МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени ИВАНА ФРАНКО

Дорогому С. П. Гавели от автора
6/I 55

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

# ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. ИВ. ФРАНКО

ЛЬВОВ 1954

Ответственный редактор
профессор
Л. И. Волковыский

Печатается по распоряжению ректора
Львовского университета, члена-корреспондента АН УССР,
профессора Е. К. Лазаренко

# I. ПРЕДМЕТ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

По мере развития математического изучения явлений природы в математике постепенно образовались: теория линейных уравнений, теория линейных преобразований, теория квадратичных форм, алгебра векторов и, общее, тензоров. Между этими разделами были обнаружены тесные связи, и это, естественно, привело к созданию объединяющей эти разделы системы — линейной алгебры.

В этом параграфе будут в общих чертах описаны содержание этих отдельных частей линейной алгебры и их взаимная связь.

Линейные уравнения являются особо часто встречающимся, важным типом уравнений, так как при решении уравнений нелинейных иногда приходится заменять их, в первом приближении, более простыми для решения уравнениями линейными („линеаризация" уравнений).

Пример. Для приближенного определения решения уравнения $f(x)=0$ ($f(x)$ действительная, непрерывно дифференцируемая функция), заведомо близкого к числу $a$, можно поступать так: по теореме о среднем значении $f(x)=f(a)+$ $+(x-a)f^1(a+\Theta(x-a))$ $(0<\theta<1)$, но $f(a+\theta(x-a))\approx$ $\approx f^1(a)$ (при малом $x-a$), и уравнение $f(x)=0$ приближенно заменяется линейным уравнением $f(a)+(x-a)\ f^1(a)=0$. Геометрически это соответствует замене графика функции $f(x)$ касательной в точке $(a,\ f(a))$ (метод касательных Ньютона). При повторении этого метода (используя вместо $a$ найденное из $f(a)+(x-a)f'(a)=0$ первое приближение), вообще, получают более точное приближение.

В общем курсе алгебры проведено исследование системы линейных уравнений, основанное на теории определителей

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \end{gathered} \tag{1,1}$$

в произвольном поле.

При исследовании кривых и поверхностей второго порядка, а также при определении экстремума функции нескольких переменных приходится изучать квадратичные формы

$$\sum_{jk} a_{jk} x_j x_k.$$

Как известно из аналитической геометрии, для такого изучения, формы посредством преобразования координат приводятся к каноническому виду.

Преобразование координат является линейным преобразованием, которое в общем случае может быть представлено системой линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + \ldots a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{1,2}$$

Такое линейное преобразование полностью определяется своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

При исследовании линейных преобразований возникает разложение их на более простые. Так, например, преобразование на плоскости

$$\begin{aligned} y' &= (\rho + \cos\varphi)\, x_1 + \sin\varphi\, x_2, \\ y_2 &= -\sin\varphi\, x_1 + (\rho + \cos\varphi)\, x_2 \end{aligned}$$

может быть разложено на два преобразования:

$$\begin{aligned} y_1' &= \rho x_1, \\ y_2 &= \rho x_2. \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} y_1'' &= \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2, \\ y_2'' &= -\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2. \end{aligned}$$

Первое из них соответствует уменьшению масштаба в $\rho$ раз, второе — повороту осей на угол $\varphi$ (при переходе от координат $(x_1, x_2)$ к координатам $(y_1', y_2')$, $(y_1'', y_2'')$). Исходное преобразование естественно назвать суммой этих элементарных преобразований.

Вторым основным действием над преобразованиями является их последовательное применение. Рассматривая вместе с (1,2) последующее преобразование

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}y_n, \end{aligned}$$

легко замечают, исключая $y_1, \ldots, y_n$, что

$$\begin{aligned} Z_1 &= c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_n &= c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n, \end{aligned}$$

где

$$c_{jk} = \sum_{e=1}^{n} b_{je}a_{ek} \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, результатом такого последовательного применения линейных преобразований является также линейное преобразование, называемое их произведением.

Действия над преобразованиями можно заменить соответствующими действиями над их матрицами. Так вводится понятие суммы двух матриц и их произведения, определяемые правилами

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \ldots b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \ldots a_{1n} + b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} + b_{n1} \ldots a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \ldots b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1} \ldots c_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{jk} = \sum_{e=1}^{n} b_{je}a_{ek} \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

В результате возникает важная вспомогательная теория — алгебра матриц.

Понятие линейного преобразования по-иному возникло в теории упругости. При деформации сплошного тела каждая точка $(x, y, z)$ переходит в новое положение $(x^1, y^1, z^1)$, определяемое точкой $(x, y, z)$; таким образом, $x^1$, $y^1$, $z^1$ являются функциями $x$, $y$, $z$: $x^1 = f(x, y, z)$, $y^1 = g(x, y, z)$, $z^1 = h(x, y, z)$. При этом меняются не только направления, но и длины отрезков, соединяющих две каких-либо точки: именно вектор $(p_1, p_2, p_3)$, соединяющий точки $(x, y, z)$ и $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ переходит в вектор $(q_1, q_2, q_3)$, соединяющий точки

$$\big(f(x, y, z),\ g(x, y, z),\ h(x, y, z)\big) \quad \text{и} \quad \big(f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),\ g(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),\ h(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\big).$$

Связь между составляющими этих векторов и характеризует деформацию. Очевидно

$$q_1 = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} - f(x, y, z) = (\overline{x} - x)\, f_x^1(x, y, z) + (\overline{y} - y)\, f_y^1(x, y, z) + \\ + (\overline{z} - z)\, f_z^1(x, y, z) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ в случае непрерывности первых производных функций $f(x, y, z)$ — малая высшего порядка сравнительно с расстоянием между точками $(x, y, z)$, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

Таким образом, для малых расстояний приближенно (линеаризация!)

$$q_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \ \left(a_{11} = f^1_x(x, y, z), a_{12} = f^1_y(x, y, z), a_{13} = f^1_z(x, y, z)\right)$$

и таким же образом

$$q_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3,$$

$$q_3 = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3.$$

Получается соотношение, подобное (1,2), представляющее связь между положением вектора до деформации и после деформации и годное для достаточно малых векторов.

Развитие механики привело к введению понятия вектора и операциям над векторами (сложению и умножению векторов, умножению скаляра на вектор) — векторной алгебре и в дальнейшем — к понятию линейного или векторного пространства.

Это понятие линейного пространства и служит основой объединения разрозненных результатов, упоминавшихся ранее.

Действительно, понятие линейного преобразования, как показывает предыдущий пример, естественно рассматривать как линейное преобразование в векторном пространстве, линейные уравнения, тесно связанные с линейными преобразованиями, как уравнения в векторном пространстве. Квадратичные формы также включаются в эту теорию при метризации пространства (при определении длины вектора).

Итак, линейная алгебра является теорией линейных пространств. Линейные уравнения, преобразования (также и квадратичные формы) определяются своими матрицами. Таким образом, основной частью линейной алгебры является теория матриц.

При тесной связи между собой различных отделов математики неудивительно, что закономерности, изучаемые в линейной алгебре, имеют различные приложения, например, в теории дифференциальных уравнений (линейных). Но это создает необходимость изучения линейных пространств достаточно общего вида, определяемых в дальнейшем аксиоматически.

Эти соображения определяют следующее построение дальнейшего изложения. После общего изучения алгебраических операций, необходимого для дальнейшего, рассматриваются основные факты теории матриц и затем исследуются линейные пространства, начиная с более общих и кончая метрическими.

## II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

В параграфе I указывались алгебраические операции над матрицами. Прежде всего для дальнейшего необходимо уточнить понятие операции.

Простейшими видами алгебраических операций являются сложение и умножение чисел. Однако встречаются и другие операции, близкие по своим свойствам к этим элементарным, например, сложение векторов, умножение числа на вектор. Операции, рассматриваемые в алгебре, характеризуются обычно тем, что такая операция последовательности двух предметов $a$, $b$ (вообще разной природы) ставит в соответствие определенный третий предмет $c$. Например, числу 5 и вектору $b$ ставит в соответствие вектор $5b$, получаемый удлинением $b$ в пять раз; двум векторам $a$, $b$ ставит в соответствие вектор $a+b$, который строится по векторам $a$, $b$ по правилу параллелограмма, и т. д.

Но алгебраические операции, кроме того, предполагаются обладающими некоторыми свойствами, сходными со свойствами сложения и умножения чисел, например, ассоциативностью, коммутативностью и т. д. Вот почему алгебраические операции обычно называются сложением или умножением, и для их обозначения используются знаки, употребляемые при сложении или умножении чисел, например, $c=a+b$ (аддитивная запись) или $c=ab$ (мультипликативная запись)*.

Вот основные свойства, встречающиеся у алгебраических операций (в аддитивной и мультипликативной записи):

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ или } (ab)c=a(bc)$$
(ассоциативность);

$$a+b=b+a \text{ или } ab=ba^{**}$$
(коммутативность).

Важно отметить, что алгебраические операции могут и не обладать одним из этих свойств или даже обоими. Например, для векторного умножения векторов не удовлетворяются ни условия ассоциативности, ни коммутативности***.

---

* От латинских *additio* — сложение и *multiplicatio* — умножение.

** Вместо этих законов для векторного произведения векторов $a,b$ — $ab$ имеют место такие свойства: $(ab)c+(bc)a+(ca)b=0$ и $ab=-ba$ (антикоммутативность).

*** Если для элементов $a, b$, $a+b=b+a$ или $ab=ba$, то говорят, что элементы $a$, $b$ перестановочны или коммутируют. Обычно аддитивная запись используется только для коммутативных операций.

В широком классе случаев встречается применение двух разных операций, обычно связанных между собой законом дистрибутивности, — именно при подходящем обозначении этих операций, — одной как сложения, другой как умножения — имеют место законы

$$(a+b)\,c = ac + bc \text{ и } c\,(a+b) = ca + cb^{*}$$

(дистрибутивность, правая или левая).

При исследованиях общего характера приходится иметь дело с операциями, применимыми не к двум конкретным элементам, а к некоторому их множеству; так сложение применимо к любым двум числам или к любым двум векторам.

Будем называть операцию ассоциативной, если имеют место следующие свойства (в мультипликативной записи): если $ab$ определено, то $(ab)c$ определено тогда и только тогда, если $bc$ определено; если $bc$ определено, то $a(bc)$ определено тогда и только тогда, если $ab$ определено; если $ab$ и $bc$ определены, то $(ab)\,c = a\,(bc)$.

Для ассоциативной операции можно, таким образом, не указывать скобками порядка производимых действий. Для такой операции вводятся далее обычные сокращения: если $aa$ (или $a+a$) определено, то $\underbrace{a\ldots a}_{n \text{ раз}} = a^n$ (или, в аддитивной записи, $\underbrace{a+\ldots+a}_{n \text{ раз}} = na$), определенные для целых положительных $n$.

Будем называть операцию коммутативной, если для элементов $a$, $b$, для которых определено $ab$, определено также и $ba$, причем $ab = ba$.

Назовем две операции (сложение и умножение) дистрибутивными справа, если из определенности $ac$, $bc$ и $a+b$ следует определенность $ac+bc$ и $(a+b)c$, причем $(a+b)c = ac+bc$; левая дистрибутивность определяется подобным же образом.

Особенно часто встречается тот случай, когда операция применима к любым двум элементам некоторого множества, причем результат оказывается элементом этого же множества** (сложение чисел или векторов, умножение чисел или векторное умножение векторов. Умножение числа на вектор является примером важной операции, применимой к элементам разных множеств, — множества чисел и множества

---

* Операции могут и не обладать свойствами коммутативности, поэтому обе последние формулы могут оказаться и не равносильными.

** В этом случае говорят, что множество замкнуто относительно операции.

векторов; скалярное умножение векторов, применимое к любым двум векторам, наоборот, дает результат, являющийся числом, а не вектором).

Если существует такой элемент $e$, что для всякого элемента $a$, для которого определено $ea$, $ea = a$, то элемент $e$ называется левым нейтральным (относительно операции) элементом. Аналогично определяется правый нейтральный элемент.

Существуют примеры операций, допускающих несколько левых или правых нейтральных элементов. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2, 1. Если операция обладает левым нейтральным элементом $e_1$ и правым нейтральным $e_2$ и $e_1e_2$ определено, то эти нейтральные элементы совпадают.

В частности, если множество $M$, замкнутое относительно операции, содержит левый и правый нейтральные элементы, то они совпадают, и других нейтральных элементов множество не содержит.

Действительно, $e_1e_2 = e_2$ ($e_1$ — левый нейтральный элемент) и $e_1e_2 = e_1$ ($e_2$ — правый нейтральный элемент); поэтому $e_1 = e_2 = e$.

В случае множества $M$, замкнутого относительно операции, это рассуждение применимо для произвольного левого или правого нейтрального элемента множества; поэтому $e$ есть единственный левый и одновременно правый нейтральный элемент множества (такой элемент будет просто называться нейтральным). Левый или правый нейтральный элемент в случае аддитивной записи называется нулем (обозначается через 0), в случае мультипликативной записи — единицей (обозначается через 1).

Элемент $a'$, обладающий тем свойством, что последовательности $a'$, $a$ операция сопоставляет двухсторонний нейтральный элемент, называется левым обратным к $a$ элементом; аналогично определяется правый обратный элемент. Элемент $a$ называется в этом случае обратимым слева или справа.

Теорема 2, 2. Если элемент $a$ имеет левый обратный и правый обратный элементы относительно ассоциативной операции, то эти обратные элементы совпадают. В этом случае существует единственный левый (и одновременно правый) обратный $a$ элемент.

Элемент $a$ называется в этом случае обратимым (без указания слева или справа).

Действительно, пусть $a_1a = e_1$, $aa_2 = e_2$, где $e_1$, $e_2$ — нейтральные элементы. Так как $aa_2$ определено, то $(a_1a)a_2 = e_1a_2$ определено, следовательно,

$$a_2 = e_1a_2 = (a_1a)a_2 = a_1(aa_2) = a_1e_2 = a_1.$$

Таким образом, элемент $a$ имеет единственный левый и одновременно правый обратный элемент $a_1$.

В случае, если элемент $a$ обратим, то (единственный) обратный $a$ элемент обозначается через $a^{-1}$ (в мультипликативной записи), или $-a$ (в аддитивной записи). Если $a$ обратим и $ab=ac$ или $ba=ca$, то $b=c$ (на обратимый элемент равенства можно сокращать). Действительно, из $ab=ac$, например, следует $a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)$ или $b=c$.

Теорема 2, 3. Если $a$ обратим и $a^{-1}$ есть обратный $a$ элемент, то $a^{-1}$ обратим и $a$ является ему обратным.

Это непосредственно следует из соотношений (в мультипликативной записи) $a^{-1}a=e_1$, $aa^{-1}=e_2$*. Таким образом, $(a^{-1})^{-1}=a$ (в аддитивной записи, $-(-a)=a$).

Теорема 2, 4. Если $a$, $b$ обратимые элементы относительно ассоциативной операции и $ab$ определено, то $ab$ обратимый элемент.

При этом $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ (в аддитивной записи, $-(a+b= =(-b)+(-a)$.

По заданию, $aa^{-1}$, $a^{-1}a$, $bb^{-1}$, $b^{-1}b$ — нейтральные элементы; пусть $aa^{-1}=e_1$, $b^{-1}b=e_2$. Из определения ассоциативной операции, из существования $a^{-1}a$ и $ab$ следует существование $a^{-1}(ab)=(a^{-1}a)b=b$. Таким образом,

$$e_2=b^{-1}b=b^{-1}[(a^{-1}a)b]=b^{-1}[a^{-1}(ab)]=(b^{-1}a^{-1})(ab);$$

точно так же, $(ab)(b^{-1}a^{-1})=e_1$.

Это предложение очевидным образом переносится на случай нескольких множителей, например, $(a_1\ldots a_k)^{-1}= =a_k^{-1}\ldots a_1^{-1}$.

Если $a$ — обратимый элемент **, то (в мультипликативной записи) обозначение $a^n$ распространяется на любое целое значение $n$ следующим образом: при $n<0$, $a^n=(a^{-1})^{|n|}$; при $n=0$, $a^0=1$. Аналогично, для аддитивной записи, при $n<0$, $na=|n|(-a)$ и, при $n=0$, $na=0$.

Очевидным образом проверяются соотношения

$$a^m a^n = a^{m+n}, \text{ или } ma+na=(m+n)a;$$

$$(a^m)^n=a^{mn}, \text{ или } n(ma)=(mn)a,$$

годные при любых натуральных $m$, $n$, и, при обратимости, а также для любых целых значений $m$, $n$.

Наоборот, соотношение $a^nb^n=(ab)^n$, известное для чисел, справедливо, вообще говоря, только в том случае, когда эле-

---

* Если $ab=c$, то $a$ называется левым делителем $c$, $b$ — правым делителем. В частности, обратимые элементы являются правыми и левыми делителями единицы.

** Существование произведения $aa$ при этом предполагается.

менты $a$, $b$ коммутируют. Например, если $a$, $b$ обратимы, то соотношение $a^2b^2=(ab)^2$ или $a^2b^2=abab$ справедливо только, если $ab=ba$ (доказать это утверждение!).

Пусть между элементами двух множеств и операциями, в них определенными, можно установить взаимно однозначное соответствие так, что всякое соотношение между элементами одного множества, выраженное посредством операций, определенных в этом множестве, остается справедливым при замене в этом соотношении элементов и операций им соответствующими элементами и операциями в другом множестве. Такое взаимно однозначное соответствие представляет собой своего рода словарь, с помощью которого каждую формулу (выраженную в рассматриваемых операциях), справедливую для одного множества, можно перевести в формулу, справедливую для другого множества. В этом смысле теории этих множеств совпадают.

Такие множества с операциями называются изоморфными.

Пример. Пусть $M$ — множество всех действительных чисел, рассматриваемая операция—сложение; $N$ — множество всех положительных действительных чисел, рассматриваемая в $N$ операция — умножение. Эти множества с операциями — изоморфны. Соответствие между их элементами устанавливается формулой $y=a^x (x\in M, y\in N)$, $a$ — произвольно выбранное положительное число, не равное единице.

Действительно, если $x_1+x_2=x_3$ и $y_1=a^{x_1}$, $y_2=a^{x_2}$, $y_3=a^{x_3}$, то $y_1y_2=y_3$; взаимная однозначность очевидна. Упомянутым выше „словарем“ является таблица логарифмов с основанием $a$.

Теперь будут выделены наиболее важные для дальнейшего типы множеств с одной и двумя операциями. Эти типы множеств возникают в результате обобщения хорошо известных случаев операций над числами или векторами и в этом параграфе будут иллюстрироваться на этом материале. Простейшим типом, безусловная необходимость в котором возникает, однако, только в дальнейшем, является группа.

**Определение группы**. Непустое множество, замкнутое относительно ассоциативной операции, если оно содержит нейтральный элемент и все его элементы обратимы, называется группой.

Таким образом, для того чтобы множество $M$ являлось группой относительно операции (в мультипликативной записи), необходимо выполнение следующих требований.

1. Для любых элементов $a$, $b\in M$, $ab$ существует и принадлежит $M$.

2. Имеет место ассоциативность умножения: $(ab)c = a(bc)$.

3. $M$ содержит единичный элемент 1 со свойствами

$$1\ a = a\,1 = a.$$

4. Каждый элемент $a$ имеет обратный элемент $a^{-1}$ со свойством

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

Если, кроме того, любые два элемента коммутируют ($ab = ba$ для всех $a, b \in \mu$), то группа называется коммутативной.

Примеры 1. Множества целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел, комплексных чисел являются коммутативными группами относительно операции сложения и не являются группами относительно операции умножения (проверить!).

2. Множества ненулевых рациональных чисел, действительных чисел, комплексных чисел, так же, как и множества положительных рациональных чисел или положительных действительных чисел, являются коммутативными группами относительно операции умножения.

3. Множество векторов трехмерного пространства является коммутативной группой относительно векторного сложения.

4. Пусть множество $M$ состоит из четырех функций

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = \frac{x-2}{2x-1}, \quad f_4(x) = \frac{2x-1}{x-2}.$$

Если операция над функциями определяется правилом $f_k = f_e f_m$, если $f_k = f_e(f_m(x))$ то $M$ образует коммутативную группу*.

В коммутативной группе с мультипликативной записью операции можно определить деление или — при аддитивной записи — вычитание условиями $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ или $a - b = a + (-b) = (-b) + a$.

**Определение кольца**. Непустое множество $M$, замкнутое относительно двух ассоциативных операций (одна из которых будет обозначаться аддитивно, другая мультипликативно — „сложение“ и „умножение“), называется кольцом, если относительно операции сложения $M$ есть коммутативная группа и операции сложения и умножения связаны законами дистрибутивности

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Если, в частности, умножение также коммутативно, то кольцо называется коммутативным. Более подробно это выражается следующими требованиями. Если $a, b \in M$, то

* Примеры некоммутативных групп будут приведены в следующем параграфе.

$a+b\in M$, $ab\in M$; при этом, если $c\in M$, то $a+(b+c)=(a+b)+$ $+c$, $a(bc)=(ab)c$, $a+b=b+a$; $M$ содержит элемент 0 и элемент $-a$ со свойствами

$$0+a=a+0=a, \quad (-a)+a=a+(-a)=0;$$

$$a(b+c)=ab+ac, \ (b+c)a=ba+ca.$$

Для элемента $a$ кольца $0a=0$.

Действительно, $0a=(0+0)a=0a+0a$ и, следовательно, $0a=0$.

Таким образом, если кольцо содержит и ненулевой элемент, 0 не есть нейтральный элемент относительно умножения. В частности, если кольцо содержит единицу 1, то $0\neq 1$ и $0a\neq 1$ — нулевой элемент необратим относительно умножения.

**Определение поля.** Множество $M$, содержащее не нулевые элементы и являющееся кольцом, называется полем, если $M$ содержит нейтральный относительно умножения элемент — единицу — и каждый не нулевой элемент $M$ обратим относительно умножения.

По-предыдущему, такое выключение нуля в требовании обратимости необходимо. Более подробно это выражается следующими требованиями. Если $a, b, c\in M$, то $a+b\in M$, $ab\in M$; при этом $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c, a+b=b+a$ (соотношение $ab=ba$ необязательно); в $M$ содержатся элементы $0, 1$ $-a$ и $a^{-1}$ (при $a\neq 0$) со свойствами $0+a=$ $a+0=a$, $1a=a1=a$, $(-a)+a=a+(-a)=0$, $a^{-1}a=$ $=aa^{-1}=1$, $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$. Если $ab=$ $=ba$ для любых $a, b\in M$, то поле называется коммутативным.

Примеры. 1. Множества рациональных, действительных, комплексных чисел (относительно обычных операций сложения и умножения) являются полями и притом коммутативными. Множество целых чисел является коммутативным кольцом и не является полем (почему?).

•2. $M$ — множество чисел 0, 1, 2. Суммой двух таких чисел $a$, $b$, по определению, называется наименший положительный остаток от деления суммы $a$ и $b$ в обычном смысле на 3; так же определяется произведение $a$, $b$. Проверить, что при таком определении операций $M$ является полем. Доказать, что каждый элемент $a\in M$ обладает свойством $a+a+a=0$.

3. $M$ — множество полиномов аргумента $x$ с коэффициентами из некоторого поля, с обычными определениями сложения и умножения полиномов. $M$ — коммутативное кольцо (не поле).

**Определение линейных операторов.** Пусть $M$ и $N$ — две различные (аддитивно записанные) коммутативные группы.

Элемент $\alpha$ будет называться линейным оператором группы $M$, если для всякого элемента группы $a$ определено произведение $\alpha a \in N$, причем для любых $a, b \in M$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$.

Два оператора группы $M$ равны, если для всякого элемента $a \in M$ их действия совпадают: $\alpha = \beta$, если $\alpha a = \beta a$.

Теорема 2, 5.

Для всякого линейного оператора $\alpha$, $\alpha 0 = 0$, $\alpha(-a) = -\alpha a$; вообще, $\alpha(a \pm b) = \alpha a \pm \alpha b$.

Действительно, $\alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0$; следовательно, $\alpha 0 = 0$. Далее, $0 = \alpha 0 = \alpha\left(a + (-a)\right) = \alpha a + \alpha(-a)$; следовательно, $\alpha(-a) = -\alpha a$. Наконец, $\alpha(a-b) = \alpha a + \alpha(-b) = \alpha a - \alpha b$. Если $\alpha a = 0$, то $\alpha$ называют аннулятором $a$.

Оператор $\alpha$ каждому элементу $a \in M$ ставит в соответствие определенный элемент из $N$; $\alpha$ отображает $M$ в $N$.

Обратно, пусть задано отображение $\alpha$, сопоставляющее каждому элементу $a \in M$ определенный элемент $\alpha a \in N$, причем сумме элементов $a+b$ ставится в соответствие $\alpha a + \alpha b$; такое отображение, очевидно, является линейным оператором (обычное „геометрическое“ задание оператора).

Примеры. 1. $M$ — группа векторов трехмерного пространства (групповая операция — векторное сложение); $\alpha$ — оператор параллельного проектирования на определенную плоскость (для всякого $a$, $\alpha a$ обозначает его проекцию).

Линейность оператора $\alpha$ равнозначна известной теореме о проекции суммы векторов. В этом случае за $N$ можно принять группу векторов на плоскости.

2. $M$ — та же группа векторов; $\alpha$ — действительное число ($\alpha a$ определяется обычным образом). Число $\alpha$ является линейным оператором векторного пространства — оператором растяжения (проверить!).

3. $M$ — группа действительных дифференцируемых функций аргумента $t$, определенных, например, в интервале $(0,1)$ (групповая операция — сложение функций), $\alpha = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; для функции $f(t) \in M$ $\alpha f(t) = \frac{df(t)}{dt}$. Линейность оператора $\frac{d}{dt}$ равносильна известной теореме о производной суммы дифференцируемых функций.

Можно рассмотреть дифференциальные операторы более общего вида

$$\beta = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n, \text{ где } a_0, \ldots, a_n -$$

произвольные действительные числа; при этом, по определению,

$$\beta f(t) = a_0 \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \ldots + a_{n-1} \frac{df(t)}{dt} + a_n f(t).$$

Оператор $\beta$ — линейный (проверить!), применимый ко всем $n$ раз дифференцируемым функциям.

Оператор $\gamma$, определяемый формулой $\gamma f(t) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$, есть также линейный оператор, применимый ко всем интегрируемым функциям.

Рассмотрим особенно важный частный случай — линейные операторы, отображающие $M$ в $M$ ($N = M$). Для таких операторов, естественно, вводятся понятия суммы и произведения операторов.

Оператор $\gamma$ называется суммой операторов $\alpha$, $\beta$, если для всякого элемента $a \in M$, $\gamma a = \alpha a + \beta a$; в этом случае полагаем $\gamma = \alpha + \beta$. Оператор $\delta$ называется произведением операторов $\alpha$, $\beta$ (по обозначению, $\delta = \alpha\beta$), если для всякого элемента $a \in M$, $\delta a = \alpha(\beta a)$.

Таким образом, по определению, $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta \alpha$ и $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$.

Соответственно этому определению суммы и произведения операторов вводятся нулевой (обозначается через 0) и единичный (обозначается через 1) операторы. Оператор $\lambda$ называется нулевым оператором, если для всякого элемента $a \in M$, $\lambda a = 0$ ($\lambda$ аннулирует все элементы); оператор $\mu$ называется единичным, если для всякого $a \in M$, $\mu a = a$. Таким образом, $0a = 0$, $1a = a$. Очевидно, для всякого оператора $\alpha$, $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $1 \cdot \alpha = \alpha \; 1 = \alpha$.

Сумма и произведение линейных операторов, нулевой и единичный операторы являются линейными операторами. Действительно, $(\alpha + \beta)(a + b) = \alpha(a + b) + \beta(a + b) = \alpha a + \alpha b + \beta a + \beta b = \alpha a + \beta a + \alpha b + \beta b = (\alpha + \beta)a + (\alpha + \beta)b$ (здесь использована коммутативность группы $M$); следовательно, $\alpha + \beta$ есть линейный оператор.

Далее, $(\alpha\beta)(a + b) = \alpha(\beta(a + b)) = \alpha(\beta a + \beta b) = \alpha(\beta a) + \alpha(\beta b) = (\alpha\beta)a + (\alpha\beta)b$; следовательно, $\alpha\beta$ — линейный оператор.

Линейность нулевого и единичного операторов очевидна.

Теорема 2, 5. *Множество всех линейных операторов, отображающих $M$ в $M$, образует кольцо относительно введенных сложения и умножения операторов.*

Для доказательства следует проверить выполнение всех свойств, характеризующих кольцо, опираясь на определения суммы и произведения операторов и равенства двух операторов.

Проведем для примера проверку равенства $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ($\alpha, \beta, \gamma$ — операторы). Для любого элемента $a \in M$ имеем

$[(\alpha\beta)\gamma]a=(\alpha\beta)(\gamma a)=\alpha[\beta(\gamma\alpha)]$ и $[\alpha(\beta\gamma)]a=\alpha[(\beta\gamma)a]=\alpha[\beta(\gamma a)]$; таким образом, $[(\alpha\beta)\gamma]a=[\alpha(\beta\gamma)]a$ для всякого элемента $a$ и, следовательно, $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$. Следует провести подобную же проверку остальных свойств, характеризующих кольцо.

Примеры. 1. $M$ — группа действительных функций аргумента $t$, определенных, например, в интервале $(0,1)$ (групповая операция — сложение функций) и имеющих производные любого порядка.

Рассматривая дифференциальные операторы вида $\alpha=$ $=a_0\frac{d^n}{dt^n}+\ldots+a_n$ как полиномы аргумента $\frac{d}{dt}$, определим сумму и произведение этих операторов так же, как сумму и произведение полиномов.

Доказать, что определенные таким образом сумма и произведение этих операторов согласуются с данным ранее общим определением суммы и произведения линейных операторов. Проверить, что полученное множество операторов образует кольцо относительно введенных операций и притом изоморфное кольцу полиномов одного аргумента с действительными коэффициентами.

2. Пусть $M$ — кольцо. Будем рассматривать $M$ как группу относительно операции сложения, определенной в кольце. Каждый элемент $\alpha\in M$ можно рассматривать как оператор, действующий на группу $M$, если понимать $\alpha a (a\in M)$ как произведение элементов $\alpha$, $a$ из кольца $M$. Линейность оператора $\alpha$ равносильна закону дистрибутивности для операций кольца. Таким образом, кольцо $M$ является кольцом линейных операторов для своей группы.

**Определение линейного уравнения.** Уравнение вида $\alpha x=b$ называется линейным; здесь $\alpha$ — линейный оператор, определенный в коммутативной группе $\mu$ (со значением в группе $N$), $b$ есть элемент $N$. Решением этого уравнения (в $\mu$) называется всякий элемент $a\in\mu$, для которого $\alpha a=b$. В случае $b=0$, уравнение называется однородным.

Например, уравнение $\frac{d}{dt}x=f(t)$ имеет бесчисленное множество решений в группе функций (см. пример 3, стр. 14), если $f(t)$ непрерывная функция. Справедлива следующая общая теорема.

Теорема 2, 6. Сумма всякого решения неоднородного уравнения $\alpha x=b$ и решения соответствующего однородного уравнения $\alpha x=0$ есть решение неоднородного уравнения $\alpha x=$ $=b$. Всякое решение уравнения $\alpha x=b$ может быть представлено в виде суммы произвольного частного решения этого уравнения и некоторого решения соответствующего однородного. Вообще, если $x_1$ — решение уравнения $\alpha x=b_1$, $x_2$ — решение уравнения $\alpha x = b_2$, то $x_1 \pm x_2$ — решение уравнения $\alpha x = b_1 \pm b_2$. Докажем сначала последнее утверждение.

Действительно, $\alpha(x_1 \pm x_2) = \alpha x_1 \pm \alpha x_2 = b_1 \pm b_2$, если $\alpha x_1 = b_1$, $\alpha x_2 = b_2$ (линейность оператора $\alpha$!). Следовательно, в частности, если $x_1$ — решение $\alpha x = b$, $u$ — решение $\alpha x = 0$, то $x_1 + u$ — решение уравнения $\alpha x = b$. Обратно, если $x_1$, $x_2$ — решения уравнения $\alpha x = b$, то $x_2 - x_1 = u$ — решение уравнения $\alpha x = 0$ и, следовательно, всякое решение $x_2$ уравнения $\alpha x = b$ можно представить в виде $x_1 + u$, где $x_1$ — решение $\alpha x = b$, $u$ — решение $\alpha x = 0$.

Таким образом, если $x_1$ — одно из решений неоднородного уравнения $\alpha x = b$, $u$ пробегает множество решений соответствующего однородного уравнения $\alpha x = 0$, то $x_1 + u$ пробегает множество решений неоднородного уравнения.

Примеры. 1. Пусть $M$ — трехмерное векторное пространство, $\alpha$ — оператор ортогонального проектирования на плоскость $P$, $b$ — вектор из $M$.

Уравнение $\alpha x = b$ не разрешимо, если вектор $b$ не параллелен плоскости $P$. Пусть теперь $b$ — вектор, лежащий на плоскости $P$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений вида $x_1 + u$, где $x_1$ — один из векторов с проекцией $b$, $u$ — произвольный вектор, ортогональной плоскости $P$ $(\alpha u = 0)$.

2. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция.

Линейное дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_n x = f(t)$$

имеет множество решений вида $x_1 + u$, где $x_1$ — одно из решений данного уравнения, $u$ — произвольное решение соответствующего однородного уравнения.

## III. МАТРИЦЫ

Прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества $M$, называется матрицей. Записывается матрица в одной из следующих форм:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1} \ldots a_{kn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1} \ldots a_{kn} \end{Vmatrix}, \qquad (a_{ij})_{\substack{i=1,\ k \\ j=1,\ n}}$$

Две матрицы называются равными, если они тождественны. Матрица из одного элемента отождествляется с этим элементом. Суммой двух матриц одинакового размера $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (a_{ij} + b_{ij})$; $C = A + B$.

Таким образом, для возможности сложения двух матриц необходимо, чтобы эти матрицы имели одинаковый размер и чтобы для одинаково расположенных элементов этих матриц было определено сложение. Произведением матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{k1}\ldots a_{kn}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_{11}\ldots b_{1e}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ b_{n1}\ldots b_{ne}\end{pmatrix}$$

называется матрица $C=\begin{pmatrix} c_{11}\ldots c_{1e}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ c_{k1}\ldots c_{ke}\end{pmatrix}$, элементы которой определяются по правилу $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$;* $C=AB$.

Таким образом, для возможности умножения двух матриц необходимо, чтобы ширина первого матричного множителя ($A$) совпадала с высотой второго матричного множителя ($B$) и, далее, чтобы были определены произведения элементов матрицы $A$ на элементы матрицы $B$, а также были определены суммы получившихся произведений; при этом высота произведения матриц ($C$) совпадает с высотой первого множителя ($A$), а ширина произведения ($C$) совпадает с шириной второго множителя ($B$).

Легко устанавливаются условия применимости основных алгебраических соотношений для введенных операций над матрицами. Именно, для справедливости закона $A+(B+C)=(A+B)+C$ для матриц достаточно (и необходимо) выполнение закона ассоциативности при сложении элементов матриц $A$, $B$, $C$** для справедливости закона $A+B=B+A$ достаточно предполагать коммутативность сложения элементов матриц $A$, $B$; для справедливости законов $A(BC)=(AB)C$, $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$ достаточно предположить справедливость для элементов матриц $A$, $B$, $C$ законов ассоциативности и для сложения, и для умножения, закона коммутативности для сложения и левого, и правого законов дистрибутивности.

Часто применяется сокращенное обозначение через $\lambda$ квадратной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ldots & 0\\ & & \ddots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda\end{pmatrix}$$

---

* Происхождение понятий суммы и произведения матриц см. в п. 1.

** Здесь и в дальнейшем подразумевается возможность записываемых действий. Размеры матриц $A, B, C$ предполагаются одинаковыми, предполагается также возможность сложения одинаково расположенных элементов.

Таким образом,

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \dots \lambda a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda a_{k1} \dots \lambda a_{kn} \end{pmatrix},$$

$$A\lambda = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda \dots a_{1n}\lambda \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}\lambda \dots a_{kn}\lambda \end{pmatrix}^{*}.$$

Условия справедливости соотношений вида

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda A = A\lambda$$

вытекают из предыдущих соображений.

Примеры. 1. Если $f_{ij}(t)$ — дифференцируемые функции, то по предыдущему,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f_{11}(t) \dots f_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ f_{k1}(t) \dots f_{kn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_{11}(t)}{dt} & \dots & \frac{df_{1n}(t)}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_{k1}(t)}{dt} & \dots & \frac{df_{kn}(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

2. Система линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{gathered}$$

может быть заменена одним матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Например, система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 3x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2$$

может быть записана в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - 2 & 3 \\ -1 & \frac{d}{dt} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

* Следует заметить, что в этих двух формулах $\lambda$ обозначает квадратные матрицы разного размера.

Теперь будут подробнее исследованы операции сложения и умножения матриц.

При изучении сложения будем рассматривать матрицы, элементы которых принадлежат аддитивно записанной коммутативной группе. В этом случае, как указывалось,

$$A+(B+C)=(A+B)+C,\ A+B=B+A.$$

Далее очевидно, что для выполнения соотношения $B+A=A+B=A$ необходимо и достаточно, чтобы все элементы матрицы $B$ (того же размера, что и матрица $A$) были равны нулю. Матрица, все элементы которой равны нулю, нейтральна при сложении матриц (того же размера); она называется нулевой матрицей и обозначается 0*. По общей схеме параграфа 2 можно всегда определить обратную относительно сложения матрицу. Именно, если $A=(a_{ij})$, то $-A=(-a_{ij})$; действительно, $A+(-A)=(-A)+A=0$.

Единственность обратной матрицы очевидна (следует также из теоремы 2, 2); формулой $A-B=A+(-B)$ определяется вычитание матриц (одинакового размера).

Таким образом, множество всех матриц одинакового какого-нибудь размера с элементами из аддитивной коммутативной группы образует также коммутативную группу относительно операции сложения матриц.

Это замечание позволяет привести случай системы линейных уравнений к рассмотрению одного линейного уравнения.

Действительно, пусть $M$, $N$ — суть аддитивные коммутативные группы, $\alpha_{ij}$ $(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,n)$ — линейные операторы группы $M$ со значениями в группе $N$.

Системой линейных уравнений называется система вида

$$\begin{gathered}\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n=b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{k1}x_1+\ldots+\alpha_{kn}x_n=b_k.\end{gathered}$$

Решением этой системы в группе $M$ называется последовательность элементов группы $M$: $a_1,\ldots,a_n$, которая при подстановке вместо соответствующих элементов последовательности $x_1,\ldots,x_n$ обращает все уравнения в тождество.

Пусть теперь $M_n$ есть аддитивная группа одностолбцовых матриц высоты $n$ с элементами из $M$ ($n$-столбцы); $N_k$ — аддитивная группа столбцов высоты $k$ с элементами из $N$; $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\ldots&\alpha_{1n}\\ \cdot&\cdot\,\cdot&\cdot\\ \alpha_{k1}&\ldots&\alpha_{kn}\end{pmatrix}$. Матрицу $\alpha$ можно рассматривать как оператор, действующий на элементы $M_n$ со значениями из $N_k$,

* Каждому размеру соответствует своя нулевая матрица

если определить действие оператора $\alpha$ на столбец $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$ из $M_n$ правилом

$$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \dots\dots \\ \alpha_{k1} \dots \alpha_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\alpha$ есть линейный оператор; полагая $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_k \end{pmatrix}$, систему можно представить, по-предыдущему, в виде

$$\alpha x = b \qquad (b \in N_k).$$

Решение $a_1, \dots, a_n$ системы в $M$ можно тогда рассматривать как столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$ из $M_n$ (сформулировать, основываясь на этом замечании, теорему 2, 6 для системы линейных уравнений).

Теперь будет изучено умножение матриц с элементами из коммутативного кольца $M$, содержащего единицу*.

Как следует из сделанных ранее замечаний, для таких матриц имеют место законы

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA.$$

Кроме того, так как кольцо $M$ относительно сложения образует коммутативную группу, то остаются в силе ранее указанные свойства сложения матриц.

Важно отметить, что умножение матриц некоммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример этот далее показывает, что ненулевые матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеют нулевое произведение; в этом случае они называются соответственно левым и правым делителями нуля**.

Таким образом, множество всех квадратных матриц одинакового размера (с элементами из коммутативного кольца) образует некоммутативное (если размер матриц больше единицы) кольцо с делителями нуля.

Теорема 3, 1. Пусть матрица $A$ имеет высоту $k$, ши-

---

* Как известно, теория определителей сохраняется для квадратных матриц с элементами из такого кольца.

** Точнее, если $AB = 0$ и $B \neq 0$, то $A$ называется левым делителем нуля; если $A \neq 0$, то $B$ называется правым делителем нуля рину $n$ и ранг $r$. Если $r < n$, то $A$ является левым делителем нуля; если $r < k$, то $A$ является правым делителем нуля.

Действительно, как известно, ранг матрицы равен количеству независимых строк и также количеству независимых столбцов матрицы. Поэтому, если, например, $r < n$, столбцы матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kn} \end{pmatrix}$ зависимы:

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{k1} \end{pmatrix} b_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{kn} \end{pmatrix} b_n = 0$ ($b_1, \dots, b_n$ не нули в совокупности).

Но это равносильно соотношению

$$A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Так же доказывается второе утверждение теоремы.

**Теорема 3, 2.** Если матрицы $A$, $B$ квадратные, одинакового размера, то $det(AB) = det A \cdot det B$*.

Доказательство непосредственно следует из правила умножения определителей одинакового порядка.

Теорема эта распространяется очевидным образом и на произведение более чем двух матричных множителей.

Непосредственно проверяется, что квадратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ является нейтральной относительно матричного умножения (проверить!), (конечно, предполагается умножение слева или справа на матрицы подходящего размера).

Из теоремы 2, 1 следует, что для каждого размера имеется только одна нейтральная матрица, именно $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$; эта матрица называется единичной и будет обозначаться знаком 1.

Теперь будут исследованы условия обратимости (относительно умножения) матрицы.

**Теорема 3, 3.** Для того чтобы матрица $A$ (с элементами из коммутативного кольца с единицей) была обратима, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ была квадратной матрицей, определитель которой является делителем единицы.

Необходимость. Пусть матрица $A$ обратима, $A_1$ — обратная матрица (по теореме 2, 2 — единственная и лево-

---

* *det A* обозначает определитель квадратной матрицы *A*

и правообратная). Пусть высота $A$ равна $k$ и ширина — $n$; если $k < n$, то, по теореме 3, 1, существует ненулевая матрица $B$ такая, что $AB = 0$; но тогда из $A_1 A = 1$ следует $A_1 AB = B$, $0 = B$, что приводит к противоречию.

Если $k > n$, то существует матрица $B \neq 0$ такая, что $BA = 0$, но тогда из $AA_1 = 1$ следует $BAA_1 = B$, $0 = B$, что также приводит к противоречию.

Итак, $k = n$; матрица $A$ — квадратная, но тогда и матрица $A_1$ — квадратная. Из $1 = A_1 A$ следует $1 = det\, 1 = det(A_1 A) = det\, A_1 \cdot det\; A$; таким образом, определитель $A$ делит единицу кольца.

Достаточность. Пусть матрица $A$ квадратная и определитель матрицы $A$ делит единицу; таким образом, $(det\, A)^{-1}$ содержится в кольце. Пусть, далее, $a^1_{ij}$ есть алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ в матрице $A$. Тогда, замечая, что сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов какой-либо строки (столбца) этого определителя равна определителю или нулю (в зависимости от совпадения или различия используемых строк или столбцов), непосредственной проверкой (проверить!) убеждаемся, что матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} (detA)^{-1}a'_{11} \ldots (detA)^{-1}a'_{n_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (detA)^{-1}a'_{1n} \ldots (detA)^{-1}a'_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, не только доказана обратимость матрицы $A$, но и дано явное выражение ей обратной матрицы $A^{-1}$ (единственной!)

$$A^{-1} = (detA)^{-1} \begin{pmatrix} a'_{11} \ldots a'_{n_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a'_{1n} \ldots a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Если рассматриваемое кольцо является полем, то так как в поле все ненулевые элементы делят единицу, условия теоремы 3, 3 можно упростить.

Именно, для обратимости матрицы $A$ необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной и чтобы ее определитель был отличен от нуля*. Как это указывалось в параграфе 2, если $A$, $B$ обратимы, то

$$(A^{-1})^{-1}=A, \quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Теперь будет введена еще одна вспомогательная операция над матрицами — их транспонирование.

Пусть $A$ — матрица; матрица полученная из $A$ перестановкой всех строк (в их порядке) на место столбцов, называется транспонированной и будет обозначаться $A^1$.

Легко проверяется (проверить!), что

$$(A^1)^1=A, \quad (A+B)^1=A^1+B^1, \quad (AB)^1=B^1A^1.$$

Используя понятие транспонирования, как и в теории определителей, можно использовать „равноправность“ строк и столбцов для сокращения некоторых доказательств. Например, пусть доказано первое утверждение теоремы 3, 1; пусть теперь $r<k$. Но тогда матрица $A^1$ удовлетворяет условиям первой части теоремы и, следовательно, по доказанному, существует ненулевой столбец $B$ такой, что $A^1B=0$; но тогда, транспонируя, $B^1A=0$ и $B^1=0$; это доказывает второе утверждение теоремы 3, 1.

## IV. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе будут рассмотрены системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ \ldots\ldots\ &\ldots\ldots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n&=b_k. \end{aligned} \tag{4,1}$$

Для полного исследования этих уравнений будут сделаны следующие ограничительные предположения. Пусть $H$ — аддитивная коммутативная группа с коммутативным кольцом линейных операторов $R$, отображающих $H$ в $H$.

Дальнейшая теория, во всяком случае, верна в следующих трех основных случаях: $R$ — коммутативное поле; $R$ — кольцо целых чисел; $R$ — кольцо полиномов одного аргумента $\lambda$ с коэффициентами из некоторого коммутативного поля.

Общие для этих трех случаев свойства, которые используются в дальнейшем доказательстве, следующие:

1. В $R$ введена некоторая упорядоченность элементов,

---

* Доказать, основываясь на этом замечании, что множество квадратных матриц одинакового порядка, с элементами из коммутативного поля, с определителем, отличным от нуля, образует некоммутативную группу относительно операции умножения матриц

которая будет выражаться словами „элемент $a \in R$ меньше $b \in R$"; при ней нулевой элемент меньше всякого другого, делимое, отличное от нуля, не меньше делителя и всякая последовательность уменьшающихся элементов конечна*.

2. В $R$ возможно неполное деление: для всякого элемента $a \in R$ и всякого ненулевого элемента $b \in R$ можно указать такие элементы $p \in R$ („неполное частное") и $r \in R$ („остаток"), что $a = pb + r$, причем остаток $r$ меньше делителя $b$**.

3. Кольцо $R$ содержит единицу***.

Коммутативные кольца, для которых выполняются эти требования, принято называть эвклидовыми (так как в этих кольцах проводится алгорифм Эвклида нахождения общего наибольшего делителя).

Сделаем еще несколько замечаний относительно свойств эвклидовых колец, которые хорошо известны для кольца целых чисел и кольца полиномов одного аргумента (для случая поля эти свойства будут пояснены).

Два ненулевые элемента из $R$, которые делят друг друга (такие элементы будут называться эквивалентными), отличаются друг от друга множителями, являющимися делителями единицы: если $a|b$ и $b|a$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, то $a = pb$, $b = qa$, где $p$ и $q$ — делители единицы; таким образом, в $R$ существуют $p^{-1}$ и $q^{-1}$; обратное заключение также справедливо.

В кольце целых чисел два делителя единицы: 1 и $-1$. В кольце полиномов делителями единицы являются все ненулевые постоянные полиномы. В поле делителями единицы являются все элементы, кроме нуля.

Каждый ненулевой элемент $a$ из $R$ может быть представлен в виде $a = \varepsilon p_1 \ldots p_n$, где $\varepsilon$ — делитель единицы, $p_1, \ldots, p_n$ — простые элементы $R$ (в случае, если $R$ есть поле, $a = \varepsilon$), при этом простые множители $p_1, \ldots, p_n$ определяются элементом $a$ однозначно, с точностью до порядка следования и эквивалентности (иначе говоря, в двух разложениях элемента количество простых множителей одинаково и они попарно эквивалентны в некоторой последовательности).

---

* Например, для кольца целых чисел „меньше" понимается в смысле „меньше по абсолютной величине", для кольца полиномов „меньше" будет означать „меньше по степени", для поля „меньше" будет применяться только в одном случае — „нулевой элемент поля меньше всякого другого"

** Для случаев кольца целых чисел или кольца полиномов одного аргумента это свойство хорошо известно. В случае, если $R$ — поле, то, так как в поле существует $b^{-1}$ $(b \neq 0)$, то можно положить $p = b^{-1}$, $r = 0$ Таким образом, для поля последнее требование тоже выполняется

*** Последнее свойство может быть доказано на основании двух первых

Для всякого конечного множества элементов из $R - a_1, \ldots, a_n$, — однозначно, с точностью до эквивалентности, определяется их общий наибольший делитель $d$; при этом в $R$ можно подобрать такие элементы $p_1 \ldots p_n$, что $d = p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n$ (проверить это свойство для случая, когда $R$ есть поле). Из определения линейных операторов, в том числе единичного, нулевого, их суммы и произведений, следует, что для любых $\alpha, \beta \in R$ и $a\, b \in H$,

$$\alpha(a \pm b) = \alpha a \pm \alpha b, \qquad (\alpha \pm \beta)a = \alpha a \pm \beta \alpha,$$

$$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \qquad 1\,a = a,\ 0a = 0,\ \alpha 0 = 0.$$

При рассмотрении системы (4, 1) будем предполагать, что $b_1, \ldots, b_k \in H$, $a_{11}, \ldots, a_{kn} \in R$; решения будут разыскиваться также среди элементов $H$.

Примеры. 1. Пусть $a_{ij}$, $b_i$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$) суть целые числа ($R$ — кольцо целых чисел, $H$ — аддитивная группа целых чисел); определяются целочисленные решения системы (4, 1).

2. Общее: $R$ — эвклидово кольцо, $H$ — аддитивная группа этого кольца; решения определяются в этом кольце. Например, $R$ — некоторое поле; в этом случае теория системы (4, 1) охватывается известной теоремой о совместности (теорема Кронекера-Капелли).

3. $H$ — аддитивная группа неограниченно дифференцируемых в некотором интервале действительных функций одного аргумента $t$; $R$ — кольцо линейных дифференциальных операторов с действительными коэффициентами (проверить выполнение всех требований; почему функции предполагаются неограниченно дифференцируемыми?)*. Развиваемая далее теория применима, таким образом, к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида с постоянными коэффициентами.

Основной вопрос, рассматриваемый в этом параграфе, — приведение системы уравнений (4, 1) путем преобразования уравнений и неизвестных к простейшему виду; соответственно упрощению будет подвергаться матрица системы (4, 1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Одним из основных преобразований системы (4, 1) является (при $k > 1$) замена одного из уравнений системы суммой этого уравнения и произведения какого-либо оператора

* См. соответствующий пример из параграфа 2

из $R$ и какого-либо другого из этих уравнений (подобным преобразованием достигается исключение неизвестных). Например, прибавляя к первому уравнению произведение второго на $p$, получаем следующую систему:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}+pa_{21})x_1+\ldots+(a_{1n}+pa_{2n})x_n &= b_1+pb_2,\\
a_{21}x_1+\ldots+\qquad a_{2n}x_n &= b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{k1}x_1+\ldots+\qquad a_{kn}x_n &= b_k.
\end{aligned}
$$

Очевидно, каждое решение системы (4,1) является решением также и полученной системы. Обратно, вычитая из первого уравнения полученной системы произведение $p$ на второе уравнение (или, что равносильно, прибавляя произведение $-p$ и второго уравнения), можно восстановить первоначальную систему. Итак, каждое решение полученной системы является также решением первоначальной.

Таким образом, рассматриваемое преобразование обратимо, и это обстоятельство обеспечивает неизменность решений в результате такого преобразования.

Проведенное преобразование первого уравнения системы (4, 1) на матрице $A$ системы сказывается следующим образом: первая строка матрицы заменяется суммой элементов первой строки и произведения $P$ и соответствующих элементов второй строки.

Для получения простейшей формы системы приходится заменять также и неизвестные; основным преобразованием такого вида (при $n>1$) является замена одного из неизвестных суммой нового неизвестного и произведения какого-либо оператора $p\in R$ на другое из неизвестных. Например, замена $x_2=y_2+px_1$.

Система (4, 1) тогда принимает следующую форму:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}+pa_{12})x_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
(a_{k1}+pa_{k2})x_1+a_{k2}y_2+\ldots+a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что и это преобразование обратимо (замена $y_2=x_2-px_1$). Это позволяет, по формуле $x_2=y_2+px_1$, легко подсчитать решение одной системы по известному решению другой системы. Матрица системы $A$ при этом преобразуется так: к элементам первого столбца прибавляются произведения $p$ на соответствующие элементы второго столбца.

Очевидно, проще проводить такие преобразования непосредственно на матрице; предыдущие два основных преобразования, кроме того, следует пополнить. Будут рассматриваться следующие преобразования, называемые элементарными преобразованиями матрицы (или соответствующей системы линейных уравнений).

1 (2). Прибавление к какой-либо строке (столбцу) матрицы произведения произвольного элемента из $R$ на какую-либо другую строку (столбец).

3 (4). Умножение какой-либо строки (столбца) матрицы на делителя единицы.

5 (6). Перестановка двух строк (столбцов) матрицы*.

Все эти преобразования обратимы (проверить, почему в преобразованиях 3, 4 допускается умножение только на делитель единицы?).

Будем называть некоторую матрицу $B$ эквивалентной матрице $A$, если матрицу $B$ можно получить посредством конечного количества элементарных преобразований из матрицы $A$ (по схеме $A \to A_2 \to \ldots \to A_{s-} \to B$. Каждая следующая матрица получается из предыдущей посредством одного из шести элементарных преобразований).

Благодаря обратимости элементарных преобразований, если матрица $B$ эквивалентна $A$, то $A$ эквивалентна $B$; далее, легко видеть, что две матрицы, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой (доказать!); наконец, ненулевая матрица эквивалентна самой себе (доказать!). Очевидно, эквивалентные матрицы имеют одинаковый размер.

Основной в рассматриваемом вопросе является следующая теорема, называемая часто теоремой об элементарных делителях**.

Теорема 4, 1. Посредством конечного количества последовательных элементарных преобразований всякую матрицу, с элементами из эвклидова кольца, можно привести к („каноническому“) виду

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_r \end{pmatrix} \qquad (4,\ 2)$$

Здесь $m_1, \ldots, m_r$ отличны от нуля, прочие элементы матрицы равны нулю; в случае $r=0$, все элементы матрицы — нули; при $r>1$, $m_i | m_{i+1}$ $(i=1, \ldots, r-1)$***

Если обозначить через $y_1, \ldots, y_n$ неизвестные, возникающие после всех проделанных элементарных преобразований

---

* Преобразования 3, 4 позволяют в случае, если $R$ кольцо целых чисел, изменяя знак всех элементов строки или столбца, уменьшить количество отрицательных чисел в матрице (в системе). Преобразованиям 5, 6 соответствует перестановка в системе уравнений или неизвестных, что также, как увидим, помогает упростить запись.

** Понятие элементарного делителя вводится в дальнейшем

*** В частности, если $R$—поле, $m_1, \ldots, m_r$ являются делителями единицы. Тогда преобразованиями 5 или 6 матрицу (4, 2) можно привести к виду $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

системы (4, 1), через $c_1, \ldots, c_k$ — свободные члены полученной системы, то систему (4, 1) можно, таким образом, привести к виду

$$\begin{aligned} m_1 y_1 &= c_1, \\ &\cdots\cdots \\ m_r y_r &= c_r, \\ 0 &= c_{r+1}, \\ &\cdots\cdots \\ 0 &= c_k. \end{aligned} \tag{4,3}$$

Доказательство. Если все элементы матрицы $A$ равны нулю, то справедливость теоремы очевидна.

Будем предполагать теперь, что не все элементы $A$ равны нулю; назовем главным элементом матрицы один из наименьших среди ненулевых элементов матрицы. Докажем сперва, что если главный элемент матрицы $A$ не делит всех элементов матрицы, лежащих в той же строке или в том же столбце, то посредством конечного количества элементарных преобразований матрицу $A$ можно привести к матрице с меньшим главным элементом.

Прежде всего элементарными преобразованиями 5, 6 переведем главный элемент в левый верхний угол матрицы; будем считать, что $a_{11}$ — главный элемент. Пусть $a_{11}$ не делит, например, элемента первой строки $a_{1j}$ $(j > 1)$; деля $a_{1j}$ на $a_{11}$ неполным образом, получим $a_{1j} = pa_{11} + d$, причем $d \neq 0$ и $d$ меньше $a_{11}$.

Если теперь из $j$-столбца вычесть первый столбец, помноженный на $p$, получим матрицу с элементом $d$. Главный элемент этой матрицы поэтому меньше $a_{11}$. Утверждение доказано.

Заметим, что проведенное преобразование показывает, что если $a_{11}$ делит $a_{1j} (d = 0)$, то тогда можно получить элементарным преобразованием нуль на месте элемента $a_{1j}$.

Так же доказывается (с заменой столбцов строками) наше

---

* При $r = k$ уравнения вида $0 = c_i$ отсутствуют; если $r < k$ и, например, $c_{r+1} \neq 0$, то полученная система, а следовательно, и исходная несовместны. В случае, если $R$ и $H$ — множества целых чисел, разрешимость системы (4, 3) легко исследуется, для чего необходимы и достаточны условия: $m_1 | c_1, \ldots, m_r | c_r$, $c_{r+1} = 0, \ldots, c_k = 0$. Так же легко разбирается случай, если $H$ — произвольная группа, $R$ — поле; условие разрешимости определяется формулами: $c_{r+1} = 0, \ldots, c_k = 0$; решением будет $y_1 = m_1^{-1} c_1, \ldots, y_r = m_2^{-1} c_r$, $y_{r+1}, \ldots, y_n$ — произвольные элементы $H$. В случае, если $R_1$ — кольцо дифференциальных операторов, приходится решать дифференциальные уравнения с одной неизвестной, каждое: $m_1 y_1 = c_1, \ldots, m_r y_r = c_r$; $y_{r+1}, \ldots, y_n$, произвольны. Условием разрешимости является требование $c_{r+1} = 0, \ldots, c_k = 0$

утверждение в случае, если $a_{11}$ не делит какой-либо элемент первого столбца.

Пусть теперь $a_{11}$ делит все элементы первой строки и первого столбца, тогда, по сделанному замечанию, можно несколькими преобразованиями 1, 2 матрицу привести к виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{k2} \dots & b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Если $a_{11}$ не делит одного из элементов $b_{ij}$, то полученную матрицу также можно привести к матрице с меньшим главным элементом. Действительно, прибавляя к первой строке $i$-строку (преобразование 1) предыдущую матрицу приводят к виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{i2} \dots & b_{in} \\ 0 & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{k2} \dots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

а для этого случая возможность уменьшения главного элемента доказана.

Так как неограниченное уменьшение главного элемента невозможно, то на основании сделанных замечаний, после конечного количества элементарных преобразований матрицу можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & c_{22} \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{k2} \dots & c_{kn} \end{pmatrix},$$

причем $m_1 \neq 0$ делит все $c_{ij}$.

Дальнейшее преобразование ведется над строками и столбцами, начиная со вторых; при этом, очевидно, $m_1$ будет делить возникающие вместо $c_{ij}$ элементы.

Предполагая теорему справедливой для матриц меньшего размера, именно для матрицы $\begin{pmatrix} c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\dots \\ c_{k2} \dots c_{kn} \end{pmatrix}$, непосредственно заключаем об общей справедливости теоремы*.

Из доказательства теоремы видно, что приведение матрицы к простейшему виду возможно разными путями, тем

* Заметим, что схема доказательства применяется при практическом приведении матрицы к простейшему виду

не менее оказывается, что матрица $A$ однозначно, с точностью до делителей единицы, определяет величины $m_1, \ldots, m_r$. Чтобы выяснить этот важный вопрос с полной общностью, приведем элементарные преобразования к алгебраическим действиям над матрицами (именно к умножению матриц).

Теорема 4, 2. Если матрица $B$ эквивалентна матрице $A$, то существуют такие обратимые матрицы $P$, $Q$, что

$$B = PAQ\text{*}.$$

Сперва утверждение теоремы будет доказано в предположении, что матрица $B$ может быть получена из матрицы $A$ посредством одного элементарного преобразования.

Пусть, например, матрица $B$ получается в результате сложения $i$-строки (столбца) матрицы $A$ и произведения $p$ на $j$-строку (столбец). Пусть

$$T_{ij}(p) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & p & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \\ & & & \cdot & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (i) \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \\ (i)(j) \end{array}$$

(диагональные элементы равны единице, элемент $i$-строки, $j$-столбца равен $p$; прочие элементы — нули). Эта матрица обратима, так как $\det T_{ij}(p) = 1$ (теорема 3, 3)**; также обратима и матрица $Tp'_{ij}(p)$.

Непосредственно проверяется, что

$$B = T_{ij}(p)A \qquad \left(B = AT'_{ij}(p)\right)\text{***}.$$

Пусть теперь матрица $B$ получается из матрицы умножением элементов $i$-строки (столбца) на делителя единицы.

Положим,

$$T_i(\varepsilon) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \\ \cdots & & \varepsilon & \cdots & \cdot \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \cdot & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \\ (i) \end{array}.$$

Так как $\det T_i(\varepsilon) = \varepsilon$ делит единицу, то $T_i(\varepsilon)$ — обратимая матрица****.

---

* В дальнейшем будет доказано, что справедливо и обратное утверждение

** Обратная матрица равна $T_{ij}(-p)$ (проверить!)

*** В рассмотренных двух случаях одна из матриц $P$, $Q$—единичная

**** Обратимая матрица равна $T_i(\varepsilon^{-1})$ (проверить!)

Непосредственно проверяется, что

$$B = T_i(\varepsilon) A \qquad \bigl(B = A T_i(\varepsilon)\bigr).$$

Наконец, пусть $B$ получается из $A$ перестановкой и $j =$ = строк (столбцов). Пусть

$$S_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \vdots & & \vdots & \\ \cdots 1 & 0 & 1 \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots 1 & 0 & 1 \cdots \\ & \vdots & & \vdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ (i) \\ (j) \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} (i) & \quad (j) \end{matrix} & \end{array}$$

$det\ S_{ij} = -1$; следовательно, $S_{ij}$ — обратимая матрица*. Непосредственно проверяется, что

$$B = S_{ij} A \qquad (B = A\, S_{ij}).$$

Таким образом, элементарное преобразование строк сводится к помножению матрицы $A$ слева на некоторую обратимую матрицу $P$; $Q$ равно единичной матрице. При элементарных преобразованиях столбцов $P$ можно положить равным единичной матрице. Пусть теперь $B$ получается из $A$ следующей цепью элементарных преобразований: $A = A_1 \to \ldots \to A_{s-1} \to B = A_s$ (каждая последующая) матрица получается из предыдущей посредством одного элементарного преобразования. По доказанному, $A_i = P_i A_{i-1} Q_i$ $(i = 2, \ldots, S)$; здесь $P_i$, $Q_i$ — обратимые матрицы, одна из которых равна единичной. Тогда очевидно

$$A_s = P_s P_{s-1} \ldots P_2 A_1 Q_2 \ldots Q_{s-1} Q_s .$$

Полагая $P = P_s P_{s-1} \ldots P_2$, $Q = Q_2 \ldots Q_{s-1} Q_s$, окончательно получим

$$B = PAQ;$$

при этом (см. теорему 2, 4) $P$, $Q$ — обратимые матрицы.

Теорема доказана.

Теперь будет исследована связь между свойствами произведения матриц и свойствами множителей.

Теорема 4, 3. Ранг произведения матриц не превышает рангов множителей. Общий наибольший делитель миноров какого-либо порядка** одного из матричных множителей делит общий наибольший делитель миноров того же порядка

* Обратимая матрица равна $S_{ij}$

** Будем предполагать порядок рассматриваемых миноров не превышающим ширины и высоты произведения матриц произведения матриц. Теорема эта будет доказана сначала для произведения двух матриц.

Обозначим через $r(A)$ ранг матрицы $A$, через $d_s(A)$ — общий наибольший делитель миноров порядка $s$ матрицы $A$. Сначала будет доказано, что $r(AB) \leqslant r(A)$, $d_s(A) \mid d_s(AB)$ ($A$, $B$ — произвольные матрицы с элементами из $R$).

Рассмотрим произвольный минор $\triangle$ порядка $s$ матрицы $C = AB$. Для простоты будем предполагать, что минор $\triangle$ составлен из элементов первых $s$-строк и первых $s$-столбцов матрицы $C$ (благодаря возможности перенумерации это не ограничивает общности рассуждения). Таким образом, полагая ширину матрицы $A$ и высоту $B$ равными $n$,

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1}, \ldots, a_{11}b_{1s} + \ldots + a_{1n}b_{ns} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}b_{11} + \ldots + a_{sn}b_{n1}, \ldots, a_{s1}b_{1s} + \ldots + a_{sn}b_{ns} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j_1 \ldots j_s} \begin{vmatrix} a_{1j_1}b_{j_11}, \ldots, a_{1j_s}b_{j_ss} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{sj_1}b_{j_11}, \ldots, a_{sj_s}b_{j_ss} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \ldots j_s} b_{j_11} \ldots b_{j_ss} \begin{vmatrix} a_{1j_1} \ldots a_{1j_s} \\ \cdots\cdots \\ a_{sj_1} \ldots a_{sj_s} \end{vmatrix}.$$

Но определитель $\begin{vmatrix} a_{ij_1} \ldots a_{ij_s} \\ \cdots\cdots \\ a_{sj_1} \ldots a_{sj_s} \end{vmatrix}$ либо есть минор порядка $s$ матрицы $A$, либо отличается от него знаком (при разных $_1, \ldots, j_s$ (либо равен нулю) среди $j_1, \ldots, j_s$ встречаются одинаковые числа).

Таким образом, справедлива формула вида

$$\triangle = c_1 \triangle_1^1 + \ldots + c_k \triangle_s^1 \qquad (4, 4)$$

($\triangle_1^1, \ldots, \triangle_k^1$ суть миноры порядка $s$ матрицы $A$, $c_1, \ldots c_k$, — элементы из $R$)*. Аналогичные формулы справедливы для каждого минора матрицы $AB$.

При $s > r(A)$ все миноры порядка $s$ матрицы $A$ равны нулю; следовательно, на основании (4, 4) также и все миноры порядка $s$ матрицы $AB$ равны нулю; итак, $r(AB) \leqslant \leqslant r(A)$.

Так как $d_s(A)$ делит все миноры матрицы $A$, то на основании той же формулы (4, 4) $d_s(A)$ делит все миноры порядка $s$ матрицы $AB$ и, следовательно, $d_s(A) \mid d_s(AB)$.

Соотношения $r(AB) \leqslant r(A)$, $d_s(A) \mid d_s(AB)$, доказаны для

* Справедливо более точное утверждение: каждый минор матрицы $AB$ равен сумме произведений определенных миноров (того же порядка) матриц $A$ и $B$. См. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры, ГОНТИ, 1937, § 38

первого матричного множителя. Заметим, что, например, $r(A)=r(A^1)$, $d_s(A)=d_s(A^1)$ (почему?).

Таким образом, $r(B^1A^1)\leqslant r(B^1)$, $d_s(B^1)\,|\,d_s(B^1A^1)$; так как $(AB)^1=B^1A^1$, то $r(AB)\leqslant r(B)$, $d_s(B)\,|\,d_s(AB)$.

Распространение теоремы на случай произвольного количества множителей легко приводится индукцией (по числу множителей).

Следствие. Если матрицы $A$, $B$ эквивалентны, то их ранги равны и общие наибольшие делители миноров одинакового порядка матриц $A$ и $B$ совпадают.

На основании теоремы 4, 2 $B=PAQ$, $A=P^{-1}BQ^{-1}$ (матрицы $P$, $Q$ обратимы).

На основании теоремы 4, 3 из этих формул соответственно следует

$$r(B)\leqslant r(A),\quad r(A)\leqslant r(B)$$

$$d_s(A)\,|\,d_s(B),\quad d_s(B)\,|\,d_s(A).$$

Таким образом, $r(A)=r(B)$; $d_s(A)$ и $d_s(B)$ эквивалентны. Так как общий наибольший делитель определяется только с точностью до эквивалентности, то $d_s(B)$ является также общим наибольшим делителем миноров порядка $s$ матрицы $A$ (и наоборот). Утверждение доказано.

На основании теоремы 4, 1, произвольная матрица $A$ эквивалентна матрице вида $B=\begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_r \end{pmatrix}$.

Используя элементарное преобразование 5 или 6, можно заменить любой из элементов ему эквивалентным. Элементы $m_1,\ldots,m_r$ определяются только с точностью до эквивалентности.

Очевидно, $r(B)=r$; так как $m_i\,|\,m_{i+1}$ $(i=1,\ldots,r-1)$ то $d_s(B)=m_1\ldots m_s$ $(s=1,\ldots,r)$.

По доказанному, $d_s(B)$ является также и общим наибольшим делителем $d_s(A)$ — миноров порядка $s$ матрицы $A$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4, 4. Ненулевые элементы $m_1,\ldots,m_r$ в канонической форме матрицы $A$ однозначно, с точностью до эквивалентности, определяются матрицей $A$. Именно, их количество $r$ равно рангу матрицы $Au_s$, определяются они по формуле $m_s=\dfrac{d_s(A)}{d_{s-1}(A)}$ $(s=1,\ldots,r)$, полагая $d_0(A)=1$.

На основании следствия теоремы 4, 3 элементы $m_1,\ldots,m_r$ не меняются при элементарных преобразованиях; их называют инвариантными (неизменными) множителями матрицы $A$.

Введем общее понятие об элементарных делителях, существенно используемое в следующем параграфе.

Каждый инвариантный множитель $m$, не являющийся делителем единицы, разложим в произведение простых множителей.

Пусть $m = \varepsilon p_1^{\varkappa_1} \dots p_t^{\varkappa_t}$, $\varepsilon$ — делитель единицы, натуральные числа $\varkappa_1, \dots, \varkappa_t$ показывают кратности различных простых делителей $p_1, \dots, p_t$.

Каждый элемент вида $\varepsilon_1 p_1^{\varkappa_1}, \dots, \varepsilon_t p_t^{\varkappa_t}$ ($\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ — произвольные делители единицы) называется элементарным делителем матрицы $A$; таким образом, элементарные делители определяются также с точностью до эквивалентности.

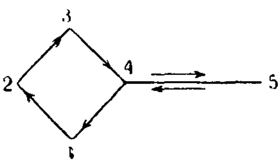
Фиксируя произвольно делители единицы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$, рассмотрим множество всех элементарных делителей, полученных при разложении всех $m_s$ (не являющихся делителями единицы). При разложении различных $m_s$ могут появляться эквивалентные элементарные делители, например, $\varepsilon_1 p_1^{\varkappa_1}$, $\varepsilon_1^1 p_1^{\varkappa_1}$; кратность таких повторений будет в дальнейшем учитываться.

Докажем теперь теорему, подробно характеризующую условия эквивалентности двух матриц.

Теорема 4, 5. Пусть матрицы $A$ и $B$ имеют одинаковый размер. Следующие пять утверждений равносильны:

1. Матрицы $A$ и $B$ эквивалентны.
2. Существуют такие обратимые матрицы $P$, $Q$, что $B = PAQ$.
3. Ранги матриц $A$ и $B$ равны; общие наибольшие делители миноров одинакового порядка матриц $A$ и $B$ попарно эквивалентны.
4. Ранги матриц $A$ и $B$ равны; инвариантные множители этих матриц попарно эквивалентны.
5. Ранги матриц $A$ и $B$ равны; элементарные делители матриц $A$ и $B$ с учетом их повторяемости попарно эквивалентны.

Равносильность этих условий будем доказывать по следующей схеме:




Здесь точками отмечены утверждения 1, 2, 3, 4, 5, стрелками указано „направление“ вывода: так, например, $1 \rightarrow 2$ означает доказательство, что из утверждения 1 следует утверждение 2.

Очевидно, если будут обоснованы все выводы, отмечен-

3*

ные на схеме стрелками, то из каждого утверждения следует каждое другое утверждение (из каждой точки можно дойти до любой другой точки, следуя в направлении, указанном стрелками).

1. $\to$ 2. Это утверждение доказано (теорема 4, 2).

2. $\to$ 3. Это утверждение доказано (следствие теоремы 4, 3).

3. $\to$ 4. Пусть справедливо утверждение 3:

$r(A) = r(B) = r$; $d_s(A)$, $d_s(B)$ эквивалентны $(s = 1, \ldots, r)$. Из формул $m_s(A) = \frac{d_s(A)}{d_{s-1}(A)}$, $m_s(B) = \frac{d_s(B)}{d_{s-1}(B)}$ тогда непосредственно следует эквивалентность $m_s(A)$ и $m_s(B)$ $(s=1, \ldots, r)$. Следовательно, утверждение 4 справедливо.

4. $\to$ 5. Пусть $r(A) = r(B)$, $m_s(A)$ и $m_s(B)$ эквивалентны $(s = 1, \ldots, r)$. Разлагая $m_s(A)$, $m_s(B)$ в произведения простых множителей, заключаем о попарной эквивалентности элементарных делителей (с учетом их кратности).

5. $\to$ 4. Пусть $r(A) = r(B)$ и элементарные делители матриц $A$ и $B$ попарно (с учетом их кратности) эквивалентны. Отбрасывая для простоты делители единицы, разобьем множество (с повторениями) элементарных делителей матрицы $A$ вида $p^\varkappa$ на подмножество элементарных делителей с одинаковыми основаниями. Запишем каждое такое подмножество в порядке невозрастания показателей (напомним, что могут встретиться повторения!). Получится следующая схема:

$$\begin{array}{ll}
p_1^{\varkappa_1},\ p_1^{\varkappa_1'},\ p_1^{\varkappa_1''}, \ldots & (\varkappa_1 \geqslant \varkappa_1' \geqslant \varkappa_1'' \geqslant \ldots), \\
p_2^{\varkappa_2},\ p_2^{\varkappa_2'}, \ldots & (\varkappa_2 \geqslant \varkappa_2' \geqslant \ldots), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
p_e^{\varkappa_e},\ p_e^{\varkappa_e'}, \ldots & (\varkappa_e \geqslant \varkappa_e' \geqslant \ldots).
\end{array}$$

Здесь $p_1 \ldots, p_e$ — все различные основания элементарных делителей*. Дополним эти подмножества единицами до длины наибольшего среди них. Замечая, что $m_s(A) \mid m_{s+1}(A)$ $(s = 1, \ldots r-1)$, учитывая возможность определения $m_s(A)$ только с точностью до делителей единицы (эквивалентности), легко проверить, что можно положить

$$\begin{aligned}
m_r(A) &= p_1^{\varkappa_1} p_2^{\varkappa_2} \cdots p_e^{\varkappa_e}, \\
m_{r-1}(A) &= p_1^{\varkappa_1'} p_2^{\varkappa_2'} \cdots p_e^{\varkappa_e'}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

После аналогичного расчета, примененного к матрице $B$, заключаем, что можно полагать

$$m_r(A) = m_r(B), \quad m_{r-1}(A) = m_{r-1}(B), \ldots$$

Утверждение 4 доказано.

* Могут встречаться подмножества, содержащие только один элементарный делитель; запись таких подмножеств упростится

$4 \to 1$. Пусть теперь $r(A)=r(B)$, $m_s(A)$ и $m_s(B)$ эквивалентны ($s = 1, \ldots, r$). Таким образом, матрица $A$ эквивалентна $\begin{pmatrix} m_1(A) & & \\ & m_r(A) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$, матрица $B$ эквивалентна $\begin{pmatrix} m_1(B) & & \\ & m_r(B) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$.

Так как $m_s(A)$ и $m_s(B)$ отличаются друг от друга только делителем единицы, то используя преобразование 5 (или 6), заключаем, что матрицы $\begin{pmatrix} m_1(A) & & \\ & m_r(A) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} m_1(B) & & \\ & m_r(B) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ эквивалентны. Так как матрицы, эквивалентные одной и той же матрице, эквивалентны между собой, то отсюда легко заключить, что матрицы $A$ и $B$ эквивалентны.

*Утверждение* 1 *доказано. Таким образом, доказательство теоремы* 4, 5 *завершено.*

Так как элементарные делители определяют инвариантные множители (см. вывод $4 \to 5$), то теорема 4, 1 часто называется теоремой об элементарных делителях.

## V. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Среди операторов, действующих на аддитивную группу векторов трехмерного пространства (операторы растяжения, проектирования), простейшими, являются операторы растяжения — умножения векторов на некоторое действительное число. Множество этих чисел образует поле (действительных чисел). Именно это обстоятельство и послужит основой дальнейшего общего определения векторного пространства.

Пусть аддитивно записанная коммутативная группа $H$ обладает множеством $P$ линейных операторов, отображающих $H$ в $H$ и образующих коммутативное поле, причем единица поля $P$ является единичным оператором. В этом случае множество $H$ называется векторным, или линейным пространством над полем $P$; элементы $H$ называются векторами, элементы поля $P$ — скалярами*.

Таким образом, в векторном пространстве определены операция сложения векторов и операция умножения вектора на скаляр, подчиняющиеся элементарным арифметическим правилам; сумма векторов и произведение скаляра на вектор являются векторами.

Важнейшие для приложений — случаи, когда поле операторов $P$ есть поле действительных чисел (действительное

* Векторы далее обозначаются греческими буквами, скаляры—латинскими

векторное пространство) или комплексных чисел (комплексное векторное пространство).

Пример. Множество строк одинаковой длины $n$ с элементами из коммутативного поля $P$ является векторным пространством над $P$ (сложение строк, умножение строки на элемент из $P$ определяются матричными правилами). Вообще, множество матриц одинакового размера с элементами из $P$ образуют векторное пространство над $P$.

Соотношение между векторами, выраженное посредством основных операций векторного пространства, может быть представлено в виде

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = 0. \qquad (5, 1)$$

Если при этом не все скаляры равны нулю, векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются линейно зависимыми.

Если соотношение (5, 1) для векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеет место только при нулевых $a_1, \ldots, a_n$, векторы называются линейно независимыми*.

Нулевой вектор зависим: $1 \cdot 0 = 0$. Соотношение (5, 1) в матричной форме можно представить, например, так $(a_1 \ldots a_n) \times \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$; если векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы, то $(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Вообще, если $A$ — матрица со скалярными элементами и $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, то из независимости векторов следует $A = 0$; если $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, то $A = B$.

Лемма 5, 1. Если часть векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ зависима, то векторы $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ также зависимы.

Действительно, пусть, например, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k < n)$ зависимы, $a\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, тогда $a_1\alpha_1, \ldots, a_k\alpha_k + 0\,\alpha_{k+1} + + \ldots + 0\,\alpha_n = 0$ определяет зависимость векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (не все коэффициенты нули!).

Введем другую форму линейной зависимости. Вектор $\alpha$ называется линейно зависимым от векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, если можно подобрать такие скаляры $a_1, \ldots, a_k$, что $\alpha = a_1\alpha_1 + + \ldots + a_k\alpha_k$.

Лемма 5, 2. Если векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n > 1)$ зависимы, то, по крайней мере, один из них зависит от остальных. Если вектор $\alpha_n$ зависит от векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, то векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ зависимы.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ зависимы и $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = 0$ зависимость, не все коэффициенты которой равны нулю.

---

* Указание „линейно" в дальнейшем будет опускаться

Пусть, например, $a_n \neq 0$, тогда

$$\alpha_n = -\frac{a_1}{a_n}\alpha_1 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha_{n-1},$$

что доказывает первое утверждение леммы. Если $\alpha_n$ зависит от векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, то $\alpha_n = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{n-1}\alpha_{n-1}$, или $-b_1\alpha_1 - \ldots - b_{n-1}\alpha_{n-1} + 1\,\alpha_n = 0$. Следовательно, векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ зависимы.

Лемма 5, 3. Пусть векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы и каждый из векторов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ зависит от векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{11k}\alpha_1 +, \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_k &= a_{k1} + \alpha_1 \ldots + a_{kn}\alpha_n, \end{aligned} \tag{5, 2}$$

тогда наибольшее количество независимых среди векторов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ равно рангу матрицы коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{k1} \ldots a_{kn} \end{pmatrix}.$$

При этом, если ранговый минор этой матрицы состоит, например, из элементов первых $r$ строк, то первые векторы $\beta_1, \ldots, \beta_r$ независимы и при $k > r$ каждый из следующих $k-r$ векторов $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_k$ зависит от векторов $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

Это предложение хорошо известно для того случая, если векторы $\beta_1, \ldots, \beta_k$ являются строками $\beta_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \beta_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$; доказательство леммы (5, 2) и будет опираться на этот результат для строк, лемма 5, 2, в сущности, равносильна этому результату, как будет выяснено в дальнейшем.

Заметим прежде всего следующее: всякая зависимость между строками матрицы $A$

$$c_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) + \ldots + c_k(a_{k1}, \ldots, a_{kn}) = (0, \ldots, 0)$$

может в матричной форме быть представлена в виде $CA = 0$ $(C = (c_1, \ldots, c_k))$.

Представим теперь систему (5, 2) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix};$$

тогда, обозначая $B = (b_1, \ldots, b_k)$, получим

$$b_1\beta_1 + \ldots + b_k\beta_k = B\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = BA\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Зависимость $b_1\beta_1 + \ldots + b_k\beta_k = 0$ равносильна, таким образом, формуле $BA\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix} = 0$ или, так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы, — $BA = 0$.

Таким образом, зависимым (независимым) строкам матрицы $A$ соответствуют зависимые (независимые) векторы $\beta_1, \ldots, \beta_k$ (коэффициенты зависимости между строками и соответствующими векторами при этом одинаковы). Справедливость леммы 5, 3 непосредственно следует тогда из известного соответствующего утверждения для строк матрицы $A$.

Следствие. Если $k > n$, то векторы $\beta_1, \ldots, \beta_k$ зависимы. Действительно, в этом случае $r(A) \leqslant n < k$. Введем теперь важное понятие числа измерений (размерности) векторного пространства.

Множество $M$ векторов называется множеством образующих пространства $H$, если каждый вектор нз $H$ линейно зависит от векторов из $M$. Если пространство $H$ не обладает конечной системой образующих, оно называется бесконечномерным.

В дальнейшем будем рассматривать только векторные пространства с конечной системой образующих (конечномерные пространства); количество векторов в такой системе будем называть длиною системы образующих. Конечно, одно и то же пространство может обладать системами образующих разной длины.

Конечную систему образующих, состоящую из независимых векторов, назовем базисом пространства. Если пространство содержит только нулевой вектор, оно, очевидно, не обладает базисом. Будем говорить в этом случае, что базис такого нулевого пространства — пустой (длиною нуль).

Теорема 5, 1. Каждое конечно-мерное пространство обладает базисом, причем длины всех базисов пространства равны. В случае, если пространство состоит только из нулевого вектора, базис — пустой, длиною нуль; в этом случае теорема верна.

Пусть теперь пространство содержит ненулевые векторы, тогда всякая система образующих должна также содержать ненулевые векторы.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — одна из систем образующих пространства. Если $s = 1$, то так как $\alpha_1 \neq 0$ ($H$ — ненулевое пространство), то образующая $\alpha_1$ образует базис. Пусть теперь $s > 1$. Покажем, что если векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ зависимы, длину $s$ системы образующих можно уменьшить. Действительно, пусть, например, $\alpha_s = a_1\alpha_1 + \ldots + a_{s-1}\alpha_{s-1}$, тогда, очевидно, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ есть система образующих.

Так как количество понижений длины системы образующих ограниченно, то существует система образующих, состоящая из независимых векторов, — базис пространства.

Пусть теперь $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и $\beta_1, \ldots, \beta_t$ — два базиса пространства, тогда имеем

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1s}\alpha_s, & \alpha_1 = b_{11}\beta_1 + \ldots + b_{1t}\beta_t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_t = a_{t1}\alpha_1 + \ldots + a_{ts}\alpha_s; & \alpha_s = b_{s1}\beta_1 + \ldots + b_{st}\beta_t. \end{array}$$

На основании следствия леммы 5, 3 заключаем: если $s < t$, то (по первой группе формул) $\beta_1, \ldots, \beta_t$ должны быть зависимы; если $s > t$, то (по второй группе формул) векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ зависимы. Так как обе системы векторов независимы, то $s = t$.

Доказанная теорема позволяет дать следующее определение: *размерностью пространства* называется длина базиса пространства; таким образом, нулевое векторное пространство имеет размерность нуль, пространства, содержащие ненулевые векторы, — положительную размерность. Как показывает доказательство теоремы 5, 1, размерность пространства является минимальной длиной системы образующих пространства.

С другой стороны, размерность пространства равна также максимальному количеству линейно независимых векторов, содержащихся в пространстве.

Примеры. 1. Множество строк длины $n$ с элементами из коммутативного поля $P$ (с матричным определением сложения строк и умножения строки на элемент из $P$) есть $n$-мерное векторное пространство над $P$.

Действительно, строки $\alpha_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, \alpha_n = (0, 0, \ldots, 1)$ составляют систему образующих: произвольная строка $\alpha_1 = (a_1, \ldots, a_n) = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. Строки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы: если $c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = (c_1, \ldots, c_n) = 0$, то $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$.

Таким образом, базис имеет длину $n$.

Вообще, множество матриц высоты $k$ и ширины $n$ с элементами из $P$ образует $kn$-мерное векторное пространство над $P$.

2. Множество линейных форм $n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из $P$ (при обычном определении операций) является $n$-мерным векторным пространством над $P$ (доказать!).

3. Множество полиномов аргумента $t$, степени меньше $n$, с коэффициентами из $P$ (при обычном определении операций) является $n$-мерным векторным пространством над $P$ (доказать!).

4. Множество всех действительных полиномов при обычном определении операций сложения полиномов и умноже-

ния на число образует бесконечно-мерное действительное векторное пространство (почему?). Тем более это справедливо для множества функций, непрерывных в некотором интервале*,

Пусть $H$ есть $n$-мерное векторное пространство ($n \geqslant 1$), $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ его базис. Тогда каждый вектор $\alpha \in H$ может быть представлен в виде

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n\,, \text{ или } \alpha = (a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Скаляры $a_1, \ldots, a_n$ в этом разложении определяются вектором $\alpha$ однозначно. Действительно, если $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n = a_1'\alpha_1 + \ldots + a_n'\alpha_n$, то $a_1 = a_1', \ldots, a_n = a_n'$ (векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы!).

Скаляры $a_1, \ldots, a_n$ называются координатами вектора $\alpha$ относительно базиса $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Следующая теорема характеризует общность в свойствах всех векторных пространств над одним и тем же полем, одинакового числа измерений.

Теорема 5, 2. Все векторные $n$-мерные пространства над полем $P$ изоморфны**.

Пусть $H$, $H'$ — два таких пространства; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n'$ — какой либо базис $H$, $\alpha_1', \ldots, \alpha'_n$ — базис пространства $H'$

Каждый вектор $\alpha(\beta)$ из $H\,(H')$ может быть однозначно представлен в виде

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n,\ \beta = b_1\alpha_1' + \ldots + b_n\alpha_n'.$$

Установим теперь следующее взаимно однозначное соответствие между векторами пространств $H$ и $H'$. Соответствующими будем считать векторы с одинаковыми координатами (в рассматриваемых базисах):

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \text{ и } \alpha' = a_1\alpha_1' + \ldots + a_n\alpha_n'.$$

Легко видеть, что суммы соответствующих векторов соответствуют друг другу так же, как и произведения соответствующих векторов на один и тот же скаляр. Каждую формулу, справедливую в одном пространстве, выражаемую посредством введенных векторных действий, можно перевести с помощью этого соответствия в формулу, справедливую для другого пространства. Теорема доказана.

Таким образом, исследование любого $n$-мерного векторного пространства может быть сведено к исследованию любого из частного вида $n$-мерных пространств (см. при-

---

* Изучение бесконечно-мерных функциональных пространств проводится в функциональном анализе

** См. параграф 2

веденные выше примеры). Примером этого является доказательство леммы 5, 3.

Следующая теорема выясняет возможности выбора базиса.

Теорема 5, 3. Всякая система $n$ независимых векторов $n$-мерного пространства образует базис. Всякая система независимых векторов может быть дополнена до базиса. Всякая система образующих длины $n$ (в $n$-мерном пространстве) образует базис.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — независимые векторы. Тогда, если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — какой-либо базис,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_{11}\beta_1 + \ldots + p_{1n}\beta_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= p_{n1}\beta_1 + \ldots + p_{nn}\beta_n. \end{aligned} \tag{5, 3}$$

По лемме 5, 3, так как векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы, ранг матрицы коэффициентов

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

равен $n$ : $\det P \neq 0$; следовательно, матрица $P$ обратима (теорема 3, 3).

Формулы (5, 3) имеют следующую матричную запись:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{5, 4}$$

Таким образом, формулы (5, 3) обратимы

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произвольный вектор $\alpha \in H$, линейно-выражаемый через базис $\beta_1, \ldots, \beta_n$, линейно выражается также и через векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — это система образующих.

Так как векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы, то они составляют базис. Пусть, вообще, векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ независимы; пусть

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_{11}\beta_1 + \ldots + p_{1n}\beta_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k &= p_{k1}\beta_1 + \ldots + p_{kn}\beta_n. \end{aligned}$$

По лемме 5, 3, ранг матрицы $\begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}$ равен $k \leqslant n$.

Пусть, например, $\begin{vmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \ldots & p_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$ и $k < n$, тогда на основании леммы 5, 3 легко убедиться, что векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$ независимы (проверить!) и следовательно, по-предыдущему, образуют базис.

Остается доказать последнее утверждение теоремы. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — система образующих. Так как пространство $n$-мерно, то длина этой системы образующих не может быть сокращена. Следовательно, векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы (в противном случае сокращение возможно!) и образуют базис. Теорема доказана.

Формулы (5, 3) или (5, 4), вместе с тем, представляют общий вид связи между двумя базисами, при этом, по лемме 5, 3, необходимо $det P \neq 0$. Это формулы преобразования базиса.

Составим теперь формулы преобразования координат.

Пусть $\xi$ — произвольный вектор; пусть координаты вектора $\xi$ в базисах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно равны $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$.

Имеем, по формуле (5, 4),

$$(y_1, \ldots, y_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \\ \beta_n\end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Так как векторы $\beta_1, \ldots, \beta_n$ независимы, то

$$(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)P, \text{ или } \begin{pmatrix}y_1\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix} = P^1\begin{pmatrix}x_1\\ \\ x_n\end{pmatrix}, \qquad (5, 5)$$

или, наконец,

$$\begin{aligned} y_1 &= p_{11}x_1 + \ldots + p_{n1}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= p_{1n}x_1 + \ldots + p_{nn}x_n. \end{aligned} \qquad (5, 6)$$

Эти формулы называются формулами преобразования координат.

Введем теперь некоторое обобщение полученных разложений векторов по образующим пространство, в частности, по базису. Для этого нам понадобится понятие подпространства.

Пусть $\mu$—такое непустое множество векторов из $H$, что для любого скаляра $a \in P$ и любых векторов $\alpha, \beta \in \mu$ имеют место утверждения $a\alpha \in \mu$ и $\alpha + \beta \in \mu$ ($\mu$ замкнуто относительно основных операций над векторами). Очевидно, в этом случае $\mu$ является также векторным пространством и называется подпространством пространства $H$, в частности, $H$ и множество, состоящее только из нулевого вектора, являются подпространствами $H$.

Теорема 5, 4. Размерность подпространства не превышает размерности пространства.

Пусть $G$ — подпространство $H$. Так как $G \leqslant H$, то в $G$ существует не более $n$ независимых векторов ($n$ — размерность $H$). Но максимальное количество независимых векторов равно размерности пространства. Итак, размерность $G$ не больше размерности $H$.

В частности, если размерность пространства $G$ равна разности $H$, то $G = H$. Действительно, в этом случае базис $G$, — $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — образует также базис $H$.

Обычный способ задания подпространства состоит в следующем: задается (вообще, произвольно) некоторая система векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in H$. Тогда множество всех векторов вида $a_1\alpha_1 + \ldots + a_s\alpha_s$ образует, очевидно, подпространство пространства $H$ (проверить!); $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ являются образующими этого пространства. Из теоремы 5, 4 следует, что каждое подпространство конечно-мерного пространства $H$ может быть задано таким образом.

В частности, задавая одну ненулевую образующую $\alpha_1$, получим одномерное пространство, состоящее из векторов вида $a\alpha_1$ (как говорят, порожденное вектором $\alpha_1$).

Пространство $H$ называется суммой подпространств $H_1, \ldots, H_s$, если каждый вектор $\alpha$ из $H$ может быть представлен в виде суммы векторов $\alpha_1 \in H_1, \ldots, \alpha_s \in H_s$; $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$, в этом случае пишут $H = H_1 + \ldots + H_s$. В частности, пусть $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — некоторая система образующих пространства $H$; $H_1, \ldots, H_s$ — одномерные или нульмерные подпространства (если $\beta_1$, например, равен нулю, $H_1$ — нульмерно), порожденные векторами $\beta_1, \ldots, \beta_s$ соответственно. Тогда, очевидно, $H = H_1 + \ldots + H_s$.

Сделаем следующие очевидные замечания: если какое-либо из слагаемых подпространств состоит только из нуля, такое слагаемое можно в сумме пропустить. Далее, если, например, $H_1 = H'_1 + H''_1$, то $H = H_1' + H_1'' + H_2 + \ldots + H_s$; слагаемые в сумме можно, в свою очередь, разлагать в суммы своих подпространств.

Определим теперь разложение пространства в сумму подпространств, которое соответствовало бы в этом же смысле базису.

Пространство $H$ называется прямой суммой подпространств $H_1, \ldots, H_s$, если $H = H_1 + \ldots + H_s$ и притом в разложении $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$ ($\alpha_1 \in H_1, \ldots, \alpha_s \in H_s$), $\alpha = 0$ имеет место только при $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_s = 0$. В этом случае каждый элемент представим в виде $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$ ($\alpha_1 \in H_1, \ldots, \alpha_s \in H_s$) единственным образом.

Действительно, если $\alpha = \alpha_1 + \ldots, + \alpha_s = \beta_1 + \ldots, + \beta_s$ ($\alpha_1, \beta_1 \in H_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s \in H_s$), то $(\alpha_1 - \beta_1) + \ldots, + (\alpha_s - \beta_s) = 0$ и, следовательно, по предположению, $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_s - \beta_s = 0$.

Если, в частности, $H_1, \ldots, H_s$ одномерны и $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ —

образующие этих подпространств, то векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ независимы и образуют базис пространства $H$ (проверить!).

Примеры. 1. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = 0, \end{array}$$

коэффициенты которой принадлежат коммутативному полю $P$. Решения $x_1, \ldots, x_n$ системы будем определять из элементов этого же поля. Если ранг матрицы коэффициентов равен $r$, то, как известно, система имеет $n-r$ независимых решений $(b_{11}, \ldots, b_{1n}), \ldots, (b_{n-r1}, \ldots, b_{n-rn})$ (фундаментальная система решений); всякое решение системы линейно зависит от этих решений. Таким образом, множество решений рассматриваемой системы образует $(n-r)$-мерное векторное пространство над полем $P$, которое является подпространством $n$-мерного пространства всех строк длины $n$ с элементами из $P$.

2. Как известно, линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + f_n(t)x = 0,$$

коэффициенты которого суть действительные, непрерывные в интервале $(a, b)$ функции, имеет в этом интервале $n$ линейно независимых решений (фундаментальная система решений), при этом всякое решение этого уравнения линейно зависит от этих решений. Таким образом, множество решений рассматриваемого уравнения образует $n$-мерное действительное векторное пространство—подпространство бесконечно-мерного пространства $n$ раз дифференцируемых функций.

3. Пусть $H$ — множество векторов трехмерного пространства; для простоты будем представлять векторы исходящими из одной точки $O$. Пусть $P, P'$ — две разные плоскости, проходящие через $O$, $p$ — прямая, проходящая через начало и не лежащая в плоскости $P$.

Будем обозначать через $P, P', p$ также множества радиус-векторов, лежащих соответственно на $P, P', p$. Тогда $P, P', p$ — пространства и $H = P + P'$ (сумма не прямая); $H = P \dotplus p$ (сумма прямая).

Основным предметом дальнейшего изучения будут являться линейные преобразования конечно-мерного векторного пространства, важность которых отмечалась в параграфе 1. В параграфе 2 дано определение линейного оператора, их равенства, суммы и произведения. Скаляр $a \in P$, как ранее указывалось, представляет также линейный оператор — оператор „растяжения“.

Линейный оператор $\sigma$, определенный для всех векторов $n$-мерного пространства, отображающий $H$ в $H$ (для всякого вектора $\alpha \in H$, также $\alpha a \in H$) и коммутирующий со всеми скалярами из $P$ (для всякого $a \in P$, $\sigma a = a\sigma$), будет называться линейным преобразованием векторного пространства.

В частности, единичный и нулевой операторы пространства $H$ являются линейными преобразованиями; сумма и произведение линейных преобразований являются также линейными преобразованиями (проверить!).

Перечислим основные свойства линейных преобразований: пусть $\sigma$, $\tau$ — линейные преобразования, $a$ — скаляр, $\alpha$, $\beta$ — векторы, тогда $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma\alpha + \sigma\beta$, $\sigma(a\alpha) = a\sigma\alpha$*; $\sigma = \tau$; равносильно $\sigma\alpha = \tau\alpha$ (для всякого $\alpha \in H$);

$(\sigma + \tau)\alpha = \sigma\alpha + \tau\alpha$, $\sigma(\tau\alpha) = (\sigma\tau)\alpha$ (по определению суммы и произведения операторов),

$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma\alpha + \sigma\beta$ (по определению линейного оператора),

$\sigma(a\alpha) = a(\sigma\alpha)$ (по определению линейного преобразования).

В частности, если $\varphi(t) = a_0 t^n + \ldots + a_{n-1} t + a_n$ есть полином с коэффициентами из $P$, то $\varphi(\sigma) = a_0\sigma^n + \ldots + a_{n-1}\sigma + a_n$ представляет собою линейное преобразование.

Очевидно, сумма и произведение преобразований такого вида, зависящих от одного преобразования $\sigma$, есть снова преобразование такого же вида; множество таких преобразований образует кольцо и притом коммутативное, так как степени $\sigma$ и скаляры коммутируют между собой.

Покажем теперь, что произвольное линейное преобразование $\sigma$ $n$-мерного векторного пространства над $P$ однозначно определяется квадратной матрицей порядка $n$ с элементами из $P$. Именно, выберем в пространстве $H$ произвольный базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; так как $\sigma\alpha_1, \ldots \sigma\alpha_n \in H$ то

$$\begin{aligned} \sigma\alpha_1 &= a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma\alpha_n &= a_{n1}\alpha_1 + \ldots + a_{nn}\alpha_n. \end{aligned} \tag{5, 7}$$

Это соотношение можно переписать и так:

$$\begin{pmatrix} \sigma\alpha_1 \\ \\ \sigma\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix};$$

---

* Из последних двух свойств следует, что $\sigma(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\sigma\alpha_1 + \ldots + a_k\sigma\alpha_k$, для любых скаляров $a_1, \ldots, a_k$ и векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (проверить!)

если ввести обозначение, согласованное с правилами действий над матрицами, $\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\alpha_1 \\ \vdots \\ \sigma\alpha_n \end{pmatrix}$,

то получим

$$\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{5, 8}$$

Так как координаты определяются однозначно, то $\sigma$ однозначно определяет матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Покажем, что справедливо и обратное. Задание матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ однозначно определяет преобразование $\sigma$ (иначе говоря, определяет действие преобразования $\sigma$ на каждый вектор пространства $H$).

Действительно, пусть $\xi = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ — произвольный вектор, тогда

$$\sigma\xi = x_1\sigma\alpha_1 + \dots + x_n\sigma\alpha_n = (x_1, \dots, x_n)\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{5, 9}$$

Таким образом, задание базиса, матрицы и вектора $\xi$, по формуле (5, 8), однозначно определяет вектор $\sigma\xi$. Больше того, произвольно задавая матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и определяя оператор $\sigma$, по формуле (5, 9),

$$\sigma\xi = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

получим преобразование, которому соответствуют формулы (5, 7) с заданной матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.*

По формуле (5, 9) легко определить координаты вектора $\sigma\xi$ по координатам вектора $\xi$.

Действительно, если $\sigma\xi = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n = (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, то из (5, 9) получим

---

* Доказать, что формула (5, 9) определяет линейное преобразование

$$(y_1, \ldots, y_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}a_{11} \ldots a_{1n}\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ a_{n1} \ldots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

и следовательно,

$$(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}a_{11} \ldots a_{1n}\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ a_{n1} \ldots a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Эту формулу удобно записать в транспонированном виде

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} \ldots a_{n1}\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ a_{1n} \ldots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \\ x_n\end{pmatrix} \tag{5, 10}$$

или

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{n1}x_n,\\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ y_n &= a_{1n}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Матрицу $A = \begin{pmatrix}a_{11} \ldots a_{n1}\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ a_{1n} \ldots a_{nn}\end{pmatrix}$ называют матрицей преобразования $\sigma$, относительно базиса $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*.

Теорема 5, 5. Соответствие между линейными преобразованиями $n$-мерного пространства и их матрицами в некотором определенном базисе обладает следующими свойствами:

1. Оно взаимно однозначно.
2. Нулевому преобразованию соответствует нулевая матрица.
3. Единичному преобразованию соответствует единичная матрица.
4. Сумме преобразований соответствует сумма соответствующих матриц.
5. Произведению преобразований соответствует произведение соответствующих матриц.
6. Произведению преобразования на скаляр соответствует произведение матрицы на тот же скаляр.

Таким образом, кольцо всех линейных преобразований $n$-мерного пространства над полем $P$ и кольцо всех квадратных матриц $n$-го порядка с элементами из $P$ изоморфны.

Взаимная однозначность соответствия — преобразование — матрица преобразования — была доказана ранее.

Второй и третий пункты доказываются непосредственно по формулам (5, 7) (проверить!).

---

* Причина, по которой матрицей преобразования $\sigma$ называется не матрица $\begin{pmatrix}a_{11} \ldots a_{1n}\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ a_{n1} \ldots a_{nn}\end{pmatrix}$, а транспонированная матрица $\begin{pmatrix}a_{11} \ldots a_{n1}\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\ a_{1n} \ldots a_{nn}\end{pmatrix}$, выясняется при доказательстве следующей теоремы

Пусть $\sigma$, $\tau$ — линейные преобразования,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{n1} \\ \dots\dots \\ a_{1n} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{n1} \\ \dots\dots \\ b_{1n} \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

соответствующие матрицы; пусть $a$ — произвольный скаляр, $C$, $D$, $E$ — матрицы, соответствующие преобразованиям $\sigma+\tau$, $\sigma\tau$, $a\sigma$.

По формуле 5, 8 имеем

$$\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \quad \tau\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=B'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, (\sigma+\tau)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=C'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

$$(\sigma\tau)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix}=D'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \alpha_n\end{pmatrix}, (a\sigma)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix}=E'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Так как, очевидно, $(\sigma+\tau)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $(a\sigma)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=$

$$=a\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

то непосредственно получается

$$C'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+B'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \quad E'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=aA'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

или $C'=A'+B'$, $E'=aA'$ и, после транспонирования, $C=A+B$, $E=aA$.

Остается доказать пятое утверждение теоремы.

Имеем

$$D'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\sigma\tau)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\sigma\left(\tau\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)=\sigma\left(B'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)=B'\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \alpha_n\end{pmatrix}=$$

$$=B'A'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}^{*};$$

следовательно, $D'=B'A'$ ** или $D=AB$. Теорема доказана.

Относительно различных базисов, одно и то же преобразование пространства может представляться разными матри-

---

* $\sigma$ коммутирует со скалярами!

** Если за матрицы преобразований $\sigma\tau$ принять $A'$, $B'$, то, как показывает эта формула, произведению преобразований соответствовало бы произведение соответствующих матриц в обратном порядке.

цами. Выведем формулу, связывающую матрицы преобразования $\sigma$ в разных базисах.

Пусть преобразование $\sigma$ в базисе $\alpha, \ldots, \alpha_n$ имеет матрицу $A$, в базисе $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — матрицу $B$. Формула преобразования базиса (см. 5, 4), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

где $P$ — обратимая матрица.

С другой стороны, по формуле (5, 8),

$$\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \sigma \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = B' \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Из этих формул получаем

$$\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sigma P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = P\sigma \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = PB' \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

$$\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A'P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$PB' \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A'P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_n \end{pmatrix}, \qquad \text{или } PB' = A'P,$$

и, наконец,

$$B = Q^{-1}AQ \qquad (Q = P'). \tag{5, 11}$$

Таким образом, возникает важная задача нахождения для данного преобразования такого базиса, в котором матрица преобразования — простейшая (приведение посредством выбора базиса матрицы преобразования к каноническому виду). Конечно, выбор такого базиса должен быть согласован с характером преобразования.

Примеры. Пусть $H$ — множество векторов в пространстве с общим началом $O$.

1. Преобразование $\sigma$ — проектирование векторов на плоскость $P$, проходящую через начало, параллельно прямой $p$, проходящей через начало, пересекая площадь $P$ (проверить, что такое проектирование является линейным преобразованием).

Естественно выбрать базис следующим образом: один базисный вектор, например $\alpha_1$, направить по прямой $p$, два других — $\alpha_2$, $\alpha_3$ — расположить в плоскости $P$, тогда

$$\sigma\alpha_1 = 0,$$
$$\sigma\alpha_2 = \sigma_2,$$
$$\sigma\alpha_3 = \alpha_3$$

и матрица преобразования примет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. В том же пространстве пусть $\sigma$ — поворот пространства около оси $p$ на угол $\varphi$. Выберем базис следующим образом: вектор $\alpha_3$ направим по оси вращения; векторы $\alpha_1, \alpha_2$ выберем единичными, расположенными в плоскости, перпендикулярной оси вращения, перпендикулярно друг другу; угол поворота $\varphi$ будем отсчитывать в направлении кратчайшего вращения от $\alpha_1$ к $\alpha_2$. Тогда, как известно,

$$\begin{aligned} \sigma\alpha_1 &= \cos\varphi\alpha_1 + \sin\varphi\alpha_2, \\ \sigma\alpha_2 &= -\sin\varphi\alpha_1 + \cos\varphi\alpha_2, \\ \sigma\alpha_3 &= \alpha_3. \end{aligned}$$

Матрица преобразования имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрение этих примеров показывает, что матрица получается особенно простой, если базисные векторы выбраны так, что действие на них преобразования приводит только к растяжению $\sigma\alpha = \lambda\alpha$; * во втором примере, однако, только один базисный вектор можно выбрать таким образом.

Итак, мы приходим к следующему важному понятию: ненулевой вектор $\alpha$ называется собственным вектором преобразования $\sigma$, если $\sigma\alpha = \lambda\alpha$; скалярный коэффициент растяжения $\lambda$ называется соответствующим собственным числом.

Пусть $\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = (c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$,

тогда

$$\sigma\alpha = (c_1, \ldots, c_n)\, \sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (c_1, \ldots, c_n)\, A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\sigma\alpha = \lambda\alpha = \lambda\,(c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

то

$$(c_1, \ldots, c_n)\, A' = \lambda(c_1, \ldots, c_n),$$

или

$$(A - \lambda\mathrm{I}) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \qquad (5{,}12)$$

(I — единичная матрица порядка $n$).

Так как $\alpha \neq 0$, то столбец $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ненулевой, следовательно,

$$det\,(A - \lambda\,\mathrm{I}) = 0. \qquad (5,\ 13)$$

* $\lambda$ здесь обозначает скаляр—обычное обозначение коэффициента растяжения

Корни этого уравнения определяют собственные числа преобразования; если $\lambda$ — один из корней, то уравнение (5, 12), равносильное однородной системе $n$ уравнений с $n$ неизвестными, позволяет найти ненулевые в совокупности значения координат $c_1, \ldots, c_n$ собственного вектора. Однако не для всякого поля $P$ алгебраическое уравнение с коэффициентами из $P$ (5, 13) имеет корни в этом же поле, например, не всякое уравнение с действительными коэффициентами имеет действительные корни.

Таким образом, преобразование $\sigma$ не всегда имеет собственные векторы.

Важно, однако, отметить, что в случае комплексного векторного пространства положительной размерности всякое линейное преобразование имеет (комплексные) собственные числа и собственные векторы.

Прежде чем переходить к общему исследованию, рассмотрим важный частный случай.

Пусть уравнение (5, 13) (степени $n$) имеет $n$ различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — соответствующие собственные векторы: $\sigma\alpha_1 = \lambda\alpha_1$, ..., $\sigma\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$.

Докажем, что векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы и, следовательно, образуют базис.

Допустим противное: пусть векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k < n)$ независимы, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_{k+1}$ зависимы, тогда $\alpha_{k+1} = c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k$ и, так как $\alpha_{k+1} \neq 0$, то не все $c_1, \ldots, c_k$ нули.

Далее, $\sigma\alpha_{k+1} = c_1\sigma\alpha_1 + \ldots + c_k\sigma\alpha_k$, $\lambda_{k+1}\alpha_{k+1} = c_1\lambda_1\alpha_1 + \ldots + c_k\lambda_k\alpha_k$, или, исключая $\alpha_{k+1}$, получим: $c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 + \ldots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k = 0$ и, так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ независимы и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ различны, — $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$, что невозможно.

В базисе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ матрица такого преобразования имеет особенно простой „диагональный“ вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Собственные числа преобразования, по самому своему определению, не зависят от выбора базиса, между тем, они определяются уравнением (5, 13), в выражении которого содержится матрица преобразования $A$, зависящая от выбора базиса.

Теорема 5, 6. Полином $det(A - \lambda E)$, соответствующий преобразованию $\sigma$, не зависит от выбора базиса.

Пусть $B$ — матрица преобразования $\sigma$ относительно другого базиса: по формуле (5, 11) тогда, $B = Q^{-1}AQ$; следовательно,

$$det\,(B-\lambda I)=det\,(Q^{-1}AQ-\lambda I)=det\{Q^{-1}(A-\lambda I)\,Q\}=$$
$$=det\,Q^{-1}\,det\,(A-\lambda I)\,det\,Q=det\,(A-\lambda I)\,det\,(Q^{-1}Q)^{*}=$$
$$=det\,(A-\lambda I).$$

Теорема доказана.

Полином $\chi(\lambda)=det\,(A-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+\ldots$, однозначно определяемый преобразованием $\sigma$, называется характеристическим полиномом преобразования $\sigma$; уравнение (5, 13) называется характеристическим (иногда вековым уравнением). Матрицу $A-\lambda I$ будем называть характеристической матрицей преобразования.

Характеристическая матрица меняется с изменением базиса. Именно, $B-\lambda I=Q^{-1}(A-\lambda I)\,Q$. Рассматривая, однако, характеристическую матрицу как матрицу с элементами из кольца полиномов аргумента $\lambda$, с коэффициентами из поля скаляров $P$, на основании второго утверждения теоремы 4, 5 из равенства $B-\lambda I=Q^{-1}(A-\lambda I)\,Q$ заключаем, что инвариантные множители и элементарные делители матриц $B-\lambda I$ и $A-\lambda I$ попарно эквивалентны. Таким образом, инвариантные множители и элементарные делители характеристической матрицы преобразования не зависят от выбора базиса.

В общем случае, как было указано, может и не быть собственных векторов, во всяком случае, может не быть $n$ независимых собственных векторов.

Для исследования общего случая требуется некоторое усложнение метода. Чтобы наметить пути обобщения метода, заметим, что если $\alpha$ — собственный вектор, то все векторы вида $c\alpha$ под действием преобразования $\sigma$ переходят в векторы того же типа. Это приводит к важному понятию инвариантного подпространства. Подпространство $G$ пространства $H$ называется инвариантным (относительно преобразования $\sigma$), если $\sigma$ отображает $G$ в $G$: для всякого вектора $\alpha\in G$, $\sigma\alpha\in G$.

Очевидно, собственные векторы порождают одномерные собственные подпространства. В общем случае придется рассматривать и многомерные подпространства. Разложения пространства по базису, состоящему из собственных векторов, будут заменены разложением пространства в прямую сумму инвариантных подпространств**.

Если, например, $H=H_1+H_2$ есть такое разложение в прямую сумму двух инвариантных подпространств, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}$ —

* Поле $P$ коммутативно!

** В разобранном примере преобразования поворота около оси $p$ инвариантными подпространствами будут множество радиус-векторов, лежащих на прямой $p$, и двумерное множество радиус-векторов, лежащих в плоскости $P$, перпендикулярной к оси вращения, $H=p+P$

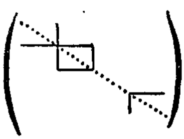
базис $H_1$, $\beta_1, \ldots, \beta_{k_2}$ — базис $H_2$, то, как легко видеть, векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{k_2}$ независимы и, следовательно, образуют базис $H$. Так как $H_1$, $H_2$ — инвариантные подпространства, то формулы (5, 7) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sigma\alpha_1 &= a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1k_1}\alpha_{k_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma\alpha_{k_1} &= a_{k_1 1}\alpha_1 + \ldots + a_{k_1 k_1}\alpha_{k_1}, \\
\sigma\beta_1 &= b_{11}\beta_1 + \ldots + b_{1k_2}\beta_{k_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma\beta_{k_2} &= b_{k_2 1}\beta_1 + \ldots + b_{k_2 k_2}\beta_{k_2}
\end{aligned}$$

и матрица преобразования примет, так называемую, „ящичную“ или квази-диагональную форму.

$$\left(\begin{array}{c:c}
\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{k_1 1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k_1} & \ldots & a_{k_1 k_1} \end{matrix} & 0 \\
\hdashline
0 & \begin{matrix} b_{11} & \ldots & b_{k_2 1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1k_2} & \ldots & b_{k_2 k_2} \end{matrix}
\end{array}\right)$$

В общем случае, если $H = H_1 + H_2 + \ldots + H_s$ есть разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, вид матрицы преобразования при соответствующем выборе базиса будет следующий:

 ;

вне очерченных вдоль главной диагонали ящиков элементы матрицы равны нулю.

Простейшие инвариантные подпространства преобразования $\sigma$ можно строить следующим образом. Пусть $\alpha$ — произвольный вектор; рассматриваем множество $H^1$ всех векторов вида $\varphi(\sigma)\alpha$, где $\varphi(\sigma) = a_0\sigma^k + \ldots + a_k$ есть произвольный полином преобразования $\sigma$ с коэффициентами из поля скаляров $P$*. Легко видеть, что множество $H^1$ есть инвариантное подпространство, содержащее вектор $\alpha$ (проверить!**). Такое подпространство будем называть элементарным подпространством, порожденным вектором $\alpha$, и обозначать символом $(\alpha)$.

Так как векторы $\alpha, \sigma\alpha, \ldots \sigma^n\alpha$ зависимы (пространство $H$ $n$-мерно!), то можно подобрать такие ненулевые в совокупности скаляры $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_0\alpha + a_1\sigma\alpha + \ldots + a_n\sigma^n\alpha = 0$.

---

* Подчеркнем, что коэффициенты всех полиномов вида $a_0\sigma^k + \ldots + a_k$, рассматриваемые здесь и в дальнейшем, являются скалярами из поля $P$

** $H^1$ есть при этом наименьшее инвариантное подпространство, содержащее вектор $\alpha$ (доказать!)

Таким образом, существует полином с ненулевыми коэффициентами $a_0 + a_1\sigma + \ldots + a_n\sigma^n = \varphi(\sigma)$, удовлетворяющий условию $\varphi(\sigma)\alpha = 0$; такое полиномиальное преобразование $\varphi(\sigma)$ будем называть аннулятором подпространства $(\alpha)$.

Как видно из предыдущего, для получения простейшего вида матрицы линейного преобразования пространство $H$ следовало бы представить в виде суммы инвариантных подпространств возможно малых размерностей. В этом отношении полезна следующая лемма.

Лемма 5, 4. Пусть $(\alpha)$—элементарное подпространство с аннулятором $\varphi(\sigma)$. Если аннулятор $\varphi(\sigma)$ разлагается в произведение попарно взаимно простых полиномов* $\varphi_1(\sigma), \ldots, \varphi_m(\sigma)$, $\varphi(\sigma) = \varphi_1(\sigma) \ldots \varphi_m(\sigma)$, то подпространство $(\alpha)$ разлагается в сумму элементарных подпространств

$$(\alpha) = (\alpha_1) + \ldots + (\alpha_m),$$

причем аннулятором подпространства $(\alpha_i)$ является $\varphi_j(\sigma)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Обозначим произведение всех полиномов $\varphi_1(\sigma), \ldots, \varphi_m(\sigma)$, кроме $\varphi_j(\sigma)$, через $\varphi_j^1(\sigma)$: $\varphi(\sigma) = \varphi_j(\sigma) \cdot \varphi_j^1(\sigma)$. Пусть $\alpha_j = \varphi_j^1(\sigma)\alpha$, тогда $\varphi_j(\sigma)\alpha_j = \varphi_j(\sigma)\, \varphi_j^1(\sigma)\alpha = \varphi(\sigma)\alpha = 0$: $\varphi_j(\sigma)$ есть аннулятор $(\alpha_j)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Докажем теперь, что $(\alpha) = (\alpha_1) + \ldots + (\alpha_m)$. Заметим что $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in (\alpha)$ и, следовательно, $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_m) \leqslant (\alpha)$ и наконец, $(\alpha_1) + \ldots + (\alpha_m) \leqslant (\alpha)$. Далее, так как $\varphi_1(\sigma), \ldots, \varphi_m(\sigma)$ попарно взаимно просты, то $\varphi_1^1(\sigma), \ldots, \varphi_m^1(\sigma)$ взаимно просты; действительно, какой-либо простой делитель $\varphi_m^1(\sigma)$ должен быть делителем только одного из $\varphi_1(\sigma), \ldots, \varphi_{m-1}(\sigma)$, например $\varphi_1(\sigma)$, и не может быть тогда делителем $\varphi_1^1(\sigma)$. Таким образом, можно подобрать такие полиномы $\psi_1(\sigma), \ldots, \psi_m(\sigma)$, что

$$\psi_1(\sigma)\, \varphi_1^1(\sigma) + \ldots + \psi_m(\sigma)\, \varphi_m^1(\sigma) = 1.$$

Если теперь $\omega(\sigma)\alpha$—произвольный вектор из $(\alpha)$, то

$$\omega(\sigma)\alpha = \omega(\sigma)\, [\psi_1(\sigma)\, \varphi_1^1(\sigma) + \ldots + \psi_m(\sigma)\, \varphi_m^1(\sigma)]\, \alpha = \omega(\sigma)\, \psi_1(\sigma)\, \varphi_1^1(\sigma)\alpha + \\ + \ldots + \omega(\sigma)\, \psi_m(\sigma)\, \varphi_m^1(\sigma)\alpha = \omega(\sigma)\, \psi_1(\sigma)\alpha_1 + \ldots + \omega(\sigma)\, \psi_m(\sigma)\alpha_m.$$

Отсюда следует, что

$$(\alpha) \subseteq (\alpha_1) + \ldots + (\alpha_m).$$

Таким образом, $(\alpha) = (\alpha_1) + \ldots + (\alpha_m)$.

Лемма доказана. Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 5, 7. Матрицу линейного преобразования в комплексном векторном пространстве можно выбором базиса привести к следующему каноническому виду

$$\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_s \end{pmatrix};$$

---

* Рассматривая $\sigma$ как аргумент, а не как конкретное преобразование.

здесь $T_1, \ldots, T_s$ — квадратные матрицы вообще различных порядков вида

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ 1 & \lambda_j & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_j \\ & & 1 & \end{pmatrix};$$

(элементы выше диагонали и ниже прилегающей к главной диагонали снизу линии, равны нулю).

Доказательство. Пусть в некотором базисе $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ преобразование $\sigma$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Эту формулу можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0. \qquad (5, 14)$$

Пусть $R$ — кольцо полиномов аргумента $\sigma$ с коэффициентами из $P^*$. Так как

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix} = \chi(\sigma) = (-1)^n \sigma^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \\ + \ldots + a_{nn})\sigma^{n-1} + \ldots \qquad (5, 15)$$

есть ненулевой полином, то ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix}$ равен $n$.

По теоремам 4, 1 и 4, 3, существуют такие две обратимые матрицы $S(\sigma)$, $T(\sigma)$, элементы которых являются полиномами от $\sigma$, что

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix} = S(\sigma) \begin{pmatrix} m_1(\sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n(\sigma) \end{pmatrix} T(\sigma);\ **$$

здесь $m_1(\sigma), \ldots, m_n(\sigma)$ — инвариантные множители матрицы $\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix}$. Так как инвариантные множители определяются с точностью до делителей единицы, то полиномы $m_1(\sigma)$, $\ldots$, $m_n(\sigma)$ можно предполагать имеющими старшие коэффи-

---

* Начало доказательства справедливо для любого поля скаляров

** Это соотношение есть тождество относительно $\sigma$, поэтому оно останется справедливым, если рассматривать $\sigma$ как преобразование циенты равными единице. Подставляя это выражение в формулу (5, 14) и умножая слева на $S^{-1}(\sigma)$, получим

$$\begin{pmatrix} m_1(\sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = {}^{t}\overset{\leftarrow 1}{T}(\sigma) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \qquad (5, 16)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m_1(\sigma)\,\beta_1 &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ m_n(\sigma)\,\beta_n &= 0. \end{aligned} \qquad (5, 17)$$

Часть инвариантных множителей может равняться единице. Пусть, например, $m_1 = \ldots = m_t = 1$; $m_{t+1}, \ldots, m_n$ — непостоянные полиномы. В этом случае формулы (5,17) показывают, что $\beta_1 = 0, \ldots, \beta_t = 0$. Обозначим, по-предыдущему, через $(\beta_j)$ множество всех векторов вида $\varphi(\sigma)\beta_j$ ($\varphi(\sigma)$ — произвольный полином из $R$). В случае, если $\beta_j = 0$, $(\beta_j)$ — нулевое пространство; таким образом, $(\beta_1), \ldots, (\beta_t)$ — нулевые подпространства. Произвольный вектор из $H$ зависит от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и на основании (5, 16) зависит также от векторов вида $\varphi(\sigma)\,\beta_j$. Таким образом, $H = (\beta_1) + \ldots + (\beta_n)$.

Так как, по предположению, $(\beta_1), \ldots, (\beta_t)$ — нулевые подпространства, то

$$H = (\beta_{t+1}) + \ldots + (\beta_n). \qquad (5, 18)$$

Разложим теперь, по лемме 5, 4, каждое $(\beta_j)$ $(j = t+1, \ldots, n)$, в свою очередь, в сумму элементарных подпространств.

Рассмотрим какой-либо индекс $j$; пусть $m_j(\sigma) = p_1^{k_1}(\sigma) \ldots p_r^{k_r}(\sigma)$ — разложение полинома $m_j(\sigma)$ на простые множители (в кольце $R$). Таким образом, $p_1^{k_1}(\sigma), \ldots, p_r^{k_r}(\sigma)$ являются элементарными делителями характеристической матрицы $\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix}$*; не ограничивая общности, можно предполагать, что старшие коэффициенты различных полиномов $p_1(\sigma), \ldots, p_r(\sigma)$ равны единице.

Так как $p_1^{k_1}(\sigma), \ldots, p_r^{k_r}(\sigma)$ попарно взаимно просты, то по лемме 5, 4, $(\beta_j) = (\gamma_1) + \ldots, + (\gamma_r)$, причем аннуляторами $(\gamma_1), \ldots, (\gamma_r)$ являются соответственно $p_1^{k_1}(\sigma), \ldots, p_r^{k_r}(\sigma)$**.

Итак, вводя сплошную нумерацию подпространств $(\gamma_e)$ для всех $(\beta_j)$, пространство $H$ может быть разложено в сумму

---

* Напомним, что элементарные делители определяются относительно кольца $R$ полиномов с коэффициентами из поля скаляров $P$

** По лемме 5, 4, например, $\gamma_r = p_1^{k_1}(\sigma) \ldots p_{r-1}^{k_{r-1}}(\sigma)\beta_j$

подпространств $(\gamma_j)$ $(j=1,\ldots,s)$, где $\gamma_j$—вектор со свойством

$$e_j(\sigma)\gamma_j=0. \tag{5,18}$$

Здесь $e_j(\sigma)$ — один из элементарных делителей.

Количество таких подпространств $(\gamma_j)$, — $s$, равно количеству всех элементарных делителей (с учетом их кратности) матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix}.$$

Сделаем еще одно замечание. Пусть степень элементарного делителя $e_j(\sigma)$ равна $\varkappa_j$. Очевидно, произведение всех элементарных делителей равно произведению всех инвариантных множителей и, следовательно, эквивалентно

$$det\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\sigma \end{pmatrix}=\chi(\sigma)\,*.$$

Таким образом, сумма степеней всех элементарных делителей равна степени $\chi(\sigma)$:

$$\varkappa_1+\ldots+\varkappa_s=n. \tag{5, 19}$$

Теперь предположим, что $H$ — комплексное векторное пространство. В этом случае, так как в кольце полиномов с комплексными коэффициентами простыми полиномами являются только полиномы первой степени, заключаем, что все элементарные делители имеют вид

$$e_r(\sigma)=(\sigma-\lambda_j)^{\varkappa_j}\,**.$$

Выберем теперь систему образующих в пространстве $(\gamma_j)$. Каждый вектор $\gamma\in(\gamma_j)$ имеет вид $\gamma=\varphi(\sigma)\gamma_j$. Разлагая полином $\varphi(\sigma)$ по степеням $\sigma-\lambda_j$, получим $\varphi(\sigma)=a_1+a_2(\sigma-\lambda_j)+$ $+\ldots+a_{\varkappa_j}(\sigma-\lambda_j)^{\varkappa_j-1}+\theta(\sigma)(\sigma-\lambda_j)^{\varkappa_j}$, где $\theta(\sigma)$ — также некоторый полином, $a_1,\ldots,a_{\varkappa_j}$ — комплексные числа. Следовательно, если обозначить через $\delta_1^{(j)},\ldots,\delta_{\varkappa_j}^{(j)}$ векторы из $(\gamma_j)$, определяемые формулами

$$\delta_r^{(j)}=(\sigma-\lambda_j)^{r-1}\gamma_j \qquad (r=1,\ldots,\varkappa_j), \tag{5, 20}$$

---

* Сравнить с формулой параграфа 4, определяющей инвариантные множители через общие наибольшие делители миноров матрицы

** В случае действительного векторного пространства существуют также простые полиномы второй степени; исследование несколько усложняется. Этот случай рассматривается далее

Замечаем на основании (5, 18), что

$$\gamma = \varphi(\sigma)\gamma_j = a_1\gamma_j + a_2(\sigma - \lambda_j)\gamma_j + \ldots + a_{\varkappa_j}(\sigma - \lambda_j)^{\varkappa_j - 1}\gamma_j =$$
$$= a_1\delta_1^{(j)} + a_2\delta_2^{(j)} + \ldots + a_{\varkappa_j}\delta_{\varkappa_j}^{(j)}.$$

Таким образом, векторы $\delta_1, \ldots, \delta_{\varkappa_j}$, определенные формулами (5, 20), составляют систему образующих подпространства $(\lambda_j)$.

Так как

$$H = (\gamma_1) + \ldots + (\gamma_s), \tag{5, 21}$$

то объединение всех векторов $\delta_r^{(j)}$ для всех подпространств есть система образующих для пространства $H$. Длина этой системы образующих, очевидно, равна $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_s = n$ (формула (5, 19). Так как $H$ $n$-мерно, то система образующих длины $n$ состоит из независимых векторов и образует базис пространства $H$. Это искомый базис *.

Определим теперь воздействие преобразования $\sigma$ на базисные векторы $\delta_r^{(j)}$. По формулам (5, 20), имеем (при $r < \varkappa_j$)

$$\sigma\delta_r^{(j)} = \lambda_j\delta_r^{(j)} + (\sigma - \lambda_j)\delta_r^{(j)} = \lambda_j\delta_r^{(j)} + (\sigma - \lambda_j)^r\gamma_j = \lambda_j\delta_r^{(j)} + \delta_{r+1}^{(j)}.$$

Наконец, $\sigma\delta_{\varkappa_j}^{(j)} = \lambda_j\delta_{\varkappa_j}^{(j)} + (\sigma - \lambda_j)^{\varkappa_j}\gamma_j = \lambda_j\sigma_{\varkappa_j}^{(j)}$.

Таким образом, формулы, соответствующие базисным векторам $\delta_1^{(j)}, \ldots, \delta_{\varkappa_j}^{(j)}$ из подпространства $(\gamma_j)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma\delta_1^{(j)} &= \lambda_j\delta_1^{(j)} + \delta_2^{(j)},\\
\sigma\delta_2^{(j)} &= \lambda_j\delta_2^{(j)} + \delta_3^{(j)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma\delta_{\varkappa_j-1}^{(j)} &= \lambda_j\delta_{\varkappa_j-1}^{(j)} + \delta_{\varkappa_j}^{(j)},\\
\sigma\delta_{\varkappa_j}^{(j)} &= \lambda_j\delta_{\varkappa_j}^{(j)}.
\end{aligned} \tag{5, 22}$$

Так как $\delta_{\varkappa_j}^{(j)} \neq 0$ (как вектор базиса), то отсюда следует, в частности, что $\delta_{\varkappa_j}^{(j)}$ — собственный вектор, $\lambda_j$ — собственное число преобразования **.

Собирая формулы (5, 22) для всех $j = 1, \ldots, s$ и составляя матрицу преобразования $\sigma$, непосредственно приходим к доказательству теоремы.

---

* Отсюда легко следует, что разложение (5, 21)—прямое (проверить!)

** Заметим, что при умножении векторов $\delta_1^{(j)}, \ldots, \delta_{\varkappa_j}^{(j)}$ одной группы на один и тот же ненулевой скаляр формулы (5, 22) не изменяется

Однако из теоремы 5, 6 и приведенного доказательства следуют и дальнейшие важные результаты.

1. Количество ящиков, — $S$, — в канонической форме матрицы $A$ равно количеству элементарных делителей матрицы $\begin{pmatrix} a_{11}-\sigma \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn}-\sigma \end{pmatrix}$ или, что то же самое, матрицы $A-\lambda I$, элементы которой являются полиномами аргумента $\lambda$ с комплексными коэффициентами. Размер каждого ящика $\varkappa_j\,(j=1, \ldots, S)$ совпадает со степенью соответствующего элементарного делителя. Числа, находящиеся на главных диагоналях ящиков $T_j$, являются собственными числами преобразования. Эти утверждения очевидны.

2. Для всякого вектора $\alpha$ из $H$, $\chi(\sigma)\alpha=0$. Таким образом, преобразование $\chi(\sigma)$ — нулевое: $\chi(\sigma)=0$ * и, следовательно, $\chi(A)=0$ (теорема Гамильтона-Кэли).

Действительно, как уже отмечалось, $m_1(\sigma)\ldots m_n(\sigma) = \pm\chi(\sigma)$**. Так как $H=(\beta_1)+\ldots+(\beta_n)$ (см. (5, 18)), где каждое $(\beta_j)$ есть множество всех векторов вида $\varphi(\sigma)\beta_j$ то

$$\alpha=\varphi_1(\sigma)\beta_1+\ldots+\varphi_n(\sigma)\beta_n;$$

$\varphi_1(\sigma), \ldots, \varphi_n(\sigma)$ — некоторые полиномы; по формулам (5,17), $m_j(\sigma)\beta_n=0$ и, следовательно, $\chi(\sigma)\beta_j = \frac{\chi(\sigma)}{m_j(\sigma)}\, m_j(\sigma)\beta_j=0$ для всех $j=1, \ldots, n$. Поэтому

$$\chi(\sigma)\alpha=\chi(\sigma)\varphi_1(\sigma)\beta_1+\ldots+\chi(\sigma)\varphi_n(\sigma)\beta_n=0\text{***}.$$

3. Если $A$ — произвольная квадратная матрица с комплексными элементами, то можно подобрать такую обратимую комплексную матрицу $Q$, что

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_s \end{pmatrix},$$

где матрицы $T_1, \ldots, T_s$ имеют вид, указанный в формулировке теоремы 5, 6.

Действительно, произвольной квадратной комплексной матрице $A$ порядка $n$ соответствует (в произвольно выбранном базисе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) определенное преобразование $\sigma$ $n$-мерного комплексного векторного пространства. Выбирая тогда „канонический" базис, указанный в теореме, приведем

---

* $\chi(\sigma)=0$ как преобразование, а не как полином!

** Напомним, что старшие коэффициенты инвариантных множителей предполагались равными единице

*** Преобразования вида $\varphi(\sigma)$ перестановочны!

матрицу преобразования к виду $\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_s \end{pmatrix}$. Тогда из формулы (5, 11), связывающей матрицы одного и того же преобразования $\sigma$ в разных базисах, непосредственно следует справедливость высказанного утверждения.

Пример. Пусть

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n,$$

или

$$\frac{d}{dt}\, x = Ax \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\right.$$

есть линейная однородная система дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными коэффициентами.

Пусть $Q$ — обратимая матрица, подобранная так, что

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_s \end{pmatrix}.$$

Полагая $x = Qy \quad \left(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}\right)$,

приведем предыдущую систему к виду

$$\frac{d}{dt}\, y = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_s \end{pmatrix} y,$$

или к виду

$$\frac{dy_1}{\partial t} = \lambda_1 y_1,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + \lambda_1 y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{dy_{\varkappa_1}}{dt} = y_{\varkappa_1 - 1} + \lambda_1 y_{\varkappa_1} \text{ и т. д.}$$

Здесь выписана только одна группа формул.

Эти уравнения легко последовательно решаются. Легко также заметить, что $y_1, \ldots, y_n$, а следовательно, и $x_1, \ldots, x_n$, определяемые по формуле $x = Qy$, будут определяться в виде сумм слагаемых вида $Ct^r e^{\lambda_j t}$ ($C$ — произвольная постоянная, $r = 0, 1, \ldots, \varkappa_j - 1$; $\lambda_j$ — корень характеристического полинома $\chi(\lambda) = det(A - \lambda I)$).

Рассмотрим теперь линейное преобразование в действительном векторном пространстве. Уже указывалось, что этот случай сложнее случая комплексного векторного пространства, так как среди элементарных делителей характеристической матрицы могут встречаться полиномы второй степени, а не первой (см. стр. 70). Это связано с тем, что полином с действительными коэффициентами может не иметь действительных корней и приводит к необходимости расширения поля действительных чисел до поля комплексных чисел. При рассмотрении линейных преобразований в действительном векторном пространстве мы поступим подобным же образом, расширяя действительное векторное пространство до комплексного векторного пространства.

Пусть $H$ есть $n$-мерное действительное векторное пространство. Рассмотрим множество $\tilde{H}$ элементов вида $\alpha + i\beta$, где $\alpha$, $\beta$ — векторы из $H$*.

Равенство $\alpha + i\beta = \gamma + i\delta$ означает равенства $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; $\alpha + i0 = \alpha$. Действия над элементами из $\tilde{H}$ определяются естественным образом: если $\alpha + i\beta$, $\gamma + i \in \tilde{H}$, то $(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta)$; если $a + ib$ произвольное комплексное число, то $(a + ib)(\alpha + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i(b\alpha + a\beta)$. Следовательно, при таком определении действий $\tilde{H}$ является комплексным векторным пространством, содержащим действительное пространство $H$. Векторы из $\tilde{H}$ будем называть далее комплексными, векторы из $H$ — действительными векторами. Если $\alpha + i\beta$ есть комплексный вектор ($\alpha, \beta$ — действительные векторы), то, как обычно, будем называть $\alpha$ действительной частью вектора $\alpha + i\beta$, $\beta$ — мнимой частью: $\alpha = Re(\alpha + i\beta)$, $\beta = Im(\alpha + i\beta)$; комплексные векторы $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ будем называть комплексно-сопряженными: $\overline{(\alpha + i\beta)} = \alpha - i\beta$. Непосредственно проверяются следующие утверждения (теперь $\alpha, \beta, \ldots$ будут обозначать вообще комплексные векторы, $a$, $b$ — комплексные числа): $Re\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha})$, $Im\,\alpha = \frac{1}{2i}(\alpha - \overline{\alpha})$;** $\overline{(a\alpha)} = \overline{a}\,\overline{\alpha}$, $\overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ и, вообще, $\overline{(a\alpha + \ldots + b\beta)} = \overline{a}\overline{\alpha} + \ldots + \overline{b}\overline{\beta}$ (проверить!).

Т е о р е м а 5, 8. Всякий базис пространства $H$ является базисом пространства $\tilde{H}$. Таким образом, пространства $H$ и $\tilde{H}$ имеют одинаковые размерности***.

* Элементы $\alpha + i\beta$ рассматриваются как пары действительных векторов $(\alpha_1\beta)$, действия над которыми определяются далее; совершенно также вводятся и комплексные числа

** Таким образом, векторы $\alpha + \overline{\alpha}$ и $i(\alpha - \overline{\alpha})$ — действительные векторы

*** Если рассматривать $\tilde{H}$ как действительное векторное пространство, то векторы $\alpha$ и $i\alpha$ ($\alpha \neq 0$) будут уже независимы, тогда размерность $\tilde{H}$ окажется в два раза больше размерности $H$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha$ — базис пространства $H$, $\alpha$ — произвольный вектор $\tilde{H}$. Тогда $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ ($\alpha'$, $\alpha''$—действительные векторы); следовательно, $\alpha' = a_1' \alpha_1 + \ldots + a_n' \alpha_n$, $\alpha'' = a_1''\alpha_1 + \ldots + a_n'' \alpha_n$ ($a_1', \ldots, a_n'$, $a_1'', \ldots, a_n''$ — действительные числа).

Итак, $\alpha = (a_1' + ia_1'')\alpha_1 + \ldots + (a_n' + ia_n'')\alpha_n$. Таким образом, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ есть система образующих $\tilde{H}$. Так как из $(a_1' + ia_1'')\alpha_1 + \ldots + (a_n' + ia_n'')\alpha_n = 0$ следует $a_1'\alpha_1 + \ldots + a_n' \alpha_n = 0$, $a_1'' \alpha_1 + \ldots + a_n'' \alpha_n = 0$ и $a_1' = 0, \ldots, a_n' = 0$, $a_1'' = 0, \ldots, a_n'' = 0$, то векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы в $\tilde{H}$. Таким образом, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — базис пространства $\tilde{H}$.

Итак, в комплексном пространстве $\tilde{H}$ можно выбрать базис, состоящий из действительных векторов (действительный базис).

Два комплексных вектора, имеющие попарно комплексно-сопряженные координаты в каком-либо действительном базисе пространства $\tilde{H}$, комплексно сопряжены. Обратно, комплексносопряженные векторы имеют попарно комплексносопряженные координаты во всяком действительном базисе.

Действительно, если $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — действительные векторы, то $\bar{\alpha} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha_1} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{\alpha_n} = \overline{a_1}\alpha_1 + \ldots + \overline{a_n}\alpha_n$ *.

Пусть теперь $\sigma$—линейное преобразование в действительном векторном пространстве $H$. Распространим преобразование $\sigma$ на комплексное пространство $\tilde{H}$, полагая $\tilde{\sigma}(\alpha + i\beta) = \sigma\alpha + i\sigma\beta$ ($\alpha_1\beta$ — действительны).

Очевидно, что, в частности, для действительного вектора $\alpha(\beta = 0)$, $\tilde{\sigma}\alpha = \sigma\alpha$ **.

$\tilde{\sigma}$ — линейное преобразование пространства $\tilde{H}$.

Действительно, если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — действительные векторы, $a$, $b$ — действительные числа, то

$$\tilde{\sigma}\Big((\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta)\Big) = \tilde{\sigma}\Big((\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta)\Big) =$$

$$= \sigma(\alpha + \gamma) + i\sigma(\beta + \delta) = (\sigma\alpha + \sigma\gamma) + i(\sigma\beta + \sigma\delta) =$$

$$= (\sigma\alpha + i\sigma\beta) + (\sigma\gamma + i\sigma\delta) = \tilde{\sigma}(\alpha + i\beta) + \tilde{\sigma}(\gamma + i\delta);$$

---

* Таким образом, пополнение пространства $H$ до $\tilde{H}$ сводится к рассмотрению в каком-либо базисе пространства $H$ векторов не только с действительными, но и с произвольными комплексными координатами

** Преобразования $\sigma$ и $\tilde{\sigma}$ различны, так как действуют в разных пространствах

$$\tilde\sigma\Big((\alpha+ib)(\alpha+i\beta)\Big)=\tilde\sigma\Big((a\alpha-b\beta)+i(b\alpha+a\beta)\Big)=$$
$$=\sigma(a\alpha-b\beta)+i\sigma(b\alpha+a\beta)=(a\sigma\alpha-b\sigma\beta)+i(b\sigma\alpha+a\sigma\beta)=$$
$$=(a+ib)(\sigma\alpha+i\sigma\beta)=(a+ib)\,\tilde\sigma(\alpha+i\beta).$$

Матрица преобразований $\sigma$ и $\tilde\sigma$ в каком-либо действительном базисе пространства $\tilde H$, являющемся также и базисом $H$, совпадают. Действительно, если $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — действительный базис $\tilde H$, то $\tilde\sigma\alpha_j=\sigma\alpha_j \quad (j=1,\ldots,n)$.

Поэтому в действительном базисе матрица $\tilde\sigma$ также действительна. Таким образом, для преобразований $\sigma$ и $\tilde\sigma$ получаются одинаковые инвариантные множители характеристической матрицы, одинаковые характеристические многочлены, одинаковые (вообще, комплексные) собственные числа.

Теорема 5, 9. Матрица линейного преобразования действительного векторного пространства может быть приведена к следующему каноническому виду

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

(места вне „ящиков“ $A_1,\ldots,A_s$ заполнены нулями), причем каждый ящик $A_k$ имеет или вид $\begin{pmatrix}\lambda_k & & 0\\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda_k\end{pmatrix}$ (такой ящик соответствует делителю характеристической матрицы вида $(\sigma-\lambda_k)^{\varkappa_k}$, $\lambda_k$ — действительное собственное число $\sigma$, $\varkappa_k$ указывает размер ящика), или вид

$$\begin{pmatrix} B_k & & & \\ I & B_k & & \\ & I & \ddots & \\ & & I & B_k \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}\lambda_k' & -\lambda_k''\\ \lambda_k'' & \lambda_k'\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(места вне $B_k$, I заполнены нулями; такой ящик соответствует элементарному делителю вида

$$(\sigma^2-2\lambda'_k\sigma+\lambda_k'^2+\lambda_k''^2)^{\varkappa_k},$$

степень этого делителя $2\varkappa_k$ снова указывает размер ящика, $\lambda'_k+i\lambda''_k$ — недействительное собственное число преобразования $\sigma$).

Общее количество ящиков $s$ равно количеству действительных элементарных делителей характеристической матрицы $\sigma$ (с учетом их повторяемости).

Доказательство. Пусть $\sigma$ — линейное преобразование действительного векторного пространства $H$. Пусть $e_1(\sigma), \ldots, e_s(\sigma)$ — элементарные делители характеристической матрицы преобразования $\sigma$ (учитывая их повторяемость); в действительном случае эти элементарные делители имеют вид $(\sigma-\lambda)^\varkappa$ ($\lambda$ действительно) или вид $(\sigma^2+a\sigma+b)^\varkappa$ ($a$, $b$ действительны, многочлен $\sigma^2+a\sigma+b$ имеет недействительные, комплексно сопряженные корни) *.

Тогда на основании доказательства теоремы 5, 7 получается разложение пространства $H$ в сумму подпространств

$$H=(\gamma_1)+\ldots+(\gamma_s);$$

при этом $(\gamma_j)$ — множество векторов вида $\varphi(\sigma)\gamma_j$, где $\varphi(\sigma)$ — произвольный полином с действительными коэффициентами и $e_j(\sigma)\gamma_j=0$ $(j=1,\ldots,s)$ (см. (5,18)).

Если $e_j(\sigma)=(\sigma-\lambda)^\varkappa$, то в пространстве $(\gamma_j)$ выбирается система образующих так же, как и при доказательстве теоремы 5, 7.

Пусть теперь $e_j(\sigma)=(\sigma^2+a\sigma+b)^\varkappa$ (корни $\sigma^2+a\sigma+b$, — $\lambda, \bar\lambda$, — недействительны и сопряжены).

Так как $(\gamma_j)$, есть инвариантное подпространство преобразования $\sigma$, то можно рассматривать $\sigma$ как преобразование в пространстве $(\gamma_j)$. Пополним $(\gamma_j)$ до комплексного пространства $(\tilde\gamma_j)$; легко видеть. что $(\tilde\gamma_j)$ есть множество всех векторов вида $\tilde\varphi(\sigma)\gamma_j$, где $\tilde\varphi(\sigma)$ — произвольный полином с комплексными коэффициентами (почему?). Расширим, по предыдущему, преобразование $\sigma$ до преобразования $\tilde\sigma$ в $(\tilde\gamma_j)$. Введем векторы $\gamma_j'=(\sigma-\lambda)^\varkappa\gamma_j$ и $\gamma_j''=(\sigma-\bar\lambda)^\varkappa\gamma_j$ ($\lambda, \bar\lambda$—корни $\sigma^2+a\sigma+b$); так как $\gamma_j$— действительный вектор, то векторы $\gamma_j'$ и $\gamma_j''$ комплексно сопряжены, Так как $\lambda\neq\bar\lambda$, то $(\sigma-\lambda)^\varkappa$ и $(\sigma-\bar\lambda)^\varkappa$ взаимно просты. По лемме 5, 4, получим разложение $(\tilde\gamma_j)=(\gamma_j')+(\gamma_j'')$; при этом $(\tilde\sigma-\bar\lambda)^\varkappa\gamma_j'=(\sigma-\bar\lambda)^\varkappa(\sigma-\lambda)^\varkappa\gamma_j= =e_j(\sigma)\gamma_j=0$ и, соответственно, $(\tilde\sigma-\lambda)^\varkappa\gamma_j''=0$.

В подпространствах $(\gamma_j')$ и $(\gamma_j'')$ выбираются системы образующих по формулам (5, 20)

$$\delta_r'=(\tilde\sigma-\bar\lambda)^{r-1}\gamma'_j \text{ и } \delta_r''=(\tilde\sigma-\lambda)^{r-1}\gamma_j''$$

$(r=1,\ldots,\varkappa)$, очевидно, $\delta_r'$ и $\delta_r''$ также попарно комплексно сопряжены. По формулам (5, 22), находим

$$\begin{array}{ll}
\tilde\sigma\,\delta_1'=\bar\lambda\,\delta_1'+\delta'_2, & \tilde\sigma\,\delta_1''=\lambda\delta_1''+\delta_2'', \\
\tilde\sigma\,\delta'_2=\bar\lambda\,\delta_2'+\delta_3', & \tilde\sigma\,\delta_2''=\lambda\delta_2''+\delta_3'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tilde\sigma\,\delta_\varkappa'=\bar\lambda\,\delta_\varkappa', & \tilde\sigma\,\delta_\varkappa''=\lambda\,\delta_\varkappa''.
\end{array}$$

* Напомним, что в обоих случаях корни элементарных делителей — собственные числа преобразования $\sigma$

Пусть $\delta_r' = \varepsilon_r' + i\varepsilon_r''$, $\delta_r'' = \varepsilon_r' - i\varepsilon_r''$, где $\varepsilon_r'$, $\varepsilon_r''$ — действительные векторы из $(\gamma_j)$, $r = 1, \ldots, \varkappa$. Так как $\delta_1', \ldots, \delta_\varkappa'$, $\delta_1'', \ldots, \delta_\varkappa''$ есть система образующих пространства $(\tilde{\gamma} i)$, то $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_\varkappa'$, $\varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_\varkappa''$ есть также система образующих $(\gamma_j)$ и из-за действительности этих векторов также система образующих $(\gamma_j)$. Полагая $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ и отделяя в формулах (5,23) действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned}
\sigma\varepsilon_1' &= \lambda'\varepsilon_1' + \lambda''\varepsilon_1'' + \varepsilon_2',\\
\sigma\varepsilon_1'' &= -\lambda''\varepsilon_1' + \lambda_1'\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'',\\
\sigma\varepsilon_2' &= \lambda'\varepsilon_2' + \lambda''\varepsilon_2'' + \varepsilon_3',\\
\sigma\varepsilon_2'' &= -\lambda''\varepsilon_2' + \lambda'\varepsilon_2'' + \varepsilon_3'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma\varepsilon_\varkappa' &= \lambda'\varepsilon_\varkappa' + \lambda''\varepsilon_\varkappa'',\\
\sigma\varepsilon_\varkappa'' &= -\lambda''\varepsilon_\varkappa' + \lambda'\varepsilon_\varkappa''.
\end{aligned} \tag{5, 24}$$

Количество образующих пространство $(\gamma_j)$ — $2\varkappa$ — равно степени соответствующего элементарного делителя $(\sigma^2 + a\sigma + b)^\varkappa$; на основании формулы (5, 19) заключаем, как и раньше, что совокупность образующих всех подпространств $(\gamma_1), \ldots, (\gamma_s)$ образует базис пространства $H$. Но по формулам (5, 24), образующим $\varepsilon_1', \varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_\varkappa', \varepsilon_\varkappa''$ в матрице преобразования $\sigma$ будет соответствовать ящик вида

$$\begin{pmatrix} B & & & \\ \mathrm{I} & B & & \\ & \mathrm{I} & \ddots & \\ & & \ddots & B \\ & & & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda' & -\lambda'' \\ \lambda'' & \lambda' \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть в некотором базисе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ действительного трехмерного пространства преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\sigma\alpha_1 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$, $\sigma\alpha_2 = \alpha_2$, $\sigma\alpha_3 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$. Приведем матрицу преобразования к каноническому виду. Прежде всего приведем транспонированную характеристическую матрицу $A' - \lambda E$ к каноническому виду элементарными преобразованиями (см. параграф 4). Как видно из доказательства теоремы 5, 7, элементарные преобразования строк матрицы $A - \lambda\mathrm{I}$ можно при этом не учитывать (матрица $S(\sigma)$ на стр. 57, соответствующая преобразованию строк в доказательстве теоремы 5, 7, несущественна).

Поэтому следует прежде всего возможно упростить матрицу $A - \lambda I$ путем преобразования строк.

Имеем

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1+\lambda & -\frac{1}{2}(1-\lambda^2) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1-\lambda^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix};$$

помножая теперь первый столбец на $-\frac{1}{2}$ и затем вычитая, после соответствующих помножений из второго и третьего получают

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix};$$

заменяя элементарные преобразования умножением на соответствующие матрицы, получаем

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Инвариантные множители характеристической матрицы равны: $m_1(\lambda) = 1$, $m_2(\lambda) = 1 - \lambda$, $m_3(\lambda) = 1 - \lambda^2$; элементарные делители — $\lambda - 1$, $\lambda - 1$, $\lambda + 1$. Поэтому каноническая форма матрицы преобразования есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Желая определить соответствующий базис, замечаем, что (в обозначениях стр. 57)

$$T(\sigma) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1-\sigma}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \sigma-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

по формуле (5,16)

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = T(\sigma) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

или $\beta_1 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + (\sigma - 1)\alpha_3 = 0$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \beta_3$. Так как аннулятор элементарного подпространства $(\alpha_3)$ равен $m_3(\sigma) = (1 - \sigma)(1 + \sigma)$, то, по лемме 5, 4,

$$(\alpha_3) = (\gamma_2) + (\gamma_3),$$

$$\gamma_2 = (1 + \sigma)\alpha_3 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \ \gamma_3 = (1 - \sigma)\alpha_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Итак, матрица преобразования $\sigma$ принимает каноническую форму в базисе $\gamma_1 = \beta_2 = \alpha_2$, $\gamma_2 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\gamma_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_3$, или, упрощая, в базисе $\gamma_1' = \alpha_2$, $\gamma_2' = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, $\gamma_3^1 = \alpha_1 + \alpha_2$.

## VI. ЭВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

В этом параграфе будет проведено дальнейшее изучение действительных конечно-мерных векторных пространств.

Недостаточность предыдущей теории состояла прежде всего в отсутствии таких важных понятий как длина вектора, угол между векторами и т. д. — так называемой, метрики пространства.

Теперь и будут изучены векторные пространства с метрикой. Метрика будет нами введена посредством скалярного произведения векторов; для этого необходимо сначала познакомиться с общими свойствами билинейных форм, посредством которых и будет определяться скалярное произведение.

Пусть $H$ есть $n$-мерное действительное векторное пространство. Пусть задана функция $f(\xi, \eta)$, относящая каждой последовательности двух векторов $\xi, \eta \in H$ действительное число, причем для любых векторов $\xi, \eta, \varsigma \in H$ и любого действительного числа $a$

$$f(\xi + \eta, \varsigma) = f(\xi, \varsigma) + f(\eta, \varsigma),$$

$$f(\varsigma, \xi + \eta) = f(\varsigma, \xi) + f(\varsigma, \eta),$$

$$f(a\xi, \eta) = f(\xi, a\eta) = af(\xi, \eta).$$

Функция $f(\xi, \eta)$, удовлетворяющая этим условиям, называется билинейной формой пространства $H$. В частном случае, если $f(\eta, \xi) = f(\eta, \xi)$ для любых векторов $\xi, \eta \in H$, билинейная форма называется симметрической.

Очевидно, для билинейной формы $f(\xi, \eta)$ справедливо следующее общее соотношение:

$$f(a_1\xi_1 + \ldots + a_k\xi_k,\ b_1\eta_1 + \ldots + b_e\eta_e) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i b_j f(\xi_i, \eta_j).$$

Если $f(\xi, \eta)$ — симметрическая билинейная форма, то функция $f(\xi, \xi)$, определенная для всех векторов $\xi \in H$, называется соответствующей квадратичной формой.

Найдем теперь координатное выражение билинейных и квадратичных форм. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольный базис пространства

$$\xi = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n,\quad \eta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n.$$

Тогда для произвольной билинейной формы $f(\xi, \eta)$ имеем:

$$f(\xi, \eta) = f(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n,\ y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(\alpha_i, \alpha_j). \tag{6, 1}$$

Обозначим действительные числа $f(\alpha_i, \alpha_j)$ через $f_{ij}$, тогда, как легко проверить, формулу (6, 1) можно записать в следующей матричной форме:

$$f(\xi, \eta) = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{6,2}$$

Матрица $F = \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей формы $f(\xi, \eta)$ относительно базиса $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В дальнейшем будут применяться обозначения $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ и т. д. В этих обозначениях формула (6, 2) может быть короче представлена так:

$$f(\xi, \eta) = x'Fy.$$

По формуле (6, 2), матрица $F$ однозначно определяется формой $f(\xi, \eta)$.

Действительно, если

$(x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, или

$$\sum_{i,j} f_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_j$$

при произвольных действительных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, то полагая $x_i = y_j = 1$ и прочие координаты нулями, найдем $f_{ij} = g_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Обратно, задавая произвольную действительную квадратную матрицу порядка $n - F$ — формулой (6,2), определяем в данном базисе билинейную форму (проверить!), с матрицей $F$ (в рассматриваемом базисе).

Пусть теперь форма $f(\xi, \eta)$ симметрична. Тогда имеем: $f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi)$, или $x'Fy = y'Fx$; так как $y'Fx$ есть матрица первого порядка (число), то $y'Fx = (y'Fx)' = x'F'y$ (см. параграф 2) и, следовательно, $x'Fy = x'F'y$, или $F = F'$ $(f_{ij} = f_{ji})$. Матрица, не меняющаяся при транспонировании, называется симметрической. Таким образом, симметрические билинейные формы во всяком базисе представляются симметрическими матрицами.

Если $f(\xi, \eta)$ — симметрическая билинейная форма, то ее матрица называется также матрицей соответствующей квадратичной формы $f(\xi, \xi) = x'Fx$.

Подобно предыдущему легко доказать, что квадратичная форма $f(\xi, \xi)$ однозначно определяет симметрическую матрицу и, следовательно, и соответствующую билинейную форму. Впрочем, это следует также и из тождества

$$f(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\{f(\xi + \eta, \xi + \eta) - f(\xi - \eta, \xi - \eta)\}.$$

Отметим следующие операции над билинейными формами. Пусть $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$ — билинейные формы, $a$, $b$ — произвольные числа, $\sigma$ — произвольное линейное преобразование пространства, тогда

$$af(\xi, \eta) + bg(\xi, \eta),$$

$$f(\sigma\xi, \eta),\ f(\xi, \sigma\eta)$$

являются также билинейными формами (проверить!).

Если $F$, $G$, $A$ — суть матрицы в некотором базисе форм $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$ и преобразования $\sigma$, соответственно, то матрица формы $af(\xi, \eta)$, $+ bg(\xi, \eta)$ (в этом же базисе) равна $aF + bG$ (это очевидно), матрицы форм $f(\sigma\xi, \eta)$ и $f(\xi, \sigma\eta)$ равны, соответственно, $A'F$ и $FA$.

Докажем последнее замечание.

Обозначим столбцы координат векторов $\sigma\xi$, $\sigma\eta$ через

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$, тогда, по формуле (5, 10) имеем

$$\tilde{x} = Ax, \quad \tilde{y} = Ay.$$

Так как
$$f(\sigma\xi,\eta)=\tilde{x}'Fy=(Ax)'Fy=x'A'Fy,$$
$$f(\xi,\sigma\eta)=x'F\tilde{y}=x'FAy,$$
то последнее утверждение доказано.

Рассмотрим теперь преобразование матрицы билинейной формы $f(\xi,\eta)$ при преобразовании базиса.

Пусть в базисе $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ матрица формы равна $F$, в базисе $\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_n$— $\tilde{F}$. Пусть формулы преобразования координат при преобразовании базиса имеют вид (см. 5, 5)
$$x=P\tilde{x},\ y=P\tilde{y}.$$

Здесь $x\,(\tilde{x})$, $y\,(\tilde{y})$ — столбцы координат векторов $\xi$, $\eta$ в базисе $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (в базисе $\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_n$), $P$ — обратимая матрица преобразования координат. Имеем:
$$f(\xi,\eta)=x'Fy=\tilde{x}'\tilde{F}\tilde{y}$$
и, следовательно,
$$\tilde{x}'\tilde{F}\tilde{y}=x'Fy=(P\tilde{x})'FP\tilde{y}=\tilde{x}'P'FP\tilde{y}.$$
Таким образом,
$$\tilde{F}=P'FP. \tag{6, 3}$$

Симметрическую билинейную форму $f(\xi,\eta)$ и соответствующую квадратичную форму $f(\xi,\xi)$, обладающую дополнительным свойством $f(\xi,\xi)>0$ для всякого ненулевого вектора $\xi$ (конечно, $f(0,0)=0$), называют положительной формой. Заметим, что матрица такой формы (в произвольном базисе) обратима. Действительно, если $\det F=0$, то можно, как известно, подобрать такие ненулевые в совокупности числа $a_1,\ldots,a_n$, что $Fa=0\left(a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right)$.

Пусть $\alpha$ — вектор с координатами $a_1,\ldots,a_n$; $\alpha\neq 0$, так как $a\neq 0$.

Но $f(\alpha,\alpha)=a'Fa=0$, что противоречит предположению положительности формы $f(\xi,\eta)$.

Докажем, наконец, неравенство Буняковского для положительных форм.

Лемма 6, 1. Если $f(\xi,\eta)$ — положительная билинейная форма, то
$$|f(\xi,\eta)|\leqslant\sqrt{f(\xi,\xi)\,f(\eta,\eta)}, \tag{6, 4}$$
причем равенство достижимо только в том случае, если векторы $\xi$, $\eta$ зависимы.

Если векторы $\xi$, $\eta$ зависимы (например, $\eta = a\xi$), то справедливость равенства в формуле (6,4) проверяется простым вычислением. Будем предполагать теперь, что $\xi$, $\eta$ независимы. Пусть $\lambda$, $\mu$ — произвольные числа.

Тогда

$$f(\lambda\xi + \mu\eta, \lambda\xi + \mu\eta) = \lambda^2 f(\xi, \xi) + 2\lambda\mu f(\xi, \eta) + \mu^2 f(\eta, \eta) \geqslant 0,$$

причем равенство здесь достигается только при $\lambda\xi + \mu\eta = 0$, иначе говоря, при $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Но тогда дискриминант формы переменных $\lambda$, $\mu$, $\lambda^2 f(\xi, \xi) + 2\lambda\mu f(\xi, \eta) + \mu^2 f(\eta, \eta)$ отрицателен

$$[f(\xi, \eta)]^2 - f(\xi, \xi) f(\eta, \eta) < 0.$$

Отсюда легко получается справедливость неравенства в формуле (6, 4). Лемма доказана.

$n$-мерное действительное векторное пространство, в котором скалярное произведение двух векторов $\xi$, $\eta$ определяется произвольно выбранной симметрической положительной билинейной формой $f(\xi, \eta)$, называется $n$-мерным эвклидовым пространством. Это означает, что длина вектора $\xi$ (обозначается через $|\xi|$) определяется числом $+\sqrt{f(\xi, \xi)}$, угол $\varphi$ — между векторами $\xi, \eta$ — по формуле

$$|\xi|\,|\eta| \cos\varphi = f(\xi, \eta).$$

Выбранную в эвклидовом пространстве $H$ положительную билинейную форму $f(\xi, \eta)$ в дальнейшем будем обозначать кратко $(\xi, \eta)$ и называть скалярным произведением *.

Итак,

$$\begin{aligned} |\xi| &= +\sqrt{(\xi, \xi)}, \\ |\xi|\,|\eta| \cos\varphi &= (\xi, \eta). \end{aligned} \tag{6, 5}$$

Если $(\xi, \eta) = 0$, векторы $\xi$, $\eta$ называются ортогональными. В случае ненулевых векторов $\xi$, $\eta$,

$$\cos\varphi = \frac{(\xi, \eta)}{|\xi|\,|\eta|}; \tag{6, 6}$$

по неравенству Буняковского (6, 4), $\frac{|(\xi, \eta)|}{|\xi|\,|\eta|} \leqslant 1$ и, следовательно, угол $\varphi$, определяемый по формуле (6, 6) будет действительным.

Примеры 1. $H$—множество столбцов действительных чисел высоты $n$; как известно, $H$ образует $n$-мерное действительное векторное пространство. Скалярное произведение двух

---

*В дальнейшем будет доказано, что свойства эвклидова пространства не зависят от выбора (положительной) формы $f(\xi, \eta)$

столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ определяется формулой $(x_1 y_1) = x_1 v_1 + \ldots + x_n y_n$ *; длина вектора определяется формулой $|x| = +\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. При таком определении скалярного произведения $H$ является $n$-мерным эвклидовым пространством (проверить свойства формы $(x_1 y)$!).

Векторы $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, l_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис $H$; эти векторы имеют длину, равную единице, и попарно ортогональны. Неравенство Буняковского имеет вид

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

для любых действительных чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

2. $H$ — множество действительных интегрируемых на отрезке $[a_1 b]$ функций (аргумента $t$); $H$ есть бесконечно-мерное векторное пространство.

Скалярное произведение функций $f(t)$, $g(t)$ определяется формулой $(f, g) = \int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$. При таком выборе скалярного произведения $H$ можно рассматривать как бесконечно-мерное эвклидово пространство.

Неравенство Буняковского справедливо и здесь. В этом можно убедиться, заметив, что доказательство его не использует размерности пространства. Это доказательство для данных двух функций $f(t)$, $g(t)$ проводится в конечно-мерном пространстве функций вида $a\, f(t) + bg(t)$ ($a$, $b$ — произвольные постоянные). Имеем

$$\left| \int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f(t)]^2\, dt \int\limits_a^b [g(t)]^2\, dt} \text{ —}$$

важное неравенство, часто применяемое в анализе. Оно спра-

---

* Именно так выражается скалярное произведение двух векторов трехмерного ($n = 3$) пространства в прямоугольной системе координат

ведливо и для бесконечного интервала интегрирования, если сходятся, интегралы

$$\int [f(t)]^2\,dt, \int_a^b [g(t)]^2\,dt.$$

Будем называть систему векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ пространства ортонормированной, если длины этих векторов равны единице и они попарно ортогональны:

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ нормированность}) \\ 0 & (i \neq j \text{ ортогональность}) \end{cases}$$

Ортонормированная система векторов независима.

Действительно, если $c_1\varepsilon_1 + \ldots + c_k\varepsilon_k = 0$, то помножая скалярно на $\varepsilon_1$, получим

$0 = (c_1\varepsilon_1 + \ldots + c_k\varepsilon_k, \varepsilon_1) = c_1(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \ldots + c_k(\varepsilon_k, \varepsilon_1) = c_1$; так же докажем, что $c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Тем же методом доказывается, что координаты вектора $\xi$ в ортонормированном базисе $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ соответственно равны $(\xi, \varepsilon_1), \ldots, (\xi, \varepsilon_n) : \xi = (\xi, \varepsilon_1)\varepsilon_1 + \ldots + (\xi, \varepsilon_n)\varepsilon_n$.

Так как пространство $H$ $n$-мерно, то длина $k$ ортогональной системы векторов не больше $n$.

Лемма 6,2. Эвклидово пространство обладает ортогональным базисом.

Докажем сначала, что в эвклидовом пространстве существует ортонормированная система векторов длиною $n$*.

Пусть $\alpha$ — произвольный ненулевой вектор из $H$. Тогда $\varepsilon_1 = \frac{1}{|\alpha|}\alpha$ есть вектор единичной длины; вектор $\varepsilon_1$ представляет ортогональную систему длины единицы. Пусть уже построена ортогональная система $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ длины $k < n$, тогда существует вектор $\beta \in H$, не зависящий от векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$. Построим ненулевой вектор $\gamma$, ортогональный к векторам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$. Будем подбирать вектор $\gamma$ в виде $\gamma = \beta + a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k$. Условия $(\gamma, \varepsilon_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ приводят тогда к уравнениям $(\beta, \varepsilon_i) + ai = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, откуда и определяются коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$.

Вектор $\gamma \neq 0$, так как $\beta$ не зависит от векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$. Полагая $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{|\gamma|}\gamma$, получим тогда единичный вектор такой, что система $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}$ ортонормирована. Продолжая этот „процесс ортогонолизации", получим ортонормирован-

---

* Так как базис нуль-мерного пространства пуст, то доказательство ведется для пространства положительной размерности.

ную систему векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; так как эти векторы независимы, то они образуют базис пространства $H$. Лемма доказана.

В ортонормированном базисе скалярное произведение выражается простейшим образом через координаты векторов. Если

$$\xi = x_1 \varepsilon_1 + \ldots + x_n \varepsilon_n, \; \eta = y_1 \varepsilon_1 + \ldots + y_n \varepsilon_n, \text{ то}$$

$$(\xi, \eta) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

$$|\xi| = +\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2};$$

получаем хорошо известное выражение скалярного произведения в прямоугольной системе координат. В этом случае матрица скалярного произведения оказывается единичной матрицей.

Основываясь на этом, можно доказать следующую важную теорему.

Теорема 6, 1. Пустя $H$, $\tilde{H}$ суть $n$-мерные эвклидовы пространства со скалярными произведениями, соответственно, $f(\xi, \eta)$ $(\xi, \eta \in H)$, $\tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \tilde{H})$. Тогда можно установить такое взаимно-однозначное соответствие между векторами пространств $H$, $\tilde{H} : \xi \longleftrightarrow \tilde{\xi}$, что

$$\xi + \eta = \tilde{\xi} + \tilde{\eta},$$

$$a\,\xi = a\,\tilde{\xi},$$

$$f(\xi, \eta) = \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Таким образом, все предложения, справедливые в одном пространстве и выраженные посредством основных векторных действий и скалярного произведения, переносятся в этом соответствии на другое пространство. Эти пространства изоморфны.

Действительно, выберем в пространствах $H$ и $\tilde{H}$ ортонормированные базисы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и $\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n$. Каждому вектору $\xi = x_1 \varepsilon_1 + \ldots + x_n \varepsilon_n \in H$ поставим в соответствие вектор из $\tilde{H}$ с теми же координатами: $\tilde{\xi} = x_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \ldots + x_n \tilde{\varepsilon}_n$. Непосредственно проверяется тогда справедливость теоремы 6, 1 (провести эту проверку).

Основным вопросом, который нас будет интересовать в дальнейшем, является изучение важных классов линейных преобразований эвклидова пространства: проекций, вращения, самосопряженного преобразования.

Пусть $H'$ есть подпространство пространства $H$, $\xi$ — произвольный вектор. Проекцией вектора $\xi$ на подпространство $H'$ естественно назвать такой вектор $\xi' \in H'$, который наименее отличается от вектора $\xi$; под этим будем понимать следующее: $|\xi - \xi'| \leqslant |\xi - \eta|$ для всякого вектора $\eta \in H'$. Докажем прежде всего существование и единственность такого вектора $\xi'$.

Если $H'$ содержит только нулевой вектор, то $\xi' = 0$ и утверждение очевидно; пусть теперь $H'$ имеет положительную размерность. Выберем в $H'$ ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$; произвольный вектор $\eta$ из $H'$ можно представить в виде

$$\eta = y_1\varepsilon_1 + \ldots + y_m\varepsilon_m.$$

Таким образом,

$$|\xi - \eta|^2 = (\xi - \eta, \xi - \eta) = (\xi, \xi) - 2\sum_{i=1}^{m} y_i (\xi, \varepsilon_i) + \sum_{i,j}^{m} y_i y_j (\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Так как система векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ ортонормирована, то

$$\begin{aligned} |\xi - \eta|^2 &= |\xi|^2 - 2\sum_{i=1}^{m} y_i (\xi, \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{m} y_i^2 = \\ &= |\xi|^2 - \sum_{i=1}^{m} (\xi, \varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^{m} [\, (y_i - (\xi, \varepsilon_i)\,]^2. \end{aligned} \qquad (6,\ 7)$$

Последнее слагаемое здесь не отрицательно; следовательно, $|\xi - \eta|^2$ принимает наименьшее значение только при

$y_i = (\xi, \varepsilon_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$, для вектора $\eta = \sum_{i=1}^{m} (\xi, \varepsilon_i)\varepsilon_i$.

Таким образом, не только доказано существование единственной проекции, но и указан метод нахождения такой проекции.

Отображение $\Theta$, сопоставляющее каждому вектору $\xi$ его проекцию $\xi'$ на подпространство $H'$, называется проекцией.

В произвольном ортонормированном базисе $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ подпространства $H'$

$$\Theta\xi = \sum_{i=1}^{m} (\xi, \varepsilon_i)\, \varepsilon_i. \qquad (6,\ 8)$$

Из формулы (6, 7) следует, кроме того, справедливость неравенства

$$|\xi|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{m} (\xi, \varepsilon_i)^2; \tag{6,9}$$

равенство здесь достигается только в случае $\xi = \xi' \in H'$, если вектор $\xi$ линейно зависит от векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$.

Из формулы (6, 8) следует, что проекция есть линейное преобразование пространства $H$ (проверить!).

Если, в частности, $\xi \in H'$, то очевидно, $\Theta\xi = \xi$. Пусть теперь $\xi$ — произвольный вектор из $H$: так как $\Theta\xi \in H'$, то $\Theta(\Theta\xi) = \Theta\xi$. Это означает, что

$$\Theta^2 = \Theta. \tag{6, 10}$$

Пример. Пусть $H$ — множество действительных интегрируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций аргумента $t$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt$.

Пусть $H'$ — подпространство $H$, состоящее из тригонометрических полиномов порядка $n$, вида

$$S_n(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{6,11}$$

($a_0, a_1, \ldots, b_n$ — произвольные действительные числа). Определим проекцию какой-либо интегрируемой функции $f(t)$ на $H'$; предыдущие рассуждения здесь применимы, так как при определении проекций функций $f(t)$ достаточно рассмотреть конечно-мерное пространство с образующими $f(t)$, 1, $\cos t$, $\sin t, \ldots, \cos nt$, $\sin nt$.

Заметим, что функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t$, ......, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt$ образуют ортонормированный базис $H'$ (таким образом, размерность $H'$ равна $2n + 1$).

Проекция $f(t)$ определяется по формуле (6, 11) при

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\, dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt,$$

$$bk = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции $f(t)$. Для этого значения коэффициентов величина

$$|f-S_n|^2=\int_0^{2\pi}[f(t)-S_n(t)]^2\,dt$$

достигает минимума; $S_n(t)$ для указанного значения коэффициентов представляет наилучшее приближение $f(t)$ при таком способе определения отклонения $S_n(t)$ от $f(t)$.

Для дальнейшего изучения преобразований в эвклидовом пространстве введем понятие сопряженного преобразования.

Лемма 6, 3. Пусть $f(\xi, \eta)$ — произвольная билинейная форма в эвклидовом пространстве $H$. Тогда можно, и притом единственным образом, подобрать два преобразования $\sigma$, $\tau$ так, что для любых векторов $\xi, \eta \in H$

$$f(\xi, \eta)=(\sigma\xi, \eta)=(\xi, \tau\eta).$$

Доказательство. Пусть в некотором базисе форма $f(\xi, \eta)$ имеет матрицу $F$, форма $(\xi, \eta)$ — матрицу $G$; напомним, что матрица $G$ обратима. Пусть $x, y$ — столбцы координат векторов $\xi$, $\eta$ в выбранном базисе, тогда $f(\xi, \eta) = x'Fy$. Пусть $A$, $B$ — матрицы произвольных пока преобразований $\sigma$ и $\tau$, тогда $(\sigma\xi, \eta)=x'A'Gy$, $(\xi, \tau\eta)=x'GBy$.

Для выполнения равенства $f(\xi, \eta)=(\sigma\xi, \eta)$ необходимо и достаточно, чтобы $F=A'G$ или $F'=GA$ $(G'=G)$; отсюда $A=G^{-1}F'$; эта формула однозначно определяет матрицу $A$ преобразования $\sigma$ и, следовательно, однозначно определяет преобразование $\sigma$.

Точно так же преобразование $\tau$ однозначно определяется своей матрицей $B$ из условия $f(\xi, \eta)=(\xi, \tau\eta)$, или $F=GB$, $B=G^{-1}F$.

Следствие. Для каждого линейного преобразования $\sigma$ можно однозначно определить такое преобразование $\sigma^x$, что

$$(\sigma\xi, \eta)=(\xi, \sigma^x\eta). \qquad (6, 7)$$

Действительно $(\sigma\xi, \eta)$ — некоторая билинейная форма, по которой, по-предыдущему, определяется преобразование $\tau=\sigma^x$. Из доказательства леммы 6, 3 легко следует, что матрицы $A$ и $A^x$ преобразований $\sigma$ и $\sigma^x$ связаны соотношением

$$A^x=G^{-1}A'G. \qquad (6, 8)$$

Действительно, матрица $F$ формы $(\sigma\xi, \eta)$, по-предыдущему, равна $A'G$ и $GA^x$. Из $A'G=GA^x$ и следует формула (6, 8). Преобразование $\sigma^x$ называется сопряженным (относительно преобразования $\sigma$).

Докажем, что преобразование $\sigma$ сопряжено с $\sigma^x$: $(\sigma^x)^x=\sigma$.

Действительно, из

$$(\sigma^x \xi, \eta) = (\xi, \sigma^{xx} \eta)$$

следует (симметрия скалярного произведения): $(\sigma^{xx}\eta, \xi) = (\eta, \sigma^x\xi)$ и следовательно, $(\sigma^{xx}\eta, \xi) = (\sigma\eta, \xi)$. Так как форма $(\sigma\eta, \xi)$ однозначно определяет преобразование $\sigma$, то $\sigma = \sigma^{xx}$, что и требовалось доказать.

Преобразование $\sigma$, называется самосопряженным, если $\sigma = \sigma^x$. Для матрицы $A$ такого преобразования имеет место соотношение (см. 6, 8)

$$A = G^{-1}A'G. \tag{6,9}$$

Если $\sigma$ — самосопряженное преобразование, то $(\sigma\xi, \eta) = (\xi, \sigma\eta)$; в этом случае форма $f(\xi, \eta) = (\sigma\xi, \eta)$ симметрическая. Действительно,

$$f(\xi, \eta) = (\sigma\eta, \xi) = (\eta, \sigma\xi) = (\sigma\xi, \eta) = f(\xi, \eta).$$

Обратно, пусть $f(\xi, \eta)$ — произвольная симметрическая форма, тогда преобразование $\sigma$, определяемое формулой $f(\xi, \eta) = (\sigma\xi, \eta)$,— самосопряженное. Действительно, $(\xi, \sigma\eta) = (\sigma\eta, \xi) = f(\eta, \xi) = f(\xi, \eta) = (\sigma\xi, \eta)$ и, следовательно, $\sigma^x = \sigma$.

Преобразование $\sigma$ называется ортогональным, если для любых двух векторов $\xi, \eta$

$$(\sigma\xi, \sigma\eta) = (\xi, \eta). \tag{6, 10}$$

При ортогональном преобразовании длина векторов и углы между ними не меняются.

Действительно, из формулы (6, 10) при $\xi = \eta$ получаем, что $|\sigma\xi| = |\xi|$. С другой стороны, из формулы (6, 10) получаем, что

$$\frac{(\sigma\xi, \sigma\eta)}{|\sigma\xi|\,|\sigma\eta|} = \frac{\xi, \eta}{|\xi|\,|\eta|},$$

и, следовательно, угол между векторами $\xi, \eta$ сохраняется.

Таким образом, ортогональное преобразование соответствует вращению пространства около точки (представляя себе векторы, исходящими из этой точки).

Для матрицы $U$ ортогонального преобразования $\sigma$ из формулы (6, 10) непосредственно получаем

$$U'GU = G; \tag{6, 11}$$

здесь $G$ — матрица скалярного произведения в рассматриваемом базисе.

Рассмотрим теперь матрицы самосопряженного и ортогонального преобразований в ортонормированном базисе.

Замечая, что в этом случае $G = \mathrm{I}$ (единичная матрица) из формул (6, 9) (6, 11) находим

$$A = A', \tag{6, 12}$$

$$U'U = \mathrm{I}. \tag{6, 13}^*$$

Таким образом, в ортонормированном базисе матрица $A$ самосопряженного оператора симметрична; матрица $U$ ортогонального преобразования обратима, причем обратная матрица равна транспонированной: $U^{-1} = U'$. Таким образом, также $UU' = \mathrm{I}$.

Если $U = \begin{pmatrix} u_{11} \ldots u_{1n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ u_{n1} \ldots u_{nn} \end{pmatrix}$, то таким образом, $u_{i1}u_{j1} + \ldots +$

$$+ u_{in}u_{jn} = \begin{cases} 1 & (i = j). \\ 0 & (i \neq j), \end{cases}$$

Из (6, 13) аналогично получаем

$$u_{1i}u_{1j} + \ldots + u_{ni}u_{nj} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

Изучим теперь канонический вид самосопряженного преобразования.

Лемма 6, 4. Собственные числа самосопряженного преобразования действительны.

Действительно, пусть $A$ — матрица самосопряженного преобразования $\sigma$ в ортонормированном базисе; тогда матрица $A$ симметрична. Собственное число $\lambda$ и координаты собственного вектора $c_1, \ldots, c_n$ определяются из уравнений (5, 13), (5, 12)

$$det\,(A - \lambda\mathrm{I}) = 0, \tag{5, 13}$$

$$Ac = \lambda c \qquad \left(c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_n \end{pmatrix}\right). \tag{5, 12}$$

При комплексном $\lambda$, $c\ (\neq 0)$ оказывается столбцом комплексных чисел.

Транспонируя (5,12) и переходя к комплексносопряженным числам, получим $\bar{c}'A = \bar{\lambda}\bar{c}'$. Приведем левые части этого уравнения и уравнения (5, 12) к $\bar{c}'Ac$, тогда $\lambda\bar{c}'c = \bar{\lambda}\bar{c}'c$. Но $\bar{c}'c = \bar{c}_1c_1 + \ldots + \bar{c}_nc_n = |c|^2 + \ldots + |c_n|^2 > 0$ $(c \neq 0!)$, следовательно, $\lambda = \bar{\lambda}$ есть действительное число.

---

* Отсюда следует, что $det\ U = \pm 1$

Таким образом, формула (5, 12) позволит определить действительные собственные векторы преобразования $\sigma$; каноническая форма матрицы самосопряженного преобразования будет, по теореме 5, 9, состоять из ящиков вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Докажем теперь, что каждый такой ящик состоит из одного элемента $\lambda$.

Лемма 6, 5. Характеристическая матрица самосопряженного преобразования имеет элементарные делители только первой степени.

Пусть степень $\varkappa$ одного из элементарных делителей больше единицы, тогда из формул (5, 22) следует существование двух ненулевых векторов $\delta_{\varkappa-1}$, $\delta_{\varkappa}$ (в обозначениях этой формулы*) таких, что

$$\sigma \delta_{\varkappa-1} = \lambda \delta_{\varkappa-1} + \delta_{\varkappa},$$

$$\sigma \delta_{\varkappa} = \lambda \delta_{\varkappa}.$$

Помножая первую формулу скалярно на $\delta_{\varkappa}$, вторую — на $\delta_{\varkappa-1}$ получаем

$$(\sigma \delta_{\varkappa-1}, \delta_{\varkappa}) = \lambda (\delta_{\varkappa-1}, \delta_{\varkappa}) + (\delta_{\varkappa}, \delta_{\varkappa}),$$

$$(\delta_{\varkappa-1}, \sigma \delta_{\varkappa}) = \lambda (\delta_{\varkappa-1}, \delta_{\varkappa}).$$

Так как $\sigma$ — самосопряженное преобразование, то $(\sigma\delta_{\varkappa-1}, \delta_{\varkappa}) = (\delta_{\varkappa}, \sigma \delta_{\varkappa})$. Сравнивая первые части предыдущих формул, получаем невозможное ($\delta_{\varkappa} \neq 0$!) равенство $(\delta_{\varkappa}, \delta_{\varkappa}) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 6, 6. Собственные векторы самосопряженного преобразования, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Действительно, пусть $\sigma\xi_1 = \lambda_1\xi_1$, $\sigma\xi_2 = \lambda_2\xi_2$, тогда $(\sigma\xi_1, \xi_2) = (\lambda_1\xi_1, \xi_2) = \lambda_1 (\xi_1, \xi_2)$; $(\xi_1, \sigma\xi_2) = (\xi_1, \lambda_2\xi_2) = \lambda_2(\xi_1, \xi_2)$. Так как $(\sigma\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \sigma\xi_2)$, то $\lambda_1 (\xi_1, \xi_2) = \lambda_2(\xi_1, \xi_2)$ и, следовательно, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Теорема 6, 2. Для каждого самосопряженного преобразования можно выбрать такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования диагональна

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{6, 17}$$

---

* Опуская индекс $j$

Доказательство. Выберем базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ пространства так, чтобы матрица преобразования приобрела каноническую форму (теорема 5, 9). По лемме 6, 5, выражение (6, 17) представляет каноническую форму матрицы самосопряженного преобразования.

Таким образом, $\sigma\alpha_j = \lambda_j\alpha_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. По лемме 6, 6, векторы $\alpha_j, \alpha_k$, соответствующие разным собственным числам $\lambda_j, \lambda_k$, ортогональны. Таким образом, если все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны, то базис $\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{|\alpha_n|}\alpha_n$ ортонормирован и теорема доказана.

Пусть теперь среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ встречаются равные, например, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$; рассмотрим подпространство $H'$, состоящее из векторов вида $x_1\alpha_1 + \ldots + x_r\alpha_r$ $(x_1, \ldots, x_r$ — произвольные действительные числа).

Так как $\sigma(x_1\alpha_1 + \ldots + x_r\alpha_r) = x_1\sigma\alpha_1 + \ldots + x_r\sigma\alpha_r = \lambda_1(x_1\alpha_1 + \ldots + x_r\alpha_r)$, то каждый вектор этого подпространства (кроме нулевого) — собственный, соответствующий одному и тому же собственному числу $\lambda_1$. Выберем в $H'$ ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ (лемма 6, 2); по-предыдущему, $\sigma\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1, \ldots, \sigma\varepsilon_r = \lambda_1\varepsilon_r$.

Заменяя в базисе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ пространства $H$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ через $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ и производя также подобные замены среди остальных векторов $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ получим ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ пространства; при этом $\sigma\varepsilon_i = \lambda_i\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, матрица преобразования $\sigma$ в этом ортонормированном базисе имеет вид (6, 17). Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее важное следствие.

Теорема 6, 3. Пусть $\sum\limits_{i\,j\,1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $\sum\limits_{i\,j-1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji})$ две квадратичные формы с действительными коэффициентами.

Если первая форма положительна, то существует такое действительное линейное обратимое преобразование аргументов, при котором формы принимают соответственно вид $y_1^2 + \ldots + y_n^2$, $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. При этом, если $A = (a_{ij})^n_{i,j=1}$, $B = (b_{ij})^n_{i,j=1}$, то $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями (с учетом их кратности) уравнения $det(B - \lambda A) = 0$.

Доказательство. Пусть $H$ — множество столбцов действительных чисел вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$; $H$ есть $n$-мерное действительное векторное пространство. Формы $f(x, \tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\tilde{x}_j$, $g(x, \tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\tilde{x}_j$ $\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}\right)$ являются симметрическими ($a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$!) билинейными формами в этом пространстве. Выберем положительную форму $f(x, \tilde{x})$ в качестве скалярного произведения: $f(x, \tilde{x}) = (x, \tilde{x})$. По лемме 6, 3, тогда существует такое линейное преобразование $\sigma$, что $g(x, \tilde{x}) = (x, \sigma\tilde{x})$.

Как отмечалось ранее, из симметричности билинейной формы $g(x, \tilde{x})$ следует, что преобразование $\sigma$ самосопряженное.

Тогда, на основании теоремы 6, 2, в пространстве можно выбрать ортонормированный базис так, что матрица преобразования $\sigma$ в этом базисе примет вид (6, 17).

Обозначим через $y_1, \ldots, y_n$ и $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ координаты векторов $x$ и $\tilde{x}$ в новом базисе. Связь между координатами вектора в разных базисах определяется формулами преобразования координат (5, 6)

$$y_1 = p_{11}x_1 + \ldots + p_{1n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = p_{n1}x_1 + \ldots + p_{nn}x_n.$$

При этом $\begin{vmatrix} p_{11} \ldots p_{1n} \\ \cdots\cdots \\ p_{n1} \ldots p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ и, следовательно, это преобразование обратимо. Но в ортонормированном базисе

$$f(x\tilde{x}) = (x\,\tilde{x}) = (y_1, \ldots, y_n)\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = y_1\tilde{y}_1, \ldots, y_n\tilde{y}_n, g(x, \tilde{x}) =$$

$$= (x, \sigma\tilde{x}) = (y_1, \ldots, y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1\tilde{y}_1 + \ldots + \lambda_n y_n\tilde{y}_n;$$

в частности, при $\tilde{x} = x$ заключаем, что данные квадратичные формы принимают вид $y_1^2 + \ldots + y_n^2$, $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$.

При доказательстве леммы 6, 3, было установлено, что матрица преобразования $\sigma$ в первоначальном базисе имеет вид $A^{-1}B$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа преобразования $\sigma$ являются поэтому корнями уравнения $det(A^{-1}B - \lambda I) = 0$, или, так как $det\,(A^{-1}B - \lambda\,I) = det\,\{A^{-1}(B - \lambda A)\} = det\,A^{-1} \cdot det(B - \lambda A)$, уравнения $det(B - \lambda A) = 0$. Теорема доказана.

Примеры. 1. На основании формулы (6, 8) можно легко доказать, что проекция $\Theta$ есть самосопряженное преобразование; из формулы (6, 10) получается, что собственные числа преобразования $\Theta$ равны 1 или 0. Таким образом, в некотором ортонормированном базисе $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ матрица преобразования $\Theta$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, соответствующие собственному числу 1, образуют ортонормированный базис того подпространства $H'$, на которое проектируется пространство $H$ и при проектировании не меняются; векторы $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n$, соответствующие собственному числу 0, ортогональны подпространству $H'$ (проектируются в нулевой вектор).

2. Пусть

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2\varepsilon y + F = 0$$

есть уравнение кривой второго порядка в декартовых координатах. Из теоремы 6, 3 следует, что можно выбрать такую прямоугольную систему координат, что старшие члены уравнения примут вид $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_1 \tilde{y}^2$ (положительно определенной формой, о которой упоминается в теореме 6, 3, является здесь форма, выражающая квадрат расстояния точки $(x, y)$ от начала координат). Аналогичный результат справедлив и для поверхностей второго порядка.

Перейдем теперь к исследованию ортогонального преобразования.

Это исследование значительно упростится, если предварительно расширить эвклидово пространство до комплексного эвклидова пространства. Метод такого расширения для векторного пространства рассмотрен в параграфе 5. Укажем теперь метод переноса метрики на комплексное эвклидово пространство.

Пусть в эвклидовом пространстве $H$ выбран ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Длина вектора $\xi = x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_n\varepsilon_n$ в этом случае определяется, как известно, по формуле $|\xi|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Как указывалось в параграфе 5, переход от действительного пространства $H$ к комплексному пространству $\tilde{H}$ сводится к рассмотрению векторов с комплексными координатами $x_1, \ldots, x_n$ (относительно действительного базиса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$). Естественно в этом случае положить $|\xi|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n$; но это соответствует рассмотрению билинейной формы вида $(\xi, \eta) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$ $(\eta = y_1\varepsilon_1 + \ldots + y_n\varepsilon_n)$, со свойствами $\xi, \eta) = \overline{(\eta, \xi)}$, $(a\xi, \eta) = a(\xi, \eta)$, $(\xi, a\eta) = \bar{a}(\xi, \eta)$. Дадим теперь, следуя этому замечанию, определение комплексного эвклидова пространства, не зависимое от выбора определенного базиса. Будем называть билинейной формой в произвольном комплексном векторном пространстве функцию $f(\xi, \eta)$, относящую последовательности векторов $\xi, \eta$ комплексное число и обладающую свойствами: для любых векторов $\xi, \eta\ \varsigma$ и произвольного комплексного числа $a$

$$\begin{aligned} &f(\xi+\eta, \varsigma)=f(\xi, \varsigma)+f(\eta, \varsigma), \\ &f(\varsigma, \xi+\eta)=f(\varsigma, \xi)+f(\varsigma, \eta), \\ &f(a\xi, \eta)=af(\xi, \eta), \\ &f(\xi, a\eta)=\bar{a}f(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{6,15}$$

Билинейную форму $f(\xi, \eta)$ будем называть симметрической, если

$$\overline{f(\xi, \eta)}=f(\eta, \xi). \tag{6,16}$$

Таким образом, $\overline{f(\xi, \xi)}=f(\xi, \xi)$ и в этом случае $f(\xi, \xi)$ есть действительное число. $f(\xi, \xi)$ будем называть квадратичной формой, соответствующей симметрической билинейной форме $f(\xi, \eta)$.

Симметрическую билинейную форму $f(\xi, \eta)$ и квадратическую форму $f(\xi, \xi)$ будем называть положительными, если, кроме того, $f(\xi, \xi)>0$ для всякого ненулевого вектора. Комплексное векторное пространство, в котором скалярное произведение определяется какой-либо симметрической положительной билинейной формой $f(\xi, \eta)$, называется комплексным эвклидовым пространством*.

Пример. Множество интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций (действительного аргумента $t$), принимающих комплексные значения, со скалярным произведением

$$(f, g)=\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

можно рассматривать как бесконечно-мерное комплексное эвклидово пространство**.

Так же, как и в действительном случае, для комплексных эвклидовых пространств доказывается справедливость неравенства Буняковского и существование ортонормированного базиса. Отсюда следует также, что комплексные эвклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны (в смысле теоремы 6,1).

---

* Называется иногда также унитарным пространством

** В дальнейшем рассматриваются конечно-мерные эвклидовы пространства

Лемма 6,3 также справедлива для комплексного эвклидова пространства*. Это позволяет сохранить определение сопряженного преобразования и самосопряженного преобразования; определение ортогонального преобразования** также остается прежним.

Пусть в $n$-мерном комплексном эвклидовом пространстве выбран базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; если $\xi = x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_n\varepsilon_n$,

$$\eta = y_1\varepsilon_1 + \ldots + y_n\varepsilon_n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$, то для билинейной формы $f(\xi, \eta)$ получается следующее координатное выражение:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{k, l=1}^{n} f_{kl}\, x_k \bar{y}_l, \quad f_{kl} = f(\varepsilon_k, \varepsilon_l);$$

матрица $F = \begin{pmatrix} f_{11} \ldots f_{1n} \\ \ldots\ldots \\ f_{n1} \ldots f_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей билинейной формы. В матричной записи

$$f(\xi, \eta) = x^1 F \bar{y}.$$

Если форма $f(\xi, \eta)$ симметрична, то

$$f_{kl} = f(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = f(\varepsilon_l, \varepsilon_k) = \bar{f}_{lk};$$

короче это можно выразить формулой $F^1 = \bar{F}$.

Матрица самосопряженного преобразования в ортонормированном базисе обладает подобным же свойством (проверить!).

Таким образом, квадратичная форма в комплексном пространстве имеет вид $\sum_{k, l=1}^{n} a_{kl}\, x_k \bar{x}_l$ $(\bar{a}_{kl} = a_{lk})$.

Леммы 6,4; 6,5; 6,6 и теорема 6,2 переносятся без изменения на случай самосопряженного преобразования в комплексном пространстве (метод доказательства при этом также сохраняется). Приведем формулировку теоремы, соответствующей теореме 6,3.

---

* Упражнение: провести доказательства лемм 6,1; 6,2; 6,3; теоремы 6,1 для комплексного эвклидова пространства

** Часто называется также унитарным преобразованием

Теорема 6,4. Пусть $\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k \bar{x}_l$, $\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} x_k \bar{x}_l$ суть квадратичные формы с комплексными коэффициентами. Если первая форма положительна, то существует такое линейное обратимое преобразование аргументов (с комплексными коэффициентами), с помощью которого эти формы приводятся к виду

$$y_1\bar{y}_1 + \ldots + y_n\bar{y}_n, \quad \lambda_1 y_1\bar{y}_1 + \ldots + \lambda_n y_n\bar{y}_n;$$

действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями уравнения $det\ (B - \lambda A) = 0$ ($A$, $B$ — матрицы данных форм).

Метод доказательства этой теоремы тот же, что и теоремы 6,3.

Пусть теперь действительное эвклидово пространство $H$ расширено (по схеме параграфа 5) до комплексного эвклидова пространства $\tilde{H}$. Скалярное произведение в $\tilde{H}$ определим так, чтобы, в частности, для действительных векторов оно совпадало со скалярным произведением, заданным в $H$.

Чтобы доказать возможность (притом единственную) выполнения этого условия, заметим, что оно, на основании (6,15), (6,16) приводит к следующей формуле: если $\xi'$, $\xi''$, $\eta'$, $\eta''$ действительные векторы, то

$$(\xi' + i\xi'', \eta' + i\eta'') = (\xi', \eta') + (\xi'', \eta'') + i\Big((\xi'', \eta') - (\xi', \eta'')\Big) \tag{6,17}$$

Скалярные произведения в правой части этой формулы определены в $H$.

Непосредственно проверяется, что формула (6,17) определяет билинейную симметрическую положительную форму в пространстве $\tilde{H}$ (проверить выполнение условий (6,14), (6,15) и положительность выражения в правой части формулы (6,16).

При $\xi'' = 0$, $\eta = 0$ правая часть формулы (6,17) обращается в $(\xi' \eta')$; таким образом, скалярное произведение, определенное в $\tilde{H}$ по формуле (6,7), в частности, для действительных векторов, совпадает со скалярным произведением, заданным в $H$.

Заметим, что $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \overline{(\xi, \eta)}$ (следует из (6,17). Пусть теперь $\sigma$ — некоторое линейное преобразование пространства $H$. Следуя параграфу 5, продолжим $\sigma$ до преобразования $\tilde{\sigma}$, действующего в $\tilde{H}$, по формуле

$$\sigma(\xi' + i\xi'') = \sigma\xi' + i\sigma\xi''. \tag{6,18}$$

Очевидно, $\tilde{\sigma}\bar{\xi}=\overline{\tilde{\sigma}\xi}$. Докажем прежде всего, что при таком продолжении ортогонального преобразования $\sigma$ пространства $H$ преобразование $\tilde{\sigma}$ пространства $\tilde{H}$ также оказывается ортогональным.

Пусть $\sigma$ — ортогональное преобразование. Из формул (6,17), (6,18) получаем

$$\begin{gathered}\left(\sigma(\xi'+i\xi''),\ \tilde{\sigma}(\eta'+i\eta'')\right)=(\sigma\xi',\ \sigma\eta')+(\sigma\xi'',\ \sigma\eta'')+\\ +i\left((\sigma\xi'',\ \sigma\eta')-(\sigma\xi',\ \sigma\eta'')\right)=\\ =(\xi',\ \eta')+(\xi'',\ \eta'')+i\left((\xi'',\ \eta')-(\xi',\ \eta'')\right)=\\ =(\xi'+i\xi'',\ \eta'+i\eta'').\end{gathered}$$

Ортогональность преобразования $\tilde{\sigma}$ доказана.

Как было доказано в параграфе 5, преобразования $\sigma$, $\tilde{\sigma}$ имеют одинаковые собственные числа. Поэтому следующая лемма справедлива и для комплексного и для действительного эвклидова пространства; доказывать ее будем для комплексного пространства.

Лемма 6,7. Модуль собственного числа ортогонального преобразования равен единице.

Пусть $\sigma$ — ортогональное преобразование комплексного эвклидова пространства, $\xi$ — собственный вектор, $\lambda$ — соответствующее собственное число

$$\sigma\xi=\lambda\xi,\quad \xi\neq 0.$$

Из $(\sigma\xi,\ \sigma\xi)=(\xi,\ \xi)$ (ортогональность преобразования $\sigma$) и $(\sigma\xi,\ \sigma\xi)=(\lambda\xi,\ \lambda\xi)=|\lambda|^2(\xi,\ \xi)$, замечаем, что $|\lambda|^2=1$.

Лемма 6,8. Степень элементарного делителя ортогонального преобразования комплексного пространства равна единице.

Если степень элементарного делителя преобразования $\sigma$ больше единицы, то существуют ненулевые векторы $\delta_{\varkappa-1}$, $\delta_\varkappa$ (в обозначениях формул (5,22)) такие, что

$$\begin{gathered}\sigma\delta_{\varkappa-1}=\lambda\delta_{\varkappa-1}+\delta_\varkappa,\\ \sigma\delta_\varkappa=\lambda\delta_\varkappa.\end{gathered}$$

Но тогда $(\delta_{\varkappa-1},\ \delta_\varkappa)=(\sigma\delta_{\varkappa-1},\ \sigma\delta_\varkappa)=$

$$=(\lambda\delta_{\varkappa-1}+\delta_\varkappa,\ \lambda\delta_\varkappa)=|\lambda|^2(\delta_{\varkappa-1},\ \delta_\varkappa)+\bar{\lambda}(\delta_\varkappa,\ \delta_\varkappa).$$

Так как, по лемме 6,7, $|\lambda|=1$, то $(\delta_\varkappa,\ \delta_\varkappa)=0$, что невозможно $(\delta_\varkappa\neq 0!)$.

Лемма 6,9. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам ортогонального преобразования комплексного пространства, ортогональны.

Пусть $\sigma\xi_1 = \lambda_1\xi_1$, $\sigma\xi_2 = \lambda_2\xi_2$ ($|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$), тогда $(\xi_1, \xi_2) = (\sigma\xi_1, \sigma\xi_2) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2) = \lambda_1\overline{\lambda}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\xi_1, \xi_2)$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Теорема 6,5. В комплексном эвклидовом пространстве можно выбором ортонормированного базиса матрицу ортогонального преобразования привести к виду

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа преобразования $\sigma$. Это теорема доказывается совершенно так же, как теорема 6,2, но вместо лемм 6,4; 6,5; 6,6 следует использовать леммы 6,7; 6,8; 6,9 (провести это доказательство).

В случае ортогонального преобразования $\tilde{\sigma}$, являющегося продолжением ортогонального преобразования $\sigma$ действительного пространства, лемму 6,9 можно дополнить.

Лемма 6,10. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ являются собственными векторами ортогонального преобразования $\tilde{\sigma}$ пространства $\tilde{H}$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ — соответствующие собственные числа. Если $\lambda_1 \neq \overline{\lambda}_2$, то $(\xi_1, \overline{\xi}_2) = 0$.

Действительно, из $\tilde{\sigma}\xi_2 = \lambda_2\xi_2$ следует $\tilde{\sigma}\overline{\xi}_2 = \overline{\lambda}_2\overline{\xi}_2$. Если $\lambda_1 \neq \overline{\lambda}_2$, то, по лемме 6,9, $(\xi_1, \overline{\xi}_2) = 0$.

Теорема 6,6. Пусть $\sigma$ — ортогональное преобразование действительного эвклидова пространства. Тогда можно выбрать такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования $\sigma$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}; \qquad (6,19)$$

здесь места вне ящиков, расположенных по главной диагонали, заполнены нулями. При этом $1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1$, $\cos\varphi + i\sin\varphi, \ldots$ суть собственные числа преобразования $\sigma$.

На основании теоремы 5,9 и леммы 6,8 можно легко доказать, что (6,19) является канонической формой матрицы линейного преобразования $\sigma$. Однако мы повторим частично рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 5,9, чтобы одновременно показать, что форма (6,19) достигается относительно ортонормированного базиса.

Перейдем к преобразованию $\tilde{\sigma}$ в пространстве $\tilde{H}$. По теореме 6.5, можно выбрать ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ в $\tilde{H}$ так, чтобы матрица $\tilde{\sigma}$ приняла вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Разобьем собственные числа на классы чисел, равных между собой. Заметим, что так как $|\lambda_j| = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то действительные собственные числа $\tilde{\sigma}$ равны $+1$ или $-1$; так как $\tilde{\sigma}$ — продолжение преобразования $\sigma$ в действительном пространстве, то недействительные собственные числа попарно сопряжены.

Пусть, например, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1$; $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_l = -1$; $\lambda_{l+1} = \ldots = \lambda_{l+r} = \lambda' + i\lambda''$, $\lambda_{l+r+1} = \ldots = \lambda_{l+2r} = \lambda' - i\lambda''$ $(\lambda'' \neq 0)$ — типические такие классы, кое-какие из которых могут и отсутствовать.

Как это следует из доказательства теоремы 5,9, собственные векторы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_l$, соответствующие действительным собственным числам, можно выбрать действительными; ортонормированные комплексные векторы $\varepsilon_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+r}$ и $\varepsilon_{l+r+1}, \ldots, \varepsilon_{l+2r}$, соответствующие комплексно-сопряженным собственным числам, можно выбрать попарно комплексно-сопряженными: $\bar{\varepsilon}_{l+1} = \varepsilon_{l+r+1}, \ldots, \bar{\varepsilon}_{l+r} = \varepsilon_{l+2r}$.

Действительно, если $\varepsilon_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+r}$ уже выбраны, то из $\tilde{\sigma}\varepsilon_k = \lambda_k \varepsilon_k$ будет следовать $\tilde{\sigma}\bar{\varepsilon}_k = \bar{\lambda}_k \bar{\varepsilon}_k$.

Таким образом, для собственного числа $\lambda' - i\lambda''$ можно ввести в базис $\tilde{H}$ векторы $\bar{\varepsilon}_{l+1}, \ldots, \bar{\varepsilon}_{l+r}$; из $(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = \overline{(\bar{\varepsilon}_k, \bar{\varepsilon}_l)}$ будет следовать ортонормированность $\bar{\varepsilon}_{l+1}, \ldots, \bar{\varepsilon}_{l+r}$ (если $\varepsilon_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+r}$ ортонормированы).

Все это мы и будем предполагать в дальнейшем. Полагая $\lambda' = \cos\varphi$, $\lambda'' = \sin\varphi$ $(|\lambda' + i\lambda''| = 1!)$, $\varepsilon_{l+1} = \varepsilon'_{l+1} + i\varepsilon''_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+r} = \varepsilon'_{l+r} + i\varepsilon''_{l+r}$ $(\varepsilon_{l+r+1} = \varepsilon'_{l+1} - i\varepsilon''_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+2r} = \varepsilon'_{l+r} - i\varepsilon''_{l+r})$, мы можем выбрать за базис пространства $H$ векторы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_l, \varepsilon'_{l+1}, \varepsilon''_{l+1}, \ldots, \varepsilon'_{l+r}, \varepsilon''_{l+r}, \ldots$ В этом базисе матрица преобразования $\sigma$ имеет вид (6,19) (см. формулы (5,22).

Далее, из ортонормированности $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ $(b\,\tilde{H})$ следует ортонормированность $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_l$.

Далее, например, $0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_{l+1}) = (\varepsilon_1, \varepsilon'_{l+1} + i\varepsilon''_{l+1}) = (\varepsilon_1, \varepsilon'_{l+1}) - i(\varepsilon_1, \varepsilon''_{l+1})$ и, следовательно,

$$(\varepsilon_1, \varepsilon'_{l+1}) = 0 \quad (\varepsilon_1, \varepsilon''_{l+1}) = 0.$$

Остается рассмотреть нормы векторов типа $\varepsilon', \varepsilon''$ и их попарную ортогональность.

Пусть $\varepsilon_p = \varepsilon'_p + i\varepsilon''_p$, $\varepsilon_q = \varepsilon'_q + \varepsilon''_q$ два разных, соответствующих одинаковым или разным недействительным собственным числам $\lambda_p$, $\lambda_q$, собственных вектора.

Так как базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ортонормирован, то $(\varepsilon_p, \varepsilon_p) = 0$ Далее, по подбору базиса $\overline{\varepsilon}_q$ есть также один из базисных векторов, поэтому $(\varepsilon_p, \overline{\varepsilon}_q) = 1$, если $\overline{\varepsilon}_q = \varepsilon_p$, $(\varepsilon_p, \overline{\varepsilon}_q) = 0$, если $\overline{\varepsilon}_q \neq \varepsilon_p$. В первом случае из $(\varepsilon_p, \overline{\varepsilon}_p) = 0$, $(\varepsilon_p, \varepsilon_p) = 1$ заключаем, что $(\varepsilon'_p, \varepsilon'_p) - (\varepsilon''_p, \varepsilon''_p) - 2i(\varepsilon'_p, \varepsilon''_p) = 0$, $(\varepsilon'_p, \varepsilon'_p) + (\varepsilon'_p, \varepsilon''_p) = 1$.

Отсюда следует, что $(\varepsilon'_p, \varepsilon'_p) = (\varepsilon''_p, \varepsilon''_p) = \frac{1}{2}$ и $(\varepsilon'_p, \varepsilon''_p) = 0$.

Таким образом,

$$|\varepsilon'_p| = |\varepsilon''_p| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6,20}$$

Во втором случае из $(\varepsilon_p, \varepsilon_q) = 0$, $(\varepsilon_p, \overline{\varepsilon}_q) = 0$ получаем

$$(\varepsilon'_q, \varepsilon'_q) + (\varepsilon''_p, \varepsilon''_q) + i\left[(\varepsilon''_p, \varepsilon'_q) - (\varepsilon'_p, \varepsilon''_q)\right] = 0,$$

$$(\varepsilon'_p, \varepsilon'_q) - (\varepsilon''_p, \varepsilon''_q) + i\left[(\varepsilon''_p, \varepsilon'_q) + (\varepsilon'_p, \varepsilon''_q)\right] = 0.$$

Отсюда следует, что $(\varepsilon'_p, \varepsilon'_q) = (\varepsilon''_p, \varepsilon''_q) = (\varepsilon''_p, \varepsilon'_q) = (\varepsilon'_p, \varepsilon''_q) = 0$.

Таким образом, векторы базиса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon'_{l+1}, \varepsilon''_{l+1}, \ldots$ пространства $H$ попарно ортогональны. Помножая векторы вида $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ на $\sqrt{2}$, на основании (6,20) получаем ортонормированный базис. Теорема доказана.

Пример. Матрица ортогонального преобразования в трехмерном действительном эвклидовом пространстве* имеет в ортонормированном базисе одну из следующих канонических форм:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эти шесть форм сводятся к двум следующим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

остальные формы получаются при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Это показывает, что всякое ортогональное преобразование представляет собою вращение около оси, проходящей через 0, на угол $\varphi$ (первый случай), или вращение около оси на угол $\varphi$ с последующим отражением в плоскости, проходящей через 0 и перпендикулярной к оси вращения (второй случай).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

**А. С. КОВАНЬКО,** профессор. **ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.** Монография (на русском языке), 1952 г. Цена в переплете 6 руб. 60 коп.

В работе на основании многолетнего падагогического опыта автора детально излагается теория Лебега, широко используемая в интегрировании и прикладных математических и физических работах.

Монография является популярным руководством по теории функций для преподавателей математики и физики в школах и техникумах, для студентов вузов и научных работников, для инженеров и техников.

---

**УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, ТОМ XXII, СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ** (на русском языке), 1953. Цена 6 руб.

Содержание: Я. Б. Лопатинский. Об одной граничной задаче для гармонических функций. А. С. Кованько. К вопросу о разложимости почти-периодических функций в конечную сумму почти-периодических функций. С. Д. Берман. О приведении системы дифференциальных уравнений к пассивной форме. В. Э. Лянце — Об одном новом способе приложения интеграла Фурье к решению задачи с начальными условиями для систем уравнений в частных производных. Б. Н. Гартштейн. О предельном распределении крайнего ранга. В. Ф. Рогаченко. О возможности решения задач на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского при помощи циркуля и гиперциркуля. Н. П. Флейшман. Изгиб круглой кольцевой плиты, край которой подкреплен тонким упругим кольцом. В. С. Милиянчук. К вопросу об обобщенной линейной электродинамике. А. Е. Глауберман. К релятивистской квантовой теории. С. А. Каплан. О конденсации межзвездного газа на частицах космической пыли. И. И. Тальянский. Об ориентации молекул воды в поверхностном слое.

Сборник рассчитан на научных работников и студентов физико-математических вузов и на преподавателей физики и математики в средних школах и техникумах.

---

**ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.** Выпуск первый (на русском языке). Цена 4 руб. 40 коп.

В сборнике помещены следующие работы: И. Ф. Тесленко. Академик Дмитрий Александрович Граве. И. Г. Соколов. Памяти Льва Генриховича Шнирельмана. Б. В. Гнеденко. О полных ортогональных системах тригонометрических функций. Л. И. Волковыский. Стереографическая проекция. И. Ф. Тесленко. Об инверсии, Д. Ф. Решетюк. К истории вопроса и включении элементов высшей математики в курс средней школы. Задачи по элементарной и высшей математике. Критика и библиография.

Сборник рассчитан на широкие круги преподавателей математики средней школы и техникумов.

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

Техредактор В. Ф. Любченко

БГ 13133. Подписано к печати 15. V. 1954 г. Формат бумаги $60 \times 92^1/_{16}$ — 6 п. л. (43776 зн. в п. л.) Учетно-издат. л. 6,2. Зак. 1012.
Тираж 500. Цена 3 руб.

Типография научно-технической книги Главиздата Министерства культуры УССР
Львов, Чайковского, 27.

## СПИСОК ОПЕЧАТОК

| Страница | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 12 | 22 св. | $f_1(x) = \frac{1}{x}$, | $f_1(x) = x$, |
| 31 | 19 св. | $Tp^1_{ij}(p)$. | $T'_{ij}(p)$. |
| 34 | 7 сн. | матрицы $Au_\varsigma$, определяются | матрицы $A$ и определяются |
| 63 | 5 св | (см. стр. 70) | (см. стр. 59) |
| 67 | 3 св. | $(\tilde{\gamma}i)$ | $(\tilde{\gamma}_j)$ |
| 69 | 2 сн. | $f(\eta, \xi) = f(\eta, \xi)$ | $f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi)$ |
| 75 | 8 сн. | $(\beta, \varepsilon_i) + ai = 0$ | $(\beta, \varepsilon_i) + a_i = 0$ |
| 80 | 14 св. | $f(\xi, \eta) = (\sigma\eta, \xi) = (\eta, \sigma\xi) = (\sigma\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$. | $f(\eta, \xi) = (\sigma\eta, \xi) = (\eta, \sigma\xi) = (\sigma\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$. |
| 83 | 12 св. | $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$; | $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r$; |
| 92 | 4 св. | $(\varepsilon_p, \varepsilon_v) = 0$ | $(\varepsilon_p, \varepsilon_q) = 0$ |

ПРОФ. Я.Б. ЛОПАТИНСКИЙ

# ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1954