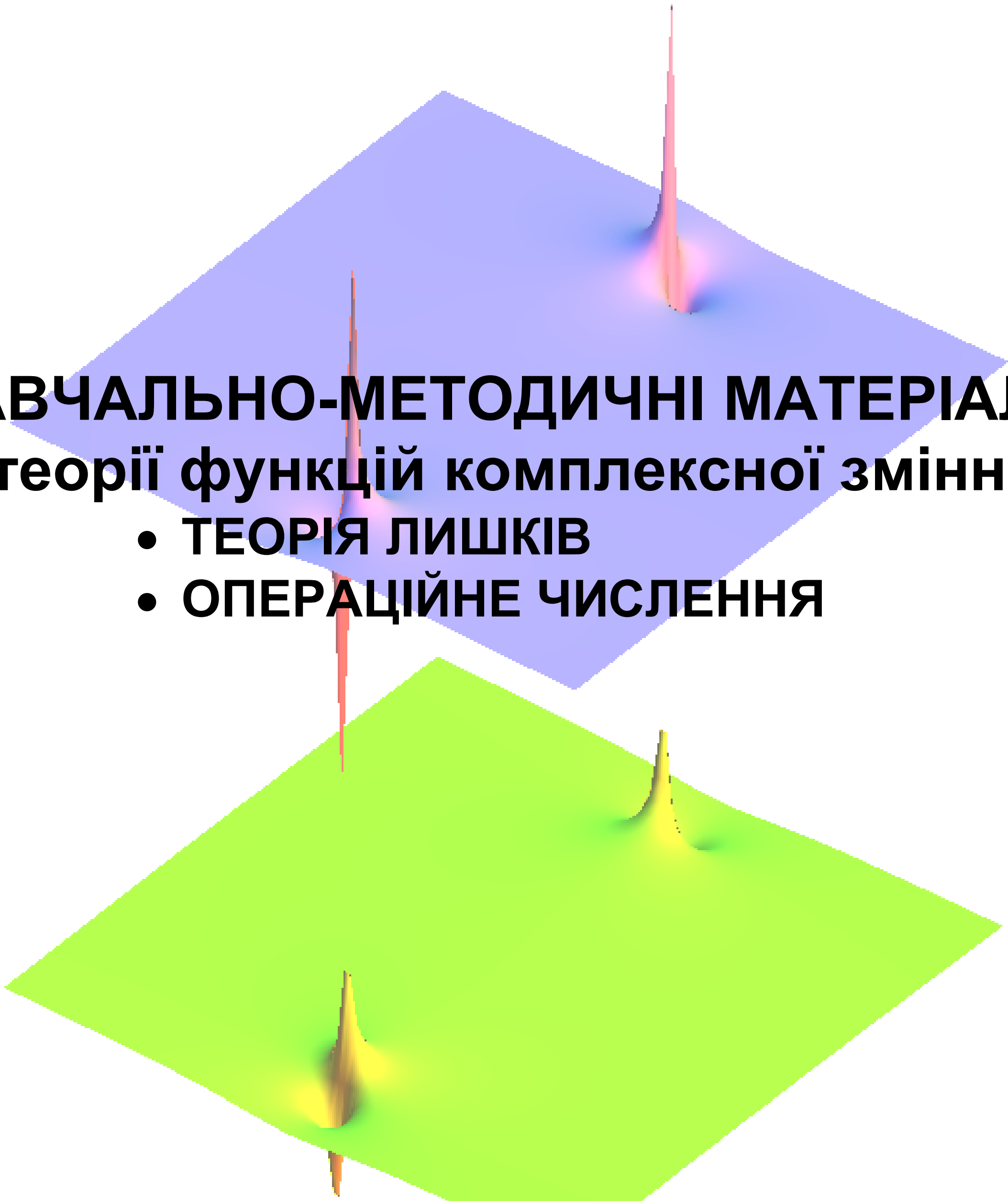
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з теорії функцій комплексної змінної

- **ТЕОРІЯ ЛИШКІВ**
- **ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**



Черкаси 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з теорії функцій комплексної змінної

- ТЕОРІЯ ЛИШКІВ
- ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Затверджено
на засіданні кафедри вищої математики,
протокол № 3 від 29.10.2009 р.,
кафедри прикладної математики,
протокол № 2 від 5.10.2009 р.
та Методичною радою ЧДТУ
Протокол № __ від __.__.2009 р.

Черкаси ЧДТУ 2009

УДК 517.2
ББК 22.1
Н

Укладачі: Щерба Анатолій Іванович, к.ф.-м.н., доцент,
Дідковський Руслан Михайлович, к.т.н., доцент,
Олексієнко Наталія Володимирівна, к.т.н., доцент,
Щерба Валентина Олександрівна

Рецензент: Ламзіна Тетяна Борисівна, к.ф.-м.н.

Н Навчально-методичні матеріали з теорії функції комплексної змінної: Теорія лишків. Операційне числення / Укл.: Щерба А.І., Дідковський Р.М., Олексієнко Н.В., Щерба В.О. – Черкаси: ЧДТУ, 2009. – 60 с.
ISBN 966-7533-
ISBN 966-7533-

Навчально-методичні матеріали охоплюють матеріал програми четвертого семестру дисципліни «Вища математика». Подано короткі теоретичні відомості, зразки розв'язування типових задач, контрольні запитання та завдання для закріплення знань із вивченого матеріалу, завдання для роботи в аудиторії, завдання для виконання розрахунково-графічних робіт.
Для студентів технічних спеціальностей всіх форм навчання.

УДК 517.2
ББК 22.1

Навчальне видання

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з теорії функції комплексної змінної

В авторській редакції

Надруковано з авторського оригіналу
Макет _________

Підписано до друку __.__.2008. Формат 60х84 1/16. Папір офісн. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативний. Ум. др. арк. _,__. Обл.-вид.арк. _,__. Тираж ___ прим. Зам. №______.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.

ISBN 966-7533-
ISBN 966-7533-

ПЕРЕДМОВА

Дані матеріали призначені для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти, які вивчають курс вищої математики.

Матеріали містять 5 параграфів, у кожному з яких подано:

- перелік літературних джерел;
- короткі теоретичні відомості;
- питання для самоконтролю;
- зразки розв’язування типових завдань;
- задачі для самостійного розв’язування;
- набори розрахункових завдань для індивідуальної роботи студентів.

Матеріали можуть бути використані при проведенні практичних занять та для організації самостійної роботи студентів.

Матеріали рекомендовано для студентів денної форми навчання, а також може для студентів заочної форми навчання з метою самостійного опрацювання матеріалу.

§1. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

Основні теоретичні відомості

[1] – с.409-412; **[2]** – с.76-79.

Точка z_0 комплексної площини називається особливою точкою функції $f(z)$, якщо $f(z)$ аналітична в деякому околі точки a за виключенням тільки самої цієї точки.

У силу теореми Лорана для $f(z)$ має місце розклад

$$f(z)=\ldots+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-z_0)^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k,\quad 0<|z-z_0|<R,$$

де R – це відстань від точки a до найближчої особливої точки. У розкладі Лорана сума $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k=F(z)$ задає аналітичну функцію в околі $|z-z_0|<R$ і називається правильною частиною розкладу функції $f(z)$.

Таким чином, тип особливої точки a функції $f(z)$ визначається головною частиною розкладу $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-z_0)^k$.

Якщо всі коефіцієнти головної частини дорівнюють нулю, то точка $z=z_0$ називається усувною особливою точкою.

Якщо в головній частині розкладу тільки скінченне число відмінних від нуля доданків, то особлива точка називається полюсом. При цьому, якщо $(-n)$ – найменший степінь різниці $(z-z_0)$ в розкладі

$$f(z)=C_{-n}(z-z_0)^{-n}+\ldots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k,$$

то число n називають порядком (або кратністю) полюса.

Якщо в головній частині розкладу функції $f(z)$ міститься нескінченне число відмінних від нуля доданків, то точка $z=z_0$ називається істотно особливою точкою.

Класифікаційна теорема. Поводження аналітичної функції $f(z)$ в околі ізольованої точки z_0 описується одним із таких трьох випадків:

1) $z=z_0$ – усувна особлива точка $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$;

2) $z=z_0$ – полюс $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

3) $z = z_0$ – істотно особлива точка $\Leftrightarrow$ не існує скінченної чи нескінченної границі функції при $z \to z_0$. Крім того, якщо z_0 істотно особлива точка, то $\forall A \in C,\ \exists \{z_k(A)\}:\ \lim\limits_{z_k \to z_0} f(z_k) = A.$

При розв'язуванні задач часто виникає потреба в уточненні поведінки функції в околі полюса, шляхом визначення порядку даного полюса.

Теорема. Для того, щоб точка $z = z_0$ була полюсом порядку n для функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб вона була нулем кратності n для функції $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Нагадаємо, що точка $z = z_0$ називається коренем або нулем функції $\varphi(z)$ кратності n, якщо $\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = ... = \varphi^{(n-1)}(z_0) = 0,\ \varphi^{(n)}(z_0) \neq 0.$

Зауваження. Нехай функція $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ є відношенням двох аналітичних функцій в околі точки $z = z_0$, яке при $z \to z_0$ задає невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Якщо функцію $f(z)$ зобразити у вигляді $f(z) = \dfrac{(z - z_0)^n \varphi_1(z)}{(z - z_0)^m \psi_1(z)}$, де $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ також аналітичні функції такі, що $\varphi_1(z_0) \neq 0$ і $\psi_1(z_0) \neq 0$, то:

1) при $n \geq m$ в точці $z = z_0$ усувна особливість;

2) при $m > n$ в точці $z = z_0$ полюс кратності $k = m - n$.

Зразки розв’язування задач

Задача 1.1. Для даної функції $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z - i)^2 (z^2 + 4)}$ знайдіть особливі точки та з’ясуйте їх тип.

Розв'язання. Позначимо $\varphi(z) = z^2 + 1$, $\psi(z) = (z - i)^2 (z^2 + 4)$. Функція $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ як відношення двох аналітичних функцій є функція аналітична, коли знаменник не перетворюється в нуль.

Для функції $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z - i)^2 (z^2 + 4)}$ особливими будуть точки, в яких знаменник дорівнює нулю $(z - i)^2 (z - 2i)(z + 2i) = 0 : z_1 = i,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$.

Визначимо тип цих точок.

Дослідимо точку $z_1 = i$. Подамо функцію $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)} = \frac{(z-i)(z+i)}{(z-i)^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{(z-i)\varphi_1(z)}{(z-i)^2\psi_1(z)},$$

де $\varphi_1(z) = z + i$, $\psi_1(z) = (z+2i)(z-2i)$, причому

$$\varphi_1(i) = i + i = 2i \neq 0 \text{ і } \psi_1(i) = (i+2i)(i-2i) = 3 \neq 0.$$

Таким чином, точка $z_1 = i$ – полюс кратності $2-1=1$ або простий полюс даної функції.

Аналогічно досліджуємо точки $z = 2i, z = -2i$.

Для $z_2 = 2i$ маємо

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)} = \frac{z^2+1}{(z-2i)(z-i)^2(z+2i)} = \frac{\varphi_2(z)}{(z-2i)\psi_2(z)},$$

де $\varphi_2(z) = z^2+1$, $\psi_2(z) = (z-i)^2(z+2i)$,

$$\varphi_2(2i) = -4+1 = -3 \neq 0 \text{ і } \psi_2(2i) = (2i-i)^2(2i+2i) = -4i \neq 0.$$

Для $z_3 = -2i$ маємо

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)} = \frac{z^2+1}{(z+2i)(z-i)^2(z-2i)} = \frac{\varphi_3(z)}{(z+2i)\psi_3(z)},$$

де $\varphi_3(z) = z^2+1$, $\psi_3(z) = (z-i)^2(z-2i)$,

$$\varphi_3(-2i) = -4+1 = -3 \neq 0 \text{ і } \psi_3(-2i) = (-2i-i)^2(-2i-2i) = 36i \neq 0.$$

Отже точки $z_2 = 2i, z_3 = -2i$ також прості полюси функції $f(z)$.

Задача 1.2. З’ясуйте тип особливої точки $z_0 = 0$ для функції

$$f(z) = \frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}.$$

Розв'язання. (1-й спосіб). Позначимо $\varphi(z) = \cos 3z - 1$, $\psi(z) = \sin z - z - \frac{z^3}{6}$. Функція $f(z)$ є відношення двох аналітичних функцій: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ і тому є аналітичною функцією там, де знаменник не перетворюється в нуль. Обчислимо

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}.$$

При підстановці граничного значення $z=0$ отримаємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття вкажемо порядок нуля в чисельнику і знаменнику. Для цього розкладемо в ряд Тейлора функції $\cos z$ та $\sin z$ в околі точки $z_0=0$:

$$\cos 3z = 1-\frac{3^2 z^2}{2!}+\frac{3^4 z^4}{4!}-\frac{3^6 z^6}{6!}+\ldots,\quad \sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\ldots .$$

Тоді $f(z)=\dfrac{\left(1-\dfrac{3^2 z^2}{2!}+\dfrac{3^4 z^4}{4!}-\ldots\right)-1}{\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots\right)-z+\dfrac{z^3}{6}}=\dfrac{-\dfrac{3^2 z^2}{2!}+\dfrac{3^4 z^4}{4!}-\ldots}{\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots}=$

$=\dfrac{z^2\left(-\dfrac{3^2}{2!}+\dfrac{3^4}{4!}z^2-\ldots\right)}{z^5\left(\dfrac{1}{5!}-\dfrac{z^2}{7!}+\ldots\right)}=\dfrac{z^2}{z^5}\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}=\dfrac{1}{z^3}\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$, де $\varphi_1(z)=-\dfrac{3^2}{2!}+\dfrac{3^4}{4!}z^2-\ldots$ та

$\varphi_1(z_0)=\varphi_1(0)=-\dfrac{3^2}{2!}\neq 0$, $\psi_1(z)=\dfrac{1}{5!}-\dfrac{z^2}{7!}+\ldots$ та $\psi_1(z_0)=\psi_1(0)=\dfrac{1}{5!}\neq 0$.

При $z\neq 0$: $f(z)=\dfrac{1}{z^3}\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}=\dfrac{1}{z^3}f_1(z)$, де $f_1(z)$ – аналітична функція як відношення $\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$ двох аналітичних функцій із знаменником, який не перетворюється в нуль в точці $z=z_0$. Тому точка $z=0$ для функції $f(z)=\dfrac{\cos 3z-1}{\sin z - z+\dfrac{z^3}{6}}$ є полюсом 3-го порядку.

(2-й спосіб). Розглянемо функцію $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)=\cos 3z-1$, $\psi(z)=\sin z - z-\dfrac{z^3}{6}$. Визначимо порядок нуля в точці $z_0=0$ для чисельника $\varphi(z)=\cos 3z-1$:

$\varphi(0)=\left(\cos 3z-1\right)\Big|_{z=0}=0$,

$\varphi'(0)=\left(-3\sin 3z-1\right)\Big|_{z=0}=0$,

$\varphi''(0)=\left(-9\cos 3z-1\right)\Big|_{z=0}=-9$, тобто точка $z_0=0$ – нуль другого порядку для чисельника $\varphi(z)$ даної функції $f(z)$.

Аналогічно визначаємо порядок точки $z_0 = 0$ для знаменника $\psi(z)$ функції $f(z)$:

$$\psi(0) = \left(\sin z - z - \frac{z^3}{6}\right)\Bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\psi'(0) = \left(\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\psi''(0) = (-\sin z + z)\big|_{z=0} = 0,$$

$$\psi'''(0) = (-\cos z + 1)\big|_{z=0} = 0,$$

$$\psi^{IV}(0) = (-\sin z)\big|_{z=0} = 0,$$

$$\psi^{V}(0) = (-\cos z)\big|_{z=0} = -1 \neq 0.$$

Точка $z_0 = 0$ є нулем п'ятого порядку для знаменника $\psi(z)$ функції $f(z)$. Отже, точка $z = 0$ є нулем порядку 3 для функції $\dfrac{1}{f(z)}$, тобто полюсом 3-го порядку для початкової функції $f(z) = \dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$.

Задача 1.3. З'ясуйте тип особливої точки $z_0 = 0$ для функції

$$f(z) = z\cos\frac{2}{z^3}.$$

Розв'язання. Розкладемо функцію $f(z) = z\cos\dfrac{2}{z^3}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$. Скористаємось розкладом в Ряд Тейлора функції $\cos z$:

$$\cos\frac{2}{z^3} = 1 - \frac{2^2}{z^6 2!} + \frac{2^4}{z^{12} 4!} - \frac{2^6}{z^{18} 6!} + \ldots\ .$$

Тоді $f(z) = z\left(1 - \dfrac{2^2}{z^6 2!} + \dfrac{2^4}{z^{12} 4!} - \dfrac{2^6}{z^{18} 6!} + \ldots\right) == z - \dfrac{2^2}{z^5 2!} + \dfrac{2^4}{z^{11} 4!} - \dfrac{2^6}{z^{17} 6!} + \ldots$.

Цей розклад містить нескінченну множину членів із від'ємними степенями z. Отже, точка $z_0 = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$.

Задача 1.4. Для функції $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(1 - \cos z)}$ знайдіть ізольовані особливі точки і з'ясуйте їх тип.

Розв'язання. Функція $f(z)$ є відношення двох аналітичних функцій $\varphi(z) = \sin 3z$ та $\psi(z) = z(1 - \cos z)$ і тому буде аналітичною всюди, де знаменник не перетворюється в нуль. Знайдемо особливі точки:

$z(1-\cos z)=0 \Rightarrow z_k = 2\pi k ? k = 0,\pm1,\pm2,...,$ тобто точки $z_k = 2\pi k$ – ізольовані особливі точки функції $f(z)$.

Визначимо тип особливих точок z_k функції $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Знаходимо порядок нуля для чисельника $\varphi(z)=\sin 3z$ цієї функції:

1) При $k=0$

$$z_0 = 0 \Rightarrow \varphi(0)=\left(\sin 3z\right)\Big|_{z=0} = 0$$

$$\varphi'(0)=\left(3\cos 3z\right)\Big|_{z=0} = 3 \neq 0.$$

2) При $k \neq 0$

$$z_k = 2\pi k \Rightarrow \varphi(2\pi k)=\left(\sin 3z\right)\Big|_{z=2\pi k} = 0$$

$$\varphi'(2\pi k)=\left(3\cos 3z\right)\Big|_{z=2\pi k} = 3 \neq 0.$$

Тобто точки $z_k = 2\pi k$ є нулі першого порядку для чисельника $\varphi(z)$ функції $f(z)$.

Знайдемо порядок нуля для знаменника $\psi(z)=z(1-\cos z)$ функції $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

1) При $k=0$

$$z_0 = 0 \Rightarrow \psi(0)=z(1-\cos z)_{z=0} = 0$$

$$\psi'(0)=\left((1-\cos z)+z\sin z\right)\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\psi''(0)=\left(2\sin z + z\cos z\right)\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\psi'''(0)=\left(3\cos z - z\sin z\right)\Big|_{z=0} = 3 \neq 0.$$

Таким чином, точка $z_0 = 0$ для функції $f(z)$ полюс порядку $3-1=2$.

2) При $k \neq 0$

$$z_k = 2\pi k \Rightarrow \psi(2\pi k)=\left(z - z\cos z\right)\Big|_{z=2\pi k} = 0,$$

$$\psi'(2\pi k)=\left(1-\cos z + z\sin z\right)\Big|_{z=2\pi k} = 0,$$

$$\psi''(2\pi k)=\left(2\sin z + z\cos z\right)\Big|_{z=2\pi k} = 2\pi k \neq 0,$$

тобто точки $z_k = 2\pi k,\ k = \pm1,\pm2,\pm3,...$ нулі 2-го порядку для знаменника функції $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

Отже, точки $z_k = 2\pi k,\ k \neq 0$ будуть нулями порядку $2-1=1$ для функції $\dfrac{1}{f(z)}$, а значить полюсом першого порядку для функції $f(z)$.

Задача 1.5. Для функції $f(z)=ctg\frac{1}{z}$ знайдіть ізольовані особливі точки та з’ясуйте їх тип.

Розв'язання. $f(z)=ctg\frac{1}{z}=\frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}$. Для даної функції особливі точки знаходимо із умови: $\sin\frac{1}{z}=0\Rightarrow\frac{1}{z}=\pi k\Rightarrow z_k=\frac{1}{\pi k}, k=\pm1,\pm2,\pm3,...$ i $z_0=0$.

Обчислимо $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\pi k}=0=z_0$. Звідси слідує, що точка $z_0=0$ не є ізольованою особливою точкою.

Визначимо тип особливих точок $z_k=\frac{1}{\pi k}, k=\pm1,\pm2,\pm3,...$:

$$f(z)=\frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\Rightarrow\psi(z)=\sin\frac{1}{z},\ \psi(z_k)=\psi\left(\frac{1}{\pi k}\right)=\sin\frac{1}{\frac{1}{\pi k}}=\sin(\pi k)=0;$$

$$\psi'(z)=-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z},\quad \psi'(z_k)=\psi'\left(\frac{1}{\pi k}\right)=-\frac{1}{\pi^2k^2}\cos(\pi k)\neq 0.$$

Отже, точки $z_k=\frac{1}{\pi k}, k=\pm1,\pm2,\pm3,...$ є простими полюсами.

Контрольні запитання та завдання

1. Яка точка на площині називається простим полюсом функції $f(z)$?
2. Задано функції $\frac{z^2+1}{z^2(z-1)}, \frac{\sin z}{z}, ctgz, \frac{e^z-1}{(z-1)^3}$. Визначити порядок нулів та полюсів даних функцій.
3. Точка $z=a$ нуль порядку n для функції $f(z)$ і нуль порядку m для функції $\psi(z)$. Визначити тип точки $z=a$ для функцій:

   1) $f(z)+\psi(z)$; 2) $f(z)\cdot\psi(z)$; 3) $\frac{f(z)}{\psi(z)}$.
4. Розклад функції $f(z)$в ряд Лорана має вигляд:

   $$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+...(c_n\neq0\ i\ n\geq1).$$

   Який тип точки $z=a$?

Завдання для роботи в аудиторії

Знайдіть особливі точки та з’ясуйте їх тип для таких функцій:

1. $\dfrac{1}{z-\sin z}$. 2. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$. 3. $e^{\frac{1}{z+2}}$. 4. $\cos\dfrac{1}{z}$.

5. $\dfrac{z}{z^5-2z^4+z^3}$. 6. $\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$. 7. $e^{\frac{1}{z^2}}$. 8. $z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

9. $z\cdot sh\dfrac{1}{z}$. 10. $\dfrac{z\cdot\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$. 11. $z\cdot ctgz$. 12. $e^{-\frac{1}{z}}$.

13. $\sin\dfrac{\pi}{z+1}$. 14. $ch\dfrac{1}{z}$. 15. $\dfrac{z^2}{\cos z-1}$. 16. $\dfrac{1-\sin z}{\cos z}$.

17. $\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$. 18. $\dfrac{\cos\pi z}{\left(4z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}$. 19. $\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2\left(z^2+1\right)}$. 20. $e^{\frac{1}{z}}\cdot\dfrac{\sin\pi z}{z^4-1}$.

З’ясуйте тип заданих особливих точок:

21. $\dfrac{1}{z-\sin z}$, $z_0=0$. 22. $\dfrac{1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$, $z_0=0$. 23. $\dfrac{1}{e^{-z}+z-1}$, $z_0=0$.

24. $\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$, $z_0=0$. 25. $\dfrac{shz}{z-shz}$, $z_0=0$. 26. $\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$.

27. $\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-3z+1}$, $z_0=1$. 28. $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$. 29. $\dfrac{shz}{z}$, $z_0=0$

30. $\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$. 31. $\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=1$, $z_0=-1$.

32. $\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$. 33. $\dfrac{\ln\left(1+z^3\right)}{z^2}$, $z_0=0$. 34. $\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$.

35. $z\cdot sh\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$. 36. $\cos\dfrac{1}{z}+\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$, $z_0=0$. 37. $\dfrac{\sin z^4-z^4}{shz-z-\frac{z^3}{6}}$, $z_0=0$.

38. $\dfrac{\cos\frac{z^4}{2}}{chz-1-\frac{z^2}{2}}$, $z_0=0$. 39. $\dfrac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$, $z_0=0$. 40. $\dfrac{e^{z^5}-1}{e^z-1-z}$, $z_0=0$.

Розрахункові завдання

Задача 1.1. Для даної функції знайдіть особливі точки та з'ясуйте їх тип.

1. $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin\frac{1}{z}}$.

2. $\dfrac{1}{\cos z}$.

3. $\operatorname{tg}^2 z$.

4. $z tg z \cdot e^{\frac{1}{z}}$.

5. $\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

6. $\dfrac{(z+\pi)\sin\frac{\pi z}{2}}{z\sin^2 z}$.

7. $tg\dfrac{1}{z}$.

8. $\dfrac{1}{e^z+1}$.

9. $\operatorname{ctg}\pi z$.

10. $\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.

11. $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

12. $\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$.

13. $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

14. $\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z}$.

15. $\operatorname{th} z$.

16. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.

17. $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z^3)}$.

18. $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z}$.

19. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}$.

20. $z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

21. $\dfrac{\cos\frac{\pi z}{2}}{z^4-1}$.

22. $\dfrac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}$.

23. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.

24. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$.

25. $\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

Задача 1.2. З'ясуйте тип особливої точки $z_0=0$ для даної функції.

1. $\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

2. $z^3\cdot e^{\frac{7}{z^2}}$.

3. $tg^2 z\dfrac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$.

4. $\dfrac{\cos 7z-1}{shz-z-\frac{z^3}{6}}$.

5. $\dfrac{sh6z-6z}{chz-1-\frac{z^2}{2}}$.

6. $\dfrac{ch5z-1}{e^z-1-z}$.

7. $z\sin\frac{6}{z^2}$.

8. $\dfrac{e^z-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

9. $\dfrac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$.

10. $\dfrac{\cos z^2-1}{shz-z-\frac{z^3}{6}}$.

11. $\dfrac{e^{5z}-11}{chz-1-\frac{z^2}{2}}$.

12. $\dfrac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}$.

13. $z^4\cdot\cos\frac{5}{z^2}$.

14. $\dfrac{sh2z-2z}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$.

15. $\dfrac{ch2z-1}{shz-z-\frac{z^3}{6}}$.

16. $\dfrac{e^{z^3}}{chz-1-\frac{z^2}{2}}$.

17. $z\cdot e^{\frac{4}{z^2}}$.

18. $\dfrac{\sin z^3-z^3}{e^z-1-z}$.

19. $\dfrac{\cos z^3-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

20. $\dfrac{e^{7z}-1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$.

21. $\dfrac{\sin 6z-6z}{\sin z-z-\frac{z^3}{6}}$.

22. $z\cdot\sin\frac{3}{z^3}$.

23. $\dfrac{\cos 5z-1}{chz-1-\frac{z^2}{2}}$.

24. $\dfrac{sh4z-4z}{e^z-1-z}$.

25. $\dfrac{ch3z-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

§2. ТЕОРІЯ ЛИШКІВ

Основні теоретичні відомості

[1] – с.412-415; **[2]** – с.79-82.

Нехай точка $z=z_0$ є ізольованою особливою точкою однозначної аналітичної функції $f(z)$. Тоді в околі даної точки функція $f(z)$ може бути єдиним чином розкладена в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

де $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ і, зокрема $C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}f(z)dz$.

Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z=z_0$ називається комплексне число $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$, яке з точністю до множника $2\pi i$ дорівнює значенню інтеграла $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz$, обчисленому в додатному напрямі по будь-якому замкненому контуру γ, розташованому в області аналітичності функції $f(z)$ і охоплюючому єдину особливу точку $z=z_0$.

Для обчислення лишків використовують наступні теореми:

Теорема 1. $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$, *де* C_{-1} *- коефіцієнт ряду Лорана для* $f(z)$.

Наслідок. *Лишок в усувній особливій точці дорівнює нулю.*

Теорема 2. *Якщо* $z=z_0$ *простий полюс* $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, *то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Теорема 3. *Нехай* $z=z_0$ *– полюс порядку* n $(n\geq 1)$ *для функції* $f(z)$. *Тоді лишок в точці* $z=z_0$ *обчислюється за формулою:*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right].$$

Теорема про лишки. *Якщо функція* $f(z)$ *є аналітичною в області* D *і неперервною на межі* S *області* D, *за винятком скінченного числа особливих точок* $z_1,z_2,...,z_N\in D$, *то* $\oint_S f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$.

Схема обчислення інтеграла:

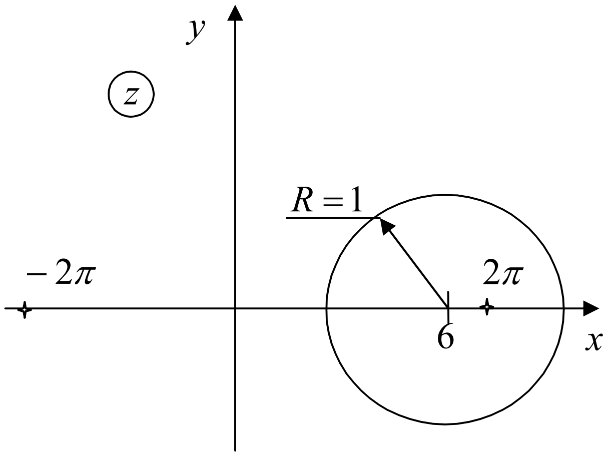
1. Зобразити область D на комплексній площині.
2. Знайти особливі точки функції $f(z)$, нанести їх на комплексну площину і виділити точки, які потрапили в область D: $z_1,z_2,...,z_N$.
3. Дослідити тип кожної особливої точки.
4. Використовуючи теореми 1, 2, 3 знайти лишки в даних точках і записати значення інтеграла за теоремою про лишки.

Зауваження. У випадку, коли точка $z=z_0$ істотно особлива, лишок знаходять із формули $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$, попередньо розклавши підінтегральну функцію в ряд Лорана за степенями $(z-z_0)$.

Зразки розв'язування задач

Задача 2.1. Обчисліть інтеграл $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$.

Розв'язання.



Оскільки

$$f(z)=\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}=\frac{\sin^3 z+2}{(z-2\pi)(z+2\pi)},$$

то у внутрішніх точках круга $|z-6|\le 1$ розташована одна особлива точка підінтегральної функції $z=2\pi$.

Із того, що $\left(\sin^3 z+2\right)\Big|_{z=2\pi}=$ $=\sin^3 2\pi+2=2\neq 0$ слідує, що точка $z=2\pi$ – полюс 1-го порядку.

Оскільки підінтегральна функція аналітична у внутрішніх точках круга $|z-6|\le 1$ за виключенням особливої точки $z=2\pi$, то за теоремою про лишки можна записати $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz=2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=2\pi} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}$.

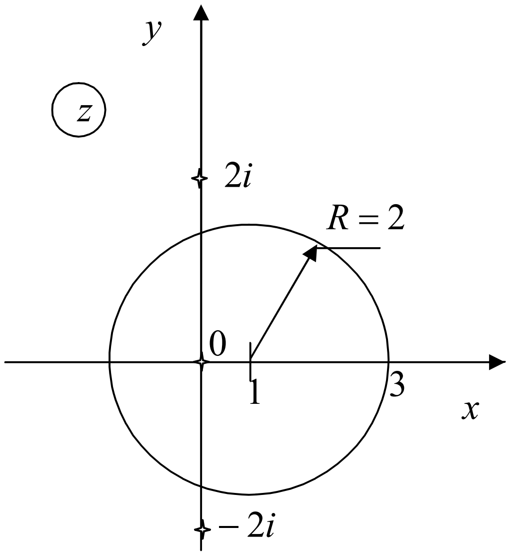
Обчислимо лишок в полюсі 1-го порядку $z=2\pi$:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=2\pi}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}=\left|\begin{array}{l}\varphi(z)=\sin^3 z+2, \varphi(2\pi)=2;\\ \psi(z)=z^2-4\pi^2,\ \psi'(z)=2z, \psi'(2\pi)=4\pi\end{array}\right|=\frac{\varphi(2\pi)}{\psi'(2\pi)}=\frac{2}{4\pi}=\frac{1}{2\pi}.$$

Отже $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz=2\pi i\frac{1}{2\pi}=i$.

Задача 2.2. Обчисліть інтеграл $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}dz$.

Розв'язання. У внутрішніх точках круга $|z-1|\le 2$ підінтегральна функція $f(z)$ аналітична за виключенням особливої точки $z=0$. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді: $f(z)=\dfrac{\frac{z^2+1}{z^2+4}}{\sin\frac{z}{3}}$.Чисельник $\varphi(z)=\frac{z^2+1}{z^2+4}$,



$\varphi(0)=\left.\frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4}\neq 0,$ а знаменник $\psi(z)=\sin\frac{z}{3}$ має нуль 1-го порядку в точці $z=0$: $\psi'(0)=\left.\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}\right|_{z-0}=\frac{1}{3}\neq 0$, тобто точка $z=0$ є полюс 1-го порядку підінтегральної функції $f(z)$.

За теоремою про лишки маємо:

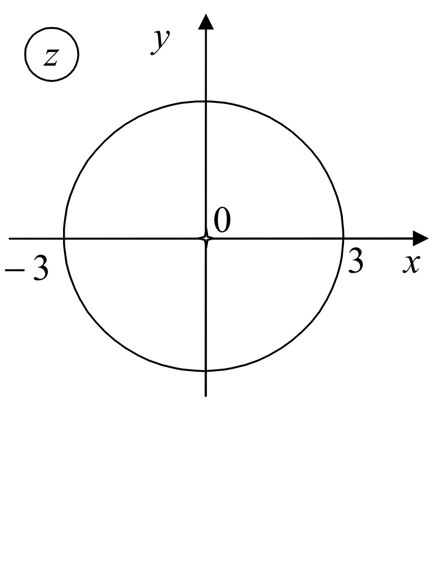
$$\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}.$$

Обчислимо лишок в полюсі 1-го порядку $z=0$:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}=\left.\frac{\frac{z^2+1}{z^2+4}}{\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}}\right|_{z=0}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

$$\text{Тоді}\quad\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}dz=2\pi i\frac{3}{4}=\frac{3\pi i}{2}.$$

Задача 2.3 Обчисліть інтеграл $\oint\limits_{|z|=3}\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz$.



Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)$ аналітична у внутрішніх точках круга $|z|\leq 3$ за виключенням особливої точки $z=0$. Подамо $f(z)$ у вигляді:

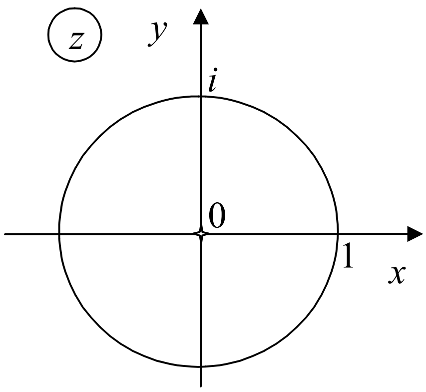
$$f(z)=\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}=-\frac{1}{z^5}+\frac{3/2}{z^3}+\frac{1}{z^2}.$$

Коефіцієнт C_{-1} розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана за степенями z дорівнює нулю $(C_{-1}=0)$. Отже,

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5} = 2\pi i C_{-1} = 0.$$

Задача 2.4. Обчисліть інтеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3}dz$.

Розв'язання. У внутрішніх точках круга $|z|\le 1$ підінтегральна функція $f(z)$ аналітична за виключенням особливої точки $z=0$. Використовуючи розклад в ряд Тейлора функції $\cos z$ одержуємо: $f(z)=\frac{1}{z^3}(\cos iz - 1)=$



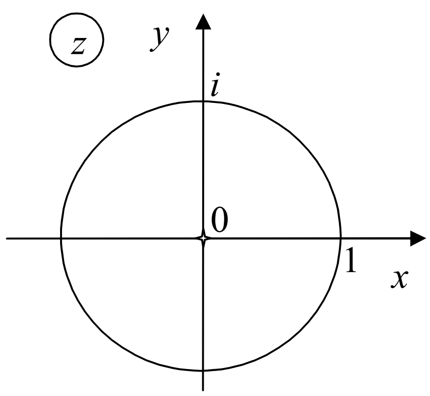
$$=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots-1\right)=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{1}{4!}z+\frac{1}{6!}z^3+\ldots$$

Звідси коефіцієнт $C_{-1}=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos iz - 1}{z^3} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = = \pi i.$$

Задача 2.5. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z}dz$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)$ аналітична у внутрішніх



точках круга $|z|\le 1$ за виключенням особливої точки $z=0$. Визначимо тип особливої точки $z=0$. Для цього розкладемо підінтегральну функцію $f(z)=\frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z}$ в ряд Лорана за степенями z.

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^3+\ldots,\quad 0<|z|<\infty,$$

тоді

$$\frac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}=\frac{z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^3+\ldots-1}{z}=z+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^7}+\ldots\,.$$

Це означає, що точка $z=0$ для $f(z)$ є істотно особливою точкою і при цьому $C_{-1}=0$.

Для істотно особливої точки існує лише один метод обчислення інтеграла: $\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz=2\pi i\operatorname{Res}\limits_{z=0}\frac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}=2\pi iC_{-1}=2\pi i\cdot 0=0$.

Задача 2.6. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4\,\mathrm{sh}\,\frac{4z}{3}}dz$.

Розв'язання. У внутрішніх точках круга $|z|\le 2$ підінтегральна функція аналітична за виключенням особливої точки $z=0$. Використовуючи розклад в ряд Тейлора функцій $\cos w$ і $\mathrm{sh}\,w$, одержуємо

$$\cos 4z-1+8z^2=\left(1-\frac{(4z)^2}{2!}+\frac{(4z)^4}{4!}-\frac{(4z)^6}{6!}+\ldots\right)-1+8z^2=\frac{4^3}{3!}z^4-\frac{4^6}{6!}z^6+\ldots=$$

$$=z^4\cdot\varphi_1(z);$$

$$z^4\,\mathrm{sh}\frac{4z}{3}=z^4\left(\frac{4z}{3}+\left(\frac{4z}{3}\right)^3\frac{1}{3!}+\left(\frac{4z}{3}\right)^5\frac{1}{5!}+\ldots\right)=z^5\left(\frac{4}{3}+\frac{4^3}{3^3\cdot 3!}z^2+\frac{4^5}{3^5\cdot 5!}z^4+\ldots\right)=$$

$$=z^5\cdot\psi_1(z),$$

де $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ – аналітичні функції $\varphi_1(z)\ne 0$ і $\psi_1(z)\ne 0$.

Звідси

$$f(z)=\frac{z^4\cdot\varphi_1(z)}{z^5\cdot\psi_1(z)}=\frac{\varphi_1(z)\big/\psi_1(z)}{z}.$$

Таким чином, точка $z_0=0$ – полюс першого порядку підінтегральної функції $f(z)$.

Отже,

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4\,\mathrm{sh}\,\frac{4z}{3}}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4\,\mathrm{sh}\,\frac{4z}{3}}=2\pi i\left.\frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}\right|_{z=0}=$$

$$=2\pi i\left(\frac{4^3}{3!}\cdot\frac{3}{4}\right)=16\pi i.$$

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте інтегральну теорему Коші.
2. Чому дорівнює інтеграл $\oint\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}$?
3. Знайдіть лишки функцій

   1) $\frac{\sin z}{z}$; 2) $\frac{z^4-3z^2+1}{z^3}$; 3) $e^{\frac{1}{z}}$.
4. Функції $f(z)$ і $g(z)$ – аналітичні в точці z_0, причому $f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=g'(z_0)=0$, $g''(z_0)\neq 0$. Знайдіть лишок функції $\varphi(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ в точці z_0.
5. Сформулюйте основну теорему про лишки для випадку многозв’язної області.

Завдання для роботи в аудиторії

Обчисліть інтеграли:

41. $\oint\limits_{|z|=1} z\cdot \operatorname{tg}\pi z\,dz$.

42. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$.

43. $\oint\limits_{|z-i|=3} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$.

44. $\oint\limits_{|z|=2} z^3\cdot\cos\dfrac{2i}{z}\,dz$.

45. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cdot\cos z}$.

46. $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z+1}{z^2+2z-3}dz$.

47. $\oint\limits_{|z|=1/2} z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}\,dz$.

48. $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{e^z-\sin z}{z^2}dz$.

49. $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \dfrac{\left(z^2+\pi\right)^2}{i\sin z}dz$.

50. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z\cdot\cos z}dz$.

51. $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \dfrac{\cos^2 z}{z\cdot\sin z}dz$.

52. $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \dfrac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin\frac{z}{2}}dz$.

53. $\oint\limits_{|z|=0,2} \dfrac{\operatorname{ch}2z-\cos z}{z^2\sin 8z}dz$.

54. $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{\operatorname{sh}iz-\sin iz}{z^3\operatorname{sh}(z/3)}dz$.

55. $\oint\limits_{|z|=0,3} \dfrac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2\operatorname{sh}3\pi z}dz$.

56. $\oint\limits_{|z|=0,5} \dfrac{e^{2z}-\cos 9z}{z^2\operatorname{sh}\pi iz}dz$.

57. $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$.

58. $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{e^{2z}}{z^3-1}dz$.

59. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)^3}dz$.

60. $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{dz}{z^4+1}$.

61. $\oint\limits_{|z|=1} \sin^2\dfrac{1}{z}\,dz$.

62. $\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz$.

63. $\oint\limits_{|z|=1} z\cdot\operatorname{ctg}\pi z\,dz$.

64. $\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z\cdot\cos\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{4ch\frac{\pi iz}{2}}{z(z-2)^2}\right)dz$.

65. $\oint\limits_{|z-2i|=2} \left(\dfrac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}-\dfrac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\right)dz$.

Розрахункові завдання

Задача 2.1. Обчисліть інтеграли:

1. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{dz}{z(z^2+1)}$.
2. $\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \dfrac{2dz}{z^2(z-1)}$.
3. $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \dfrac{dz}{z(z^2+4)}$.
4. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$.
5. $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \dfrac{e^z}{\sin z}dz$.
6. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$.
7. $\oint\limits_{|z-1|=3} \dfrac{z\cdot e^z}{\sin z}dz$.
8. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{2z(z-1)}{\sin z}dz$.
9. $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \dfrac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}dz$.
10. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \dfrac{iz(z-i)}{\sin \pi z}dz$.
11. $\oint\limits_{|z-3|=1} \dfrac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$.
12. $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \dfrac{e^z+1}{z(z-1)}dz$.
13. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{iz}+2}{\sin 3iz}dz$.
14. $\oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{\cos z^2+1}{z^2-\pi^2}dz$.
15. $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \dfrac{\ln(z+2)}{\sin z}dz$.
16. $\oint\limits_{|z+1|=1/2} \dfrac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz$.
17. $\oint\limits_{|z+3/2|=1} \dfrac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$.
18. $\oint\limits_{|z+1|=2} \dfrac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$.
19. $\oint\limits_{|z|=1/4} \dfrac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)}dz$.
20. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \dfrac{z^2+z+3}{(\pi+z)\sin z}dz$.
21. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^3-1}{(z-\pi)\sin 2z}dz$.
22. $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz$.
23. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz$.
24. $\oint\limits_{|z-3/2|=1} \dfrac{z(z+\pi)}{(z-\pi)\sin 3z}dz$.
25. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\pi/3)}dz$.

Задача 2.2. Обчисліть інтеграли:

1. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z^2-1}{z^3}dz$.
2. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$.
3. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{1/z}+1}{z}dz$.

4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz$. 5. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz$. 6. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz$.

7. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin(1/z)}{z}dz$. 8. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}dz$. 9. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3}dz$.

10. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz$. 11. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3}dz$. 12. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}dz$.

13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}dz$. 14. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6}dz$. 15. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}dz$.

16. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3}dz$. 17. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}dz$. 18. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4}dz$.

19. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4}dz$. 20. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz$. 21. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3}dz$.

22. $\oint\limits_{|z|=2} z^2\cdot\sin\frac{1}{z^2}\,dz$. 23. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz$. 24. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}dz$.

25. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz$.

Задача 2.3. Обчисліть інтеграли:

1. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-\operatorname{sh}^2(\pi^2 z)}dz$. 2. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z-1+\frac{9z^2}{2}}{z^4\operatorname{sh}\frac{9z}{4}}dz$. 3. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh}2z-2\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi^2 z}{3}}dz$.

4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}3z-1-\frac{9z^2}{2}}{z^4\sin\frac{9z}{8}}dz$. 5. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\operatorname{sh}^2 4iz}dz$. 6. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\operatorname{sh}2\pi z}dz$.

7. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z}\,\mathrm{sh}\,4z}{z\sin 4\pi z}dz$.

8. $\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{\mathrm{ch}\,z-\cos 3z}{z^2\sin 5\pi z}dz$.

9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}\,3z-\sin 3z}{z^3\,\mathrm{sh}\,2z}dz$.

10. $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3\,\mathrm{sh}\,16\pi z}dz$.

11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2\,\mathrm{sh}^2\,2z}dz$.

12. $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\mathrm{sh}\,\pi z-\pi z}{z^2\sin\frac{\pi z}{6}}dz$.

13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ch}\,4z-8z^2-1}{z^4\sin\frac{8z}{3}}dz$.

14. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\,\mathrm{sh}\,5z}dz$.

15. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\,\mathrm{sh}\,4z}dz$.

16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{7z}-\mathrm{ch}\,5z}{z\,\mathrm{s}in2iz}dz$.

17. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\mathrm{ch}\,3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}dz$.

18. $\oint\limits_{|z|=0,9} \frac{e^{3z}-1-3z}{\mathrm{sh}^2\,\pi z}dz$.

19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{s}in3z-3z}{z^2 sh^2 iz}dz$.

20. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z-1+2z^2}{z^4\,\mathrm{sh}\frac{\pi z}{3}}dz$.

21. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\mathrm{sh}\,2z-2z}{z^2\sin^2\frac{z}{3}}dz$.

22. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ch}\,2z-1-2z^2}{z^4\sin\frac{2\pi z}{3}}dz$.

23. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\,\mathrm{sh}\,8iz}dz$.

24. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2\,2\pi z}dz$.

25. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z}-\mathrm{ch}\,6z}{z\sin\pi z}dz$.

§3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ЛИШКІВ
Основні теоретичні відомості
[1] – с.415-417; **[2]** – с.86-90.

Нехай функція $f(x)$, $x \in (-\infty;+\infty)$ аналітично продовжується як функція $f(z)$ на верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ за винятком тільки скінченного числа особливих точок $\{z_k\}$. Вважаємо, що особливі точки функції $f(z)$ не знаходяться на дійсній осі, тобто $\operatorname{Im} z_k > 0$.

I. Інтеграли виду $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Лема 1. Якщо при $z \to \infty$ маємо $z \cdot f(z) \to 0$ рівномірно для всіх значень z, таких що $\arg z \in [0;\pi]$, то $\int\limits_{C(R)} f(z)dz \to 0$ при $R \to \infty$, де $C(R)$ – півколо $\{z : |z| = R, 0 \le \arg z \le \pi\}$.

Замкнемо відрізок $[-R;R]$ півколом $C(R)$ так, щоб усі особливі точки функції $f(z)$ були внутрішніми точками отриманого півкруга. Тоді за теоремою про лишки

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C(R)} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Отже, розрахункова формула набуде вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \text{ для } \operatorname{Im} z_k > 0.$$

II. Деякі інтеграли, які містять тригонометричні функції.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx \text{ або } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx, \text{ де } \lambda > 0.$$

При обчисленні таких інтегралів використовується:

Лема Жордана. Якщо при $z \to \infty$ маємо $f(z) \to 0$ рівномірно для всіх значень z, таких що $\arg z \in [0;\pi]$, то $\int\limits_{C(R)} f(z)e^{-i\lambda z}dz \to 0$ при $R \to \infty$.

Взявши замкнений контур $[-R;R] \cup C(R)$, перейдемо до границі при $R \to \infty$, тоді за теоремою про лишки отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}, \text{ для } \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Отже, враховуючи, що $e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$, маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right),$$

при $\lambda > 0$ і $\operatorname{Im} z_k > 0$.

III. Інтеграли виду $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi;\sin\varphi)\,d\varphi$, де R – раціональна функція від $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$. Такі інтеграли обчислюються за допомогою заміни:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ d\varphi = -i\frac{dz}{z}$$

як інтеграли функції комплексної змінної

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi;\sin\varphi)\,d\varphi = \int_{|z|=1} R_1(z)dz.$$

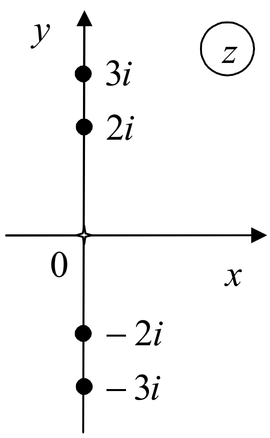
IV. Обчислення суми ряду за допомогою лишків.

Знайдемо суму абсолютно збіжного ряду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$. Якщо функція $f(z)$ аналітична на всій комплексній площині за виключенням скінченного числа полюсів $\{z_k\}$, які не співпадають з жодною із точок $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, та крім цього, $|z^2 f(z)| < M < \infty$ при $z \to \infty$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\operatorname{ctg}\pi z.$$

Зразки розв’язування задач

Задача 3.1. Обчисліть інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.



Розв’язання. Підінтегральна функція

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+3i)(z-3i)}$$

у верхній півплощині має два полюси 1-го порядку $z_1 = 2i$ та $z_2 = 3i$. Крім цього $z\cdot f(z) = \frac{z}{(z^2+4)(z^2+9)} \to 0$ при $z \to \infty$. Отже

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}+\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{(z^2+4)(z^2+9)}+\lim_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+4)(z^2+9)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+9)}+\lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z^2+4)(z+3i)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{(2i+2i)((2i)^2+9)}+\frac{1}{((3i)^2+4)(3i+3i)}\right)=2\pi i\left(\frac{1}{4i\cdot 5}+\frac{1}{-5\cdot 6i}\right)=\frac{\pi}{30}.$$

Задача 3.2 Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}$ є уявною частиною функції $\frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2}$, значення якої збігаються із значеннями на дійсній осі функції $\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}$. Функція $f(z)=\frac{z-1}{(z^2+9)^2}$ має у верхній півплощині полюс 2-го порядку в точці $z_0=3i$ і $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-1}{(z^2+9)^2}=0$, тобто виконуються умови леми Жордана. Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}=$$

$$=2\pi i\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right)\Bigg|_{z=3i}=2\pi i\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)e^{iz}}{(z+3i)^2}\right)\Bigg|_{z=3i}=$$

$$=2\pi i\frac{\left(e^{iz}+(z-1)ie^{iz}\right)\cdot(z+3i)^2-(z-1)e^{iz}\cdot 2(z+3i)}{(z+3i)^4}\Bigg|_{z=3i}=$$

$$= 2\pi i e^{iz} \left. \frac{\big(1 + (z-1)i\big)\cdot(z+3i) - (z-1)\cdot 2}{(z+3i)^3} \right|_{z=3i} =$$

$$= 2\pi i e^{iz} \left. \frac{\big(1 + iz - i\big)\cdot(z+3i) - 2z + 2}{(z+3i)^3} \right|_{z=3i} =$$

$$= 2\pi i e^{i3i} \frac{\big(1 + i3i - i\big)\cdot(3i+3i) - 2\cdot 3i + 2}{(3i+3i)^3} = 2\pi i e^{-3} \frac{(1-3-i)\cdot 6i - 6i + 2}{(6i)^3} =$$

$$= 2\pi i e^{-3} \frac{-12i + 6 - 6i + 2}{-216i} = 2\pi i e^{-3} \frac{-18i + 8}{-216i} = 2\pi i e^{-3}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{27} i\right) =$$

$$= -\frac{2\pi e^{-3}}{27} + \frac{\pi e^{-3}}{6} i .$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{(x^2+9)^2} dx = \operatorname{Im}\left(-\frac{2\pi e^{-3}}{27} + \frac{\pi e^{-3}}{6} i\right) = \frac{\pi e^{-3}}{6} .$$

Задача 3.3 Обчисліть інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36} = \frac{(x^2+x)\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)}$ є дійсною частиною функції $\frac{(x^2+x)e^{ix}}{(x^2+4)(x^2+9)}$, значення якої збігаються із значеннями на дійсній осі функції $\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}$. Функція $f(z) = \frac{z^2+z}{(z^2+4)(z^2+9)}$ має у верхній півплощині полюси 1-го порядку в точках $z_1 = 2i$, $z_2 = 3i$ і $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^2+z}{(z^2+4)(z^2+9)} = 0$.

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)e^{ix}}{x^4+13x^2+36}dx=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}+\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+z)e^{iz}(z-2i)}{(z^2+4)(z^2+9)}+\lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+z)e^{iz}(z-3i)}{(z^2+4)(z^2+9)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{((2i)^2+2i)e^{i2i}}{(2i+2i)((2i)^2+9)}+\frac{((3i)^2+3i)e^{i3i}}{((3i)^2+4)(3i+3i)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{(-4+2i)e^{-2}}{4i\cdot 5}+\frac{(-9+3i)e^{-3}}{-5\cdot 6i}\right)=$$

$$=2\pi\left(\frac{-2+i}{10e^2}-\frac{-3+i}{10e^3}\right)=\pi\frac{-2e+ie+3-i}{5e^3}=\frac{\pi(3-2e)}{5e^3}+\frac{\pi(e-1)}{5e^3}i\,.$$

Тоді,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)e^{ix}}{x^4+13x^2+36}dx=$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{\pi(3-2e)}{5e^3}+\frac{\pi(e-1)}{5e^3}i\right)=\frac{\pi(3-2e)}{5e^3}\,.$$

Задача 3.4. Обчисліть інтеграл $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{4\sqrt{2}\sin\varphi+6}$.

Розв'язання. Зробимо заміну

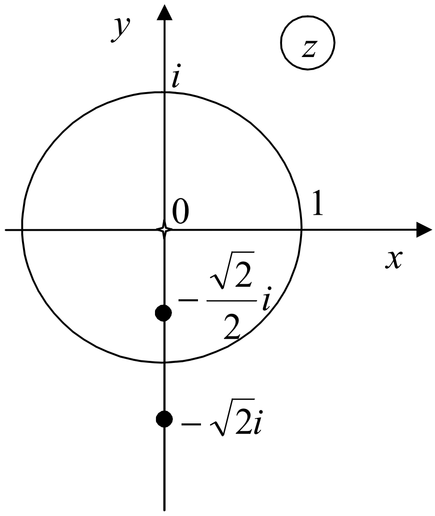
$$z=e^{i\varphi},\ \sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz},\ d\varphi=-i\frac{dz}{z}=\frac{dz}{iz}\,.$$

Одержимо

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{4\sqrt{2}\sin\varphi+6}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(4\sqrt{2}\frac{z^2-1}{2iz}+6\right)}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{2}(z^2-1)+6iz}=$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{2}\left(z^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}iz-1\right)}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{2}\left(z+\sqrt{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}.$$

Оскільки у внутрішності круга $|z|\le 1$ знаходиться тільки один корінь знаменника підінтегральної функції, то за теоремою про лишки маємо:



$$I = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}i} \frac{1}{\left(z+\sqrt{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}.$$

Обчислимо лишок в полюсі 1-го порядку:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}i} \frac{1}{\left(z+\sqrt{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \left.\frac{1}{z+\sqrt{2}i}\right|_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}i} =$$

$$= \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\sqrt{2}i} = -\sqrt{2}i.$$

Отже $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\sqrt{2}\sin\varphi + 6} = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}i) = \pi$.

Задача 3.5. Знайдіть суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(z) = \frac{1}{4z^2+1}$. Ця функція аналітична в усіх точках комплексної площини, за виключенням точок $z_1 = \frac{1}{2}i$ та $z_2 = -\frac{1}{2}i$, які є полюсами 1-го порядку. Крім того

$$|z^2 f(z)| = \left|\frac{z^2}{4z^2+1}\right| = \frac{1}{\left|4+\frac{1}{z^2}\right|} \le \frac{1}{4-\left|\frac{1}{z^2}\right|} \le \frac{1}{3} < \infty \text{ при } z \to \infty.$$

$$\text{Отже, } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1} = -\pi\left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{4z^2+1} + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{4z^2+1} \right).$$

Для функції $\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{4z^2+1}$ точки $z_1 = \frac{1}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2}i$ також є полюсами 1-го порядку.

Знайдемо лишки:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{4z^2+1}=\left.\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{(4z^2+1)'}\right|_{z=\frac{1}{2}i}=\left.\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{8z}\right|_{z=\frac{1}{2}i}=\frac{\operatorname{ctg}\pi\frac{1}{2}i}{8\frac{1}{2}i}=-\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}i}{4}i.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{4z^2+1}=\left.\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{(4z^2+1)'}\right|_{z=-\frac{1}{2}i}=\left.\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{8z}\right|_{z=-\frac{1}{2}i}=\frac{\operatorname{ctg}\pi\left(-\frac{1}{2}i\right)}{8\left(-\frac{1}{2}i\right)}=-\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}i}{4}i.$$

Тоді, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2+1}=-\pi\left(-\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}i}{4}i-\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}i}{4}i\right)=\dfrac{\pi}{2}i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}i=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{cth}\dfrac{\pi}{2}.$

Ряд у лівій частині останньої рівності можна записати у вигляді:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}=\ldots+\frac{1}{4(-n)^2+1}+\ldots+\frac{1}{4(-2)^2+1}+\frac{1}{4(-1)^2+1}+\frac{1}{4\cdot 0^2+1}+$$
$$=\frac{1}{4\cdot 1^2+1}+\frac{1}{4\cdot 2^2+1}+\ldots+\frac{1}{4n^2+1}+\ldots=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}.$$

Звідси знаходимо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}-2}{4}.$$

Контрольні запитання та завдання

1. Доведіть формулу $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=-2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k}f(z)$, якщо z_k такі, що $\operatorname{Im}z_k<0$, а $f(z)$ аналітична в нижній півплощині, окрім точок $\{z_k\}$.
2. Нехай $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степеня m та n відповідно. Які вимоги на співвідношення степенів m, n і розташування коренів цих многочленів мають виконуватися, щоб була можливість використати формулу для обчислення інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ через лишки?
3. Як слід обирати контур, замикаючи $C(R)$ та відрізок $[-R;R]$ в лемі Жордана, якщо $\lambda<0$?
4. Доведіть формулу "відновлення оригіналу"

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tz} f(z)dz=\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} e^{tz} f(z),\ \operatorname{Re} z_k<0,$$

де $f(z)$ – аналітична функція, яка має на всій площині скінченне число ізольованих особливих точок $\{z_k\}$ і $f(\infty)=0$.

5. Нехай функція $f(z)$ задовольняє вимогам, вказаним у пункті 4. Доведіть, що $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\cdot\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k}\dfrac{f(z)}{\sin\pi z}$.

Завдання для роботи в аудиторії

Обчисліть інтеграли засобами теорії лишків:

66. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{7}\sin\varphi+4}$.

67. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{5}\sin\varphi+3}$.

68. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{2\sqrt{2}\sin\varphi+3}$.

69. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{2\sqrt{3}\sin\varphi+4}$.

70. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{21}\sin\varphi+5}$.

71. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{5}\cos\varphi-4}$.

72. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{5}+\cos\varphi}$.

73. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos\varphi}$.

74. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^4dx}{(1+x^2)^4}$.

75. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$.

76. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

77. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+11)^2}dx$.

78. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

79. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

80. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$.

81. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

82. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^4}$.

83. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^2(x+4)^2}$.

84. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

85. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$.

Знайдіть суми рядів:

86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2+\frac{1}{8}}$.

87. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2}$.

88. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

89. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{4}\right)^2}$.

90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4-\frac{1}{16}}$.

91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-\frac{3}{2}}$.

Розрахункові завдання

Задача 3.1. Обчисліть інтеграли:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.
5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.
6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$.
7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.
8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.
9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2} dx$.
10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.
11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.
12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.
13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+5)^2} dx$.
14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx$.
15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.
16. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx$.
17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.
18. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2} dx$.
19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.
20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.
21. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$.
22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.
23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$.
24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2} dx$.
25. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx$.

Задача 3.2. Обчисліть інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2} dx$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4} dx$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2} dx$.
5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6} dx$.
6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x/2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$.
7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2} dx$.
8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2)\cos x/2}{(x^2+1)^2} dx$.
9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20} dx$.
10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17} dx$.
11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2} dx$.
12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x\, dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx$.

16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1/4)^2} dx$.

17. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)^3}$.

18. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$.

19. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$.

20. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$.

21. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x/2}{x^2 + 4} dx$.

22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$.

23. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x)\sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

25. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1)\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

Задача 3.3. Обчисліть інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \sqrt{3}\sin\varphi}$.

2. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 + \sqrt{15}\sin\varphi}$.

3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 2\sqrt{6}\sin\varphi}$.

4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{6 + \sqrt{35}\sin\varphi}$.

5. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{7 + 4\sqrt{3}\sin\varphi}$.

6. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4\sin\varphi}$.

7. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 3\sin\varphi}$.

8. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{8 - 3\sqrt{7}\sin\varphi}$.

9. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{9 - 4\sqrt{5}\sin\varphi}$.

10. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 - \sqrt{7}\sin\varphi}$.

11. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 - \sqrt{5}\sin\varphi}$.

12. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi}$.

13. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 - 2\sqrt{3}\sin\varphi}$.

14. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - \sqrt{21}\sin\varphi}$.

15. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{6 - 4\sqrt{2}\sin\varphi}$.

16. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{8 - 2\sqrt{5}\sin\varphi}$.

17. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\sin\varphi - 2}$.

18. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{15}\sin\varphi - 4}$.

19. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\sqrt{6}\sin\varphi - 5}$.

20. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{35}\sin\varphi - 6}$.

21. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\sqrt{3}\sin\varphi - 7}$.

22. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\sin\varphi + 5}$.

23. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{3\sin\varphi + 5}$.

24. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{3\sqrt{7}\sin\varphi + 8}$.

25. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\sqrt{5}\sin\varphi + 9}$.

§4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА
Основні теоретичні відомості
[1] – с.431-447; **[3]** – с.400-411.

Оригіналом називається будь-яка дійснозначна функція $f(t)$, що задовольняє наступним умовам:

1) $f(t)=0$ при $t<0$;

2) $f(t)$ – кусково-неперервна при $t\ge 0$;

3) існують додатні числа M і s_0 такі, що $|f(t)|<Me^{s_0 t}$, $t\in[0;+\infty)$.

Перетворенням Лапласа або зображенням функції $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p=\sigma+i\tau$, яка визначається рівністю $F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. Відповідність між оригіналом $f(t)$ і його зображенням $F(p)$ символічно записують у вигляді $F(p)\doteqdot f(t)$.

Для будь-якої функції оригінала $f(t)$ зображення $F(p)$ визначено у півплощині $\operatorname{Re} p>s_0$ і є аналітичною функцією в цій півплощині.

Теорема Меліна. Якщо $f(t)$ – оригінал і $F(p)$ – його зображення, то в кожній точці, де існує $f'(t)$, справедлива рівність $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp$, де $a>s_0$ – показник зростання $f(t)$ і $p=\sigma+i\tau$.

Основна таблиця перетворень Лапласа

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	2	3	4	5	6
1	$\eta(t)\equiv 1$	$\dfrac{1}{p}$	8	$\dfrac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
2	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	11	$t\sin\beta t$	$\dfrac{2p\beta}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
5	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	12	$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$

1	2	3	4	5	6
6	$\operatorname{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$	13	$\cos\beta(t-t_0)$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}e^{-pt_0}$
7	$\operatorname{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$	14	$\sin\beta(t-t_0)$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}e^{-pt_0}$

Основні властивості перетворень Лапласа

№	Назва властивості	$f(t)$	$F(p)$
1	Лінійність	$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(p)+c_2 F_2(p)$
2	Теорема подібності	$f(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$
3	Теорема зміщення	$e^{\alpha t} f(t)$	$F(p-\alpha)$
4	Теорема запізнення	$f(t-t_0)$	$F(p)e^{-pt_0}$
5	Диференціювання оригіналу	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
6	Інтегрування оригіналу	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{p}f(p)$
7	Диференціювання зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^n(p)$
8	Інтегрування зображення	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int\limits_p^\infty F(q)dq$
9	Теорема Бореля про зображення згортки $f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$	$f_1 * f_2$	$F_1(p)\cdot F_2(p)$

Безпосереднє використання формул відновлення буває досить складним через громіздкість формул розкладу функції-зображення на найпростіші. Тому на практиці використовують наступну теорему.

Теорема розкладання. Якщо $F(p)$ має скінченне число особливих точок $p_1, p_2, ..., p_n$, які розташовані в скінченній частині площини, то

$$f(t) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}.$$

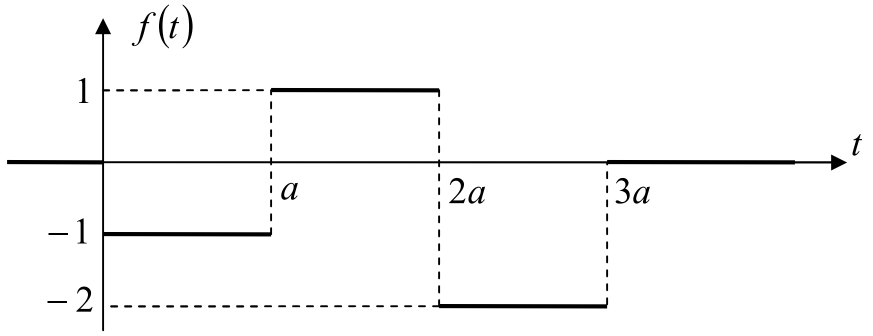
Зауваження. При знаходженні зображення кусково-лінійної функції (полігональної функції) використовують наступну формулу:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} e^{-p\tau_k}\left[\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right],$$

де τ_1, τ_2, …, τ_k – точки розриву функції $f(t)$ або $f'(t)$; $\alpha_k = f_+(\tau_k) - f_-(\tau_k)$ – стрибки функції в вузлах «з'єднання»; $\beta_k = f'_+(\tau_k) - f'_-(\tau_k)$ – стрибки похідної в вузлах «з'єднання».

Зразки розв'язування задач

Задача 4.1. За даним графіком оригіналу знайдіть зображення:



Розв'язання. 1-й спосіб. Знайдемо аналітичний вираз для функції $f(t)$:

а) $f(t) = -1$ для $t \in (0;a)$;

б) $f(t) = 1$ для $t \in (a;2a)$;

в) $f(t) = -2$ для $t \in (2a;3a)$;

г) $f(t) = 0$ для $t \geq 3a$.

Для $t \in (0;a)$ маємо $f(t) = -1 = -\eta(t)$. Далі знайдемо функцію $\psi_1(t)$ таку, щоб при $t \geq a$ виконувалось співвідношення $-1 + \psi_1(t) = 1$, тобто $\psi_1(t) = 2\eta(t-a)$. Далі знаходимо функцію $\psi_2(t)$таку, щоб при всіх $t \geq 2a$ була справедлива рівність $1 + \psi 2(t) = -2$. Звідси $\psi_2(t) = -3\eta(t-2a)$. Аналогічно знаходимо функцію $\psi_3(t) = 2\eta(t-3a)$.

Отже, $f(t) = -\eta(t) + 2\eta(t-a) - 3\eta(t-2a) + 2\eta(t-3a)$. Скориставшись лінійною властивістю та теоремою запізнення, маємо:

$$F(p) = -\frac{1}{p} + 2e^{-ap}\frac{1}{p} - 3e^{-2ap}\frac{1}{p} + 2e^{-3ap}\frac{1}{p}.$$

2-й спосіб. Для заданої функції $f(t)$ визначимо в точках розриву τ_k функцій $f(t)$ або $f'(t)$ стрибки функції α_k і стрибки похідної β_k:

$\tau_1 = 0$, $\alpha_1 = -1 - 0 = -1$, $\beta_1 = 0$;

$\tau_2 = a$, $\alpha_2 = 1 - (-1) = 2$, $\beta_2 = 0$;

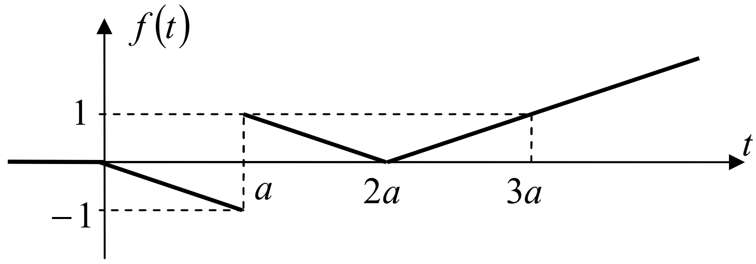
$\tau_3 = 2a$, $\alpha_3 = -2 - 1 = -3$, $\beta_3 = 0$;

$\tau_4 = 3a$, $\alpha_4 = 0 - (-2) = 2$, $\beta_4 = 0$.

Тоді, скориставшись формулою зображення полігональної функції, знайдемо

$$F(p) = \sum_{k=1}^{4} e^{-p\tau_k}\left[\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right] = -\frac{1}{p} + \frac{2}{p}e^{-ap} - \frac{3}{p}e^{-2ap} + \frac{2}{p}e^{-3ap}.$$

Задача 4.2. За даним графіком оригіналу знайдіть зображення:



Розв'язання. 1-й спосіб. Знайдемо аналітичний вираз для функції $f(t)$:

а) $f(t) = -\frac{t}{a}\eta(t)$ для $t \in (0;a)$;

б) $f(t) = -\frac{t-2a}{a}\eta(t-a)$ для $t \in (a;2a)$;

в) $f(t) = \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a)$ для $t \geq 2a$.

Вважаючи, що функція $f(t)$ задана формулою $f(t) = -\frac{t}{a}$ для всіх $t \geq 0$, знайдемо функцію $\psi_1(t)$, яку потрібно до неї додати, щоб одержати $f(t) = -\frac{t-2a}{a}$ для всіх $t \geq a$.

$$-\frac{t}{a} + \psi_1(t) = -\frac{t-2a}{a}.$$

Знайдемо $\psi_1(t) = 2\eta(t-a)$.

Далі знаходимо таку функцію $\psi_2(t)$, щоб у сумі із $f(t) = -\frac{t-2a}{a}$ мати функцію $\frac{t-2a}{a}$ для всіх $t \geq 2a$. Отримаємо

$$-\frac{t-2a}{a} + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}.$$

Звідси $\psi_2(t) = \frac{2t-4a}{a}\eta(t-2a)$.

Таким чином, для всіх $t \geq 0$ маємо

$$f(t) = -\frac{t}{a}\eta(t) + 2\eta(t-a) + \frac{2t-4a}{a}\eta(t-2a).$$

Скориставшись властивістю лінійності та теоремою запізнення, знаходимо зображення $F(p)$ функції $f(t)$:

$$F(p) = -\frac{1}{ap^2} + \frac{2}{p}e^{-ap} + \frac{2}{ap^2}e^{-2ap}.$$

2-й спосіб. Для заданої функції $f(t)$ визначимо в точках розриву τ_k функцій $f(t)$ або $f'(t)$ стрибки функції α_k і стрибки похідної β_k:

$\tau_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -\frac{1}{a}$;

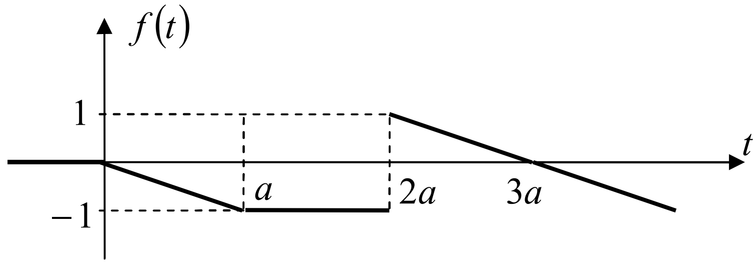
$\tau_2 = a$, $\alpha_2 = 1-(-1) = 2$, $\beta_2 = 0$;

$\tau_3 = 2a$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = \frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a}$.

Звідси, скориставшись формулою зображення полігональної функції, знайдемо

$$F(p) = \sum_{k=1}^{3} e^{-p\tau_k}\left[\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right] = -\frac{1}{ap^2} + \frac{2}{p}e^{-ap} + \frac{2}{ap^2}e^{-2ap}.$$

Задача 4.3. За даним графіком оригіналу знайдіть зображення:



Розв'язання. 1-й спосіб. Знайдемо аналітичний вираз для функції $f(t)$:

а) $f(t) = -\frac{t}{a}\eta(t)$ для $t \in (0;a)$;

б) $f(t) = -\eta(t-a)$ для $t \in (a;2a)$;

в) $f(t) = -\frac{t-3a}{a}\eta(t-2a)$ для $t \geq 2a$.

Вважаючи, що функція $f(t)$ задана формулою $f(t) = -\frac{t}{a}$ для всіх $t \geq 0$, знайдемо функцію $\psi_1(t)$, яку потрібно до неї додати, щоб одержати $f(t) = -1$ для всіх $t \geq a$:

$$-\frac{t}{a} + \psi_1(t) = -1.$$

Знайдемо $\psi_1(t) = \frac{t-a}{a}\eta(t-a)$.

Далі знаходимо $\psi_2(t)$ із умови

$$-1 + \psi_2(t) = -\frac{t-3a}{a},$$

звідки $\psi_2(t) = -\frac{t-4a}{a}\eta(t-2a)$.

Отже, для всіх $t \ge 0$ маємо

$$f(t) = -\frac{t}{a}\eta(t) + \frac{t-a}{a}\eta(t-a) - \frac{t-4a}{a}\eta(t-2a).$$

Скориставшись властивістю лінійності та теоремою запізнення, знаходимо зображення $F(p)$ функції $f(t)$:

$$F(p) = -\frac{1}{ap^2} + \frac{1}{ap^2}e^{-ap} + \left(-\frac{1}{ap^2} + \frac{2}{p}\right)e^{-2ap}.$$

2-й спосіб. Для заданої функції $f(t)$ визначимо в точках розриву τ_k функцій $f(t)$ або $f'(t)$ стрибки функції α_k і стрибки похідної β_k:

$\tau_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -\frac{1}{a} - 0 = -\frac{1}{a}$;

$\tau_2 = a$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0 - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$;

$\tau_3 = 2a$, $\alpha_3 = 1 - (-1) = 2$, $\beta_3 = -\frac{1}{a} - 0 = -\frac{1}{a}$.

Звідси, скориставшись формулою зображення полігональної функції, знайдемо

$$F(p) = \sum_{k=1}^{3} e^{-p\tau_k}\left[\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right] = -\frac{1}{ap^2} + \frac{1}{ap^2}e^{-ap} + \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{ap^2}\right)e^{-2ap}.$$

Задача 4.4. Знайдіть оригінал за заданим зображенням:

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Розкладемо дріб на суму найпростіших

$$F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+p+1}.$$

Визначаючи коефіцієнти, одержуємо $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. Отже,

$$F(p) = -\frac{1}{p+1} + \frac{p+1}{p^2+p+1} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Оригінали для кожного із простих дробів знаходимо, використовуючи таблицю основних зображень та теорему зміщення:

$$\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t},\ \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \risingdotseq e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \risingdotseq e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Звідси, скориставшись властивістю лінійності, знаходимо

$$f(t) = -e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

2-ий спосіб. Функція $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)\left(p-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(p-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}$

має прості полюси $p_1 = -1$, $p_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $p_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Звідси за другою теоремою розкладання маємо

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{p=-1}\frac{e^{pt}p}{(p+1)(p^2+p+1)} + \operatorname*{Res}_{p=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\frac{e^{pt}p}{(p+1)(p^2+p+1)} +$$

$$+ \operatorname*{Res}_{p=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\frac{e^{pt}p}{(p+1)(p^2+p+1)} = \left.\frac{e^{pt}p}{p^2+p+1}\right|_{p=-1} +$$

$$+ \left.\frac{e^{pt}p}{(p+1)\left(p-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}\right|_{p=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} +$$

$$+ \left.\frac{e^{pt}p}{(p+1)\left(p-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}\right|_{p=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{e^{-t}}{1} + \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt{3}i} +$$

$$+ \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3}i\right)} = -e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i-3} +$$

$$+e^{-\frac{1}{2}t}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}\frac{-1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i-3}=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=$$

$$=-e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Задача 4.5. Знайдіть оригінал за заданим зображенням:

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)^2}.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Функція $F(p)$ має простий полюс $p_1=0$ та полюси 2-го порядку $p_2=i$, $p_3=-i$. За другою теоремою розкладання

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)^2}+\operatorname*{Res}_{p=i}\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)^2}+\operatorname*{Res}_{p=-i}\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)^2}=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2}+\lim_{p\to i}\left(\frac{e^{pt}}{p(p+i)^2}\right)'_p+\lim_{p\to -i}\left(\frac{e^{pt}}{p(p-i)^2}\right)'_p=$$

$$=1+e^{it}\left(\frac{it}{4}-\frac{1}{2}\right)+e^{-it}\left(-\frac{it}{4}-\frac{1}{2}\right)=1+(\cos t+i\sin t)\left(\frac{it}{4}-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+(\cos t-i\sin t)\left(-\frac{it}{4}-\frac{1}{2}\right)=1-\cos t-\frac{1}{2}t\sin t.$$

2-ий спосіб. Використовуючи теорему Бореля про зображення згортки, маємо

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=$$

$$=\sin t\int_0^t\cos\tau\sin\tau\,d\tau-\sin t\int_0^t\sin^2\tau\,d\tau=$$

$$=\sin t\left(-\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\right)-\cos t\left(-\frac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{2}t\right)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t);$$

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(p^2+1)^2}\risingdotseq\int_0^t\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\,d\tau=1-\cos t-\frac{1}{2}t\sin t.$$

Задача 4.6. Знайдіть оригінал за заданим зображенням:

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+4p+8)^2}.$$

Розв'язання. Функція $F(p)$ має полюси $p_1=-2-2i$ та $p_2=-2+2i$ кожний 2-го порядку. Тоді за другою теоремою розкладання

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=-2-2i}\left(\frac{p\,e^{pt}}{(p^2+4p+8)^2}\right)+\operatorname*{Res}_{p=-2+2i}\left(\frac{p\,e^{pt}}{(p^2+4p+8)^2}\right)=$$

$$=\lim_{p\to-2-2i}\left(\frac{p\,e^{pt}}{(p-(-2+2i))^2}\right)'_p+\lim_{p\to-2+2i}\left(\frac{p\,e^{pt}}{(p-(-2-2i))^2}\right)'_p=$$

$$=\lim_{p\to-2-2i}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p-(-2+2i))^2-pe^{pt}\cdot2(p-(-2+2i))}{(p-(-2+2i))^4}+$$

$$+\lim_{p\to-2+2i}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p-(-2-2i))^2-pe^{pt}\cdot2(p-(-2-2i))}{(p-(-2-2i))^4}=$$

$$=\lim_{p\to-2-2i}\frac{e^{pt}\Big((1+pt)(p-(-2+2i))^2-2p(p-(-2+2i))\Big)}{(p-(-2+2i))^4}+$$

$$+\lim_{p\to-2+2i}\frac{e^{pt}\Big((1+pt)(p-(-2-2i))^2-2p(p-(-2-2i))\Big)}{(p-(-2-2i))^4}=$$

$$=\frac{e^{(-2-2i)t}\Big((1-2t-2it)(-4i)^2-2(-2-2i)(-4i)\Big)}{(-4i)^4}+$$

$$+\frac{e^{(-2+2i)t}\Big((1-2t+2it)(4i)^2-2(-2+2i)(4i)\Big)}{(4i)^4}=$$

$$=e^{(-2-2i)t}\,\frac{-16+32t+32it-16i+16}{256}+e^{(-2+2i)t}\,\frac{-16+32t-32it+16i+16}{256}=$$

$$=e^{(-2-2i)t}\left(-\frac{i}{16}+\frac{1}{8}t+\frac{i}{8}t\right)+e^{(-2+2i)t}\left(\frac{i}{16}+\frac{1}{8}t-\frac{i}{8}t\right)=$$

$$=e^{-2t}\left((\cos2t-i\sin2t)\left(-\frac{i}{16}+\frac{1}{8}t+\frac{i}{8}t\right)+(\cos2t+i\sin2t)\left(\frac{i}{16}+\frac{1}{8}t-\frac{i}{8}t\right)\right)=$$

$$=e^{-2t}\left(\frac{1}{4}t\cos2t+\frac{1}{4}t\sin2t-\frac{1}{8}\sin2t\right).$$

Задача 4.7. Знайдіть оригінал за заданим зображенням:

$$F(p)=\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{(p^2+1)(p^2+2)}.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Розкладемо $\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+2)}$ на найпростіші дроби і знайдемо їх оригінали:

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2)}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+2}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{p^2+2};$$

$$\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq \sin t,\ \frac{\sqrt{2}}{p^2+2}\risingdotseq \sin\sqrt{2}t.$$

Присутність множника $e^{-\frac{p}{2}}$ в зображенні $F(p)$ вказує на необхідність використання теореми запізнення $\left(\tau=\dfrac{1}{2}\right)$. Звідси, скориставшись властивістю лінійності, маємо

$$F(p)=\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{(p^2+1)(p^2+2)}\risingdotseq \sin\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

2-ий спосіб. Функція $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{(p^2+1)(p^2+2)}$ має прості полюси $p_1=-i$, $p_2=i$, $p_3=-\sqrt{2}i$, $p_4=\sqrt{2}i$. За другою теоремою розкладання

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=-i}\frac{e^{-\frac{p}{2}}e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+2)}+\operatorname*{Res}_{p=i}\frac{e^{-\frac{p}{2}}e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+2)}+\operatorname*{Res}_{p=-\sqrt{2}i}\frac{e^{-\frac{p}{2}}e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+2)}+$$

$$+\operatorname*{Res}_{p=\sqrt{2}i}\frac{e^{-\frac{p}{2}}e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+2)}=\left.\frac{e^{p\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{(p-i)(p^2+2)}\right|_{p=-i}+\left.\frac{e^{p\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{(p+i)(p^2+2)}\right|_{p=i}+$$

$$+\left.\frac{e^{p\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{(p^2+1)(p-\sqrt{2}i)}\right|_{p=-\sqrt{2}i}+\left.\frac{e^{p\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{(p^2+1)(p+\sqrt{2}i)}\right|_{p=\sqrt{2}i}=$$

$$=\frac{e^{-i\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{-2i}+\frac{e^{i\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{2i}+\frac{e^{-\sqrt{2}i\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{2\sqrt{2}i}+\frac{e^{\sqrt{2}i\left(-\frac{1}{2}+t\right)}}{-2\sqrt{2}i}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}-t\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}-t\right)}{-2i}+\frac{\cos\left(-\frac{1}{2}+t\right)+i\sin\left(-\frac{1}{2}+t\right)}{2i}+$$

$$+\frac{\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}t\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}t\right)}{2\sqrt{2}i}+\frac{\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}t\right)+i\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}t\right)}{-2\sqrt{2}i}=$$

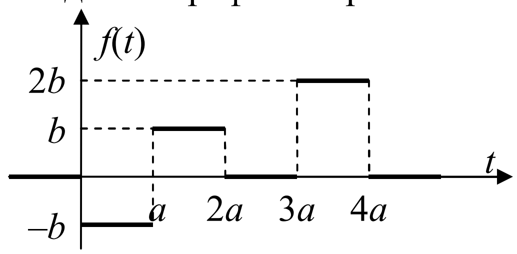
$$=\sin\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

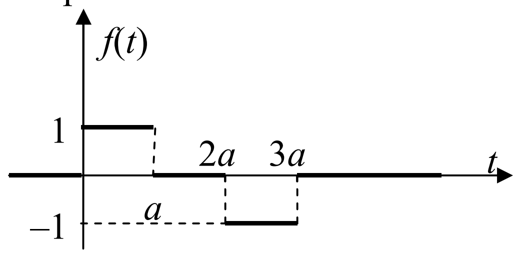
Контрольні запитання та завдання

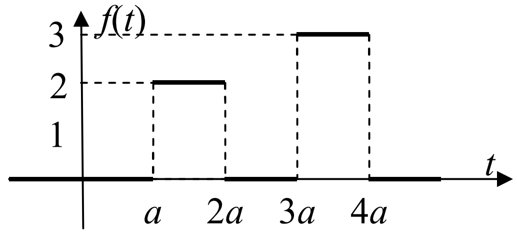
1. Дайте означення показнику зростання функції $f(t)$.
2. Обчисліть, скориставшись зображенням функції Хевісайда
$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$
зображення функції $\eta(t-5)$.
3. За допомогою таблиці основних зображень знайдіть $F(p)$ для
$$1)\ t;\quad 2)\ e^{-3t};\quad 3)\ \sin 5(t-1);\quad 4)\ e^{2t}\cos 4t.$$
4. Використовуючи теореми інтегрування зображення та оригіналу, покажіть рівність
$$\mathrm{Si}\,t \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,p\right).$$
5. Доведіть, що для раціональної функції зображення $F(p)$ записаної у вигляді нескоротного дробу $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, $(n>m)$, і всі корені знаменника якої p_1, p_2, …, p_n – прості, оригінал відновлюється за формулою
$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}e^{p_k t}.$$
Вказівка: Використайте теорему розкладання.

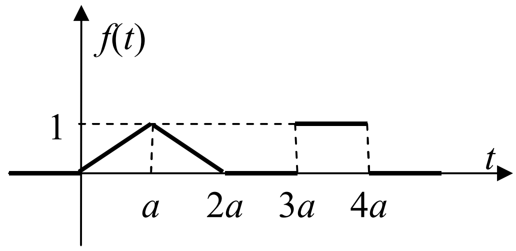
Завдання для роботи в аудиторії

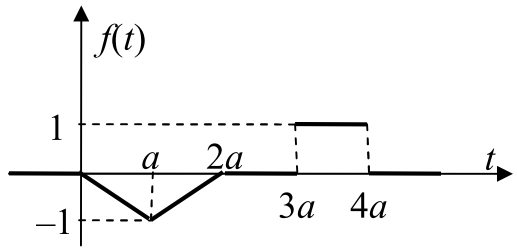
За заданим графіком оригінала знайдіть зображення:

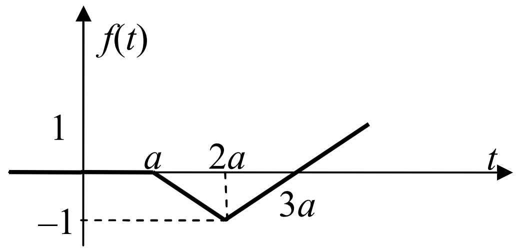
92.


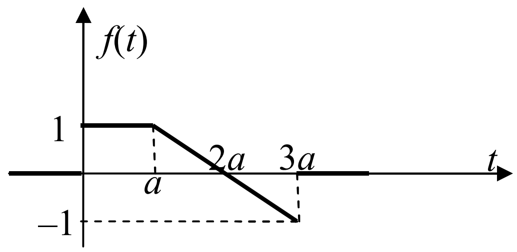
93.


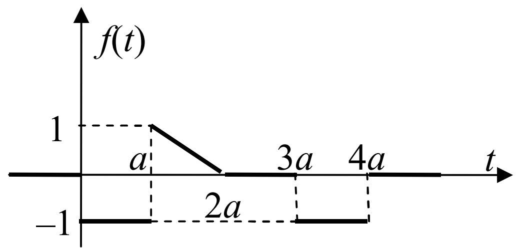
94.


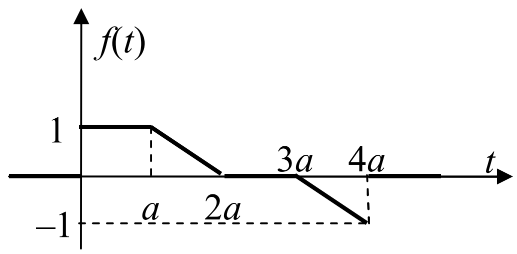
95.


96.


97.


98.


99.


100.


Знайдіть оригінал за заданим зображенням:

101. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$. 102. $\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$. 103. $\dfrac{p}{(p^2+2)(p^2+3)}$.

104. $\dfrac{p}{(p-2)(p^2+9)}$. 105. $\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+16)}$. 106. $\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+25)}$.

107. $\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$. 108. $\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

Знайдіть зображення таких функцій:

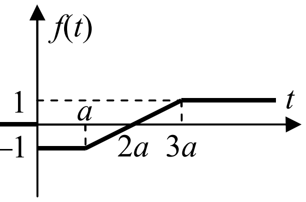
109. $\operatorname{sh}\alpha t \operatorname{ch}\beta t$. 110. $\cos\alpha t \cos\beta t$. 111. $\operatorname{ch}\alpha t + \cos\alpha t$. 112. $\operatorname{sh}\alpha t - \sin\alpha t$.

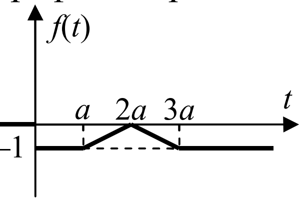
113. $\operatorname{sh}4t\cos^2 3t$. 114. $e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$. 115. $t^2\cos t$. 116. $t\sin\alpha t\operatorname{sh}\alpha t$.

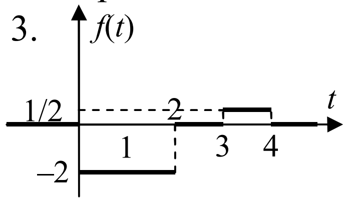
117. $\dfrac{e^{-at}\sin t}{t}$. 118. $\dfrac{\sin 7t\sin 3t}{t}$. 119. $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$. 120. $\sin^4 t$.

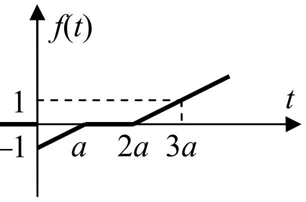
Розрахункові завдання

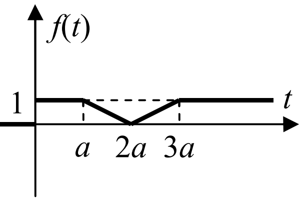
Задача 4.1. За заданим графіком оригінала знайдіть зображення:

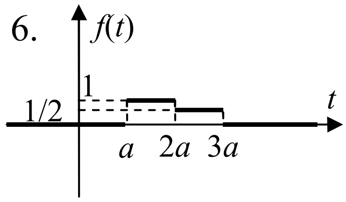
1.


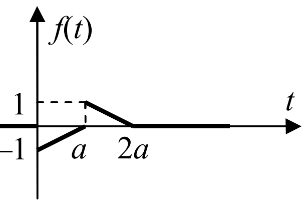
2.


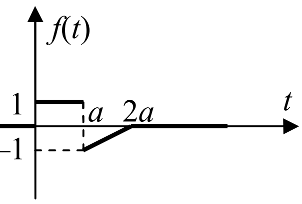
3.


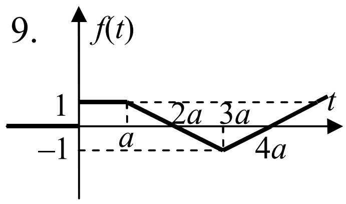
4.


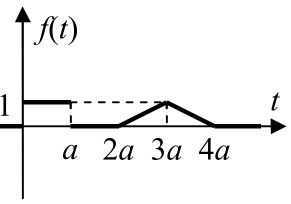
5.


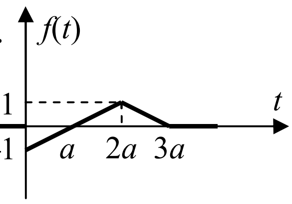
6.


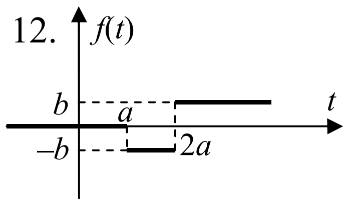
7.


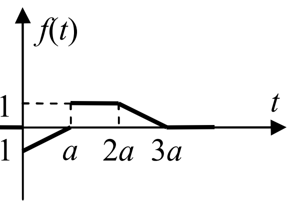
8.


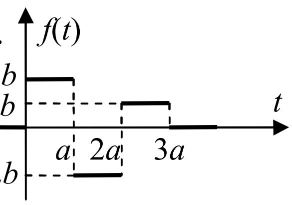
9.


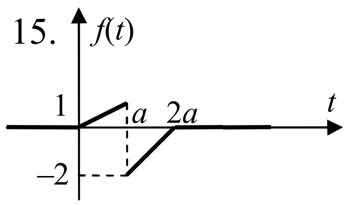
10.


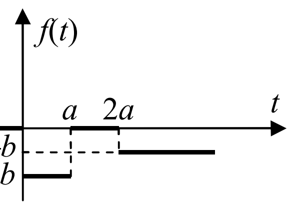
11.


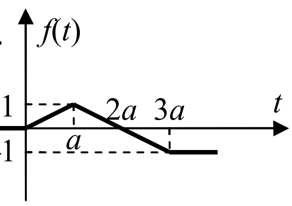
12.


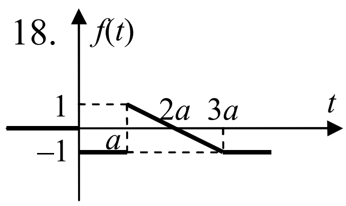
13.


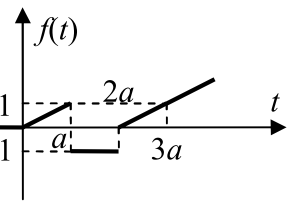
14.


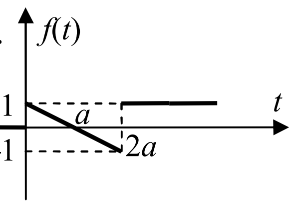
15.


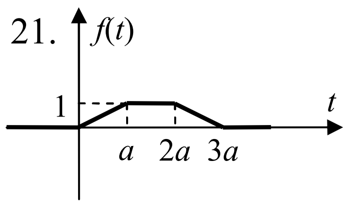
16.


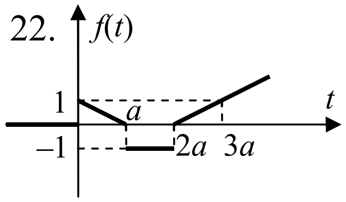
17.


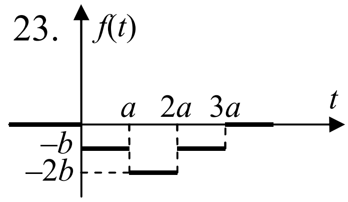
18.


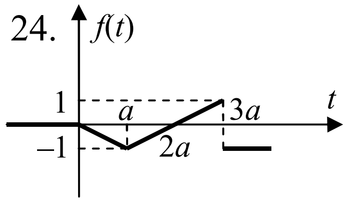
19.


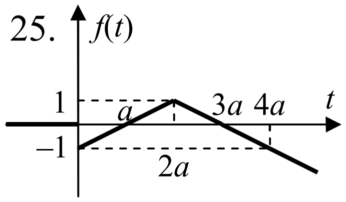
20.


21.


22.


23.


24.


25.


Задача 4.2. Знайдіть оригінал за заданим зображенням:

1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$. 2. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$. 3. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

4. $\dfrac{6}{p^3-8}$. 5. $\dfrac{4}{p^3+8}$. 6. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

7. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$. 8. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$. 9. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

10. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$. 11. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$. 12. $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

13. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$. 14. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$. 15. $\dfrac{1}{p^3-1}$.

16. $\dfrac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$. 17. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$. 18. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

19. $\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$. 20. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$. 21. $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$.

22. $\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$. 23. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$. 24. $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$.

25. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

§5. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Основні теоретичні відомості

[1] – с.447-452; **[3]** – с.411-422.

I. Задача Коші для диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Знайти функцію-розв'язок $y = y(t)$, $t \in (0;+\infty)$, рівняння

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_n y(t) = f(t),$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Операційний метод розв'язування цієї задачі полягає в наступному:

- невідомий розв'язок $y(t)$ і праву частину рівняння $f(t)$ оберемо за оригінали;
- застосувавши перетворення Лапласа, перейдемо від диференціального рівняння в оригіналах до лінійного алгебраїчного рівняння, що пов'язує їх зображення.

Нагадаємо, що за теоремою про диференціювання оригіналу, якщо $y(t) \risingdotseq Y(p)$, то

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0),$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0),$$

$$y'''(t) \risingdotseq p^3 Y(p) - p^2 y(0) - py'(0) - y''(0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)}(t) \risingdotseq p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - ... - py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).$$

Запишемо операторне рівняння, яке зв'язує $Y(p)$ та $F(p) \risingdotseq f(t)$, зібравши в лівій частині доданки, що містять $Y(p)$, а в правій всі інші:

$$Y(p)\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n\right) = F(p) + B(p),$$

тут $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = Q(p)$ – характеристичний многочлен лінійного диференціального рівняння, $B(p)$ – многочлен степеня не вище $(n-1)$, який враховує вплив початкових умов (за нульових початкових умов $B(p) = 0$).

Тоді розв'язок рівняння $y(t)$ знаходимо за зображенням:

$$y(t) \risingdotseq Y(p) = \frac{F(p)}{Q(p)} + \frac{B(p)}{Q(p)}.$$

II. Операційне числення в термінах технічних систем.

Права частина рівняння, функція $f(t)$, являє собою вхідний сигнал деякої фізичної системи.

$F(p)$ – зображення вхідного сигналу або операторний сигнал.

Розв'язок рівняння $y(t)$ – реакція або відгук системи на вхідний сигнал $f(t)$.

$Y(p)$ – зображення відгуку системи або операторний відгук.

Функцію $A(p) = \dfrac{1}{Q(p)}$ називають операторною провідністю або передаточною функцією системи.

Якщо $B(p) \equiv 0$, то операторний відгук отримуємо як добуток вхідного операторного сигналу на передаточну функцію.

Зауваження. Для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку відносно функцій $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t)$ слід розглядати операторні функції

$$Y_1(p) \fallingdotseq y_1(t),\ Y_2(p) \fallingdotseq y_2(t),\ \ldots,\ Y_n(p) \fallingdotseq y_n(t).$$

Тоді питання про розв'язування системи диференціальних рівнянь зводиться до розв'язування системи n алгебраїчних операторних рівнянь.

III. Диференціальні рівняння з нульовими початковими умовами.

У цьому випадку можна суттєво спростити технічну сторону розв'язування задачі Коші операційним методом через використання формули Дюамеля

$$pF(p)V(p) \fallingdotseq f(t)v(0) + \int_0^t f(\tau)v'(t-\tau)d\tau,$$

де $v(t) \risingdotseq V(p)$.

Операторну функцію вихідного рівняння можна записати у вигляді

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q(p)} = pF(p)\frac{1}{pQ(p)} = pF(p)V(p)$$

де $V(p) = \dfrac{1}{pQ(p)}$.

Із формули Дюамеля за нульових початкових умов $0 = y(0) = f(0)\cdot v(0) + 0$, тому $v(0) = 0$. Значить

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)v'(t-\tau)d\tau = \int_0^t v'(\tau)f(t-\tau)d\tau .$$

Задача 5.1. Розв'яжіть операційним методом задачу Коші:

$$y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2.$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тоді $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$. За таблицею зображень знаходимо

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1};\ \cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}.$$

Отже, операторне рівняння матиме вигляд

$$p^2Y(p) + p + 2 - Y(p) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4}.$$

Звідси

$$Y(p)\left(p^2-1\right)=\frac{4}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+4}-(p+2),$$

$$Y(p)=\frac{4}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}+\frac{5p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}-\frac{p+2}{p^2-1}.$$

Скориставшись другою теоремою розкладання, знайдемо тепер оригінал функції $Y(p)$

$$y(t)=\sum_{k=1}^{4}\operatorname*{Res}_{p=p_k} e^{pt}\,Y(p)=4\left(\operatorname*{Res}_{p=-1}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}+\operatorname*{Res}_{p=1}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}+\right.$$

$$\left.+\operatorname*{Res}_{p=-i}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}+\operatorname*{Res}_{p=i}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}\right)+5\left(\operatorname*{Res}_{p=-1}\frac{e^{pt}p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}+\right.$$

$$\left.+\operatorname*{Res}_{p=1}\frac{e^{pt}p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}+\operatorname*{Res}_{p=-2i}\frac{e^{pt}p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}+\operatorname*{Res}_{p=2i}\frac{e^{pt}p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}\right)-$$

$$-\left(\operatorname*{Res}_{p=-1}\frac{e^{pt}(p+2)}{p^2-1}+\operatorname*{Res}_{p=1}\frac{e^{pt}(p+2)}{p^2-1}\right)=4\left(\left.\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)(p-1)}\right|_{p=-1}+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)(p+1)}\right|_{p=1}+\left.\frac{e^{pt}}{(p-i)\left(p^2-1\right)}\right|_{p=-i}+\left.\frac{e^{pt}}{(p+i)\left(p^2-1\right)}\right|_{p=i}\right)+$$

$$+5\left(\left.\frac{e^{pt}p}{\left(p^2+4\right)(p-1)}\right|_{p=-1}+\left.\frac{e^{pt}p}{\left(p^2+4\right)(p+1)}\right|_{p=1}+\left.\frac{e^{pt}p}{(p-2i)\left(p^2-1\right)}\right|_{p=-2i}+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{e^{pt}p}{(p+2i)\left(p^2-1\right)}\right|_{p=2i}\right)-\left(\left.\frac{e^{pt}(p+2)}{p-1}\right|_{p=-1}+\left.\frac{e^{pt}(p+2)}{p+1}\right|_{p=1}\right)=$$

$$=4\left(\frac{e^{-t}}{2\cdot(-2)}+\frac{e^{t}}{2\cdot 2}+\frac{e^{-it}}{-2i\cdot(-2)}+\frac{e^{it}}{2i\cdot(-2)}\right)+$$

$$+5\left(\frac{-e^{-t}}{5\cdot(-2)}+\frac{e^{t}}{5\cdot 2}+\frac{-2ie^{-2it}}{-4i\cdot(-5)}+\frac{2ie^{2it}}{4i\cdot(-5)}\right)-\left(\frac{e^{-t}}{-2}+\frac{3e^{t}}{2}\right)=$$

$$=-e^{-t}+e^{t}+\frac{e^{-it}}{i}-\frac{e^{it}}{i}+\frac{e^{-t}}{2}+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-2it}}{2}-\frac{e^{2it}}{2}+\frac{e^{-t}}{2}-\frac{3e^{t}}{2}=$$

$$=\frac{e^{-it}}{i}-\frac{e^{it}}{i}-\frac{e^{-2it}}{2}-\frac{e^{2it}}{2}=\frac{1}{i}(\cos t-i\sin t)-\frac{1}{i}(\cos t+i\sin t)-$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2t - i\sin 2t) - \frac{1}{2}(\cos 2t + i\sin 2t) = -2\sin t - \cos 2t.$$

Задача 5.2. Розв'яжіть операційним методом задачу Коші:

$$y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3),\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2.$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$, тоді $y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0)$; $y''(t) \doteqdot p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)$. За таблицею зображень знаходимо

$$e^t t^2 \doteqdot \frac{2}{(p-1)^3};\ e^t t \doteqdot \frac{1}{(p-1)^2};\ -3e^t \doteqdot -\frac{3}{p-1}.$$

Звідси маємо

$$p^2 Y(p) - 2p - 2 - 2pY(p) + 4 = \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{3}{p-1}.$$

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{p(p-2)} + \frac{2}{p(p-2)(p-1)^3} + \frac{1}{p(p-2)(p-1)^2} - \frac{3}{p(p-2)(p-1)} =$$

$$= \frac{2(p-1)^4 - 3(p-1)^2 + p + 1}{p(p-2)(p-1)^3}.$$

За другою теоремою розкладання знаходимо оригінал функції $Y(p)$:

$$y(t) = \operatorname*{Res}_{p=0} e^{pt} Y(p) + \operatorname*{Res}_{p=2} e^{pt} Y(p) + \operatorname*{Res}_{p=1} e^{pt} Y(p) =$$

$$= \left.\frac{e^{pt}\left(2(p-1)^4 - 3(p-1)^2 + p + 1\right)}{(p-2)(p-1)^3}\right|_{p=0} + \left.\frac{e^{pt}\left(2(p-1)^4 - 3(p-1)^2 + p + 1\right)}{p(p-1)^3}\right|_{p=2} +$$

$$+ \lim_{p\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}(2p^4 - 8p^3 + 9p^2 - p)}{p(p-2)}\right) =$$

$$= e^{2t} + \lim_{p\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}(2p^3 - 8p^2 + 9p - 1)}{p(p-2)}\right) =$$

$$= e^{2t} + \lim_{p\to 1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(e^{pt}\left(2p^2 - 4p + 1 + \frac{1}{p-2}\right)\right) =$$

$$= e^{2t} + \lim_{p\to 1} \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left(e^{pt}t\left(2p^2 - 4p + 1 + \frac{1}{p-2}\right) + e^{pt}\left(4p - 4 - \frac{1}{(p-2)^2}\right)\right) =$$

$$= e^{2t} + \lim_{p\to 1} \frac{1}{2}\left(e^{pt}t^2\left(2p^2 - 4p + 1 + \frac{1}{p-2}\right) + 2e^{pt}t\left(4p - 4 - \frac{1}{(p-2)^2}\right) +\right.$$

$$\left. + e^{pt}\left(4 + \frac{2}{(p-2)^3}\right)\right) = e^{2t} + \frac{1}{2}\left(-2t^2 e^t - 2te^t + 2e^t\right) = e^{2t} - t^2 e^t - te^t + e^t.$$

Задача 5.3. Розв’яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \quad .$$

$$x(0) = 1, \;\; y(0) = 0.$$

Розв’язання. Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тоді $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x(0)$ і $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - y(0)$.

Звідси

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + 3Y(p), \\ pY(p) - 0 = X(p) - Y(p). \end{cases}$$

Розв’язавши систему, знайдемо $X(p)$ і $Y(p)$:

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{p}{p^2 - 4} + \dfrac{1}{p^4 - 4}, \\ Y(p) = \dfrac{1}{p^4 - 4}. \end{cases}$$

Скориставшись таблицею зображень, знайдемо

$$\frac{p}{p^4 - 4} \risingdotseq \operatorname{ch} 2t, \;\; \frac{1}{p^4 - 4} \risingdotseq \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t.$$

Звідси знаходимо розв’язок системи

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{ch} 2t + \dfrac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \\ y(t) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sh} 2t. \end{cases}$$

Задача 5.4. Розв’яжіть систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \;\; y(0) = 1.$$

Розв’язання. Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тоді $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - x(0)$ і $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - y(0)$.

Одержуємо операторну систему:

$$\begin{cases} pX(p) = -X(p) + 3Y(p) + \dfrac{2}{p}, \\ pY(p) = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p} + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p) = \dfrac{5p + 1}{p(p^2 - 4)}, \\ Y(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 3}{p(p^2 - 4)}. \end{cases}$$

За другою теоремою розкладання

$$x(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\frac{e^{pt}(5p+1)}{p(p^2-4)}+\operatorname*{Res}_{p=-2}\frac{e^{pt}(5p+1)}{p(p^2-4)}+\operatorname*{Res}_{p=2}\frac{e^{pt}(5p+1)}{p(p^2-4)}=$$

$$=\left.\frac{e^{pt}(5p+1)}{p^2-4}\right|_{p=0}+\left.\frac{e^{pt}(5p+1)}{p(p-2)}\right|_{p=-2}+\left.\frac{e^{pt}(5p+1)}{p(p+2)}\right|_{p=2}=$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{9}{8}e^{-2t}+\frac{11}{8}e^{2t};$$

$$y(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\frac{e^{pt}(p^2+2p+3)}{p(p^2-4)}+\operatorname*{Res}_{p=-2}\frac{e^{pt}(p^2+2p+3)}{p(p^2-4)}+\operatorname*{Res}_{p=2}\frac{e^{pt}(p^2+2p+3)}{p(p^2-4)}=$$

$$=\left.\frac{e^{pt}(p^2+2p+3)}{p^2-4}\right|_{p=0}+\left.\frac{e^{pt}(p^2+2p+3)}{p(p-2)}\right|_{p=-2}+\left.\frac{e^{pt}(p^2+2p+3)}{p(p+2)}\right|_{p=2}=$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}e^{-2t}+\frac{11}{8}e^{2t}.$$

Задача 5.5. Розв’яжіть диференціальне рівняння:

$$y''-y'=\frac{e^t}{1+e^t},\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

Розв’язання. Рівняння має нульові початкові умови, тому скористаємося формулою Дюамеля. Нехай $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тоді $y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)$; $y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)$. Отже

$$y''(t)-y'(t)\risingdotseq p^2Y(p)-pY(p)=Y(p)p(p-1)\Rightarrow Q(p)=p(p-1).$$

Звідси

$$V(p)=\frac{1}{pQ(p)}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

За другою теоремою розкладання знаходимо оригінал функції $V(p)$:

$$v(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}e^{pt}V(p)+\operatorname*{Res}_{p=1}e^{pt}V(p)=$$

$$=\lim_{p\to0}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{p-1}+\left.\frac{e^{pt}}{p^2}\right|_{p=1}=\lim_{p\to0}\frac{e^{pt}t(p-1)-e^{pt}}{(p-1)^2}+e^t=e^t-t-1.$$

За формулою п. 3 маємо

$$y(t)=\int_0^t v'(\tau)\frac{e^{t-\tau}}{1+e^{t-\tau}}d\tau=\int_0^t(e^\tau-1)\frac{e^te^{-\tau}}{1+e^te^{-\tau}}d\tau=e^t\int_0^t\frac{e^\tau-1}{e^\tau+e^t}d\tau=$$

$$=e^t\int_0^t \frac{e^\tau+e^t-e^t-1}{e^\tau+e^t}d\tau = e^t\int_0^t\left(1-\frac{e^t+1}{e^\tau+e^t}\right)d\tau = e^t\left(\tau\Big|_0^t-(e^t+1)\int_0^t\frac{e^\tau d\tau}{e^\tau\left(e^\tau+e^t\right)}\right)=$$

$$=e^t\left(t-(e^t+1)\int_0^t\frac{de^\tau}{e^\tau\left(e^\tau+e^t\right)}\right)=e^t t-e^t\frac{e^t+1}{e^t}\int_0^t\left(\frac{1}{e^\tau}-\frac{1}{e^\tau+e^t}\right)de^\tau=$$

$$=e^t t-(e^t+1)\left(\ln|e^\tau|\Big|_0^t-\ln|e^\tau+e^t|\Big|_0^t\right)=$$

$$=e^t t-(e^t+1)\left(\ln e^t-\ln e^0-\ln 2e^t+\ln(e^t+1)\right)=e^t t-(e^t+1)\ln\frac{e^t+1}{2}.$$

Отже, розв’язок диференціального рівняння

$$y(t)=e^t t-(e^t+1)\ln\frac{e^t+1}{2}.$$

Задача 5.6. Розв’яжіть диференціальне рівняння:

$$y''+2y'+y=\frac{e^{-t}}{(t+1)^2},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0.$$

Розв’язання. Нехай $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тоді $y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)$; $y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)$. Враховуючи початкові умови, маємо $y''+2y'+y\risingdotseq p^2Y(p)+2pY(p)+Y(p)=Y(p)(p^2+2p+1)\Rightarrow Q(p)=(p+1)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow V(p)=\frac{1}{pQ(p)}=\frac{1}{p(p+1)^2}.$$

За другою теоремою розкладання:

$$v(t)=\operatorname*{Res}_{p=0} e^{pt}V(p)+\operatorname*{Res}_{p=-1} e^{pt}V(p)=\frac{e^{pt}}{(p+1)^2}\Bigg|_{p=0}+\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{p}=1-e^{-t}(t+1).$$

Далі

$$y(t)=\int_0^t v'(\tau)\frac{e^{-(t-\tau)}}{(t-\tau+1)^2}d\tau=\int_0^t e^{-\tau}\tau\frac{e^{-t}e^{\tau}}{(t-\tau+1)^2}d\tau=e^{-t}\int_0^t\frac{\tau d\tau}{(t-\tau+1)^2}=$$

$$=e^{-t}\int_0^t\frac{-(t+1-\tau)+(t+1)}{(t-\tau+1)^2}d\tau=e^{-t}\left(\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d(t+1-\tau)^2}{(t-\tau+1)^2}-(t+1)\int_0^t\frac{d(t+1-\tau)}{(t-\tau+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}\left(\ln(t+1-\tau)^2\Big|_0^t+\frac{2(t+1)}{t+1-\tau}\Bigg|_0^t\right)=\frac{e^{-t}}{2}\left(\ln(t+1)^2+2t\right).$$

Таким чином, розв’язок $y(t)=\dfrac{e^{-t}}{2}\left(\ln(t+1)^2+2t\right)$.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть схему розв'язування лінійного диференціального рівняння операційним методом, умовно розділену на три етапи.
2. Використовуючи заміну $t=\tau+t_0$, зведіть розв'язування рівняння
$$a_0 y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t)=f(t)$$
з початковими умовами $y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_1$ у точці t_0 до задачі з початковими умовами в точці $\tau=0$
$$a_0\tilde{y}''(\tau)+a_1\tilde{y}'(\tau)+a_2\tilde{y}(\tau)=\tilde{f}(\tau),\ \tilde{y}(0)=\tilde{y}_0,\ \tilde{y}'(0)=\tilde{y}_1.$$
3. Використовуючи заміну $\tilde{y}(t)=y(t)-y_0-y_1 t$, зведіть розв'язування рівняння $a_0 y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t)=f(t)$ з ненульовими початковими умовами $y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_1$ до наступної нульової задачі Коші:
$$a_0\tilde{y}''(\tau)+a_1\tilde{y}'(\tau)+a_2\tilde{y}(\tau)=\tilde{f}(\tau),\ \tilde{y}(0)=0,\ \tilde{y}'(0)=0.$$
4. Використовуючи теорему про згортку, знайдіть:

   1) зображення функції $\varphi(t)=\int\limits_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau$;

   2) розв'язок інтегрального рівняння
$$\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau=1-\cos t.$$
5. Операційним методом розв'яжіть рівняння Бесселя з нульовим індексом:
$$t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0,\ y(0)=1.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Знайдіть розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(0)=0$, $y'(0)=0$:

121. $y''+2y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$.
122. $y''-4y=\mathrm{th}^2\, 2t$.
123. $y''+y'=\dfrac{1}{(1+e^t)^2}$.
124. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$.
125. $y''+y=e^{-t}$.
126. $y''+y=\sin 2t$.
127. $y''+y=\cos t$.
128. $y'''+y'=10e^{2t}$.

Методом операційного числення розв'яжіть задачу Коші:

129. $y''+3y'-10y=47\cos 3t-\sin 3t,\ y(0)=3,\ y'(0)=-1$.
130. $y''+y'-2y=e^{-t},\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$.
131. $y''+y=2\cos t,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

132. $y''-3y'+2y=2e^t\cos\frac{t}{2}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

133. $y''+2y'=t\sin t$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

134. $y''-2y'+y=e^t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

135. $y'''+2y''+5y'=0$, $y(0)=-1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=0$.

136. $y''+2y'+y=t^2$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь:

137. $\begin{cases}\dot{x}=y+3,\\ \dot{y}=x+2,\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=0.$

138. $\begin{cases}\dot{x}=x+3y+3,\\ \dot{y}=x-y+1,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$

139. $\begin{cases}\dot{x}=3y,\\ \dot{y}=3x+1,\end{cases}$ $x(0)=2,\ \ y(0)=2.$

140. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y,\\ \dot{y}=3x,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$

141. $\begin{cases}x+\dot{x}=y+e^t,\\ y+\dot{y}=x+e^t,\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=1.$

142. $\begin{cases}\dot{x}-\dot{y}-2x+2y=1-2t,\\ \ddot{x}+2\dot{y}+x=0,\end{cases}$ $x(0)=0, \dot{x}(0)=0, y(0)=0.$

143. $\begin{cases}\dot{x}+\dot{y}-y=e^t,\\ 2\dot{x}+\dot{y}+2y=\cos t,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=0.$

144. $\begin{cases}\dot{x}=3y-x,\\ \dot{y}=y+x+e^{at},\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=1.$

Розрахункові завдання

Задача 5.1. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(0)=0$, $y'(0)=0$:

1. $y''-y=\mathrm{th}\,t$.

2. $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$.

4. $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$.

5. $y''-y=\mathrm{th}^2\,t$.

6. $y''-y=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t}$.

7. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t+1}$.

8. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{3+e^t}$.

9. $y''-2y'=\dfrac{e^t}{\mathrm{ch}\,t}$.

10. $y''-y=\dfrac{1}{1+\mathrm{ch}\,t}$.

11. $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

12. $y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2t}}{\mathrm{ch}^2\,2t}$.

13. $y''-4y=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^3\,2t}$.

14. $y''-y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,t}$.

15. $y''+y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}$.

16. $2y''-y'=\dfrac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}$.

17. $y''-y=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^3\,t}$.

18. $y''-y=\dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$.

19. $y''+2y'+y=\dfrac{te^{-t}}{t+1}$.

20. $y''-y'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^{t}}$.

21. $y''-y=\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$.

22. $y''+y'=\dfrac{e^{t}}{(1+e^{t})^2}$.

23. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$.

24. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{t}}{\operatorname{ch}^2 t}$.

25. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$.

Задача 5.2. Методом операційного числення розв'яжіть задачу Коші:

1. $y''+y=6e^{-t},\ y(0)=3,\ y'(0)=1$.
2. $y''-y'=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.
3. $y''+y'=t^2+2t,\ y(0)=0,\ y'(0)=-2$.
4. $y''-y=\cos 3t,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$.
5. $y''+y'+y=7e^{2t},\ y(0)=1,\ y'(0)=4$.
6. $y''+y'-2y=-2(t+1),\ y(0)=1,\ y'(0)=1$.
7. $y''-9y=\sin t-\cos t,\ y(0)=-3,\ y'(0)=2$.
8. $y''+2y'=2+e^{t},\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.
9. $2y''-y'=\sin 3t,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$.
10. $y''+2y'=\sin\frac{t}{2},\ y(0)=-2,\ y'(0)=4$.
11. $y''+y=\operatorname{sh} t,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$.
12. $y''+4y'+29y=e^{-2t},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.
13. $y''-3y'+2y=e^{t},\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.
14. $2y''+3y'+y=3e^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.
15. $y''-2y'-3y=2t,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$.
16. $y''+4y=\sin 2t,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.
17. $2y''+5y'=29\cos t,\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$.
18. $y''+y'+y=t^2+t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-3$.
19. $y''+4y=8\sin 2t,\ y(0)=3,\ y'(0)=-1$.
20. $y''-y'-6y=2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.
21. $y''+4y=4e^{2t}+4t^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.
22. $y''+4y'+4y=t^3e^{2t},\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.
23. $y''-3y'+2y=12e^{3t},\ y(0)=2,\ y'(0)=6$.
24. $y''+4y=3\sin t+10\cos 3t,\ y(0)=-2,\ y'(0)=3$.
25. $y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t,\ y(0)=5,\ y'(0)=1$.

Задача 5.3. Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь:

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 2.$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x, \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \frac{5}{2}x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

22. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основний

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
2. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. – М.: Высш. шк., 1988. – 167 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985. – Т.2. – 560 с.
4. Болгов В.А., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
6. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. – М.: Высш. шк., 1983. – 112 с.
7. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

Додатковий

8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
9. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979.
10. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1969.

ЗМІСТ