. Докажите следующую теорему о неявной функции: пусть функция $\Phi(t, x)$ определена и непрерывна в полосе $\Pi = \{(t, x): t \in [a, b], x \in \mathbb{R}\}$, причём Φ непрерывно дифференцируема по второй переменной и Φ'_x подчиняется во всей полосе неравенству $m \le \Phi'_x \le M$, где $m, M \in (0, +\infty)$. Тогда для любого $t \in [a, b]$ существует единственное решение уравнения $\Phi(t, x) = 0$, причём это решение непрерывно зависит от t.

9. Напомним, что обратимость оператора $U \in L(X)$ можно трактовать как существование и единственность решения уравнения $Ux = b$ при любой правой части $x \in X$. Выведите теорему о малом возмущении единичного оператора (если $T \in L(X)$ и $\|T\| < 1$, то оператор $I - T$ обратим) из теоремы о сжимающем отображении.

15.1.2. Свойство неподвижной точки. Теорема Брауэра

Определение 1. Топологическое пространство X обладает *свойством неподвижной точки*, если любая непрерывная функция $f : X \to X$ имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Пример 1. Отрезок $[0,1]$ обладает свойством неподвижной точки.

Действительно, пусть $f:[0,1] \to [0,1]$ – непрерывная функция. Рассмотрим два множества: $A = \{t \in [0,1] : f(t) \le t\}$ и $B = \{t \in [0,1] : f(t) \ge t\}$. Эти множества замкнуты и в объединении дают весь отрезок. Значит, ввиду связности отрезка множества A и B пересекаются. Любая точка множества $A \bigcap B$ будет требуемой неподвижной точкой.

Пример 2. Окружность на плоскости не обладает свойством неподвижной точки. В качестве отображения без неподвижных точек можно взять, скажем, центральную симметрию окружности.

Важнейший класс примеров поставляет следующая теорема Брауэра.

Теорема 1. Каждый выпуклый компакт в конечномерном нормированном пространстве обладает свойством неподвижной точки.

Относительно элементарное доказательство этой теоремы в терминах комбинаторных свойств симплексов, не опирающееся на сложные топологические понятия, можно найти в учебнике Куратовского [Kur], т. 1, § 28.[1]

Приведём пример применения теоремы Брауэра.

Теорема 2. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, задаваемый матрицей, все элементы $a_{i,j}$ которой неотрицательны. Тогда A обладает собственным вектором с неотрицательными координатами.

---

[1] Упомянутое доказательство предложено Кнастером, Мазуркевичем и Куратовским, так что изложение в [Kur] принадлежит одному из авторов рассуждения. Мы вообще считаем чрезвычайно полезным для начинающего обращаться к учебникам, написанным не просто педагогами, знающими и умеющими хорошо излагать материал, а людьми, внесшими существенный вклад в создание и разработку соответствующих разделов науки. В последнем случае читатель имеет шанс ознакомиться не только с результатами, но и, что ещё важнее, со способами мышления людей, доказавших продуктивность своего подхода к математике.

Доказательство. Введём обозначение $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1,...,x_n) : x_k \geq 0, k = 1,\dots,n\}$. По условию, $A(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathbb{R}_+^n$. Если в $\mathbb{R}_+^n$ существует ненулевой вектор x с $Ax = 0$, то это и будет требуемый собственный вектор (с собственным числом 0). Поэтому можем считать, что $Ax \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Рассмотрим функционал $s(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ – сумма координат и компакт $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n : s(x) = 1\}$. Согласно теореме Брауэра, отображение $f : K \to K$, действующее по правилу $f(x) = \frac{Ax}{s(Ax)}$, должно иметь неподвижную точку $x_0 \in K$. Для этой точки $\frac{Ax_0}{s(Ax_0)} = x_0$, то есть x_0 – это собственный вектор с собственным числом $s(Ax_0)$. □

Упражнения

1. Если топологическое пространство X несвязно (то есть его можно разбить в объединение двух непересекающихся замкнутых множеств), то X не обладает свойством неподвижной точки.
2. Если X гомеоморфно пространству со свойством неподвижной точки, то X само имеет это свойство.

В теории топологических пространств аналогом понятия дополняемого подпространства служит понятие ретракта. Подпространство Y топологического пространства X называется *ретрактом*, если существует такое непрерывное отображение $P : X \to Y$ (называемое *ретракцией*), что $Py = y$ для всех $y \in Y$.

3. Каждый ретракт топологического пространства со свойством неподвижной точки сам обладает свойством неподвижной точки.
4. Опираясь на предыдущее упражнение, приведите пример компакта в $\mathbb{R}^2$, обладающего свойством неподвижной точки, но не гомеоморфного выпуклому компакту.
5. Единичная сфера конечномерного нормированного пространства не является ретрактом замкнутого единичного шара.
6. Постройте ретракцию замкнутого единичного шара пространства l_2 на единичную сферу этого пространства.
7. Замкнутый единичный шар пространства l_2 не обладает свойством неподвижной точки.

15.1.3. Разложения единицы и аппроксимация непрерывных отображений конечномерными

Определение 1. Пусть K – непустое подмножество метрического пространства X, U_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ – открытые множества, и $\bigcup_{j=1}^{n} U_j \supset K$. Набор функций $\varphi_j : K \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ называется *разложением единицы на* K, *подчинённым покрытию* $\{U_j\}_1^n$, если $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \equiv 1$, $\varphi_j \geq 0$ и $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ при всех j.

Теорема 1. В описанных выше условиях существует разложение единицы на K, подчинённое покрытию $\{U_j\}_1^n$.

Доказательство. Множества $U_j^c = X \setminus U_j$ замкнуты. Если хотя бы одно из U_j^c пусто, то $U_j = X \supset K$ и задача решается тривиальным образом: для этого индекса j возьмём $\varphi_j \equiv 1$, а для $k \neq j$ положим $\varphi_k \equiv 0$. Следовательно, можно предполагать непустоту всех U_j^c. Рассмотрим на K функции $g_j(x) = \rho(x, U_j^c)$. Эти функции неотрицательны, непрерывны (п. 1.3.3) и обладают следующим свойством: $x \in U_j$ в том и только том случае, если $g_j(x) \neq 0$. Так как каждая точка $x \in K$ лежит хотя бы в одном из U_j, функция $g = \sum_{j=1}^{n} g_j$ нигде на K не обращается в ноль. В качестве требуемых φ_j можно взять функции $\varphi_j = \frac{g_j}{g}$. Эти функции непрерывны (знаменатель не обращается в ноль), неотрицательны, $\operatorname{supp} \varphi_j = \operatorname{supp} g_j = U_j$ и $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} g_j = 1$. □

Следующее определение обобщает на нелинейный случай понятие конечномерного оператора.

Определение 2. Отображение g множества X в линейное пространство Y называется конечномерным, если $\dim \operatorname{Lin} g(X) < \infty$.

Теорема 2. Пусть K – предкомпакт в нормированном пространстве Y. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное конечномерное отображение $g_\varepsilon : K \to Y$ с $g_\varepsilon(K) \subset \mathrm{conv}K$, равномерно приближающее на K единичный оператор с точностью до ε: $\sup\limits_{x\in K}\|g_\varepsilon(x) - x\| \le \varepsilon.$

Доказательство. Выберем в K конечную ε-сеть $y_1, y_2, ..., y_n$. Тогда открытые шары $U_k = B(y_k, \varepsilon)$ образуют покрытие множества K. Пусть $\varphi_j : K \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n,$ – разложение единицы на K, подчинённое покрытию $\{U_j\}_1^n$. Положим $g_\varepsilon(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) y_j$. Непрерывность так определённого отображения следует из непрерывности всех ϕ_j. Далее, $g_\varepsilon(K) \subset \mathrm{conv}K,$ так как суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) y_j$ – это выпуклые комбинации точек $y_j \in K.$ Осталось проверить, что $\sup\limits_{x\in K}\|g_\varepsilon(x) - x\| \le \varepsilon$.

Пусть $x \in K$ – произвольный элемент. Обозначим через N множество индексов $1 \le j \le n,$ для которых $\varphi_j(x) \ne 0.$ По определению разложения единицы, для $j \in N$ имеет место включение $x \in B(y_k, \varepsilon),$ то есть $\|x - y_j\| < \varepsilon.$ Соответственно,

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) y_j - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\cdot x\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)(y_j - x)\right\| \le$$

$$\le \sum_{j\in N} \varphi_j(x)\|(y_j - x)\| < \varepsilon.$$

Теорема 3. Пусть K – выпуклый компакт в нормированном пространстве Y. Тогда любое непрерывное отображение $f : K \to K$ может быть с любой степенью точности равномерно приближено конечномерными непрерывными отображениями множества K в себя.

Доказательство. Пусть g_ε – функция из теоремы 2. Ввиду выпуклости, $g_\varepsilon(K) \subset K.$ Легко видеть, что композиция $g_\varepsilon \circ f : K \to K$ – это конечномерное непрерывное отображение, приближающее f с точностью до ε: $\sup\limits_{x\in K}\|g_\varepsilon(f(x)) - f(x)\| \le \sup\limits_{y\in K}\|g_\varepsilon(y) - y\| \le \varepsilon.$ □

Упражнения

Хотя в условиях теоремы 2 речь идёт о приближении единичного (следовательно, линейного) оператора, отображение g_ε не всегда можно выбрать линейным оператором (точнее, ограничением на K линейного оператора).

1. Если в условиях теоремы 2 пространство Y обладает свойством поточечной аппроксимации (п. 11.2.2), то в качестве функции g_ε можно взять ограничение на K некоторого линейного оператора.
2. Если для любого предкомпакта $K \subset Y$ в качестве функции g_ε из теоремы 2 можно взять линейный конечномерный оператор, то для такого Y выполнен аналог теоремы 2 п. 11.3.2: для любого нормированного пространства X и любого компактного оператора $T \in L(X,Y)$ существует последовательность конечномерных операторов $T_n \in L(X,Y)$, сходящаяся по норме к оператору T.

15.1.4. Принцип Шаудера

В этом параграфе теорема Брауэра о неподвижной точке будет распространена с конечномерного случая на бесконечномерный.

Определение 1. Пусть X – метрическое пространство. Элемент $x \in X$ называется *ε-неподвижной точкой отображения* $f : X \to X$, если $\rho(f(x), x) < \varepsilon$.

Лемма 1. Пусть X – компактное метрическое пространство. Тогда для существования у непрерывного отображения $f : X \to X$ неподвижной точки достаточно, чтобы f обладало ε-неподвижной точкой для каждого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Воспользовавшись для $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ существованием ε-неподвижной точки, получим последовательность $x_n \in X$ с $\rho(f(x_n), x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Не нарушая общности, можем предположить, что у последовательности x_n существует предел (иначе заменим x_n сходящейся подпоследовательностью). Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ через x. Тогда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ и $\rho(f(x), x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x_n), x_n) = 0$. То есть $f(x) = x$, и x – это требуемая неподвижная точка. □

Лемма 2. Пусть Y – нормированное пространство, $K \subset Y$ – выпуклый компакт и $f : K \to K$ – непрерывное конечномерное отображение. Тогда f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Введём обозначения $X = \operatorname{Lin} f(K)$, $\widetilde{K} = X \bigcap K$. Тогда X – конечномерное нормированное пространство, $\widetilde{K} \subset X$ – выпуклый компакт и $f(\widetilde{K}) \subset f(K) \subset X \bigcap K = \widetilde{K}$. По теореме Брауэра, отображение f имеет неподвижную точку в $\widetilde{K}$. Эта неподвижная точка будет лежать и в K. □

Теорема 1 (принцип Шаудера). Каждый выпуклый компакт в нормированном пространстве обладает свойством неподвижной точки.

Доказательство. Пусть Y – нормированное пространство, $K \subset Y$ – выпуклый компакт и $f : K \to K$ – непрерывное отображение. Согласно лемме 1, нам достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ у f есть ε-неподвижная точка. Воспользовавшись теоремой 3 п. 15.1.3, найдём такое конечномерное непрерывное отображение $f_\varepsilon : K \to K$, что $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in K$. По лемме 2, у отображения f_ε есть неподвижная точка. Эта неподвижная точка x_ε отображения f_ε для исходного отображения f будет ε-неподвижной точкой: $\rho(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) = \rho(f_\varepsilon(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. □

Дадим ещё одну удобную в приложениях переформулировку принципа Шаудера.

Теорема 2. Пусть V – выпуклое замкнутое, ограниченное подмножество банахова пространства, $F : V \to V$ – непрерывное отображение и $F(V)$ – предкомпакт. Тогда у отображения F есть неподвижная точка.

Доказательство. Обозначим через K замыкание выпуклой оболочки множества $F(V)$. По условию, K – выпуклый компакт, $F(K) \subset F(V) \subset K$, то есть F можно рассматривать как отображение компакта K в себя. Остаётся применить теорему 1. □

Отметим, что принцип Шаудера (1927 г.) имеет место для выпуклых компактов не только в банаховых, но и в локально выпуклых топологических векторных пространствах (Лерэ, Шаудер, 1946 г.). Он обобщается на многозначные отображения (Kakutani, 1941 г., см. учебник Канторовича и Акилова [К-А], глава 16, § 5, где приведено также приложение к математической экономике).

Упражнения

Множество V в линейном пространстве X называется *конусом*, если оно устойчиво относительно сложения элементов и умножения на положительный скаляр. Пусть $F : X \to \mathbb{R}$ – такой линейный функционал, что $F(v) > 0$ для любого $v \in V \setminus \{0\}$. Тогда множество $V_F = \{v \in V : F(v) = 1\}$ называется *базой конуса* V.

1. Конус и база конуса – это выпуклые множества.
2. (Абстрактный вариант теоремы 2 п. 15.1.2.) Пусть V – конус в банаховом пространстве X, имеющий компактную базу, $T \in L(X)$ и $T(V) \subset V$. Тогда у оператора T есть собственный вектор, лежащий в V.

3. Пусть V – замкнутый конус в банаховом пространстве X, $T : X \to X$ – компактный оператор, $T(V) \subset V$. Пусть, далее, $F \in X^*$ – такой функционал, что $F(v) > 0$ для любого $v \in V \setminus \{0\}$. Тогда, если база V_F ограничена и $\inf\left\{x^*(Tv) : v \in V_F\right\} > 0$, то у оператора T есть собственный вектор, лежащий в V.
4. Существует ли ограниченная замкнутая база у конуса всех неотрицательных функций в $L_1[0,1]$? Существует ли у этого конуса компактная база?
5. Те же вопросы для конуса всех неотрицательных функций в $L_2[0,1]$.
6. Рассмотреть интегральный оператор $T : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $(Tf)(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, у которого не существует собственных функций (см. пример 1 п. 11.1.6). Не противоречит ли этот пример упражнению 3, если в качестве V взять конус всех неотрицательных функций, а в качестве F – функционал интегрирования по отрезку: $F(f) = \int\limits_0^1 f(t)dt$?

15.2. Приложения к дифференциальным уравнениям и теории операторов

15.2.1. Теоремы Пикара и Пеано существования решения задачи Коши дифференциального уравнения

Напомним, что задачей Коши дифференциального уравнения $y' = f(t, y)$ называется задача отыскания непрерывно дифференцируемой функции $y(t)$, определённой в окрестности точки t_0 и удовлетворяющей как самому уравнению, так и заданному начальному условию $y(t_0) = y_0$. В случае непрерывной функции $f(t, y)$ задача Коши эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \qquad (1)$$

Теорема Пикара. Пусть функция $f : [t_0, T] \times [y_0 - \theta, y_0 + \theta] \to [-M, M]$ измерима и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной с константой $\gamma > 0$, не зависящей от первой переменной. Тогда существует такое $\tau > 0$, что на отрезке $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ уравнение (1) имеет решение и это решение единственно. В качестве τ можно взять любое число, строго меньшее чем $\tau_0 = \min\left\{\frac{\theta}{M}, \frac{1}{\gamma}, T - t_0\right\}$.

Доказательство. В банаховом пространстве $C[t_0, t_0 + \tau]$ рассмотрим подмножество U всех функций $y(t)$, удовлетворяющих на $[t_0, t_0 + \tau]$ условию $|y(t) - y_0| \le \theta$. Зададим следующее отображение $F: U \to C[t_0, t_0 + \tau]$: $(F(y))(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$. Решения уравнения (1) – это неподвижные точки отображения F.

Проверим, что F осуществляет сжимающее отображение множества U в себя. Во-первых, для любого $y \in U$ имеем

$$|(F(y))(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right| \le M\tau \le \theta,$$

то есть $F(y) \in U$. Следовательно, $F(U) \subset U$. Далее, для любых $y_1, y_2 \in U$

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \max_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))ds\right| \le \gamma\tau\|y_1 - y_2\|,$$

а по построению $\gamma\tau < 1$. То есть F – сжимающее отображение. Наконец, множество U замкнуто в $C[t_0, t_0 + \tau]$, соответственно, U – полное метрическое пространство в рассматриваемой нами равномерной метрике. Следовательно, применима теорема Банаха о сжимающем отображении, которая даёт нам существование и единственность неподвижной точки. □

Теорема Пеано. Пусть функция $f: [t_0, T] \times [y_0 - \theta, y_0 + \theta] \to [-M, M]$ измерима и равномерно относительно первой переменной непрерывна по второй переменной. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $t \in [t_0, T]$ и любых $y_1, y_2 \in [y_0 - \theta, y_0 + \theta]$, если $|y_1 - y_2| \le \delta$, то $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le \varepsilon$. Тогда у уравнения (1) существует решение на отрезке $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, где в качестве τ можно взять $\min\left\{\frac{\theta}{M}, T - t_0\right\}$.

Доказательство. Рассмотрим такое же множество U и такое же отображение F, как и в предыдущем доказательстве. Только в отличие от теоремы 1 существование неподвижной точки будет выводиться не из теоремы о сжимающем отображении, а из принципа Шаудера в формулировке из теоремы 2 п. 15.1.4. В частности, поэтому в теореме утверждается существование, но не утверждается единственность решения.

Проверим выполнение условий теоремы 2 п. 15.1.4 в нашем случае. Множество U – это замкнутый шар пространства $C[t_0, t_0 + \tau]$ радиуса θ с центром в функции, тождественно равной y_0. Поэтому U – выпуклое замкнутое, ограниченное подмножество пространства $C[t_0, t_0 + \tau]$. Доказательство включения $F(U) \subset U$ из теоремы Пикара сохраняет свою силу. Проверим непрерывность отображения F. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta(\varepsilon)$ из условия равномерной непрерывности по y функции $f(t, y)$. Тогда для любых функций $y_1, y_2 \in U$ с $\|y_1 - y_2\| < \delta(\varepsilon/\tau)$ имеем $|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \le \varepsilon/\tau$ и, следовательно,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \max_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| \le \varepsilon.$$

Наконец, проверим, что $F(U)$ – это предкомпакт. Так как $F(U) \subset U$, а U – это шар, $F(U)$ – ограниченное множество. Согласно теореме Арцела, нам осталось доказать равностепенную непрерывность семейства функций $F(U)$. Для любой функции $g \in F(U)$ существует функция $y \in U$ с $F(y) = g$. Соответственно, для любых $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \tau]$ имеем:

$$|g(t_1) - g(t_2)| = |(F(y))(t_1) - (F(y))(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) ds \right| \le M|t_1 - t_2|.$$

То есть семейство $F(U)$ не просто равностепенно непрерывно, а подчиняется условию Липшица с общей константой M.

Итак, все условия теоремы 2 п. 15.1.4 проверены, чем доказано существование требуемой неподвижной точки. □

Упражнения

1. На примере задачи Коши $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ убедитесь, что условия теоремы Пеано действительно не гарантируют единственности решения.
2. Опираясь на упражнение 7 п. 15.1.1, докажите, что в теореме Пикара решение задачи Коши непрерывно зависит от начального условия y_0.
3. Придумайте какие-нибудь условия разрешимости в $C[a,b]$ интегрального уравнения $y(t) = \int_a^b f(s,t,y(s)) ds$ по схеме: «Если ядро f маленькое и хорошее, то у уравнения есть решение в данном шаре с центром в нуле».

15.2.2. Теорема Ломоносова об инвариантном подпространстве

Напомним, что замкнутое подпространство Y пространства X называется *инвариантным подпространством* для оператора $A \in L(X)$, если $A(Y) \subset Y$. Подпространство $Y \subset X$ назовём *нетривиальным*, если оно не совпадает ни с нулём, ни со всем пространством X. Знание инвариантных подпространств помогает понять структуру оператора. Так, например, в линейной алгебре для построения жордановой формы выделяют корневые подпространства; разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств позволяет сводить решение уравнения $Ax = b$ к уравнениям в соответствующих подпространствах. Пожалуй, наиболее важная на сегодняшний день нерешённая задача теории операторов – это *проблема инвариантного подпространства*: у любого ли ограниченного оператора в гильбертовом пространстве существует нетривиальное инвариантное подпространство?

Проблеме инвариантного подпространства посвящено много научных работ (см., например, монографию [Bea] или обзоры [AAB] и [Nik]). В различных банаховых пространствах (например, в l_1) известны примеры непрерывных операторов без нетривиальных инвариантных подпространств. Известны и положительные результаты, среди которых первым была теорема фон Неймана: у любого компактного оператора в гильбертовом пространстве существует нетривиальное инвариантное подпространство. Теорема фон Неймана была доказана в 30-х годах XX века, но опубликована впервые была через 20 лет Ароншайном и Смитом, распространившими результат на случай банахова пространства. Ниже мы докажем теорему существования инвариантного подпространства, принадлежащую бывшему харьковчанину Виктору Ломоносову [Lom]. Теорема Ломоносова выделяется своей общностью и элегантностью как формулировки, так и доказательства.

Замечания.

(i) Пусть G – подмножество в X, для которого $A(G) \subset G$. Тогда $A(\operatorname{Lin} G) \subset \operatorname{Lin} G$.

(ii) Пусть E – линейное подпространство пространства X, $A(E) \subset E$. Тогда замыкание подпространства E также будет инвариантным для A.

(iii) Ядро оператора и замыкание образа – это инвариантные подпространства.

(iv) Для любого элемента $x \in X \setminus \{0\}$ множество $G = \{A^n x\}_{n=1}^{\infty}$ подчиняется условию замечания (i). Следовательно, замыкание линейной оболочки множества G образует инвариантное подпространство оператора A.

(v) Более общий пример. Пусть M – подалгебра алгебры $L(X)$ (то есть подпространство, содержащее вместе с любыми двумя своими элементами и их произведение), $x \in X \setminus \{0\}$. Определим *орбиту элемента* x как множество $M(x) = \{Tx : T \in M\}$. Тогда замыкание орбиты – это инвариантное подпространство для любого оператора из подалгебры M. **N.B.** Проведите проверку! Мы будем использовать этот пример.

Теорема Ломоносова. Пусть $A \in L(X) \setminus \{0\}$ – вполне непрерывный оператор в бесконечномерном банаховом пространстве. Тогда у всех операторов, коммутирующих с A, существует общее нетривиальное инвариантное подпространство.

Доказательство. Будем рассуждать методом «от противного», то есть предположим, что нет такого общего инвариантного подпространства. Зафиксируем открытый шар U в пространстве X таким образом, чтобы компакт K, образованный замыканием множества $A(U)$, не содержал нуля. Пусть M – подалгебра алгебры $L(X)$, состоящая из всех операторов, коммутирующих с A. Отметим, что орбита $M(x)$ любого ненулевого элемента плотна в X, иначе, согласно замечанию (v), замыкание орбиты было бы общим нетривиальным инвариантным подпространством для операторов из M. Поэтому для любой точки $s \in K$ можно найти такой оператор $T_s \in M$, что $T_s(s) \in U$. Тогда оператор T_s также переводит в U и некоторую окрестность V_s элемента s. Поскольку окрестности V_s при s, пробегающем множество K, образуют покрытие этого множества, мы можем выделить конечное подпокрытие. Другими словами, существует такое конечное подмножество $J \subset K$, что $\bigcup\limits_{s \in J} V_s \supset K$.

Пусть функции $\varphi_s \in C(K), s \in J$ образуют разложение единицы, подчинённое покрытию $\bigcup\limits_{s \in J} V_s$ множества K.[2] Введём в рассмотрение следующее отображение $F : K \to X$:

$$F(x) = A\left(\sum_{s \in J} \varphi_s(x) \cdot T_s(x)\right).$$

Для любой точки $x \in K$ ненулевыми в последней сумме будут только те слагаемые, где $\varphi_s(x) \neq 0$, то есть те, для которых V_s содержит элемент x. Если $x \in V_s$, то, по построению, $T_s(x) \in U$ и, следовательно, $F(x) \in K$. Таким образом, $F(K) \subset K$, и мы находимся в условиях принципа Шаудера.

[2] То есть $\varphi_s \geq 0$, $\sum\limits_{s \in J} \varphi_s \equiv 1$, и носитель функции φ_s лежит в соответствующем V_s.

Обозначим через x_0 неподвижную точку отображения F. Тогда x_0 будет неподвижной точкой и для следующего компактного оператора $T \in M$:
$$T = A\left(\sum_{s \in J} \varphi_s(x_0) T_s \right).$$

Рассмотрим собственное подпространство $Y = Ker(T - I)$. Согласно теореме п. 11.1.6, подпространство Y будет инвариантным для оператора A. Ввиду компактности оператора T подпространство Y конечномерно. Поскольку любой оператор в конечномерном пространстве имеет собственные числа, какое-то собственное число μ есть и у ограничения оператора A на подпространство Y. Обозначим через E собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному числу μ. Согласно той же теореме п. 11.1.6, подпространство E будет инвариантным для всех операторов, коммутирующих с оператором A. □

Следствие. Если оператор T коммутирует хотя бы с одним вполне непрерывным оператором, то у оператора T есть нетривиальные инвариантные подпространства. □

Упражнения

1. Пусть $A \in L(X)$; Y − инвариантное подпространство оператора A. Введём в рассмотрение операторы $A_1 \in L(Y)$ и $A_2 \in L(X/Y)$ − ограничение и факторизация оператора: $A_1(y) = A(y)$; $A_1([x]) = [Ax]$. Можно ли восстановить оператор A по операторам A_1 и A_2? Связаны ли каким-либо образом спектры этих операторов? Зависит ли ответ от размерностей входящих в условие трёх пространств?

Проверить, что:

2. Оператор сдвига $U(a_1, a_2, ...) = (0, a_1, a_2, ..)$ в l_2 не коммутирует ни с одним вполне непрерывным оператором, в то же время нетривиальные инвариантные подпространства у него есть.
3. Подмножество M алгебры $L(X)$, определённое в доказательстве теоремы Ломоносова, действительно образует подалгебру в $L(X)$.
4. Это подмножество замкнуто в смысле поточечной сходимости операторов. Будет ли оно замкнуто по норме?

Восстановить опущенные детали в доказательстве теоремы Ломоносова:

5. Почему возможен требуемый выбор шара U?
6. Будет ли F линейным оператором?
7. Почему применим принцип Шаудера?
8. Где использовалась бесконечномерность пространства? (В конечномерных пространствах теорема неверна. Контрпример: $A = I$.)

15.3. Общие неподвижные точки семейства отображений

15.3.1. Теорема Какутани

Напомним, что диаметром множества V в метрическом пространстве X называется величина $\mathrm{diam}(V) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in V\}$.

Определение 1. *Радиусом множества V в точке $x \in V$* называется наименьший радиус $r_x(V)$ замкнутого шара с центром в x, содержащего всё множество V. Эквивалентное определение: $r_x(V) = \sup\{\rho(x, y) : y \in V\}$. Очевидно,

$$\mathrm{diam}(V) = \sup_{x \in V} r_x(V). \qquad (*)$$

Точка $x \in V$ называется **диаметральным элементом** множества V, если $r_x(V) = \mathrm{diam}(V)$.

Лемма 1. Пусть V – выпуклый компакт в нормированном пространстве X, состоящий более чем из одной точки. Тогда у V существует недиаметральный элемент, то есть существует $x \in V$, для которого $r_x(V) < \mathrm{diam}(V)$.

Доказательство. Зафиксируем положительное $\varepsilon < \mathrm{diam}(V)$ и выберем в множестве V ε-сеть $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуемый недиаметральный элемент x выберем как среднее арифметическое элементов ε-сети: $x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Рассмотрим произвольный $y \in V$. Тогда $\|x - y\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y)\right\| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k - y\|$. По крайней мере, одно из слагаемых в последней сумме не превосходит ε, а все остальные оцениваются сверху числом $\mathrm{diam}(V)$. Следовательно, $\|x - y\| \le \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(V) + \frac{1}{n}\varepsilon$. Перейдя к супремуму по $y \in V$, получаем $r_x(V) \le \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(V) + \frac{1}{n}\varepsilon < \mathrm{diam}(V)$. □

Лемма 2. Пусть V – выпуклый компакт в нормированном пространстве X, состоящий более чем из одной точки. Тогда существует непустой выпуклый компакт $V_0 \subset V$, $V_0 \ne V$, инвариантный относительно всех биективных изомерий компакта V в себя.

Доказательство. Воспользовавшись предыдущей леммой, выберем $x_0 \in V$ с $r_{x_0}(V) < \mathrm{diam}(V)$. Введём обозначение $r_0 = r_{x_0}(V)$ и в качестве требуемого V_0 возьмём множество всех $x \in V$, для которых $r_x(V) \le r_0$. По построению $x_0 \in V_0$, то есть V_0 не пусто. Далее, согласно (*), у V существуют точки с $r_x(V) > r_0$ (на самом деле, ввиду компактности, даже с $r_x(V) = \operatorname{diam} V$). Следовательно, $V_0 \neq V$.

Отметим, что точка $x \in V$ попадает в V_0 в том и только том случае, если расстояния от x до всех $y \in V$ не превосходят r_0. То есть V_0 можно записать в виде пересечения $V_0 = V \cap \left(\bigcap_{y \in V} \overline{B}(y, r_0) \right)$ выпуклых замкнутых множеств, поэтому V_0 само – выпуклое замкнутое множество. Осталось проверить инвариантность относительно всех биективных изометрий $T : V \to V$. Пусть $x \in V$, нам нужно доказать, что $T(x) \in V$. То есть нужно доказать, что $\|T(x) - y\| \leq r_0$ для любого $y \in V$. Действительно, ввиду биективности точка y имеет вид $y = T(z)$, $z \in V$. Соответственно, $\|T(x) - y\| = \|T(x) - T(z)\| = \|x - y\| \leq r_0$. □

Теорема Какутани. Пусть K – непустой выпуклый компакт в нормированном пространстве X. Тогда у всех биективных изометрий компакта K в себя существует общая неподвижная точка.

Доказательство. Рассмотрим семейство **W** всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств V компакта K, обладающих тем свойством, что

$$T(V) \subset V \text{ для любой биективной изометрии } T : K \to K. \qquad (**)$$

Упорядочим семейство **W** по убыванию множеств. Предлагаем читателю самостоятельно проверить, что пересечение любой цепи элементов семейства **W** – это снова элемент семейства **W**, то есть семейство **W** индуктивно упорядочено (непустоту пересечения элементов цепи гарантирует компактность множества K). По лемме Цорна, в **W** существует минимальный по включению элемент V. Из леммы 2 следует, что этот минимальный элемент не может содержать более одной точки. Следовательно, V состоит из одного элемента $x_0 \in K$, а условие (**) означает, что x_0 – неподвижная точка для всех биективных изометрий $T : K \to K$. □

Упражнения

1. Пусть V – некий шар нормированного пространства. Тогда (a) центр шара V – это общая неподвижная точка всех биективных изометрий $T : V \to V$; (b) других общих неподвижных точек всех биективных изометрий $T : V \to V$ нет.

2. Приведите пример шара в метрическом пространстве, где не выполнен пункт (a) предыдущего упражнения. То же для п. (b). Приведите пример, где не выполнен ни п. (a), ни п. (b).

По определению, банахово пространство X имеет *нормальную структуру*, если у любого выпуклого замкнутого ограниченного подмножества $V \subset X$, состоящего более чем из одной точки, существует недиаметральный элемент.

3. Любое конечномерное банахово пространство имеет нормальную структуру.
4. Гильбертово пространство имеет нормальную структуру.
5. Пространство l_1 не имеет нормальной структуры. Множеством, у которого все точки диаметральные, будет

$$V = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \in l_1 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1, x_k \geq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

6. Пространство c_0 не имеет нормальной структуры. Рассмотрите множество $V = \{x = (x_1, x_2, ...) \in c_0 : 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ...\}$.
7. Пространство $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ и $L_1[0,1]$ не имеет нормальной структуры.

15.3.2. Топологические группы

Определение 1. Группа G с заданной на ней отделимой по Хаусдорфу топологией τ называется *топологической группой*, если топология согласована с групповой структурой в следующем смысле:

1) операция $(x, y) \to x \cdot y$ произведения элементов непрерывна по совокупности переменных;
2) непрерывна операция $x \to x^{-1}$ перехода к обратному элементу.

Примерами топологических групп будут нормированное пространство с операцией сложения, единичная окружность в $\mathbb{C}$ с операцией умножения, множество всех унитарных матриц порядка n с операцией умножения матриц, наделённое метрикой из пространства операторов, группа обратимых элементов любой банаховой алгебры и многие другие группы, возникающие естественным образом в задачах анализа.

Для групп приняты операции над подмножествами, аналогичные введённым в п. 5.1.4 для линейных пространств: $A_1 A_2 = \{a_1 a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$; $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$. Обозначим через e единичный элемент топологической группы G, а через $\mathbb{O}_e$ – систему всех окрестностей элемента e. Предлагаем читателю самостоятельно проверить следующие свойства топологических групп. Доказательство очень похожих результатов будут приведены ниже в теме «Топологические векторные пространства».

(i) Для любого $x \in G$ множества вида xU, $U \in \mathbb{O}_e$, образуют базу окрестностей элемента x.

(ii) Таким же свойством обладает система множеств $U \cdot x$, $U \in \mathbb{O}_e$.

(iii) Для любой окрестности $W \in \mathbb{O}_e$ существует такая окрестность $U \in \mathbb{O}_e$, что $U \cdot U \subset W$.

(iv) Для любой окрестности $W \in \mathbb{O}_e$ существует такая окрестность $U \in \mathbb{O}_e$, что $U^{-1} \subset W$.

(v) Для любой окрестности $W \in \mathbb{O}_e$ существует такая окрестность $U \in \mathbb{O}_e$, что одновременно $U \cdot U^{-1} \subset W$, $U^{-1}U \subset W$ и $U \cdot U \subset W$.

Свойства (i) и (ii) означают, что степень близости элементов группы можно «измерять» с помощью окрестностей единичного элемента. Если $U \in \mathbb{O}_e$, условие $x^{-1}y \in U$ следует трактовать как «x приближает y с точностью U».

Определение 2. Пусть G – топологическая группа, Z – метрическое пространство. Отображение $f: G \to Z$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U \in \mathbb{O}_e$, что образы любых U-близких $x, y \in G$ близки с точностью до ε: $x^{-1}y \in U \quad \Rightarrow \quad \rho\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть G – компактная топологическая группа, Z – метрическое пространство. Тогда любое непрерывное отображение $f: G \to Z$ будет равномерно непрерывным.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись непрерывностью отображения f, для каждого $x \in G$ выберем такую окрестность $W_x \in \mathbb{O}_e$, что для любого $y \in G$, если $y \in xW_x$, то $\rho\big(f(x), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, по свойству (iii) топологических групп, для каждого $x \in G$ можно выбрать открытую окрестность $U_x \in \mathbb{O}_e$ так, что $U_x U_x \subset W_x$. Так как множества xU_x, $x \in G$ образуют открытое покрытие компакта G, можно выбрать конечное подпокрытие. То есть существует такое конечное подмножество $A \subset X$, что $\bigcup\limits_{x \in A} xU_x \supset G$. Положим $U = \bigcap\limits_{x \in A} U_x$. Проверим, что U – это требуемая окрестность из определения равномерной непрерывности. Пусть $x, y \in G$ и $x^{-1}y \in U$. Выберем такое $x_0 \in A$, что $x \in x_0 U_{x_0}$. В частности, $x \in x_0 W_{x_0}$, то есть $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, $y \in xU \subset x_0 U_{x_0} U_{x_0} \subset x_0 W_{x_0}$, то есть $\rho\big(f(y), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ и, по неравенству треугольника, $\rho\big(f(y), f(x_0)\big) < \varepsilon$. □

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующий аналог теоремы Арцела (п. 1.3.2).

Теорема 2. Пусть G − компактная топологическая группа. Для того, чтобы семейство F непрерывных скалярнозначных функций на G было предкомпактом в $C(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно (a) было равномерно ограниченным и (b) подчинялось следующему требованию *равностепенной непрерывности*: для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U \in \mathbb{O}_e$, что для любой функции $f \in F$ и любых $x, y \in G$, если только $x^{-1}y \in U$, то $\rho\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$. □

15.3.3. Мера Хаара

Определение 3. *Мерой Хаара* на топологической группе G называется ненулевая регулярная борелевская мера μ на G, инвариантная относительно сдвигов и симметрии: $\mu(sA) = \mu(As) = \mu(A^{-1}) = \mu(A)$ для любого борелевского подмножества $A \subset G$ и любого $s \in G$. Ненулевая регулярная борелевская мера на G, инвариантная относительно левых сдвигов, называется *левой мерой Хаара*, а инвариантная относительно правых сдвигов называется *правой мерой Хаара*.

Начиная с этого места и до конца параграфа G будет компактной топологической группой. Основная цель параграфа − доказать существование на такой группе меры Хаара. Доказательство будет опираться на теорему Какутани.

Для любого $s \in G$ определим *операторы* $L_s, R_s : C(G) \to C(G)$ *левого и правого сдвигов*: $(L_s f)(x) = f(sx)$, $(R_s f)(x) = f(xs)$. Определим также *оператор симметрии* $\Psi : C(G) \to C(G)$ формулой $(\Psi f)(x) = f(x^{-1})$.

Лемма 1. Операторы сдвига обладают следующими очевидными свойствами:

I. $L_e = I$, $L_s L_t = L_{ts}$, в частности, $(L_s)^{-1} = L_{s^{-1}}$.

II. $R_e = I$, $R_s R_t = R_{st}$, в частности, $(R_s)^{-1} = R_{s^{-1}}$.

III. $L_s R_t = R_t L_s$.

IV. Операторы L_s, R_s и Ψ − это биективные изометрии пространства $C(G)$.

V. $L_{s^{-1}} \Psi = \Psi R_s$. □

Далее, для любой функции $f \in C(G)$ определим множества $c_L(f)$ и $c_R(f)$ как замыкания выпуклых оболочек множеств всех левых и всех правых сдвигов функции f соответственно: $c_L(f) = \overline{\text{conv}}\{L_s f : s \in G\}$, $c_R(f) = \overline{\text{conv}}\{R_s f : s \in G\}$. Примем ещё одно обозначение: символом $\mathbf{1}$ обозначим функцию $\mathbf{1}_G$ – тождественную единицу на G.

Лемма 2. Пусть G – компактная топологическая группа. Тогда:

A. Для любой функции $f \in C(G)$ множество $c_L(f)$ компактно в $C(G)$.

B. Множество $c_L(f)$ инвариантно относительно всех операторов левого сдвига, причём эти операторы действуют биективно на $c_L(f)$.

C. Если $g \in c_L(f)$, то $c_L(g) \subset c_L(f)$.

D. Для любой функции $f \in C(G)$ существует такой скаляр a, что $a \cdot \mathbf{1} \in c_L(f)$.

Аналогичными свойствами обладают и множества $c_R(f)$:

A'. Для любой функции $f \in C(G)$ множество $c_R(f)$ компактно в $C(G)$.

B'. Множество $c_R(f)$ инвариантно относительно всех операторов правого сдвига, причём операторы правого сдвига действуют биективно на $c_R(f)$.

C'. Если $g \in c_R(f)$, то $c_R(g) \subset c_R(f)$.

D'. Для любой функции $f \in C(G)$ существует такой скаляр b, что $b \cdot \mathbf{1} \in c_R(f)$.

Доказательство. A. Введём обозначение $r = \|f\|$. Ввиду того, что сдвиги – это изометрии, все элементы вида $L_s f$, $s \in G$ лежат в $r\overline{B}_{C(G)}$. А так как $r\overline{B}_{C(G)}$ – выпуклое замкнутое множество, операции выпуклой оболочки и замыкания не выводят за пределы этого множества. Следовательно, $c_L(f) \subset r\overline{B}_{C(G)}$, чем доказана ограниченность множества $c_L(f)$. Множество $c_L(f)$ замкнуто, так что для доказательства компактности осталось проверить (теорема 2) равностепенную непрерывность.

Воспользуемся равномерной непрерывностью функции f (теорема 1) и для данного $\varepsilon > 0$ выберем такую окрестность $U \in \mathbb{O}_e$, что для любых $x, y \in G$ с $x^{-1}y \in U$ имеет место оценка $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$. Поскольку для любого $s \in G$ элементы sx и sy также близки: $(sx)^{-1}(sy) = x^{-1}s^{-1}sy = x^{-1}y \in U$, такая же оценка будет выполнена и для функции $L_s f$: $|(L_s f)(x) - (L_s f)(y)| = |f(sx) - f(sy)| \le \varepsilon$. Соответственно, эта же оценка сохранится для любой выпуклой комбинации $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f$ левых сдвигов: $\left|g(x) - g(y)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|(L_{s_k} f)(x) - (L_{s_k} f)(y)\right| \le \varepsilon.$ Переход к пределу не изменит этой оценки, то есть импликация $x^{-1} y \in U \quad \Rightarrow \quad \left|h(x) - h(y)\right| \le \varepsilon$ имеет место для любой функции $h \in c_L(f)$. Равностепенная непрерывность, а с нею и компактность множества $c_L(f)$ доказаны.

B. Семейство $H = \{L_s f : s \in G\}$ инвариантно относительно оператора L_t левого сдвига: $L_t H = \{L_t L_s f : s \in G\} = \{L_{st} f : s \in G\} \subset H.$ Ввиду линейности и непрерывности оператора L_t выпуклая оболочка и замыкание не портят инвариантности. Биективность оператора L_t на $c_L(f)$ следует из существования обратного $L_{t^{-1}}$, относительно которого $c_L(f)$ также инвариантно.

C. Если $g \in c_L(f)$, то, согласно B, $L_s g \in c_L(f)$ для любого $s \in G$. То есть $\{L_s g : s \in G\} \subset c_L(f)$. Остаётся воспользоваться выпуклостью и замкнутостью множества $c_L(f)$.

D. Применив теорему Какутани п. 15.3.1 к выпуклому компакту $c_L(f)$, получим существование элемента $g \in c_L(f)$, неподвижного относительно всех изометрий компакта $c_L(f)$. В частности, g – неподвижная точка всех операторов левого сдвига. Введём обозначение $a = g(e)$ и докажем, что $a \cdot \mathbf{1} = g$, то есть g и есть требуемая тождественная постоянная, лежащая в $c_L(f)$. Действительно, для любой точки $s \in G$ имеем $g(s) = (L_s g)(e) = g(e) = a$.

Свойства A' - D' множеств $c_R(f)$ можно либо доказывать аналогично, либо свести к разобранным свойствам A - D с помощью формулы $c_R(f) = \Psi\left(c_L(\Psi f)\right)$. □

Усилим утверждения D и D' предыдущей леммы.

Лемма 3. Для любой функции $f \in C(G)$ есть только один скаляр a с $a \cdot \mathbf{1} \in c_L(f)$ и только один скаляр b с $b \cdot \mathbf{1} \in c_R(f)$, причём $a = b$.

Доказательство. Обозначим множество тех скаляров a, для которых $a \cdot \mathbf{1} \in c_L(f)$, через A_f, а тех b, для которых $b \cdot \mathbf{1} \in c_R(f)$, через B_f. Докажем, что $a = b$ для любого $a \in A_f$ и любого $b \in B_f$. Этим будет доказано, что $A_f = B_f$ и что оба эти множества состоят из одной точки.

Для этого зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем выпуклые комбинации сдвигов функции f, приближающие $a \cdot \mathbf{1}$ и $b \cdot \mathbf{1}$ с точностью до ε:

$$\left\| a \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f \right\| < \varepsilon; \tag{1}$$

$$\left\| b \cdot \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j R_{t_j} f \right\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Действуя на $a \cdot \mathbf{1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f$ оператором $\mu_j R_{t_j}$, складывая по j и учитывая, что $R_{t_j} \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mu_j \geq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j = 1$, из (1) получаем, что $\left\| a \cdot \mathbf{1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j R_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon$. Аналогичным образом из (2) выводим, что $\left\| b \cdot \mathbf{1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j R_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon$ (не забудем про коммутирование операторов левого и правого сдвига!). Следовательно, $\| a \cdot \mathbf{1} - b\mathbf{1} \| < 2\varepsilon$, что ввиду произвольности ε даёт требуемое равенство $a = b$. □

Теорема 1 (A. Haar 1933, J. von Neumann, 1934). На любой компактной топологической группе G существует единственная вероятностная борелевская мера μ, являющаяся левой мерой Хаара. Эта мера будет одновременно мерой Хаара на G.

Доказательство. По теореме об общем виде элементарного интеграла (п. 8.3.2), существует биективное соответствие между регулярными борелевскими мерами на G и элементарными интегралами. Переформулируем задачу поиска левой меры Хаара в терминах элементарного интеграла. Нам нужно найти такой линейный функционал $\mathcal{I}$ на $C(G)$, называемый *левоинвариантным средним*, что:

(i) если $f \geq 0$, то $\mathcal{I}(f) \geq 0$;

(ii) $\mathcal{I}(\mathbf{1}) = 1$;

(iii) $\mathcal{I}(L_s f) = \mathcal{I}(f)$ для любого $s \in G$ и любой функции $f \in C(G)$.

Такой функционал уже встречался нам в п. 5.5.1, где было доказано его существование для коммутативной (полу)группы G, причём функционал был определён не только на $C(G)$, а даже на $l_\infty(G)$. Сейчас нас этот старый результат не устраивает: группа может быть некоммутативной, и, более того, нам требуется не только существование, но и единственность.

Начнём с единственности. Предположим, что такой функционал $\mathcal{I}$ существует. Тогда для любой функции $f \in C(G)$ и любого $g \in c_L(f)$ имеем ввиду (iii) $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f)$. Следовательно, $\mathcal{I}(f)$ равно той константе a, для которой $a \cdot \mathbf{1} \in c_L(f)$. Это рассуждение не только доказывает единственность, но и указывает путь построения функционала $\mathcal{I}$.

Докажем существование требуемого функционала. Для любого $f \in C(G)$ выберем число $\mathcal{I}(f)$ так, что $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbf{1} \in c_L(f)$. По предыдущим двум леммам такой выбор возможен и однозначен.

Пусть $f \geq 0$. Тогда $c_L(f)$ состоит только из неотрицательных функций. В частности, $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbf{1} \geq 0$, то есть $\mathcal{I}(f) \geq 0$. Этим проверена аксиома (i) левоинвариантного среднего. Далее, $\mathbf{1} \in c_L(\mathbf{1})$, то есть $\mathcal{I}(\mathbf{1}) = 1$, чем доказано условие (ii). Наконец, из п. C леммы 2 и однозначности выбора $\mathcal{I}(f)$ следует, что $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f)$ для любого $g \in c_L(f)$. Отсюда вытекает, в частности, аксиома (iii) левоинвариантного среднего.

Докажем линейность функционала $\mathcal{I}$. Однородность очевидна, проверим аддитивность. Пусть $f, g \in C(G)$. По построению, существует выпуклая комбинация левых сдвигов функции f, приближающая $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbf{1}$ с точностью до ε:

$$\left\| \mathcal{I}(f) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f \right\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\widetilde{g} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} g$. Так как $\widetilde{g} \in c_L(g)$, то $\mathcal{I}(\widetilde{g}) = \mathcal{I}(g)$. Следовательно, существует функция вида $\sum_{j=1}^{m} \mu_j L_{t_j} \widetilde{g}$ – выпуклая комбинация левых сдвигов функции $\widetilde{g}$, приближающая $\mathcal{I}(g) \cdot \mathbf{1}$:

$$\left\| \mathcal{I}(g) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j} L_{s_k} g \right\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Но из (3) аналогично тому, как это делалось выше в доказательстве леммы 3, легко вывести, что

$$\left\| \mathcal{I}(f) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Сложим (4) и (5):

$$\left\| (\mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j s_k} (f + g) \right\| < 2\varepsilon.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_k \mu_j L_{t_j s_k}(f+g)$ − это выпуклая комбинация сдвигов функции $f+g$, и ввиду произвольности ε последнее условие означает, что $(\mathcal{I}(f)+\mathcal{I}(g))\cdot\mathbf{1}\in c_L(f+g)$, то есть $\mathcal{I}(f+g)=\mathcal{I}(f)+\mathcal{I}(g)$.

Итак, мы доказали существование и единственность левоинвариантного среднего, а с ним и левой меры Хаара. Теперь заметим, что, по лемме 3, для любого $f\in C(G)$ функция $\mathcal{I}(f)\cdot\mathbf{1}$ лежит не только в $c_L(f)$, но и в $c_R(f)$. Соответственно, $\mathcal{I}(R_t f)\cdot\mathbf{1}\in c_R(R_t f)\subset c_R(f)$. По той же лемме 3 в $c_R(f)$ есть только одна функция вида $a\cdot\mathbf{1}$. Следовательно, $\mathcal{I}(R_t f)=\mathcal{I}(f)$. Этим доказана правоинвариантность среднего $\mathcal{I}$ и порождённой им меры. Наконец, функционал $\widetilde{\mathcal{I}}(f)=\mathcal{I}(\Psi f)$ также будет левоинвариантным средним, следовательно, ввиду единственности левоинвариантного среднего $\mathcal{I}(f)=\mathcal{I}(\Psi f)$. Отсюда вытекает инвариантность меры Хаара относительно симметрии $s\to s^{-1}$. □

Замечание. Левая и правая меры Хаара существуют не только на компактных, но и на локально компактных группах (см. [H-R], гл. 4), однако в этом случае правая и левая меры Хаара могут не совпадать, уже не будет конечными мерами, и доказательство существования здесь сложнее, чем в компактном случае.

Упражнения

1. В доказательстве последней теоремы мы использовали как очевидный следующий факт: пусть $u: G\to G$ гомеоморфизм компакта G, $U: C(G)\to C(G)$ − оператор, действующий по правилу $(Uf)(s)=f(u(s))$. Пусть элементарный интеграл $\mathcal{I}$ инвариантен относительно U, то есть $\mathcal{I}(Uf)=\mathcal{I}(f)$ для всех $f\in C(G)$. Тогда мера $\mu_{\mathcal{I}}$, порождённая интегралом $\mathcal{I}$, будет u-инвариантной: $\mu_{\mathcal{I}}(u(\Delta))=\mu_{\mathcal{I}}(\Delta)$ для любого борелевского $\Delta\subset G$. Докажите этот факт, опираясь на правило замены переменной в интеграле Лебега (упражнение 9 п. 7.2.7) и биективность соответствия $\mathcal{I}\to\mu_{\mathcal{I}}$ между множеством всех элементарных интегралов и множеством всех регулярных борелевских мер на компакте G.
2. Пусть G − конечная группа. Что будет её мерой Хаара?
3. Пусть G − единичная окружность в $\mathbb{C}$ с операцией умножения комплексных чисел. Чему равна мера Хаара в этом случае?
4. Пусть K − метрический компакт. Тогда любая изометрия $u: K\to K$ биективна.
5. Пусть K − метрический компакт. Через $\Theta(K)$ обозначим множество всех изометрий $u: K\to K$, наделённое операцией композиции. Докажите, что в равномерной метрике $\Theta(K)$ − компактная топологическая группа.

6. Пусть K – метрический компакт, обладающий следующим свойством: для любых $x, y \in K$ существует изометрия $u: K \to K$, переводящая x в y. Тогда на K существует единственная регулярная борелевская мера ν, инвариантная относительно всех изометрий компакта K. Для любой точки $x_0 \in K$ эта мера связана с мерой Хаара μ на $\Theta(K)$ соотношением $\nu(A) = \mu\{u \in \Theta(K) : u(x_0) \in A\}$.

7. Пусть S^2 – единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве, λ – стандартная мера Лебега на S^2, A – измеримое множество с $\lambda(A) < \frac{1}{n}\lambda(S^2)$. Тогда для любого набора $x_1, \ldots, x_n \in S^2$ из n точек можно найти такую изометрию $u: S^2 \to S^2$, чтобы ни одна из точек $x_1, \ldots, x_n$ не попала в $u(A)$.

15.4. Комментарии к упражнениям

Параграф 15.1.1

Упражнение 7. Существование и единственность решения следует из теоремы Банаха. Непрерывность можно вывести из той же теоремы с помощью следующего приёма. Рассмотреть пространство $C(K, X)$ непрерывных X-значных функций на K с равномерной метрикой. Определить сжимающее отображение $G: C(K, X) \to C(K, X)$ формулой $[G(f)](t) = F(t, f(t))$. Неподвижная точка f этого отображения будет непрерывной функцией, удовлетворяющей условию $F(t, f(t)) = f(t)$.

Упражнение 8. Свести к предыдущему упражнению, взяв $K = [a, b]$, $X = \mathbb{R}$ и $F(t, x) = x - \frac{2}{m + M}\Phi(t, x)$.

Параграф 15.1.2

Упражнения 5 и 7. Пусть $P: \overline{B}_X \to S_X$ – ретракция. Тогда отображение $Q = -P$ не имеет неподвижных точек.

Параграф 15.1.4

Упражнения 4, 5. Функционал F из упражнения 6 порождает ограниченную замкнутую базу в случае $L_1[0,1]$. В случае $L_2[0,1]$ ограниченной замкнутой базы у этого конуса нет. Отсутствие компактной базы следует косвенным образом из упражнений 2 и 6.

16. Топологические векторные пространства

16.1. Дополнительные сведения из общей топологии

Мы уже встречались с одним весьма общим видом сходимости – сходимостью по направленности. Сейчас мы обратимся к ещё одному виду сходимости – сходимости по фильтру и применим эту новую для нас технику к изучению компактных топологических пространств. На протяжении этого раздела нам часто будут встречаться в рамках одного рассуждения как множества, так и какие-то семейства подмножеств. Чтобы их было легче различать, для обозначения исходных множеств будем использовать большие латинские буквы A, B, X, Y и т. д., а для обозначения семейств множеств – готические буквы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$. Конечно, различие тут весьма условное, так как семейства множеств – это тоже множества.

16.1.1. Фильтры и базы фильтров

Определение 1. Семейство подмножеств $\mathfrak{F}$ множества X называется *фильтром на* X, если оно подчиняется следующим аксиомам:

(i) семейство $\mathfrak{F}$ непусто;

(ii) $\varnothing \notin \mathfrak{F}$;

(iii) если $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \bigcap B \in \mathfrak{F}$;

(iv) если $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

Отметим некоторые следствия аксиом фильтра:

(v) $X \in \mathfrak{F}$ (применяем (i) и (iv));

(vi) пересечение любого конечного числа элементов фильтра, ввиду (iii) – снова элемент фильтра; соответственно, из (ii) выводим, что

(vii) пересечение любого конечного числа элементов фильтра не пусто.

Примером фильтра может служить система $\mathfrak{N}_x$ всех окрестностей точки x в топологическом пространстве X.

Определение 2. Непустое семейство подмножеств $\mathfrak{D}$ множества X называется *базой фильтра*, если

(a) $\varnothing \notin \mathfrak{D}$ и

(b) для любых $A, B \in \mathfrak{D}$ существует такое $C \in \mathfrak{D}$, что $C \subset A \bigcap B$.

Пусть $\mathfrak{D}$ – база фильтра. Фильтром, порождённым базой $\mathfrak{D}$, называется семейство $\mathfrak{F}$ всех множеств $A \subset X$, содержащих в качестве подмножества хотя бы один элемент базы $\mathfrak{D}$.

Проверку корректности последнего определения, то есть что фильтр $\mathfrak{F}$, порождённый базой $\mathfrak{D}$, действительно является фильтром, оставляем читателю.

Если X – топологическое пространство, $x_0 \in X$, а в качестве базы $\mathfrak{D}$ взять семейство всех открытых множеств, содержащих x_0, то фильтр, порождённый базой $\mathfrak{D}$, – это фильтр $\mathfrak{N}_{x_0}$ всех окрестностей точки x_0.

Приведём ещё один пример. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов множества X. Тогда семейство $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ «хвостов» последовательности $\{x_n\}$ (то есть семейство множеств вида $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$, $N \in \mathbb{N}$) – это база фильтра. Фильтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, порождённый базой $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, называется *фильтром, ассоциированным с последовательностью* $\{x_n\}$.

Теорема 1. Пусть X, Y – множества, $f: X \to Y$ – функция и $\mathfrak{D}$ – база фильтра в X. Тогда семейство $f(\mathfrak{D})$ всех множеств вида $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ – это база фильтра в Y.

Доказательство. Выполнение аксиомы (a) базы фильтра очевидно. Далее, пусть $f(A)$, $f(B)$ – произвольные элементы семейства $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in \mathfrak{D}$. По аксиоме (b), существует такое $C \in \mathfrak{D}$, что $C \subset A \cap B$. Тогда $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$, чем доказано выполнение (b) и для $f(\mathfrak{D})$. □

В частности, если $\mathfrak{F}$ – фильтр на X, то $f(\mathfrak{F})$ – база фильтра в Y.

Определение 3. *Образом фильтра* $\mathfrak{F}$ при отображении f называют фильтр $f[\mathfrak{F}]$, порождённый базой $f(\mathfrak{F})$. Эквивалентная формулировка: $A \in f[\mathfrak{F}]$ в том и только том случае, если $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$.

Напомним (п. 1.1.3), что семейство множеств $\mathfrak{C}$ называется *центрированным*, если пересечение любого конечного набора элементов семейства $\mathfrak{C}$ не пусто.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{C} \subset 2^X$ – непустое семейство множеств. Для того, чтобы существовал фильтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (то есть такой, что все элементы семейства $\mathfrak{C}$ служат и элементами фильтра $\mathfrak{F}$) необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{C}$ было центрированным семейством.

Доказательство. Если $\mathfrak{F}$ – фильтр и $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то любой конечной набор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ элементов семейства $\mathfrak{C}$ будет состоять из элементов фильтра $\mathfrak{F}$. Следовательно (свойство (vii) фильтров), $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$. Необходимость доказана. Пусть, обратно, $\mathfrak{C}$ – центрированное семейство. Тогда семейство

$\mathfrak{D}$ всех множеств вида $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, где $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{C}$, будет базой фильтра. В качестве $\mathfrak{F}$ нужно взять фильтр, порождённый базой $\mathfrak{D}$. □

Определение 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр на X. Семейство подмножеств $\mathfrak{D}$ называется *базой фильтра* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{D}$ – это база фильтра и фильтр, порождённый $\mathfrak{D}$, совпадает с $\mathfrak{F}$.

Теорема 3. Чтобы семейство $\mathfrak{D}$ было базой фильтра $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

– $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ и
– для любого $A \in \mathfrak{F}$ существует такое $B \in \mathfrak{D}$, что $B \subset A$. □

Определение 5. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр на X и $A \subset X$. *Следом фильтра* $\mathfrak{F}$ *на* A называется семейство подмножеств $\mathfrak{F}_A = \{A \bigcap B : B \in \mathfrak{F}\}$.

Теорема 4. Чтобы семейство $\mathfrak{F}_A$ было фильтром на A, необходимо и достаточно, чтобы все пересечения $A \bigcap B : B \in \mathfrak{F}$ были непустыми. В частности, $\mathfrak{F}_A$ будет фильтром, если $A \in \mathfrak{F}$. □

16.1.2. Упражнения

1. Доказать теоремы 3 и 4.

Ниже приведены примеры фильтров и баз фильтров. Многие из этих примеров будут нами использоваться. Читателю предлагается проверка соответствующих аксиом.

2. *Фильтр Фреше* на $\mathbb{N}$: элементами фильтра служат дополнения к конечным подмножествам натурального ряда. База фильтра Фреше: последовательность множеств вида $A_1 = \{1,2,3,\dots\}$, $A_2 = \{2,3,4,\dots\}$, … , $A_n = \{n+1, n+2, \dots\}$, … .

3. Фильтр *окрестностей бесконечно удалённой точки* в нормированном пространстве X: множество $A \subset X$ принадлежит фильтру, если множество $X \setminus A$ ограничено.

4. Фильтр $\mathfrak{N}_x^0$ *проколотых окрестностей* фиксированной точки x в топологическом пространстве X: база фильтра состоит из множеств вида $U \setminus \{x\}$, где U – окрестность точки x. Для корректности определения необходимо, чтобы точка x не была изолированной.

5. Фильтр окрестностей точки $+\infty$ в $\mathbb{R}$: база фильтра состоит из множеств вида $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

6. Фильтр проколотых окрестностей «точки» $a+0$ в $\mathbb{R}$: база фильтра состоит из множеств вида (a, b), $b \in (a, +\infty)$.

7. *Статистический фильтр* $\mathfrak{F}_s$ на $\mathbb{N}$: $A \in \mathfrak{F}_s$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|A \cap \{1,2,\ldots,n\}\right|}{n} = 1$. Прямыми скобками $|\ |$ здесь обозначено количество элементов множества.

8. Пусть $(G,\succ)$ – направленное множество. *Фильтром срезок* на G называется фильтр $\mathfrak{F}_{\succ}$, имеющий своей базой семейство всех множеств вида $\{x \in G : x \succ a\}$, $a \in G$.

Докажите, что:

9. Множество всех фильтров на $\mathbb{N}$ несчётно. Более того, это множество имеет мощность, большую мощности континуума.
10. У фильтров из упражнений 3, 5 и 6 есть счётные базы.
11. Статистический фильтр (упражнение 7) не имеет счётной базы.
12. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность в X, а функция $f : \mathbb{N} \to X$ действует по правилу $f(n) = x_n$. Тогда образ под действием f фильтра Фреше из упражнения 2 – это фильтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, ассоциированный с последовательностью $\{x_n\}$.

16.1.3. Пределы, предельные точки и сравнение фильтров

Определение 1. Пусть на множестве X заданы фильтры $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Будем говорить, что $\mathfrak{F}_1$ мажорирует $\mathfrak{F}_2$, если $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$; другими словами, если каждый элемент фильтра $\mathfrak{F}_2$ одновременно служит элементом и фильтра $\mathfrak{F}_1$.

Пример 1. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность в X, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ – её подпоследовательность. Тогда фильтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$, ассоциированный с подпоследовательностью, мажорирует фильтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, ассоциированный с самой последовательностью. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset A$. Но тогда и $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty} \subset A$, то есть $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

Определение 2. Пусть X – топологическое пространство, $\mathfrak{F}$ – фильтр на X. Точка $x \in X$ называется *пределом фильтра* $\mathfrak{F}$ (обозначение – $x = \lim \mathfrak{F}$), если $\mathfrak{F}$ мажорирует фильтр окрестностей точки x. Другими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, если каждая окрестность точки x принадлежит фильтру $\mathfrak{F}$.

Точка $x \in X$ называется *предельной точкой фильтра* $\mathfrak{F}$, если каждая окрестность точки x пересекается со всеми элементами фильтра $\mathfrak{F}$. Множество всех предельных точек фильтра $\mathfrak{F}$ обозначается $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

Пример 2. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность в топологическом пространстве X. Тогда $\lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_{\{x_n\}})$ совпадает с множеством предельных точек последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр на топологическом пространстве X, $\mathfrak{D}$ – некоторая база фильтра $\mathfrak{F}$. Тогда

(a) $x = \lim \mathfrak{F}$ в том и только том случае, если для любой окрестности U точки x существует такой элемент $A \in \mathfrak{D}$, что $A \subset U$.

(b) Если $x = \lim \mathfrak{F}$, то x – это предельная точка фильтра $\mathfrak{F}$. Если к тому же X – хаусдорфово пространство, то у фильтра $\mathfrak{F}$ нет других предельных точек. В частности, если у фильтра в хаусдорфовом пространстве есть предел, то этот предел единственен.

(c) Множество $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ совпадает с пересечением замыканий всех элементов фильтра $\mathfrak{F}$.

Доказательство. (a) По определению, $x = \lim \mathfrak{F}$, если каждая окрестность U точки x принадлежит фильтру $\mathfrak{F}$. В свою очередь, $U \in \mathfrak{F}$ в том и только том случае, если U содержит некоторое подмножество $A \in \mathfrak{D}$.

(b) Пусть $x = \lim \mathfrak{F}$, U – окрестность точки x. Тогда $U \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, любое множество $A \in \mathfrak{F}$ пересекается с U. То есть $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

Далее, пусть $x = \lim \mathfrak{F}$, $y \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$, U и V – любые окрестности точек x и y соответственно. Тогда $U \in \mathfrak{F}$ и, так как любая окрестность предельной точки пересекается со всеми элементами фильтра $\mathfrak{F}$, $U \cap V \neq \varnothing$. Ввиду отделимости по Хаусдорфу последнее условие может выполняться, только если $x = y$.

(c) По определению, $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда любой элемент $A \in \mathfrak{F}$ пересекается со всеми окрестностями точки x. Это же эквивалентно тому, что x принадлежит замыканию каждого элемента $A \in \mathfrak{F}$. □

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ – фильтры на топологическом пространстве X и $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тогда:

(i) если $x = \lim \mathfrak{F}_1$, то $x = \lim \mathfrak{F}_2$.

(ii) Если $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2)$, то $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$. В частности,

(iii) если $x = \lim \mathfrak{F}_2$, то $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$.

Доказательство. (i) $\mathfrak{F}_1$ мажорирует фильтр $\mathfrak{N}_x$ окрестностей точки x, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, следовательно, $\mathfrak{N}_x \subset \mathfrak{F}_2$.

(ii) Так как при увеличении числа множеств их пересечение уменьшается, имеем $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_1} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$. □

Определение 3. Пусть X – множество, Y – топологическое пространство, $\mathfrak{F}$ – фильтр на X. Точка $y \in Y$ называется *пределом функции* $f : X \to Y$ *по фильтру* $\mathfrak{F}$ (обозначение – $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$), если $x = \lim f[\mathfrak{F}]$. Другими словами, $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, если для любой окрестности U точки y существует такой элемент $A \in \mathfrak{F}$, что $f(A) \subset U$.

Точка $y \in Y$ называется *предельной точкой функции* $f : X \to Y$ *по фильтру* $\mathfrak{F}$, если $y \in \mathrm{LIM}(f[\mathfrak{F}])$, то есть если каждая окрестность точки y пересекается с образами всех элементов фильтра $\mathfrak{F}$.

Пример 3. Пусть X – топологическое пространство, $f : \mathbb{N} \to X$ и $\mathfrak{F}$ – фильтр Фреше на $\mathbb{N}$ (см. упражнение 2 п. 16.1.1). Тогда $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = \lim\limits_{n \to \infty} f(n)$.

Теорема 3. Пусть X, Y – топологические пространства, $\mathfrak{F}$ – фильтр на X, $x = \lim \mathfrak{F}$ и функция $f : X \to Y$ непрерывна. Тогда $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$.

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки $f(x)$. Тогда существует окрестность V точки x, для которой $f(V) \subset U$. Условие $x = \lim \mathfrak{F}$ означает, что $V \in \mathfrak{F}$. То есть для любой окрестности U точки $f(x)$ мы нашли требуемый элемент $V \in \mathfrak{F}$ с $f(V) \subset U$. □

16.1.4. Упражнения

Чтобы избежать усложнений формулировок, связанных с возможной неединственностью предела, в упражнениях, приведенных ниже, все топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми.

1. Пусть $(G, \succ)$ – направленное множество, X – топологическое пространство, $f : G \to X$ – функция и $\mathfrak{F}_{\succ}$ – фильтр срезок на G (см. упражнение 8 п. 16.1.1). Тогда $\lim\limits_{\mathfrak{F}_{\succ}} f = \lim\limits_{(G,\succ)} f(n)$. То есть предел по направленности – это частный случай предела по фильтру.

2. Пусть подпространство A топологического пространства X пересекается со всеми элементами фильтра $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B : B \in \mathfrak{F}\}$ – след фильтра $\mathfrak{F}$ на A. Тогда $\mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_A \subset \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}$.
3. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда существование $\lim \mathfrak{F}_A$ в индуцированной топологии на A влечёт существование $\lim \mathfrak{F}$ и $\lim \mathfrak{F}_A = \lim \mathfrak{F}$.
4. Пусть $\lim \mathfrak{F} = a \in A$. Тогда $\lim \mathfrak{F}_A = a$.
5. Пусть X, Y – топологические пространства, $\mathfrak{N}_x$ – фильтр окрестностей точки $x \in X$. Функция $f : X \to Y$ будет непрерывной в точке x тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\mathfrak{N}_x} f$. Если этот предел существует, то он равен $f(x)$.
6. Пусть X, Y – топологические пространства, $\mathfrak{N}_x^0$ – фильтр проколотых окрестностей точки $x \in X$ (см. упражнение 4 п. 16.1.1), причём x не является изолированной точкой. Тогда непрерывность функции $f : X \to Y$ в точке x эквивалентна условию $\lim\limits_{\mathfrak{N}_x^0} f = f(x)$.
7. Рассмотрим в топологическом пространстве X фильтр $\mathfrak{F}$, состоящий из всех множеств, содержащих фиксированное множество $A \subset X$. Тогда $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ совпадает с замыканием множества A.
8. Опираясь на упражнения 5 и 6 п. 16.1.1, запишите для функций вещественной переменной выражения $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ как пределы функций по специально подобранным фильтрам.
9. Запишите в виде пределов по фильтру выражения $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
10. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр на множестве X. Последовательность $x_n \in X$ называется *конфинальной* фильтру $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}_{\{x_n\}} \supset \mathfrak{F}$. Если фильтр $\mathfrak{F}$ имеет счётную базу, то для $\mathfrak{F}$ существует конфинальная последовательность.
11. Для статистического фильтра $\mathfrak{F}_s$ (упражнение 7 п. 16.1.2) не существует конфинальной последовательности.
12. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ фильтр, состоящий из всех множеств, дополнения к которым конечны. Этот фильтр не имеет счётной базы, но обладает конфинальной последовательностью. (Точнее, любая последовательность $x_n \in [0,1]$ попарно различных чисел конфинальна этому фильтру.)
13. Пусть X – множество, Y – топологическое пространство, $f : X \to Y$ – функция и $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. Тогда если последовательность $x_n \in X$ конфинальна

фильтру $\mathfrak{F}$, то $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. В частности, если фильтр $\mathfrak{F}$ на множестве X имеет счётную базу, то существует такая последовательность $x_n \in X$, что $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$.

14. Если для фильтра $\mathfrak{F}$ на множестве X не существует конфинальной последовательности, то существуют такое топологическое пространство Y и такая функция $f: X \to Y$, имеющая предел по фильтру $\mathfrak{F}$, что никакая последовательность вида $f(x_n)$, $x_n \in X$, не сходится к y.

16.1.5. Ультрафильтры. Критерий компактности

В предыдущем параграфе для фильтров, заданных на одном и том же множестве X, было введено отношение порядка $\supset$. Следующая лемма служит основой применения к семействам фильтров леммы Цорна.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{M}$ – линейно упорядоченное непустое семейство фильтров, заданных на множестве X, то есть для любых $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ либо $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$, либо $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. Тогда объединение $\mathfrak{F}$ всех фильтров семейства $\mathfrak{M}$ снова будет фильтром на X.

Доказательство. Нужно проверить для семейства множеств $\mathfrak{F}$ выполнение аксиом фильтра. Аксиомы (i) и (ii) здесь очевидны, проверим выполнение двух оставшихся.

(iii) Пусть $A, B \in \mathfrak{F}$. Тогда существуют такие $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, что $A \in \mathfrak{F}_1, B \in \mathfrak{F}_2$. По условию, один из фильтров $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ мажорирует другой. Скажем, пусть $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. Тогда оба множества A, B лежат в $\mathfrak{F}_2$ и, так как $\mathfrak{F}_2$ – это фильтр, $A \bigcap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$.

(iv) Пусть $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$. Тогда существует такой $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, что $A \in \mathfrak{F}_1$. Так как $\mathfrak{F}_1$ – это фильтр, $B \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. □

Определение 1. *Ультрафильтром* на X называется максимальный по включению фильтр на X. Подробнее: фильтр $\mathfrak{A}$ на X называется ультрафильтром, если любой фильтр $\mathfrak{F}$ на X, мажорирующий $\mathfrak{A}$, совпадает с $\mathfrak{A}$.

Из леммы Цорна сразу вытекает следующая теорема существования.

Теорема 1. Для любого фильтра $\mathfrak{F}$ на X существует мажорирующий его ультрафильтр. □

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр, $A \subset X$ и все элементы ультрафильтра пересекаются с A. Тогда $A \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Легко видеть, что, добавив к семейству множеств $\mathfrak{A}$ в качестве элемента ещё множество A, мы получим центрированное семейство множеств. По теореме 2 п. 16.1.1, существует фильтр $\mathfrak{F}$, содержащий все элементы этого центрированного семейства. Имеем: $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр, то есть $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. С другой стороны, по построению, $A \in \mathfrak{F}$. Итак, $A \in \mathfrak{A}$. □

Теорема 2 (критерий ультрафильтра). Чтобы фильтр $\mathfrak{A}$ на X был ультрафильтром, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $A \subset X$ или само A, или $X \setminus A$ принадлежало фильтру $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр и $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$. Тогда ни одно множество $B \in \mathfrak{A}$ не содержится целиком в $X \setminus A$, то есть любое $B \in \mathfrak{A}$ пересекается с A. Следовательно, по лемме 2, $A \in \mathfrak{A}$.

Достаточность. Предположим, что $\mathfrak{A}$ – не ультрафильтр. Тогда существует фильтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ и множество $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. По построению, $A \notin \mathfrak{A}$. С другой стороны, $X \setminus A$ не пересекается с A, $A \in \mathfrak{F}$, следовательно, $X \setminus A$ не может принадлежать фильтру $\mathfrak{F}$, а уж и подавно меньшему, чем $\mathfrak{F}$, фильтру $\mathfrak{A}$. □

Следствие 1. Образ ультрафильтра – ультрафильтр.

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$, $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на X. Рассмотрим произвольное $A \subset Y$. Тогда или $f^{-1}(A)$, или $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ принадлежит $\mathfrak{A}$. Соответственно, или A, или $Y \setminus A$ принадлежит $f[\mathfrak{A}]$. □

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на хаусдорфовом топологическом пространстве X и $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$. Тогда $x = \lim \mathfrak{A}$. В частности, у ультрафильтра может быть не более одной предельной точки.

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x. Тогда, по определению предельной точки, U пересекается со всеми элементами ультрафильтра $\mathfrak{A}$. По лемме 2, $U \in \mathfrak{A}$. □

Теорема 2 (критерий компактности в терминах фильтров). Для хаусдорфова топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X – компакт;
(2) каждый фильтр на X имеет предельную точку;
(3) каждый ультрафильтр на X имеет предел.

Доказательство. Будем последовательно доказывать эквивалентность наших условий.

(1) $\Rightarrow$ (2). Фильтр $\mathfrak{F}$ – это центрированное семейство множеств. Тем более, центрированным будет семейство замыканий элементов фильтра. Следовательно (теорема 1 п. 1.1.3), пересечение $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ этих замыканий не пусто.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathfrak{C}$ – произвольное центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства X. По теореме 2 п. 16.1.1, существует фильтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Тогда $\bigcap\limits_{A\in\mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap\limits_{A\in\mathfrak{F}} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$ (3). По условию (2), каждый ультрафильтр имеет предельную точку, а, по лемме 3, эта точка будет пределом ультрафильтра.

(3) $\Rightarrow$ (2). Рассмотрим произвольный фильтр $\mathfrak{F}$ на X и выберем (теорема 1) ультрафильтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. По условию (3), ультрафильтр $\mathfrak{A}$ имеет предел $x \in X$. Согласно утверждению (iii) теоремы 2 п. 16.1.3, x будет предельной точкой фильтра $\mathfrak{F}$. □

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на E, X – топологическое пространство и образ функции $f: E \to X$ лежит в некотором компакте $K \subset X$. Тогда существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f$.

Доказательство. Рассмотрим f как функцию, действующую из E в K. Поскольку (следствие 1) $f[\mathfrak{A}]$ – ультрафильтр на компакте K, существует $\lim f[\mathfrak{A}]$. А, по определению, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$. □

16.1.6. Упражнения

1. Пусть E – множество, $e \in E$ – фиксированная точка. Проверьте, что семейство $\mathfrak{A}_e \subset 2^E$ всех множеств, содержащих e в качестве элемента, образует ультрафильтр на E. Ультрафильтр такого вида называется *тривиальным ультрафильтром*.
2. Пусть E – множество, X – топологическое пространство, $e \in E$. Тогда $f(e) = \lim\limits_{\mathfrak{A}_e} f$ для любой функции $f: E \to X$.

3. Докажите, что на любом бесконечном множестве существуют нетривиальные ультрафильтры. Интересно, что сконструировать явный пример нетривиального ультрафильтра в принципе невозможно: такая конструкция обязательно опирается на аксиому выбора или лемму Цорна.

4. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на E. Докажите индукцией по n, что если элемент $A \in \mathfrak{A}$ покрыт конечным числом множеств: $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, то хотя бы одно из A_k принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{A}$.
5. Любой ультрафильтр на конечном множестве E тривиален.
6. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Тогда либо $\mathfrak{A}$ тривиален, либо $\mathfrak{A}$ мажорирует фильтр Фреше.
7. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на $\mathbb{N}$, мажорирующий фильтр Фреше. Тогда $\lim\limits_{\mathfrak{A}}$ – это непрерывный линейный функционал на l_∞ (напомним, что последовательности – элементы пространства l_∞ – можно трактовать как ограниченные функции на $\mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Докажите, что $(l_\infty)^* \neq l_1$, опираясь на этот пример.
8. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ – ультрафильтры на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}_2$. Тогда существует $f \in l_\infty$, для которого $\lim\limits_{\mathfrak{A}_1} f \neq \lim\limits_{\mathfrak{A}_2} f$.
9. Для любого $A \subset \mathbb{N}$ через U_A обозначим семейство всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$, имеющих A своим элементом. На множестве $\beta\mathbb{N}$ всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$ введём следующую топологию: окрестностями ультрафильтра $\mathfrak{A}$ служат все множества вида U_A, $A \in \mathfrak{A}$ (равно как и все более широкие множества). Немного более формально: топология на $\beta\mathbb{N}$ задаётся с помощью баз окрестностей (см. п. 1.2.1); базой окрестностей ультрафильтра $\mathfrak{A}$ служит семейство $\mathrm{U}_{\mathfrak{A}} = \{U_A : A \in \mathfrak{A}\}$.[1] Проверьте аксиомы, приведённые в п. 1.2.1, выполнение которых необходимо для задания топологии с помощью окрестностей.
10. Отождествим тривиальный ультрафильтр $\mathfrak{A}_n$, порождённый точкой $n \in \mathbb{N}$, с самой точкой n. В смысле этого отождествления $\mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$. Докажите, что $\mathbb{N}$ – плотное подмножество топологического пространства $\beta\mathbb{N}$. то есть $\beta\mathbb{N}$ сепарабельно.
11. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на $\mathbb{N}$, мажорирующий фильтр Фреше. Для любого $x = (x_1, x_2, ...) \in l_\infty$ определим величину $F(x)$ как предел по $\mathfrak{A}$ следующей функции f: $f(n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Проверьте, что функционал F инвариантен относительно сдвигов. С помощью такой

[1] Какая славная вещь современная система обозначений: $\mathrm{U}_{\mathfrak{A}}$ – это семейство окрестностей. Каждая окрестность – это множество ультрафильтров. Каждый ультрафильтр – это семейство множеств натуральных чисел. Итак, одним значком $\mathrm{U}_{\mathfrak{A}}$ обозначено некоторое множество множеств множеств множеств натуральных чисел.

конструкции Вы получите доказательство существования обобщённого банахова предела (п. 5.5.3), не опирающееся на теорему Хана − Банаха.

16.1.7. Топология, порождённая семейством отображений. Тихоновское произведение

Пусть на множестве X задано семейство отображений F, где отображения $f \in F$ действуют соответственно в (возможно различные) топологические пространства $f(X)$. Для любой точки $x \in X$, любого конечного семейства отображений $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ и открытых окрестностей V_k точек $f_k(x)$ в пространстве $f_k(X)$ определим множества

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(V_k).$$

Напомним (п. 1.2.1), что если для каждой точки $x \in X$ задано непустое семейство подмножеств U_x, обладающее следующими свойствами:

- если $U \in \mathrm{U}_x$, то $x \in U$;
- если $U_1, U_2 \in \mathrm{U}_x$, то существует такое $U_3 \in \mathrm{U}_x$, что $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$;
- если $U \in \mathrm{U}_x$ и $y \in U$, то существует такое $V \in \mathrm{U}_y$, что $V \subset U$,

то существует топология τ на X, для которой семейства U_x будут базами окрестностей соответствующих точек.

Поэтому на X существует топология (возможно, неотделимая), для которой множества $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ образуют базу окрестностей точки x при всех $x \in X$. Обозначим эту топологию символом $\sigma(X,F)$. В частности, окрестностями точки $x \in X$ в топологии $\sigma(X,F)$ будут все множества вида $f^{-1}(V)$, где $f \in F$, а V − окрестность точки $f(x)$ в топологическом пространстве $f(X)$. Следовательно, все отображения семейства F непрерывны в $\sigma(X,F)$.

Теорема 1. $\sigma(X,F)$ − это слабейшая из топологий на X, в которых непрерывны все отображения семейства F.

Доказательство. Пусть τ − какая-то топология, в которой все отображения семейства F непрерывны. Докажем, что любое множество вида $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ будет окрестностью точки x в топологии τ. Этим будет доказано, что $\tau \succ \sigma(X,F)$. По условию, все отображения $f_k : X \to f_k(X)$ непрерывны в топологии τ. Следовательно, $f_k^{-1}(V_k)$ − это открытые окрестности в τ точки x; открытой окрестностью будет и конечное пересечение $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ таких множеств. □

Определение 1. Топология $\sigma(X,F)$ называется *топологией, порождённой семейством отображений* F. Другое название (проистекающее из доказанной теоремы) – *слабейшая топология, в которой непрерывны все отображения семейства* F.

Определение 2. Семейство отображений F *разделяет точки* множества X, если для любых $x_1,x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ существует отображение $f \in F$ с $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 2. Пусть все пространства $f(X)$, $f \in F$ хаусдорфовы. Для того, чтобы топология $\sigma(X,F)$ была отделимой по Хаусдорфу, необходимо и достаточно, чтобы семейство отображений F разделяло точки множества X.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что F разделяет точки множества X. Тогда для любых $x_1,x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ существует $f \in F$ с $f(x_1) \neq f(x_2)$. Поскольку $f(X)$ – хаусдорфово пространство, существуют непересекающиеся окрестности V_1,V_2 точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$ соответственно. Множества $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ будут требуемыми $\sigma(X,F)$-окрестностями, разделяющими точки x_1 и x_2.

Необходимость. Пусть F не разделяет точек множества X. Тогда существуют такие $x_1,x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, что $f(x_1) = f(x_2)$ для любого $f \in F$. Возьмём произвольную $\sigma(X,F)$-окрестность $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$ точки x_1. Поскольку $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ при всех $k = 1,2,\ldots,n$, то и x_2 также будет лежать в $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$. Таким образом, в этом случае для $\sigma(X,F)$ нет не только отделимости по Хаусдорфу: не выполнена даже первая аксиома отделимости. □

Теорема 3. Для того, чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ на X сходился в топологии $\sigma(X,F)$ к элементу x, необходимо и достаточно, чтобы условие $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ выполнялось для всех $f \in F$.

Доказательство. Ввиду непрерывности всех $f \in F$ в $\sigma(X,F)$ необходимость следует из теоремы 3 п. 16.1.3. Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ для всех $f \in F$; нам же нужно доказать, что любая окрестность вида $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ будет элементом фильтра $\mathfrak{F}$. По условию, $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f_k = f_k(x)$, следовательно, $f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как фильтр устойчив относительно конечных пересечений элементов, $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}$. □

Пусть Γ – индексное множество (то есть множество, элементы которого будут в дальнейшем называться индексами). Далее, пусть каждому индексу $\gamma \in \Gamma$ поставлено в соответствие некоторое множество X_γ. *Декартовым произведением* множеств X_γ по $\gamma \in \Gamma$ называется множество $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, состоящее из всех функций $x : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, подчиняющихся для любого $\gamma \in \Gamma$ условию $x(\gamma) \in X_\gamma$. В частном случае, когда все X_γ равны одному и тому же множеству X, произведение состоит из всех функций $x : \Gamma \to X$. В этом случае декартово произведение называется *декартовой степенью* и обозначается X^Γ.

Значения функции $x \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ часто обозначают не $x(\gamma)$, а x_γ и сам элемент $x \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ записывают в виде $x = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ проиндексированного множества значений.

Для любого $\alpha \in \Gamma$ отображение $P_\alpha : \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$, действующее по правилу $P_\alpha(x) = x_\alpha$, называют *координатным проектором*.

Определение 3. Пусть все X_γ, $\gamma \in \Gamma$ – топологические пространства. *Тихоновской топологией на* $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ называется слабейшая из топологий, в которых непрерывны все координатные проекторы P_α, $\alpha \in \Gamma$. Декартово произведение $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, наделённое тихоновской топологией, называется *тихоновским произведением*.

Отметим, что координатные проекторы очевидным образом разделяют точки произведения, следовательно, по теореме 2, тихоновское произведение хаусдорфовых пространств отделимо по Хаусдорфу. Далее, по теореме 3, имеет место следующее утверждение.

Критерий сходимости в тихоновском произведении. Фильтр $\mathfrak{F}$ на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ сходится в тихоновской топологии к элементу $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в том и только том случае, если $x_\gamma = \lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Опишем тихоновскую топологию явным образом, то есть распишем подробнее в этом частном случае вид окрестностей топологии, порождённой семейством отображений. Пусть $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$; $N \subset \Gamma$ – конечное множество индексов, $V_\gamma \subset X_\gamma$, $\gamma \in N$ – открытые окрестности соответствующих точек x_γ. Введём обозначение

$$U_{N,\{V_\gamma\}_{\gamma\in N}}(x) = \left\{ y \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma : y_\alpha \in V_\alpha \text{ для всех } \alpha \in N \right\}.$$

Теорема 4. Множества вида $U_{N,\{V_\gamma\}_{\gamma\in N}}(x)$ образуют в тихоновской топологии базу окрестностей точки $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. □

Теорема 5 (теорема Тихонова о произведении компактов). Пусть X_γ, $\gamma \in \Gamma$ – компактные топологические пространства. Тогда тихоновское произведение $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ также компактно.

Доказательство. Будем опираться на критерий (3) теоремы 2 п. 16.1.5. Пусть $\mathfrak{A}$ – ультрафильтр на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Поскольку все X_γ компактны, для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует предел координатного проектора P_γ. Введём обозначение $y_\gamma = \lim_{\mathfrak{A}} P_\gamma$. Тогда элемент $y = \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ будет пределом ультрафильтра $\mathfrak{A}$. □

16.1.8. Упражнения

1. Для случая $\Gamma = \{1,2\}$ определение тихоновского произведения $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ согласуется с определением произведения $X_1 \times X_2$ топологических пространств, данным в п. 1.2.2.

2. Частный случай тихоновского произведения – тихоновская степень X^Γ топологического пространства X – это пространство всех функций $f : \Gamma \to X$. Выпишите явным образом окрестности функции f в тихоновской топологии.

3. Докажите, что последовательность функций $f_n \in X^\Gamma$ сходится в тихоновской топологии к функции f в том и только том случае, если $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in X$. Этим обосновывается ещё одно название тихоновской топологии – *топология поточечной сходимости*.
4. Для частного случая тихоновской степени – пространства $[0,1]^{[0,1]}$ всех функций $f : [0,1] \to [0,1]$ выпишите явным образом окрестности функции f. Докажите, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами плотно в $[0,1]^{[0,1]}$, то есть $[0,1]^{[0,1]}$ – сепарабельное пространство.

Топологическое пространство X называется *секвенциальным компактом*, если в X из любой последовательности элементов можно выделить сходящуюся последовательность.

5. Пространство $[0,1]^{[0,1]}$, несмотря на свою компактность, не является секвенциальным компактом (см. упражнение 10 п. 3.2.2).

Подмножество A топологического пространства X называется *секвенциально плотным*, если для любого $x \in X$ существует последовательность $a_n \in A$, сходящаяся к X. Топологическое пространство X называется *секвенциально сепарабельным*, если в X существует счётное секвенциально плотное множество.

6. Секвенциально сепарабельное хаусдорфово топологическое пространство не может иметь мощности, большей мощности континуума.
7. Пространство $[0,1]^{[0,1]}$, несмотря на свою сепарабельность, не является секвенциально сепарабельным.
8. Пусть G_γ – топологические группы. Наделим тихоновское произведение $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ операцией $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \cdot \{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = \{x_\gamma \cdot y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Проверьте, что $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ – топологическая группа.
9. Наделим множество из двух точек $\{0,1\}$ дискретной топологией. Докажите, что тихоновская степень $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфна канторову совершенному множеству.
10. Пусть X – фиксированное множество. Отождествляя подмножество $A \subset X$ с его характеристической функцией $\mathbf{1}_A$, получаем естественное отождествление семейства 2^X всех подмножеств множества X с пространством $\{0,1\}^X$ всех функций $f : X \to \{0,1\}$. Поскольку множество из двух точек – это (дискретный) компакт, пространство $\{0,1\}^X = 2^X$ – компакт в тихоновской топологии. Опишите явным образом окрестности множества $A \subset X$ в тихоновской топологии на 2^X.

11. Определённое в упражнении 9 п. 16.1.5 топологическое пространство $\beta\mathbb{N}$ – это замкнутое подпространство компакта $2^{2^{\mathbb{N}}}$. Следовательно, $\beta\mathbb{N}$ компактно. Пространство $\beta\mathbb{N}$ называется стоун-чеховской компактификацией натурального ряда.

12. Зададим оператор $T : C(\beta\mathbb{N}) \to l_\infty$ по следующему правилу: $T(f)$ – это последовательность с координатами $x_n = f(\mathfrak{A}_n)$, где через $\mathfrak{A}_n$ обозначен тривиальный ультрафильтр, порождённый точкой $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что T – это линейная биективная изометрия. Таким образом, пространство l_∞ изометрично пространству непрерывных функций на (пусть и весьма экзотическом) компакте.

16.2. Простейшие сведения о топологических векторных пространствах

Мы уже сталкивались с такими топологиями и соответствующими сходимостями на линейных пространствах функций, что задание сходимости как сходимости в какой-либо норме оказывается невозможным. Такими были, скажем, поточечная сходимость и сходимость по мере. Такими будут, за редкими исключениями, слабая и слабая со звёздочкой сходимости в банаховых пространствах − основной объект изучения в главе 17. Адекватным языком для описания таких топологий и сходимостей служит язык топологических векторных пространств.

16.2.1. Аксиоматика и терминология

Определение 1. Линейное пространство X (вещественное или комплексное) с заданной на нём топологией τ называется *топологическим векторным пространством*, если топология τ так согласована с линейной структурой, что отображения суммы элементов и умножения скаляра на элемент непрерывны по совокупности переменных.

Чтобы не останавливаться каждый раз отдельно на вещественном и комплексном случаях, мы будем предполагать все пространства комплексными, оставляя более простой вещественный случай читателю для самостоятельного изучения.

Распишем определение 1 подробнее. Пусть X – топологическое векторное пространство. Рассмотрим функции $F : X \times X \to X$ и $G : \mathbb{C} \times X \to X$, действующие по правилу $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; $G(\lambda, x) = \lambda x$. Согласование топологии с линейной структурой означает, что функции F и G непрерывны как функции двух переменных. Будем использовать шаг за шагом эту непрерывность для вывода геометрических свойств окрестностей в топологии, согласующейся с векторной структурой.

Теорема 1. Пусть U – открытое множество в X. Тогда

- для любого $x \in X$ множество $U + x$ открыто;
- для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ открыто множество λU.

Доказательство. Зафиксируем $x_2 = -x$ и воспользуемся непрерывностью функции $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ по первой переменной при фиксированной второй переменной. Имеем: функция $f(x_1) = x_1 - x$ непрерывна по x_1, а $U + x$ – это прообраз открытого множества U под действием f. Следовательно, $U + x$ открыто. Второе свойство выводится точно так же, с использованием непрерывности функции $g(x) = \frac{1}{\lambda} x$. □

Из теоремы 1 следует, что окрестности любого элемента $x \in X$ – это множества вида $U + x$, где U – окрестности нуля. Соответственно, топология τ однозначно определяется системой $\mathfrak{N}_0$ окрестностей нуля. Поэтому остальные свойства топологии τ будут формулироваться на языке окрестностей нуля. Ниже через $\mathbb{C}_r$ будет обозначаться круг в $\mathbb{C}$ радиуса r с центром в нуле: $\mathbb{C}_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r\}$.

Напомним некоторые определения из п. 5.4.2. Подмножество A линейного пространства X называется *поглощающим*, если для любого $x \in X$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \in tA$ для любого $t > n$. Подмножество $A \subset X$ называется *уравновешенным*, если для любого скаляра $\lambda \in \mathbb{C}_1$ выполнено включение $\lambda A \subset A$.

Теорема 2. Система $\mathfrak{N}_0$ окрестностей нуля топологического векторного пространства X обладает следующими свойствами:

(i) любая окрестность нуля – это поглощающее множество.

(ii) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля.

(iii) Для любой окрестности $U \in \mathfrak{N}_0$ существует уравновешенная окрестность $V \in \mathfrak{N}_0$ с $V + V \subset U$.

Доказательство. (i) Зафиксируем $x \in X$ и воспользуемся непрерывностью функции $f(\lambda) = \lambda x$. Так как $f(0) = 0$, непрерывность в точке $\lambda = 0$ означает, что для любого $U \in \mathfrak{N}_0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda x \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$. Введя обозначение $t = \frac{1}{\lambda}$, получим, что $x \in tU$ для любого $t > \frac{1}{\varepsilon}$.

(ii) Пусть $U \in \mathfrak{N}_0$. Ввиду непрерывности в точке (0,0) функции $G(\lambda, x) = \lambda x$ существует такое $\varepsilon > 0$ и такая окрестность $W \in \mathfrak{N}_0$, что $\lambda x \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon$ и любого $x \in W$. Положим $V = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon} \lambda W$. Покажем, что это множество $V \subset U$ и есть требуемая уравновешенная окрестность нуля. С одной стороны, $V \supset W$, следовательно, $V \in \mathfrak{N}_0$. С другой стороны, для любого $\lambda_0 \in \mathbb{C}_1$ имеем $\lambda_0 \mathbb{C}_\varepsilon \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, следовательно,

$$\lambda_0 V = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}_\varepsilon} \lambda_0 \lambda W = \bigcup_{\mu \in \lambda_0 \mathbb{C}_\varepsilon} \mu W \subset \bigcup_{\mu \in \mathbb{C}_\varepsilon} \mu W = V;$$

чем доказана уравновешенность окрестности V.

(iii) Ввиду непрерывности в точке (0,0) функции $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ для любой окрестности $U \in \mathfrak{N}_0$ существуют окрестности $V_1, V_2 \in \mathfrak{N}_0$ с $V_1 + V_2 \subset U$. Требуемую уравновешенную окрестность нуля V выберем на основе п. (ii) так, чтобы V содержалась в окрестности $V_1 \bigcap V_2$. □

Предлагаем читателю самостоятельно доказать обратный результат.

Теорема 3. Пусть система $\mathfrak{N}_0$ окрестностей нуля топологии τ на линейном пространстве X подчиняется условиям (i) - (iii) теоремы 2, и для любой точки $x \in X$ система $\mathfrak{N}_x$ окрестностей этой точки получается из $\mathfrak{N}_0$ параллельным переносом на вектор x. Тогда топология τ согласуется с линейной структурой. □

Замечание. Ввиду уравновешенности условие $V + V \subset U$ пункта (iii) теоремы 2 можно записывать в виде $V - V \subset U$.

Теорема 4. Для отделимости по Хаусдорфу топологического векторного пространства X необходимо и достаточно, чтобы система $\mathfrak{N}_0$ окрестностей нуля подчинялась следующему условию: для любого $x \neq 0$ существует окрестность $U \in \mathfrak{N}_0$, не содержащая точки x.

Доказательство. Пусть $x \neq y$. Тогда $x - y \neq 0$ и существует окрестность $U \in \mathfrak{N}_0$, не содержащая $x - y$. Выберем такую окрестность $V \in \mathfrak{N}_0$, что $V - V \subset U$. Тогда окрестности $x + V$ и $y + V$ не пересекаются: если существует точка z, лежащая одновременно в $x + V$ и $y + V$, то $z - x \in V$, $z - y \in V$ и $x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V \subset U$. □

16.2.2. Упражнения

1. Уравновешенное множество в $\mathbb{C}$ – это либо всё $\mathbb{C}$, либо круг (открытый или замкнутый) с центром в нуле, либо, наконец, состоит только из нуля.

2. Сформулируйте с заменой $\lambda \in \mathbb{C}_1$ на $\lambda \in [-1,1]$ аналог уравновешенности для вещественных пространств. Докажите для вещественных пространств аналог теоремы 2.
3. Опишите уравновешенные множества в $\mathbb{R}$.
4. Пусть топология τ на линейном пространстве X согласуется с линейной структурой и подчиняется первой аксиоме отделимости: каждая точка – это замкнутое множество. Тогда топология τ отделима по Хаусдорфу.
5. Топологическое векторное пространство будет и топологической группой по сложению.
6. Докажите, что дискретная топология (все множества – открытые) на $\mathbb{C}$ согласуется со структурой группы по сложению, но не согласуется с линейной структурой.

Проверить, что нижеперечисленные пространства будут топологическими векторными пространствами.

7. Пространство $L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ измеримых функций на пространстве с конечной мерой, наделённое топологией сходимости по мере (п. 3.2.2). Базу окрестностей функции f образуют множества функций $\{g \in L_0(\Omega,\Sigma,\mu) : \mu\{t : |g(t) - f(t)| > \delta\} < \varepsilon\}$, $\delta, \varepsilon > 0$. В этом пространстве, как обычно, функции, совпадающие почти всюду, отождествляются: без этой договорённости пространство не было бы отделимым.
8. Любое нормированное пространство в топологии, задаваемой нормой.
9. Тихоновское произведение топологических векторных пространств, с линейными операциями, задаваемыми покоординатно: $a\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} + b\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{ax_\gamma + by_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.
10. Линейное подпространство топологического векторного пространства, наделённое индуцированной топологией.

Другие естественные примеры будут приведены в п. 16.3.2. Докажите, что в топологическом векторном пространстве:

11. Внутренность и замыкание выпуклого множества выпуклы.
12. Замыкание линейного подпространства будет линейным подпространством.
13. Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную открытую окрестность нуля.
14. В хаусдорфовом топологическом векторном пространстве каждая окрестность нуля содержит уравновешенную замкнутую окрестность нуля.

Метризуемое топологическое пространство подчиняется первой аксиоме счётности: каждая точка имеет счётную базу окрестностей. Для хаусдорфовых топологических векторных пространств верна обратная теорема. Доказательство читатель получит, решив следующую цепочку упражнений.

Пусть X – хаусдорфово топологическое векторное пространство и система окрестностей нуля пространства X имеет счётную базу. Тогда:

15. Существует база V_n окрестностей нуля, состоящая из уравновешенных открытых множеств, подчиняющаяся условию $V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n$, $n=1,2,\dots$.

16. Обозначим через D множество двоично-рациональных чисел на отрезке $(0,1)$. Для каждого $r\in D$ запишем его разложение в двоичную дробь: $r=\sum_{k=1}^{n(r)}c_k(r)2^{-k}$, где $c_k(r)\in\{0,1\}$, а $n(r)$ может быть сколь угодно большим. Введём обозначение $U(r)=\sum_{k=1}^{n(r)}c_k(r)V_k$. Тогда все множества вида $U(r)$ уравновешены, открыты, $U\left(1/2^n\right)=V_n$ и $U(r)+U(s)\subset U(r+s)$ для любых $r,s\in D$.

17. Для любого $x\in X$ положим $\theta(x)=\inf\{r\in D: x\in U(r)\}$. Тогда величина θ симметрична: $\theta(-x)=\theta(x)$, и подчиняется неравенству треугольника: $\theta(x+y)\le\theta(x)+\theta(y)$ для любых $x,y\in X$.

18. Величина $\rho(x,y)=\theta(x-y)$ – эта метрика на X. Топология, задаваемая метрикой ρ, совпадает с исходной топологией пространства.

16.2.3. Полнота, предкомпактность, компактность

Чтобы успешно работать с топологическими векторными пространствами, следует определить аналоги основных понятий, используемых при работе с нормированными пространствами. Так как топологическое векторное пространство, вообще говоря, неметризуемо, здесь следует отказаться от языка последовательностей и использовать соответствующий этой общей ситуации язык окрестностей и фильтров.

Определение 1. Фильтр $\mathfrak{F}$ в топологическом векторном пространстве X называется *фильтром Коши*, если для любой окрестности нуля U существует такой элемент $A\in\mathfrak{F}$, что $A-A\subset U$. Такой элемент A называется *малым порядка* U.

Теорема 1. Если фильтр $\mathfrak{F}$ имеет предел, то $\mathfrak{F}$ – это фильтр Коши.

Доказательство. Пусть $\lim\mathfrak{F}=x$ и $U\in\mathfrak{N}_0$. Выберем $V\in\mathfrak{N}_0$ с $V-V\subset U$. По определению предела, существует такой элемент $A\in\mathfrak{F}$, что $A\subset x+V$. Соответственно, $A-A\subset(x+V)-(x+V)\subset V-V\subset U$. □

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр Коши на топологическом векторном пространстве X и x – предельная точка фильтра $\mathfrak{F}$. Тогда $\lim\mathfrak{F}=x$.

Доказательство. Пусть $x+U$ – произвольная окрестность точки x, $U \in \mathfrak{N}_0$. Выберем окрестность $V \in \mathfrak{N}_0$ с $V+V \subset U$ и множество $A \in \mathfrak{F}$, малое порядка V: $A - A \subset V$. По определению предельной точки, множества A и $x+V$ пересекаются, то есть существует $y \in A \bigcap (x+V)$. Тогда

$$x+U \supset x+V+V \supset y+V \supset y+A-A \supset y+A-y=A.$$

Таким образом, окрестность $x+U$ содержит элемент фильтра $\mathfrak{F}$, следовательно, $x+U \in \mathfrak{F}$. □

Определение 2. Множество A в топологическом векторном пространстве X называется *полным*,[2] если любой фильтр Коши на X, содержащий A в качестве элемента, имеет предел, принадлежащий A. В частности, топологическое векторное пространство X называется полным, если любой фильтр Коши в X имеет предел.

Теорема 3. Пусть X – подпространство топологического векторного пространства E и $A \subset X$ – полное подмножество пространства X. Тогда A будет полным как подмножество пространства E.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр Коши на E, содержащий A в качестве элемента. Тогда, в частности $X \in \mathfrak{F}$, то есть след $\mathfrak{F}_X$ на X фильтра $\mathfrak{F}$ будет фильтром. $\mathfrak{F}_X$ – это фильтр Коши на X, содержащий A в качестве элемента. Следовательно, ввиду полноты A в X фильтр $\mathfrak{F}_X$ имеет в X предел $a \in A$. Эта же точка a будет пределом фильтра $\mathfrak{F}$ в E. □

Теорема 4. Полное подмножество A хаусдорфова топологического векторного пространства X замкнуто. В частности, если подпространство хаусдорфова топологического векторного пространства полно в индуцированной топологии, то это подпространство замкнуто.

Доказательство. Пусть точка $x \in X$ принадлежит замыканию множества A. Нам нужно доказать, что $x \in A$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{D}$ всех пересечений вида $(x+U) \bigcap A$, где $U \in \mathfrak{N}_0$. Все такие пересечения не

---

[2] Опять упоминавшаяся уже нами терминологическая путаница, к сожалению, общепринятая. Данный термин происходит из обобщения понятия полноты метрического пространства. С тем же успехом можно было бы назвать полным множество, линейная оболочка которого совпадает с X (термин из теории линейных пространств), или же, по аналогии с теорией нормированных пространств, можно было бы назвать полным множество, линейная оболочка которого плотна в X. Получим понятия, не имеющие ничего общего между собой, но называемые одним общим словом. Догадываться о смысле приходится из контекста. Ситуация слегка напоминает употребление ненормативной лексики, когда пятью словами в различных грамматических формах обозначаются все человеческие эмоции, равно как природные и общественные явления.

пусты, и $\mathfrak{D}$ подчиняется всем аксиомам базы фильтра. Фильтр $\mathfrak{F}$, порождённый базой $\mathfrak{D}$, мажорирует фильтр $\mathfrak{N}_x$ всех окрестностей точки x, следовательно, $\lim \mathfrak{F} = x$. В частности, $\mathfrak{F}$ – это фильтр Коши. По построению, наше полное множество A служит элементом фильтра $\mathfrak{F}$; следовательно, согласно определению 2, у фильтра $\mathfrak{F}$ должен быть предел в A. Ввиду единственности предела $x \in A$, что и требовалось доказать. □

Определение 2. Множество A в топологическом векторном пространстве X называется *предкомпактом*, если для любой окрестности нуля U существует такое конечное множество $B \subset X$, что $A \subset B + U$. Такое B называется, по аналогии с ε-сетью, U*-сетью* множества A.

Теорема 5. Чтобы подмножество A хаусдорфова топологического векторного пространства X было компактом, необходимо и достаточно, чтобы A было одновременно предкомпактом и полным множеством в X.

Доказательство. Необходимость. Пусть A – компакт, а U – произвольная открытая окрестность нуля в X. Окрестности вида $x + U$, $x \in A$ образуют открытое покрытие компакта A, следовательно, существует конечное подпокрытие вида $x_1 + U$, $x_2 + U$, … , $x_n + U$ с $x_k \in A$. Множество $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ будет U-сетью множества A. Этим доказана предкомпактность компакта A. Докажем полноту. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр Коши на X, содержащий A в качестве элемента. Тогда след $\mathfrak{F}_A$ на A фильтра $\mathfrak{F}$ – это фильтр в компактном топологическом пространстве A, следовательно, $\mathfrak{F}_A$ имеет предельную точку $a \in A$. Эта же точка будет предельной для $\mathfrak{F}$. Но предельная точка фильтра Коши – это предел, то есть у $\mathfrak{F}$ существует предел, и $\lim \mathfrak{F} = a \in A$.

Достаточность. Пусть A – полное предкомпактное множество в X. Докажем, что любой ультрафильтр $\mathfrak{A}$ на A имеет предел. Рассмотрим фильтр $\widetilde{\mathfrak{A}}$, заданный уже не на A, а на всём X, для которого $\mathfrak{A}$ будет базой фильтра: $B \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ в том и только том случае, если $B \cap A \in \mathfrak{A}$. Опираясь на критерий ультрафильтра (теорема 2 п. 16.1.5), легко проверить, что $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – ультрафильтр. Докажем, что $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – фильтр Коши. Пусть $U \in \mathfrak{N}_0$. Выберем окрестность $V \in \mathfrak{N}_0$ с $V - V \subset U$. Пусть $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – соответствующая V-сеть предкомпакта A. Так как множества $x_1 + V$, $x_2 + V$, … , $x_n + V$ образуют конечное покрытие элемента A ультрафильтра $\widetilde{\mathfrak{A}}$, одно из этих множеств, скажем $x_j + V$, будет элементом ультрафильтра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ (упражнение 4 п. 16.1.6). Но $x_j + V$ – это малое порядка U:

$$(x_j + V) - (x_j + V) = V - V \subset U.$$

Итак, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – фильтр Коши, $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ и A – полное множество в X. Следовательно, существует $\lim \widetilde{\mathfrak{A}} \in A$. Этот же элемент будет пределом в A фильтра $\mathfrak{A}$ – следа фильтра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ на A (упражнение 4 п. 16.1.4). □

Определение 3. Пусть X – топологическое векторное пространство. Будем говорить, что окрестность нуля $U \in \mathfrak{N}_0$ *поглощает* множество $A \subset X$, если существует такое число $t > 0$, что $A \subset tU$. Множество $A \subset X$ называется *ограниченным*, если оно поглощается каждой окрестностью нуля.

Теорема 6. Система ограниченных подмножеств топологического векторного пространства X обладает следующими свойствами:

(a) пусть $A \subset X$ – ограниченное множество. Тогда для любой окрестности $U \in \mathfrak{N}_0$ существует такое число $N > 0$, что $A \subset tU$ для любого $t \geq N$.
(b) Объединение конечного числа ограниченных множеств – снова ограниченное множество.
(c) Любое конечное множество ограничено.
(d) Любой предкомпакт в X ограничен.

Доказательство. (a) Пусть $V \in \mathfrak{N}_0$ – уравновешенная окрестность, содержащаяся в U. Выберем такое $N > 0$, что $A \subset NV$. Тогда для любого $t \geq N$ имеем $A \subset NV = t\left(\frac{N}{t}V\right) \subset tV \subset tU$.

(b) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – ограниченные множества, U – окрестность нуля. Согласно (a), для каждого из A_k существует такое N_k, что $A_k \subset tU$ для любого $t > N_k$. Положим $N = \max\limits_{1 \leq k \leq n} N_k$. Тогда для любого $t \geq N$ все включения $A_k \subset tU$ выполняются одновременно, то есть $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset tU$.

(c) Множество из одной точки ограничено, так как каждая окрестность нуля – поглощающее множество. Остаётся воспользоваться пунктом (b).

(d) Пусть A – предкомпакт в X, U – окрестность нуля. Выберем уравновешенную окрестность $V \in \mathfrak{N}_0$ с $V + V \subset U$. По определению предкомпакта, существует такое конечное множество $B \subset X$, что $A \subset B + V$. Согласно (c), можно найти такой коэффициент $N > 0$, что $B \subset NV$. Тогда $A \subset B + V \subset NV + V \subset N(V + V) \subset NU$. □

16.2.4. Упражнения

1. Пусть $\mathfrak{F}$ – фильтр Коши в топологическом векторном пространстве X, фильтр $\mathfrak{F}_1$ мажорирует $\mathfrak{F}$ и $x = \lim \mathfrak{F}_1$. Тогда $x = \lim \mathfrak{F}$.

Последовательность x_n элементов топологического векторного пространства X называется последовательностью Коши, если фильтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, порождённый этой последовательностью, – фильтр Коши. Докажите, что:

2. x_n будет последовательностью Коши в том и только том случае, если для любого $U \in \mathfrak{N}_0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $x_n - x_m \in U$ для всех $n, m \geq N$.
3. x_n будет последовательностью Коши в том и только том случае, если для любого $U \in \mathfrak{N}_0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $x_n - x_N \in U$ для всех $n \geq N$.
4. Пусть топологическое векторное пространство X имеет счётную базу окрестностей нуля, и любая последовательность Коши в X имеет предел. Тогда X – полное пространство.
5. Пусть полное топологическое векторное пространство X имеет счётную базу окрестностей нуля U_n, $n \in \mathbb{N}$ и окрестности U_n выбраны так, что $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$. Пусть в каждой из U_n выбрано по элементу $x_n \in U_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится.
6. Распространите теорему Банаха об обратном операторе ($T : X \to Y$ линеен, биективен и непрерывен; тогда непрерывен T^{-1}) на случай, когда X и Y – полные метризуемые топологические векторные пространства.
7. Докажите полноту пространства $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых функций на пространстве с конечной мерой, наделённого топологией сходимости по мере.

Метрика ρ на линейном пространстве X называется *инвариантной*, если $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$ для любых $x, y \in X$. Пусть топология τ топологического векторного пространства X задана инвариантной метрикой ρ. Тогда:

8. Последовательность $x_n \in X$ будет последовательностью Коши в топологии τ в том и только том случае, если она – последовательность Коши в метрике ρ.
9. Полнота топологического векторного пространства (X, τ) эквивалентна полноте метрического пространства (X, ρ).

10. Предкомпактность множества A в (X,τ) эквивалентна предкомпактности A в метрике ρ.

11. Внимание: ограниченность множества A в (X,τ) **не эквивалентна** ограниченности A в метрике ρ. Точнее, из ограниченности в (X,τ) следует ρ-ограниченность; обратное же утверждение неверно. В качестве примера рассмотрим $X=\mathbb{R}$ в естественной топологии, а инвариантную метрику зададим равенством $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$. Тогда $A=\mathbb{R}$ будет ρ-ограниченным множеством, но, разумеется, не будет ограниченным как подмножество топологического векторного пространства $\mathbb{R}$.

Пусть X_γ, $\gamma\in\Gamma$ – топологические векторные пространства. Пространство $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ наделим тихоновской топологией и покоординатными линейными операциями. Через $P_\gamma : X\to X_\gamma$, $\gamma\in\Gamma$ обозначим, как обычно, координатные проекторы. Докажите, что:

12. Множество $A\subset X$ будет ограниченным в том и только том случае, если ограничены все образы $P_\gamma(A)\subset X_\gamma$.

13. Множество $A\subset X$ будет предкомпактом в том и только том случае, если все образы $P_\gamma(A)\subset X_\gamma$ – предкомпакты.

14. Для замкнутости и компактности множества A в тихоновском произведении аналогичные критерии уже не верны. Приведите соответствующие примеры в $X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

15. Фильтр $\mathfrak{F}$ в $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ будет фильтром Коши в том и только том случае, если $P_\gamma(\mathfrak{F})$ – фильтры Коши в соответствующих X_γ.

16. Если все X_γ, $\gamma\in\Gamma$ – полные пространства, то $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ тоже будет полным.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, наделённое топологией тихоновского произведения. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ можно рассматривать как пространство всех бесконечных числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$. Базу окрестностей нуля образуют множества $U_{n,\varepsilon}=\left\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \max\limits_{1\le k\le n}|x_k|<\varepsilon\right\}$. Докажите, что:

17. В $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ есть счётная база окрестностей нуля, то есть $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ метризуемо.

18. Сходимость в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ совпадает с покоординатной сходимостью.

19. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – полное топологическое векторное пространство.

20. Множество $A\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ будет ограниченным в том и только том случае, если существует элемент $b=(b_1, b_2,\ldots)\in(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, мажорирующий все

элементы множества A: для любого $a = (a_1, a_2, \ldots) \in A$ оценка $|a_n| \le b_n$ выполнена при всех $n \in \mathbb{N}$.

21. В $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ классы ограниченных множеств и предкомпактов совпадают.
22. Рассмотрим множества $\overline{B}_{c_0}$ и $\overline{B}_{l_1}$ – замкнутые единичные шары пространств c_0 и l_1 как подмножества пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Будут ли эти множества ограниченными в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Замкнутыми в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Предкомпактами в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Компактами в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

16.2.5. Линейные операторы и функционалы

На протяжении этого параграфа X, E будут топологическими векторными пространствами.

Теорема 1. Линейный оператор $T : X \to E$ непрерывен в том и только том случае, если он непрерывен в точке $x = 0$.

Доказательство. Непрерывный оператор будет непрерывным во всех точках, в частности, и в нуле. Обратно, пусть оператор T непрерывен в нуле, докажем, что T непрерывен в любой точке $x_0 \in X$. Пусть V – произвольная окрестность точки Tx_0 в E. Тогда $V - Tx_0$ – окрестность нуля в E. По условию, $T^{-1}(V - Tx_0)$ – окрестность нуля в X. Ввиду линейности оператора имеем: $T^{-1}(V) = T^{-1}(V - Tx_0) + x_0$, то есть $T^{-1}(V)$ – это окрестность точки x_0. □

Определение 1. Линейный оператор $T : X \to E$ называется *ограниченным оператором*, если образ под действием T любого ограниченного подмножества пространства X будет ограниченным множеством в E.

Теорема 2. Каждый непрерывный линейный оператор $T : X \to E$ ограничен.

Доказательство. Пусть A – ограниченное множество в X. Докажем ограниченность множества $T(A)$. Пусть V – произвольная окрестность нуля в E и U – такая окрестность нуля в X, что $T(U) \subset V$. Воспользовавшись ограниченностью множества A, выберем такое $N > 0$, что $A \subset tU$ для всех $t > N$. Тогда $T(A) \subset tT(U) \subset tV$ при $t > N$. □

Как будет показано ниже, вполне возможна ситуация, когда две разные топологии $\tau_1 \succ \tau_2$ на X (скажем, сильная и слабая топологии нормированного пространства) порождают одну и ту же систему ограниченных множеств. В этом случае тождественный оператор, рассматриваемый как оператор, действующий из (X,τ_2) в (X,τ_1), будет ограниченным, но разрывным оператором.

Теорема 3. Пусть оператор $T : X \to E$ переводит некоторую окрестность нуля U пространства X в ограниченное множество. Тогда T непрерывен.

Доказательство. Пусть $T(U)$ – ограниченное множество. Для любой V – окрестности нуля в E существует такое $t > 0$, что $T(U) \subset tV$. Тогда $\frac{1}{t}U \subset T^{-1}(V)$, то есть $T^{-1}(V)$ – окрестность нуля в X. □

Перейдём к условиям непрерывности линейного функционала.

Теорема 4. Для ненулевого линейного функционала f, заданного на топологическом векторном пространстве X, следующие условия эквивалентны:

(i) функционал f непрерывен;

(ii) ядро функционала f замкнуто;

(iii) ядро функционала f не плотно в X;

(iv) существует окрестность нуля U, для которой $f(U)$ – ограниченное множество.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Прообраз замкнутого множества замкнут, в частности, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ – замкнутое множество.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если ядро замкнуто и плотно в X, то $\operatorname{Ker} f = X$, то есть $f \equiv 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть ядро не плотно. Тогда существуют точка $x \in X$ и такая уравновешенная окрестность нуля U, что $(U + x) \bigcap \operatorname{Ker} f = \varnothing$. Это значит, что функционал f не может ни в одной точке $y \in U$ принимать значение $-f(x)$. Следовательно, $f(U)$ – это уравновешенное множество комплексных чисел, не совпадающее со всей комплексной плоскостью ($-f(x) \notin f(U)$). Таким образом, $f(U)$ – это круг с центром в нуле (в вещественном случае это был бы отрезок в $\mathbb{R}$, симметричный относительно нуля).

Импликация (iv) $\Rightarrow$ (i) уже доказана в теореме 3. □

Так же, как и в случае нормированных пространств, для топологического векторного пространства X через X^* будем обозначать множество всех непрерывных линейных функционалов на X.[3] На топологические векторные пространства переносится теорема Хана – Банаха в геометрической форме.

Теорема 5. Пусть A и B – непересекающиеся непустые выпуклые подмножества вещественного топологического векторного пространства X и множество A открыто. Тогда существуют такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ и такой скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, что $f(a) < \theta$ для всех $a \in A$ и $f(b) \geq \theta$ для всех $b \in B$.

Учитывая связь между линейным функционалом и его вещественной частью (п. 9.1.1), можно также получить вариант теоремы для комплексного пространства, с заменой последних условий на $\operatorname{Re} f(a) < \theta$ для всех $a \in A$ и $\operatorname{Re} f(b) \geq \theta$ для всех $b \in B$.

Доказательство. Так же, как и для нормированных пространств (п. 9.3.2), теорема сводится к своему частному случаю: пусть $A \subset X$ – открытая выпуклая окрестность нуля в X, $x_0 \in X \setminus A$. Тогда существует такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$, что $f(a) \leq f(x_0)$ для всех $a \in A$.

В этом случае функционал Минковского φ_A множества A будет выпуклым функционалом (п. 5.4.2). Рассмотрим подпространство $Y = \operatorname{Lin}\{x_0\}$. Зададим на Y линейный функционал f таким образом, что $f(x_0) = \varphi_A(x_0)$. Тогда на Y линейный функционал f мажорируется выпуклым функционалом φ_A (см. доказательство леммы пункта 9.3.2).

Воспользуемся теоремой Хана – Банаха в аналитической форме (п. 5.4.3) и продолжим f на всё пространство X с сохранением линейности и условия мажорации $f(x) \leq \varphi_A(x)$. По определению функционала Минковского, $\varphi_A(a) \leq 1$ для любого $a \in A$, следовательно, $f(a) \leq \varphi_A(a) \leq 1$ на A. Поскольку $x_0 \notin A$, $\varphi_A(x_0) \geq 1$. Соответственно, $f(a) \leq 1 \leq \varphi_A(x_0) = f(x_0)$ для любого $a \in A$.

Далее, так как $f(x_0) \geq 1$, f – это не тождественный ноль. По лемме 5 п. 9.3.1, без труда распространяемой на топологические векторные пространства, для всех $a \in A$ выполняется строгое неравенство

[3] Чаще в учебниках по топологическим векторным пространствам значок X^* используют для множества **всех** линейных функционалов на X, а множество **непрерывных** линейных функционалов обозначают X'. Мы же будем поступать «с точностью до наоборот», чтобы сохранить согласование с системой обозначений, уже знакомой читателю по теории нормированных пространств.

$f(a) < f(x_0)$. Это означает, что ядро $\operatorname{Ker} f$ не пересекается с открытым непустым множеством $A - x_0$. Значит, ядро не может быть плотным, и функционал f непрерывен. □

Наконец, обобщим на конечномерные топологические векторные пространства известные нам свойства конечномерных нормированных пространств.

Теорема 6. Пусть X – хаусдорфово топологическое векторное пространство, $\dim X = n$. Тогда:

(a) любой линейный функционал на X непрерывен.

(b) Для любого топологического векторного пространства E любой линейный оператор $T : X \to E$ непрерывен.

(c) X изоморфно n-мерному гильбертову пространству l_2^n.

(d) X полно.

Доказательство. Вначале отметим, что при фиксированном n имеют место импликации (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d). Действительно, (a) $\Rightarrow$ (b), так как, выбрав в X базис $\{x_k\}_{k=1}^n$ с координатными функционалами $\{f_k\}_{k=1}^n$, оператор T можно представить в виде $T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) T x_k$. То есть вычисление $T(x)$ сводится к вычислению скаляров $f_k(x)$ (это действие непрерывно по предположению (a)), умножению их на фиксированные векторы Tx_k и сложению получившихся произведений. Но умножение на скаляр и сумма – это непрерывные операции, по аксиомам топологического векторного пространства.

(b) $\Rightarrow$ (c). Оба пространства X и l_2^n имеют размерность n, значит, существует линейная биекция $T : X \to l_2^n$. И T, и T^{-1} непрерывны по условию (b).

Наконец, (c) $\Rightarrow$ (d) ввиду полноты пространства l_2^n.

Основное утверждение (a) докажем теперь индукцией по n. При $n = 0$ пространство X состоит только из нулевого элемента, и утверждение тривиально. Осуществим переход $n \to n+1$. Пусть $\dim X = n+1$ и f – ненулевой линейный функционал на X. Тогда $\operatorname{Ker} f$ – n-мерное пространство. По предположению индукции с учётом доказанных импликаций (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d), $\operatorname{Ker} f$ – полное пространство. Следовательно, $\operatorname{Ker} f$ замкнуто в X, и, по теореме 4, функционал f непрерывен. □

16.2.6. Упражнения

1. Пусть X имеет счётную базу окрестностей нуля. Тогда каждый ограниченный линейный оператор $T: X \to E$ непрерывен.

2. Пусть X – топологическое векторное пространство, $Y \subset X$ – подпространство, $q: X \to X/Y$ – факторотображение. Определим топологию τ на X/Y: множество $U \subset X/Y$ назовём открытым в том и только том случае, если $q^{-1}(U)$ – открытое множество. Проверьте, что:
   - τ – топология, согласующаяся с линейной структурой;
   - τ – сильнейшая среди всех топологий на X/Y, в которых непрерывно факторотображение;
   - если подпространство Y замкнуто, то X/Y отделимо, даже если само исходное пространство X неотделимо;
   - в случае нормированных пространств, топология τ совпадает с топологией, задаваемой факторнормой.

3. Докажите следующее обобщение теоремы 5 п. 11.2.1: если в X существует предкомпактная окрестность нуля, то X конечномерно.

4. На примере тождественного оператора в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ покажите, что достаточное условие непрерывности, доказанное в теореме 3, не будет необходимым условием.

5. Где в доказательстве теоремы 6 п. 16.2.5 использовалась отделимость пространства? Будет ли теорема по-прежнему верна, если отказаться от условия отделимости?

16.3. Локально выпуклые пространства

16.3.1. Полунормы и топология

Определение 1. Топологическое векторное пространство X называется *локально выпуклым*, если для любой окрестности нуля U существует выпуклая окрестность нуля V, содержащаяся в U. Другими словами, пространство X локально выпукло, если система $\mathfrak{N}_0$ окрестностей нуля обладает базой, состоящей из выпуклых множеств.

Теорема 1. Каждая выпуклая окрестность нуля U содержит выпуклую уравновешенную открытую окрестность нуля. В частности, в локально выпуклом пространстве существует база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых уравновешенных открытых множеств.

Доказательство. Пусть $V \subset U$ – открытая уравновешенная окрестность нуля. Тогда $\mathrm{conv}V \subset U$. Докажем, что $\mathrm{conv}V$ – выпуклая уравновешенная открытая окрестность нуля. Выпуклость очевидна. Далее, $\mathrm{conv}V \supset V$, следовательно, $\mathrm{conv}V$ – окрестность нуля. Проверим уравновешенность. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}_1$, то есть $|\lambda| \le 1$. Тогда $\lambda V \subset V$ (ввиду уравновешенности V) и $\lambda \mathrm{conv}V = \mathrm{conv}(\lambda V) \subset \mathrm{conv}V$. Наконец, проверим открытость. Поскольку V – открытое множество, а операции умножения на скаляр и суммы множеств не выводят из класса открытых множеств, все множества вида $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k V$, где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, открыты. В то же время $\mathrm{conv}V$ – это объединение множеств вида $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k V$. □

Напомним (определение 2 п. 6.1.1), что функция $p: X \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если $p(x) \ge 0$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для любого $x \in X$ и любого скаляра λ и $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in X$. Отличие полунормы от нормы заключается в том, что $p(x)$ может равняться нулю и для некоторых ненулевых $x \in X$. См. также упражнения 10 –13 п. 6.1.3.

Так же, как и для нормы, единичным шаром полунормы p называется множество $B_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$. B_p – это выпуклое уравновешенное множество. Полунорма p может быть восстановлена по её единичному шару с помощью функционала Минковского: $p(x) = \varphi_{B_p}(x)$ (см. п. 5.4.2).

Теорема 2. Полунорма p на топологическом векторном пространстве X будет непрерывной в том и только том случае, если B_p – это окрестность нуля.

Доказательство. $B_p = p^{-1}(-1,1)$ – это прообраз открытого множества. Если p непрерывна, то этот прообраз открыт. Обратно, пусть B_p – это окрестность нуля, докажем непрерывность полунормы. Для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ нам нужно найти такую окрестность U точки x, что $p(U) \subset (p(x) - \varepsilon, p(x) + \varepsilon)$. Такой окрестностью будет $U = x + \varepsilon B_p$. Действительно, любая точка $y \in U$ имеет вид $y = x + \varepsilon z$, где $p(z) < 1$. Следовательно, по неравенству треугольника, $p(x) - \varepsilon < p(y) < p(x) + \varepsilon$. □

Определение 2. Пусть G – семейство полунорм на линейном пространстве X. Через $\mathfrak{D}_G$ обозначим систему всех конечных пересечений множеств вида rB_p, где $p \in G$ и $r > 0$. *Локально-выпуклой топологией, порождённой семейством полунорм* G, называется топология τ_G на X, где базой окрестностей нуля служит $\mathfrak{D}_G$, а базой окрестностей точки $x \in X$ служит, соответственно, семейство множеств вида $x + U$, где $U \in \mathfrak{D}_G$.

Семейство полунорм G называется *невырожденным*, если для любого $x \in X \setminus \{0\}$ существует $p \in G$ с $p(x) \neq 0$.

Теорема 3. I. Пусть G – семейство полунорм на линейном пространстве X. Тогда топология τ_G, порождённая семейством G, согласуется с линейной структурой и локально выпукла.

II. Топология τ_G будет отделимой в том и только том случае, если семейство полунорм G невырождено.

III. Топологическое векторное пространство X будет локально выпуклым тогда и только тогда, когда его топология порождается некоторым семейством полунорм.

Доказательство. I. Так как шар полунормы – это выпуклое уравновешенное поглощающее множество и эти свойства наследуются конечными пересечениями, база окрестностей нуля $\mathfrak{D}_G$ состоит из выпуклых уравновешенных поглощающих множеств. Далее, для любого $U \in \mathfrak{D}_G$ имеем $V = \frac{1}{2}U \in \mathfrak{D}_G$, и ввиду выпуклости $V + V \subset U$. Этим мы проверили выполнение свойств (i)-(iii) теоремы 2 п. 16.2.1. Выполнение условий существования топологии, задаваемой системами открытых окрестностей (п. 1.2.1) оставляем читателю. Согласованность топологии с линейной структурой вытекает из теоремы 3 п. 16.2.1.

II. Характеризация отделимости следует из теоремы 4 п. 16.2.1.

III. Пусть X – локально выпуклое пространство. По теореме 1, X обладает базой $\mathfrak{D}$ окрестностей нуля, состоящей из выпуклых уравновешенных открытых множеств. В качестве элементов требуемого семейства полунорм следует взять те полунормы, единичные шары которых служат элементами базы $\mathfrak{D}$. □

Теорема 4. Пусть X – топологическое векторное пространство, f – линейный функционал на X. Для непрерывности функционала f необходимо и достаточно существования такой непрерывной полунормы p на X, что $|f(x)| \le p(x)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Пусть f непрерывен. Тогда $p(x) = |f(x)|$ будет требуемой полунормой. Обратно, пусть $|f(x)| \le p(x)$, и p – непрерывная полунорма. Тогда f ограничен на окрестности нуля B_p. □

Теорема 5 (теорема Хана–Банаха в локально выпуклых пространствах). Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве Y локально выпуклого пространства X. Тогда f можно продолжить на всё X с сохранением линейности и непрерывности.

Доказательство. По условию, множество $U = \{y \in Y : |f(y)| < 1\}$ – это открытая окрестность нуля в Y. По определению индуцированной топологии на подпространстве, существует V – окрестность нуля в X, для которой $U \supset V \cap Y$. Так как пространство X локально выпукло, окрестность V можно выбрать в виде единичного шара некоторой непрерывной полунормы p, заданной на X. По построению, для любого $y \in Y$, если $p(y) < 1$, то $y \in U$ и $|f(y)| < 1$. То есть $|f(y)| \le p(y)$ всюду на Y.

Теперь, как и для нормированных пространств, рассуждение следует проводить отдельно в вещественном и в комплексном случаях. Если f – вещественный функционал, то, по теореме Хана – Банаха в аналитической форме, его можно продолжить на всё X с сохранением условия $f(x) \le p(x)$. Подставив $-x$ вместо x, получим ещё одно неравенство $-f(x) \le p(x)$. То есть $|f(x)| \le p(x)$, и продолженный функционал f непрерывен. В комплексном случае продолжение можно осуществить с сохранением на всём X условия $\operatorname{Re} f(x) \le p(x)$. Подставив в качестве x элемент $e^{-i \arg f(x)} x$, снова получим неравенство $|f(x)| \le p(x)$, а с ним и непрерывность на X функционала f. □

Замечание 1. Множество линейных функционалов $E \subset X'$ будет разделять точки тогда и только тогда, когда для любого $x \ne 0$ существует

$f \in E$ с $f(x) \neq 0$. Действительно, если множество E разделяет точки, то, в частности, E отделяет x от 0. Обратно, если $x \neq y$ − произвольные точки, то $x - y \neq 0$. Функционал $f \in E$, для которого $f(x-y) \neq 0$ будет разделять точки x и y.

Следствие. Множество X^* всех непрерывных линейных функционалов на хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X разделяет точки.

Доказательство. Для любого $x \neq 0$ существует непрерывный линейный функционал на $\mathrm{Lin}\{x\}$ с $f(x) \neq 0$. Остаётся продолжить этот функционал на всё X по доказанной теореме Хана – Банаха. □

16.3.2. Упражнения

1. На примере семейства полунорм G, состоящего из одной нормы, проверьте, что локально-выпуклая топология τ_G, порождённая семейством полунорм G (определение 2), не совпадает с топологией $\sigma(X,G)$, порождённой семейством отображений G (п. 16.1.7). Более того, $\sigma(X,G)$ не согласуется с линейной структурой.
2. Пусть G − семейство полунорм, F − семейство всех функций вида $f_x(y) = p(x+y)$, $p \in G$, $x \in X$. Тогда $\tau_G = \sigma(X,F)$.
3. Последовательность $x_n \in X$ сходится к $x \in X$ в топологии τ_G в том и только том случае, если $p(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для всех $p \in G$.
4. Проверьте, что следующие пространства действительно будут отделимыми локально выпуклыми пространствами, и опишите сходимость последовательностей в этих пространствах. Докажите полноту и метризуемость пространств в первых трёх примерах. Будет ли четвёртое пространство метризуемым? Полным?

- Пространство $\mathcal{H}(D)$ голоморфных функций в открытой области $D \subset \mathbb{C}$ с локально-выпуклой топологией, порождённой семейством всех полунорм вида $p_K(f) = \max\limits_{z \in K} |f(z)|$, где K − компакт в D.
- Пространство $C^\infty[0,1]$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $[0,1]$, наделённое локально-выпуклой топологией, порождённой семейством полунорм $p_n(f) = \max\limits_{t \in [0,1]} \left| f^{(n)}(t) \right|$, $n = 0,1,2,\dots$.
- Пространство $C^\infty(0,+\infty)$ всех бесконечно дифференцируемых функций с локально-выпуклой топологией, порождённой семейством полунорм $p_n(f) = \max\limits_{1/n \le t \le n} \left| f^{(n-1)}(t) \right|$, $n \in \mathbb{N}$.

– Бесконечномерное линейное пространство X, наделённое *сильнейшей локально выпуклой топологией*: локально-выпуклая топология порождается семейством **всех** полунорм на X.

5. Тихоновское произведение локально выпуклых пространств локально выпукло.
6. Подпространство локально выпуклого пространства локально выпукло.
7. Факторпространство локально выпуклого пространства (см. упражнение 2 п. 16.2.6) локально выпукло.
8. Докажите, что если U – уравновешенное множество, а f – линейный функционал и $\operatorname{Re} f(x) \le a$ для $x \in U$, то и $|f(x)| \le a$ на U.
9. Применив теорему Хана-Банаха в геометрической форме к множеству U и открытой окрестности V точки x_0 докажите такое следствие: пусть U – замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество хаусдорфова локально выпуклого пространства X и $x_0 \in X \setminus U$. Тогда существует такой непрерывный линейный функционал f, что $|f(y)| \le 1$ для всех $y \in U$ и $|f(x_0)| > 1$.
10. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в локально выпуклом пространстве X называется *абсолютно сходящимся*, если $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) < \infty$ для любой непрерывной полунормы p на X. Докажите, что в полном локально выпуклом пространстве любой абсолютно сходящийся ряд сходится.
11. Пространство $L_0[0,1]$ в топологии сходимости по мере – не локально выпуклое пространство. Более того, любая выпуклая замкнутая окрестность нуля в $L_0[0,1]$ совпадает со всем пространством. В частности, единственный непрерывный линейный функционал на $L_0[0,1]$ – это тождественный ноль.

16.3.3. Слабые топологии

Определение 1. Пусть X – линейное пространство, X' – его алгебраическое сопряжённое (то есть пространство всех линейных функционалов на X), $E \subset X'$ – некоторое подмножество. *Слабой топологией на X, порождённой множеством функционалов E*, называется слабейшая топология, в которой непрерывны все функционалы из E. Эта топология – частный случай топологии, порождённой семейством отображений (п. 16.1.7). Поэтому для неё используется то же обозначение $\sigma(X, E)$.

Расшифруем это определение подробнее. Для любого конечного набора функционалов $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и любого $\varepsilon > 0$ введём обозначение

$$U_{G,\varepsilon} = \bigcap_{g \in G} \{x \in X : |g(x)| < \varepsilon\} = \left\{x \in X : \max_{g \in G} |g(x)| < \varepsilon\right\}.$$

Семейство множеств вида $U_{G,\varepsilon}$, где $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset E$ и $\varepsilon > 0$, образует базу окрестностей нуля топологии $\sigma(X, E)$. Базу окрестностей любого элемента $x_0 \in X$ образуют множества вида

$$\bigcap_{g \in G} \{x \in X : |g(x - x_0)| < \varepsilon\} = x_0 + U_{G,\varepsilon}.$$

Отсюда видно, что топология $\sigma(X, E)$ – это локально-выпуклая топология, порождённая семейством полунорм $p_G(x) = \max_{g \in G} |g(x)|$, где G пробегает все конечные подмножества множества E. Для того, чтобы эта топология была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы семейство функционалов E разделяло точки пространства X.

Как мы уже отмечали в п. 16.1.7, фильтр $\mathfrak{F}$ на X сходится в топологии $\sigma(X, E)$ к элементу x в том и только том случае, если $\lim_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ для всех $f \in E$. В частности, этот критерий сходимости верен и для последовательностей: $x_n \to x$ в топологии $\sigma(X, E)$, если $f(x_n) \to f(x)$ для всех $f \in E$.

Более подробное изучение слабых топологий начнём с леммы, предлагавшейся в качестве упражнения на тему «Функционалы и коразмерность» в п. 5.3.4. Для удобства читателя приведём её прямое доказательство.

Лемма 1. Пусть f, $\{f_k\}_{k=1}^n$ – линейные функционалы на X, и $\operatorname{Ker} f \supset \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} f_k$. Тогда $f \in \operatorname{Lin}\{f_k\}_{k=1}^n$.

Доказательство. Применим индукцию по n. База индукции – $n = 1$. Если $f_1 = 0$, то $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 = X$, то есть и $f = 0$. Пусть f_1 – ненулевой функционал. Тогда $Y = \operatorname{Ker} f_1$ – это гиперподпространство в X. Следовательно, существует такой вектор $e \in X \setminus Y$, что $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Обозначим $a = f(e)$ и $b = f_1(e)$. Функционал $f - \frac{a}{b} f_1$ равен нулю как на

Y, так и в точке e. Следовательно, функционал $f - \frac{a}{b} f_1$ равен 0 на всём $X = \mathrm{Lin}\{e, Y\}$, то есть $f \in \mathrm{Lin}\{f_1\}$.

Переход $n \to n+1$. Введём в рассмотрение подпространство $Y = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_k$. Условие $\mathrm{Ker}\, f \supset \bigcap_{k=1}^{n+1} \mathrm{Ker}\, f_k$ можно трактовать так: ядро ограничения функционала f на Y содержит ядро ограничения функционала f_{n+1} на Y. Следовательно (случай $n = 1$), существует такой скаляр α, что $f - \alpha f_{n+1}$ равен нулю на всём $Y = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_k$. То есть $\mathrm{Ker}\left(f - \alpha f_{n+1}\right) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_k$. По предположению индукции, $f - \alpha f_{n+1} \in \mathrm{Lin}\{f_k\}_{k=1}^{n}$, то есть $f \in \mathrm{Lin}\{f_k\}_{k=1}^{n+1}$. □

Лемма 2. Пусть Y – подпространство линейного пространства X, $f \in X'$ и существует такое $a > 0$, что $|f(y)| \le a$ на всём Y. Тогда $f(y) = 0$ для всех $y \in Y$.

Доказательство. Пусть существует $y_0 \in Y$ с $f(y_0) \ne 0$. Тогда на элементе $y = \frac{2a}{f(y_0)} y_0 \in Y$ имеем $|f(y)| = 2a > a$. □

Теперь мы готовы дать описание непрерывных в слабой топологии функционалов.

Теорема 1. Функционал $f \in X'$ непрерывен в $\sigma(X, E)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{Lin}\, E$. В частности, если $E \subset X'$ – линейное подпространство, множество $\left(X, \sigma(X, E)\right)^*$ всех $\sigma(X, E)$-непрерывных функционалов на X совпадает с E.

Доказательство. По определению топологии $\sigma(X, E)$, все элементы множества E – непрерывные в $\sigma(X, E)$ функционалы. Непрерывными будут и их линейные комбинации. Обратно, пусть функционал $f \in X'$ непрерывен в $\sigma(X, E)$. Тогда существует конечное множество функционалов $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset E$ и такое $\varepsilon > 0$, что на окрестности $U_{G,\varepsilon} = \left\{x \in X : \max_{g \in G} |g(x)| < \varepsilon\right\}$ все значения функционала f ограничены по модулю некоторым числом $a > 0$. Этим же числом будут ограничены значения функционала и на подпространстве $Y = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, g_k \subset U_{G,\varepsilon}$. По лемме 2, f обращается в 0 на Y, что, в свою очередь, означает (лемма 1), что $f \in \mathrm{Lin}\{g_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathrm{Lin}\, E$. □

Упражнения

1. Доказать равенство топологий $\sigma(X, \mathrm{Lin}\, E) = \sigma(X, E)$.
2. Тихоновская топология в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (топология покоординатной сходимости) совпадает со слабой топологией, порождённой семейством $E = \{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ координатных функционалов. Чему равно $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^*$?
3. Пусть $E \subset X'$ – подпространство. Тогда топология $\sigma(X, E)$ имеет счётную базу окрестностей нуля в том и только том случае, если линейное пространство E имеет не более чем счётный базис Гамеля.
4. Пусть на X существует норма, непрерывная в топологии $\sigma(X, E)$. Тогда пространство X конечномерно.
5. Каждое ограниченное в топологии $\sigma(X, E)$ множество будет предкомпактом в этой топологии.
6. **Теорема Колмогорова**: если в топологическом векторном пространстве X существует ограниченная окрестность нуля U, то система окрестностей нуля имеет счётную базу $\left\{\frac{1}{n}U\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. В частности, если эта ограниченная окрестность выпукла, то топология пространства может быть задана одной полунормой (нормой, если предположить отделимость пространства).
7. Пусть X – бесконечномерное линейное пространство и семейство функционалов $E \subset X'$ разделяет точки. Тогда ни одна $\sigma(X, E)$-окрестность нуля не будет $\sigma(X, E)$-ограниченным множеством.
8. Пространство $X = c_0$ не полно в топологии $\sigma(X, X^*)$.
9. Общий результат: ни одно бесконечномерное банахово пространство X не полно в топологии $\sigma(X, X^*)$.

16.3.4. Интерполяционная теорема Эйдельгейта

Лемма 1. Пусть X – топологическое векторное пространство, $Y \subset X$ – замкнутое подпространство конечной коразмерности. Тогда если функционал $f \in X'$ разрывен, то ограничение функционала f на Y также разрывно.

Доказательство. Воспользуемся свойствами факторпространства топологического векторного пространства, приведенными в упражнении 2 п. 16.2.6. Предположим, что ограничение функционала f на Y

непрерывно. Тогда $\widetilde{Y} = Y \bigcap \operatorname{Ker} f$ – это замкнутое подпространство конечной коразмерности. По определению коразмерности, факторпространство $X/\widetilde{Y}$ конечномерно. Зададим на $X/\widetilde{Y}$ функционал $\widetilde{f}$ по правилу $\widetilde{f}(qx) = f(x)$, где $q : X \to X/\widetilde{Y}$ – факторотображение. По определению коразмерности, факторпространство $X/\widetilde{Y}$ конечномерно, значит, функционал $\widetilde{f}$ непрерывен на $X/\widetilde{Y}$. Следовательно, f непрерывен как композиция функционала $\widetilde{f}$ и факторотображения. □

Лемма 2. Пусть X – топологическое векторное пространство, $f \in X'$ – разрывный функционал. Тогда для любого скаляра a гиперплоскость $f_{=a} = \{x \in X : f(x) = a\}$ плотна в X.

Доказательство. Плотность ядра функционала f обеспечивает теорема 4 п. 16.2.5. Гиперплоскость же $f_{=a}$ получается из $\operatorname{Ker} f$ параллельным переносом на любой фиксированный вектор $y \in f_{=a}$. □

Теорема 1 (M. Eidelheit [Eid]). Пусть X – полное локально выпуклое пространство с топологией, задаваемой последовательностью полунорм $p_1 \le p_2 \le p_3 \le \dots$. Далее, пусть последовательность линейных функционалов $f_n \in X^*$ обладает следующим свойством: для любого $n \in \mathbb{N}$ функционал f_n разрывен по отношению к p_n (то есть разрывен в топологии, порождённой одной полунормой p_n), но непрерывен по отношению к p_{n+1} и, соответственно, непрерывен по отношению ко всем p_k с $k > n$. Тогда для любой последовательности скаляров a_n существует такой элемент $x \in X$, что $f_n(x) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Требуемый элемент $x \in X$ построим в виде суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, элементы которого подчиняются следующим условиям:

(a) $p_n(x_n) \le \dfrac{1}{2^n}$;

(b) $f_n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = a_n$;

(c) $f_n(x_k) = 0$ при $k > n$.

При этом условие (a) обеспечивает абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (определение см. в упражнении 10 п. 16.3.2). Действительно, если p – непрерывная полунорма, то её единичный шар должен содержать какой-то из шаров полунорм p_n. Значит, начиная с некоторого m, для всех $n \geq m$ выполнена оценка $p \leq Cp_n$. Соответственно, $\sum_{k=m}^{\infty} p(x_k) < C \sum_{k=m}^{\infty} p_k(x_k) < \infty$. Поэтому элемент $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ будет существовать. Условия же (b) и (c) обеспечивают требуемое равенство $f_n(x) = a_n$.

Итак, всё, что нам нужно (если не вообще в жизни, то, по крайней мере, в рамках этого доказательства), – это построить последовательность x_n, обладающую свойствами (a) - (c). Построение будем проводить рекуррентно.

Функционал f_1 разрывен по отношению к полунорме p_1, поэтому гиперплоскость $X_1 = \{x \in X : f_1(x) = a_1\}$ p_1-плотна в X. В частности, X_1 пересекается с шаром $B_1 = \left\{x \in X : p_1(x) < \frac{1}{2}\right\}$. В качестве x_1 возьмём любой элемент множества $X_1 \bigcap B_1$.

Пусть элементы $x_1, \ldots, x_{n-1}$ уже построены, опишем построение вектора x_n. Рассмотрим подпространство конечной коразмерности $Y = \bigcap_{k=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_k$. Так как функционалы f_k p_n-непрерывны при $k < n$, то Y – это p_n-замкнутое подпространство. По лемме 1, ограничение функционала f_n на Y разрывно по отношению к полунорме p_n. Поэтому гиперплоскость $X_n = \left\{y \in Y : f_n(x) = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} f_n(x_k)\right\}$ плотна в Y с точки зрения полунормы p_{n+1}. Соответственно, шар $B_n = \left\{x \in Y : p_n(x) < \frac{1}{2^n}\right\}$ пересекается с гиперплоскостью X_n. В качестве x_n возьмём любой элемент множества $X_n \bigcap B_n$. Принадлежность вектора x_n множествам B_n, X_n и Y обеспечивает выполнение условий (a), (b) и (c) соответственно. □

Приведём пару примеров, демонстрирующих способ применения доказанной интерполяционной теоремы к задачам анализа.

Теорема 2. Для любой последовательности скаляров a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, существует такая бесконечно дифференцируемая функция $x(t)$ на отрезке $[0,1]$, что $x(0) = a_0$, $x'(0) = a_1$, … , $x^{(n)}(0) = a_n$, … .

Доказательство. Отметим, что естественная попытка дать решение в виде ряда Тейлора $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ не проходит: если a_n быстро стремится к бесконечности, то радиус сходимости ряда Тейлора будет равняться нулю. Интерполяционная же теорема даёт весьма экономное решение задачи.

В пространстве $C^\infty[0,1]$ бесконечно дифференцируемых функций на $[0,1]$ рассмотрим последовательность полунорм $p_0 \le p_1 \le p_2 \le \ldots$

$$p_0 = 0,\; p_1(x) = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,\; \ldots,\; p_n(x) = \max_{t \in [0,1]} \max\{|x(t)|, |x'(t)|, \ldots, |x^{(n-1)}(t)|\},\; \ldots$$

и функционалов

$$f_0(x) = x(0),\; f_1(x) = x'(0),\; \ldots,\; f_n(x) = x^{(n)}(0),\; \ldots .$$

Выбранная последовательность полунорм задаёт в $C^\infty[0,1]$ топологию равномерной сходимости функций и всех производных. В этой топологии $C^\infty[0,1]$ полно. Далее, $|f_n(x)| \le p_{n+1}(x)$, то есть функционал f_n непрерывен по отношению к p_{n+1}. Неравенство же $|f_n| \le Cp_n$ не выполнено ни при каком C, что легко проверить, подставив в неравенство, например, последовательность функций $x_m(t) = \sin(\pi m t)$. Все условия теоремы 1 выполнены, остаётся только её применить. □

Теорема 3. Для любой последовательности скаляров a_n, $n = 1,2,\ldots$, существует такая целая функция $x(z)$, что $x(n) = a_n$ при всех n.

Доказательство. В пространстве $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ целых функций рассмотрим последовательность полунорм $p_1 \le p_2 \le \ldots$, $p_n(x) = \max_{|z| \le n-1} |x(z)|$, и функционалов $f_n(x) = x(n)$. Данная последовательность полунорм задаёт топологию равномерной сходимости на компактах, в которой $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ полно. Снова, как и в предыдущей теореме, $|f_n(x)| \le p_{n+1}(x)$, неравенство же $|f_n| \le Cp_n$ не выполнено ни при каком C (подставьте $x_m(z) = z^m$). И снова, требуемую функцию $x(z)$ даёт применение теоремы 1. □

Несколько более общий вариант интерполяционной теоремы с применением к проблеме моментов можно найти в работе Б. М. Макарова [Mak].

Упражнения

1. Проверить корректность определения функционала $\widetilde{f}$ в доказательстве леммы 1, а именно, что если $qx = qy$, то $f(x) = f(y)$. То есть что $\widetilde{f}(qx) = f(x)$ действительно зависит от qx а не от x.

2. Пусть $t_1, \ldots, t_j$ – конечный набор различных точек отрезка [0,1], $\{a_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \{1,\ldots,j\}}$ – числа. Докажите существование такой функции $x \in C^{\infty}[0,1]$, что $x^{(n)}(t_k) = a_{n,k}$ при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1,\ldots,j\}$.

3. Пусть $z_n \in \mathbb{C}$ – произвольный набор точек («узлов интерполяции»). Следующие условия эквивалентны:
- для любой последовательности скаляров a_n, $n = 1, 2, \ldots$, существует такая целая функция $x(z)$, что $x(z_n) = a_n$ при всех n;
- узлы z_n попарно различны и $|z_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

4. Для любой последовательности скаляров a_n, $n = 1, 2, \ldots$, и любой последовательности индексов $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ существует такая «лакунарная» целая функция $x(z)$ вида $x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{m_k}$, что $x(1) = a_1$, $x(2) = a_2$, … , $x(n) = a_n$, … .

Последовательность x_n элементов топологического векторного пространства X называется ω*-линейно независимой*, если для любой последовательности скаляров b_n, из условия $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k = 0$ следует, что все b_n равны нулю. Теорема Эрдеша – Страуса[1] (P. Erdös, E. G. Straus, 1953) утверждает, что из любой линейно независимой последовательности элементов нормированного пространства можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность.

5. Пусть на топологическом векторном пространстве X существует непрерывная норма. Тогда из любой линейно независимой

---

[1] Когда И. Зингер готовил к печати второй том своей монографии [Sin2], он обнаружил некий пробел в оригинальном доказательстве Эрдеша и Страуса. Им были разосланы письма другим специалистам по теории базисов с просьбой найти альтернативное доказательство. Такие доказательства были предложены P. Terenzi и одновременно В. И. Гурарием – тогда, в 1980 г., активным участником нашего Харьковского семинара по теории банаховых пространств. С этим временем у меня связаны ностальгические воспоминания: весной 80 года я был на третьем курсе, и это была первая «взрослая» задача, над которой я серьёзно думал. Пример из упражнения 6 – результат данных раздумий – был затем упомянут Зингером в его монографии. Можете представить, как я был горд своим авторством… Забавно, что опубликовать это замечание [Kad1] я собрался только через 10 с лишком лет.

последовательности в X можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность.

6. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ векторы $x_1 = (1,2,3,\dots,n,\dots)$, $x_2 = (1^2,2^2,3^2,\dots,n^2,\dots)$, $x_3 = (1^3,2^3,3^3,\dots,n^3,\dots)$. $\dots$. Эта последовательность линейно независима, но не содержит ω-линейно независимых подпоследовательностей. (Использовать упражнение 4.)

7. Теорема Бессаги – Пелчиньского (C. Bessaga, A. Pelczyński, 1957). Если на полном метризуемом локально выпуклом пространстве X нет ни одной непрерывной нормы, то X содержит вещественное подпространство, изоморфное $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

8. Из предыдущих трёх упражнений выведите, что для полного метризуемого локально выпуклого пространства X следующие условия эквивалентны:

- из любой линейно независимой последовательности в X можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность;
- на X существует непрерывная норма.

16.3.5. Предкомпактность и ограниченность

Определение 1. Топологическое векторное пространство X принадлежит *классу Монтеля*, если любое замкнутое ограниченное множество в X – компакт.

Согласно теореме Рисса, нормированное пространство принадлежит классу Монтеля, только если оно конечномерно. В то же время многие из естественно возникающих в задачах анализа топологических векторных пространств принадлежит классу Монтеля, несмотря на свою бесконечномерность. В этом параграфе будут приведены примеры пространств класса Монтеля. Так, само название «класс Монтеля» связано с теоремой Монтеля, дающей критерий компактности множества в пространстве $\mathcal{H}(D)$ голоморфных функций. В современных курсах комплексного анализа эта теорема служит основой доказательства теоремы Римана существования конформного отображения.

Определение 2. Пусть A, B – подмножества линейного пространства X. Множество A назовём B*-предкомпактным* (обозначение $A \prec_c B$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество Q, что $A \subset \varepsilon B + Q$.

Если X – нормированное пространство, то подмножество $A \subset X$ будет предкомпактом в том и только том случае, если $A \prec_c B_X$. Множество A в топологическом векторном пространстве X предкомпактно тогда и только тогда, когда $A \prec_c U$ для всех окрестностей нуля U пространства X.

Теорема 1. Отношение $\prec_c$ между подмножествами линейного пространства X обладает следующими свойствами:

(a) если $A \prec_c B$ и $A_1 \subset A$, то $A_1 \prec_c B$;
(b) если $A \prec_c B$ и $B \subset B_1$, то $A \prec_c B_1$;
(c) если $A \prec_c B$ и $t > 0$, то $A \prec_c tB$;
(d) если $A_1 \prec_c B$, $A_2 \prec_c B$, то $A_1 \bigcup A_2 \prec_c B$;
(e) если $A \prec_c B$, Y – линейное пространство и $T : X \to Y$ – линейный оператор, то $T(A) \prec_c T(B)$;
(f) если $A_1 \prec_c B$, $A_2 \prec_c B$ и B – выпуклое множество, то $A_1 + A_2 \prec_c B$;
(g) если $A \prec_c B$, $B - B \subset U$, то $A \prec_c U$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество Q, **лежащее в** A, что $A \subset \varepsilon U + Q$;
(h) пусть $A \prec_c B$, B – выпуклое уравновешенное множество, Y – линейное пространство, $T : Y \to X$ линейный оператор и $A \subset T(Y)$. Тогда $T^{-1}(A) \prec_c T^{-1}(B)$.

Доказательство. Свойства (a)-(e) очевидны. Докажем оставшиеся свойства.

(f) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $Q_1, Q_2 \subset X$ – конечные подмножества, для которых $A_1 \subset \frac{\varepsilon}{2} B + Q_1$, $A_2 \subset \frac{\varepsilon}{2} B + Q_2$. Тогда $A_1 + A_2 \subset \frac{\varepsilon}{2} B + \frac{\varepsilon}{2} B + Q_1 + Q_2$. Ввиду выпуклости $\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} B \subset B$, соответственно, $A_1 + A_2 \subset \varepsilon B + Q_1 + Q_2$. Остаётся заметить, что множество $Q_1 + Q_2$ конечно.

(g) По условию, существует такое конечное множество $Q_1 \subset X$, что $A \subset \varepsilon B + Q_1$. Построим функцию $f : Q_1 \to A$ таким образом, что любого $q \in Q_1$ если только $q + \varepsilon B$ пересекается с A, то $f(q) \in (q + \varepsilon B) \bigcap A$. Докажем, что $A \subset \varepsilon U + f(Q_1)$, то есть что $f(Q_1)$ можно взять в качестве требуемого Q. Действительно, для любого $a \in A$ существует такой $q \in Q_1$, что $a \in q + \varepsilon B$. Для этого q множества $q + \varepsilon B$ и A пересекается (a – одна из точек пересечения), соответственно, $f(q) \in (q + \varepsilon B) \bigcap A$. Имеем:

$$a \in q + \varepsilon B = f(q) + \varepsilon B + (q - f(q)) \subset f(q) + \varepsilon B - \varepsilon B \subset f(q) + \varepsilon U.$$

(h) Так как, согласно (c), $A \prec_c \frac{1}{2} B$ и $\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} B \subset B$, доказанный нами пункт (g) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $Q \subset A$, что $A \subset \varepsilon B + Q$. Тогда $Q \subset T(Y)$, и мы можем построить такую функцию $f: Q \to Y$, что $T(f(q)) = q$ для любого $q \in Q$. Докажем, что $T^{-1}(A) \subset \varepsilon T^{-1}(B) + f(Q)$. Пусть $y \in T^{-1}(A)$. Тогда $T(y) \in A$, и существуют такие $b \in B$ и $q \in Q$, что $T(y) = q + \varepsilon b$. Учитывая равенство $T(f(q)) = q$, имеем $T(y - f(q)) = \varepsilon b$, то есть $\dfrac{y - f(q)}{\varepsilon} \in T^{-1}(B)$. Следовательно, $y = \varepsilon \dfrac{y - f(q)}{\varepsilon} + f(q) \in \varepsilon T^{-1}(B) + f(Q)$. □

Теорема 2. Пусть X – полное топологическое векторное пространство и для любой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля V, что $V \prec_c U$. Тогда X принадлежит классу Монтеля.

Доказательство. Ввиду полноты пространства достаточно доказать, что каждое ограниченное подмножество $A \subset X$ – предкомпакт. Пусть A ограничено, U – произвольная окрестность нуля. По условию, существует такая окрестность нуля V, что $V \prec_c U$. По определению ограниченности, $A \subset nV$ при достаточно большом n. Согласно пунктам (a) и (c) предыдущей теоремы, имеем: $A \subset nV \prec_c nU$, то есть $A \prec_c U$. □

Пример 1. Пространство $\mathcal{H}(D)$ голоморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}$ принадлежит классу Монтеля.

Для обоснования воспользуемся теоремой 2. Пусть U – произвольная окрестность нуля в $\mathcal{H}(D)$. Учитывая определение топологии в $\mathcal{H}(D)$ (упражнение 4 п. 16.3.2), можно считать, что U – это единичный шар полунормы $p_K(f) = \max\limits_{z \in K} |f(z)|$, где K – компакт в D. Рассмотрим спрямляемый контур $\Gamma \subset D$, охватывающий K; через K_1 обозначим компакт, содержащий K и имеющий Γ своей границей, а через V обозначим единичный шар полунормы p_{K_1}. Докажем, что $V \prec_c U$. Пусть $\delta = \rho(K, \Gamma)$, а l – длина контура Γ. По интегральной формуле Коши для производной, для любой функции $f \in V$ и любого $z \in K$ имеем:

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{f(\varsigma)}{(z - \varsigma)^2} \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{p_{K_1}(f)}{\delta^2} l \le \frac{l}{2\pi\delta^2}.$$

То есть семейство функций V имеет равномерно ограниченные на K производные. Далее, само семейство V ограничено на K (и даже на большем компакте K_1) по модулю единицей. Из теоремы Арцела следует, что V – предкомпакт, если это множество рассматривать в $C(K)$.

Рассмотрим оператор $T: \mathcal{H}(D) \to C(K)$, ставящий каждой функции её ограничение на K. Доказанный нами факт можно сформулировать так:

$T(V)$ – предкомпакт в $C(K)$. Другими словами, $T(V) \prec_c B_{C(K)}$. Так как $T^{-1}(B_{C(K)}) = U$, из пункта (h) теоремы 1 заключаем, что $V \prec_c U$. □

Пример 2. Пространство $C^\infty[0,1]$ принадлежит классу Монтеля.

Напомним, что топология пространства $C^\infty[0,1]$ задаётся семейством полунорм $p_n(f) = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| f^{(n)}(t) \right|$, $n = 0,1,2,\ldots$. Обозначим единичный шар полунормы p_n через B_n. Базу окрестностей нуля образуют множества вида rU_n, где $r > 0$, а $U_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} B_k = \left\{ f \in C^\infty[0,1] : \max\limits_{k=0,1,\ldots,n} \max\limits_{t\in[0,1]} \left| f^{(k)}(t) \right| < 1 \right\}$. Согласно теореме 2, для обоснования примера достаточно доказать, что $U_{n+1} \prec_c U_n$ при всех $n = 0,1,2,\ldots$. Доказательство проведём индукцией по n.

$n = 0$. Рассмотрим оператор тождественного вложения $T : C^\infty[0,1] \to C[0,1]$. Множество $T(U_1)$ (равное U_1) состоит из бесконечно дифференцируемых функций, подчиняющихся условиям $|f(t)| < 1$ и $|f'(t)| < 1$ для всех $t \in [0,1]$. По теореме Арцела, $T(U_1)$ – предкомпакт в $C[0,1]$, то есть $T(U_1) \prec_c B_{C[0,1]}$. Согласно пункту (h) теоремы 1, $U_1 \prec_c T^{-1}(B_{C[0,1]}) = U_0$.

$n \to n+1$. Пусть $U_{n+1} \prec_c U_n$. Рассмотрим оператор интегрирования $G : C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$: $(Gf)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Согласно пункту (e) теоремы 1, $G(U_{n+1}) \prec_c G(U_n)$. Так как $G(U_n) \subset U_{n+1}$, заключаем, что

$$G(U_{n+1}) \prec_c U_{n+1}. \tag{1}$$

С другой стороны, так как любая функция $f \in U_{n+2}$ представима в виде $f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau)d\tau$, где $f' \in U_{n+1}$, а $|f(0)| < 1$, $U_{n+2} \subset A + G(U_{n+1})$, где A состоит из констант, меньших единицы по модулю. Условие (1) в совокупности с очевидным условием $A \prec_c U_{n+1}$ (A – это одномерное ограниченное множество) позволяет применить пункт (f) теоремы 1: $U_{n+2} \subset A + G(U_{n+1}) \prec_c U_{n+1}$, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Докажите, что пространство $C^\infty(0,+\infty)$ принадлежит классу Монтеля.

2. Любое линейное пространство X, наделённое сильнейшей локально выпуклой топологией, принадлежит классу Монтеля. Более того, в таком пространстве каждое ограниченное множество конечномерно.
3. Тихоновское произведение пространств класса Монтеля само принадлежит классу Монтеля.
4. Замкнутое подпространство пространства класса Монтеля принадлежит классу Монтеля.

17. Элементы теории двойственности

17.1. Двойственность в локально выпуклых пространствах

17.1.1. Общее понятие двойственности. Поляры

Определение 1. Пусть X, Y – линейные пространства. Отображение, ставящее каждой паре элементов $(x, y) \in X \times Y$ комплексное число $\langle x, y \rangle$, называется *двойственностью*, если:

(a) $\langle x, y \rangle$ – это билинейная форма:

$\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, y \rangle = a_1 \langle x_1, y \rangle + a_2 \langle x_2, y \rangle$; $\langle x, a_1 y_1 + a_2 y_2 \rangle = a_1 \langle x, y_1 \rangle + a_2 \langle x, y_2 \rangle$;

(b) $\langle x, y \rangle$ подчиняется условию невырожденности:

- для любого $x \in X \setminus \{0\}$ существует $y \in Y$ с $\langle x, y \rangle \neq 0$ и
- для любого $y \in Y \setminus \{0\}$ существует $x \in X$ с $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Пара пространств X, Y с заданной на них двойственностью называется дуальной парой, или парой пространств в двойственности.

Важнейшим для нас примером дуальной пары будет отделимое локально выпуклое пространство X с его сопряжённым $Y = X^*$, где двойственность задаётся как действие функционала на элемент: $\langle x, y \rangle = y(x)$. В какой-то степени этот пример описывает общую ситуацию.

Определение 2. Пусть (X, Y) – пара пространств в двойственности. Для каждого $y \in Y$ определим действие на элементы пространства X по правилу $y(x) = \langle x, y \rangle$. При таком определении каждый элемент $y \in Y$ становится линейным функционалом на X, то есть $Y \subset X'$. *Слабой топологией* на X назовём топологию $\sigma(X, Y)$ из определения 1 п. 16.3.3. То есть базу окрестностей нуля топологии $\sigma(X, Y)$ задаёт семейство множеств $\left\{ x \in X : \max\limits_{y \in G} \left| \langle x, y \rangle \right| < \varepsilon \right\}$, где $\varepsilon > 0$, а G пробегает все конечные подмножества пространства Y.

Аксиома (b) дуальной пары гарантирует отделимость слабой топологии. По теореме 1 п. 16.3.3, $\left(X, \sigma(X, Y) \right)^* = Y$, то есть любую дуальную пару можно воспринимать как пару вида (X, X^*). Тем не менее, в общем определении дуальной пары есть своё достоинство: пространства X и Y в этом определении совершенно равноправны. В частности, с тем же успехом можно элементы пространства X считать функционалами на Y и рассматривать слабую топологию $\sigma(Y, X)$ уже на пространстве Y.

Такое равноправие позволяет изучать свойства одного из пространств дуальной пары и переносить их на другое по симметрии.

Напомним, что топология $\sigma(X,Y)$ – это слабейшая топология, в которой непрерывны все функционалы $y \in Y$, то есть функционалы вида $y(x) = \langle x, y \rangle$. В частности, если X – это какое-то локально выпуклое пространство, а $Y = X^*$, то $\sigma(X,Y)$ слабее (возможно, не строго) исходной топологии пространства X. Это замечание можно считать обоснованием термина «слабая топология».

Отметим ещё одну важную связь между исходной топологией локально выпуклого пространства X и слабой топологией $\sigma(X,X^*)$.

Теорема 1. Каждое выпуклое замкнутое подмножество локально выпуклого пространства X замкнуто и в слабой топологии $\sigma(X,X^*)$. В частности, каждое замкнутое подпространство локально выпуклого пространства X $\sigma(X,X^*)$-замкнуто.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ – выпуклое замкнутое подмножество. Возьмём произвольную точку $x \in X \setminus A$ и докажем, что x не является $\sigma(X,X^*)$-предельной точкой множества A. Так как A замкнуто, существует открытая окрестность U точки x, не пересекающая множество A. Ввиду локальной выпуклости пространства, окрестность U можно выбрать выпуклой. По теореме Хана – Банаха в геометрической форме, существуют такой функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ и такой скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, что $\operatorname{Re} f(u) < \theta$ для всех $u \in U$ и $\operatorname{Re} f(a) \geq \theta$ для всех $a \in A$. В частности, $\operatorname{Re} f(x) < \theta$. Так как f, а с ним и $\operatorname{Re} f$ – это $\sigma(X,X^*)$-непрерывные функции, точка x, для которой $\operatorname{Re} f(x) < \theta$, не может быть $\sigma(X,X^*)$-предельной для точек множества A, где $\operatorname{Re} f(a) \geq \theta$. □

Определение 3. Пусть (X,Y) – пара пространств в двойственности. *Полярой* множества $A \subset X$ называется множество $A^o \subset Y$, определяемое по следующему правилу: $y \in A^o$, если $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ для всех $x \in A$. Симметричным образом определяется поляра $A^o \subset X$ множества $A \subset Y$.

Аннулятором множества $A \subset X$ называется множество $A^\perp \subset Y$, состоящее из тех $y \in Y$, что $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $x \in A$. Очевидно, $A^\perp \subset A^o$, и, согласно лемме 2 п. 16.3.3, если A – линейное подпространство, то $A^\perp = A^o$, Далее, $A^\perp = (\operatorname{Lin} A)^\perp$.

Пример. Рассмотрим пару (X, X^*), где X – банахово пространство. Тогда $(B_X)^o = \overline{B}_{X^*}$. Действительно,

$$f \in \overline{B}_{X^*} \Leftrightarrow \|f\| \le 1 \Leftrightarrow \sup_{x \in B_X} |f(x)| \le 1 \Leftrightarrow f \in (B_X)^o.$$

Теорема 1. Поляры обладают следующими свойствами:

(i) если $A \subset B$, то $A^o \supset B^o$.

(ii) $\{0_X\}^o = Y$, $X^o = \{0_Y\}$, где 0_X и 0_Y – нулевые элементы пространств X и Y соответственно.

(iii) $(\lambda A)^o = \dfrac{1}{\lambda} A^o$ при $\lambda \neq 0$.

(iv) $\left(\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{E}} A \right)^o = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{E}} A^o$ для любого семейства $\mathfrak{E}$ подмножеств пространства X. В частности, $(A_1 \cup A_2)^o = A_1^o \cap A_2^o$.

(v) Для любой точки $x \in X$ множество $\{x\}^o$ – это выпуклая, уравновешенная $\sigma(Y, X)$-замкнутая окрестность нуля.

(vi) Поляра любого множества – это выпуклое уравновешенное $\sigma(Y, X)$-замкнутое множество.

(vii) Множества вида A^o, где A пробегает все конечные подмножества пространства X, образуют базу окрестностей нуля в топологии $\sigma(Y, X)$.

Доказательство. Свойства (i)-(iv) очевидны. Выпуклость и уравновешенность множества

$$\{x\}^o = \{y \in Y : |\langle x, y \rangle| \le 1\} = \{y \in Y : |x(y)| \le 1\} = x^{-1}\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\} \qquad (1)$$

следуют из линейности x как функционала на Y. Так как $\mathbb{C}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$ – это замкнутая окрестность нуля в $\mathbb{C}$, а функционал x непрерывен в топологии $\sigma(Y, X)$, формула (1) означает, что $\{x\}^o$ – это $\sigma(Y, X)$-замкнутая окрестность нуля. Этим доказано свойство (v). Свойство (vi) вытекает из (v) ввиду свойства (iv): $A^o = \bigcap\limits_{x \in A} \{x\}^o$, а операция пересечения не нарушает выпуклости, замкнутости и уравновешенности.

Перейдём к свойству (vii). Если подмножество $A \subset X$ конечно, то $A^o = \bigcap\limits_{x \in A} \{x\}^o$ – это конечное пересечение $\sigma(Y, X)$-окрестностей. Следовательно, поляра конечного множества – это слабая окрестность. Далее, по определению, любая $\sigma(Y, X)$-окрестность содержит множество вида $U_{G,\varepsilon} = \left\{ y \in Y : \max\limits_{g \in G} |g(x)| < \varepsilon \right\}$, где $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Для

$A = \frac{1}{2\varepsilon} G$ имеем $U_{G,\varepsilon} \supset A^o$. То есть любая $\sigma(Y,X)$-окрестность содержит множество вида A^o, где $A \subset X$ конечно. □

Следствие 1. Аннулятор любого множества $A \subset X$ – это $\sigma(Y,X)$-замкнутое линейное подпространство.

Доказательство. Линейность проверяется непосредственно, а $\sigma(Y,X)$-замкнутость следует, например, из п. (vi) и формулы $A^\perp = (\operatorname{Lin} A)^\perp = (\operatorname{Lin} A)^o$. □

Подобно тому, как с выпуклыми множествами ассоциируется операция выпуклой оболочки, а с подпространствами – линейной оболочки, выпуклые уравновешенные множества порождают операцию абсолютно выпуклой оболочки.

Определение 4. Пусть X – линейное пространство. *Абсолютно выпуклой комбинацией* конечного набора элементов $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ называется любая сумма вида $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, где $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \le 1$. *Абсолютно выпуклой оболочкой множества* A в линейном пространстве X называется множество $\operatorname{aconv} A$, состоящее из всех абсолютно выпуклых комбинаций элементов множества A. Замыкание множества $\operatorname{aconv} A$ в топологии τ будем обозначать $\tau - \overline{\operatorname{aconv} A}$ или, если из контекста ясно, о какой топологии идёт речь, просто $\overline{\operatorname{aconv}}\, A$.

17.1.2. Упражнения

1. Рассмотрим вещественную дуальную пару $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ со скалярным произведением в качестве двойственности. Постройте на плоскости поляры следующих множеств:

– $\{(0,1)\}$;
– $\{(1,1)\}$;
– $\{(1,1),(0,1)\}$;
– $\{(x_1,x_2) : |x_1| + |x_2| \le 1\}$;
– $\{(x_1,x_2) : |x_1|^2 + |x_2|^2 \le 1\}$.

2. Рассмотрим пару (X,Y), где $X = Y = C[0,1]$. Какие из нижеперечисленных выражений задают двойственность на этой паре?

– $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$;

– $\langle f,g\rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)dt;$

– $\langle f,g\rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)dt - \int_{1/2}^{1} f(t)g(t)dt;$

– $\langle f,g\rangle = \int_0^{1} f^2(t)g(t)dt;$

– $\langle f,g\rangle = \int_0^{1} f(t^2)g(t)dt;$

– $\langle f,g\rangle = f(0)g(0);$

– $\langle f,g\rangle = \int_0^{1} f(t)g(t)dt + f(0)g(0).$

3. Пусть A – подмножество линейного пространства X. Тогда $\operatorname{aconv} A$ – это выпуклое уравновешенное множество.
4. Любое выпуклое уравновешенное множество, содержащее A, содержит и $\operatorname{aconv} A$.
5. $\operatorname{aconv} A$ равно пересечению всех выпуклых уравновешенных множеств, содержащих A.
6. Пусть A – подпространство линейного пространства X. Тогда $\operatorname{aconv} A = A$.
7. Пусть A – подмножество топологического векторного пространства X. Тогда $\overline{\operatorname{aconv} A}$ – это наименьшее по включению замкнутое выпуклое уравновешенное множество, содержащее A.
8. Пусть (X,Y) – дуальная пара, $A \subset X$. Тогда $(\operatorname{aconv} A)^o = A^o$.
9. Рассмотрим на X слабую топологию $\sigma(X,Y)$. Тогда поляра любого множества совпадает с полярой его замыкания. Далее, $\left(\overline{\operatorname{aconv} A}\right)^o = A^o$ для любого $A \subset X$.
10. Для дуальной пары (X,X^*), где X – банахово пространство, опишите явным образом окрестности нуля топологий $\sigma(X,X^*)$ и $\sigma(X^*,X)$.
11. Будет ли открытый единичный шар банахова пространства X $\sigma(X,X^*)$-открытым множеством?
12. Будет ли замкнутый единичный шар банахова пространства X $\sigma(X,X^*)$-замкнутым множеством?

Отметим, что количество элементов, входящих в абсолютно выпуклую комбинацию, может быть сколь угодно большим. Поэтому даже для компактного множества A абсолютно выпуклая оболочка не обязана быть замкнутой: $\overline{\operatorname{aconv} A}$ будет содержать, в частности, бесконечные суммы вида $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \le 1$.

13. Убедитесь на следующем примере, что $\overline{\operatorname{aconv} A}$ не исчерпывается суммами вида $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \le 1$. Пусть $A = \{x_n = e_1 + e_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, где e_n – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Тогда вектор e_1 лежит в $\overline{\operatorname{aconv} A}$, но не представим в виде $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$.

14. В конечномерном пространстве абсолютно выпуклая оболочка замкнутого ограниченного множества замкнута.

17.1.3. Теорема о биполяре

Пусть (X, Y) – дуальная пара, $A \subset X$. Тогда $A^o \subset Y$, и у этого множества можно снова рассмотреть поляру.

Определение 1. Множество $\left(A^o\right)^o \subset X$ называется *биполярой* множества $A \subset X$ и обозначается A^{oo}.

Теорема 1. Биполяра A^{oo} множества $A \subset X$ совпадает с $\sigma(X, Y)$-замыканием абсолютно выпуклой оболочки множества A.

Доказательство. Отметим вначале, что $A^{oo} \supset A$. Действительно, если $x \in A$, то, по определению множества A^o, $|\langle x, y\rangle| \le 1$ для любого $y \in A^o$. Но это как раз и означает, что x принадлежит поляре множества A^o.

Далее, биполяра – это частный случай поляры. Следовательно, по утверждению (vi) теоремы 2 п. 17.1.1, A^{oo} – это выпуклое уравновешенное $\sigma(X, Y)$-замкнутое множество. Соответственно, $A^{oo} \supset \overline{\operatorname{aconv} A}$. Для доказательства обратного включения возьмём любую точку $x_0 \in X \setminus \overline{\operatorname{aconv} A}$ и убедимся, что $x_0 \notin A^{oo}$. Действительно, раз $x_0 \notin \overline{\operatorname{aconv} A}$ и $\overline{\operatorname{aconv} A}$ – это выпуклое уравновешенное $\sigma(X, Y)$ – замкнутое множество, то, по теореме Хана – Банаха в форме, указанной в упражнении 9 п. 16.3.2, существует такой $\sigma(X, Y)$ – непрерывный линейный функционал y на X, что:

I. $|y(x)| \le 1$ для всех $x \in \overline{\operatorname{aconv} A}$ и

II. $|y(x_0)| > 1$.

Но любой $\sigma(X,Y)$-непрерывный линейный функционал – это элемент пространства Y. Условие I означает, что $y \in \left(\overline{\operatorname{aconv} A}\right)^o \subset A^o$. Но тогда II означает, что $x_0 \notin A^{oo}$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. Если $A \subset X$ – $\sigma(X,Y)$-замкнутое выпуклое уравновешенное множество, то $A^{oo} = A$. В частности, $B^{ooo} = B^o$ для любого $B \subset Y$.

Следствие 2. $A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Lin}} A$ для любого $A \subset X$. Если A – линейное подпространство, то $A^{\perp\perp} = \overline{A}$. Наконец, $B^{\perp\perp\perp} = B^{\perp}$ для любого $B \subset Y$.

Доказательство. $A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp} = ((\operatorname{Lin} A)^{\perp})^{\perp} = (\operatorname{Lin} A)^{oo} = \overline{\operatorname{Lin}} A$. □

Следствие 3. Если $A_1, A_2 \subset X$ – $\sigma(X,Y)$-замкнутые выпуклые уравновешенные множества, то равенство $A_1 = A_2$ эквивалентно равенству ${A_1}^o = {A_2}^o$. Если к тому же A_1, A_2 – подпространства, то равенство $A_1 = A_2$ эквивалентно равенству ${A_1}^{\perp} = {A_2}^{\perp}$.

Доказательство. Если множества равны, то и их поляры равны, так что импликация $A_1 = A_2 \Rightarrow {A_1}^o = {A_2}^o$ очевидна и не требует никаких дополнительных ограничений на множества. Обратно, если ${A_1}^o = {A_2}^o$, то ${A_1}^{oo} = {A_2}^{oo}$, и остаётся воспользоваться теоремой о биполяре. □

Напомним, что пространства, входящие в дуальную пару (X,Y), равноправны, и все утверждения о полярах и биполярах подмножеств пространства X верны, с переменой ролей пространств дуальной пары, и для подмножеств пространства Y.

Теорема 2. Пусть (X,Y) – дуальная пара, $A \subset Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) множество функционалов $A \subset Y$ разделяет точки пространства X;

(ii) $A^{\perp} = \{0\}$;

(iii) $A^{\perp\perp} = Y$;

(iv) линейная оболочка множества A $\sigma(Y,X)$-плотна в Y.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Включение $A^{\perp} \supset \{0\}$ выполнено всегда. Если же $x \in X \setminus \{0\}$, то, согласно (i), существует $y \in A$ с $\langle x, y\rangle \neq 0$. В этом случае $x \notin A^{\perp}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $x \in X \setminus \{0\}$. Тогда $x \notin A^{\perp}$, следовательно, существует $y \in A$ с $\langle x, y\rangle \neq 0$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Ввиду того, что $A^{\perp}$ и $\{0\}$ – это $\sigma(X,Y)$-замкнутые подпространства, можно воспользоваться следствием 3.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). По следствию 2, $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Lin}}\, A$. □

Упражнения

1. Постройте на плоскости биполяры множеств из упражнения 1 п. 17.1.2.
2. Рассмотрим вещественную дуальную пару (X,Y), где $X = Y = \mathbb{R}^2$, с двойственностью $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_2 - 2x_2 y_1$. Постройте поляры и биполяры следующих подмножеств пространства X:
   - $\{(0,1)\}$;
   - $\{(1,1)\}$;
   - $\{(1,1),(0,1)\}$;
   - $\{(x_1,x_2) : |x_1| + |x_2| \le 1\}$;
   - $\{(x_1,x_2) : |x_1|^2 + |x_2|^2 \le 1\}$.
3. Изменятся ли поляры этих множеств, если мы их будем рассматривать как подмножества пространства Y? Изменятся ли биполяры?
4. Рассмотрим вещественную дуальную пару (X,Y), где $X = C[0,1]$, $Y = L_1[0,1]$ с двойственностью $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Постройте поляры и биполяры следующих подмножеств пространства X:
   - $\{f \in C[0,1] : f(t) > 0 \text{ при всех } t \in [0,1]\}$;
   - $\{f \in C[0,1] : 0 \le f(t) \le 1 \text{ при всех } t \in [0,1]\}$;
   - $\{f \in C[0,1] : f(t) = 0 \text{ при всех } t \in [0,1/2]\}$.
5. Рассмотрите те же множества непрерывных функций как подмножества пространства $Y = L_1[0,1]$. Постройте их поляры и биполяры в двойственности из предыдущего упражнения.

17.1.4. Сопряженный оператор

Пусть X_1, X_2 – линейные пространства, $T : X_1 \to X_2$ – линейный оператор. *Алгебраическим сопряжённым* оператором к T называется оператор $T' : Y' \to X'$, действующий по правилу $T' f = f \circ T$.

Далее, пусть (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) – дуальные пары, $T : X_1 \to X_2$ – линейный оператор. Будем говорить, что у T *существует сопряжённый оператор* $T^* : Y_2 \to Y_1$, если для любого $y \in Y_2$ существует такой элемент $T^* y \in Y_1$, что $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ для всех $x \in X_1$.

Трактуя элементы пространств Y_1, Y_2 как функционалы на X_1 и X_2 соответственно, видим, что $T^* y = y \circ T$, чем поясняется корректность определения и линейность оператора T^*. Очевидно, у T тогда и только тогда существует сопряжённый оператор, когда $T'(Y_2) \subset Y_1$, и в этом случае T^* – это ограничение алгебраического сопряжённого оператора T' на Y_2. Для дуальных пар (X_1, X_1^*), (X_2, X_2^*), где X_1, X_2 – банаховы пространства, новое определение сопряжённого оператора согласуется с уже известным определением сопряжённого к оператору в банаховых пространствах.

Отметим несколько простых фактов.

Теорема 1. Пусть X_1, X_2 – локально выпуклые пространства, $T : X_1 \to X_2$ – линейный непрерывный оператор. Тогда у T существует сопряжённый $T^* : X_2^* \to X_1^*$.

Доказательство. Пусть $f \in X_2^*$. Тогда функционал $T' f = f \circ T$ непрерывен как композиция двух непрерывных отображений. Следовательно, $T'(X_2^*) \subset X_1^*$. □

Теорема 2. Пусть (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) – дуальные пары, $T : X_1 \to X_2$ – линейный оператор, $T^* : Y_2 \to Y_1$ – сопряжённый оператор. Тогда для любого $A \subset Y_2$

$$T^{-1}(A^o) = (T^* A)^o. \tag{2}$$

Доказательство.

$$x \in T^{-1}(A^o) \quad \Leftrightarrow \quad Tx \in A^o \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in A \quad \left|\langle Tx, y \rangle\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in A \quad \left|\left\langle x, T^* y \right\rangle\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in T^* A \quad \left|\langle x, z \rangle\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (T^* A)^o. \ \square$$

Теорема 3. Пусть (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) – дуальные пары, $T : X_1 \to X_2$ – линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) У оператора T существует сопряжённый;

(b) T слабо непрерывен, то есть непрерывен как оператор, действующий из $\left(X_1, \sigma(X_1, Y_1)\right)$ в $\left(X_2, \sigma(X_2, Y_2)\right)$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Ввиду линейности достаточно проверить непрерывность оператора в нуле. Напомним (утверждение (vii) теоремы 2 п. 17.1.1), что базу окрестностей нуля в топологии $\sigma(X_2, Y_2)$ образуют поляры конечных множеств $A \subset Y_2$. По формуле (2), прообраз $T^{-1}(A^o)$

окрестности A^o – это снова поляра $(T^*A)^o$ конечного множества $T^*A \subset Y_1$. То есть $T^{-1}(A^o)$ – это окрестность нуля в $\sigma(X_1, Y_1)$.

Ввиду теоремы 1 п. 16.3.3, описывающей сопряжённое пространство к пространству, наделённому слабой топологией, импликация (b) $\Rightarrow$ (a) – это частный случай теоремы 2. □

Из теорем 1 и 3 выводим такое следствие.

Следствие 1. Пусть X_1, X_2 – локально выпуклые пространства, $T: X_1 \to X_2$ – линейный непрерывный оператор. Тогда T слабо непрерывен, то есть непрерывен в топологиях $\sigma(X_1, X_1^*)$, $\sigma(X_2, X_2^*)$. □

Меняя ролями пространства в дуальных парах, получаем такую формулировку.

Теорема 4. (I) Пусть (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) – дуальные пары, $T: X_1 \to X_2$ – линейный слабо непрерывный оператор. Тогда сопряжённый оператор $T^*: Y_2 \to Y_1$ непрерывен в слабых топологиях $\sigma(Y_2, X_2)$, $\sigma(Y_1, X_1)$.

(II) Для того, чтобы оператор $R: Y_2 \to Y_1$ был сопряжённым к какому-нибудь слабо непрерывному оператору, действующему из X_1 в X_2, необходимо и достаточно, чтобы R был непрерывен в топологиях $\sigma(Y_2, X_2)$, $\sigma(Y_1, X_1)$.

Доказательство. (I) Формула $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ говорит нам, что у оператора T^* существует сопряжённый: $\left(T^*\right)^* = T$. Согласно теореме 3, применённой вместо T к T^*, оператор T^* слабо непрерывен.

(II) Необходимость условия следует из первого утверждения. Докажем достаточность. Пусть R непрерывен в топологиях $\sigma(Y_2, X_2)$, $\sigma(Y_1, X_1)$. Тогда у R есть сопряжённый $R^*: X_1 \to X_2$. Согласно (I), оператор R^* слабо непрерывен. Следовательно, существует $\left(R^*\right)^*: Y_2 \to Y_1$. Поскольку $\left\langle x, \left(R^*\right)^* y\right\rangle = \left\langle R^*x, y\right\rangle = \langle x, Ry\rangle$, имеем $R = \left(R^*\right)^*$, то есть нами доказано, что R – сопряжённый оператор, точнее, R сопряжён к R^*. □

Напомним, что в параграфе 9.4.1 был установлен следующий результат. Пусть X_1, X_2 – банаховы пространства, $T: X_1 \to X_2$ – непрерывный оператор. Тогда $T^*(X_2^*) \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$. В частности, если оператор T^* сюръективен, то T инъективен. Теперь мы готовы уточнить этот результат.

Теорема 5. Пусть X_1, X_2 – локально выпуклые пространства, $T: X_1 \to X_2$ – линейный непрерывный оператор. Тогда

(a) $\left(T^*(X_2^*)\right)^{\perp} = \operatorname{Ker} T$.

(b) $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ совпадает с $\sigma(X_1^*, X_1)$-замыканием подпространства $T^*(X_2^*)$.

(c) Оператор T инъективен в том и только том случае, если образ оператора T^* $\sigma(X_1^*, X_1)$-плотен в X_1^*.

Доказательство. (а) Воспользуемся теоремой 2 и равенством поляр и аннуляторов подпространств:

$$\left(T^*(X_2^*)\right)^{\perp} = \left(T^*(X_2^*)\right)^{o} = T^{-1}\left(\left(X_2^*\right)^{o}\right) = T^{-1}(0) = \operatorname{Ker} T.$$

(b) выводится из (a) прямым применением следствия 2 теоремы о биполяре.

Наконец, чтобы доказать (c), заметим, что инъективность – это равенство $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Обе части этого равенства – это замкнутые (а значит, по теореме 1 п. 17.1.1, и слабо замкнутые) подпространства в X_1. По следствию 3 теоремы о биполяре, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ в том и только том случае, если $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = X_1^*$, что ввиду (b) эквивалентно $\sigma(X_1^*, X_1)$-плотности $T^*(X_2^*)$ в X_1^*. □

Упражнения

1. Примените в доказательстве теоремы 5 теорему 2 п. 17.1.3.
2. В условиях теоремы 5 оператор T инъективен в том и только том случае, если образ оператора T^* разделяет точки пространства X_1.
3. Рассмотрим пару пространств (X, Y), где X – это пространство бесконечно дифференцируемых функций f на отрезке [0,1], подчиняющихся условию $f(0) = f(1) = 0$, а $Y = C^\infty[0,1]$. Наделим эту пару двойственностью $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Зададим $T: X \to X$ как оператор дифференцирования: $Tf = \frac{df}{dt}$. Существует ли у этого оператора сопряжённый $T^*: Y \to Y$? Будет ли T слабо непрерывным оператором?
4. Замените в предыдущем упражнении Y на $C[0,1]$. Изменятся ли ответы?

5. На паре (X,Y) из упражнения 3 зададим другую двойственность: $\langle f,g\rangle=\int\limits_0^1 f(t)g(t^2)dt$. Чему будет равен T^* в этом случае?

17.1.5. Теорема Алаоглу

Пусть X – линейное пространство. Декартова степень $\mathbb{C}^X$ – это линейное пространство всех комплекснозначных функций на X, а X' – всех линейных функционалов. Каждый функционал – это комплекснозначная функция, соответственно, X' можно рассматривать как линейное подпространство в $\mathbb{C}^X$. Наделим $\mathbb{C}^X$ топологией тихоновского произведения. Тогда $\mathbb{C}^X$ будет локально выпуклым пространством с топологией, задаваемой базой окрестностей нуля $U_{G,\varepsilon}=\{f\in\mathbb{C}^X:\max\limits_{x\in G}|f(x)|<\varepsilon\}$, где G пробегает все конечные подмножества пространства X, а $\varepsilon>0$.

Теорема 1. $(X',\sigma(X',X))$ – это замкнутое подпространство топологического векторного пространства $\mathbb{C}^X$. Другими словами,

(i) X' замкнуто в $\mathbb{C}^X$ и
(ii) топология, индуцированная на X', совпадает со слабой топологией $\sigma(X',X)$.

Доказательство. (i) Для любых $x_1,x_2\in X$ и $a_1,a_2\in\mathbb{C}$ определим функцию $F_{x_1,x_2,a_1,a_2}:\mathbb{C}^X\to\mathbb{C}$ равенством

$$F_{x_1,x_2,a_1,a_2}(f)=f(a_1x_1+a_2x_2)-a_1f(x_1)-a_2f(x_2).$$

Элемент $f\in\mathbb{C}^X$ будет линейным функционалом в том и только том случае, если $F_{x_1,x_2,a_1,a_2}(f)=0$ при всех $x_1,x_2\in X$ и $a_1,a_2\in\mathbb{C}$. Другими словами, $X'=\bigcap\limits_{x_1,x_2,a_1,a_2}\operatorname{Ker}F_{x_1,x_2,a_1,a_2}$. Все функционалы F_{x_1,x_2,a_1,a_2} непрерывны как линейные комбинации координатных проекторов. Следовательно, их ядра замкнуты. Замкнуто и пересечение замкнутых множеств $X'=\bigcap\limits_{x_1,x_2,a_1,a_2}\operatorname{Ker}F_{x_1,x_2,a_1,a_2}$.

(ii) Достаточно вспомнить, что окрестности нуля топологии $\sigma(X',X)$ определяются из двойственности $\langle f,x\rangle=f(x)$ на дуальной паре (X',X). То есть базу окрестностей нуля в топологии $\sigma(X',X)$ задают множества $\left\{f\in X':\max\limits_{x\in G}|\langle f,x\rangle|<\varepsilon\right\}=U_{G,\varepsilon}\cap X'$. □

Теорема 2. Пусть U – поглощающее подмножество линейного пространства X. Тогда $U^o \subset X'$ – это $\sigma(X',X)$-компакт.

Доказательство. По теореме 1, нам достаточно доказать компактность U^o как подмножества тихоновской степени $\mathbb{C}^X$. Вначале отметим, что поляра U^o $\sigma(X',X)$-замкнута в X', а X', по теореме 1, замкнуто в $\mathbb{C}^X$. То есть U^o – замкнутое подмножество тихоновской степени $\mathbb{C}^X$. Далее, для любого $x \in X$ обозначим через $n(x)$ наименьший номер $n \in \mathbb{N}$, при котором $x \in nU$. Тогда для любого $x \in X$ и любого $f \in U^o$ имеет место оценка $|f(x)| \le n(x)$. Это означает, что $U^o \subset \prod_{x \in X} \mathbb{C}_{n(x)}$, где через $\mathbb{C}_{n(x)}$ обозначен замкнутый круг в $\mathbb{C}$ с центром в нуле радиуса $n(x)$. По теореме Тихонова о произведении компактов, $\prod_{x \in X} \mathbb{C}_{n(x)}$ – это компакт в $\mathbb{C}^X$. Таким образом, U^o – это замкнутое подмножество компакта, то есть компакт. □

Следствие 1. Пусть U – окрестность нуля локально выпуклого пространства X. Тогда $U^o \subset X^*$ – это $\sigma(X^*,X)$-компакт.

Доказательство. Рассмотрим вначале дуальную пару (X, X'). Поляра множества U в X' состоит из функционалов, ограниченных на окрестности U, то есть из непрерывных функционалов. Таким образом, всё равно, рассматривать ли поляру U^o в дуальной паре (X, X') или в дуальной паре (X, X^*), – всё равно получится одно и то же множество $U^o \subset X^*$. По теореме 2, U^o – это $\sigma(X',X)$-компакт. Остаётся заметить, что на X^* топологии $\sigma(X',X)$ и $\sigma(X^*,X)$ совпадают. □

Следствие 2 (L. Alaoglu, 1940).[1] Замкнутый единичный шар сопряжённого банахова пространства X^* – $\sigma(X^*,X)$-компакт.

Доказательство. $\overline{B}_{X^*} = (B_X)^o$. □

Напомним, что в топологии, задаваемой нормой, шар бесконечномерного банахова пространства не может быть компактом

[1] Алаоглу доказал это утверждение, обобщив результаты Банаха, полученные ранее на языке поточечно сходящихся последовательностей и трансфинитных последовательностей функционалов. Поэтому теорема часто цитируется как теорема Банаха – Алаоглу. Для локально выпуклых пространств (следствие 1) теорема впервые появилась у Бурбаки (Nicolas Bourbaki, псевдоним группы французских математиков). Впрочем, эта формулировка, как и теорема 2, не сильно отличаются по сути и по доказательству от исходного варианта теоремы Алаоглу.

(теорема Рисса, п. 11.2.1). Это существенно ограничивает возможность применения геометрической интуиции в бесконечномерном случае: все рассуждения, опирающиеся на выбор сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности, оказываются под запретом. Теорема же Алаоглу даёт надежду на частичное снятие этого запрета, по крайней мере, в сопряжённых пространствах и не для сходимости по норме, а для более слабой – $\sigma(X^*, X)$-сходимости. Некоторая сложность, с которой нам предстоит ещё разобраться, состоит в том, что в теореме Алаоглу речь идёт о компактности, а не о секвенциальной компактности; то есть возможность выделения сходящихся подпоследовательностей остаётся пока под вопросом. Этот вопрос будет подробно изучен в разделе 17.2. Пока же, прежде чем попрощаться с общей теорией двойственности и перейти к столь любимым автором банаховым пространствам, изложим в виде серии упражнений ещё несколько результатов, в частности, важную теорему Макки, описывающую для дуальной пары (X, Y) те топологии на X, в которых $X^* = Y$. Подробное изложение можно найти в учебнике [R-R].

17.1.6. Упражнения: топологии равномерной сходимости

Пусть (X, Y) – пара пространств в двойственности.

1. Для того, чтобы подмножество $A \subset Y$ было $\sigma(Y, X)$-ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $A^o \subset X$ было поглощающим.
2. Пусть τ – некоторая локально выпуклая топология на X. Для того, чтобы функционал $y \in Y$ был τ-непрерывен необходимо и достаточно, чтобы множество $\{y\}^o$ было окрестностью нуля в топологии τ.

Семейство $\mathfrak{C}$ подмножеств пространства Y называется *допустимым*, если оно подчиняется следующим условиям:

- $\{y\} \in \mathfrak{C}$ для любого $y \in Y$;
- для любого $A \in \mathfrak{C}$ и любого скаляра λ множество λA принадлежит семейству $\mathfrak{C}$;
- если $A, B \in \mathfrak{C}$, то существует $C \in \mathfrak{C}$, для которого $A \bigcup B \subset C$;
- любой элемент $A \in \mathfrak{C}$ ограничен в топологии $\sigma(Y, X)$.

3. Следующие семейства подмножеств пространства Y допустимы:
- семейство $\mathfrak{Fin}(Y)$ всех конечных подмножеств;
- семейство $\mathfrak{Comp}(Y)$ всех абсолютно выпуклых $\sigma(Y, X)$-компактных подмножеств;
- семейство $\mathfrak{Bound}(Y)$ всех $\sigma(Y, X)$-ограниченных подмножеств.

4. Любое допустимое семейство $\mathfrak{C}$ подчиняется условию $\mathfrak{Fin}(Y) \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{Bound}(Y)$.

5. Пусть τ – локально выпуклая топология на X, для которой $X^* \supset Y$. Тогда семейство τ^o множеств вида A^o, где A пробегает все окрестности нуля топологии τ, допустимо.
6. Если $\mathfrak{C}$ – допустимое семейство подмножеств пространства Y, то семейство множеств вида A^o, где $A \in \mathfrak{C}$, образует базу окрестностей нуля некоторой отделимой локально выпуклой топологии на X.
7. Последовательность $x_n \in X$ сходится в топологии из предыдущего упражнения некоторому $x \in X$ в том и только том случае, если $\sup\limits_{y \in A} \left| \langle x_n - x, y \rangle \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ для всех $A \in \mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{C}$ – допустимое семейство подмножеств пространства Y. Топология, базу окрестностей нуля которой образуют все множества вида A^o, где $A \in \mathfrak{C}$, называется *топологией равномерной сходимости на множествах семейства* $\mathfrak{C}$.

Локально выпуклая топология τ на X называется *согласующейся с двойственностью*, если $X^* = Y$.

8. Пусть топология τ на X согласуется с двойственностью. Тогда топология равномерной сходимости на множествах семейства τ^o из упражнения 5 совпадает с τ.
9. Топология $\sigma(X,Y)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на множествах семейства $\mathfrak{Fin}(Y)$.

Топология равномерной сходимости на множествах семейства $\mathfrak{Comp}(Y)$ называется *топологией Макки* и обозначается $\tau(X,Y)$.

10. **Теорема Макки – Аренса** (G. W. Mackey, R. Arens). Топология τ на X согласуется с двойственностью тогда и только тогда, когда $\sigma(X,Y) \prec \tau \prec \tau(X,Y)$.
11. Каждое $\sigma(X,Y)$-ограниченное множество будет и $\tau(X,Y)$ ограниченным, то есть во всех топологиях, согласующихся с двойственностью, один и тот же набор ограниченных множеств.
12. Для дуальной пары (c_0, l_1) с двойственностью $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ топология Макки $\tau(c_0, l_1)$ совпадает с топологией, порождённой на c_0 его нормой.
13. Тождественный оператор I, рассматриваемый как оператор, действующий из c_0, наделённого слабой тополоогией $\sigma(c_0, l_1)$ в c_0, наделённое нормой – это пример ограниченного разрывного линейного оператора.

Топология равномерной сходимости на множествах семейства $\mathfrak{Bound}(Y)$ называется *сильной топологией* и обозначается $\beta(X,Y)$.

14. $\beta(l_1,c_0)$ совпадает с топологией нормированного пространства l_1. На этом примере убедитесь, что сильная топология не всегда согласуется с двойственностью.
15. Опишите $\beta(c_0,l_1)$. Докажите, что эта топология согласуется с двойственностью.

17.2. Двойственность в банаховых пространствах

В банаховых пространствах сходимость по норме называется *сильной сходимостью*. В этом разделе мы остановимся подробно на двух более слабых видах сходимости – слабой и слабой со звёздочкой сходимостях.

17.2.1. Слабая со звёздочкой сходимость

С этого места и до конца параграфа мы будем рассматривать дуальную пару (X,X^*), где X – банахово пространство.

Определение 1. Топология $\sigma(X^*,X)$ называется *слабой со звёздочкой топологией банахова пространства* X^*. Последовательность функционалов $x_n^* \in X^*$ называется *слабо со звёздочкой сходящейся* к функционалу $x^* \in X^*$ (обозначение: $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$), если она сходится в слабой со звёздочкой топологии. Подробнее: $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, если $x_n^*(x) \to x^*(x)$ для любого $x \in X$.

Как видно из определения, слабая со звёздочкой сходимость – это частный случай хорошо нам известной даже для операторов, а не только для функционалов, поточечной сходимости (п. 10.4.2). В частности, для слабой со звёздочкой сходимости верны следующие утверждения.

Теорема Банаха – Штейнгауза. Если $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, то $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\|x_n^*\right\| < \infty$.

Критерий слабой со звёздочкой сходимости. Пусть $A \subset X$ – плотное подмножество, $x_n^*, x^* \in X^*$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$;
- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left\|x_n^*\right\| < \infty$ и $x_n^*(x) \to x^*(x)$ для всех $x \in A$.

Учитывая, что из поточечной сходимости на A следует поточечная сходимость на $\operatorname{Lin} A$, в последнем критерии достаточно требовать, чтобы не само множество A, а его линейная оболочка была плотным множеством.

Опираясь на этот общий критерий, выведем критерии слабой со звёздочкой сходимости в известных нам пространствах последовательностей.

Теорема 1. Пусть X – это пространство последовательностей c_0 или l_p с $1 \le p < \infty$, а X^* – l_1 или $l_{p'}$ с $1 < p' \le \infty$ соответственно. Для того чтобы последовательность элементов $x_n = \left(x_{n,j}\right)_{j \in \mathbb{N}} \in X^*$, $n = 1, 2, \dots$, слабо со звёздочкой сходилась к элементу $y = \left(y_j\right)_{j \in \mathbb{N}} \in X^*$, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была ограниченной по норме и сходилась к y покоординатно: $x_{n,j} \xrightarrow[n \to \infty]{} y_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим канонический базис пространства последовательностей X: $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, …. Так как $\left\langle f, e_j \right\rangle = f_j$ для любого $f = \left(f_j\right)_{j \in \mathbb{N}} \in X^*$, покоординатная сходимость – это сходимость на элементах e_j канонического базиса. Осталось воспользоваться тем, что $\mathrm{Lin}\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ плотна в X и вышеприведенным критерием. □

Так как из покоординатной сходимости в l_p не следует сходимость по норме (последовательность e_j из доказательства теоремы 1 – типичный пример), слабая со звёздочкой сходимость в этих пространствах не совпадает с сильной. Так происходит не только в l_p, но и во всех бесконечномерных нормированных пространствах (Josefson [Jos], Nissenzweig [Nis]).

В п. 6.4.4 (теорема 2 и упражнение 4) было доказано, что норма пространства X^* полунепрерывна снизу по отношению к слабой со звёздочкой сходимости: если $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, то $\| x^* \| \le \varliminf_{n \to \infty} \| x_n^* \|$. Отметим выполнение и более сильного свойства.

Теорема 2. Норма сопряжённого пространства X^* полунепрерывна снизу по отношению к слабой со звёздочкой топологии.

Доказательство. Напомним, что (п. 1.2.4) функция $f : E \to \mathbb{R}$, заданная на топологическом пространстве E, называется *полунепрерывной снизу*, если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(a, +\infty)$ открыто. В нашем случае E – это X^*, наделённое топологией $\sigma(X^*, X)$, а изучаемая функция – это $f(x^*) = \|x^*\|$. Соответственно, $f^{-1}(a,+\infty)$ – это либо всё X^* (если $a < 0$), и открытость не вызывает сомнения, либо $X^* \setminus a\overline{B}_{X^*}$. Так как шар $\overline{B}_{X^*}$ пространства X^* $\sigma(X^*,X)$-замкнут (даже $\sigma(X^*,X)$-компактен, по теореме Алаоглу), то $X^* \setminus a\overline{B}_{X^*}$ – это слабо со звёздочкой открытое множество. □

Упражнения

1. Пусть X – банахово пространство с базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тогда, как отмечено в п. 10.5.3, каждый функционал $f \in X^*$ можно отождествить с числовой последовательностью $(f(e_1), f(e_2),..., f(e_n),...)$, а пространство X^* – с множеством всех таких числовых последовательностей. Распространите теорему 1 на этот случай.
2. Пусть X – банахово пространство с базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тогда линейная оболочка множества $\{e_n^*\}_1^\infty$ координатных функционалов слабо со звёздочкой плотна в X^*.
3. На примере $X = l_1$ с каноническим базисом $e_1 = (1,0,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,0,\ldots)$, …, покажите, что линейная оболочка множества координатных функционалов может быть не плотна в X^* по норме.
4. Используя критерий слабой со звёздочкой сходимости и диагональный метод, докажите, что из любой ограниченной последовательности функционалов $x_n^* \in X^*$ на сепарабельном банаховом пространстве X можно выделить слабо со звёздочкой сходящуюся подпоследовательность. Ниже мы выведем этот факт из теоремы Алаоглу и соображений метризуемости.
5. Пусть банахово пространство E сопряжено к некоторому банахову пространству (то есть $E = F^*$ для некоторого пространства F). Пусть любая конечная сцепленная система замкнутых шаров в E имеет непустое пересечение. Тогда E обладает свойством сцепленных шаров (определения см. в упражнениях 9.3.4).
6. Вещественные пространства $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ обладают свойством сцепленных шаров и, следовательно, инъективны.

Напомним (см. упражнения 1-3 п. 8.4.6 и комментарии к ним), что каждая функция ограниченной вариации $F:[0,1] \to \mathbb{R}$ может рассматриваться как непрерывный линейный функционал на $C[0,1]$, если определить его действие на элементы $f \in C[0,1]$ формулой $\langle F, f \rangle = \int_0^1 f dF$.

Докажите следующую теорему Хелли.

7. Пусть $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ – последовательность функций, поточечно сходящаяся к функции F, и вариации функций F_n ограничены в совокупности. Тогда F также имеет ограниченную вариацию, и функционалы, порождённые функциями F_n на $C[0,1]$, слабо со звёздочкой сходятся к функционалу, порождённому функцией F.

Теорему Хелли можно частично обратить.

8. Пусть функции $F_n, F : [0,1] \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации непрерывны справа всюду, кроме, может быть, нуля, а в нуле равны нулю. Далее, пусть последовательность функционалов, порождённых функциями F_n на $C[0,1]$, слабо со звёздочкой сходится к функционалу, порождённому функцией F. Тогда вариации функций F_n ограничены в совокупности, и $F_n(t) \to F(t)$ в каждой точке непрерывности t функции F.

9. «Вторая теорема Хелли»: из любой равномерно ограниченной последовательности функций $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, имеющих ограниченные в совокупности вариации, можно выделить поточечно сходящуюся на $[0,1]$ подпоследовательность.

17.2.2. Второе сопряжённое пространство

Пусть X – банахово пространство. Тогда X^* – тоже банахово пространство, и можно рассмотреть сопряжённое пространство к банахову пространству X^*. Это сопряжённое $\left(X^*\right)^*$ называется *вторым сопряжённым* к X и обозначается X^{**}. Элементы пространства X^{**} – это, по определению, непрерывные линейные функционалы на X^*. Целый класс таких функционалов нам уже знаком по общей теории двойственности. Это – элементы исходного пространства X, рассматриваемые как функционалы на X^*.

Напомним, что действие элемента $x \in X$ на элемент $x^* \in X^*$ задаётся правилом $x(x^*) = x^*(x)$. При таком подходе x оказывается линейным функционалом на X^*, а X – линейным подпространством пространства X^{**}. Более того, формула $\|x\|_X = \sup_{f \in S_{X^*}} |f(x)|$ (лемма п. 9.4.1), переписанная в виде $\|x\|_X = \sup_{f \in S_{X^*}} |x(f)|$, приобретает новую смысловую нагрузку: норма элемента x в пространстве X совпадает с нормой x как линейного функционала на X^*. Поэтому X можно трактовать как подпространство банахова пространства X^{**}. Отдельный интерес представляет вопрос, при каких условиях не просто $X \subset X^{**}$, а $X = X^{**}$. Такие пространства, называемые рефлексивными, будут рассмотрены в параграфе 17.2.6.

Следующая теорема Голдстайна легко следует из теоремы о биполяре. Однако нужно учитывать, что теорема Голдстайна появилась раньше и была тем оригиналом, слепком с которого, собственно говоря, служит теорема о биполяре.

Теорема 1 (Goldstine). Замкнутый единичный шар банахова пространства X слабо со звёздочкой (то есть в топологии $\sigma\left(X^{**}, X^*\right)$) плотен в замкнутом единичном шаре пространства X^{**}. Пространство X слабо со звёздочкой плотно в пространстве X^{**}.

Доказательство. Рассмотрим дуальную пару $\left(X^{**}, X^*\right)$. Шар – это выпуклое уравновешенное подмножество пространства X^{**}. По теореме о биполяре, $\overline{B}_X$ $\sigma\left(X^{**}, X^*\right)$-плотен в $\left(\overline{B}_X\right)^{oo}$. Но $\left(\overline{B}_X\right)^o = \overline{B}_{X^*}$ и $\left(\overline{B}_X\right)^{oo} = \overline{B}_{X^{**}}$. Таким образом, $\overline{B}_X$ слабо со звёздочкой плотен в $\overline{B}_{X^{**}}$.

Слабую со звёздочкой плотность пространства X в X^{**} можно либо снова вывести из теоремы о биполяре в дуальной паре $\left(X^{**}, X^*\right)$: $X^{\perp} = \{0\}$, $X^{\perp\perp} = X^{**}$, либо воспользоваться тем, что пространство X^{**} есть объединение шаров вида $n\overline{B}_{X^{**}}$, а в каждом из этих шаров будет слабо со звёздочкой плотен соответствующий шар пространства X. □

Упражнения

1. Модельным примером тройки X, X^*, X^{**} служат пространства c_0, l_1, l_∞. Опираясь на критерий слабой со звёздочкой сходимости в l_∞, докажите $\sigma(l_\infty, l_1)$-плотность шара пространства c_0 в шаре пространства l_∞. То есть докажите в этом частном случае теорему Голдстайна.
2. c_0 – банахово пространство, значит, ввиду полноты оно должно быть замкнуто в любом объемлющем пространстве. В частности, c_0 замкнуто в l_∞. При этом c_0 не совпадает с l_∞, значит, не может быть плотным в l_∞. Не противоречит ли это теореме Голдстайна?
3. X^* – тоже банахово пространство, следовательно, можно рассмотреть каноническое вложение $X^* \subset X^{***}$. Для любого элемента $x^{***} \in X^{***}$ определим элемент $P\left(x^{***}\right) \in X^*$ как ограничение функционала x^{***} на подпространство $X \subset X^{**}$. Докажите, что P – это проектор и $\|P\| = 1$. То

есть для любого банахова пространства первое сопряжённое дополняемо в третьем сопряжённом.
4. Если $X = X^{**}$, то описанный в предыдущем упражнении проектор P биективен. То есть в этом случае $X^* = X^{***}$.
5. Шар $\overline{B}_X$ будет полным множеством в топологии $\sigma\left(X^{**}, X^*\right)$ в том и только том случае, если $\overline{B}_X == \overline{B}_{X^{**}}$, то есть $X = X^{**}$.
6. Пространство X будет полным множеством в топологии $\sigma\left(X^{**}, X^*\right)$ в том и только том случае, если X конечномерно (эффект связан с существованием разрывных линейных функционалов на X^* в бесконечномерном случае).
7. Пусть $A \in L(X,Y)$. Тогда можно определить второй сопряжённый оператор: $A^{**} = \left(A^*\right)^*$, $A^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$. Доказать, что ограничение оператора A^{**} на X совпадает с исходным оператором.
8. Пользуясь предыдущим упражнением, доказать теорему, обратную к теореме Шаудера о компактности сопряжённого оператора (п. 11.3.2). А именно, если сопряженный оператор компактен, то компактен и исходный оператор.

17.2.3. Слабая сходимость в банаховых пространствах

Определение 1. Топология $\sigma(X, X^*)$ называется *слабой топологией банахова пространства* X. Последовательность элементов $x_n \in X$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in X$ (обозначение: $x_n \xrightarrow{w} x$), если $f(x_n) \to f(x)$ для любого $f \in X^*$.

Отметим, что $\sigma(X, X^*)$ – это ограничение на X топологии $\sigma\left(X^{**}, X^*\right)$, а слабая сходимость последовательности $x_n \in X$ к элементу $x \in X$ одновременно является слабой со звёздочкой сходимостью этой же последовательности в X^{**}. Поэтому простейшие свойства слабой со звёздочкой сходимости, отмеченные в параграфе 17.2.1, переносятся и на слабую сходимость:

- если $x_n \xrightarrow{w} x$, то $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$;
- если $x_n \xrightarrow{w} x$, то $\|x\| \le \varliminf\limits_{n \to \infty} \|x_n\|$.

Сохраняется и критерий сходимости, только с переменой ролей пространств X и X^*. А именно, пусть $A \subset X^*$ – подмножество, линейная оболочка которого плотна в X^* в сильной топологии; $x_n, x \in X$. Тогда следующие условия эквивалентны:

A. $x_n \xrightarrow{w} x$;

B. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < \infty$ и $x^*(x_n) \to x^*(x)$ для всех $x^* \in A$.

Отсюда для определяемого ниже важного класса пространств с натягивающим базисом легко вывести критерий слабой сходимости, аналогичный теореме 1 п. 17.2.1.

Определение 2. Пусть X – банахово пространство с базисом $\{e_n\}_1^\infty$, а $\{e_n^*\}_1^\infty$ – соответствующие координатные функционалы. Базис $\{e_n\}_1^\infty$ называется *натягивающим*, если линейная оболочка множества $\{e_n^*\}_1^\infty$ плотна (по норме) в X^*.

Теорема 1. Пусть X – банахово пространство с натягивающим базисом $\{e_n\}_1^\infty$, $x_n, x \in X$, $x_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n,j} e_j$, $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j e_j$. Тогда для того, чтобы последовательность элементов x_n слабо сходилась к элементу x, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была ограниченной по норме и сходилась к x покоординатно: $a_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$. □

В частности, «ограниченность плюс покоординатная сходимость» – это критерий слабой сходимости в таких пространствах последовательностей, как c_0 или l_p с $1 < p < \infty$, где канонический базис является натягивающим.

Внимание! В пространстве l_∞ канонический базис не будет базисом, а в l_1 канонический базис хотя и базис, но не натягивающий (упражнение 3 п. 17.2.1). Поэтому в l_1 и l_∞ ограниченность и покоординатная сходимость не достаточны для слабой сходимости. Критерий слабой сходимости в l_1 весьма необычен: в этом пространстве, согласно теореме Шура (Schur)[2], слабая и сильная сходимости совпадают. В l_∞ удобного для проверки критерия слабой сходимости нет.

Теорема 2 (критерий слабой сходимости в $C(K)$). Пусть K – компактное топологическое пространство. Для функций $x_n, x \in C(K)$ следующие условия эквивалентны:

(i) $x_n \xrightarrow{w} x$;

[2] См., например, [K-A], с. 293.

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|<\infty$ и $x_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}x(t)$ во всех точках $t\in K$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ограниченность слабо сходящейся последовательности – это общий результат. Условие же $x_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}x(t)$ – это просто сходимость на функционале $\delta_t\in C(K)^*$, действующем по правилу $\delta_t(f)=f(t)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Нам нужно доказать, что $F(x_n)\to F(x)$ для любого $F\in C(K)^*$. Учитывая общий вид линейного функционала на $C(K)$, нужно доказать, что $\int\limits_K x_n d\nu\to\int\limits_K x d\nu$ для любого регулярного борелевского заряда ν на K. По условию же нам дана равномерная ограниченность и поточечная сходимость функций x_n к функции x. Остаётся применить теорему Лебега о мажорированной сходимости. □

Следующие ниже результаты указывают на более тесную связь слабой сходимости с сильной, чем это наблюдается у слабой со звёздочкой и сильной сходимостей.

Теорема 3. Пусть A – выпуклое подмножество банахова пространства X. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) A слабо замкнуто;

(b) A слабо секвенциально замкнуто, то есть если $x_n\xrightarrow{w}x$ и $x_n\in A$, то $x\in A$;

(c) A замкнуто в сильной топологии.

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна (замкнутость влечёт секвенциальную замкнутость для любой, а не только для слабой топологии).

(b) $\Rightarrow$ (c): пусть $x_n\in A$ и $\|x_n-x\|\to 0$. Тогда $x_n\xrightarrow{w}x$ и, согласно (b), $x\in A$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Эта импликация была доказана в теореме 1 п. 17.1.1 не только для банаховых, а для любых локально выпуклых пространств. □

Теорема 4 (Mazur). Пусть последовательность x_n элементов банахова пространства X слабо сходится к элементу $x\in X$. Тогда x принадлежит сильному замыканию выпуклой оболочки последовательности x_n. Более того, существует такая сильно сходящаяся к x последовательность y_n выпуклых комбинаций элементов x_n, что $y_n\in\operatorname{conv}\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$, $n=1,2,\dots$.

Доказательство. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ докажем существование $y_n\in\operatorname{conv}\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$ с $\|y_n-x\|<1/n$. Эти y_n дадут нам требуемую последовательность. Рассмотрим A_n – сильное замыкание множества $\operatorname{conv}\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$. $\operatorname{conv}\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$. По предыдущей теореме, A_n – это и слабо замкнутое множество. Так как A_n содержит все x_k с $k \geq n$, A_n содержит и их слабый предел x. То есть x принадлежит сильному замыканию множества $\operatorname{conv}\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$, и x можно с любой степенью точности приблизить элементами этой выпуклой оболочки. □

Теорема 5. Пусть X, Y – банаховы пространства. Тогда для линейного оператора $T: X \to Y$ следующие условия эквивалентны:

(A) T непрерывен в слабых топологиях пространств X, Y.

(B) T переводит слабо сходящиеся к нулю последовательности в слабо сходящиеся к нулю;

(C) T непрерывен в сильных топологиях пространств X, Y.

Доказательство. Утверждение (A) $\Rightarrow$ (B) очевидно.

(B) $\Rightarrow$ (C). Здесь для доказательства применим пункт (3) основной теоремы параграфа 6.4.1: T непрерывен в том и только том случае, если он переводит стремящиеся к нулю последовательности в ограниченные. Пусть $\|x_n\| \to 0.$ Тогда $x_n \xrightarrow{w} 0.$ Согласно условию (B), это означает, что $Tx_n \xrightarrow{w} 0.$ Но тогда $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|Tx_n\| < \infty.$

(C) $\Rightarrow$ (A). Здесь достаточно воспользоваться следствием 1 параграфа 17.1.4. □

Упражнения

1. Пусть Y – подпространство банахова пространства X. Тогда ограничение на Y топологии $\sigma(X, X^*)$ совпадает с топологией $\sigma(Y, Y^*)$. В частности, слабо сходящаяся в Y последовательность будет слабо сходящейся в X, слабо компактное в Y подмножество будет слабо компактным в X. Ниже эти факты будут использоваться без дополнительных пояснений.
2. На примере канонического базиса убедитесь, что критерий слабой сходимости в l_p, $1 < p < \infty$ (ограниченность плюс покоординатная сходимость) не действует в l_1.
3. Рассмотрим последовательность $x_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $x_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $x_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0, \ldots)$, $\ldots$ в l_∞. Проверьте, что она ограничена и покоординатно сходится к $x = (1, 1, 1, \ldots)$. При этом для x_n не выполнено утверждение теоремы Мазура, то есть x_n не сходятся слабо к x. Таким образом, критерий слабой сходимости «ограниченность плюс покоординатная сходимость» не имеет силы и в l_∞.

4. Докажите следующий критерий слабой сходимости в пространстве $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$: $f_n \xrightarrow{w} f$ в том и только том случае, если $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ и $\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt$ для любого подотрезка $[a,b] \subset [0,1]$.

5. На примере последовательности $f_n = 2^n \left(\mathbf{1}_{[0,2^{-(n+1)}]} - \mathbf{1}_{[2^{-(n+1)},2^{-n}]}\right)$ убедитесь, что в $L_1[0,1]$ критерий из упражнения 4 уже не действует.

6. Докажите следующий критерий слабой сходимости в $L_1[0,1]$: $f_n \xrightarrow{w} f$ в том и только том случае, если $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ и $\int_A f_n(t)dt \to \int_A f(t)dt$ для любого измеримого подмножества $A \subset [0,1]$.

7. Пусть K – выпуклый слабый компакт в банаховом пространстве, обладающий нормальной структурой (определение см. в упражнениях п. 15.3.1). Покажите, что теорема Какутани (п. 15.3.1) о неподвижной точке сохраняет силу для отображений множества K.

Пусть D – метрическое пространство. Функция $f: D \to D$ называется *нерастягивающим отображением*, если для любых $x_1, x_2 \in D$ $\rho(f(x_1), f(x_2)) \le \rho(x_1, x_2)$.

8. В условиях упражнения 7 у любого нерастягивающего отображения $f: K \to K$ есть неподвижная точка.

9. Существует ли общая неподвижная точка у всех нерастягивающих отображений $f:[0,1] \to [0,1]$?

17.2.4. Тотальные и нормирующие множества. Условия метризуемости

Определение 1. Пусть X – линейное пространство, $Y \subset X$ – подпространство. Множество $F \subset X'$ называется *тотальным над* Y, если оно разделяет точки подпространства Y. Подробнее, F тотально над Y, если для любого $y \in Y \setminus \{0\}$ существует $f \in F$ с $f(y) \ne 0$.

Определение 2. Пусть X – банахово пространство, $Y \subset X$ – линейное подпространство, $\theta \in (0,1]$. Множество $F \subset X^*$ называется θ-*нормирующим над* Y, если

$$\sup_{f\in F\setminus\{0\}} \frac{|f(y)|}{\|f\|} \ge \theta \|y\| \qquad (1)$$

для любого $y \in Y$. Множество $F \subset X^*$ называется *нормирующим над* Y, если существует $\theta \in (0,1)$, для которого F есть θ-нормирующее над Y множество.

Очевидно, любое нормирующее множество будет тотальным: если $y \neq 0$, условие (1) означает, что, по крайней мере, существует $f \in F$ с $f(y) \neq 0$.

В случае, когда F лежит на единичной сфере пространства X^*, условие (1) принимает вид $\sup_{f \in F} |f(y)| \geq \theta \|y\|$. Ввиду однородности данного неравенства по y его достаточно проверять для $y \in S_Y$. Таким образом, для $F \subset S_{X^*}$ определение 2 можно переформулировать следующим образом: множество F является θ-нормирующим над Y, если для любого $y \in S_Y$ выполнено неравенство

$$\sup_{f \in F} |f(y)| \geq \theta. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть X – банахово пространство, $Y \subset X$ – линейное подпространство, $G \subset S_{X^*}$ – 1-нормирующее над Y множество. Далее, пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и на единичной сфере подпространства Y выделена некоторая ε-сеть D. Для любого элемента $x \in D$ зафиксируем функционал $f_x \in G$ с $f_x(x) > 1 - \varepsilon$. Тогда множество $F = \{f_x\}_{x \in D}$ будет θ-нормирующим над Y с $\theta = 1 - 2\varepsilon$.

Доказательство. Зафиксируем $y \in S_Y$ и выведем для этого y оценку (2). По определению ε-сети, существует такой элемент $x_0 \in D$, что $\|y - x_0\| < \varepsilon$. Имеем:

$$\sup_{f \in F} |f(y)| = \sup_{x \in D} |f_x(y)| \geq \left| f_{x_0}(y) \right| = \left| f_{x_0}(x_0) - f_{x_0}(y - x_0) \right| \geq$$
$$\geq 1 - \varepsilon - \|y - x_0\| > 1 - 2\varepsilon = \theta. \;\square$$

Учитывая, что в конечномерном пространстве на единичной сфере существует конечная ε-сеть, отсюда выводим такое следствие.

Следствие 1. Пусть X – банахово пространство, $Y \subset X$ – конечномерное подпространство. Тогда для любого $\theta \in (0,1)$ над Y существует конечное θ-нормирующее множество. $\square$

Слегка усложнённый вариант, который пригодится нам в следующем параграфе.

Следствие 1'. Пусть E – банахово пространство, $Y \subset E^{**}$ – конечномерное подпространство. Тогда для любого $\theta \in (0,1)$ над Y

существует конечное θ-нормирующее множество, состоящее из элементов единичной сферы пространства E^*.

Доказательство. Применим теорему 1 с $X = E^{**}$ и $D = S_{E^*}$. □

Для бесконечномерных сепарабельных пространств получаем следующий результат.

Следствие 2. Пусть X – банахово пространство, $Y \subset X$ – сепарабельное подпространство. Тогда над Y существует счётное 1-нормирующее множество.

Доказательство. Возьмём в качестве D из теоремы 1 счетное плотное подмножество единичной сферы подпространства Y и положим $G = S_{X^*}$. Множество D образует ε-сеть в S_Y для всех $\varepsilon > 0$. Соответственно, множество $F = \{f_x\}_{x \in D}$, составленное из опорных функционалов ($\|f_x\| = 1 = f_x(x)$) будет счётным θ-нормирующим над Y множеством для всех $\theta < 1$. Но если условие (2) выполнено для всех $\theta < 1$, то оно сохраняется и для $\theta = 1$. □

Напомним (п. 16.2.2), что хаусдорфово топологическое векторное пространство метризуемо в том и только том случае, если оно обладает счётной базой окрестностей нуля. Далее, согласно упражнению 3 п. 16.3.3, топология $\sigma(X, X^*)$ имеет счётную базу окрестностей нуля в том и только том случае, если пространство X^* имеет не более чем счётный базис Гамеля. Так как базис Гамеля бесконечномерного банахова пространства несчётен (упражнение 4 п. 6.3.4), слабая топология бесконечномерного пространства, если её рассматривать на всём пространстве, неметризуема. Ситуация изменяется существенным образом, если перейти к рассмотрению слабой топологии на подмножествах.

Теорема 2. Пусть (X, E) – пара пространств в двойственности, $B \subset X$ – компакт в топологии $\sigma(X, E)$, $Y = \mathrm{Lin}\, B$. Через $\sigma_B(X, E)$ обозначим топологию, индуцированную на B слабой топологией $\sigma(X, E)$. Далее, пусть существует $F = \{f_1, f_2, \ldots\} \subset E$ – счётное тотальное над Y множество. Тогда на Y существует такая норма p, что топология, порождаемая на B нормой p, совпадает с $\sigma_B(X, E)$. В частности, на B слабая топология метризуема.

Доказательство. Так как B – слабый компакт, а функционалы f_n непрерывны в слабой топологии $\sigma(X, E)$, то каждый из f_n ограничен на B по модулю каким-то числом a_n. Не нарушая общности можно считать, что $a_n \le 1$ (иначе домножим f_n на коэффициент $1/a_n$; при этом последовательность функционалов останется тотальной над Y). Для любого $y \in Y$ положим $p(y) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(y)| / 2^n$. Докажем, что p и есть требуемая норма. Каждое из слагаемых $|f_n(y)| / 2^n$ неотрицательно, подчиняется неравенству треугольника и условию положительной однородности. Соответственно, этими свойствами обладает и p. Невырожденность ($p(y) = 0 \Rightarrow y = 0$) следует из тотальности множества F.

Приступим к сравнению топологий. Пусть $x \in B$, $r > 0$. Рассмотрим множество $U(x,r) = \{y \in B : p(x-y) < r\}$ – шар в B радиуса r с центром в x, порождённый нормой p. Выберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$ и рассмотрим следующую слабую окрестность точки x в компакте B: $V = \left\{ y \in B : \max\limits_{1 \le k \le N} |f_k(x-y)| < \frac{r}{4} \right\}$. Если $y \in V$, то

$$p(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x-y)|}{2^n} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{|f_n(x-y)|}{2^n} + \frac{1}{2^N} < 2 \max_{1 \le k \le N} |f_k(x-y)| + \frac{r}{2} < r$$

и $y \in U(x,r)$. То есть $V \subset U(x,r)$. Этим доказано, что на B топология, порождаемая нормой p, слабее топологии $\sigma_B(X,E)$. Строго ослабить топологию компакта, сохранив отделимость, невозможно (п. 1.2.3, второй абзац), то есть $\sigma(X,E)$ и p индуцируют на B одну и ту же топологию. □

Следствие 3. Пусть X – банахово пространство. Тогда на каждом сепарабельном слабом компакте B в X слабая топология $\sigma(X, X^*)$ метризуема.

Доказательство. Достаточно применить теорему 2 к дуальной паре (X, X^*). При этом существование счётного тотального множества вытекает из следствия 2. □

Следствие 4. Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Тогда слабая со звёздочкой топология $\sigma(X^*, X)$ метризуема на ограниченных подмножествах пространства X^*.

Доказательство. Рассмотрим дуальную пару (X^*, X) и $B = \overline{B}_{X^*}$. По теореме Алаоглу, B – это компакт в топологии $\sigma(X^*, X)$. По условию, в X существует счётное плотное множество F. Это множество F будет тотальным над X^*. Применение теоремы 2 даёт нам метризуемость слабой со звёздочкой топологии на единичном шаре пространства X^*. Для завершения доказательства остаётся заметить, что любое ограниченное подмножество пространства X^* лежит в некотором шаре вида $r\overline{B}_{X^*}$. □

Следствие 5. Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Тогда из любой ограниченной последовательности функционалов $x_n^* \in X^*$ можно выделить слабо со звёздочкой сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_n^* \in \overline{B}_{X^*}$ (иначе умножим все x_n^* на коэффициент $\left(\sup\limits_n \|x_n^*\|\right)^{-1}$). По теореме Алаоглу, $\overline{B}_{X^*}$ – слабый со звёздочкой компакт, а по следствию 4, этот компакт метризуем. Остаётся вспомнить, что из любой последовательности элементов метрического компакта можно выделить сходящуюся подпоследовательность. □

Упражнения

1. Пусть X – линейное пространство, $Y \subset X$ – подпространство. Над Y существует конечное тотальное множество в том и только том случае, если Y конечномерно.

2. Пусть X – банахово пространство, $\theta \in (0,1)$. Множество $F \subset X^*$ будет θ-нормирующим над X в том и только том случае, если слабое со звёздочкой замыкание абсолютно выпуклой оболочки множества F содержит $\theta\overline{B}_{X^*}$.

3. Для банахова пространства X следующие условия эквивалентны:
   - над X существует счётное тотальное множество;
   - существует линейный инъективный непрерывный оператор, отображающий X в l_2.

4. Для банахова пространства X следующие условия эквивалентны:
   - над X существует счётное нормирующее множество;
   - существует ограниченный снизу линейный непрерывный оператор, отображающий X в l_∞.

5. Для банахова пространства X следующие условия эквивалентны:
   - над X существует счётное 1-нормирующее множество;
   - существует линейное изометрическое вложение пространства X в l_∞.

6. В частности, любое сепарабельное банахово пространство изометрически вкладывается в l_∞.

Сепарабельное банахово пространство E называется *универсальным*, если среди своих подпространств E содержит изометрические копии всех сепарабельных банаховых пространств.

7. Пусть X – сепарабельное банахово пространство, K – канторово множество. Наделим $\overline{B}_{X^*}$ слабой со звёздочкой топологией. Согласно упражнению 6 п. 1.4.4 и теореме Алаоглу, существует сюръективное непрерывное отображение $F: K \to \overline{B}_{X^*}$. Зададим оператор $T: X \to C(K)$ формулой $(Tx)(t) = \langle F(t), x \rangle$. Докажите, что оператор T осуществляет линейное изометрическое вложение пространства X в $C(K)$. Этим будет доказано, что пространство $C(K)$ непрерывных функций на канторовом множестве универсально.
8. Докажите, что $C(K)$, где K – канторово множество, изометрически вкладывается в $C[0,1]$. Отсюда выведите универсальность пространства $C[0,1]$.

Учитывая, что $X \subset X^{**}$, можно говорить о тотальных и нормирующих над X^* подпространствах банахова пространства X.

9. Для линейного подпространства Y банахова пространства X следующие условия эквивалентны:
- Y тотально над X^*;
- Y – нормирующее над X^* множество;
- Y плотно в X.

10. Обозначим через e_n^* функционал на l_∞, ставящий каждому элементу $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$ его n-ную координату: $e_n^*(x) = x_n$. На примере последовательности $\{e_n^*\}_1^\infty$ убедитесь, что на несепарабельных пространствах бывают ограниченные последовательности функционалов, не содержащие слабо со звёздочкой сходящихся подпоследовательностей. В частности, этот пример показывает, что, несмотря на теорему Алаоглу, единичный шар сопряжённого пространства не обязан быть слабым со звёздочкой секвенциальным компактом.

17.2.5. Теорема Эберлейна – Шмульяна

Упражнение, приведённое в конце предыдущего параграфа, напоминает, что в неметризуемых топологических пространствах компактность и секвенциальная компактность – это, вообще говоря, разные свойства. Слабая топология бесконечномерного банахова пространства неметризуема. Тем удивительнее, что слабая компактность множества в банаховом пространстве эквивалентна слабой секвенциальной компактности. Эта теорема Эберлейна – Шмульяна распадается на две части, первая из которых была доказана В. Л. Шмульяном в 1940, а вторая – Эберлейном в 1947 году.

Теорема 1. Пусть K – слабый компакт в банаховом пространстве X, тогда из любой последовательности $x_n \in K$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Рассмотрим Y – замыкание линейной оболочки последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\widetilde{K} = K \bigcap Y$. Так как Y сепарабельно, то $\widetilde{K}$ – сепарабельное множество. Далее, замкнутое подпространство – это слабо замкнутое множество (теорема 3 п. 17.2.3), следовательно, $\widetilde{K}$ – пересечение слабого компакта со слабо замкнутым множеством – это слабый компакт. По следствию 3 п. 17.2.4, слабая топология $\sigma(X, X^*)$ метризуема на $\widetilde{K}$. По построению, $x_n \in \widetilde{K}$, а из любой последовательности элементов метризуемого компакта можно выделить сходящуюся (в данном случае слабо сходящуюся, так как речь идёт о слабой топологии) подпоследовательность. □

Теорема 2. Пусть K – слабый секвенциальный компакт в банаховом пространстве X, то есть из любой последовательности $x_n \in K$, $n = 1,2,\ldots$, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, и предел подпоследовательности снова лежит в K. Тогда K – слабый компакт.

Доказательство. Отметим для начала, что K – ограниченное множество. Действительно, если бы множество K было неограниченным, то существовала бы последовательность $x_n \in K$ с $\|x_n\| \to \infty$. Такая последовательность не содержит ограниченных подпоследовательностей, значит, не содержит и слабо сходящихся подпоследовательностей.

Поскольку умножением на маленькое положительное число ограниченное множество можно превратить в подмножество единичного шара, будем для простоты считать, что $K \subset \overline{B}_X$. Учитывая вложение $\overline{B}_X \subset \overline{B}_{X^{**}}$, K можно рассматривать как подмножество шара $\overline{B}_{X^{**}}$. Так как на X, а следовательно, и на K топологии $\sigma(X, X^*)$ и $\sigma(X^{**}, X^*)$ совпадают, нам достаточно доказать $\sigma(X^{**}, X^*)$-компактность множества K. По теореме Алаоглу, $\overline{B}_{X^{**}}$ – это $\sigma(X^{**}, X^*)$-компакт. Поэтому для доказательства $\sigma(X^{**}, X^*)$-компактности множества K достаточно доказать $\sigma(X^{**}, X^*)$-замкнутость K в $\overline{B}_{X^{**}}$.

Пусть $x^{**} \in \overline{B}_{X^{**}}$ – произвольная $\sigma(X^{**}, X^*)$-предельная точка множества K. Нам нужно проверить, что $x^{**} \in K$. Учитывая вид окрестностей топологии $\sigma(X^{**}, X^{*})$, условие $\sigma(X^{**}, X^{*})$-предельности точки x^{**} можно записать следующим образом.

(A) Для любого конечного множества функционалов $D \subset X^{*}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in K$, что $\max\limits_{y^{*} \in D} \left| y^{*}(x^{**} - x) \right| < \varepsilon.$

Основная идея доказательства состоит в построении последовательности $x_n \in K$, у которой ни одна подпоследовательность не может слабо сходиться ни к одной точке, кроме x^{**}. Так как по условию у любой последовательности $x_n \in K$ существует подпоследовательность, слабо сходящаяся к некоторой точке множества K, этим будет доказано, что $x^{**} \in K$.

Построение указанной последовательности $x_n \in K$ будем проводить рекуррентно, используя на каждом шаге свойство (A) и следствие 1' п. 17.2.4. Зафиксируем какое-нибудь $\theta \in (0,1)$ и последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Рассмотрим $Y_0 = \mathrm{Lin}\{x^{**}\}$. Согласно следствию 1' п. 17.2.4, существует конечное θ-нормирующее над Y_0 множество $D_0 \subset S_{X^*}$. Воспользуемся свойством (A) и выберем такой $x_1 \in K$, что $\max\limits_{y^{*} \in D_0} \left| y^{*}(x^{**} - x_1) \right| < \varepsilon_1$. Теперь рассмотрим $Y_1 = \mathrm{Lin}\{x^{**}, x_1\}$. Снова, по тому же следствию 1' п. 17.2.4, существует конечное θ-нормирующее над Y_1 множество $D_1 \subset S_{X^*}$. Не нарушая общности, можно считать, что $D_0 \subset D_1$: если это не так, заменим D_1 множеством $D_0 \bigcup D_1$. Снова воспользуемся свойством (A) и выберем $x_2 \in K$, с $\max\limits_{y^{*} \in D_1} \left| y^{*}(x^{**} - x_2) \right| < \varepsilon_2$. Продолжив это построение, получим последовательность элементов $x_n \in K$, последовательность подпространств $Y_n = \mathrm{Lin}\{x^{**}, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и последовательность конечных подмножеств $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ единичной сферы пространства X^{*} такие, что D_n – это θ-нормирующее над Y_n множество и

$$\max_{y^{*} \in D_{n-1}} \left| y^{*}(x^{**} - x_n) \right| < \varepsilon_n. \tag{3}$$

Обозначим $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$ через D, а сильное замыкание подпространства $\mathrm{Lin}\{x^{**}, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ через Y. Предположим, что какая-то подпоследовательность x_{n_j} последовательности x_n слабо сходится к некоторому $x \in K$. Докажем, что $x = x^{**}$: как мы уже отмечали выше, этим будет доказана и вся теорема. Вначале заметим, что, по теореме Мазура (теорема 4 п. 17.2.3), $x \in Y$. Соответственно, и $x - x^{**} \in Y$. Множество D по построению будет θ-нормирующим над всеми Y_n, следовательно, D – это θ-нормирующее множество и над $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, а значит, и над Y – сильным замыканием данного объединения. Поэтому

$$\left\| x - x^{**} \right\| \le \frac{1}{\theta} \sup_{y^* \in D} \left| y^*(x^{**} - x) \right|.$$

Докажем, что правая часть последнего неравенства равна нулю. Действительно, для любого $y^* \in D$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $y^* \in D_m$ при всех $m \ge N$. По условию (3), это означает, что $\left| y^*(x^{**} - x_m) \right| < \varepsilon_m$ при всех $m > N$. Так как x – слабо предельная точка последовательности x_n, отсюда можно заключить, что $\left| y^*(x^{**} - x) \right| = 0$. □

Упражнения

Докажите следующие два утверждения, использовавшиеся выше как очевидные:

1. Пусть $Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ возрастающая цепочка подпространств, а D – θ-нормирующее множество над всеми Y_n. Тогда D – θ-нормирующее множество и над $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.

2. Пусть D – θ-нормирующее множество над линейным подпространством E. Тогда D – θ-нормирующее множество над сильным замыканием подпространства E.

Теорема Эберлейна – Шмульяна может создать иллюзию, что для слабой топологии банахова пространства все топологические свойства можно адекватно формулировать на языке последовательностей. Развеять эту иллюзию помогут следующие примеры.

3. В пространстве l_2 рассмотрим канонический ортонормированный базис e_n. Положим $x_n = n^{1/4} e_n$. Докажите что:

– 0 – это предельная в слабой топологии точка последовательности x_n;
– последовательность x_n не имеет ограниченных подпоследовательностей, а значит, не имеет слабо сходящихся подпоследовательностей.

Слабым секвенциальным замыканием множества A в банаховом пространстве X называется множество слабых пределов всех слабо сходящихся последовательностей элементов множества A.

4. **Пример фон Неймана.** В пространстве l_2 рассмотрим множество A векторов $x_{n,m} = e_n + ne_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ (e_n, как и в предыдущем упражнении, – канонический базис). Проверьте, что:

- при $m \to \infty$ и фиксированном n последовательность $x_{n,m}$ слабо стремится к e_n. То есть все векторы e_n принадлежат слабому секвенциальному замыканию множества A.
- 0 не принадлежат слабому секвенциальному замыканию множества A.
- Слабое секвенциальное замыкание множества A не является слабо секвенциально замкнутым множеством.

17.2.6. Рефлексивные пространства

Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если $X = X^{**}$. В рефлексивном пространстве, ввиду равенства $X = X^{**}$, слабая топология $\sigma(X, X^*)$ равна $\sigma(X^{**}, X^*)$ и наряду с обычными для слабой топологии свойствами (эквивалентность замкнутости и слабой замкнутости выпуклых множеств, эквивалентность непрерывности и слабой непрерывности линейного оператора) обладает и главным достоинством слабой со звёздочкой топологии − компактностью в этой топологии единичного шара. Такое сочетание свойств делает рефлексивные пространства гораздо более удобными в применениях.

Теорема 1. Для банахова пространства X следующие условия эквивалентны:

(i) X рефлексивно;

(ii) $\overline{B}_X$ – слабый компакт;

(iii) из любой ограниченной последовательности $x_n \in X$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если $X = X^{**}$, то $\overline{B}_X = \overline{B}_{X^{**}}$; а, по теореме Алаоглу, $\overline{B}_{X^{**}}$ – $\sigma(X^{**}, X^*)$-компакт.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Учитывая, что ограничение топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$ на X совпадает со слабой топологией $\sigma(X, X^*)$, из (ii) можно сделать вывод, что $\overline{B}_X$ – это $\sigma(X^{**}, X^*)$-компактное подмножество пространства X^{**}. В частности, $\overline{B}_X \subset \overline{B}_{X^{**}}$ – слабо со звёздочкой замкнутое подмножество. По теореме Голдстайна (теорема 1 п. 17.2.2), $\overline{B}_X$ слабо со звёздочкой плотен в

$\overline{B}_{X^{**}}$, следовательно, $\overline{B}_X = \overline{B}_{X^{**}}$. Перейдя к линейным оболочкам, получаем требуемое равенство $X = X^{**}$.

Эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) вытекает из теоремы Эберлейна – Шмульяна. □

Теорема 2. Если банахово пространство X рефлексивно, то рефлексивны все его подпространства и факторпространства.

Доказательство. Пусть Y – подпространство банахова пространства X. По определению, это означает, что Y – замкнутое линейное подпространство. Следовательно, Y слабо замкнуто в X. Поскольку $\overline{B}_X$ – слабый компакт, то $\overline{B}_Y = Y \bigcap \overline{B}_X$ также будет слабым компактом. Этим доказана рефлексивность пространства Y.

Перейдём к рассмотрению факторпространства X/Y. Напомним, что фактоотображение $q: X \to X/Y$, ставящее каждому элементу пространства X его класс эквивалентности, – это линейный непрерывный оператор. Следовательно, q – слабо непрерывный оператор. В частности, $q\left(\overline{B}_X\right)$ – это образ слабого компакта при слабо непрерывном отображении, следовательно, $q\left(\overline{B}_X\right)$ – это слабый компакт в X/Y. Далее, для любого $[x] \in \overline{B}_{X/Y}$ существует представитель $\widetilde{x} \in [x]$ с $\|\widetilde{x}\| \le \|[x]\| + 1 \le 2$. То есть $\overline{B}_{X/Y} \subset 2q\left(\overline{B}_X\right)$. Таким образом, $\overline{B}_{X/Y}$ – слабый компакт, как слабо замкнутое подмножество слабого компакта. □

Теорема 3. Банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно его сопряжённое X^*.

Доказательство. Пусть $X = X^{**}$. Перейдя к сопряжённым, получаем, что $X^* = X^{***}$ (см. также упражнения 3, 4 п. 17.2.2). То есть рефлексивность исходного пространства влечёт рефлексивность сопряжённого. Обратно, пусть пространство X^* рефлексивно. Тогда, по уже доказанному, будет рефлексивным и его сопряжённое X^{**}. Но X – это подпространство пространства X^{**}, значит, и X должно быть рефлексивным. □

Отметим некоторые свойства рефлексивных пространств, применяющиеся в задачах теории аппроксимации и вариационного исчисления.

Теорема 4. Пусть A – выпуклое замкнутое подмножество рефлексивного банахова пространства X. Тогда для любого $x \in X$ в A существует ближайшая к x точка.

Доказательство. Обозначим $\rho(x, A)$ через r и рассмотрим множества $A_n = \left\{a \in A : \|a - x\| \le r + \frac{1}{n}\right\} = A \bigcap \left(x + (r + \frac{1}{n})\overline{B}_X \right)$. Так как A – слабо замкнутое множество, а $\overline{B}_X$ – слабый компакт, то каждое из A_n будет слабым компактом. Убывающая цепочка компактов (даже любое центрированное семейство компактов) имеет непустое пересечение. Любой элемент $y \in \bigcap\limits_n A_n$ лежит в A и находится на расстоянии r от x. То есть y – это требуемая ближайшая к x точка множества A. □

Доказанную теорему 4 советуем сопоставить с теоремой о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве и упражнениями 4-6 параграфа 12.2.1. В частности, единственность ближайшей точки в условиях теоремы 4 не гарантирована даже в конечномерном случае (см. приводимое ниже упражнение 6).

Теорема 5. Для любого линейного непрерывного функционала f на рефлексивном пространстве X существует элемент $x \in S_X$ с $f(x) = \|f\|$. Таким образом, в рефлексивном пространстве любой линейный функционал достигает на единичной сфере своего максимального по модулю значения.

Доказательство. По теореме 1 п. 9.2.1, для точки $f \in X^*$ существует опорный в этой точке функционал $x \in S_{X^{**}}$. Для этого элемента $f(x) = \|f\|$. Остаётся вспомнить, что $X = X^{**}$, то есть x лежит не где-то во втором сопряжённом пространстве, а, как и требуется, на сфере исходного пространства X. □

Отметим, что имеет силу и обратное к теореме 5 утверждение: если банахово пространство X не рефлексивно, то существует функционал $f \in X^*$, не достигающий на S_X своей верхней грани. Доказательство этой весьма непростой теоремы Джеймса (R. C. James) можно найти в первой главе монографии Дистеля [Die].

В заключение, перечислим, какие из известных нам пространств рефлексивны, а какие – нет.

– Все конечномерные пространства рефлексивны.
– Все L_p и l_p при $1 < p < \infty$ рефлексивны (следует из теоремы об общем виде линейного функционала в L_p).
– Пространство c_0 не рефлексивно, так как $(c_0)^{**} = l_\infty \ne c_0$.

– Пространство l_1 не рефлексивно, так как оно сопряжено к нерефлексивному пространству c_0.
– Пространство l_∞ не рефлексивно, так как оно сопряжено к нерефлексивному пространству l_1.
– Пространство $C(K)$, где K – бесконечный компакт, не рефлексивно, так как оно содержит нерефлексивное подпространство, изоморфное c_0. Предлагаем читателю проверить самостоятельно, что для любой последовательности функций $f_n \in S_{C(K)}$ с непересекающимися носителями, $\overline{\mathrm{Lin}}\, f_n$ – это подпространство в $C(K)$, изометричное c_0. В частности, не рефлексивно пространство $C[0,1]$.
– Пространство $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$, где Ω не распадается в объединение конечного числа атомов меры μ, не рефлексивно, так как оно содержит нерефлексивное подпространство, изоморфное l_1. (Для любой последовательности функций $f_n \in S_{L_1(\Omega,\Sigma,\mu)}$ с непересекающимися носителями, $\overline{\mathrm{Lin}}\, f_n$ – это подпространство в $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$, изометричное l_1.) В частности, не рефлексивно пространство $L_1[0,1]$.

Замечание. Определение пространств L_p и l_p выглядит более сложным и менее естественным, чем пространств $C[0,1]$, $L_1[0,1]$ или c_0. Список, приведенный выше, проливает свет на причину широкого использования пространств L_p: относительно сложное определение искупается с лихвой удобными свойствами этих пространств, и в первую очередь, рефлексивностью.

Упражнения

1. В каждом из вышеприведенных примеров нерефлексивных пространств постройте явным образом ограниченную последовательность, не содержащую слабо сходящихся подпоследовательностей. Таким способом будет дано другое обоснование нерефлексивности указанных пространств.

Опираясь на слабую компактность единичного шара, докажите следующее обобщение теоремы 5.

2. Пусть $T \in L(X,Y)$, X рефлексивно, а Y конечномерно. Тогда существует элемент $x \in S_X$ с $\|T(x)\| = \|T\|$.
3. Приведите пример непрерывного линейного функционала на c_0, не достигающего своей верхней грани на единичной сфере. Дайте полное описание таких функционалов.
4. Решите аналоги предыдущего упражнения для пространств l_1, $L_1[0,1]$ и $C[0,1]$.

5. Пусть A – слабо компактное подмножество банахова пространства X. Тогда для любого $x \in X$ в A существует ближайшая к x точка.
6. В пространстве $\mathbb{R}^2$, наделённом нормой $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, рассмотрите подмножество $A = \{(1, a) : a \in [-1,1]\}$. Проверьте, что для $x = 0$ ближайшая к x точка в A не единственна.
7. Оператор $A \in L(X, Y)$ называется оператором Данфорда – Петтиса, если он переводит слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся по норме. Проверить, что каждый компактный оператор будет оператором Данфорда – Петтиса. Если пространство X рефлексивно, то каждый оператор Данфорда – Петтиса компактен. В нерефлексивных пространствах (скажем, в $C[0,1]$) бывают некомпактные операторы Данфорда – Петтиса.

17.3. Комментарии к упражнениям

Параграф 17.2.1

Упражнение 7. Обозначим через A множество всех точек, где разрывна хотя бы одна из функций F_n, F. Рассмотрим пространство X всех ограниченных функций на $[0,1]$, имеющих в каждой точке пределы справа и слева, непрерывных во всех точках множества A и имеющих не более конечного числа точек разрыва. Наделим X нормой $\|f\| = \sup\limits_{[0,1]} |f(t)|$.

Требуемое соотношение $\int\limits_0^1 f dF_n \to \int\limits_0^1 f dF$ проще доказывать не для $f \in C[0,1]$, а для более широкого класса $f \in X$. Для этого нужно доказать соотношение $\int\limits_0^1 f dF_n \to \int\limits_0^1 f dF$ для $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$; распространить его по линейности на множество всех кусочно-постоянных функций и воспользоваться критерием поточечной сходимости операторов (сходимость на плотном подмножестве + ограниченность по норме).

Упражнение 8. Перейти к борелевским зарядам ν_n, для которых $F_n(t) = \nu_n([0,t])$ при $t \in (0,1]$. Вначале разобрать случай, когда ν_n – это меры.

Упражнение 9. Используя не более чем счётность множества точек разрыва функции ограниченной вариации, подогнать под упражнения 4 и 8. Другое рассуждение см. в учебнике Колмогорова и Фомина, глава VI, § 6.

Параграф 17.2.5

Упражнение 3. Пример взят из статьи [CGK]. Указанная последовательность x_n будет слабо сходиться к нулю по статистическому фильтру $\mathfrak{F}_s$ (см. п. 16.1.2). Имеет место следующий общий результат [Kad4]: для последовательности чисел $a_n > 0$ следующие условия эквивалентны: (1) существует последовательность $x_n \in l_2$, с $\|x_n\| = a_n$, имеющая 0 слабо предельной точкой, и (2) $\sum a_n^{-2} = \infty$.

18. Теорема Крейна – Мильмана и её приложения

18.1. Крайние точки выпуклых множеств

Как мы уже отмечали, основным достоинством подхода к задачам классического анализа, предлагаемого в рамках анализа функционального, служит сведение аналитических по формулировке задач к задачам геометрического характера. Возникающие при этом геометрические объекты лежат в бесконечномерных пространствах, но манипулировать ими можно, используя аналогию с фигурами на плоскости или в пространстве. Чтобы свободнее оперировать этой аналогией, чтобы понимать, когда эта аналогия помогает, а не сбивает с толку, мы изучили многочисленные свойства пространств, подпространств, выпуклых множеств, компактов, слабых компактов, линейных операторов, обращая каждый раз внимание на совпадения и отличия с конечномерными вариантами этих свойств. В настоящей главе к уже разработанному арсеналу геометрических приёмов добавится ещё один: изучение выпуклого множества через его крайние точки. Хотя крайняя точка – это прямое обобщение вершины многоугольника или многогранника, в рамках классической геометрии для фигур общего вида этот чисто геометрический объект не использовался. Изучение и применение крайних точек к задачам геометрии (в том числе конечномерной), функционального анализа, математической экономики – это одно из достижений ушедшего двадцатого века.

18.1.1. Определение и примеры

Пусть A – выпуклое подмножество линейного пространства X. Точка $x \in A$ называется крайней точкой множества A, если она не служит серединой ни одного невырожденного отрезка с концами, лежащими в A. Множество всех крайних точек множества A обозначается $\operatorname{ext} A$. Подробнее: $x \in \operatorname{ext} A$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in A$, если $\frac{x_1 + x_2}{2} = x$, то $x_1 = x_2$ (и, следовательно, оба вектора x_1, x_2 совпадают с x).

Теорема 1. Пусть A – выпуклое подмножество топологического векторного пространства X. Тогда ни одна внутренняя точка множества A не является крайней точкой этого множества.

Доказательство. Пусть $x \in A$ – внутренняя точка. Тогда существует такая уравновешенная окрестность нуля U, что $x + U \subset A$. Пусть

$y \in U \setminus \{0\}$. Положим $x_1 = x + y$, $\frac{x_1 + x_2}{2} \in B$. Тогда $x_1, x_2 \in A$, $\frac{x_1 + x_2}{2} = x$, но $x_1 \neq x_2$, □

Таким образом, все крайние точки множества лежат на его границе. Разумеется, это весьма неполная информация о расположении крайних точек. Заметим, что $\operatorname{ext} A$ зависит только от выпуклой геометрии множества A и не зависит от того, в каком объемлющем линейном пространстве рассматривается A, или от того, какая топология задана на A. Граница же зависит и от топологии на A, и от того, в каком пространстве A рассматривается.

Теорема 2 (примеры).

(a) Если A – выпуклый многоугольник на плоскости, то $\operatorname{ext} A$ – это множество вершин многоугольника.

(b) Если A – это круг, то $\operatorname{ext} A$ – это окружность.

(c) Множество крайних точек замкнутого единичного шара $\overline{B}_H$ гильбертова пространства H – это единичная сфера S_H.

(d) Замкнутый единичный шар $\overline{B}_{c_0}$ пространства c_0 не имеет ни одной крайней точки.

Доказательство. Пункты (a) и (b) очевидны. Перейдём к утверждению (c). По теореме 1, $\operatorname{ext} \overline{B}_H \subset S_H$. Докажем обратное включение. Пусть $x, x_1, x_2 \in S_H$, $\frac{x_1 + x_2}{2} = x$. Это означает, что $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ и $\|x_1 + x_2\| = 2$. Но тогда, по равенству параллелограмма,

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 - 2\|x_1\|^2 - 2\|x_2\|^2 = 4 - 2 - 2 = 0,$$

то есть $x_1 = x_2$.

(d) Докажем, что ни один элемент шара $\overline{B}_{c_0}$ не будет крайней точкой. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \overline{B}_{c_0}$. Это означает, что все координаты a_j не превосходят единицы по модулю и $a_j \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$. Последнее условие означает, что существует такое n, что $|a_n| < \frac{1}{2}$. Рассмотрим следующие векторы x_1, x_2, совпадающие с a на всех координатах, кроме n-й, а на n-й координате отличающиеся от a на $\pm 1/2$:

$$x_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1/2, a_{n+1}, \ldots), \; x_2 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1/2, a_{n+1}, \ldots).$$

Эти x_1, x_2 лежат в $\overline{B}_{c_0}$, $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = a$, но $x_1 \neq x_2$. □

Простое описание есть у крайних точек декартова произведения выпуклых множеств.

Теорема 3. Пусть Γ – индексное множество, X_γ, $\gamma \in \Gamma$ – линейные пространства, $A_\gamma \subset X_\gamma$ – выпуклые подмножества. Тогда $\operatorname{ext} \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$.

Доказательство. Пусть $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$, то есть $x_\gamma \in \operatorname{ext} A_\gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Докажем, что $x \in \operatorname{ext} \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Рассмотрим такие элементы $y = (y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ и $z = (z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ из $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, что $\dfrac{y + z}{2} = x$. Тогда $\dfrac{y_\gamma + z_\gamma}{2} = x_\gamma$ и $y_\gamma, z_\gamma \in A_\gamma$. Поскольку $x_\gamma \in \operatorname{ext} A_\gamma$, отсюда следует, что $y_\gamma = z_\gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$, то есть что $y = z$. Этим доказано включение $\operatorname{ext} \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \supset \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$.

Теперь докажем обратное включение $\operatorname{ext} \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subset \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$. Пусть $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \setminus \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$. Тогда существует индекс $\gamma_0 \in \Gamma$, при котором $x_{\gamma_0} \in A_{\gamma_0} \setminus \operatorname{ext} A_{\gamma_0}$. По определению, это означает, что существуют неравные между собой элементы $y_{\gamma_0}, z_{\gamma_0} \in A_{\gamma_0}$, для которых $\dfrac{y_{\gamma_0} + z_{\gamma_0}}{2} = x_{\gamma_0}$. Определим элементы $y, z \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ следующим образом: при $\gamma \neq \gamma_0$ координаты элементов y, z положим равными между собой и равными соответствующей координате элемента x, а для индекса γ_0 в качестве координат возьмём элементы y_{γ_0} и z_{γ_0} соответственно. При таком построении $y \neq z$ (элементы отличаются на координате γ_0), но $\dfrac{y + z}{2} = x$. Таким образом, $x \notin \operatorname{ext} \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. □

Из данной теоремы с очевидностью вытекают описания крайних точек двух важных n-мерных тел.

Следствие 1. Крайними точками *n-мерного куба* $[-1,1]^n$ будут те и только те векторы, все координаты которых равны ± 1.

Введём обозначения $\mathbb{C}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$, $\mathbb{T}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (единичный круг и единичная окружность).

Следствие 2. Множество крайних точек n*-мерного поликруга* $(\mathbb{C}_1)^n$ совпадает с *остовом поликруга* $(\mathbb{T}_1)^n$.

Упражнения

1. В пространстве $C[0,1]$ замкнутый единичный шар имеет только две крайние точки: $f(t) \equiv 1$ и $f(t) \equiv -1$.

2. В пространстве $L_1[0,1]$ замкнутый единичный шар не имеет ни одной крайней точки.

3. При $1 < p < \infty$ каждый элемент единичной сферы пространства $L_p[0,1]$ – это крайняя точка замкнутого единичного шара. Другими словами, $L_p[0,1]$ – строго выпуклое пространство (см. упражнения 4 - 6 параграфа 12.2.1).

4. Из предыдущего упражнения и рефлексивности выведите следующий результат: пусть $1 < p < \infty$, $A \subset L_p[0,1]$ – выпуклое замкнутое подмножество. Тогда для любого $x \in X$ в A существует единственная ближайшая к x точка.

5. Пусть X, Y – линейные пространства, $T : X \to Y$ инъективный линейный оператор. Тогда для любого выпуклого подмножества $A \subset X$ имеет место равенство $T(\operatorname{ext} A) = \operatorname{ext} T(A)$.

6. Приведите пример, показывающий, что условие инъективности в предыдущем упражнении отбросить нельзя.

7. Для любого выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^2$ множество $\operatorname{ext} A$ замкнуто.

8. Приведите пример выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^3$ с незамкнутым множеством крайних точек.

18.1.2. Теорема Крейна – Мильмана

В настоящем параграфе будет доказан основной результат главы – существование крайних точек у любого выпуклого компакта.

Определение 1. Пусть A – выпуклое подмножество линейного пространства X.

Множество $B \subset A$ называется *крайним подмножеством множества* A, если оно подчиняется следующим требованиям:

– B непусто;

– B выпукло;

– для любых $x_1, x_2 \in A$, если только $\frac{x_1 + x_2}{2} \in B$, то $x_1, x_2 \in B$.

Очевидно, подмножество, состоящее из одной точки x, будет крайним в том и только том случае, если x – крайняя точка. Если A – треугольник на плоскости, примером крайнего подмножества $B \subset A$ может служить сторона данного треугольника.

Лемма 1. Пусть X, Y – линейные пространства, $T : X \to Y$ линейный оператор, $A \subset X$ – выпуклое подмножество. Тогда для любого крайнего подмножества B множества $T(A)$ множество $T^{-1}(B) \bigcap A$ (полный прообраз в A множества B) будет крайним подмножеством исходного множества A. В частности, полный прообраз в A крайней точки множества $T(A)$ будет крайним подмножеством множества A.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $\frac{x_1 + x_2}{2} \in T^{-1}(B)$. Тогда $Tx_1, Tx_2 \in T(A)$ и $\frac{Tx_1 + Tx_2}{2} \in B$. Так как B – крайнее подмножество множества $T(A)$, это означает, что $Tx_1, Tx_2 \in B$, и, следовательно, $x_1, x_2 \in T^{-1}(B)$. □

Лемма 2. Пусть A – выпуклое множество, B – крайнее подмножество в A, а C – крайнее подмножество в B. Тогда C – крайнее подмножество множества A. В частности, крайняя точка крайнего подмножества – это крайняя точка исходного множества.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $\frac{x_1 + x_2}{2} \in C$. Тогда, в частности, $\frac{x_1 + x_2}{2} \in B$. Так как B – крайнее подмножество множества A, отсюда заключаем, что $x_1, x_2 \in B$. Вспомнив, что $\frac{x_1 + x_2}{2} \in C$, а C – крайнее подмножество в B получаем требуемое условие $x_1, x_2 \in C$. □

Теперь перейдём от произвольных линейных пространств к локально выпуклым топологическим векторным пространствам и от произвольных выпуклых множеств к выпуклым компактам.

Лемма 3. Пусть A – выпуклый компакт в топологическом векторном пространстве X, f – непрерывный вещественный линейный функционал на X и $b = \max_{x \in A} f(x)$. Тогда множество $M(f, A) = \{x \in A : f(x) = b\}$ тех x, где f достигает своего максимального на A значения, – это крайнее в A подмножество.

Доказательство. Множество $f(A)$ – это замкнутый отрезок $[a,b]$, соединяющий минимальное и максимальное на A значения функционала f. Поэтому b – это крайняя точка множества $f(A)$. По лемме 1, $M(f,A) = f^{-1}(b) \bigcap A$ – крайнее подмножество. □

Лемма 4. Пусть A – выпуклый компакт в топологическом векторном пространстве X, $\mathfrak{M}$ – центрированное семейство замкнутых крайних подмножеств множества A. Тогда $D = \bigcap\limits_{B\in\mathfrak{M}} B$ – пересечение всех элементов семейства $\mathfrak{M}$ также образует замкнутое крайнее подмножество множества A.

Доказательство. Из компактности следует, что D непусто. Выпуклость и замкнутость наследуются пересечением множеств, поэтому D выпукло и замкнуто. Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $\frac{x_1 + x_2}{2} \in D$. Тогда, в частности, $\frac{x_1 + x_2}{2} \in B$ для любого $B \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $x_1, x_2 \in B$ для всех $B \in \mathfrak{M}$. то есть $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{B\in\mathfrak{M}} B = D$. □

Лемма 5. Пусть A – выпуклый компакт в отделимом локально выпуклом пространстве, состоящий более чем из одной точки. Тогда A содержит замкнутое крайнее подмножество B, не совпадающее с самим множеством A.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 \neq x_2$. Так как сопряжённое к отделимому локально выпуклому пространству разделяет точки, существует вещественный непрерывный функционал f, значения которого в x_1 и x_2 не совпадают. Тогда f – это не тождественная константа на A, и в качестве требуемого B можно взять множество $M(f,A)$ из леммы 3. □

Теорема 1 (теорема Крейна – Мильмана[1] в ослабленной формулировке). Любой выпуклый компакт K в отделимом локально выпуклом пространстве имеет крайние точки.

[1] Марк Крейн и Давид Мильман – одесские математики. Поэтому, в отличие от теорем Львовской школы Банаха, лишь ввиду послевоенных географических изменений ставших «украинскими», теорема Крейна – Мильмана – «исконно наша», и при её упоминании наше украинское патриотическое чувство может расцветать с законным на то правом.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathfrak{Exst}(K)$ всех замкнутых крайних подмножеств компакта K, упорядоченное по убыванию множеств. Согласно лемме 4, $\mathfrak{Exst}(K)$ – индуктивно упорядоченное семейство. По лемме Цорна, существует минимальное по включению замкнутое крайнее подмножество A компакта K. Ввиду леммы 5, A состоит ровно из одной точки. Эта точка и будет требуемой крайней точкой компакта K. □

Замечание. Для выпуклого компакта в не локально выпуклом отделимом топологическом векторном пространстве утверждение теоремы 1 может и не выполняться. Соответствующий контрпример построен Робертсом [Rob].

Следующий результат имеет многочисленные применения в задачах линейной оптимизации и, в частности, в задачах математической экономики.

Теорема 2. Пусть K – выпуклый компакт в отделимом локально выпуклом пространстве X, f – непрерывный вещественный линейный функционал на X и $b = \max\limits_{x \in K} f(x)$. Тогда существует точка $x \in \operatorname{ext} K$, в которой $f(x) = b$. Другими словами, при поиске максимума линейного функционала на выпуклом компакте достаточно рассматривать значения в крайних точках компакта.

Доказательство. Согласно лемме 3, $M(f, K) = \{x \in K : f(x) = b\}$ – это крайнее подмножество компакта K, к тому же ввиду непрерывности функционала f – замкнутое. Поскольку $M(f, K)$ – выпуклый компакт, у него есть крайняя точка x_0, и, по определению множества $M(f, K)$, $f(x_0) = b$. Остаётся воспользоваться леммой 2: крайняя точка крайнего подмножества – это крайняя точка исходного множества. □

Особенно эффективным использование теоремы 2 становится в случае, когда K – конечномерный многогранник. В этом случае $\operatorname{ext} K$ – конечное множество, и задача вычисления максимума линейного функционала сводится к конечному (пусть даже и большому) перебору. Этот перебор можно осуществлять, в частности, с помощью знаменитого *симплекс-метода* Канторовича, о котором в наши дни можно прочитать в любом учебнике по линейному программированию.

Лемма 6. Пусть A, B – выпуклые замкнутые подмножества локально выпуклого пространства X. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $A = B$;

(ii) $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\limits_{x\in B} f(x)$ для любого вещественного функционала $f \in X^*$.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна. Докажем обратную импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Ввиду равноправия множеств A и B достаточно доказать включение $A \subset B$. Пусть данное включение не выполнено. Тогда существует точка $x_0 \in A \setminus B$. Так как B замкнуто, точку x_0 можно окружить открытой окрестностью U, не пересекающейся с B. По теореме Хана – Банаха в геометрической форме, применённой к множествам U и B, существуют непрерывный вещественный линейный функционал f на X и константа $a \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x) \le a$ для $x \in B$ и $f(x_0) > a$. Тогда $\sup\limits_{x\in A} f(x) \ge f(x_0) > a \ge \sup\limits_{x\in B} f(x)$, что противоречит условию (ii). □

Теорема 3 (теорема Крейна – Мильмана в полной формулировке). Любой выпуклый компакт K в отделимом локально выпуклом пространстве совпадает с замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек.

Доказательство. Введём обозначение $\widetilde{K} = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$ и рассмотрим произвольный вещественный непрерывный линейный функционал f на X. $\widetilde{K} \subset K$, поэтому $\sup\limits_{x\in K} f(x) \ge \sup\limits_{x\in \widetilde{K}} f(x)$. Согласно же теореме 2, $\sup\limits_{x\in K} f(x) \le \sup\limits_{x\in \operatorname{ext} K} f(x) \le \sup\limits_{x\in \widetilde{K}} f(x)$. Остаётся воспользоваться леммой 6. □

Таким образом, можно сделать вывод, что у выпуклого компакта не просто есть крайние точки, а этих точек «много». Например, если компакт K бесконечномерен, то $\operatorname{ext} K$ – бесконечное множество. Приведём некоторые следствия.

Следствие 1. Любое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество рефлексивного пространства и, в частности, замкнутый единичный шар имеет крайние точки. Если пространство бесконечномерно, замкнутый единичный шар имеет бесконечное число крайних точек.

Доказательство. Достаточно вспомнить, что выпуклое замкнутое ограниченное подмножество рефлексивного пространства – это слабый компакт. □

Отсюда следует ещё одно доказательство нерефлексивности пространств c_0, $L_1[0,1]$ и $C[0,1]$: как мы уже отмечали, в первых двух случаях единичный шар вообще не имеет крайних точек, единичный же шар пространства $C[0,1]$ имеет только две крайние точки.

Рассмотрев вместо слабой слабую со звёздочкой топологию, получаем ещё одно следствие.

Следствие 2. Пусть X – банахово пространство. Тогда любое выпуклое слабо со звёздочкой замкнутое ограниченное подмножество пространства X^* и, в частности, замкнутый единичный шар имеет крайние точки. Если пространство бесконечномерно, замкнутый единичный шар пространства X^* имеет бесконечное число крайних точек. □

По этой причине пространства c_0, $L_1[0,1]$ и $C[0,1]$ не просто нерефлексивны, а даже не сопряжены ни к какому банахову пространству (то есть не изометричны ни одному пространству вида X^*).

Упражнения

1. Пусть $A \subset \operatorname{conv} B$, тогда $\operatorname{ext} A \subset B$.

2. Пусть $A \subset B$ и $x \in (\operatorname{ext} B) \cap A$. Тогда $x \in \operatorname{ext} A$.

3. Пусть K – выпуклый компакт в строго выпуклом банаховом пространстве. Тогда каждая наиболее удалённая от нуля точка компакта K будет крайней для K точкой.

4. Пусть X, Y – банаховы пространства, $T \in L(X,Y)$ и K – выпуклый компакт в X. Тогда если $\|Tx\| \le C$ для всех $x \in \operatorname{ext} K$, то $\|Tx\| \le C$ для всех $x \in K$.

Из предыдущего упражнения и описания крайних точек n-мерного куба выведите следующий результат:

5. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – элементы банахова пространства X и для любых $a_k = \pm 1$ выполнена оценка $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \le C$. Тогда такая же оценка будет иметь место и для любых $a_k \in [-1,1]$.

6. **Теорема Линденштраусса – Фелпса.** В бесконечномерном рефлексивном банаховом пространстве множество крайних точек замкнутого единичного шара несчётно.

Замкнутый единичный пространства c_0, рассматриваемый как подмножество пространства $l_\infty = l_1^*$, – это пример замкнутого выпуклого ограниченного множества в сопряжённом пространстве, не имеющего крайних точек. Таким образом, в следствии 2 условие слабой со звёздочкой замкнутости нельзя заменить обычной замкнутостью. Тем больший интерес представляет следующий результат:

7. Пусть X – банахово пространство, сопряжённое к которому сепарабельно. Тогда любое выпуклое слабо со звёздочкой замкнутое ограниченное подмножество пространства X^* имеет крайние точки.

8. Ни одно из пространств c_0, $L_1[0,1]$ и $C[0,1]$ не может быть изоморфно вложено в сепарабельное сопряжённое пространство. В частности, ни одно из этих пространств не изоморфно сопряжённому пространству.

9. Множество крайних точек выпуклого метризуемого компакта в локально выпуклом пространстве – это множество класса G_δ.

10. Для любого банахова пространства X единичный оператор $I \in L(X)$ – это крайняя точка шара $\overline{B}_{L(X)}$.

11. Единичный элемент любой банаховой алгебры $\mathbf{A}$ – это крайняя точка шара $\overline{B}_{\mathbf{A}}$.

18.1.3. Слабый интеграл и теорема Крейна – Мильмана в интегральной форме

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, а X – локально выпуклое пространство. Функцию $f : \Omega \to X$ будем называть *слабо интегрируемой*, если для любого $x^* \in X^*$ композиция $x^* \circ f$ – это интегрируемая скалярная функция и существует такой элемент $x \in X$, что для всех $x^* \in X^*$ выполнено соотношение

$$\int_\Omega x^* \circ f \, d\mu = x^*(x). \tag{1}$$

Указанный элемент x называется *слабым интегралом функции* f и обозначается символом $\int_\Omega f \, d\mu$. При таком обозначении формула (1) переписывается в виде $x^*\left(\int_\Omega f \, d\mu\right) = \int_\Omega x^* \circ f \, d\mu$ и приобретает следующий смысл: непрерывный линейный функционал можно вносить под знак слабого интеграла.

Слабый интеграл сохраняет простейшие свойства обычного интеграла:

– $\int_\Omega a f_1 + b f_2 \, d\mu = a \int_\Omega f_1 \, d\mu + b \int_\Omega f_2 \, d\mu$ (линейность по функции);

– $\int_\Omega f \, d(a\mu_1 + b\mu_2) = a \int_\Omega f \, d\mu_1 + b \int_\Omega f \, d\mu_2$ (линейность по мере);

– $\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f d\mu = \int\limits_{\Omega_1} f\, d\mu + \int\limits_{\Omega_2} f\, d\mu$ для любых дизъюнктных $\Omega_1, \Omega_2 \in \Sigma$ (аддитивность по множеству),

причём, во всех трёх свойствах, если существуют интегралы в правой части, то существует интеграл и в левой части.

Отметим, что одно из важных свойств интеграла Лебега – интегрируемость на множестве влечёт интегрируемость на всех измеримых подмножествах – для слабого интеграла не выполнено (см. упражнение 1). Причина этого неприятного явления кроется в том, что в слабой топологии пространство не обязано быть полным. Посмотрим на примерах, как вычисляется слабый интеграл векторнозначной функции.

Пример 1. Пусть X – пространство последовательностей l_p или c_0, $e_n^* \in X^*$ – координатные функционалы. Пусть $f : \Omega \to X$ – слабо интегрируемая функция. Для каждого $t \in \Omega$ через $f_n(t)$ обозначим n-ю координату вектора $f(t)$: $f(t) = \left(f_1(t),\ f_2(t), \ldots\right)$. Тогда, по определению слабого интеграла,

$$e_n^*\left(\int\limits_\Omega f\, d\mu\right) = \int\limits_\Omega e_n^* \circ f\, d\mu = \int\limits_\Omega f_n\, d\mu,$$

то есть $\int\limits_\Omega f\, d\mu$ – это вектор с координатами $\left(\int\limits_\Omega f_n\, d\mu\right)_{n=1}^{\infty}$.

Пример 2. Пусть $F : \Omega \to C[0,1]$ – слабо интегрируемая функция. Для каждого $t \in [0,1]$ и каждого $\tau \in \Omega$ введём обозначение $f(t,\tau) = \left(F(\tau)\right)(t)$. Используя вместо координатных функционалов функционалы «значение в точке», получаем следующее правило для вычисления функции $\int\limits_\Omega F\, d\mu \in C[0,1]$: $\left(\int\limits_\Omega F\, d\mu\right)(t) = \int\limits_\Omega f(t,\tau)\, d\mu(\tau)$.

Так же, как и в скалярном случае, функцию $f : \Omega \to X$ будем называть измеримой, если $f^{-1}(A) \in \Sigma$ для любого борелевского подмножества A пространства X. Отметим одно полезное достаточное условие слабой интегрируемости.

Теорема 1. Пусть (Ω, Σ, μ) – вероятностное пространство, K – выпуклый компакт в отделимом локально выпуклом пространстве X и $f : \Omega \to K$ – измеримая функция. Тогда функция f слабо интегрируема и $\int\limits_\Omega f\, d\mu \in K$.

Доказательство. Рассмотрим дуальную пару $\left(\left(X^*\right)', X^*\right)$. Ввиду включения $K \subset X \subset \left(X^*\right)'$ компакт K можно рассматривать как подмножество пространства $\left(X^*\right)'$. При этом K будет компактом и в более слабой топологии $\sigma\left(\left(X^*\right)', X^*\right)$, следовательно, K – это выпуклое $\sigma\left(\left(X^*\right)', X^*\right)$-замкнутое множество в $\left(X^*\right)'$.

Заметим, что любой функционал $x^* \in X^*$ ограничен на K. Поэтому композиция $x^* \circ f$ – это ограниченная измеримая функция на Ω, и, следовательно, $x^* \circ f$ – интегрируемая скалярная функция. Зададим линейный функционал $F : X^* \to \mathbb{C}$ формулой $F\left(x^*\right) = \int\limits_{\Omega} x^* \circ f \, d\mu$. Докажем, что $F \in K$. Если это не так, то существует $x^* \in X^*$, для которого $\mathrm{Re}\, x^*(s) \le 1$ для $s \in K$ и $\mathrm{Re}\, x^*(F) > 1$. Тогда $\mathrm{Re}\, x^* \circ f \le 1$ всюду на Ω и, соответственно, $\mathrm{Re}\, x^*(F) = \mathrm{Re}\, F\left(x^*\right) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{Re}\, x^* \circ f \, d\mu \le 1$. Полученное противоречие означает, что $F \in K$. По построению, $x^*(F) = \int\limits_{\Omega} x^* \circ f \, d\mu$ при всех $x^* \in X^*$, то есть F – это слабый интеграл функции f. □

Теорема 2 (теорема Крейна – Мильмана в интегральной форме). Пусть K – выпуклый компакт в отделимом локально выпуклом пространстве X и $x \in K$. Тогда существует такая регулярная вероятностная борелевская мера μ на $\overline{\mathrm{ext}\, K}$ – замыкании множества крайних точек компакта K, что $\int\limits_{\overline{\mathrm{ext}\, K}} I \, d\mu = x$, где через I обозначено, как обычно, тождественное отображение, а интеграл понимается в слабом смысле.

Доказательство. Учитывая теорему об общем виде линейного функционала в пространстве непрерывных функций, множество $\mathrm{M}\left(\overline{\mathrm{ext}\, K}\right)$ всех регулярных вероятностных борелевских мер на компакте $\overline{\mathrm{ext}\, K}$ можно рассматривать как подмножество пространства $C\left(\overline{\mathrm{ext}\, K}\right)^*$. При этом $\mathrm{M}\left(\overline{\mathrm{ext}\, K}\right)$ – это пересечение замкнутого единичного шара пространства $C\left(\overline{\mathrm{ext}\, K}\right)^*$ (то есть выпуклого слабого со звёздочкой компакта) с выпуклым слабо со звёздочкой замкнутым множеством $\{F \in C\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)^* : F(\mathbf{1}) = 1\}$. Следовательно, $\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$ – выпуклый слабый со звёздочкой компакт в $C\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)^*$.

По предыдущей теореме, для каждой меры $\mu \in \mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$ существует слабый интеграл $\int\limits_{\overline{\operatorname{ext} K}} I\, d\mu$. Рассмотрим оператор $T : X^* \to C\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$, ставящий каждому функционалу $x^* \in X^*$ ограничение этого функционала на $\overline{\operatorname{ext} K}$. Вычислим действие сопряжённого оператора $T^* : C\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)^* \to X^{**}$ на элементы множества $\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$. Для любой меры $\mu \in \mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$ и любого $x^* \in X^*$ имеем

$$\left\langle T^*\mu, x^*\right\rangle = \left\langle \mu, Tx^*\right\rangle = \int\limits_{\overline{\operatorname{ext} K}} x^*\, d\mu = x^*\left(\int\limits_{\overline{\operatorname{ext} K}} I\, d\mu\right), \text{ то есть } T^*\mu = \int\limits_{\overline{\operatorname{ext} K}} I\, d\mu .$$

Таким образом, наша задача сводится к доказательству равенства $T^*\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right) = K$.

Включение в одну сторону $T^*\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right) \subset K$ доказано в предыдущей теореме. Докажем обратное включение $T^*\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right) \supset K$. Обозначим через δ_x вероятностную меру, сосредоточенную в точке x. Тогда для любого $x \in \operatorname{ext} K$ имеем $T^*\delta_x = \int\limits_{\overline{\operatorname{ext} K}} I\, d\delta_x = x$, то есть $T^*\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right) \supset \operatorname{ext} K$. Далее, $T^*\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$ – выпуклое замкнутое множество как образ под действием слабо со звёздочкой непрерывного оператора T^* выпуклого слабого со звёздочкой компакта $\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right)$. Следовательно, $T^*\mathrm{M}\left(\overline{\operatorname{ext} K}\right) \supset \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$, а, по теореме 3 п. 18.1.2, $\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K = K$. □

Отметим, что в метризуемом случае меру μ, представляющую элемент x, можно выбрать сосредоточенной на самом множестве крайних точек, а не на его замыкании. Тогда интегральное представление элемента переписывается в виде $x = \int\limits_{\operatorname{ext} K} I\, d\mu$. Доказательство этой теоремы Шоке (G. Choquet) и различные её обобщения можно найти в монографии Фелпса [Phe].

Другое, весьма плодотворное направление исследований связано с рассмотрением более узкого чем $\operatorname{ext} K$ множества – множества сильно выставленных точек. В этих терминах удаётся охарактеризовать пространства, в которых выполнена теорема Радона – Никодима. Результаты на эту тему, равно как и многие другие интересные разделы геометрии банаховых пространств, читатель найдёт в монографиях [Die] и [B-L].

Упражнения

1. На отрезке $[0,1]$ выделим последовательность Δ_n, $n \in \mathbb{N}$ попарно не пересекающихся подотрезков. Через e_n, $n \in \mathbb{N}$ обозначим канонический базис пространства c_0. Определим функцию $f:[0,1] \to c_0$ следующим образом: если точка t не попала ни в один из Δ_n, положим $f(t)=0$; если точка t попала на отрезок вида Δ_{2n-1} (то есть с нечётным номером), положим $f(t)=\frac{1}{|\Delta_{2n-1}|}e_n$; если же, наконец, точка t попала на отрезок вида Δ_{2n}, положим $f(t)=-\frac{1}{|\Delta_{2n}|}e_n$. Проверьте, что функция f будет слабо интегрируемой на $[0,1]$ по мере Лебега и $\int\limits_{[0,1]} f\,d\lambda = 0$. В то же время на подмножестве $\Delta=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_{2n-1}$ функция f не будет слабо интегрируемой: в противном случае имело бы место равенство $\int\limits_{\Delta} f\,d\lambda=(1,1,1,\dots)$, а такого элемента в c_0 нет.

2. Докажите следующую теорему Каратеодори: если $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, то любой элемент $x \in K$ имеет представление вида $x=\sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j x_j$, где $x_j \in \operatorname{ext} K$, $a_j \ge 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 1$.

3. Опираясь на сформулированную выше теорему Шоке, докажите, что если выпуклый метризуемый компакт K имеет счётное число крайних точек, то любой элемент $x \in K$ разлагается в ряд вида $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, где $x_n \in \operatorname{ext} K$, $a_n \ge 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

4. Если отказаться от требования счётности множества крайних точек, то утверждение предыдущего упражнения может уже не выполняться. Приведите соответствующий пример.

18.2. Некоторые приложения

18.2.1. Связь между свойствами компакта K и пространством C(K)

Пространство $C(K)$ удобнее для изучения, чем компакт K, поскольку элементами пространства функций можно манипулировать свободнее, чем элементами топологического пространства. Действительно, в отличие от элементов компакта K функции можно складывать, умножать на число; топология на $C(K)$ задаётся нормой, и можно говорить о последовательностях Коши, полноте, сходимости рядов и т. д. Однако все эти преимущества обесценивались бы, если бы при переходе от K к $C(K)$ терялась бы часть информации об исходном компакте. Ниже будет показано, что такой потери не происходит и все свойства компакта K можно восстановить по свойствам пространства $C(K)$.

Будем, как обычно, непрерывные функционалы на $C(K)$ отождествлять с регулярными борелевскими зарядами, их порождающими. В частности, δ_x (вероятностная мера, сосредоточенная в точке x), рассматриваемая как функционал на $C(K)$, действует следующим образом: $\langle \delta_x, f \rangle = \int\limits_K f d\delta_x = f(x)$. То есть δ_x отождествляется с функционалом «значение в точке x».

И ещё немного терминологии. *Носителем* регулярного борелевского заряда σ называется носитель меры $|\sigma|$ (см. параграф 8.1.2). Как и для мер, носитель заряда σ обозначается символом $\operatorname{supp}\sigma$. Очевидно, $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$, и если $\operatorname{supp}\sigma = \{x\}$, то $\sigma = \lambda\delta_x$, где λ – ненулевой скаляр.

Для любой измеримой по Борелю ограниченной функции g на K и любого борелевского заряда σ через $g \times \sigma$ обозначим борелевский заряд, принимающий следующие значения: $(g \times \sigma)(A) = \int\limits_A g d\sigma$. Функционал, порождаемый зарядом $g \times \sigma$, действует по правилу $\langle g \times \sigma, f \rangle = \int\limits_K fg d\sigma$. Введённая операция обладает естественными свойствами умножения: $\mathbf{1} \times \sigma = \sigma$; $(g+h)\times\sigma = g\times\sigma + h\times\sigma$; $(gh)\times\sigma = (hg)\times\sigma = h\times(g\times\sigma)$; $g\times(\nu+\sigma) = g\times\nu + g\times\sigma$. Наконец, норма заряда $g\times\sigma$ вычисляется по правилу $\|g\times\sigma\| = \int\limits_K |g| d|\sigma|$.

Теорема 1. Множество крайних точек единичного шара пространства $C(K)^*$ совпадает с множеством зарядов вида $\lambda\delta_x$, где $x \in K$ и $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Докажем вначале, что заряды вида δ_x – крайние точки множества $\overline{B}_{C(K)^*}$. Ввиду уравновешенности шара отсюда будет следовать, что при $|\lambda| = 1$ и $\lambda\delta_x \in \operatorname{ext}\overline{B}_{C(K)^*}$. Пусть $\nu_1, \nu_2 \in \overline{B}_{C(K)^*}$, $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \delta_x$. Тогда $\frac{\nu_1(\{x\}) + \nu_2(\{x\})}{2} = \delta_x(\{x\}) = 1$. Учитывая, что оба числа $\nu_1(\{x\}), \nu_2(\{x\})$ не превосходят 1 по модулю, это означает, что $\nu_1(\{x\}) = \nu_2(\{x\}) = 1$. Это, в свою очередь, означает, что за пределами точки x заряды ν_1, ν_2 обращаются в ноль, так как иначе их нормы были бы строго больше единицы. То есть $\nu_1 = \nu_2 = \delta_x$.

Теперь докажем, что если заряд $\sigma \in \overline{B}_{C(K)^*}$ не сосредоточен в какой-то одной точке компакта K, то он не может быть крайней точкой единичного шара. Действительно, пусть $\operatorname{supp}\sigma$ содержит две различные точки $x \neq y$. Окружим эти точки непересекающимися окрестностями U и V. По определению носителя, $|\sigma|(U)$ и $|\sigma|(V)$ – ненулевые числа. Введём обозначение $\varepsilon = \min\{|\sigma|(U), |\sigma|(V)\}$. Рассмотрим функцию $g = \frac{\varepsilon}{|\sigma|(U)}\mathbf{1}_U - \frac{\varepsilon}{|\sigma|(V)}\mathbf{1}_V$ и заряды $\sigma_1 = (1-g)\times\sigma$, $\sigma_2 = (1+g)\times\sigma$. Так как $|g| \leq 1$, то $|1 \pm g| = 1 \pm g$. Далее, по построению, $\int\limits_K g\,d|\sigma| = 0$. Следовательно, $\int\limits_K |1 \pm g|\,d|\sigma| = \int\limits_K d|\sigma| \pm \int\limits_K g\,d|\sigma| = \int\limits_K d|\sigma| = \|\sigma\| \leq 1$. То есть $\sigma_1, \sigma_2 \in \overline{B}_{C(K)^*}$. В то же время $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma$ и $\|\sigma_1 - \sigma_2\| = 2\int\limits_K |g|\,d|\sigma| = 4\varepsilon \neq 0$, следовательно, заряд σ не может быть крайней точкой единичного шара. □

Пусть дано некоторое банахово пространство X, о котором сказано, что $X = C(K)$ для некоторого компакта K. Однако что это за компакт, нам не сказано. Можно ли восстановить K по пространству X? Предыдущая теорема подсказывает, что такого восстановления следует рассмотреть крайние точки шара $\overline{B}_{X^*}$.

Введём некоторые определения и обозначения. Множество $\operatorname{ext}\overline{B}_{X^*}$ будем рассматривать как подпространство топологического пространства $(X^*, \sigma(X^*, X))$, то есть наделим $\operatorname{ext}\overline{B}_{X^*}$ слабой со звёздочкой топологией. Введём на $\operatorname{ext}\overline{B}_{X^*}$ следующее отношение эквивалентности: $x^* \sim y^*$. если $x^* = \lambda y^*$, где λ – единичный по модулю скаляр. Классом эквивалентности элемента $x^* \in \operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$ в вещественном случае будет пара точек $\pm x^*$, а в комплексном – окружность, проходящая через x^*: $[x^*] = \{\lambda x^* : |\lambda| = 1\}$. Множество классов эквивалентности, на которые разбивается $\operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$, обозначим $\widetilde{K}(X)$, а через q обозначим факторотображение $q : \operatorname{ext} \overline{B}_{C(K)^*} \to \widetilde{K}(X)$. Наделим $\widetilde{K}(X)$ сильнейшей топологией, в которой отображение q слабо со звёздочкой непрерывно. То есть открытыми в $\widetilde{K}(X)$ будем называть те множества $A \subset \widetilde{K}(X)$, что $q^{-1}(A)$ слабо со звёздочкой открыто в $\operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$. Отметим, что $\widetilde{K}(X)$ – хаусдорфово топологическое пространство. Действительно, если $x^*, y^* \in \operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$ и $[x^*] \neq [y^*]$, то функционалы x^*, y^* линейно независимы. Поэтому между ядрами этих функционалов нет включения ни в одну, ни в другую сторону. Следовательно, существует $x \in \operatorname{Ker} y^* \setminus \operatorname{Ker} x^*$. Домножением элемента x на коэффициент можно добиться, что $x^*(x) = 1$. Тогда точки $[x^*], [y^*] \in \widetilde{K}(X)$ могут быть разделены следующими окрестностями: $U = \{[s^*] \in \widetilde{K} : |s^*(x)| > 1/2\}$ и $V = \{[s^*] \in \widetilde{K} : |s^*(x)| < 1/2\}$.

Теорема 2. Пусть $X = C(K)$ для некоторого компакта K. Тогда компакт K гомеоморфен построенному выше топологическому пространству $\widetilde{K}(X)$.

Доказательство. Зададим отображение $\delta : K \to \operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$ формулой $\delta(t) = \delta_t$. Для любой функции $f \in C(K)$ имеем $\langle \delta(t), f \rangle = f(t)$, что непрерывно зависит от t. Так как $\operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$ наделено слабой со звёздочкой топологией, это означает, что отображение δ непрерывно. Тогда непрерывным, как композиция непрерывных отображений, будет и следующее отображение $j : K \to \widetilde{K}(X)$: $j = q \circ \delta$. Поскольку $j(t) = [\delta_t]$, теорема 1 гарантирует биективность отображения j. Биективное непрерывное отображение компакта в хаусдорфово пространство – это гомеоморфизм. □

Следствие. Пусть для компактов K_1, K_2 пространства $C(K_1)$, $C(K_2)$ изометричны. Тогда компакты K_1, K_2 гомеоморфны. □

Теорема 3. Пространство $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если компакт K метризуем.

Доказательство. Предположим, что $C(K)$ сепарабельно. Тогда (следствие 4 п. 17.2.4) слабая со звёздочкой топология метризуема на шаре $\overline{B}_{C(K)^*}$. Компакт K гомеоморфен подмножеству $\{\delta_t : t \in K\}$ шара $\overline{B}_{C(K)^*}$, наделённого слабой со звёздочкой топологией (гомеоморфизмом будет отображение $t \to \delta_t$). Следовательно, K метризуем.

Обратно, пусть K – метрический компакт. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует покрытие компакта K шарами $U_{n,1}, U_{n,2}, \ldots, U_{n,m(n)}$ радиуса $1/n$. Обозначим через $\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}, \ldots, \varphi_{n,m(n)}$ разбиение единицы, подчинённое покрытию $U_{n,1}, U_{n,2}, \ldots, U_{n,m(n)}$ (см. п. 15.1.3). Докажем полноту в $C(K)$ системы элементов $\{\varphi_{n,j}\}_{n=1,j=1}^{\infty \quad m(n)}$. Существование полной счетной системы элементов даст требуемую сепарабельность пространства $C(K)$.

Итак, пусть $f \in C(K)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что для любых $t_1, t_2 \in K$, если $\rho(t_1, t_2) < \dfrac{1}{n}$, то $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$. В каждом из $U_{n,j}$ выберем по точке $t_{n,j}$ и рассмотрим линейную комбинацию f_ε функций $\varphi_{n,j}$: $f_\varepsilon = f(t_{n,1})\varphi_{n,1} + f(t_{n,2})\varphi_{n,2} + \cdots + f(t_{n,m(n)})\varphi_{n,m(n)}$. Проверим, что $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Действительно, для любого $t \in K$ имеем $f(t) = \sum_{j=1}^{m(n)} f(t)\varphi_{n,j}(t)$. Соответственно,

$$|f(t) - f_\varepsilon(t)| \le \sum_{j=1}^{m(n)} |f(t) - f(t_{n,j})| \varphi_{n,j}(t).$$

В последней сумме если $\varphi_{n,j}(t) \ne 0$, то $t \in U_{n,j}$, и, следовательно, $|f(t) - f(t_{n,j})| < \varepsilon$. Продолжим оценку: $|f(t) - f_\varepsilon(t)| < \sum_{j=1}^{m(n)} \varepsilon\varphi_{n,j}(t) = \varepsilon$. □

Замечание. Забегая вперёд, скажем, что сепарабельность пространства $C(K)$ в последней части доказательства теоремы 3 легко следует из теоремы Стоуна – Вейерштрасса. Однако предложенная явная процедура аппроксимации функции с помощью разложения единицы поучительна, на наш взгляд, и сама по себе.

Упражнения

1. Проверить, что для любой измеримой по Борелю ограниченной функции g на K и любого регулярного борелевского заряда σ, заряд $g \times \sigma$ будет регулярным (указание: вначале рассмотреть случай $g = \mathbf{1}_A$,

затем – случай конечнозначной функции, а потом воспользоваться аппроксимацией ограниченной функции конечнозначными).

2. Проверить все перечисленные в начале параграфа свойства операции $g \times \sigma$ умножения ограниченной борелевской функции на регулярный борелевский заряд.

3. Если пространства $C(K_1), C(K_2)$ изоморфны, это ещё не означает, что компакты K_1, K_2 гомеоморфны. Пример: $K_1 = [0,1]$, $K_2 = [0,1] \cup \{2\}$.

18.2.2. Теорема Стоуна – Вейерштрасса

В этом параграфе мы познакомимся с необычайно красивым и одновременно весьма полезным обобщением теоремы Вейерштрасса о приближении функции многочленами. Это обобщение, придуманное Стоуном (M. H. Stone), применимо к функциям не только на отрезке, но и на любом компакте. Доказательство, приводимое ниже, принадлежит де Бранжу (L. de Branges, 1959). Применение этой же идеи доказательства к ещё более общему результату – теореме Бишопа (E. Bishop) можно найти в книге [Rud].

Теорема. Пусть линейное подпространство X пространства $C(K)$ обладает следующими свойствами:

(a) $\mathbf{1} \in X$;

(b) если $f, g \in X$, то $fg \in X$ (другими словами, X – подалгебра алгебры $C(K)$);

(c) для любой функции $f \in X$ её комплексно сопряжённая $\overline{f}$ также принадлежит X;

(d) для любых $t_1, t_2 \in K$, $t_1 \neq t_2$ существует $f \in X$ с $f(t_1) \neq f(t_2)$ (то есть X разделяет точки компакта K).

Тогда подпространство X плотно в $C(K)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение не выполнено и подпространство X не плотно в $C(K)$. Тогда аннулятор $X^{\perp} \subset C(K)^*$ состоит не только из нуля. Напомним, что $X^{\perp}$ – это слабо со звёздочкой замкнутое подпространство в $C(K)^*$, следовательно, по теореме Алаоглу, $\overline{B}_{X^{\perp}} = \overline{B}_{C(K)^*} \cap X^{\perp}$ – это слабый со звёздочкой компакт. Согласно теореме Крейна – Мильмана, у шара $\overline{B}_{X^{\perp}}$ существует крайняя точка ν. Очевидно, $\nu \in S_{X^{\perp}}$, то есть $\|\nu\| = 1$. Мы изучим свойства этого регулярного борелевского заряда ν и убедимся, что они внутренне противоречивы.

Вначале несколько полезных замечаний о свойствах множеств X и $X^{\perp}$:

(i) если $f \in X$, то $\operatorname{Re} f \in X$ и $\operatorname{Im} f \in X$ (следует из условия (c) и формул $\operatorname{Re} f = \dfrac{f+\bar{f}}{2}$, $\operatorname{Im} f = \dfrac{f-\bar{f}}{2i}$).

(ii) Если $f \in X$, $\eta \in X^{\perp}$, то $f \times \eta \in X^{\perp}$, где $\times$ – операция, определённая в предыдущем параграфе. Действительно, для любого $g \in X$ произведение fg также принадлежит X и, следовательно, аннулируется зарядом η. Имеем: $\langle f \times \eta, g \rangle = \langle \eta, fg \rangle = 0$, то есть $f \times \eta \in X^{\perp}$.

(iii) Если $\eta \in X^{\perp}$, то $\operatorname{supp}\eta$ содержит по крайней мере[2] две различные точки. Действительно, если $\operatorname{supp}\eta = \{t\}$, то $\eta = a\delta_t$ с $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $\langle \eta, \mathbf{1} \rangle = a \neq 0$, то есть $\eta \notin X^{\perp}$.

Теперь вернёмся к заряду $\nu \in S_{X^{\perp}}$, претендующему на роль крайней точки шара $\overline{B}_{X^{\perp}}$. Воспользуемся свойством (iii). Пусть $t_1, t_2 \in \operatorname{supp}\nu$ и $t_1 \neq t_2$. Согласно условию (d), существует $f \in X$ с $f(t_1) \neq f(t_2)$. Тогда или $\operatorname{Re} f(t_1) \neq \operatorname{Re} f(t_2)$, или $\operatorname{Im} f(t_1) \neq \operatorname{Im} f(t_2)$. Согласно (i), $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in X$. Соответственно, f можно считать вещественнозначной функцией: иначе заменим её на $\operatorname{Re} f$ или $\operatorname{Im} f$. Далее, прибавив к f большую положительную константу, можно добиться положительности функции, а умножив на маленький положительный коэффициент, получим функцию, все значения которой лежат на отрезке (0,1). Итак, существует $f \in X$ с $f(t_1) \neq f(t_2)$, подчиняющаяся условию $0 < f(t) < 1$ для всех $t \in K$.

Введём в рассмотрение вспомогательные заряды $\nu_1 = f \times \nu$ и $\nu_2 = (1-f) \times \nu$. Тогда $\|\nu_1\| = \int\limits_K f d|\nu|$, $\|\nu_2\| = \int\limits_K (1-f) d|\nu|$, и оба эти числа не равны нулю, так как, по построению, функции f и $1-f$ не обращаются в ноль. Далее, $\|\nu_1\| + \|\nu_2\| = \int\limits_K d|\nu| = 1$. Выпишем очевидное равенство $\|\nu_1\| \dfrac{\nu_1}{\|\nu_1\|} + \|\nu_2\| \dfrac{\nu_2}{\|\nu_2\|} = \nu$. Геометрический смысл этого равенства таков: вектор $\nu \in \overline{B}_{X^{\perp}}$ есть внутренняя точка отрезка, соединяющего векторы $\dfrac{\nu_1}{\|\nu_1\|} \in \overline{B}_{X^{\perp}}$

[2] Выражение «по крайней мере» тут никак не связано с крайними точками множества мер, которые также естественно было бы называть «крайними мерами».

и $\dfrac{\nu_2}{\|\nu_2\|} \in \overline{B}_{X^\perp}$ (принадлежность зарядов ν_1, ν_2 подпространству $X^\perp$ вытекает из (ii)). Так как по нашему предположению ν − крайняя точка шара $\overline{B}_{X^\perp}$, концы отрезка должны совпадать с ν: $\dfrac{\nu_1}{\|\nu_1\|} = \dfrac{\nu_2}{\|\nu_2\|} = \nu$. В частности, $\nu_1 = \|\nu_1\| \nu$, то есть $\left(f - \|\nu_1\|\right) \times \nu = 0$. Вспомнив формулу для нормы заряда, имеем $\int\limits_K \left| f - \|\nu_1\| \right| d|\nu| = 0$. Ввиду непрерывности функции f последнее равенство означает, что $f(t) = \|\nu_1\|$ для всех $t \in \operatorname{supp} \nu$ (теорема 2 п. 8.1.2). Мы пришли к противоречию с условием $f(t_1) \neq f(t_2)$. □

Упражнения

Выведите из теоремы Стоуна – Вейерштрасса:

1. Плотность множества многочленов в $C(K)$, где K − компакт в $\mathbb{R}$ (в частности, для $C[a,b]$). Напомним, что этот факт нами использовался в п. 13.1.3 при построении функций от самосопряжённого оператора.

2. Плотность множества многочленов от n переменных в $C(K)$, где K − компакт в $\mathbb{R}^n$.

3. Плотность множества «двусторонних» многочленов вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} a_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (этот факт использовался нами при построении функций от унитарного оператора).

Рассмотрим полуось $[0,+\infty]$ − компактификацию полуоси $[0,+\infty)$. Окрестности конечных точек полуоси определяются как обычно, а окрестностями точки $+\infty$ служат дополнения к ограниченным множествам. Проверьте, что:

4. $[0,+\infty]$ − компакт в этой топологии.

5. Пространство $C[0,+\infty]$ совпадает с пространством всех непрерывных функций $f(t)$ на $[0,+\infty)$, имеющих предел при $t \to \infty$.

6. Множество экспонент вида e^{-at}, где $a \in [0,+\infty)$ − это полная в $C[0,+\infty]$ система элементов.

18.2.3. Вполне монотонные функции

Бесконечно дифференцируемая вещественная функция f на $[0,+\infty)$ называется *вполне монотонной*, если $(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$ при всех $n = 0,1,2,\ldots$ и всех $t \in [0,+\infty)$. В частности, чтобы быть вполне монотонной, функция должна быть неотрицательной ($f(t) \geq 0$), невозрастающей ($(-1) f'(t) \geq 0$) и выпуклой вниз ($f''(t) \geq 0$). Типичный пример вполне монотонной функции – $f(t) = e^{-t}$. Знаменитая теорема С. Н. Бернштейна[3] утверждает, что любую вполне монотонную функцию можно единственным образом представить в виде

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} d\mu(t), \tag{1}$$

где μ – конечная регулярная борелевская мера на полуоси. Другими словами, вполне монотонная функция в некотором смысле является комбинацией экспонент. Дифференцированием под знаком интеграла легко убедиться, что каждая функция вида (1) вполне монотонна, так что теорема Бернштейна даёт полное описание вполне монотонных функций.

Представление (1) вызывает естественные ассоциации с теоремой Крейна – Мильмана в интегральной форме. Первым доказательство теоремы Бернштейна, опирающееся на такую аналогию, предложил Шоке. Ниже приведен довольно подробный план этого доказательства, реализацию которого мы предлагаем читателю. Детальное изложение можно прочитать в брошюре [Phe], глава 2.

Теорема 1. Если для функции $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ существует представление вида (1), где μ – конечная регулярная борелевская мера, то это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим μ как функционал на $C[0,+\infty]$. Формула (1) означает, что нам даны значения этого функционала на экспонентах e^{-at}: $\left\langle \mu, e^{-at} \right\rangle = f(a)$. Согласно упражнению 6 п. 18.2.2, множество экспонент вида e^{-at}, где $a \in [0,+\infty)$, полно в $C[0,+\infty]$, следовательно, непрерывный функционал однозначно определяется значениями на этом множестве. □

[3] В Харькове работало много известных математиков. Сергей Натанович Бернштейн не просто какое-то время работал в Харькове, а провёл здесь существенную часть своей жизни и оказал неоценимое влияние на формирование Харьковской математической школы.

В пространстве $C^\infty(0,+\infty)$ бесконечно дифференцируемых функций на открытой полуоси со стандартной топологией, порождённой полунормами $p_n(f) = \max\limits_{1/n \le t \le n} \left| f^{(n-1)}(t) \right|$, $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим множество K всех вполне монотонных функций, ограниченных сверху единицей. Отметим, что функции $f \in K$ определены на открытой полуоси, но ввиду монотонности и ограниченности они имеют пределы в 0 и $+\infty$, так что их можно считать определёнными и в этих двух точках.

Теорема 2. K – это выпуклый компакт в $C^\infty(0,+\infty)$.

Доказательство. Выпуклость и замкнутость проверяются непосредственно. Так как $C^\infty(0,+\infty)$ – пространство класса Монтеля (п. 16.3.5), для компактности достаточно доказать ограниченность. Ограниченность вытекает из следующего факта, доказать который читателю предлагается индукцией по n: $\sup\limits_{a \le t < \infty} \left| f^{(n)}(t) \right| \le a^{-n} 2^{n(n+1)/2}$ для любого $a \in (0,+\infty)$ и любого $n = 0,1,2,\ldots$. □

Теорема 3. Пусть непрерывная функция $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет для любых $x, y \in (0,+\infty)$ функциональному уравнению

$$f(x+y) = f(x) f(y). \tag{2}$$

Тогда f – это показательная функция вида $f(x) = a^x$.

Доказательство. В качестве a возьмём $f(1)$. Подставляя в (2) $x = 1$, $y = 1$, получаем $f(2) = a^2$. Далее, при $x = 1$, подставляя $y = 2, 3, \ldots$, последовательно получим равенства $f(n) = a^n$. Подставив в (2) $x = y = n/2$, получим, что $f(n/2) = a^{n/2}$. Далее, последовательно подставляя $x = y = n2^{-k}$, докажем формулу $f(x) = a^x$ для всех двоично-рациональных чисел. На все остальные положительные вещественные x равенство $f(x) = a^x$ продолжается по непрерывности. □

Теорема 4. Множество крайних точек введённого выше компакта K состоит из функций вида e^{-at}, $a \in [0,+\infty)$, и нулевой функции.

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{ext} K$. Зафиксируем $y > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию $u(x) = f(x+y) - f(x) f(y)$. Предлагаем читателю доказать, что $f_1 = f + u$ и $f_2 = f - u$ принадлежат множеству K. Так как крайняя точка f представлена в виде $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$, заключаем, что $u = 0$. Этим доказано, что f подчиняется функциональному уравнению

(2), то есть f – показательная функция. Показательная функция, принадлежащая множеству K, – это или 0, или функция вида e^{-at}.

Докажем теперь, что все указанные в формулировке функции действительно принадлежат $\operatorname{ext} K$. Принадлежность $\operatorname{ext} K$ функций 0 и $\mathbf{1}$ вытекает из условия $0 \le f(t) \le 1$, наложенного нами на все $f \in K$. Далее, хотя бы одна из функций вида $e^{-a_0 t}$ с $0 < a_0 < \infty$ – крайняя точка. Иначе множество $\operatorname{ext} K$ состояло бы только из двух функций 0 и $\mathbf{1}$ и, ввиду теоремы Крейна – Мильмана, компакт $K = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$ состоял бы только констант. Далее, для любого $b \in (0,1)$ линейный оператор T, ставящий каждой функции $f(x)$ в соответствие функцию $f(bx)$, биективно переводит K в K. Следовательно, крайние точки оператор T переводит в крайние точки, и, в частности, функция $e^{-a_0 bt}$ – крайняя точка. Ввиду произвольности b этим доказано, что $e^{-at} \in \operatorname{ext} K$ при $0 < a < \infty$. □

Для завершения доказательства теоремы Бернштейна зададим следующее биективное отображение $F : [0,+\infty] \to \operatorname{ext} K$: $F(0) = \mathbf{1}$, $F(+\infty) = 0$ и $F(a) = e^{-at}$ при $0 < a < \infty$. Читатель легко проверит непрерывность данного отображения. Поэтому $\operatorname{ext} K$ – замкнутое множество, как образ компакта при непрерывном отображении. F – это непрерывное биективное отображение компакта в компакт, то есть гомеоморфизм.

Пусть f – вполне монотонная функция. Не нарушая общности, можно считать, что $f \in K$: этого легко добиться умножением на коэффициент. По теореме Крейна – Мильмана в интегральной форме, существует такая регулярная вероятностная борелевская мера ν на $\operatorname{ext} K$, что

$$f = \int_{\operatorname{ext} K} I \, d\nu. \tag{3}$$

Рассмотрим меру μ на $[0,+\infty]$ – прообраз меры ν при отображении F: $\mu(A) = \nu(F(A))$. Замена переменных в (3) даёт нам равенство $f = \int_{[0,+\infty]} F(t)\, d\mu(t)$. Так как $F(+\infty) = 0$, точку $+\infty$ можно удалить из области интегрирования: $f = \int_{[0,+\infty)} F(t)\, d\mu(t)$. Наконец, подействовав на обе части равенства функционалом δ_x «значение в точке» получаем требуемое интегральное представление (1):

$$f(x)=\langle\delta_x,f\rangle=\int\limits_{[0,+\infty)}\langle\delta_x,F(t)\rangle\,d\mu(t)=\int\limits_{[0,+\infty)}e^{-tx}\,d\mu(t).\ \square$$

18.2.4. Теорема Ляпунова о векторной мере

Начнём с «детской» задачи о разрезании пирога. Коля и Вася хотят честно разделить пирог. Проблема состоит в том, что разные части пирога представляют разную гастрономическую и эстетическую ценность: где-то марципан, в другом месте – цукат, шоколадная фигурка и т. д. Ещё большую проблему составляет индивидуальность детей: они могут оценивать достоинства одного и того же кусочка по-разному. Стандартный способ решения проблемы состоит в следующем: Коля делит пирог на две равные, с его точки зрения, части, а Вася выбирает себе ту из частей, которая ему больше понравится. При таком способе Коля уверен, что получил ровно половину пирога, а Вася – что не меньше половины. Этот способ вполне удовлетворителен, если только Вася не начнёт хвастаться, что ему досталась гораздо лучшая часть, а Коля не позавидует и не полезет в драку. Чтобы избежать подобных неприятностей и сохранить мир между друзьями, желательно разделить пирог на две части так, чтобы части были в точности равными как с точки зрения Васи, так и Коли. Возможно ли это? Для ответа на этот вопрос, задача нуждается во «взрослой» формулировке.[4]

Пусть Ω – множество (наш пирог), Σ – σ-алгебра подмножеств (части, на которые можно резать пирог), μ_1,μ_2 – конечные счётно-аддитивные меры (для любого $A\in\Sigma$ величина $\mu_1(A)$ – это «ценность» приписываемая Колей, а $\mu_2(A)$– Васей куску пирога A)[5]. Вопрос заключается в следующем: существует ли $A\in\Sigma$, для которого $\mu_1(A)=\frac{1}{2}\mu_1(\Omega)$, а $\mu_2(A)=\frac{1}{2}\mu_2(\Omega)$. На меры μ_1,μ_2 нужно наложить ещё условие безатомности: если какая-то часть пирога не разрезаема на меньшие куски и обоим детям очень нравится именно эта часть, то задача не разрешима.

Следующая теорема А. А. Ляпунова (1940 г.) показывает, что задача имеет решение, причём в случае не только двух, а любого конечного числа лиц, делящих пирог. Ценность теоремы, естественно, не исчерпывается возможностью справедливого дележа пирога, несмотря на всю важность и

[4] Замена Коли на Николая Петровича, а Васи на Василия Никифоровича в данном случае недостаточна, чтобы формулировка стала «взрослой».

[5] В принципе, μ_1,μ_2 могут быть и зарядами, если какие-то куски кому-то явно неприятны, то есть имеют отрицательную ценность.

прикладной характер этой задачи. Приводимое доказательство, использующее крайние точки, было предложено Линденштрауссом в 1966 году.

Теорема. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – счётно-аддитивные безатомные вещественные заряды на σ-алгебре Σ. Определим векторную меру $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ равенством $\mu(A) = \left(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)\right)$. Тогда множество $\mu(\Sigma)$ всех значений векторной меры μ – это выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Определим числовую меру $\nu = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$, по отношению к которой все μ_k абсолютно непрерывны. Воспользуемся теоремой Радона – Никодима и обозначим $\dfrac{d\mu_k}{d\nu}$ через g_k. Тогда $g_k \in L_1(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\mu_k(A) = \int\limits_A g_k d\nu$ для любого $A \in \Sigma$. Рассмотрим оператор $T : L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu) \to \mathbb{R}^n$, действующий по правилу $Tf = \left(\int\limits_\Omega f g_1 d\nu, \dots, \int\limits_\Omega f g_n d\nu \right)$. Интересующее нас множество $\mu(\Sigma)$ всех значений векторной меры μ совпадает с образом под действием оператора T множества функций вида $\mathbf{1}_A$, $A \in \Sigma$.

Пространство $L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ будем рассматривать как сопряжённое к $L_1(\Omega, \Sigma, \nu)$. Тогда каждое из выражений $\int\limits_\Omega f g_k d\nu$ – это слабо со звёздочкой непрерывный по f функционал на $L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$, и, следовательно, оператор T слабо со звёздочкой непрерывен. Рассмотрим в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ множество W функций f, подчиняющихся условию $0 \le f \le 1$ почти всюду по мере ν. Множество W совпадает с замкнутым шаром с центром в $f \equiv 1/2$ и радиуса $1/2$. По теореме Алаоглу, W – это слабый со звёздочкой компакт. Кроме того, множество W выпукло. Следовательно, $T(W)$ – это выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что $T(W) = \mu(\Sigma)$. Этим будет доказана и вся теорема.

Так как функции вида $\mathbf{1}_A$, $A \in \Sigma$ лежат в W, а значения меры μ – это векторы вида $T(\mathbf{1}_A)$, то $\mu(\Sigma) \subset T(W)$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in T(W)$ – произвольный элемент. $T^{-1}(x)$ – это слабо со звёздочкой замкнутое подмножество, следовательно, $T^{-1}(x) \bigcap W$ – слабый со звёздочкой компакт. Пусть $f \in \operatorname{ext}\left(T^{-1}(x) \bigcap W\right)$. Докажем, что f почти всюду принимает значения 0 или 1, то есть $f = \mathbf{1}_A$ для некоторого $A \in \Sigma$.

Тогда ввиду равенства $x = T(f) = T(\mathbf{1}_A)$ будет доказано требуемое включение $T(W) \subset \mu(\Sigma)$.

Рассмотрим множество $A = \{t \in \Omega : 0 < f(t) < 1\}$. Нам нужно доказать, что $\nu(A) = 0$. Пусть это не так. Введём обозначение $A_n = \left\{t \in \Omega : \frac{1}{n} < f(t) < 1 - \frac{1}{n}\right\}$. По нашему предположению, объединение этих множеств не пренебрежимо, следовательно, $\nu(A_n) \neq 0$ при каком-то $n \in \mathbb{N}$. Тогда подпространство $L_\infty(A_n) \subset L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ функций с носителями в A_n будет бесконечномерным (здесь единственный раз во всём рассуждении играет роль безатомность меры ν). Так как T – конечномерный оператор, он не может быть инъективным на бесконечномерном пространстве. Следовательно, существует ненулевой элемент $g \in S_{L_\infty(A_n)}$ с $Tg = 0$. Тогда оба элемента $f \pm \frac{1}{n} g$ лежат в $T^{-1}(x) \bigcap W$, чего не может быть, так как f – крайняя точка множества. □

Как видно из следующего примера, прямое распространение теоремы Ляпунова на меры со значениями в бесконечномерном пространстве невозможно.

Пример 1. На отрезке [0,1] зададим борелевскую меру μ со значениями в $L_2[0,1]$ формулой $\mu(A) = \mathbf{1}_A$. Эта мера безатомна и счётно-аддитивна. В то же время множество $\mu(\mathfrak{B})$ всех значений векторной меры μ не выпукло: $0, \mathbf{1} \in \mu(\mathfrak{B})$, а функция, тождественно равная $1/2$, множеству значений уже не принадлежит.

Используя существование для любого бесконечномерного банахова пространства X инъективного оператора $T : L_2[0,1] \to X$, легко доказать существование X-значной безатомной борелевской меры на [0,1] с невыпуклым множеством значений. Такая мера может быть задана формулой $\mu(A) = T(\mathbf{1}_A)$. Тем не менее, бесконечномерные аналоги теоремы Ляпунова существуют, только в ослабленном виде: утверждается в таких обобщениях выпуклость не самого множества значений $\mu(\Sigma)$, а его замыкания $\overline{\mu(\Sigma)}$.

Определение. Банахово пространство X обладает *свойством Ляпунова*, если для любого множества Ω, любой σ-алгебры Σ и любой безатомной счётно-аддитивной меры $\mu : \Sigma \to X$ множество $\overline{\mu(\Sigma)}$ выпукло.

Тот же пример 1 показывает, что гильбертово пространство не обладает свойством Ляпунова. В то же время (см. [K-S]) пространства c_0 и

l_p при $p \in [1,2) \cup (2,+\infty)$ свойством Ляпунова обладают. Так что с этим свойством возникает парадоксальная ситуация: гильбертово пространство, с точки зрения этого свойства, оказывается хуже, чем (довольно плохое для других задач и, в частности, нерефлексивное) пространство c_0.

При дополнительных ограничениях на меру круг пространств, на которые распространяется ослабленный аналог теоремы Ляпунова, расширяется. Например, если рассматривать только меры ограниченной вариации, то, согласно теореме Ула (см. последнюю главу книги [D-U], а также статью [K-P]), выпуклость множества $\overline{\mu(\Sigma)}$ будет иметь место для безатомных мер со значениями в любом пространстве со свойством Радона – Никодима (класс банаховых пространств, включающий в себя, в частности, все рефлексивные пространства).

18.3. Комментарии к упражнениям

Параграф 18.1.2

Упражнение 6. См. [L-P]. Как показано в [B-K], множество крайних точек замкнутого единичного шара рефлексивного пространства не просто несчётно, а не может обладать «свойством маленьких шаров» (об этом свойстве – в упражнениях п. 11.2.1).

Упражнение 9. См. [Phe] с. 15.

Упражнение 10. Данное решение нам сообщил Dirk Werner. Пусть для какого-то $T \in L(X)$ имеем $\|I \pm T\| \le 1$. Тогда $\|I^* \pm T^*\| \le 1$, и для любого $x^* \in \operatorname{ext} \overline{B}_{X^*}$ имеем $\|x^* \pm T^* x^*\| \le 1$. По определению крайней точки, это означает, что $T^* x^* = 0$. Мы доказали, что T^* переводит в 0 все крайние точки шара $\overline{B}_{X^*}$, следовательно, $T^* = 0$. Значит, и $T = 0$.

Упражнение 11. Воспользоваться упражнением 6 п. 11.1.1.

Параграф 18.2.1

Упражнение 3. Согласно теореме Милютина (см. монографию [Pel]), если K_1 и K_2 – несчётные метризуемые компакты, то $C(K_1)$ и $C(K_2)$ изоморфны.

Литература

Учебники и монографии

[Ban] Банах С. Курс функціонального анализу. – К.: Рад. школа, 1948. – 216 с.

[Bea] Beauzamy B. Introduction to operator theory and invariant subspaces. – Amsterdam: North-Holland, 1988.

[B-H] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1965. – 108 с.

[B-L] Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis. Vol. 1. – Colloquium Publications no. 48. Amer. Math. Soc., 2000. – 488 p.

[BUS] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.

[Bla] Бляшке В. Круг и шар. – М: Наука, 1967. – 232 с.

[Day] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. – М.: Изд-во иностр. литер., 1961. – 232 с.

[Die] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. – К.: Вища школа, 1980. – 216 с.

[D-S] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. – Т. 1. – М.: Изд-во иностр. литер., 1962; т. 2. – М.: Мир, 1966; т. 3. – М.: Мир, 1974.

[D-U] Diestel J., Uhl J. J. Vector Measures // Math. surveys of the A.M.S., 15, 1977. – 322 p.

[Edw] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. – М.:«Мир», 1985. – Т. 1. – 260 с.; т 2. – 399 с.

[Gru] Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. – М.: Наука, 1971. – 96 с.

[HAL] Халмош П. Теория меры. − М.: Издательство иностранной литературы, 1953. − 291 с.

[HAND] Johnson W. B., Lindenstrauss J. (Editors) Handbook of the geometry of Banach spaces, vol. 1. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2001.

[H-D] Хадвигер Г., Дебрунер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. – М.: Наука, 1965. – 172 с.

[H-R] Хьюит Э., Росс, К. Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1978. – Т. 1.

[K-A] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

[Kel] Келли Дж. Л. Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 384 с.

[K-F] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

[K-K] Kadets, M. I. , Kadets ,V. M. Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence. – Basel: Birkhäuser, 1997 (Operator Theory Advances and Applications, vol. 94) – 156 p.
[Kur] Куратовский К. Топология. – Т. 1 – М.: Мир, 1966; т. 2 – М.: Мир, 1969.
[Le] Levinson N. Gap and density theorems. – New York: Amer. Math. Soc. coll. Publications, 1940.
[Lev] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956. – 632 с.
[L-S] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
[L-T] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I and II. – Berlin: Springer–Verlag, 1996.
[M-S] Milman V. D., Schechtman G. Asymptotic Theory of Finite-Dimensional Normed Spaces // Lecture Notes in Math. – Vol. 1466. – Berlin: Springer–Verlag, 1986.
[Nat] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
[Pat] Paterson A. L. T. Amenability // Mathematical Surveys and Monographs No. 29. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1988.
[Pel] Пелчиньский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций. – М.: Мир, 1970.
[Phe] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1968. – 112 с.
[R-R] Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 258 с.
[R-Sa] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т. 1: Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
[R-Se] Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.
[Rud] Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.
[Sin1] Singer I. Bases in Banach Spaces. – Vol. 1. – Berlin: Springer-Verlag, 1970.
[Sin2] Singer I. Bases in Banach Spaces. – Vol. 2. – Berlin: Springer-Verlag, 1981.
[T-A] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1979.
[Tit] Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980.
[Wag] Wagon S. The Banach – Tarski paradox. – Cambrige Univ. Press, 1985.
[Wer] Werner D. Funktionalanalysis. 2. Auflage. – Berlin: Springer–Verlag, 1997.

Статьи

[AAB] Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., Burkinshaw O. The invariant subspace problem: some recent advances // Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste. – 1998. – № 29. – P. 3-79

[Beh] Behrends E. New proofs of Rosenthal's l^1 theorem and the Josefson - Nissenzweig theorem // Bull. Pol. Acad. Sc. – 1995. – 43, No. 4. – P. 283-295.

[B-K] Behrends E., Kadets V. Metric spaces with the small ball property // Studia Math. – 2001. – 148, No. 3. – P. 275 – 287.

[BLM] Banakh T., Lyantse W. E., Mykytyuk, Ya. V. ∞-Convex sets and their applications to the proof of certain classical theorems of functional analysis // Matematychni Studii. – 1999. – 11, No.1. – P. 83-84.

[CGK] Connor J., Ganichev M., Kadets, V. A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – 244, No.1. – P. 251-261.

[Eid] Eidelheit M. Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen // Studia Math. – 1936. – 6. – P. 139-148.

[Enf] Enflo P. A counterexample to the approximation property in Banach spaces // Acta Math. – 1973. – 130. – P. 309-317.

[Hau] Hausdorff F. Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen // Math. Ann. – 1914. – 75. – P. 428-433.

[Jos] Josefson B. Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence // Ark. Mat. – 1975. – 13. – P. 79-89.

[Kad1] Кадец В. М. К теореме о выделении ω-линейно-независимых подпоследовательностей // Теория функций, функ. анализ и их прилож. – 1993. – 58. – С. 78-80.

[Kad2] Kadets V. M. Some remarks concerning the Daugavet equation // Quaestiones Mathematicae. – 1996. – 19. – P. 225-235.

[Kad3] Kadets V. Coverings by convex bodies and inscribed balls // Proceedings of the Amer. Math. Soc. (to appear)

[Kad4] Kadets V. Weak cluster points of a sequence and coverings by cylinders // Математическая физика, анализ, геометрия (МАГ). – 2004. – 11, № 2. – С. 161-168.

[K-P] Kadets V. M., Popov M. M. On the Liapunov convexity theorem with applications to sign-embeddings // Ukrainian Math. J. – 1992. – 44, no. 9. – P. 1192-1200 .

[K-S] Kadets V. M., Schechtman, G. The Liapunov convexity theorem for l_p-valued measures // St. Petersburg Math. J. – 1993. – 4, no. 5. – P. 961-965.

[KSSW] Kadets V., Shvidkoj R., Sirotkin G., Werner, D. Banach spaces with the Daugavet property // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – 352. – P. 855-873.

[K-T] Kadets V., Tseytlin L. M. On "integration" of non-integrable vector-valued functions. // Математическая физика, анализ, геометрия (МАГ). – 2000. – 7, № 1. – С. 49-65.

[Las] Laszkovich M. Paradoxical Decompositions: A Survey of Recent Results // The first European Congress of Mathematics, v. 2. – Basel: Birkhäuser, 1992, P. 159-184.

[Lom] Ломоносов В. И. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным // Функциональный анализ и его прил. – 1973. – 7, № 3. – С. 55-56.

[L-P] Lindenstrauss J., Phelps R. R. Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces // Israel J. Math. – 1968. – 6. – P. 39-48.

[L-T1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. On the complemented subspaces problem // Israel J. Math. – 1971. – № 9. – P. 263-269.

[Mak] Макаров Б. М. О проблеме моментов в некоторых функциональных пространствах // Докл. АН СССР. – 1959. – 127. – № 5. – С. 957-960.

[Nik] Никольский Н. К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. – Т. 12. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1974.

[Nis] Nissenzweig A. w* sequential convergence // Israel J. Math. – 1975. – 22. – P. 266-277.

[Rob] Roberts J. W. A compact convex set with no extreme points // Studia Math. – 1977. – 60. – P. 255-266.

[Yud] Yudin V.A., On Fourier sums in L_p. // Proc. Steklov Inst. Math. – 1989. – 180. – P. 279-280.

Именной указатель

Предметный указатель