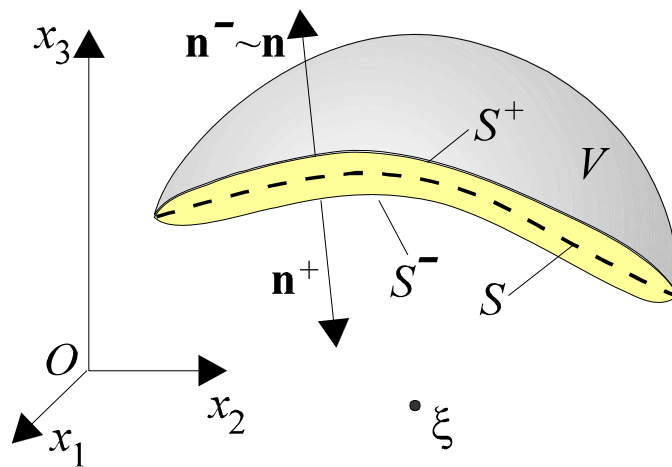


Георгій Сулим

# ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ



$$\begin{pmatrix} \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xx} - \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \frac{K_{1,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \end{pmatrix} + \frac{K_{2,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ -7 \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \end{pmatrix} + \dots$$

Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки та математики  
ім. Я.С.Підстригача НАН України  
Міністерства освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Наукове товариство ім. Шевченка

**Г.Т. Сулим**

**ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ  
ТЕРМОПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ  
ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ  
З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Монографія

Львів – 2007

УДК 539.3  
ББК 22.251  
С 89

**Науковий редактор:**

член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. Кіт Г.С.

**Рецензенти:**

член-кореспондент НАН України, доктор техн. наук, проф. Андрейків О.Є.,  
член-кореспондент НАН України, доктор техн. наук, проф. Гудрамович В.С.,  
доктор фіз.-мат. наук, проф. Осадчук В.А.

Друкується за ухвалою Вченої ради Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, протокол № 6 від 21 червня 2007 р.

**Сулим Г.Т.**

**С–89** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. – 716 с.

У монографії викладені засади теорії визначення полів температури, напружень і переміщень, а також граничного стану деформівних твердих тіл з тонкими включеннями за температурного і силового впливів, дії дислокацій. В основу покладено розроблений автором метод функцій стрибка. Розглянуті методики використання апарату теорії функцій комплексної змінної, інтегральних перетворень та формули Сомільяно для розв'язування задач цього класу з урахуванням анізотропії термофізичних властивостей матеріалів у повному спектрі зміни механічних і теплових параметрів матеріалу включень – від абсолютної податності, що відповідає тріщинам, та абсолютної теплопровідності до абсолютної жорсткості й теплоізоляваності. Розв'язані конкретні двовимірні задачі теорії пружності (плоска та антиплоска), теплопровідності та термопружності для однорідних і шаруватих (кусково-однорідних) тіл, що містять одне, декілька чи періодичні системи тонких включень. Вказані підходи до вивчення відповідних стохастичних задач. Докладно вивчені граничні випадки, коли термопружні включення перетворюються на тріщини чи абсолютно жорсткі дефекти. Здійснено поглиблений аналіз бібліографічних джерел, що стосуються тематики включень у деформівних тілах.

Для спеціалістів у галузі механіки деформівного твердого тіла та руйнування, прикладної математики, інженерно-технічних працівників, конструкторів, викладачів вузів, аспірантів і студентів старших курсів.

Іл. 290. Табл. 59. Бібліогр. список: 1818 назв.

© Сулим Г.Т., 2007

© ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2007

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2007

© Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007

ISBN 966-8868-11-0

Світлій пам'яті моїх Матері й Батька  
присвячую цю книгу

## ПЕРЕДМОВА

Будова реальних матеріалів була і завжди буде далекою від ідеальної. Прошарки чужорідних середовищ, частинки вогнетривів, зони окисненого металу є поширеними вадами їх мікро- та макроструктури. Вдосконалення процесів витопу металів дає можливість навіть великою мірою покращувати їх якість, але ніколи не вдасться позбутися різноманітних за хімічним складом, а отже й механічними властивостями та розмірами включень. Велику частку поміж ними складають тонкі включення, тобто такі, один із геометричних розмірів яких малий у порівнянні з іншими. Щілини й тріщини є лише одним найкраще вивченим типом таких дефектів, які, як це добре відомо, істотно зменшують і короткочасну міцність матеріалу та конструктивних елементів із нього, а також і їх експлуатаційний ресурс.

На загал не лише тріщини, але й довільні інші неоднорідності матеріалу, у тому числі й тонкостінні, є потужними концентраторами напружень і, як свідчить досвід і теоретичний аналіз, саме біля них починаються процеси пластичного деформування та зароджується руйнування: безпосередньо біля вершин м'яких (податних) включень спостерігається локальне руйнування, а біля відносно жорстких – згушення смуг ковзання та формування мікротріщин на певній відстані від вістря неоднорідності. В цілому характеристики втоми та міцності матеріалів істотно залежать від характеру розподілу, форми і фізико-механічних властивостей металевих та неметалевих включень. Зокрема, сталь з платівковими включеннями руйнується значно швидше від сталі з включеннями глобулярного типу.

Неметалеві включення помітно підвищують водневе скрушіння сталі: мікродослідження зруйнованих труб нафто- й газопроводів виявляють множинні тріщини, пов'язані з платівковими видовженими включеннями сірчистого марганцю, котрі збільшують швидкість підростання тріщини та зменшують порогове значення коефіцієнта інтенсивності напружень у поперечному за товщиною труби напрямку. Механічні властивості зварних з'єднань теж істотно залежать від мікроструктури зварного шва та розподілу у ньому включень.

Теорія та практика конструювання й використання прогресивних композиційних матеріалів з плоскою арматурою дають безперечні докази того, що їх міцність на розтяг у трансверсальному напрямку у випадку однонапрявленого армування стрічками складає 50...75% від величини міцності у поздовжньому напрямку, тоді як використання волокон дає зазвичай лише 2...15%. Огляди відзначають переваги плоского армування, що покращує технологіч-

ність, механічні властивості композиту, збільшує коефіцієнт армування, опір до порушення герметичності. Це свідчить про перспективність застосування композитів з плівковою, стрічковою та лусковою арматурою. Використання зовнішнього стрічкового армування у сталезалізобетоні дає можливість економити 15...45% металу у порівнянні із залізобетонними та суто металевими конструкціями.

Тонкими включеннями є тензодатчики, різноманітні підкріплення й накладки, зварні та клейові з'єднання. Заповнену іншим матеріалом тріщину теж можна вважати тонким включенням, а процедура заповнення щілин є одним із методів продовження безпечного терміну експлуатації виробів. Причому заповнення тріщини навіть досить податним матеріалом, скажімо, водою, вже дає помітний позитивний ефект. Теорія тонкостінних включень знаходить застосування і у механіці композитних і геоматеріалів. Реальний контакт тіл також не є ідеальним. Його можна моделювати ідеальним контактом через тонкий прошарок, наділений певними властивостями. Поверхні поділу матеріалів внаслідок складних фізико-хімічних явищ, що відбуваються у цій зоні, своїми властивостями часто істотно відрізняються від середовищ, які до них пристають, і тому за допомогою тонких включень можна з достатньою точністю моделювати міжфазні межі. Методи аналізу тонких включень цілком придатні для дослідження фазових перетворень матеріалів, наприклад, росту мартенситу в аустенітному середовищі, вивчення явища пам'яті форми, конструювання смарт-матеріалів, наноструктур тощо.

У монографії викладені засади теорії визначення полів температури, напружень і переміщень, а також граничного стану деформівних твердих тіл з тонкими включеннями за температурного і силового впливів, дії дислокацій. В основу покладено розроблений автором метод функцій стрибка. Розглянуті методики використання апарату теорії функцій комплексної змінної, інтегральних перетворень та формули Сомільяно для розв'язування задач цього класу з урахуванням анізотропії термофізичних властивостей матеріалів у повному спектрі зміни механічних і теплових параметрів матеріалу включень – від абсолютної податності, що відповідає тріщинам, та абсолютної теплопровідності до абсолютної жорсткості й теплоізоляваності. Розв'язані конкретні двовимірні задачі теорії пружності (плоска та антиплоска), теплопровідності та термопружності для однорідних і шаруватих (кусково-однорідних) тіл, що містять одне, декілька чи періодичні системи тонких включень. Вказані підходи до вивчення відповідних стохастичних задач. Докладно вивчені граничні випадки, коли термопружні включення перетворюються на тріщини чи абсолютно жорсткі дефекти. Здійснено поглиблений аналіз бібліографічних джерел, що стосуються тематики включень у деформівних тілах.

У запропонованій Вашій увазі книзі викладено основні результати досліджень температурного та напружено-деформованого стану твердих деформівних тіл з тонкими неоднорідностями матеріалу, отримані за безпосередньої участі автора. Структурно монографія складається із восьми розділів.

У першому – сформульовані засади застосування методу функцій стрибка, який покладено в основу аналізу впливу тонких дефектів та підкріплень. Звернуто увагу на можливості застосування формули Сомільяно до побудови інтегральних подань методу функцій стрибка для ізотропних та анізотропних тіл з тонкими включеннями. Досліджено структуру розв'язку систем сингулярних інтегральних рівнянь, які виникають під час розв'язування задач теорії тонкостінних включень, та побудову наближеного розв'язку відповідного характеристичного рівняння.

Другий розділ стосується методів числово-аналітичного розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь із використанням методів ортогональних многочленів, колокацій та механічних квадратур. Запропоновано ефективні схеми розв'язування цих рівнянь у випадку лінійної та циклічної періодичності, а також подвійної періодичності відповідних задач.

Для підвищення надійності числових методів рекомендовано застосовувати екстраполяцію результатів за Річардсоном.

У третьому розділі викладено основи співвідношення двовимірної стаціонарної теорії теплопровідності, пружності й термопружності. Запропонована теорія побудови умов взаємодії між тонкою неоднорідністю та матрицею, яка її містить. Завдяки таким умовам отримані системи інтегральних рівнянь дають можливість в межах єдиного підходу врахувати увесь можливий спектр зміни механічних і теплофізичних параметрів тонкого включення. Такі умови побудовано для задач температурної взаємодії, а також антиплоского зсуву і плоскої задачі теорії пружності й термопружності. Окрему увагу звернуто на способи обчислення значень параметрів задачі на торцях включення – торцевих сталих.

Плоске температурне поле у кусково-однорідному середовищі з системою тонких теплоактивних включень, тобто включень, які не лише чинять певний опір потокам тепла, але й можуть тепло виділяти чи поглинати, вивчається у четвертому розділі. Окремо розглянуто класи задач, коли на бічних поверхнях тонких пластин тепловіддачі немає і коли вона враховується.

П'ятий розділ стосується аналізу напружено-деформованого стану пружних тіл за умов поздовжнього зсуву. Вивчено випадки, коли матеріал є лінійно пружний (ізотропний та анізотропний) чи нелінійно пружний; якщо навантаження здійснюється однорідним полем напружень на нескінченності, зосередженими силами, гвинтовими дислокаціями чи силовими або дислокаційними дипольними структурами. Докладно вивчений напружений стан біля вістря одного включення чи систем включень, у тому числі й періодичних, що розміщені в необмеженому масиві чи шаруватих тілах з межами чи без них. Для аналізу шаруватих структур з використанням інтегрального перетворення Фур'є запропоновано ефективну методику, яка дає можливість аналізувати шаруваті структури з плоскопаралельними межами для включень як всередині структурних елементів, так і на межах поділу матеріалів. Важливо, що побудовано двочленні асимптотичні залежності, які враховують не лише сингулярні (для напружень), але й сталі складові у відповідних рядах. Відповідно до цього розглянуто поняття узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, ефективних характеристик композитів, сили, що діє на дислокацію поблизу тонкого дефекту, та спричиненої ним емісії дислокацій. Накреслено підходи до оцінювання міцності тіла із стохастичним розподілом тонких включень.

У шостому розділі викладено подібні результати для випадку плоскої задачі теорії пружності – узагальненого плоского напруженого стану чи плоскої деформації.

На основі результатів четвертого та шостого розділів у сьомому розділі вивчено плоский термонапружений стан кусково-однорідного середовища з системою тонких міжфазних включень – побудовані системи сингулярних інтегральних рівнянь, досліджені випадки міжфазних абсолютно жорстких включень, плівок, щілин. Вивчено вплив абсолютної теплопровідності та теплоізоляваності дефектів, концентрації напружень біля теплопасивного включення. Аналогічна термопружна проблема в умовах узагальненого плоского температурного поля (тепловіддача з поверхонь пластини) зведена до попередньої. Для неї теж отримано системи інтегральних рівнянь та досліджено граничні випадки теплофізичних і механічних властивостей включень. Визначено граничні теплові потоки у пластині із випадково розподіленими теплопровідними щілинами.

Останній розділ роботи стосується аналізу проблематики включень та методів її вирішення у механіці деформівного твердого тіла. З'ясовано сфери застосування теорії тонкостінних включень та вказано на загальні напрями вирішення цієї проблеми. Описані основні методи аналізу напружено-деформованого стану тіл з включеннями загалом довільної, не тонкої форми. Окремо звернуто увагу на групи асимптотичних, експериментальних та прямих числових методів. Основний наголос зроблено на специфічних методах, які дають можливість враховувати малу товщину включень.

При написанні восьмого розділу використано доволі великий, хоча все ж не вичерпний, масив бібліографічних джерел, які сформували основний та додатковий (номери відзначені зірочкою) списки. Коли використовується одночасне посилання на декілька праць, то переважно використовується не загальноприйнятий абетковий, а хронологічний спосіб упорядкування для того, щоб легше орієнтуватися у історії розвитку досліджень розгляданого питання.

Висловлюю найглибшу подяку своєму Вчителю – професору Дмитру Володимировичу Грилицькому, – який ще на студентській лаві привернув мою увагу до цього надзвичайно цікавого міждисциплінарного наукового напрямку і багато років опікувався моєю науковою діяльністю, був зразком працьовитості, наукової принциповості, компетентності й обізнаності з літературою у всіх суміжних до предмету досліджень питаннях. Щиро вдячний колективу кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, у лоні якої я зміг зреалізувати свої творчі плани, за той особливий клімат доброзичливості, взаємодопомоги та зацікавленості в успіхах кожного з її членів, за велику допомогу у написанні цієї праці та підготовці її до видання. Великий вплив на мене мала тривала плідна співпраця із представниками наукових шкіл Львова, Дніпропетровська, Донецька, Києва, Луцька, Одеси, Тернополя та багатьох інших міст України, Росії та Польщі. Мені було надзвичайно легко й приємно співпрацювати з усіма моїми співавторами, у яких я дуже багато навчився. Вдячний рецензентам усіх наших наукових праць, опонентам дисертацій, редакторам наукових публікацій, підручників та монографій, а головню, Науковому редактору та Рецензентам цієї книги, за цінні зауваги та рекомендації. Усім цим людям і науковим колективам завдячую появу цієї книги.

Автор буде вдячний за всі відгуки про монографію, побажання доповнити її конкретним матеріалом та за інформацію про зауважені помилки, недоліки й мимовільні хиби. Пишіть, будь ласка, на електронну адресу [sulym@franko.lviv.ua](mailto:sulym@franko.lviv.ua).

Георгій Сулим

Львів, березень 2007 р.

## РОЗДІЛ І

### МЕТОД ФУНКЦІЙ СТИБКА У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Теорія тонких неоднорідностей своєму виникненню, формуванню підходів та методів і подальшому розвитку завдячує передусім механіці контактної взаємодії пружних і пружно-пластичних тіл (головно тонкостінних) [25, 269–262, 291, 630, 631, 808, 870, 1124], а також теорії тріщин [111, 520, 589, 693, 694], що разом з тим стала еталоном, із яким нова теорія постійно звіряється. На початках свого розвитку на теренах України теорія тріщин таких сприятливих умов не мала, оскільки виростала в парадигмі класичної теорії пружності, спеціалісти якої, визнаючи явище концентрації напружень, все ж з певною підозрою ставилися до розв'язків із необмеженими напруженнями, до того ж іноді й осцилюючими. Тому завданням теорії тріщин було (і надалі залишається) не лише дати розв'язок відповідної математичної проблеми як крайової задачі математичної фізики, але й фізичне трактування отриманих результатів у лоні концепцій механіки суцільного середовища.

#### § 1. Метод функцій стрибка

Метод функцій стрибка (МФС) є одним із ефективних способів розв'язування задачі тонкостінних неоднорідностей [111, 978, 1664]. Ідея МФС ґрунтується на використанні двох основних положень: 1) принципу спряження континуумів різної вимірності; 2) можливості побудови умов взаємодії тонкого включення із зовнішнім середовищем.

##### 1.1. Принцип спряження

Суть принципу спряження (цю назву запропонував у 1975 р. Г.П.Черепанов [1077], хоча сам принцип застосовували ще у 1963–67 рр. Я.С.Підстригач зі співробітниками [775, 738, 399, 777, 790–792], у 1967–71 рр. К.С.Чобанян і А.С.Хачикян [1097, 1061–1064], у 1972–75 рр. Д.В.Гриліцький із Г.Т.Сулимом [978, 236, 237, 239] полягає у заміні тонкого включення з певним об'ємом  $V$  (площею у двовимірному випадку), обмеженого поверхнями  $S^+$ ,  $S^-$  з нормальми  $\mathbf{n}^+$ ,  $\mathbf{n}^- \sim \mathbf{n}$ , деякою поверхнею  $S$  (лінією  $L$  у двовимірних задачах) розриву теплофізичного та напружено-деформованого стану тіла (рис. 1.1).

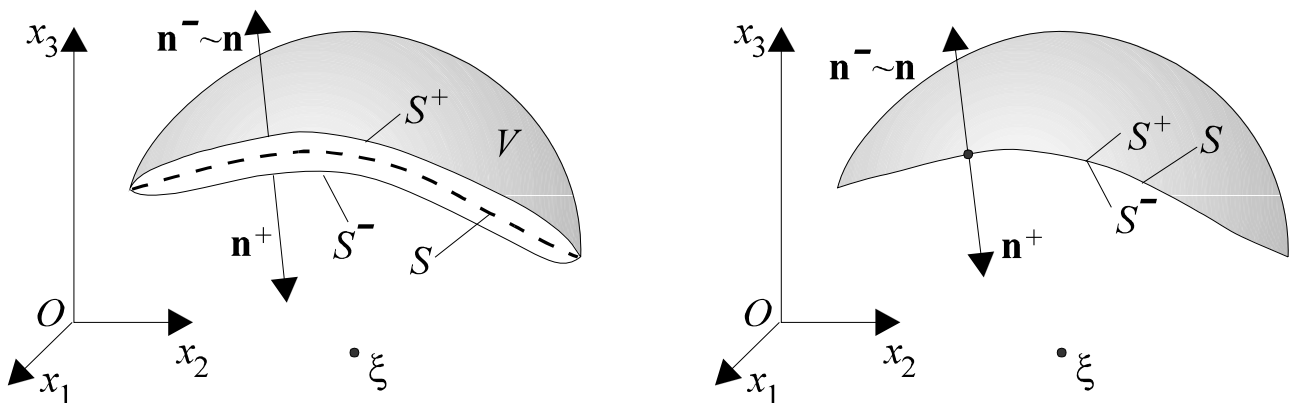


Рис. 1.1. Принцип спряження

Найчастіше у ролі цієї поверхні вибирають серединну поверхню тонкого тіла (еквідистантну щодо поверхонь  $S^+$ ,  $S^-$ ). Включення як геометричний об'єкт вилючається із розгля-



ду, а його вплив зводиться до формування у матриці певних функцій стрибка  $f_r$  деяких фізико-механічних полів (температури  $T$ , теплових потоків  $T_{,n} \equiv \partial T / \partial n$ , компонент вектора переміщень  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , вектора напружень  $\mathbf{t}_n = (t_{n_1}, t_{n_2}, t_{n_3})$  (у деяких випадках певних компонент тензора напружень  $\sigma_{ij}$ ) тощо під час проходження через серединну поверхню  $S$  (лінію  $L$ ) тонкостінної неоднорідності. Функції стрибка є загалом функціями координат поверхні  $S$  (лінії  $L$ ).

Вибір кількості та фізико-механічного змісту прийнятих до розгляду функцій стрибка повинен:

1. відповідати тим ефектам, які спричиняє присутність у розглянутому класі середовища того типу тонких неоднорідностей, які вивчаються;

2. забезпечити просте і однозначне визначення усіх прийнятих до розгляду фізико-механічних полів у довільній точці  $\xi$  середовища поза областю, зайнятою включенням:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \sigma_{ij}(\xi, f_r), \quad u_i(\xi) = u_i(\xi, f_r), \quad T(\xi) = T(\xi, f_r). \quad (1.1)$$

Функції (1.1) залежать не лише від функцій стрибка  $f_r$  але і від:

а) властивостей матеріалу (ізотропний, анізотропний, лінійно чи нелінійно пружний тощо) і значення його механічних, теплофізичних та інших характеристик;

б) геометрії задачі (конфігурації тіла, поверхні  $S$ );

в) зовнішнього навантаження.

**Зауваження.** Вплив від зовнішнього навантаження у вигляді функцій  $\sigma_{ij}^0(\xi)$ ,  $u_i^0(\xi)$ ,  $T^0(\xi)$  можна розрахувати заздалегідь для кожного типу матеріалу і геометрії тіла з неоднорідностями без огляду на існуючі у ньому дефекти та спричинені ними стрибки. Тобто розв'язок (1.1) можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij}(\xi) = \hat{\sigma}_{ij}(\xi, f_r) + \sigma_{ij}^0(\xi), \quad u_i(\xi) = \hat{u}_i(\xi, f_r) + u_i^0(\xi), \quad T(\xi) = \hat{T}(\xi, f_r) + T^0(\xi), \quad (1.1^1)$$

де дашком позначені відповідні (збурені) складові полів, отримані лише внаслідок впливу функцій стрибка, тобто за відсутності зовнішнього навантаження. ■

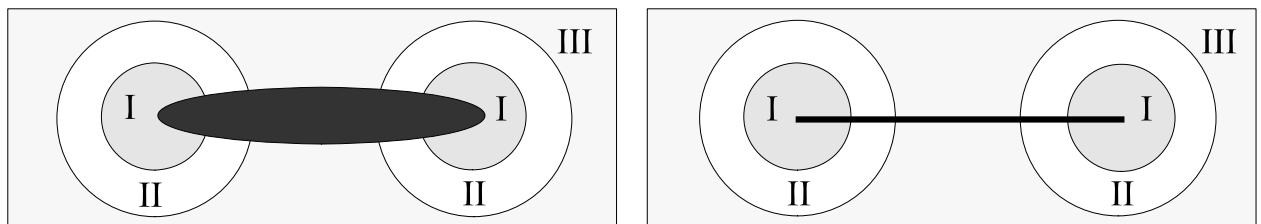


Рис. 1.2. Области внутрішнього асимптотичного розвинення (I – зона концентрації напружень), зовнішнього асимптотичного розвинення (III) і асимптотичного розв'язку (II – зона інтенсивності напружень) для тріщини на основі коефіцієнтів інтенсивності напружень

Важливо зазначити, що цей принцип, а отже і всі результати, які звідси випливають, тісно пов'язаний з асимптотичними підходами і методами, які застосовують у механіці. А саме з побудовою **зовнішнього асимптотичного розвинення**. Тобто розв'язку, який близький до точного на певній відстані від неоднорідності, передусім у віддаленні від його торців (область II+III на рис. 1.2). Чим ближче до краю неоднорідності, тим менш точне таке розвинення. Внутрішнє асимптотичне розвинення будується методами малого параметра у області I (зона концентрації напружень), близькій до торців, і воно повинно наближено (чим ближче – тим краще) відобразити вплив на розв'язок форми (профілю) торця. Чим далі від торця, тим такий розв'язок з огляду на асимптотичний характер є гіршим. У застосуванні до сере-

довища з реальною тонкою неоднорідністю асимптотичні методи великого параметра дають розв'язки для області III. Оскільки під час застосування класичних асимптотичних області I і III найчастіше не лише не перекриваються, але і не межують (розділені певною областю II – зона інтенсивності напружень), то для їх об'єднання за допомогою двобічної екстраполяції застосовують процедуру “зшивання” у області II. Зрозуміло, що межі областей I–III доволі умовні і змінюються у широких межах залежно від застосовуваних методів та кількості врахованих у асимптотичних розвиненнях членів, причому межа цих областей не є якоюсь канонічною кривою.

З цього погляду одержані за допомогою методу функцій стрибка висновки будуть справджуватися лише на деякій відстані від межі фаз, зокрема й від вістря включення, через що проблема необмеженості деформацій, напружень та інших величин безпосередньо біля краю неоднорідності, яку породжують одержані на основі принципу спряження розв'язки, фактично знімається.

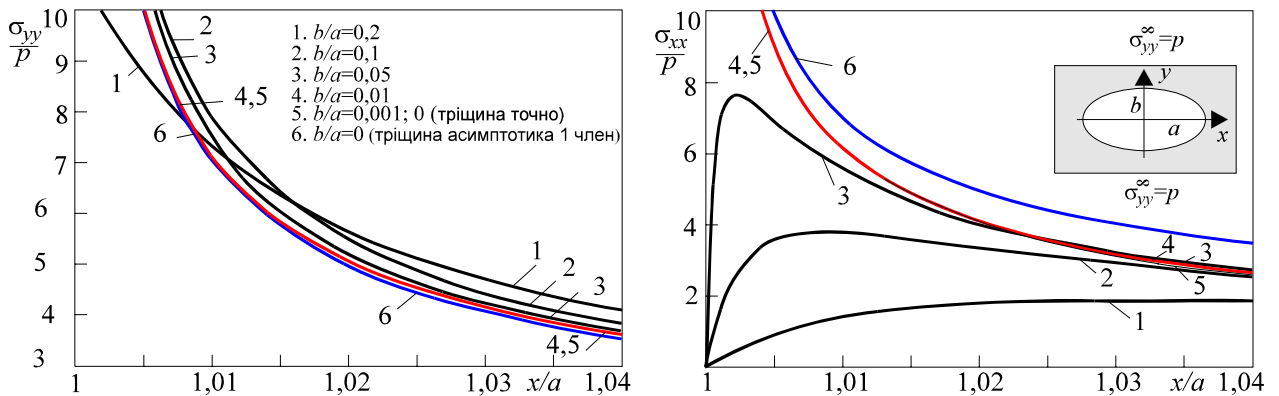


Рис. 1.3. Розподіл нормальних напружень на продовженні більшої осі еліптичного отвору в необмеженій пластині, навантаженій однорідним полем напружень  $\sigma_{yy}^{\infty} = p$

Підтверджує ці міркування рис. 1.3, де відображено зміну нормованих нормальних напружень  $\sigma_{yy}/p, \sigma_{xx}/p$  на продовженні більшої осі еліптичного отвору з півосями  $a, b$  у необмеженій пластині, навантаженій однорідним полем напружень  $\sigma_{yy}^{\infty} = p$  у напрямі меншої осі  $b$  (14.71) [112]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= p \left[ 1 - C + Cx(x^2 - a^2 + b^2)^{-1/2} + Bb^2x(x^2 - a^2 + b^2)^{-3/2} \right], \\ \sigma_{xx} &= p \left[ -A + Ax(x^2 - a^2 + b^2)^{-1/2} - Bb^2x(x^2 - a^2 + b^2)^{-3/2} \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$B = \frac{a}{a-b}, \quad A = B^2, \quad C = \frac{a(a-2b)}{(a-b)^2} \quad (x > a).$$

Криві 1–5 відповідають щораз більш сплющеним еліпсам (відповідно  $b/a = 0,2; 0,1; 0,05; 0,01; 0,001$ ). Помітно, що зі зменшенням  $b/a$  вони разом з віддаленням від краю отвору  $x = a$  щораз краще наближаються до точного розв'язку

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} 0 & (x \in [-a; a]), \\ p \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} & (x \notin [-a; a]); \end{cases} \quad \sigma_{xx} = \begin{cases} 0 & (x \in [-a; a]), \\ p \left( \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) & (x \notin [-a; a]) \end{cases} \quad (1.3)$$

для тріщини завдовжки  $2a$ . Однак, біля краю отвору завжди знайдеться певна область, де для довільного  $b/a$  різниця розв'язків (1.2) і (1.3) перевищуватиме довільно задане додатне число  $M$ . Легко зрозуміти це з того, що розв'язок (1.3) у точці  $x = a$  необмежений, а усі розв'язки (1.2) на самому краю отвору для  $b/a \neq 0$  є скінченними ( $\sigma_{xx}$  завжди дорівнює нулю).

Доволі часто у механіці руйнування використовують поняття коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) і, використовуючи перший (головний) член асимптотичного розв'язку (1.3) у околі точки  $x = a$ , вважають, що на продовженні вістря тріщини нормальні напруження

$$\sigma_{yy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + O(1), \quad \sigma_{xx} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + O(1) \quad (x > a). \quad (1.4)$$

Для розглянутого вище випадку тріщини завдовжки  $2a$  у полі однорідного розтягу  $\sigma_{yy}^\infty = p$  перпендикулярно до його осі КІН  $K_1 = p\sqrt{\pi a}$ . Відповідний розв'язок на рис. 1.3 зображений лінією 6. Оскільки його отримано на основі зовнішнього асимптотичного розв'язку (1.3), то він не може характеризувати вплив форми торця порожнистого дефекту і бути придатним дуже близько до його краю. А оскільки це є лише головний член асимптотики (хоча це все стосується також і інших багаточленних асимптотик), то далеко від дефекту ним теж користуватися не можна. Фактично це є **асимптотика проміжної зони II** (не дуже близько і не дуже далеко від краю дефекту).

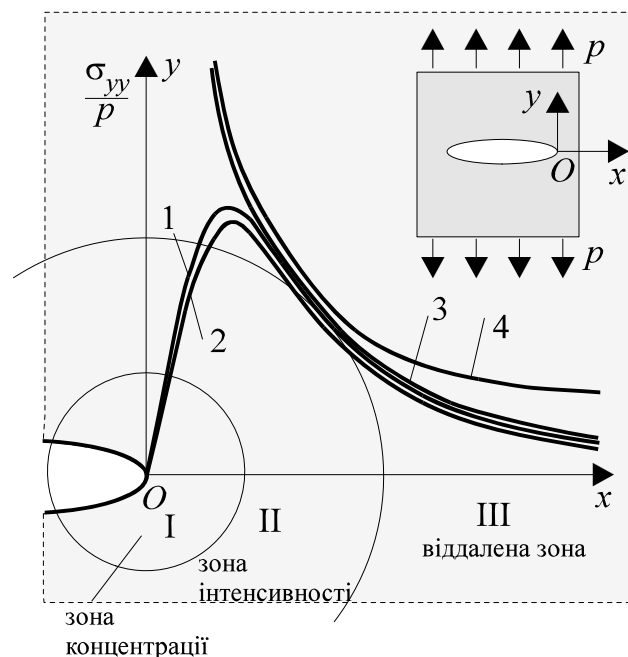


Рис. 1.4. Схематичний розподіл напружень біля видовженого отвору, отриманих різними методами

Тому вживане твердження про слушність асимптотик типу (1.4) у вістрі тріщини (дефекту) є неточним. Асимптотики такого типу придатні лише у кільцевій зоні, що охоплює вістря (фронт) неоднорідності. З урахуванням цього факту безпосередньо прилеглу до неоднорідності близьку область I можна називати областю **концентрації напружень**, II – областю **інтенсивності напружень** і III – **віддаленою зоною**. Поняття зон концентрації та інтенсивності напружень використано у праці [92], де пропонується радіус зони концентрації вважати на рівні половини радіуса кривини контуру включення у його вістрі.

Нерозуміння того, що розв'язок (1.4) придатний лише у зоні інтенсивності, спричиняє методологічні помилки у експериментальному обчисленні КІН. Оскільки не існує методів безпосереднього вимірювання КІН (хіба що, в певному сенсі, каустик), то вимірюють певні компоненти  $\sigma_{ij}$  тензора напружень (у радіальній чи декартовій системах координат) уздовж якогось променя, що виходить із вістря тріщини, будують криву їхньої залежності від радіальної координати, а потім якимось із апроксимаційних методів (наприклад, найменших квадратів) підбирають значення КІН, забезпечуючи умови узгодження з теоретичною кривою. Причому вважається, що чим ближче до вістря тріщини здійснені виміри, тим отриманий результат буде точнішим. Однак важливо пам'ятати, що виміри слід вести лише у зоні інтенсивності напружень, розмір якої слід попередньо оцінити (див. теж пп. 1.4, 1.5).

Для тріщини, яку моделюють у недеформованому стані тіла математичним розрізом і вістря якої є точкою звороту, побудова внутрішнього асимптотичного розвинення розбавлена сенсу, оскільки відстань між берегами первісної тріщини дорівнює нулю. У цьому випадку зовнішнє асимптотичне розвинення з математичного погляду збігається з внутрішнім і можна було би не розрізняти областей I і II. Однак із погляду механіки це все виглядає не так просто. Внаслідок того, що побудований розв'язок відповідної крайової задачі математичної фізики має численні недоліки (тут не задовольняються рівняння рівноваги середовища, порушуються категоричні вимоги загальної теорії – механіки суцільного середовища про симетрію тензора напружень, лінійної теорії пружності про малість кутів повертання тощо [111]), його взагалі не можна вважати коректним.

Граничний перехід у розв'язку задачі про еліптичний отвір з півосями  $a, b$ , коли менша піввісь  $a$  прямує до нуля, взагалі дає дещо інші асимптотичні вирази (формули Гріффітса [629, 111]) – напруження біля вістря тріщини є скінченними, оскільки хоча для них у певній точці  $O$  і спостерігається коренева особливість, але ця точка лежить поза межами області, зайнятої тілом (всередині еліптичного отвору). Формально переходячи у них до границі при  $b/a \rightarrow 0$  та приймаючи тотожність кутів двох полярних систем координат ( $\gamma = \theta$ ) можна отримати класичні асимптотичні розвинення Снеддона, зокрема й (1.4). Однак при цьому слід зазначити, що, з іншого боку, такий граничний перехід еквівалентний нехтуванню у формулах Гріффітса членами, що містять  $b^2/a^2$  порівняно з  $r/a$  або  $b^2/a$  з  $r$ . Інакше кажучи, цей перехід, а отже, й формули Снеддона, виконуються для значень  $r \gg r_0 \equiv b^2/a$ , тобто для такої відстані  $r$  від згаданої точки  $O$  (для дуже тонкого еліпса практично від кінчика тріщини), яка більша від радіуса кривини еліпса у цій точці ( $\tilde{\rho} \equiv b^2/a$ ). Якщо  $b$  прямує до нуля, точка  $O$  наближається до вістря тріщини і у границі збігається з нею, породжуючи кореневу особливість у вістрі тріщини в разі її моделювання математичним розрізом.

Асимптотичні формули Снеддона завдяки своїй простоті здобули широке визнання і застосування. Однак вони не позбавлені деяких недоліків. По-перше, напруження згідно з ними при  $r \rightarrow 0$  прямують до нескінченності. По-друге, відповідно до згаданого вище зіставлення їх із формулами Гріффітса, впливає, що у безпосередній близькості від вістря ними так чи інакше не можна користуватися. По-третє, формули Снеддона не визначають у вістрі тріщини сукупності двох взаємно перпендикулярних головних напрямів. По-четверте, граничні значення напружень на площинках, що проходять через вістря тріщини, залежать від шляху прямування до цих площинок.

Думка про те, що асимптотичні співвідношення для тріщини можна застосовувати лише у деякому кільці, що охоплює вістря тріщини не раз вже висловлювалася у науковій літературі (див. напр. [64, 111]). З погляду механіки неможливість їх застосування біля вістря тріщини обумовлена тим, що застосування рівнянь механіки суцільного середовища до матеріалу, який має атомну будову, в області, де внаслідок високої концентрації напружень та високих градієнтів їх зміни деформування, у тому числі й пластичне, визначається міжатом-

ною взаємодією, не є цілком коректним. Практичний досвід свідчить, що ці області некоректності є доволі малі і не впливають на загальний енергетичний баланс [1378] та перерозподіл полів напружень у дещо віддалених від вістря точках тіла. Зацитуємо думку, висловлену на с. 73 праці [64]: “Загальність і переваги методів лінійної механіки руйнування полягає саме у тому, що, відкидаючи надмірну деталізацію механізмів фізичної взаємодії у вістрі макроскопічної тріщини і не уточнюючи її форму у кінцевій частині, доповнюючи модель пружного тіла деякою новою інтегральною характеристикою – опором матеріалу розвитку у тілі тріщин (ефективною енергією, необхідною для утворення нових поверхонь) вдалося отримати низку нових результатів під час вивчення властивостей міцності деформівних твердих тіл.”

У вищезгаданій праці також зазначається, що асимптотичними виразами можна користуватися і для включень із заокругленими вістрями радіусом кривини починаючи із відстані  $\rho/4$ , а закінчуючи  $a/20$ , де  $a$  – півдовжина лінійної неоднорідності.

Таким чином різні методи мають свої переваги та обмеження. Точні аналітичні та прямі числові методи (криві 1 і 2 на рис. 1.4 [1441, 1440]) можуть дати можливість побудувати розв’язок з урахуванням реальної товщини дефекту та його форми, зокрема й торця, у всьому тілі (зони I, II, III). Безпосередні асимптотичні методи малого і великого параметра дають розв’язки лише у зонах I і III відповідно. У зоні II їх “зшивають”. Методи, засновані на принципі спряження, можуть дати розв’язки, придатні лише для зон II і III (лінія 3), а отримані з них асимптотики – у більш чи менш широкій області II (лінія 4). Для того, щоб оцінити розмір зони інтенсивності напружень для певного класу задач слід для якоїсь тестової задачі з цього класу якимось одним або з поєднанням декількох різних із вищезгаданих типів методів побудувати придатний для зон I–III розв’язок та зіставити його із асимптотичним типу (1.4) для виявлення спільної області, де вони усі дають достатню точність.

Хоча застосування прямих числових методів до дослідження деформування тонких тіл і пов’язане із певними труднощами, однак застосування їх до визначення напружено-деформованого стану тіл з тонкими включеннями має перспективи [1441, 1440, 294, 512, 513, 514, 1440, 294, 512–514, 982, 1007].

## 1.2. Математична модель тонкого дефекту та умови взаємодії включення з середовищем

Якби усі функції стрибка, чи частина з них були відомими, то згідно з (1) відповідну задачу про вплив неоднорідностей на поле напружень, температур тощо можна було би вважати розв’язаною повністю чи частково. У низці задач (розклинювання матеріалу, розподілені з відомими густинами  $\rho_i$  уздовж певних поверхонь  $S$  всередині тіла дислокації, зосереджені сили, теплові джерела) усі або частина функцій стрибка відомі, оскільки певні стрибки дорівнювали би цим густинам.

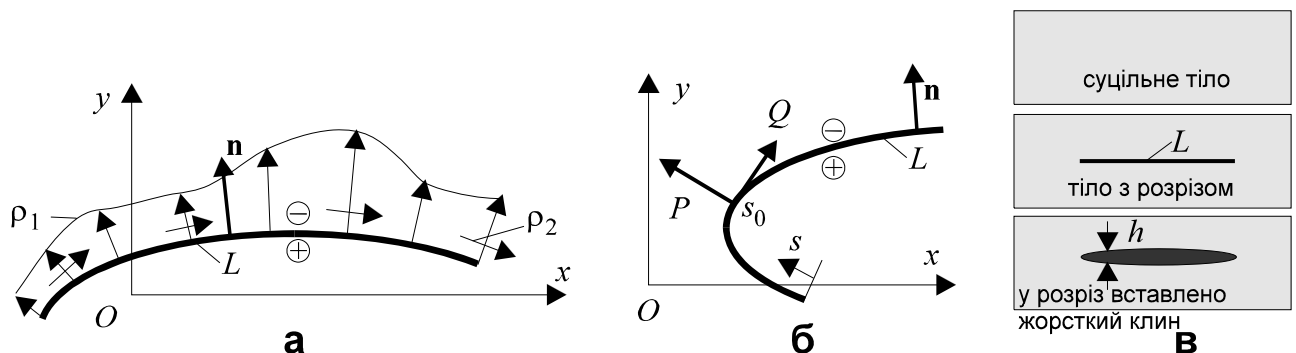


Рис. 1.5. Приклади відомих функцій стрибка: лінія розподілу напружень (а); точка прикладання сил (б); розклинювання (в)

**Приклад 1.** Якщо уздовж поверхні  $S$  (лінії  $L$ ) розподілені з густинами  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  ( $\rho_1, \rho_2$ ) нормальні і дотичні напруження (рис. 1.5 а), то на цій поверхні стрибок вектора напружень  $\mathbf{t}_n$  характеризується трьома функціями стрибка  $f_1 = \rho_1, f_2 = \rho_2, f_3 = \rho_3$ . ■

**Приклад 2.** Якщо у певній точці поверхні  $S$  (точці з дуговою координатою  $s_0$  лінії  $L$ ) прикладені у нормальному і дотичному напрямках до поверхні (лінії) зосереджені сили  $P_1, P_2, P_3$  ( $P_1, P_2$ ), то на цій поверхні стрибок вектора напружень  $\mathbf{t}_n$  пропорційний відповідній поверхневій чи лінійній дельта-функції. Скажімо для випадку лінії (рис. 1.5 б) – двома функціями стрибка пропорційними класичній лінійній дельта-функції  $f_1 = P_1\delta(s-s_0), f_2 = P_2\delta(s-s_0)$ . ■

**Приклад 3.** Якщо уздовж якоїсь поверхні  $S$  зроблено розріз і вставлене якесь стороннє жорстке тіло, яке має змінну товщину  $2h$ , то стрибок нормальної до поверхні  $S$  складової вектора переміщення дорівнюватиме  $f_4 = 2h$ . У двовимірному випадку відповідна схема зображена на рис. 1.5 в. ■

Однак у більшості випадків функції стрибка невідомі. Тоді для визначення задалегідь невідомих функцій стрибка слід використати умови взаємодії тонкого включення із зовнішнім середовищем. Процес побудови цих умов є двоетапним.

В основу **першого етапу** покладено можливість побудови для включень малої товщини певної залежності

$$F_j(T_B^\pm, T_{B,n}^\pm, \mathbf{t}_{nB}^\pm, \mathbf{u}_B^\pm) = 0 \quad (1.5)$$

між температурою  $T_B(\xi_0 \pm h) \equiv T_B^\pm$ , тепловим потоком  $T_{B,n}(\xi_0 \pm h) \equiv T_{B,n}^\pm$  через поверхню поділу, векторами зміщень  $\mathbf{u}_B(\xi_0 \pm h) \equiv \mathbf{u}_B^\pm$  та напружень  $\mathbf{t}_{nB}(\xi_0 \pm h) \equiv \mathbf{t}_{nB}^\pm$  на верхньому (+) та нижньому (-) його берегах (рис. 1.6).

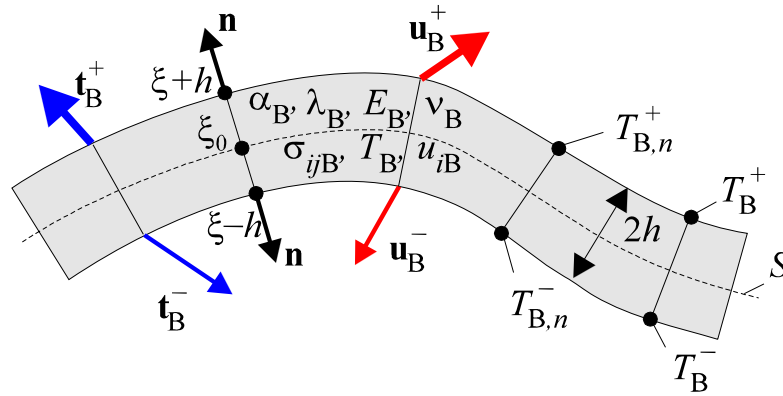


Рис. 1.6. Виокремлене тонке тіло (включення) з навантаженими берегами

Рівняння цього зв'язку, що можуть бути більш чи менш складними і відображати різний ступінь адекватності механічній та теплофізичній природі неоднорідності, формують **математичну модель включення**. Кількість цих рівнянь повинна відповідати кількості введених у розгляд принципом спряження невідомих функцій стрибка. У найбільш загальному тривимірному випадку термопружної задачі їх має бути вісім – три для трьох стрибків компонент вектора напружень, три для стрибків складових переміщень, дві для стрибків температури та її потоку (нормальної похідної).

Наприклад, для суто пружної просторової задачі для тонкого включення у вигляді порожнини математична модель така:  $\mathbf{t}_{nB}^\pm = 0$ ;

для тонкого **абсолютно жорсткого** закріпленого у просторі включення –  $\mathbf{u}_B^\pm$ ;  
 для тонкого включення у вигляді заповненої **нестисливою рідиною** порожнини –  
 $\sigma_{nmB}^+ = \sigma_{nmB}^-, \sigma_{n\tau_1B}^+ = 0, \sigma_{n\tau_1B}^- = 0, \sigma_{n\tau_2B}^+ = 0, \sigma_{n\tau_2B}^- = 0, \Delta V \equiv \int_S (u_{nB}^+ - u_{nB}^-) dS = 0$ .

На другому етапі спочатку у рівняннях математичної моделі (1.5) використовують умови контакту включення з матрицею – неідеального чи ідеального

$$T_B^\pm = T(\xi_0 \pm h), T_{B,n}^\pm = T_{,n}(\xi_0 \pm h), \mathbf{t}_{nB}^\pm = \mathbf{t}_n(\xi_0 \pm h), \mathbf{u}_B^\pm = \mathbf{u}(\xi_0 \pm h). \quad (1.6)$$

Скажімо, у випадку ідеального контакту їх записують у вигляді

$$F_j(T(\xi_0 \pm h), T_{,n}(\xi_0 \pm h), \mathbf{t}_n(\xi_0 \pm h), \mathbf{u}(\xi_0 \pm h)) = 0. \quad (1.5^1)$$

Потім здійснюється знесення відповідних величин фізико-механічних полів у матриці з реальної межі контакту з включенням  $\xi = \xi_0 \pm h$  ( $\xi_0 \in S$ ) на моделюючу поверхню стрибка  $S$  (переважно серединну поверхню включення)

$$T(\xi_0 \pm h) \approx T^\pm, T_{,n}(\xi_0 \pm h) \approx T_{,n}^\pm, \mathbf{t}_n(\xi_0 \pm h) \approx \mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}(\xi_0 \pm h) \approx \mathbf{u}^\pm. \quad (1.7)$$

Це дає можливість записати математичну модель включення (1.5) з використанням граничних значень фізико-механічних полів  $T^\pm, T_{,n}^\pm, \mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}^\pm$  матриці на межі фаз

$$\Psi_j(T^\pm, T_{,n}^\pm, \mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad t_{ni}^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j. \quad (1.8)$$

Якщо виконуються умови ідеального контакту включення з матрицею, то функції  $\Psi_j$  збігаються з  $F_j$ . Серед параметрів функцій  $\Psi_j$  найчастіше є товщина включення та його фізико-механічні характеристики.

Зокрема, якщо  $S = S_u \cup S_\sigma$  і уздовж  $S_u$  впроваджена з натягом  $g_i^\pm$  **абсолютно жорстка плівка**, а  $S_\sigma$  є **розрізом** із заданими на його берегах зусиллями  $f_i^\pm$ , то умови (1.8) набудуть конкретного вигляду (загалом усі 6 функцій стрибка)

$$u_i^\pm = g_i^\pm \text{ на } S_u, \quad t_{ni}^\pm = f_i^\pm \text{ на } S_\sigma \quad (i=1,2,3). \quad (1.8^1)$$

Якщо навантаження берегів тріщин та величини натягів симетричні, або взагалі дорівнюють нулю, то на кожній із поверхонь  $S_u$  та  $S_\sigma$  три з функцій стрибка дорівнюють нулю, бо умови мають вигляд

$$u_i^\pm = g_i(0) \text{ на } S_u, \quad t_{ni}^\pm = f_i(0) \text{ на } S_\sigma \quad (i=1,2,3). \quad (1.8^2)$$

Для **гнучкого нерозтяжливого включення**, розташованого у площині  $x_3 = 0$ , вони запишуться (фактично дві ненульові функції стрибка дотичних напружень)

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-, u_3^+ = u_3^-, u_1^+ = u_1^- = u_2^+ = u_2^- = 0. \quad (1.8^3)$$

Для **смуги пластичності Дагдейла** чи **зчеплення Леонова – Панасюка** уздовж осі  $Ox$  площини  $xOy$  плоскої та антиплоскої задач (дві та одна ненульові функції стрибка відповідно)

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = \sigma_y \sim \sigma_0, \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0 \quad (1.8^4)$$

$$\left( \sigma_{yy}^+ - \sigma_{yy}^- = 0, \quad \sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_y \sim \sigma_0, \quad \sigma_{xy}^+ = 0 \right);$$

$$\sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^- = k \left( \sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^- = 0, \quad \sigma_{yz}^+ = k \right). \quad (1.8^5)$$

Якщо вважати у цих умовах відповідно

$$\sigma_y \sim \sigma_0 = 0, \quad k = 0,$$

то звідси будуть отримані відповідні умови для **тріщин з вільними від навантаження берегами**.

Однією з найпростіших можна також вважати **вінклерову модель** Г.П.Черепанова [1079], В.В.Панасюка, В.П.Силованюка, М.М.Стадника [695, 710] розташованого у площині  $x_3 = 0$  пружного включення завтовшки  $2h(x_1, x_2)$  з модулями пружності  $E$  та зсуву  $G$ , для якого існує лише **одна функція стрибка** нормальних складових вектора пружних переміщень

$$\sigma_{i3}^{\pm} = \lambda_i (u_i^+ - u_i^-), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{G}{2h}, \quad \lambda_3 = \frac{E}{2h}. \quad (1.8^6)$$

Отримані у такий спосіб умови взаємодії (1.8) є, за своєю сутністю, **умовами неідеального контакту** між собою поверхонь матриці, що безпосередньо прилягають до чужорідного прошарку. Включення усунуте з розгляду, а ефект його дії зводиться до неідеального (механічного, температурного тощо) контакту вздовж поверхні  $S$  матеріального континууму матриці.

### 1.3. Поєднання принципу спряження та умов взаємодії у системі сингулярних інтегральних рівнянь

Якщо визначити з формул (1.1) граничні значення фізико-механічних полів у матриці на межі поверхонь стрибків

$$\sigma_{ij}^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in S^{\pm}} \sigma_{ij}(\xi, f_r), \quad u_i^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in S^{\pm}} u_i(\xi, f_r),$$

$$T^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in S^{\pm}} T(\xi, f_r), \quad T_{,n}^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 \in S^{\pm}} T_{,n}(\xi, f_r)$$

та підставити їх в умови взаємодії (1.8), то буде отримана система інтегральних рівнянь (СІР) для визначення функцій стрибка

$$\Phi_j(f_r) = 0. \quad (1.9)$$

Кількість рівнянь відповідає кількості функцій стрибка.

Розв'язок цієї системи на основі принципу спряження (1.1) визначає фізико-механічні поля у довільній точці  $\xi$  матриці. Використання умов контакту та математичної моделі включення (1.5) дає можливість на основі вже відомих функцій  $\sigma_{ij}^{\pm}$ ,  $u_i^{\pm}$ ,  $T^{\pm}$ ,  $T_{,n}^{\pm}$  обчислити фізико-механічні поля всередині неоднорідності.

Дуже важливо, що принцип спряження та умови взаємодії можуть вивчатися цілком **незалежно**. Принцип спряження (як свого роду **зовнішня** щодо включення задача) застосовується без огляду на конкретні фізико-механічні властивості включення і визначається виключно геометричними та фізико-механічними властивостями матриці, геометрією включень та зовнішнім навантаженням. Тобто, якщо

1. для заданого типу матриці та геометрії включень побудувати співвідношення (1.1) для збуреної складової (без урахування функцій стрибка);

2. для заданого типу матриці обчислити вплив зовнішнього навантаження

$$\sigma_{ij}^0(\xi), \quad u_i^0(\xi), \quad T^0(\xi),$$

то вирази (1.1) чи (1.1<sup>1</sup>) можна застосовувати до довільних умов взаємодії типу (1.8), побудованих чи для тріщин, чи для жорстких прошарків, чи для різних моделей пружного, пружно-пластичного, рідкого та іншого реологічного типу тонкого включення. Важливо лише, щоб у отриманих виразах були враховані належні функції стрибка.



З другого боку, під час побудови умов взаємодії (**внутрішня** задача) тип матриці і її навантаження не відіграє жодного значення – це просто деяке абстрактне суцільне середовище. До умов взаємодії необхідно ставити лише три основні вимоги:

1. їхня кількість повинна дорівнювати кількості функцій стрибка;
2. вони повинні бути достатньо простими, щоб отримані на їхній основі системи інтегральних рівнянь (1.9) вдалося розв'язати;
3. вони повинні мати достатній рівень адекватності, відображаючи істотні для дослідника особливості деформування включення.

#### **1.4. Деякі властивості асимптотичного розподілу напружень в околі вістря тріщини**

У цьому, побудованому на матеріалах праць [2\*, 104] і монографії [103], і наступному пунктах з використанням методів фотопружного вимірювання поля напружень в околі вістря тріщини розглянуто деякі особливості виділення зони інтенсивності напружень для дослідної оцінки значення КІН, про що вже йшлося вище у п. 1.1. Застосування експериментальних методів до визначення напружено-деформованого стану тіл з пружними неоднорідностями та порожнинами, зокрема із включеннями, має надзвичайно велике значення для верифікації теоретичних розрахунків, аналізу механізмів руйнування та оперативного одержання вірогідної інформації для інженерних розрахунків у тих випадках, коли аналітичне та числове розв'язування відповідних задач механіки деформівного твердого тіла неможливе або надто складне чи тривале. Досить часто експеримент дає єдину можливість отримання необхідних розрахункових даних. Незважаючи на велику увагу дослідників до цього питання [6\*, 206, 454] та ін., застосовувані методики все ж виявляються недостатньо точними через відсутність обґрунтованого вибору точок вимірювання, а також через надто малу точність використовуваних класичних одночленних асимптотичних розвинень біля вістря тріщини.

Цей і наступний підпункти стосується проблематики застосування методу фотопружності до експериментального визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН)  $K_1, K_2$  у задачах теорії тріщин. Для читачів, які недостатньо обізнані з методами фотопружності, можна порекомендувати за додатковою інформацією щодо методу фотопружності звернутися до книг [1\*, 5\*, 12\*, 20\*] та іншої доволі численної літератури.

Тут дамо лише означення деяких основних понять. Під час пересвітлювання плоскої моделі з оптично активного матеріалу плоскополяризованим світлом  $E = E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt$  ( $E_0$  – інтенсивність хвилі;  $\lambda$  – її довжина) його інтенсивність на виході, що є пропорційною до квадрата амплітуди, визначається виразом

$$J = kE_0^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Phi}{2}, \quad (1.10)$$

де  $\alpha$  – напрям осі поляризації; різниця фаз  $\Phi$  променя на вході та на виході з пластини визначається законом Вертгейма через значення головних напружень  $\sigma_1, \sigma_2$ , оптичну сталу матеріалу  $c$  та товщину пластини  $d$ :

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} cd(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (1.11)$$

У плоскій задачі теорії пружності між головними напруженнями  $\sigma_1, \sigma_2$  і компонентами  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  тензора напруження, віднесеними до обраної системи координат  $xOy$  (рис. 1.7), існує зв'язок:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\beta, \quad (1.12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\beta, \quad \sigma_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta;$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \tau_{\max}, \quad \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}; \quad (1.13)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}. \quad (1.14)$$

Там, де інтенсивність світла (1.10) дорівнює нулю, спостерігаються затемнені області. Темні лінії, які спостерігаються під час пересвітлювання моделі з оптично активного матеріалу плоскополяризованим світлом і які викликані збігом головних осей діелектричного тензора з напрямками площини поляризації ( $\alpha = \pi k / 2$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ )), називають оптичними ізоклінами. За пружного деформування моделі, якій до навантажування була властива оптична ізотропія, оптичні ізокліни збігаються з геометричним місцем точок, у яких напрями головних напружень є колінеарними. Кут  $\beta$ , що визначає орієнтацію осей головних напружень, називається у фотопружності параметром ізокліни.

Інші темні лінії на моделі, які спричинені значенням різниці фаз  $\Phi = 2\pi n$ , під час використання монохроматичного світла називають смугами, під час застосування білого світла – ізохромами. Величину  $n$  називають порядком смуги. Якщо поляризатор і синхронізатор синхронно повертати, зберігаючи між їхніми осями пропускання прямий кут, то смуги (ізохрони) залишатимуться без жодної зміни, а ізокліни переміщатимуться полем зображення.

Ізостатами називають лінії, дотичні та перпендикулярні до яких вказують напрями головних напружень. Фактично це повернуті на кут  $45^\circ$  траєкторії максимальних дотичних напружень.

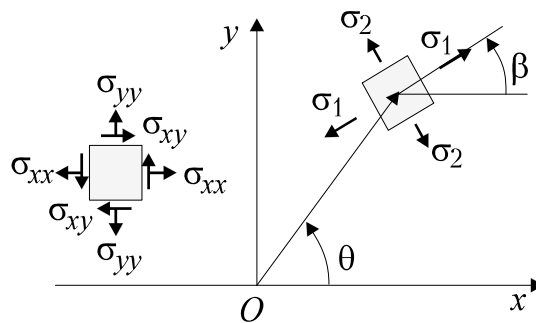


Рис. 1.7. Схема виділення головних напрямів тензора напружень в околі вістря тріщини

Нижче і в п. 1.5 основна увага буде зосереджена на числовому моделюванні процесу фотопружного дослідження на основі аналізу відомих точних розв'язків задач. Це зумовлене тим, що опрацювання нових методик експериментального визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) можна надійно підтвердити лише таким чином. Адже на точність прямого дослідного визначення КІН впливають дуже багато чинників: використана апаратура, якість виготовлення моделі, рівень культури експериментування, зрештою й суб'єктивне намагання дослідника отримати якомога точніший результат. Тому пряме зіставлення точності експериментально отриманих різними авторами даних далеко не завжди може об'єктивно свідчити про міру надійності й точності порівнюваних методик.

За цих обставин лише числове моделювання фотопружних досліджень позбавляє усіх згаданих недоліків і лише воно може відіграти роль безстороннього арбітра.

Асимптотичні залежності поведінки напружень біля вістря пружного включення чи порожнини, зокрема й тріщини, можна використовувати лише у певному, досить тонкому умовному за формою кільці (зоні інтенсивності), яке його охоплює (рис. 1.8, а). Тобто, ними не можна користуватися ні далеко від вістря неоднорідності, ні дуже близько до нього. Тому для застосування експериментальних методів фотопружності та каустик необхідно мати додаткові критеріальні співвідношення, які би дали змогу під час вимірювань гарантувати не лише оптимальне, й просто правильне визначення області, у якій вони здійснюються.

З відомого класичного розподілу напружень в околі вістря тріщини [693, 694, 111]

$$\begin{cases} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{K_1}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \end{cases} + \frac{K_2}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ -7 \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \end{cases} + O(1), \quad \theta_n = \frac{n\theta}{2} \quad (1.15)$$

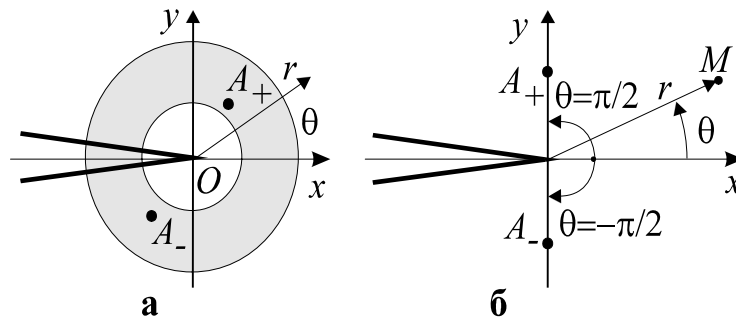


Рис. 1.8. Зона інтенсивності напружень у вістрі тріщини і напрями підходу до вістря під час вимірювання

впливає, що у локальній полярній системі координат  $(r, \theta)$  (рис. 1.8 б) виконуються наближені залежності

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2\pi r} [\sigma_{yy}(r, \theta) - \sigma_{xx}(r, \theta)] &= K_1 (\cos \theta_1 - \cos \theta_5) + K_2 (3 \sin \theta_1 + \sin \theta_5), \\ 4\sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}(r, \theta) &= K_1 (-\sin \theta_1 + \sin \theta_5) + K_2 (3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Це дає змогу вказати, що

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(r, \theta) - \sigma_{xx}(r, \theta) &= 2\sigma_{xy}(r, \theta - \pi), \\ \sigma_{yy}(r, \theta - \pi) - \sigma_{xx}(r, \theta - \pi) &= -2\sigma_{xy}(r, \theta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Параметр  $\beta = \beta_+$  ізокліни (кут орієнтації площинок головних напружень  $\sigma_1, \sigma_2$ ) у якійсь певною мірою довільній точці  $A_+$  в тій області, де справджуються асимптотики, визначають залежністю

$$\operatorname{tg} 2\beta_+ = \frac{2\sigma_{xy}(r, \theta)}{\sigma_{yy}(r, \theta) - \sigma_{xx}(r, \theta)}, \quad (1.18)$$

а в точці  $A_-$ , центрально симетричній до точки  $A_+$  стосовно вістря тріщини параметр  $\beta = \beta_-$  ізокліни дає подібний вираз:

$$\operatorname{tg} 2\beta_- = \frac{2\sigma_{xy}(r, \theta - \pi)}{\sigma_{yy}(r, \theta - \pi) - \sigma_{xx}(r, \theta - \pi)}. \quad (1.19)$$

З урахуванням (1.17) з (1.18), (1.19) випливає, що

$$\operatorname{tg} 2\beta_+ = \frac{\sigma_{xy}(r, \theta)}{\sigma_{xy}(r, \theta - \pi)} = -\operatorname{ctg} 2\beta_- = \operatorname{tg} \left( 2\beta_- + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.20)$$

і тому

$$\beta_+ - \beta_- = \frac{\pi}{4}. \quad (1.21)$$

Якщо підставити у вирази (1.16) значення  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = -\pi/2$  (рис. 1.8 б), то матимемо

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi r} [\sigma_{yy}(r, \pi/2) - \sigma_{xx}(r, \pi/2)] &= K_1 + K_2, \\ 4\sqrt{\pi r} \sigma_{xy}(r, \pi/2) &= -K_1 + K_2, \\ 2\sqrt{\pi r} [\sigma_{yy}(r, -\pi/2) - \sigma_{xx}(r, -\pi/2)] &= K_1 - K_2, \\ 4\sqrt{\pi r} \sigma_{xy}(r, -\pi/2) &= K_1 + K_2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Тепер з використанням (1.18) при значенні  $\theta = \pi/2$  та перших двох з виразів (1.22) матимемо

$$\operatorname{ctg} \left( 2\beta_+ + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg}(2\beta_+)}{1 + \operatorname{tg}(2\beta_+)} = \frac{\sigma_{xx}(r, \pi/2) - \sigma_{yy}(r, \pi/2) - 2\sigma_{xy}(r, \pi/2)}{\sigma_{xx}(r, \pi/2) - \sigma_{yy}(r, \pi/2) + 2\sigma_{xy}(r, \pi/2)} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Аналогічно з урахуванням двох останніх виразів (1.22)

$$\operatorname{tg} \left( 2\beta_- + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(2\beta_-)}{1 - \operatorname{tg}(2\beta_-)} = \frac{\sigma_{xx}(r, -\pi/2) - \sigma_{yy}(r, -\pi/2) + 2\sigma_{xy}(r, -\pi/2)}{\sigma_{xx}(r, -\pi/2) - \sigma_{yy}(r, -\pi/2) - 2\sigma_{xy}(r, -\pi/2)} = -\frac{K_2}{K_1}.$$

Таким чином, остаточно, для напрямів, перпендикулярних у вістрі тріщини до її осі ( $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = -\pi/2$ ), виконується наближена рівність

$$\frac{K_1}{K_2} = \operatorname{ctg} \left( 2\beta_+ + \frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{tg} \left( 2\beta_- + \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.23)$$

Одержана залежність (1.23) між відношенням коефіцієнтів інтенсивності напружень та параметром ізокліни дає змогу істотно спростити методики дослідження задач теорії тріщин і механіки руйнування методом фотопружності. За допомогою властивості (1.21) можна перевіряти правильність вимірювання параметрів ізоклін у симетричних стосовно вістря тріщини напрямках та визначати таким чином область (зону інтенсивності), де такі вимірювання можна і доцільно здійснювати. Зрозуміло, що в зоні, де згадана властивість порушується, асимптотичні формули застосовувати не можна і, як наслідок, визначення на їхній основі КІН позбавлене сенсу.

### 1.5. Асимптотичні властивості напружено-деформованого стану в околі технологічних тріщин у фотопружних вимірюваннях [104]

Точність експериментального визначення КІН істотно залежить не лише від якості виконаної моделі, використаної апаратури та докладності проведення дослідів, й від вихідних припущень про зв'язок шуканих та вимірюваних параметрів. Саме тому покладання в основу дослідного визначення КІН асимптотичних залежностей вищого порядку, можливо, сприятиме підвищенню надійності їх визначення. Для підтвердження цієї тези і поглиблення викладених у п. 1.4 результатів використаємо розв'язок Вільямса [34\*] для тріщини нормального відриву, записавши його у вигляді [103]

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\sigma_{yy}^0} &= \tilde{K}_1 \left(\frac{r}{2a}\right)^{-1/2} \sin \theta \left\{ \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} - \frac{3}{8} \left(\frac{r}{2a}\right) \sin \frac{\theta}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{2a}\right)^{n+1} \frac{(2n+3)!!}{2^{n+3} (n+1)!} \sin \frac{(2n-1)\theta}{2} \right\}, \\
\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}^0} &= \tilde{K}_1 \left(\frac{r}{2a}\right)^{-1/2} \sin \theta \left\{ \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{3}{8} \left(\frac{r}{2a}\right) \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{r}{2a}\right)^{n+1} \frac{(2n+3)!!}{2^{n+3} (n+1)!} \cos \frac{(2n-1)\theta}{2} \right\},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

де  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}^0$  – компоненти тензора напружень та номінальні напруження в околі вістря тріщини;  $2a$  – довжина тріщини;  $r$ ,  $\theta$  – полярні координати з полюсом у вістрі тріщини;  $\tilde{K}_1 = K_1 / \left[ \sqrt{\pi a} \sigma_{yy}^0 \right]$  – шукане безрозмірне (зведене) значення КІН, яке залежить від навантаження та геометрії пластини з тріщиною.

Розглянемо деяку точку  $A_- (r, \theta - \pi)$ , центрально симетричну стосовно вістря тріщини до основної точки  $A_+ (r, \theta)$  (див. рис. 1.8 а). Виходячи із залежностей (1.24), неважко отримати такі співвідношення

$$\begin{aligned}
2 \left(\frac{r}{2a}\right)^{1/2} \left\{ \frac{\sigma_{xy}(r, \theta - \pi) + \sigma_{yy}(r, \theta) - \sigma_{xx}(r, \theta)}{\sigma_{yy}^0(r, \theta - \pi)} + \frac{\sigma_{yy}(r, \theta) - \sigma_{xx}(r, \theta)}{2\sigma_{yy}^0(r, \theta)} \right\} &= \\
= \tilde{K}_1 \sin \theta \left\{ \sin \frac{3\theta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a}\right)^{2n} \frac{(4n+1)!!}{2^{2n+2} (n)!} \sin \frac{(4n-3)\theta}{2} \right\}, \\
2 \left(\frac{r}{2a}\right)^{1/2} \left\{ \frac{\sigma_{xy}(r, \theta) - \sigma_{yy}(r, \theta - \pi) - \sigma_{xx}(r, \theta - \pi)}{\sigma_{yy}^0(r, \theta)} - \frac{\sigma_{yy}(r, \theta - \pi) - \sigma_{xx}(r, \theta - \pi)}{2\sigma_{yy}^0(r, \theta - \pi)} \right\} &= \\
= \tilde{K}_1 \sin \theta \left\{ \sin \frac{3\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2a}\right)^{2n} \frac{(4n+1)!!}{2^{2n+2} (n)!} \cos \frac{(4n-3)\theta}{2} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Використовуючи поляризаційно-оптичні вимірювання відносної різниці ходу  $\delta_+$ ,  $\delta_-$ ,  $\delta^0$  та параметрів ізоклін  $\beta_+$ ,  $\beta_-$  у точках  $A_+$ ,  $A_-$  околу вістря тріщини та від номінальних напружень відповідно, з рівнянь (1.25) отримаємо необхідні для визначення  $\tilde{K}_1$  залежності

$$2\sqrt{\frac{r}{2a}} \left\{ \frac{\delta_-}{\delta^0} \sin 2\beta_- + \frac{\delta_+}{\delta^0} \cos 2\beta_+ \right\} = \tilde{K}_1 \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} + O\left(\left(\frac{r}{2a}\right)^2\right); \tag{1.26}$$

$$2\sqrt{\frac{r}{2a}} \left\{ \frac{\delta_+}{\delta^0} \sin 2\beta_+ - \frac{\delta_-}{\delta^0} \cos 2\beta_- \right\} = \tilde{K}_1 \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} + O\left(\left(\frac{r}{2a}\right)^2\right). \tag{1.27}$$

Вартісність цих виразів полягає у тому, що вони фактично враховують лінійні від  $r$  члени, проте безпосередньо їх не містять. Тому, якщо традиційні асимптотичні вирази точності порядку  $o(r/2a)$  справджуються лише на дуже малій відстані від вістря тріщини, то використання для визначення КІН залежностей (1.26) чи (1.27), які вже мають на порядок

вищу точність  $o\left((r/2a)^2\right)$ , звільнює експериментатора від необхідності дуже докладного виготовлення моделі для проведення вимірів якомога ближче до вістря тріщини. Це дає змогу без втрати точності отримуваних результатів здійснювати вимірювання на таких відстанях від вістря, що навіть сумірні з довжиною тріщини.

Зрозуміло, що збільшення кількості членів асимптотичного розвинення (1.24) чи подібних до нього для запису поля напружень біля вістря тріщини чи подібних до нього тонких неоднорідностей, розширює зону інтенсивності напружень, однак вона ніколи не може ані підійти безпосередньо до вістря дефекту, ані відійти від нього на дуже велику відстань.

## § 2. Побудова інтегральних рівнянь на основі формули Сомільяно

### 2.1. Загальна схема

Розглядається необмежений простір  $V$  з розрізом уздовж поверхні  $S$ , що має береги  $S^+$  та  $S^- \sim S$  з нормаллями  $\mathbf{n}^+$ ,  $\mathbf{n}^- \sim \mathbf{n}$  відповідно (рис. 2.1) у загальному випадку анізотропії пружних і теплофізичних властивостей матеріалу.

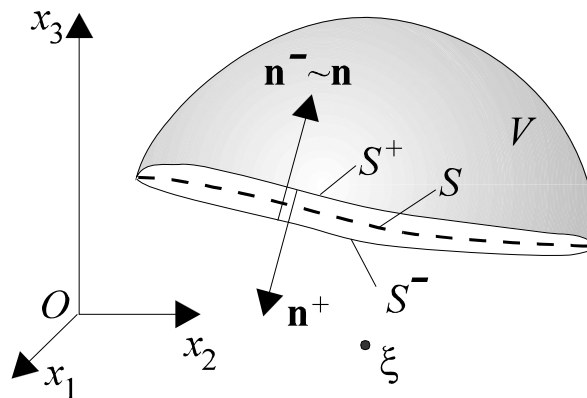


Рис. 2.1. Геометрична схема задачі тонкостінних включень

Враховуючи динамічні члени, взаємозв'язаність температури та деформацій, скінченність швидкості поширення тепла (узагальнений закон теплопровідності)

$$lq_i = -\lambda_{ij}^t \nabla_j^x T, \quad l = 1 + \tau_r \nabla^\tau, \quad (2.1)$$

$$\nabla_j^x \sim \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nabla^\tau \sim \frac{\partial}{\partial \tau},$$

де  $q_i$  – тепловий потік у напрямі  $x_i$ ;  $\tau_r$  – час релаксації теплового потоку, узагальнену формулу Сомільяно (1.107), (1.108) [779] подамо у вигляді

$$\dot{u}_k(\boldsymbol{\xi}, t) + \tau_r \ddot{u}_k(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_0^t d\tau \int_V X_i(\mathbf{x}, t - \tau) \nabla^\tau \left[ lU_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) \right] dV(\mathbf{x}) -$$

$$- \frac{1}{T_0} \int_0^t d\tau \int_V T^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) lW_T(\mathbf{x}, \tau) dV(\mathbf{x}) -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t d\tau \int_S \left\{ [p_{in}(\mathbf{x}, t - \tau)]_S \nabla^\tau [lU_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)] - [u_i(\mathbf{x}, t - \tau)]_S \nabla^\tau [lp_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)] \right\} dS(\mathbf{x}) + \\
& + \frac{1}{T_0} \int_0^t d\tau \int_S \left\{ l[q_n(\mathbf{x}, \tau)]_S T^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) + [T(\mathbf{x}, \tau)]_S \nabla_n^x T^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) \right\} dS(\mathbf{x});
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{\xi}, t) + \tau_r \dot{T}(\boldsymbol{\xi}, t) &= \int_0^t d\tau \int_V \left\{ W_T(\mathbf{x}, t - \tau) l\tilde{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) - \right. \\
& - T_0 X_i(\mathbf{x}, t - \tau) \nabla^\tau [l\tilde{U}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)] \left. \right\} dV(\mathbf{x}) + \\
& + T_0 \int_0^t d\tau \int_S \left\{ [p_{in}(\mathbf{x}, t - \tau)]_S \nabla^\tau [l\tilde{U}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)] - [u_i(\mathbf{x}, t - \tau)]_S \nabla^\tau [l\tilde{p}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)] \right\} dS(\mathbf{x}) - \\
& - \int_0^t d\tau \int_S \left\{ [q_n(\mathbf{x}, t - \tau)]_S \tilde{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) - [T(\mathbf{x}, t - \tau)]_S \nabla_n^x \tilde{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) \right\} dS(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Тут  $T_0$  – температура ненапруженого тіла;  $X_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $W_T(\mathbf{x}, t)$  – складова об'ємної сили та інтенсивність розподілених джерел тепла у точці  $\mathbf{x} \sim (x_1, x_2, x_3)$  у момент часу  $t$ ; переміщення  $u_k$  і температуру  $T$  у довільній точці  $\boldsymbol{\xi} \sim (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  тіла визначають функції Гріна  $U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)$ ,  $p_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) = n_j \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)$ ,  $T^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)$ , що стосуються дії в точці  $\mathbf{x}$  зосередженої сили, спрямованої уздовж осі  $x_k$ , та функцій Гріна  $\tilde{U}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)$ ,  $\tilde{p}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) = n_j \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)$ ,  $\tilde{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)$ , що відповідають впливові у  $\mathbf{x}$  зосередженого джерела тепла одиничної інтенсивності. Квадратними дужками з індексом  $S$  унизу  $[ ]_S$  позначені стрибки на  $S$  векторів напружень, переміщень та теплового потоку і температури:

$$\begin{aligned}
[p_{in}]_S &= f_i = p_{in}^- - p_{in}^+, [u_i]_S = f_{i+3} = u_i^- - u_i^+, \\
[q_n]_S &= q_n^- - q_n^+, [T]_S = T^- - T^+ \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

З огляду на надмірну для даного етапу досліджень складність записаних співвідношень детальніше розглянемо лише відносно простий випадок статичної пружності [966, 965, 1664], для якої (2.2) набуває вигляду

$$u^k(\boldsymbol{\xi}) = \int_S [f_{i+3}(\mathbf{x}) p_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - f_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] dS(\mathbf{x}) + \int_V X_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dV(\mathbf{x}), \tag{2.5}$$

де тензорні функції Гріна  $U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ,  $p_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  задовольняють рівняння

$$\nabla_i^x c_{ijpq} \nabla_p^x U_q^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\delta_{kj} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad \nabla_i^x \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\delta_{kj} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \tag{2.6}$$

та пов'язані співвідношеннями

$$p_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j, \quad \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = c_{ijpq} \nabla_p^x U_q^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \tag{2.7}$$

Тоді компоненти тензора деформацій дорівнюють

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{pq}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2} \left( \nabla_p^\xi u_q(\boldsymbol{\xi}) + \nabla_q^\xi u_p(\boldsymbol{\xi}) \right), \quad \nabla_p^\xi u_q(\boldsymbol{\xi}) = \int_S [f_{i+3}(\mathbf{x}) \nabla_p^\xi p_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \\
& - f_i(\mathbf{x}) \nabla_p^\xi U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] dS(\mathbf{x}) + \int_V X_i(\mathbf{x}) \nabla_p^\xi U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dV(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для визначення компонент тензора напружень не можна безпосередньо скористатися співвідношеннями (2.8) та законом Гука для анізотропного середовища

$$\sigma_{ij} = c_{ijpq} \varepsilon_{pq}, \quad (2.9)$$

оскільки впровадження стрибка переміщень порушує концепцію нерозривності деформацій, створюючи локально своєрідну пластичну (необоротну) деформацію, яка не характеризується законом Гука (загалом вона сама собою напружень не викликає). Тому для одержання реальних напружень  $\sigma_{ij}$  необхідно з правої частини (2.9), де  $\varepsilon_{pq}$  дається формулою (2.8), вилучити туди автоматично залучені фіктивні напруження  $\sigma_{ij}^*$ , що були отримані з необоротних деформацій  $\varepsilon_{pq}^*$  за законом Гука. Оскільки необоротна деформація за стрибка напружень дорівнює (див. (1.5) [461])

$$\varepsilon_{pq}^* = \frac{1}{2} \left\{ n_p [u_q]_S + n_q [u_p]_S \right\} \delta(S), \quad (2.10)$$

то адекватні цим деформаціям за законом Гука напруження

$$\sigma_{ij}^*(\xi) = c_{ijpq} \varepsilon_{pq}^* = \int_S c_{ijpq} n_q f_{p+3}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\xi) dS(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

приводять до остаточного вигляду компонент тензора напружень

$$\sigma_{ij}(\xi) = c_{ijpq} \nabla_p^\xi u_q(\xi) - \sigma_{ij}^*(\xi). \quad (2.12)$$

Вирази (2.5)–(2.12) реалізують принцип спряження.

Таким чином зовнішня задача для лінійно-пружного тіла у загальному вигляді розв'язана. Вважатимемо теж, що відома механічна модель включення і побудовані згідно з (1.8) шість умов взаємодії включення з матрицею, що зв'язують напруження та переміщення на протилежних берегах включення:

$$\Psi_j(\mathbf{t}_n^\pm, \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad t_{ni}^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j \quad (j = \overline{1,6}). \quad (2.13)$$

Серед параметрів функцій  $\Psi_j$  можуть бути товщина включення та його фізико-механічні характеристики.

Зокрема, якщо  $S = S_u \cup S_\sigma$  і уздовж  $S_u$  впроваджена з натягом  $g_i^\pm$  абсолютно жорстка плівка, а  $S_\sigma$  є розрізом із заданими на його берегах зусиллями  $f_i^\pm$ , то умови (2.13) набудуть конкретного вигляду

$$u_i^\pm = g_i^\pm \text{ на } S_u, \quad t_{ni}^\pm = f_i^\pm \text{ на } S_\sigma \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.14)$$

Для гнучкого нерозтягливого включення, розташованого у площині  $x_3 = 0$ , вони запишуться

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-, \quad u_3^+ = u_3^-, \quad u_1^+ = u_1^-, \quad u_2^+ = u_2^-, \quad u_2^- = 0. \quad (2.15)$$

Однією з найпростіших можна також вважати вінклерову модель [1079, 695, 882] розташованого у площині  $x_3 = 0$  пружного включення завтовшки  $2h(x_1, x_2)$  з модулями пружності  $E$  та зсуву  $G$ , для якого

$$\sigma_{i3}^\pm = \lambda_i (u_i^+ - u_i^-), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{G}{2h}, \quad \lambda_3 = \frac{E}{2h}. \quad (2.16)$$

Складніші моделі розглянуті у розд. III та публікації [737].

Підставляючи вирази (2.5) та (2.12) у (2.13), одержимо систему інтегральних рівнянь стосовно шести функцій стрибка, які згідно з (2.5), (2.6), (2.12) повністю визначають напружено-деформований стан тіла.



**Зауваження.** Якщо тіло перебуває під впливом певних зовнішніх чинників, то у формулах (2.5), (2.8), (2.12) та ін. слід долучити члени  $u_k^0(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\varepsilon_{pq}^0(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\sigma_{ij}^0(\boldsymbol{\xi})$ ,  $T^0(\boldsymbol{\xi})$ , що характеризують **однорідний розв'язок**, тобто розв'язок відповідної задачі для тіла без дефектів під час дії тих самих зовнішніх зусиль. ■

Подібним же чином С.К.Канаун [369] розв'язав задачу для анізотропного середовища з математичним розрізом. Пізніше буде з'ясовано, що на відміну від моделювання поверхні стрибка напружень і переміщень за допомогою зосереджених сил та силових диполів [14], метод функцій стрибка еквівалентний заміні включення розподіленими на його серединній поверхні (у двовимірному плоскому випадку – лінії) зосередженими силами та крайовими дислокаціями. Тепловий вплив прошарку еквівалентний дії розподілених джерел тепла та теплових диполів.

Методику застосування методу потенціалів для побудови систем інтегральних рівнянь для жорстких і пружних тонких включень у тривимірних задачах теорії пружності можна також знайти у праці [1055].

## 2.2. Обмежені тіла

Запропонований метод придатний теж для аналізу обмежених тіл з прошарками. Нехай  $S_1(S_1^+)$  – поверхня, що обмежує тіло  $V$ . Подумки доповнимо  $V$  до безмежного простору і розглядатимемо  $S_1$  на додаток до  $S$  як ще одну поверхню стрибка. Тоді крайові умови

$$u_i = g_i^+ \text{ на } S_{1u}; \quad t_{ni} = f_i^+ \text{ на } S_{1\sigma} \quad (S_1 = S_{1\sigma} \cup S_{1u}, \quad i=1,2,3), \quad (2.17)$$

що відповідають заданим на  $S_{1\sigma}$  зусиллям  $f_i^+$ , а на  $S_{1u}$  – переміщенням  $g_i^+$ , можна подати у формі шести умов взаємодії

$$t_{ni}^- = 0, \quad t_{ni}^+ = f_i^+ \text{ на } S_{1\sigma}; \quad u_i^- = 0, \quad u_i^+ = g_i^+ \text{ на } S_{1u} \quad (i=1,2,3). \quad (2.18)$$

За цими умовами у кожній точці поверхні  $S_1$  три функції стрибка відомі наперед (на  $S_{1\sigma}$  – це  $f_1, f_2, f_3$ ; на  $S_{1u}$  –  $f_4, f_5, f_6$ ), а інші три можна визначити з відповідних систем інтегральних рівнянь.

Розв'язування цих додаткових інтегральних рівнянь можна уникнути, використавши функції Гріна для даної обмеженої області.

## 2.3. Ізотропія

Пружні сталі ізотропного матеріалу мають вигляд

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}).$$

Тому

$$\begin{aligned} U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{e}{2\mu r^3} \left[ \kappa \delta_{ik} r^2 + r_i r_k \right], \quad r_i = x_i - \xi_i, \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \\ \nabla_j^\xi U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{e}{2\mu r^5} \left[ (\kappa r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij} - r_i \delta_{kj}) r^2 + 3r_i r_j r_k \right], \quad e = \frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad \kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \\ \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{e}{r^5} \left[ 3r_i r_j r_k + \frac{\mu}{\lambda + \mu} (r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij} + r_i \delta_{kj}) r^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Причому у цьому випадку

$$\nabla_j^\xi U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\nabla_j^x U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \nabla_j^\xi \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\nabla_j^x \sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \quad (2.20)$$

### Антиплоска деформація

Співвідношення для антиплоскої деформації уздовж осі  $x_3$  для ізотропного тіла легко отримати на основі загальних виразів (2.19), якщо обмежитися значенням  $k = 3$ , а зосереджені сили, що фігурують у записі тензорів Гріна, вважати рівномірно розподіленими уздовж осі  $1 \sim x_1 = \xi_1$ ,  $2 \sim x_2 = \xi_2$ . Після інтегрування уздовж цієї осі з використанням формул

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^5} \right\} d\xi_3 = \left\{ -2 \ln R + c, \frac{2}{R^2}, \frac{4}{3R^4} \right\}, \quad R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (2.21)$$

для ненульових компонент отримаємо вирази

$$U_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{\ln R}{2\pi G} + c, \quad \nabla_j^\xi U_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{r_j}{2\pi G R^2}, \quad \sigma_{3j}^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{r_j}{2\pi R^2} \quad (j=1,2), \quad (2.22)$$

що визначають зміщення  $u_3$ , його похідні та дотичні напруження  $\sigma_{3j}$  у точці  $\mathbf{x} \sim (x_1, x_2)$  за дії у точці  $\boldsymbol{\xi} \sim (\xi_1, \xi_2)$  одиничної зосередженої сили у додатному напрямі осі  $x_3$  (стала  $c$ , яка дорівнює безмежності, можна за необхідності до відома не брати).

Якщо врахувати, що в ролі поверхні  $S$  тепер можна розглядати лінію  $L$  перерізу  $S$  площиною  $x_3 = 0$ , то на основі загальних виразів (2.5), (2.8), (2.12) отримаємо

$$\begin{aligned} u_3(\boldsymbol{\xi}) &= -\int_L \left\{ f_3(\mathbf{x}) U_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - f_6(\mathbf{x}) \left[ \sigma_{31}^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_1 + \sigma_{32}^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_2 \right] \right\} dl(\mathbf{x}), \\ \nabla_j^\xi u_3(\boldsymbol{\xi}) &= -\int_L \left\{ f_3(\mathbf{x}) \nabla_j^\xi U_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - f_6(\mathbf{x}) \nabla_j^\xi \left[ \sigma_{31}^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_1 + \sigma_{32}^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_2 \right] \right\} dl(\mathbf{x}), \\ \sigma_{3j}(\boldsymbol{\xi}) &= G \nabla_j^\xi u_3(\boldsymbol{\xi}) - \sigma_{3j}^*(\boldsymbol{\xi}), \quad \sigma_{3j}^*(\boldsymbol{\xi}) = 2G \varepsilon_{3j}^*(\boldsymbol{\xi}) = G f_6(\boldsymbol{\xi}) n_j \delta(L) \quad (j=1,2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Часто зручніше під інтегралом біля функцій стрибка мати множниками однорідні функції однакового порядку. Цього досягається, якщо взяти до відома другі члени у залежностях (2.6), (2.20) і те, що  $f_6 = 0$  на кінцях розімкнених ділянок лінії  $L$ . Таким чином

$$\begin{aligned} \sigma_{32}(\boldsymbol{\xi}) + i\sigma_{31}(\boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_L \left[ f_3(\mathbf{x}) + iG \frac{\partial f_6(\mathbf{x})}{\partial l} \right] P(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dl(\mathbf{x}), \\ P(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) &= 2\pi i G \left( \nabla_2^\xi + i\nabla_1^\xi \right) U_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Вираз (2.24) збігається з залежністю (2.2) [951] (якщо там вважати  $p = 0$ ,  $\tau_{yzp}^0 = \tau_{xzp}^0 = 0$ ), одержаною методами теорії функцій комплексної змінної (див. теж (20.5)).

### Плоска задача

Співвідношення для відповідної задачі стосовно однорідного ізотропного армованого тіла в рамках плоскої деформації можна отримати, поклавши у виразах (2.19)  $i, j, k = 1, 2$  та рівномірно розподіливши уздовж осі  $1 \sim x_1 = \xi_1$ ,  $2 \sim x_2 = \xi_2$  зосереджені сили, що фігурують у записі тензорів Гріна. Після інтегрування по  $\xi_3$  з урахуванням (2.21) матимемо

$$\begin{aligned}
U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{e}{GR^2} \left[ -\kappa R^2 \ln R \delta_{ik} + r_i r_k \right], \\
\nabla_j^\xi U_i^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{e}{GR^4} \left[ \left( \kappa r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij} - r_i \delta_{kj} \right) R^2 - 2r_i r_j r_k \right], \\
\sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{e}{R^4} \left[ 4r_i r_j r_k + \frac{2G}{\lambda + G} \left( r_j \delta_{ik} + r_i \delta_{kj} - r_k \delta_{ij} \right) R^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Тут  $\kappa = (\lambda + 3G)/(\lambda + G) = 3 - 4\nu$  – традиційне для плоскої деформації позначення сталої Мухелішвілі. Припустивши, що  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ , матимемо вирази, що стосуються узагальненого плоского напруженого стану. Ці залежності дають вирази для компонент переміщень, їхніх похідних і компонент тензора напружень у точці  $\boldsymbol{\xi} \sim (\xi_1, \xi_2)$  внаслідок дії в точці  $\mathbf{x} \sim (x_1, x_2)$  одиничної зосередженої сили в напрямі осі  $x_3$ .

Підставляючи (2.25) у загальні залежності (2.5), (2.8), (2.12), можна врахувати додатково, що  $L$  є перерізом  $S$  площиною  $x_3 = 0$  і

$$\begin{aligned}
f_1 &= [\tau_n]_L n_2 - [\sigma_n]_L n_1, \quad f_2 = [\sigma_n]_L n_2 - [\tau_n]_L n_1, \quad f_3 = 0, \quad [\tau_n]_L = \tau_n^- - \tau_n^+, \\
[\sigma_n]_L &= \sigma_n^- - \sigma_n^+, \quad f_4 = [u_1]_L = u_1^- - u_1^+, \quad f_5 = [u_2]_L = u_2^- - u_2^+, \quad f_6 = 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Як і у випадку антиплоскої деформації, тут також можна побудувати вирази, що містять під інтегралом множниками біля функцій стрибка однорідні функції однакового порядку. Враховуючи на додаток до (2.26) залежність

$$n_2 \frac{\partial f_6}{\partial x_1} - n_1 \frac{\partial f_6}{\partial x_1} = \frac{\partial f_6}{\partial x_1},$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_1} [u_1(\boldsymbol{\xi}) + iu_2(\boldsymbol{\xi})] &= -\frac{ei}{2G} \int_L \left\{ \kappa K^{(-1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) f_1^*(\mathbf{x}) + 2G\kappa K^{(1/\kappa)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) f_4^*(\mathbf{x}) - \right. \\
&\quad \left. - L(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\mathbf{x}} \left( \overline{f_1^*(\mathbf{x})} + 2G \overline{f_4^*(\mathbf{x})} \right) \right\} d\mathbf{x} + n_1 [u_1(\mathbf{x}) + iu_2(\mathbf{x})] \delta(L), \\
f_1^*(\mathbf{x}) &= [\sigma_n - i\sigma_\tau]_L, \quad f_4^*(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial l} [u_1 + iu_2]_L, \quad K^{(a)}(\mathbf{x}) = \frac{a}{\mathbf{x}} - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}}, \quad L(\mathbf{x}) = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{\bar{\mathbf{x}}^2}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Використання методів теорії функцій комплексної змінної дає можливість отримати аналогічну формулу (див. (2) [949]), яка, однак, не містить підкресленого члена  $n_1 [u_1(\mathbf{x}) + iu_2(\mathbf{x})] \delta(L)$ , який враховує у виразах для деформацій та похідних від переміщень пластичну складову. Це свідчить про високу міру фізичності викладеного тут методу, заснованого на використанні формули Сомільяно. Тим не менше, додавання цього доданку не впливає на точність визначення деформацій та напружень поза лінією  $L$  і, як наслідок, на визначальну систему інтегральних рівнянь.

### § 3. Сингулярні інтегральні рівняння в теорії тонкостінних включень

#### 3.1. Визначення особливості розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь [741]

Розв'язування багатьох мішаних двовимірних задач, що виникають у теорії тонкостінних неоднорідностей [978, 1664], а також в теорії фільтрації, пружності (контактні задачі [22, 291, 364, 454, 625, 635], механіці руйнування [706, 860], гідроаеромеханіці [55], теорії фільтрації [794] та інших сферах застосування апарату математичної фізики, зводиться до систем сингулярних інтегральних рівнянь (ССР) другого роду

$$\mathbf{A}\mathbf{f}(x) + \frac{1}{\pi} \int_L \left\{ \frac{\mathbf{B}}{\xi - x} + \mathbf{C} \ln|\xi - x| + \mathbf{K}(\xi, x) \right\} \mathbf{f}(\xi) d\xi = \mathbf{F}(x) \quad (x \in L = [-a, a]) \quad (3.1)$$

з деякими додатковими умовами, що мають певний фізичний сенс [22, 55, 364, 454, 625, 635, 706, 860, 978, 1664, 1687, 1692]

$$\int_L \mathbf{f}(\xi) d\xi = \mathbf{Q}, \quad \det(\mathbf{A} \pm i\mathbf{B}) \neq 0. \quad (3.2)$$

Тут і надалі у цьому параграфі вживаються позначення матриць

$$\mathbf{A} = \|a_{nm}\|, \quad \mathbf{B} = \|b_{nm}\|, \quad \mathbf{C} = \|c_{nm}\|, \quad \mathbf{K}(\xi, x) = \|K_{nm}(\xi, x)\| \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}(x) = \|f_n(x)\|, \quad \mathbf{F} = \|F_n(x)\|, \quad \mathbf{Q} = \|Q_n\| \in \mathbb{C} \quad (n, m = \overline{1, M}),$$

де  $\mathbf{f}(x)$  – шукана вектор-функція;  $\mathbf{K}(\xi, x)$  – матриця-функція регулярних ядер системи сингулярних інтегральних рівнянь. Сингулярні інтеграли в (3.1) розуміють у сенсі головного значення за Коші – Лебегом [636].

Переважно розв'язок (3.1) шукають числово-аналітичними методами колокацій, механічних квадратур, ортогональних поліномів та ін. [1000, 1318, 1687]. При цьому необхідно знати вигляд особливості розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь на кінцях проміжку інтегрування. Досліджується це питання на основі аналізу характеристичної для (3.1) частини системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{f}(x) + \frac{\mathbf{B}}{\pi} \int_L \frac{\mathbf{f}(\xi) d\xi}{\xi - x} = \mathbf{F}(x) \quad (x \in L = [-a, a]) \quad (3.3)$$

після деяких її перетворень, що мають за мету одночасно діагоналізувати матриці коефіцієнтів  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ . Цього можна досягти або шляхом лінійного комбінування рядків (3.3)

$$\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{f}(x) + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{\pi} \int_L \frac{\mathbf{f}(\xi) d\xi}{\xi - x} = \mathbf{H}\mathbf{F}(x) \quad (x \in L = [-a, a]), \quad (3.4)$$

або за допомогою введення нової невідомої вектор-функції  $\varphi(x)$

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{D}\varphi(x), \quad (3.5)$$

що приводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{D}\varphi(x) + \frac{\mathbf{B}\mathbf{D}}{\pi} \int_L \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - x} = \mathbf{F}(x) \quad (x \in L = [-a, a]). \quad (3.6)$$

Тут  $\mathbf{H} = \|h_{nm}\|$ ,  $\mathbf{D} = \|d_{nm}\|$  ( $h_{nn} = 1$ ,  $d_{nn} = 1$  ( $\cancel{X}_n$ );  $n, m = \overline{1, M}$ ) – матриці переходу, що визначаються відповідно з умов

$$\begin{cases} \mathbf{HA} = \text{diag} \left( \sum_{n=1}^M h_{1n} a_{n1}, \sum_{n=1}^M h_{2n} a_{n2} \right), \\ \mathbf{HB} = \text{diag} \left( \sum_{n=1}^M h_{1n} b_{n1}, \sum_{n=1}^M h_{2n} b_{n2} \right), \end{cases} \quad (3.7)$$

або

$$\begin{cases} \mathbf{AD} = \text{diag} \left( \sum_{n=1}^M a_{1n} d_{n1}, \sum_{n=1}^M a_{2n} d_{n2} \right), \\ \mathbf{BD} = \text{diag} \left( \sum_{n=1}^M b_{1n} d_{n1}, \sum_{n=1}^M b_{2n} d_{n2} \right). \end{cases} \quad (3.8)$$

Підсумовування за повторюваними індексами тут не відбувається. Після діагоналізації вид особливості розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з'ясувати вже не важко. Наприклад, якщо вдалося задовольнити умову (3.7), то компоненти  $f_n(x)$  шуканої вектор-функції  $\mathbf{f}(x)$  мають вигляд

$$f_n(x) = w_n(x) \varphi^n(x) \quad (n = \overline{1, M}), \quad (3.9)$$

де  $w_n(x) = w_n(x; \alpha_n, \beta_n) = P(x) = (1 - x/a)^{\alpha_n} (1 + x/a)^{\beta_n}$  – канонічні функції, вітки яких слід зафіксувати якоюсь певною умовою, наприклад  $w_n(0) = 1$ ;  $\varphi^n(x)$  – регулярні (обмежені та вимірювані) на  $[-a; a]$  функції; сталі  $\alpha_n, \beta_n$  визначають співвідношення

$$\begin{cases} \alpha_n \\ \beta_n \end{cases} = \mp i \mu_n + \frac{\arg(g_n)}{2\pi} + \begin{cases} L_n \\ M_n \end{cases}, \quad \mu_n = \frac{\ln|g_n|}{2\pi}; \quad (3.10)$$

$$g_n = \frac{\sum_{m=1}^M h_{nm} (a_{mn} - ib_{mn})}{\sum_{m=1}^M h_{nm} (a_{mn} + ib_{mn})}. \quad (3.11)$$

Цілі числа  $L_n, M_n$  підбираються так, щоб задовольнялася умова

$$-1 < \text{Re}(\alpha_n, \beta_n) < 1. \quad (3.12)$$

Ціле число  $\kappa_n = -(\alpha_n + \beta_n)$ , що набуває одного із трьох значень  $-1, 0, 1$ , є індексом відповідного сингулярного інтегрального рівняння.

Якщо умови (3.7) не виконуються, то за вищезазначених обмежень на  $A$  і на  $B$  завжди можна задовольнити умови (3.8) і компоненти шуканої вектор-функції  $f(x)$  згідно з (3.5) матимуть дещо складніший вигляд

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^M d_{nm} \phi_m(x) \quad (n = \overline{1, M}), \quad (3.13)$$

де аналогічно до (3.9) – (3.12)

$$\phi_n(x) = w_n(x) \varphi^n(x) \quad (n = \overline{1, M}) \quad (3.14)$$

тільки

$$g_n = \frac{\sum_{m=1}^M d_{mn} (a_{nm} - ib_{nm})}{\sum_{m=1}^M d_{mn} (a_{nm} + ib_{nm})}. \quad (3.15)$$

Зрозуміло, що подання (3.9) є частковим випадком залежності (3.13). Тому можна вживати подання (3.13)–(3.15) компонент шуканої вектор-функції як найбільш загальне. У першому випадку особливість розв'язку  $f_n(x)$  згідно з (3.9) визначається однією з канонічних функцій; у другому за (3.13), (3.14) – повним їхнім спектром. Тому канонічні функції  $w_n(x)$  дають достатньо повну інформацію про поведінку розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь поблизу кінців проміжку інтегрування.

Введемо у розгляд норму комплекснозначної функції  $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)_w}$ , де внутрішній добуток з вагою  $w(x)$  визначимо формулою

$$(f, g)_w = \int_{-1}^1 w(x) f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3.16)$$

Зазначимо, що розв'язки і (3.9) і (3.13) характеризуються параметрами  $g_n (n=1 \dots M)$ , що визначаються або з (3.11), або з (3.15) відповідно. Регулярні функції  $\varphi^n(x)$  у формулах (3.9), (3.14) доцільно подати у вигляді рядів

$$\varphi^n(x) = \varphi_N^n(x) = \sum_{m=0}^N A_m^n \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x/a), \quad N \sim \infty, \quad \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{P_m^{(\alpha, \beta)}(x)}{\sqrt{\theta_m^{(\alpha, \beta)}}}, \quad (3.17)$$

де  $P_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  – стандартизовані, а  $\hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  – ортонормовані поліноми Якобі;  $\theta_i^{(\alpha, \beta)}$  – квадрат норми полінома  $P_m^{(\alpha, \beta)}(x)$  з вагою  $w(x, \alpha, \beta) \equiv P(x)$ ;

$$\begin{aligned} P_m^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left[ (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^m \right]^{(m)} = \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m+\alpha}{n} \binom{m+\beta}{m-n} (x-1)^{m-n} (x+1)^n; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\theta_m^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) m! \Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \quad (m=0, 1, \dots). \quad (3.19)$$

Формула (3.19) справджується у всіх випадках, крім одного, коли  $\kappa = -(\alpha + \beta) = 1$ ,  $m = 0$  і якщо

$$\theta_0^{(\alpha, \beta)} = \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1). \quad (3.20)$$

Відзначимо теж, що за умови

$$\{-1/2 \leq \operatorname{Re} \alpha < 1, -1 < \operatorname{Re} \beta \leq -1/2\} \cup \{-1 < \operatorname{Re} \alpha \leq -1/2, -1/2 \leq \operatorname{Re} \beta < 1\}$$

для значень  $\alpha, \beta$ , що визначаються співвідношеннями (3.10) – (3.12), для ортонормованих многочленів Якобі виконується рівномірна оцінка [934]

$$\left| \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \leq C_\kappa m^{q+1/2}, \quad C_\kappa = C_\kappa(\alpha, \beta) = \frac{2^{\kappa/2}}{\Gamma(q+1)}, \quad (3.21)$$

$$(|x| \leq 1; q = \max \operatorname{Re}\{\alpha, \beta\}, \kappa = -(\alpha + \beta)).$$

Надалі будуть використані співвідношення [1276]

$$\left( \hat{P}_i^{(\alpha, \beta)}, \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)} \right)_P = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} - \text{дельта Кронекера}); \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w(t; \pm\alpha, \pm\beta) \hat{P}_m^{(\pm\alpha, \pm\beta)}(t) \frac{dt}{t-x} = \mp \frac{A}{B} w(x; \pm\alpha, \pm\beta) \hat{P}_m^{(\pm\alpha, \pm\beta)}(x) \mp \frac{\hat{P}_{m \mp \kappa}^{(\mp\alpha, \mp\beta)}(x)}{\sin \pi\alpha} \quad (3.23)$$

$$(|x| \leq 1).$$

Причому, якщо  $\alpha = \beta = -1/2$ , то

$$w(x) = T(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad P_m^{(-1/2, -1/2)}(x) = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} T_m(x), \quad \hat{P}_m^{(-1/2, -1/2)}(x) = \hat{T}_m(x); \quad (3.24)$$

$$\left( \hat{T}_i, \hat{T}_j \right)_T = \delta_{ij}, \quad \left( T_i, T_j \right)_T = \frac{\pi}{2} [1 + \delta_{0j}] \delta_{ij}; \quad (3.22^1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T(t) \{ \hat{T}_m(t), T_m(t) \} \frac{dt}{t-x} = \{ \hat{U}_{m-1}(x), U_{m-1}(x) \}, \quad (3.23^1)$$

а коли  $\alpha = \beta = 1/2$ , то

$$w(x) = U(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad P_m^{(1/2, 1/2)}(x) = \frac{(2m+1)!!}{2^m (m+1)!} U_m(x), \quad \hat{P}_m^{(1/2, 1/2)}(x) = \hat{U}_m(x); \quad (3.25)$$

$$\left( \hat{U}_i, \hat{U}_j \right)_U = \delta_{ij}, \quad \left( U_i, U_j \right)_T = \frac{\pi}{2} \delta_{ij}; \quad (3.22^2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 U(t) \{ \hat{U}_m(t), U_m(t) \} \frac{dt}{t-x} = - \{ \hat{T}_{m+1}(x), T_{m+1}(x) \}, \quad (3.23^2)$$

де  $T_n(x) = \cos[n \arccos(x)]$ ,  $U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos(x)]}{\sin \arccos(x)}$  – ортогональні многочлени Чебишева першого та другого роду відповідно;  $\hat{T}_n(x)$ ,  $\hat{U}_n(x)$  – їхні ортонормовані на проміжку  $[-1; 1]$  відповідники

$$\hat{T}_n(x) = \varepsilon_n \sqrt{2/\pi} T_n(x) = \varepsilon_n \sqrt{2/\pi} \cos[n \arccos(x)], \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & (n=0), \\ 1 & (n>0), \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\hat{U}_n(x) = \sqrt{2/\pi} U_n(x) = \sqrt{2/\pi} \frac{\sin[(n+1) \arccos(x)]}{\sin \arccos(x)}, \quad \hat{U}_{-1}(x) = 0.$$

### 3.2. Наближений розв'язок характеристичного рівняння

Отримані разом із О.О.Євтушенком результати п. 3.2 ще не були опубліковані.

### Основна схема

Обмежимося випадком одного сингулярного інтегрального рівняння ( $M = 1$ ), нормуємо інтервал  $L$  (вважаємо  $a = 1$ ) і розглянемо сингулярне інтегральне рівняння

$$Af(x) + \frac{1}{\pi} \int_L \left\{ \frac{B}{\xi - x} + C \ln |\xi - x| + \pi K(\xi, x) \right\} f(\xi) d\xi = F(x) \quad (x \in L = [-1; 1]). \quad (3.27)$$

Введемо у розгляд гільбертові простори комплекснозначних функцій

$$L_\Gamma^2[-1; 1] = \left\{ f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-1}^1 |f|^2 d\gamma(x) < \infty \right\} \quad (3.28)$$

з нормою  $\|f\|_\Gamma = \sqrt{(f, f)_\Gamma}$ , де внутрішній добуток визначимо формулою

$$(f, g)_\Gamma = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} d\gamma(x), \quad \Gamma = \{P, T, U\}; \quad (3.29)$$

$$\gamma(x) = \left\{ p(x) = \int_{-1}^x (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta d\xi, \quad t(x) = \int_{-1}^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad u(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right\} \quad (3.30)$$

відповідно. Формула (3.29) збігається з (3.16), якщо зауважити, що  $d\gamma(x) = w(x) dx$ .

Формули (3.29), (3.30) породжують повні ортонормовані системи базових функцій  $\hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x)$ ,  $\hat{T}_n(x)$ ,  $\hat{U}_n(x)$  у просторах  $L_P^2[-1; 1]$ ,  $L_T^2[-1; 1]$ ,  $L_U^2[-1; 1]$  відповідно.

Якщо згідно з (3.9) розв'язок рівняння (3.27) подати у вигляді

$$f(x) = w(x)\varphi(x), \quad w(x) = w(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \mp i\mu + \frac{\arg(g)}{2\pi} + \left\{ \begin{matrix} L \\ M \end{matrix} \right\}, \quad (3.31)$$

$$\mu = \frac{\ln|g|}{2\pi}, \quad g = \frac{A-iB}{A+iB}, \quad \kappa = -(\alpha, \beta) \quad (-1 < \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1),$$

де  $\varphi(x)$  – регулярна на  $[-1; 1]$  функція, то (3.27) можна записати в операторній формі

$$(\mathbf{S} + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\varphi = F(x). \quad (3.32)$$

Тут

$$\mathbf{H}_T\varphi(x) = \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} dP(\xi), \quad \mathbf{K}_1\varphi(x) = \frac{C}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln |\xi - x| dP(\xi),$$

$$\mathbf{K}_2\varphi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K(\xi, x) dP(\xi), \quad \mathbf{S} = Aw + \mathbf{H}_T.$$

Розв'язок характеристичної частини

$$\mathbf{S}\varphi = F(x) \quad (3.33)$$

рівняння (3.27) чи (3.32) має вигляд [636]

$$(A^2 + B^2)\varphi = \mathbf{R}F + c, \quad (3.34)$$

причому

$$\mathbf{R}F = A \frac{F(x)}{w(x)} - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(t) dt}{w(t)(t-x)}. \quad (3.35)$$

Сталу  $c$ , що входить у розв'язок (3.34), при  $\kappa = 1$  фіксують умовою



$$\int_{-1}^1 w(x) \varphi(x) dx = Q, \quad (3.36)$$

де  $Q$  – деяка дійсна стала, що визначається на основі додаткових відомостей щодо реального (механічного) сенсу знайденого розв'язку.

Якщо ж  $\kappa = -1$ , то права частина  $F(x)$  рівняння (3.33) повинна задовольняти умову

$$UF \equiv \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{w(x)} dx = 0, \quad (3.37)$$

необхідну для розв'язуваності рівняння (3.33). У випадку  $\kappa = 0$  стала  $c = 0$ .

Вираз (3.34) дає точний запис розв'язку характеристичного рівняння (3.33) і є досить зручним для теоретичних досліджень, однак практичне його використання для побудови конкретних розв'язків через необхідність обчислення складних інтегралів не завжди просте. Тому побудуємо наближений розв'язок рівняння (3.33) у вигляді скінченного ряду

$$\varphi(x) \sim \varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N \hat{A}_n \hat{P}_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{n=0}^N A_n P_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \hat{A}_n = \sqrt{\theta_n^{(\alpha, \beta)}} A_n. \quad (3.38)$$

Невідомі коефіцієнти розвинення (3.38) можна визначити декількома способами [1276, 1435]. Застосуємо метод Ердогана – Гупти – Кука [1276], який є, за суттю, одним із варіантів загального методу Бубнова – Гальоркіна. За ним сталі  $\hat{A}_n$  обирають з умови

$$\left( r_N, \hat{P}_n^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P = 0 \quad (n = \overline{0, N})$$

ортогональності системи функцій  $\hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)}(-x)$  та функції

$$r_N(x) = \sum_{n=0}^N \hat{A}_n \left\{ A w(x) \hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 w(t) \hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(t) \frac{dt}{t-x} \right\} - F(x), \quad (3.39)$$

яка визначає нев'язку, утворену внаслідок підставлення (3.38) у (3.33).

Звідси за допомогою співвідношень (3.22) і (3.23) отримаємо

$$\hat{A}_n = -(\sin \pi A / B) \left( F, \hat{P}_n^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P \quad (n = \overline{0, N}). \quad (3.40)$$

Окрім того, якщо  $\kappa = 1$ , то з умови (3.36) знаходимо

$$\hat{A}_0 = \frac{Q}{\sqrt{\theta_0^{(\alpha, \beta)}}}. \quad (3.41)$$

Коли ж  $\kappa = -1$ , то, оскільки

$$\hat{P}_0^{(-\alpha, -\beta)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta_0^{(-\alpha, -\beta)}}},$$

умова (3.37) задовольняється автоматично.

З іншого боку, внаслідок неперервності шуканої функції  $\varphi(x)$ , їй можна поставити у відповідність ряд Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{B}_n \hat{P}_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \hat{B}_n = \left( \varphi, \hat{P}_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)} \right), \quad (3.42)$$

причому, якщо  $\kappa = 1$ , то апіорі  $\hat{B}_0 = Q / \sqrt{\theta_0^{(\alpha, \beta)}}$ .

Але з використанням (3.23) та наступною зміною порядку інтегрування отримуємо

$$\hat{B}_n = \left( \varphi, \hat{P}_n^{(\alpha, \beta)} \right)_P = - \left( \sin \frac{\pi A}{B} \right) \left( F, \hat{P}_n^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P \quad (n = 0 \dots \infty). \quad (3.43)$$

Тому на основі (3.40), (3.43) з (3.38) і (3.42) випливає

$$\varphi(x) - \varphi_N(x) = - \left( \sin \frac{\pi A}{B} \right) \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( F, \hat{P}_n^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P \hat{P}_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (3.44)$$

### Збіжність послідовних розв'язків

Тепер розглянемо питання збіжності послідовності наближених розв'язків  $\{\varphi_N(x)\}$  (3.38) сингулярне інтегральне рівняння (3.33) до точного його розв'язку (3.42). Прийmemo стандартне позначення для безмежної норми обмеженої в області  $D$  функції  $\varphi_N(x)$ :

$$\|\varphi_N\|_{\infty} = \sup_{x \in D} |\varphi_N(x)| \quad (3.45)$$

і зазначимо, що якщо розв'язок  $f(x)$  сингулярного інтегрального рівняння (3.33) задовольняє умову Гельдера з показником густини  $0 < \mu \leq 1$ , то сингулярний інтеграл  $\int_{-1}^1 \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x}$  у (3.33) обмежений у просторі з нормою

$$\|\varphi_N\|_H = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |\varphi_N(x)| + \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(t)|}{|x - t|^{\mu}}. \quad (3.46)$$

Тепер доведемо таку основну лему.

**Лема 3.1.** Якщо  $F(x) \in C^{(r+1)}(-1, 1)$ ,  $0 \leq r < \infty$ , то

$$\left| \left( F, \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right)_P \right| \leq c_2^{\pm} n^{-(r-q+1/2)} \|F^{(r+1)}\|_{\infty}, \quad (3.47)$$

$$c_2^{\pm} = c_3^{\pm} c_4, \quad c_3^{\pm} = c_{\kappa} \theta_0^{(\pm\alpha, \pm\beta)}, \quad c_4 = \frac{6(6e)^{r+1}}{r+2}, \quad -1/2 \leq q \equiv \max \operatorname{Re} \{\alpha, \beta\} < 1.$$

**Доведення.** Розглянемо внутрішній добуток

$$\left( F, \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right)_P = \left( P_{n-1}^*, \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right)_P + \left( F - P_{n-1}^*, \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right)_P,$$

де  $P_{n-1}^*(x)$  – многочлен найкращого рівномірного наближення функції  $F(x)$ . Тоді, беручи до відома, що  $\left( P_{n-1}^*, \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right)_P = 0$ , за допомогою нерівності Шварца [460] і співвідношень (3.22), (3.21) отримуємо

$$\left| \left( F, \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right)_P \right| \leq \|F - P_{n-1}^*\| \cdot \left\| \hat{P}_n^{(\pm\alpha, \pm\beta)} \right\| \leq c_3^{\pm} n^{q+1/2} \|F - P_{n-1}^*\|_{\infty}.$$

Далі, внаслідок п'ятої теореми Джексона теорії апроксимації [1573], виконується оцінка  $\|F - P_{n-1}^*\|_{\infty} \leq c_4 n^{-(r+1)} \|F^{(r+1)}\|_{\infty}$ , що завершує доведення. ■

Застосування тотожності Парсеваля [460] до різниці функцій (3.44) дає

$$\|\varphi - \varphi_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( F, \hat{P}_n^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P^2, \quad (3.48)$$

звідки, на основі оцінки (3.47) при  $r = 0$ , випливає, що  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_N\| = 0$ , тобто послідовність частинних сум (3.38) ряду Фур'є (3.42) за многочленами Якобі збігається до цієї функції у середньому.

Наступна теорема підсилює цей результат, накладаючи додаткові умови стосовно гладкості правої частини  $F(x)$ .

**Теорема 3.1.** Якщо  $F(x) \in C^{(r+1)}(-1,1)$ ,  $r \geq E[2(q+1)]$  ( $E(A)$  – ціла частина числа  $A$ ),  $-1/2 \leq q \equiv \max \operatorname{Re}\{\alpha, \beta\} < 1$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_N\|_{\infty} = 0, \quad (3.49)$$

причому існує стала  $c_5$  така, що

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{\infty} \leq c_5 N^{-(r-2q-1)},$$

$$c_5 = \frac{M_{\kappa} |\sin(\pi A/B)| c_{\kappa} c_2^{-1} \|F^{(r+1)}\|}{r-2q-1}, \quad M_{\kappa} = \begin{cases} 2^{q+1/2} & (\kappa=1), \\ 1 & (\kappa=0; -1). \end{cases} \quad (3.50)$$

**Доведення.** На основі оцінки (3.47) із співвідношення (3.44) знаходимо

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{\infty} \leq |\sin(\pi A/B)| \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\hat{P}^{(\alpha, \beta)}\|_{\infty} \left\| \left( F, \hat{P}_n^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P \right\| \leq$$

$$\leq |\sin(\pi A/B)| c_2^{-1} \|F^{(r+1)}\|_{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|\hat{P}_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)}\|_{\infty}}{n^{r-q+1/2}}. \quad (3.51)$$

Але згідно з (3.21)  $\|\hat{P}_{n+\kappa}^{(\alpha, \beta)}\| \leq c_{\kappa} (n+\kappa)^{q+1/2}$  і, крім того, виконується нерівність [1047]

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(n+\kappa)^{q+1/2}}{n^{r-q+1/2}} \leq \frac{M_{\kappa} N^{-(r-2q-1)}}{r-2q-1}. \quad (3.52)$$

Тоді з (3.51) та (3.52) випливають (3.49) та (3.50). Теорема доведена. ■

## РОЗДІЛ II

### ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

#### § 4. Загальний підхід до розв'язування ССІР

Розглянемо застосування методів ортогональних поліномів та колокацій до розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР)

$$\sum_{j=1}^I \left\{ \sum_{m=1}^M \left[ A_{ij}^{mp} f_j^m(x_p) + B_{ij}^{mp} t_j^m(z_{mp}) + C_{ij}^{mp} l_j^m(z_{mp}) + \int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt + D_{ij}^p s_{pj}(x_p) / h(x_p) \right] \right\} = F_{ip}(x_p) \quad (4.1)$$

$$(x_p \in L'_p; \quad i, j = \overline{1, I}; \quad p, m = \overline{1, M})$$

з додатковими умовами, які мають певний фізичний сенс

$$\int_{L'_m} f_j^m(t) dt = Q_{mj} \quad (m = \overline{1, M}; \quad j = \overline{1, I}), \quad (4.2)$$

де

$$t_j^m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t-z}, \quad l_j^m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L'_m} f_j^m(t) \ln|t-z| dt, \quad s_{pj}(x) = \int_{-a_p}^x f_j^p(t) dt,$$

$$z_{mp} = \exp(-i\alpha_m) [x_{1p} + iy_{1p} - (x_{1m} + iy_{1m}) + x_p \exp(i\alpha_p)];$$

$A_{ij}^{mp}$ ,  $B_{ij}^{mp}$ ,  $C_{ij}^{mp}$ ,  $D_{ij}^{mp}$  – деякі коефіцієнти або гладкі функції;  $K_{ij}^{mp}$  – ядра типу Фредгольма;  $F_{ip}$  – задані на  $L'_p$  функції, що визначаються зовнішнім навантаженням;  $Q_{mj}$  – сталі;  $h$  – гладка функція або стала;  $z_{mp}$  – координати відповідної точки  $z \in L'_p$  відрізка  $L'_p$  у системі координат  $x_m O_m y_m$ , зв'язаної з центром відрізка  $L'_m$ . Координати центра відрізка  $L'_m$  в основній системі координат  $x_1 O_1 y_1$  дорівнюють  $x_{1m}, y_{1m}$ ;  $\alpha_m$  – кут, утворений віссю  $O_m x_m$  (відрізком  $L'_m$ ) з віссю  $x_1$  (рис. 4.1).

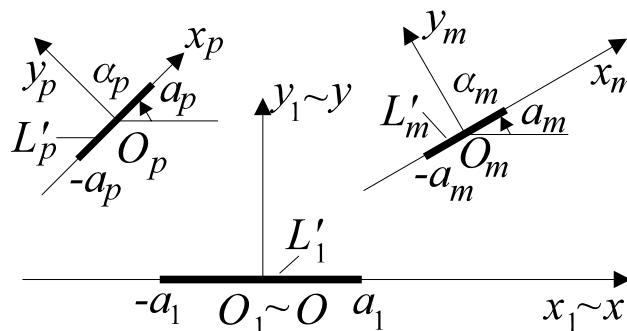


Рис. 4.1. Схема відрізків інтегрування

Загальна теорія сингулярних інтегральних рівнянь за відсутності логарифмічних ядер подана у відомих монографіях [112, 141, 171, 636, 594, 1509], де викладені методи зведення сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою їхньої регуляризації до фредгольмових рівнянь. Однак такий підхід має радше теоретичне значення, оскільки практичне застосування регуляризації є досить громіздким. Тому набули поширення прямі наближені методи розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь, загальна теорія яких викладена у [358, 376, 825]. Вкажемо тут на методи типу Рітца – Гальоркіна (проекційні) а також на ітеративні методи, серед яких слід відзначити методи колокацій, механічних квадратур та полігональний [357, 1684]. Ґрунтовну бібліографію щодо опрацювання та обґрунтування цих методів можна знайти в оглядах [164, 165, 357, 707, 1318, 1319, 1684]. Однією з причин привабливості прямих методів є те, що сингулярність типу Коші породжує числово стійкі алгоритми на відміну від нестійкості відповідних сингулярних інтегральних рівнянь 1-го роду з неінтегровними особливостями [1294].

Випадок логарифмічних ядер досліджений менш детально [1267, 1319, 1320].

Надалі основну увагу зосередимо на розв'язуванні рівняння (4.1) за умови  $A_{ij}^{mp} = 0$ , тобто коли (4.1) складає системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду ( $A_{ij}^{mp} \neq 0$ ). Однак окремі результати цього розділу будуть стосуватися і сингулярних інтегральних рівнянь другого роду. На основі результатів § 3 (формула (3.9)) розв'язок системи рівнянь (4.1), (4.2) шукаємо у вигляді ряду за ортогональними многочленами з виділеною кореневою особливістю

$$f_j^m(t) = T\left(\frac{t}{a_m}\right) \varphi_j^m\left(\frac{t}{a_m}\right), \quad T(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (4.3)$$

$$\varphi_j^m\left(\frac{t}{a_m}\right) = \sum_{n=0}^N A_n^{mj} T_n\left(\frac{t}{a_m}\right) = \sum_{n=0}^N \hat{A}_n^{mj} \hat{T}_n\left(\frac{t}{a_m}\right), \quad A_n^{mj} = \varepsilon_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{A}_n^{mj}.$$

Підставляючи (4.3) у (4.1), з урахуванням співвідношень

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}} \frac{T_n(t/a)}{t-z} dt \equiv K^{(n)}(u) = \begin{cases} U_{n-1}(x/a) & (y=0, |x| \leq a); \\ -\rho^{-n}(u) [u^2-1]^{-1/2} = U_{n-1}(u) - T_n(u) / \sqrt{u^2-1}, & \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2-u^2} U_n(t/a) \frac{dt}{t-z} = \begin{cases} T_{n+1}(x/a) & (y=0, |x| \leq a); \\ -\rho^{-n-1}(u) \equiv -T_{n+1}(u) + \sqrt{u^2-1} U_n(u), & \end{cases}$$

$$T_n(u) = \frac{1}{2} [\rho^n(u) + \rho^{-n}(u)], \quad U_n(u) = [\rho^{n+1}(u) - \rho^{-n-1}(u)] / 2\sqrt{u^2-1},$$

$$u = z/a, \quad \rho(u) = u + (u^2-1)^{1/2} = 1/\left[u - (u^2-1)^{1/2}\right]; \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{a T_n(t/a)}{\sqrt{a^2-t^2}} \ln(t-z) dt \equiv L^{(n)}(u) = \begin{cases} \ln(2/a) & (n=0, y=0, |x| \leq a), \\ -a T_n(x/a) / n & (n \neq 0, y=0, |x| \leq a); \\ a \ln[a \rho(u) / 2] & (n=0), \\ -a / [n \rho^n(u)] & (n \neq 0); \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} U_n \left( \frac{t}{a} \right) \ln(t-z) dt = \frac{a}{4} \begin{cases} 2 \ln(2/a) + T_2(x/a) & (n=0) \\ 2 [T_{n+2}(x/a)/(n+2) - T_n(x/a)/n] & (n \neq 0) \end{cases} \Big|_{|x| \leq a}; \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} 2 \ln[a\rho(u)/2] + \rho^{-2}(u) & (n=0) \\ 2 [\rho^{-n-2}(u)/(n+2) - \rho^{-n}(u)/n] & (n \neq 0) \end{cases};$$

$$\int_{-a}^x \frac{a T_n(t/a)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt \equiv a H^{(n)}(x/a) = \begin{cases} \pi - \arccos(x/a) & (n=0), \\ -\{\sin[n \arccos(x/a)]\}/n & (n \neq 0); \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\int_{-a_m}^{a_m} a_m K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) T_n(t/a_m) (a_m^2 - t^2)^{-1/2} dt \equiv K_{\phi}^{(n)}(z_{mp}/a_m) = \frac{\pi a_m}{N} \sum_{l=1}^N K_{ij}^{mp}(t_l^m, z_{mp}) T_{nl}; \quad (4.7)$$

$$t_l^m = a_m \cos \frac{2l-1}{2N} \pi; \quad T_{nl} = \cos \frac{n(2l-1)}{2N} \pi,$$

отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \left\{ A_n^{pj} H_n^p \left( \frac{x_p}{a_p} \right) + \sum_{m=1}^M A_n^{mj} G_n^{mp} \left( \frac{z_{mp}}{a_m} \right) \right\} = F_{ip}(x_p) \quad (x_p \in L'_p, \quad i = \overline{1, I}; \quad p = \overline{1, M}). \quad (4.8)$$

Тут

$$H_n^p \left( \frac{x_p}{a_p} \right) = B_{ij}^{pp} K^{(n)} \left( \frac{x_p}{a_p} \right) + C_{ij}^{pp} L^{(n)} \left( \frac{x_p}{a_p} \right) + K_{\phi}^{(n)} \left( \frac{x_p}{a_p} \right) + a_p D_{ij}^p H^{(n)} \left( \frac{x_p}{a_p} \right) / h(x_p),$$

$$G_n^{mp} \left( z_{mp}/a_m \right) = B_{ij}^{mp} K^{(n)} \left( z_{mp}/a_m \right) + C_{ij}^{mp} L^{(n)} \left( z_{mp}/a_m \right) + K_{\phi}^{(n)} \left( z_{mp}/a_m \right). \quad (4.9)$$

Штрих над символом підсумовування  $\Sigma$  означає, що підсумовування поширюється на всі значення  $m$ , окрім  $m = p$ .

Підставляючи (4.3) у (4.2), отримаємо співвідношення

$$A_0^{mj} = \frac{Q_{mj}}{\pi}. \quad (4.10)$$

Зазначимо, що функцію  $\varphi_j^m$  можна шукати і у вигляді скінченного ряду за іншою повною системою функцій, зокрема, й за степенями  $t/a_m$ . Однак практика роботи з такими рядами [978] засвідчила не лише складність побудови визначальних систем лінійних алгебричних рівнянь, але й дуже повільну збіжність процесу, побудованого за схемою методу ортогональних многочленів: під час розв'язування автором плоскої задачі про концентрацію напружень на тонкому пружному включенні у необмеженому тілі навіть 35 членів степеневого ряду не могли дати точності в 1 %, забезпечуваної вже 4-ма членами ряду поліномів Чебишева. Тому застосування ортогональних многочленів до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь отримало найбільшого поширення. На користь їхнього застосування можна додати і те, що у фізичних задачах крайні точки області інтегрування є точками геометричної сингулярності і переважно дослідження поведінки шуканої функції в околі цих точок є головною метою розв'язування задачі. Основну інформацію про це поведінку містить канонічна функція відповідного характеристичного рівняння, яка є ваговою для деякої системи ортогональних многочленів.

## § 5. Метод ортогональних многочленів

Застосування до вивчення складних змішаних задач методу ортогональних многочленів (МОМ) набуло великого поширення. Сутність його полягає у здійсненні таких кроків. Виділяють особливу частину ядра інтегрального рівняння, до якого зводиться дана мішана задача, і знаходять власні функції інтегрального оператора, що відповідає цій частині. Переважно власні функції формують певну систему класичних ортогональних многочленів (див. п. 3.1). Відому функцію, що входить у праву частину інтегрального рівняння, і його розв'язок подають у вигляді ряду за цими многочленами. Регулярну частину ядра розвивають у подвійний ряд. Після цього інтегральне рівняння легко зводять до безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язують методом редукції. Початок застосуванню та розвитку методу ортогональних многочленів поклали праці [407, 837, 806, 803, 804, 808, 805, 626, 17, 24, 379, 1267, 1274].

Однак, попри вдале застосування такої методики визначення величини похибки, залежної від кількості взятих членів згаданих вище рядів, відсутнє навіть у найпростіших випадках. Для кожного з них, як правило, здійснюється дослідження регулярності розв'язуваних систем лінійних алгебричних рівнянь [377, 969], що дає можливість лише констатувати збіжність процесу, не торкаючись все ж визначення величини похибки. Для складних за структурою інтегральних рівнянь навіть такі дослідження, як правило, не здійснюють, обмежуючись констатацією практичної збіжності (порівнюючи числові значення наступних наближень обчислюваних характеристик з попередніми).

Точність методу ортогональних многочленів, хоч і неповно, обговорювалася у публікаціях [290, 1267, 1135, 1469, 33\*]. У праці М.Шлейффа [33\*] на основі узагальнення методу редукції доведена збіжність методу ортогональних многочленів для деякого сингулярного інтегрально-диференціального рівняння, близького за формою до рівняння Прандтля. У роботі [1435] S.Krenk довів збіжність наближеного розв'язку, одержаного за допомогою методу ортогональних многочленів для сингулярного інтегрального рівняння другого роду з особливим ядром типу Коші. Загальніші результати для таких рівнянь випливають зі статті [290], де, зокрема, доводиться збіжність наближеного розв'язку до точного у вагових просторах.

У цьому параграфі на основі однієї модифікації загального методу Бубнова–Гальоркіна наводиться і обґрунтовується обчислювальна схема методу ортогональних многочленів. В ролі власних функцій беруться многочлени Якобі і Чебишева. Доводиться рівномірна збіжність методу ортогональних многочленів, а збіжність у середньому отримується як наслідок рівномірної збіжності. Одержані середньоквадратичні і рівномірні оцінки похибок. Ці результати застосовуються до сингулярних інтегральних рівнянь з регулярним ядром певного типу, що зустрічається у плоских задачах теорії пружності для тіл з включеннями і накладками скінченної довжини.

Результати пп. 5.1, 5.2 отримані сумісно з О.О.Євтушенком та ще не публікувалися.

### 5.1. Метод ортогональних многочленів у розв'язуванні сингулярних інтегральних рівнянь другого роду

#### Стійкість

У п. 3.2. досліджене питання побудови наближеного розв'язку характеристичної частини (3.33) сингулярного інтегрального рівняння (3.27) другого роду у вигляді (3.31), де функцію  $\varphi(x)$  апроксимують скінченним рядом (3.38). Тепер вивчимо поведінку розв'язку сингулярного інтегрального рівняння (3.27) у випадку  $C = 0$ , виділивши у ядрі  $K$  множник  $\lambda$ . Запишемо це рівняння у вигляді

$$(\mathbf{S} + \lambda \mathbf{K})\varphi(x) = F(x) \quad (|x| \leq 1), \quad \mathbf{S} = Aw + \mathbf{H}_T, \quad \mathbf{K}\varphi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K(\xi, x) dp(\xi) \quad (5.1)$$

і дослідимо поведінку розв'язку за малих збурень функцій  $K(x, t)$  і  $F(x)$ .

**Теорема 5.1.** Нехай  $\{K_N(x, t)\}$  і  $\{F_N(x)\}$  – такі дві послідовності функцій, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|K(t, x) - K_N(t, x)\|_{\infty} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|F(x) - F_N(x)\|_{\infty} = 0,$$

а  $\varphi_N(x)$  – розв'язок рівняння  $(\mathbf{S} + \lambda \mathbf{K}_N)\varphi_N = F_N$ . Тоді норма похибки

$$\varepsilon_N = \varphi - \varphi_N; \quad (5.2)$$

$$\|\varepsilon_N\|_{\infty} = \|\varphi - \varphi_N\|_{\infty} \leq c_{\sigma} \left( \|\Delta K_N^*\|_{\infty} + \|\Delta F_N^*\|_{\infty} \right), \quad (5.3)$$

де позначено

$$\Delta K_N^*(x) = \frac{1}{A^2 + B^2} \int_{-1}^1 w(t) \varphi(t) \mathbf{R}[K(t, x) - K_N(t, x)] dt, \quad \Delta F_N^*(x) = \frac{\mathbf{R}[F(x) - F_N(x)]}{A^2 + B^2}; \quad (5.4)$$

оператор  $\mathbf{R}$  визначений співвідношенням (3.35).

Регуляризуючи рівняння

$$(\mathbf{S} + \lambda \mathbf{K}_N)\varepsilon_N = -\lambda(\mathbf{K} - \mathbf{K}_N)\varphi + F - F_N \quad (5.5)$$

одним із методів роботи [636], отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{Q}_N)\varepsilon_N = G_N + c. \quad (5.6)$$

Тут  $c$  – невизначена дійсна стала

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{Q}_N \\ \mathbf{Q} \end{matrix} \right\} \varepsilon_N = \int_{-1}^1 \left\{ \begin{matrix} q_N(t, x) \\ q(t, x) \end{matrix} \right\} \varepsilon_N(t) dt, \quad \left\{ \begin{matrix} q_N(t, x) \\ q(t, x) \end{matrix} \right\} = -\frac{w(t)}{A^2 + B^2} \mathbf{R} \left\{ \begin{matrix} K_N(t, x) \\ K(t, x) \end{matrix} \right\}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{E}\varepsilon_N = \varepsilon_N(x), \quad G_N(x) = -\lambda \Delta K_N^*(x) + \Delta F_N^*(x);$$

$q(t, x)$  – аналогічне до  $q_N(t, x)$  ядро, з тою лиш різницею, що замість функції  $K_N(t, x)$  береться  $K(t, x)$ , а  $\mathbf{Q}$  – оператор, що згідно з (5.7) відповідає ядру  $q(t, x)$ . Оскільки ядро  $q_N(t, x)$  – фредгольмове і, крім того, на основі припущень теореми  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|q - q_N\|_{\infty} = 0$ , розв'язок інтегрального рівняння (5.5) за теорією рівнянь Фредгольма [1029] для значень параметра  $\lambda$ , відмінних від власних значень оператора  $\mathbf{Q}$ , має вигляд

$$\varepsilon_N = (\mathbf{E} + \lambda \mathbf{\Gamma}_N)(G_N + c). \quad (5.8)$$

Тут позначено

$$\mathbf{\Gamma}_N \varphi = \int_{-1}^1 \mathbf{\Gamma}_N(t, x, \lambda) \varphi(t) dt, \quad \mathbf{\Gamma}_N(t, x, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} q_{iN}(t, x), \quad (5.9)$$

$$q_{iN}(t, x) = \int_{-1}^1 q_N(\tau, x) q_{i-1, N}(\tau, x) d\tau, \quad q_{1N}(t, x) = q_N(t, x) \quad (i = 2, 3, \dots).$$

У випадку, якщо індекс  $\kappa$  сингулярного інтегрального рівняння (5.1) дорівнює 0 або  $-1$ , сталу  $c$  у розв'язку (5.8) можна вважати нульовою; якщо ж  $\kappa = 1$ , то для визначення  $c$  слугує умова (3.36), на основі якої



$$c = \frac{\int_{-1}^1 w(x)(\mathbf{E} + \lambda \Gamma_N) G_N(x) dx}{\int_{-1}^1 w(x)(\mathbf{E} + \lambda \Gamma_N) dx}. \quad (5.10)$$

Тому якщо  $\kappa = 1$ , слушна оцінка

$$c \leq \|G_N\|_{\infty}. \quad (5.11)$$

Резольвенту  $\Gamma_N(t, x, \lambda)$  ядра  $q_N(t, x)$  мажоруємо рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} (2|\lambda| \cdot \|q_N\|_{\infty})^{i-1}. \quad (5.12)$$

З урахуванням (5.11) і (5.12) з (5.8) знаходимо

$$\|\varepsilon_N\|_{\infty} \leq \|G_N\|_{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (2|\lambda| \cdot \|q_N\|_{\infty})^i. \quad (5.13)$$

Ряд, який міститься у правій частині нерівності (5.13), збіжний при

$$|\lambda| < 1/(2\|q_N\|_{\infty}). \quad (5.14)$$

Залишилося отримати рівномірну оцінку для ядра  $q_N(x, t)$ . Для цього вважатимемо, що функція  $K_N(t, x)$  – гельдерівська з показником густини  $0 < \mu_1, \mu_2 \leq 1$  за переміщеннями  $t$  та  $x$  відповідно. Тоді з (5.7) отримуємо

$$\|q_N\|_{\infty} \leq \frac{1}{A^2 + B^2} \left\{ -|A| \|K_N\|_{\infty} + \sup_{-1 \leq x, t \leq 1} \left| w(t) \left( \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[K_N(t, \tau) - K_N(t, x)] d\tau}{(\tau - x) w(\tau)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{B}{\pi} K_N(t, x) \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - x) w(\tau)} \right) \right| \right\}.$$

Але згідно з (3.23)

$$\frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - x) w(\tau)} = \frac{A}{w(x)} + \frac{B}{\sin \pi A} \hat{P}_{\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

і тоді

$$\|q_N\|_{\infty} \leq \frac{1}{A^2 + B^2} \left\{ c_7 \|K_N\|_{\infty} + c_8 \max_{-1 \leq x, t \leq 1} \sup \frac{|K_N(t, x) - K_N(t, \tau)|}{|x - \tau|^{\mu_1}} + \right. \\ \left. + c_9 \max_{-1 \leq x, t \leq 1} \sup \frac{|K_N(t, x) - K_N(s, x)|}{|t - s|^{\mu_2}} \right\} \leq \max \{c_7, c_8, c_9\} \frac{\|K_N\|_H}{A^2 + B^2}. \quad (5.15)$$

Тут

$$c_7 = \frac{|B|}{|\sin \pi A|} \max_{-1 \leq x, t \leq 1} \left[ |w(t)| \left| \hat{P}_{\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \right], \\ c_8 = \frac{|B|}{\pi} \max_{-1 \leq x, t \leq 1} \left\{ |w(t)| \int_{-1}^1 \frac{|x - \tau|^{\mu_1 - 1}}{|w(\tau)|} d\tau \right\}, \quad c_9 = \max_{-1 \leq x, t \leq 1} \int_{-1}^1 \frac{|t - s|^{\mu_2}}{|w(s)|} ds.$$

Таким чином, достовірність оцінки (5.3) доведена. ■

**Зауваження 1.** Теорема 5.1 справедлива для значень параметра  $\lambda$ , які відмінні від власних чисел оператора  $\mathbf{Q}$  (див. (5.7)) та задовольняють нерівність (5.14). ■

**Зауваження 2.** В окремих випадках значень  $\mu_1$  і  $\mu_2$  (див., наприклад, [1122]), інтеграли, що фігурують у визначенні сталих  $c_8, c_9$ , вдається оцінити. ■

Тепер нехай

$$\left\{ K_N(t, x), F_N(x) \right\} = \sum_{i=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N \alpha_{ij} \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)}(t), \beta_i \right\} \hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)}(x), \quad (5.16)$$

$$\alpha_{ij} = \left( \hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)}, \left( K(x, \cdot), \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)} \right)_P \right), \quad \beta_i = \left( F, \hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)} \right)_P.$$

Нагадаємо, що сингулярне інтегральне рівняння для функцій  $K_N(t, x)$  і  $F_N(x)$  має вигляд (5.4) з додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 w(x) \varphi_N(x) dx = Q \quad \text{при } \kappa = 1; \quad (5.17)$$

$$U(F_N - \mathbf{K}_N \varphi_N) = 0 \quad \text{при } \kappa = -1. \quad (5.18)$$

Розв'язком рівняння (5.4) буде сума (3.38), де коефіцієнти розвинення  $A_n$  визначаються зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$-\frac{B \hat{A}_{n+\kappa}}{\sin \pi \alpha} \lambda \sum_{j=0}^N \alpha_{nj} \hat{A}_j = \beta_n \quad (n = \overline{0, N}). \quad (5.19)$$

У випадку  $\kappa = 1$  система (5.19) дає  $N + 1$  рівняння для знаходження  $N + 2$  коефіцієнтів  $\hat{A}_0 \dots \hat{A}_{N+1}$ . Додаткове рівняння дає умова (5.17), на основі якої отримуємо залежність (3.41) для  $\hat{A}_0$ .

### Збіжність

Збіжність обчислювального процесу методу ортогональних многочленів гарантує

**Теорема 5.2.** Якщо  $F(x) \in \mathbb{C}^{(r_1+1)}(-1; 1)$ ,  $r_1 \geq E[2(q+1)]$ ,

$K(t, x) \in \mathbb{C}^{(r_2+1)}(-1; 1)$ ,  $r_2 \geq E[2(q+1)]$  (за обома змінними), де  $-1/2 \leq q \equiv \text{Re} \max(\alpha, \beta) < 1$ , то

$$\|\varphi - \varphi_N\| \leq c_{10} N^{-(r-2q-1)}, \quad r = \min\{r_1, r_2\}. \quad (5.20)$$

**Доведення.** Внаслідок неперервності функції  $K(t, x)$

$$K(t, x) - K_N(t, x) = \sum_{\sigma} \alpha_{ij} \hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)}(x) \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)}(t), \quad \sum_{\sigma} (\cdot) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} (\cdot) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^N (\cdot).$$

Тоді для функції  $\Delta K_N^*(x)$  вираз (5.4) можемо записати

$$\Delta K_N^*(x) = \frac{1}{A^2 + B^2} \int_{-1}^1 w(t) \varphi(t) \sum_{\sigma} \alpha_{ij} \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)}(t) \left\{ aw(x; -\alpha, -\beta) \hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)}(x) - \right. \\ \left. - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 w(t; -\alpha, -\beta) \hat{P}_i^{(-\alpha, -\beta)}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - x} \right\} dt = -\sin \frac{\pi\alpha}{B} \int_{-1}^1 w(t) \varphi(t) \sum_{\sigma} \alpha_{ij} \hat{P}_{i+\kappa}^{(\alpha, \beta)}(x) \hat{P}_i^{(\alpha, \beta)}(t) dt.$$

Тут враховано, що згідно з [1276]  $A^2 + B^2 = B^2 / \sin^2 \pi\alpha$ .

Позначимо

$$\psi_j(x) = \left( K^*(\cdot, x), \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)} \right).$$

На основі леми 3.1

$$|\alpha_{ij}| \leq c_2^- i^{-(r_2 - q + 1/2)} \left\| \psi_j^{(r_2 + 1)}(x) \right\|_{\infty}.$$

Застосувавши цю ж лему до  $\psi_j^{(r_2 + 1)}(x)$ , отримаємо

$$|\alpha_{ij}| \leq c_2^+ c_2^- i^{-(r_2 - q + 1/2)} j^{-(r_2 - q + 1/2)} \left\| K^{(r_2 + 1), (r_2 + 1)} \right\|_{\infty}$$

і тоді

$$\sum_{\sigma} |\alpha_{ij}| \left\| \hat{P}_{i+\kappa}^{(\alpha, \beta)} \right\|_{\infty} \left\| \hat{P}_j^{(\alpha, \beta)} \right\|_{\infty} \leq c_{\kappa}^2 c_2^+ c_2^- \left\| K^{(r_2 + 1), (r_2 + 1)} \right\|_{\infty} \sum_{\sigma} \frac{(i + \kappa)^{q + 1/2} j^{q + 1/2}}{i^{r_2 - q + 1/2} j^{r_2 - q + 1/2}}. \quad (5.21)$$

Розглянемо окремо кожний доданок в кожній частині нерівності (5.21) [1047]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + \kappa)^{q + 1/2}}{i^{r_2 - q + 1/2}} \leq M_{\kappa} \zeta(r_2 - 2q), \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^{r_2 - 2q}} \leq \frac{n^{-(r_2 - 2q - 1)}}{r_2 - 2q - 1}, \quad (5.22)$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(1 + \kappa)^{q + 1/2}}{i^{r_2 - q + 1/2}} \leq \frac{M_{\kappa} n^{-(r_2 - 2q - 1)}}{r_2 - 2q - 1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{r_2 - 2q}} \leq M = 1 + \frac{1}{2^{r_2 - 2q}} + \frac{1}{2^{r_2 - 2q - 1} - 1},$$

$\zeta(x)$  – дзета-функція Рімана [191].

З урахуванням (5.22) маємо

$$\left\| \Delta K_N^* \right\|_{\infty} \leq c_{11} N^{-(r_2 - 2q - 1)}, \quad (5.23)$$

$$c_{11} = \frac{|\sin \pi\alpha| M_{\kappa} c_{\kappa} c_2^+ c_2^- c_3 \{M + \zeta(r_2 - 2q)\} \left\| K^{(r_2 + 1), (r_2 + 1)} \right\|_{\infty}}{|B|(r_2 - 2q - 1)} \cdot \|\varphi\|_{\infty}.$$

Аналогічно, для  $\Delta F_N^*(x)$  знаходимо

$$\left\| \Delta F_N^* \right\|_{\infty} \leq c_5 N^{-(r_1 - 2q - 1)}. \quad (5.24)$$

Тепер з (5.2), (5.23) впливає (5.20), причому  $c_{10} = c_5 c_6 c_{11}$ .

Норма збіжності буде тим вищою, чим більший ступінь гладкості регулярного ядра і правої частини вихідного сингулярного інтегрального рівняння. ■

## 5.2. Збіжність методу ортогональних многочленів за розв'язування сингулярного інтегрального рівняння першого роду

Якщо у рівнянні (3.27)  $A \equiv 0$ ,  $C = 0$ , то у рівнянні (5.1) оператор  $S = \mathbf{H}_T$  і отримуємо відповідні результати для сингулярного інтегрального рівняння першого роду. У цьому ви-

падку  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} + \left\{ \begin{matrix} L \\ M \end{matrix} \right\}$ . Зокрема, якщо зафіксувати  $\kappa = 1$ , то  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  і буде справедливим перехід (3.24) від поліномів Якобі до поліномів Чебишева першого роду; якщо ж  $\kappa = 1$ , то  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  і буде справджуватися перехід (3.25) від поліномів Якобі до поліномів Чебишева другого роду з відповідним модифікуванням усіх тверджень та залежностей.

Вибір параметрів  $\alpha, \beta$  характеристичної функції поряд з індексом  $\kappa$  сингулярного інтегрального рівняння (його характеристичної частини) визначає клас  $\Pi^{(\alpha, \beta)}(f)$ , у якому шукають розв'язок  $f$  рівняння. Визначальними є фізичний зміст функції  $f$  та конкретні особливості задачі. Якщо  $f$  має зміст напружень, деформацій чи теплових потоків, то її можна шукати в класі  $\Pi^{(-1/2, -1/2)}(f)$ ; якщо ж  $f$  є величиною типу переміщень чи температури, то вона належатиме до класу  $\Pi^{(1/2, 1/2)}(f)$ . У аеро- та гідромеханіці переважно накладають умову Кутта [55]  $\lim_{x \rightarrow -1(1)} f(x) = 0$  і тому розв'язок шукають або у класах  $\Pi^{(1/2, -1/2)}(f)$ , або  $\Pi^{(-1/2, 1/2)}(f)$ .

У ролі ядра Фредгольма рівняння (3.27) розглянемо функцію

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x-t) + k(t, x), \quad (5.25)$$

де  $k(t, x)$  – неперервна (за обома змінними) функція.

Ядра такого типу зустрічаються в задачах плоскої теорії пружності про передачу пластинкам навантаження від накладок і тонкостінних включень скінченної довжини [1505, 626] та ін.

Для визначеності покладемо індекс сингулярного інтегрального рівняння  $\kappa = 1$  та вважатимемо без зменшення загальності, що  $B \equiv 1$  (подібний аналіз для випадків  $\kappa = 0$  і  $\kappa = -1$  можна здійснити аналогічно). Тоді подібно до (5.16)

$$\begin{aligned} \{K_N(t, x), F_N(x)\} &= \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{j=0}^N (\alpha_{ij} + B_{ij}) \hat{T}_j(t), \beta_i \right\} \hat{U}_i(x), \\ B_{ij} &= \left( \hat{U}_i, \left( \frac{1}{2} \text{sign}(x-\cdot), \hat{T}_j \right)_T \right)_U = \frac{4(j+1)}{[(i+1)^2 - j^2][(i+1)^2 - (j+2)^2]} \cos^2 \frac{(i+j)\pi}{2}, \quad (5.26) \\ \alpha_{ij} &= \left( \hat{U}_i, (k(x, \cdot), \hat{T}_j)_T \right)_U, \quad \beta_i = (F, \hat{U}_i)_U. \end{aligned}$$

Послідовність сингулярних інтегральних рівнянь для функцій  $K_N(t, x)$ ,  $F_N(x)$  записується

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_N(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} dt + \lambda \int_{-1}^1 \frac{K_N(t, x) \varphi_N(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = F_N(x); \quad (5.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_N(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = Q. \quad (5.28)$$

Розв'язок рівнянь (5.27), (5.28) шукаємо у вигляді

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=0}^N \hat{A}_i \hat{T}_i(x) = \sum_{i=0}^N A_i T_i(x), \quad A_i = \varepsilon_i \sqrt{2/\pi} \hat{A}_i, \quad (5.29)$$

причому на основі (5.28)  $\hat{A}_0 = Q/\sqrt{\pi}$ ,  $A_0 = Q/\pi$ . Інші коефіцієнти розвинення (5.29)  $\{\hat{A}_1 \dots \hat{A}_N\}$  чи  $\{A_1 \dots A_N\}$  визначаються зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \hat{A}_j = \hat{\beta}_i, \quad (5.30)$$

де

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \lambda(\alpha_{i-1,j} + B_{i-1,j}), \quad \hat{\beta}_i = \beta_{i-1} - (\alpha_{i-1,0} + B_{i-1,0}) \hat{A}_0 \quad (i, j = \overline{1, N}). \quad (5.31)$$

Збіжність процесу доводить

**Теорема 5.3.** Якщо  $F(x) \in C^{(r_1+1)}(-1, 1)$  ( $r_1 \geq 1$ ),  $K(t, x) \in C^{(r_2+1)}(-1, 1)$  ( $r_2 \geq 1$ ) (за обома змінними), то

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{\infty} \leq c_{12} n^{-r} + c_{13} \left[ (2N-1)^{-1} + (2N+3)^{-2} \right], \quad r = \min\{r_1, r_2\}. \quad (5.32)$$

**Доведення.** Оскільки  $K(t, x) - K_N(t, x) = \sum_{\sigma} (\alpha_{ij} + B_{ij}) \hat{U}_i(x) \hat{T}_j(t)$ , де

$\sum_{\sigma} (\cdot) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} (\cdot) + \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\cdot)$ , то для функції  $\Delta K_N^*(x)$  (5.3) при  $\alpha = \beta = -1/2$  маємо

$$\Delta K_N^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(s) \sum_{\sigma} (\alpha_{ij} + B_{ij}) \hat{T}_j(s) \hat{T}_{j+1}(x) ds.$$

Ввівши  $\psi_j(x) = \left( k^{(*}, x), \hat{T}_j \right)_T$  і застосувавши лему 3.1, отримаємо

$$|\alpha_{ij}| \leq \sqrt{2\pi} c_4 i^{-(r_2+1)} \left\| \psi_j^{(r_2+1)}(x) \right\|_{\infty}.$$

Повторне використання цієї ж леми дає

$$|\alpha_{ij}| \leq \pi c_4^2 \left\| k^{(r_2+1), (r_2+1)} \right\|_{\infty} i^{-(r_2+1)} j^{-(r_2+1)}.$$

і тоді

$$\sum_{\sigma} |\alpha_{ij}| \leq \pi c_{14} n^{-r_2}, \quad (5.33)$$

де

$$c_{14} = \frac{c_4^2}{r_2} \left\| k^{(r_2+1), (r_2+1)} \right\|_{\infty} \left[ M + \zeta(r_2+1) \right], \quad M = 1 + 1/2^{r_2+1} + 1/(2^{r_2} - 1).$$

На основі виразу (5.26) для  $B_{ij}$  неважко показати (див. 1.421.1–1.421.3 [191]), що

$$\sum_{\sigma} |B_{ij}| \leq 0,25\pi \left[ (2N-1)^{-1} + (2N+1)^{-1} + (2N+3)^{-2} \right]. \quad (5.34)$$

З урахуванням нерівності (5.33) і (5.34) для функції  $\Delta K_N^*(x)$  виконується така рівномірна оцінка

$$\left\| \Delta K_N^{*-} \right\|_{\infty} \leq 2 \|\varphi\|_{\infty} \left\{ c_{14} N^{-r_2} + 0,25 \left[ (2N-1)^{-1} + (2N+1)^{-1} + (2N+3)^{-2} \right] \right\}. \quad (5.35)$$

Подібним чином для  $\Delta F_N^*(x)$  отримуємо

$$\left\| \Delta F_N^*(x) \right\|_{\infty} \leq c_{15} N^{-r_1}, \quad c_{15} = c_4 \left\| F^{(r_1+1)} \right\|_{\infty}. \quad (5.36)$$

Тому з використанням (5.35), (5.36) нерівність (5.2) дає

$$\left\| \varphi - \varphi_N \right\|_{\infty} \leq c_{12} N^{-r} + c_{13} \left[ (2N-1)^{-1} + (2N+1)^{-1} + (2N+3)^{-2} \right], \quad (5.37)$$

де

$$c_{12} = c_6 (2c_{14} \|\varphi\|_{\infty} + c_{15}), \quad c_{13} = 0,25c_6 \|\varphi\|_{\infty},$$

$$c_6 = \sum_{i=0}^{\infty} (2\lambda \|q_N\|_{\infty})^i, \quad q_N(t, x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{K_N(s, t) \sqrt{1-s^2} ds}{s-x}.$$

Безмежний ряд, що фігурує в означенні сталої  $c_6$ , буде збігатися за умови (5.14). При цьому легко побачити, що врахування членів, що містять степені  $\lambda$  до  $m$ -ї включно, приводить до похибки, що не перевищує [594]

$$\varepsilon_0 = \frac{(2|\lambda| \cdot \|q_N\|_{\infty})^{m+1}}{1 - 2|\lambda| \cdot \|q_N\|_{\infty}}. \quad (5.38)$$

Оцінюючи ядра  $q_N(t, x)$ , маємо

$$q_N(t, x) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^N (\alpha_{ij} + B_{ij}) \hat{T}_j(t) \int_{-1}^1 \frac{\hat{T}_j(s) \sqrt{1-s^2}}{s-x} ds = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^N (\alpha_{ij} + B_{ij}) \hat{T}_{i+1}(x) \hat{T}_j(t).$$

Звідси з урахуванням (5.33), (5.34) знаходимо

$$\|q_N\|_{\infty} \leq \frac{2}{\pi} \left[ M^2 c_4^2 \left\| k^{(r_2+1), (r_2+1)} \right\|_{\infty} + 0,25 \right].$$

Отримані у цьому підпункті результати для одного рівняння (3.27) (при  $A=0$ ,  $B=1$ ,  $C=0$ ) легко узагальнюються на випадок системи рівнянь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_i(t)}{t-x} dt + \lambda \sum_{j=1}^r \int_{-1}^1 K_{ij}(x, t) f_j(t) dt = F_i(x) \quad (|x| \leq 1; \quad i = \overline{1, I}). \quad (5.39)$$

Зокрема, послідовність наближень (5.28) збігається за малих  $\lambda$ , що задовольняють нерівності

$$|\lambda| \leq \left\{ \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^r 2 \|q_{ijN}\|_{\infty} \right\}^{-1}, \quad (5.40)$$

де

$$q_{ijN}(t, x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{K_{ij}(s, t) \sqrt{1-s^2}}{s-x} ds.$$

### 5.3. Основна схема методу ортогональних многочленів для системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду

Якщо домножити кожне з рівнянь (4.8) на систему функцій

$$K_k(x_p) = \sqrt{a_p^2 - x_p^2} U_k(x_p / a_p) \quad (k = \overline{0, N-1}; \quad x \in [-a_p; a_p]) \quad (5.41)$$

і зінтегрувати по  $x_p$  в межах від  $-a_p$  до  $a_p$ , то отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь, споріднену з

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \left[ A_n^{pj} H_{nk}^p + \sum_{m=1}^M A_n^{mj} G_{nk}^{mp} \right] = F_{ipk} \quad (i = \overline{1, I}; \quad p = \overline{1, M}; \quad k = \overline{0, N-1}),$$

$$\left\{ H_{nk}^p, G_{nk}^{mp}, F_{ipk} \right\} = \int_{-a_p}^{a_p} \left\{ H_n^p(x_p/a_p), G_n^{mp}(z_{mp}/a_m), F_{ip}(x_p) \right\} \sqrt{a_p^2 - x_p^2} U_k(x_p/a_p) dt, \quad (5.42)$$

що разом із рівнянням (4.10) реалізує метод ортогональних многочленів [626].

У порівнянні з іншими методами розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь (колокацій та механічних квадратур [706]) метод ортогональних многочленів найзручніший та вимагає найменших витрат машинного часу, однак його незручно або складно застосовувати, коли у рівняння входять складні ядра Фредгольма і функції  $F_{ip}$ .

Розглянемо окремо випадок, коли  $m = p$  (тоді  $z_{mp} = x_p$ ) і ядро Фредгольма  $K_{ij}^{pp}(t, z_{pp}) = K_{ij}^{pp}(t, x_p)$  має вигляд

$$K_{ij}^{pp}(t, z_{pp}) = K_{ij}^{pp}(t, x_p) = \frac{1}{2} \text{sign}(x_p - t) / h(x_p), \quad (5.43)$$

де

$$h(x) = h_0 \left[ 1 - (x/a)^2 \right]^{1/2\beta} \quad (|x| \leq a \sim a_p, \quad \beta \geq 1). \quad (5.44)$$

Для такого ядра справедливий зв'язок з  $s_{pj}(x_p)$ :

$$\int_{L'_p} K_{ij}^{pp}(t, z_{pp}) f_j^p(t) dt = \left[ s_{pj}(x_p) - \frac{1}{2} A_{pj} \right] / h(x_p). \quad (5.45)$$

Тоді

$$H_n^p(x_p/a_p) = K_\phi^{(n)}(x_p/a_p) = \frac{1}{h(x_p)} \begin{cases} \arcsin(x_p/a_p) & (n=0), \\ \sin[n \arccos(x_p/a_p)] & (n \geq 1); \\ -\frac{\sin[n \arccos(x_p/a_p)]}{n} & (n \geq 1); \end{cases} \quad (5.46)$$

$$H_{nk}^p = -\frac{H_{nk}^{p\beta}}{h_0}, \quad H_{nk}^{p\beta} = \frac{\pi \Gamma(2\nu)}{p 4^\nu} \sum_{m=0,1} (-1)^m \frac{\sin(n_m \pi)}{\Gamma(1+\nu+n_m) \Gamma(\nu-n_m)}, \quad (5.47)$$

$$2n_m = k + (-1)^m n, \quad \nu = 1 - \frac{1}{2\beta}.$$

Зокрема,

$$H_{nk}^{p\infty} = -\frac{4(k+1) \sin^2(n_0 \pi)}{\left[ n^2 - (k+2)^2 \right] \left[ n^2 - k^2 \right]} \equiv -B_{n-1, k} =$$

$$= -\begin{cases} \frac{4(k+1)}{\left[ n^2 - (k+2)^2 \right] \left[ n^2 - k^2 \right]} & (k+n - \text{парне}), \\ 0 & (k+n - \text{непарне}), \end{cases} \quad n_0 = \frac{k+n}{2}; \quad (5.48)$$

$$H_{nk}^{p1} = \frac{\pi}{2n} \delta_n^{k+1}. \quad (5.49)$$

Значення  $\beta = \infty$  відповідає сталому значенню функції  $h(x_p) = h_0$ .

Для стислості подальшого запису розглянемо одне рівняння ( $p=1$ ,  $a_1 \sim a$ ,  $A_{mj} \sim A$ ,  $A_n^{mj} \sim A_n$ )

$$t(x) + \int_{-a}^a K(t, x) f(t) dt = F(x), \quad t(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t-x} \quad (x \in L'_1 = [-a; a]) \quad (5.50)$$

з додатковою умовою

$$\int_{-a}^a f(t) dt = Q. \quad (5.51)$$

Тоді аналог рівняння (4.8) набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^N [A_{n+1} U_n(x/a) + A_n H_n(x/a)] = F(x) \quad (|x| \leq a), \quad (5.52)$$

$$H_n(x/a) = \int_{-a}^a a K(t, x) T_n(t/a) (a^2 - t^2)^{-1/2} dt,$$

а відповідник системи лінійних алгебричних рівнянь (5.42), (4.10) методу ортогональних многочленів – квазірегулярна [969] система

$$\frac{\pi}{2} A_{k+1} + \sum_{n=0}^N H_{nk} A_n = F_k - H_{0k} A_0, \quad A_0 = \frac{Q}{\pi}, \quad (5.53)$$

$$\{H_{nk}, F_k\} = \int_{-a}^a \{H_n(x/a), F(x)\} \sqrt{a^2 - x^2} U(x/a) dt \quad (k = \overline{0, N-1}).$$

Для ядра  $K(t, x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x-t)/h(x)$ , де функція  $h(x)$  визначена формулою (5.44),

$$H_{nk} \sim -H_{nk}^{p\beta} / h_0.$$

Якщо функцію  $F(x)$  правої частини рівняння (5.52) можна подати у вигляді суперпозиції функцій

$$F(x) = \sum_{r=1}^3 [\alpha_{1r} J_{2r-1}(x, b) + \alpha_{2r} J_{2r}(x, b)], \quad (5.54)$$

де

$$J_1(x, b) = \frac{b}{x^2 + b^2}, \quad J_2(x, b) = \frac{x}{x^2 + b^2}, \quad J_3(x, b) = \frac{b^3}{(x^2 + b^2)^2},$$

$$J_4(x, b) = \frac{xb^2}{(x^2 + b^2)^2}, \quad J_5(x, b) = \frac{b^5}{(x^2 + b^2)^3}, \quad J_6(x, b) = \frac{xb^4}{(x^2 + b^2)^3},$$

то на основі теорії лишків [635, 112]



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{J_1(x,b), J_2(x,b), J_3(x,b), J_4(x,b), J_5(x,b), J_6(x,b)\} \frac{dt}{t-x} = \\ & \left\{ -J_2(x,b), J_1(x,b), -\frac{1}{2}J_2(x,b) - J_4(x,b), -\frac{1}{2}J_1(x,b) + J_3(x,b), \right. \\ & \left. -\frac{3}{8}J_2(x,b) - \frac{1}{2}J_4(x,b) - J_6(x,b), -\frac{1}{8}J_1(x,b) + \frac{1}{2}J_3(x,b) + J_5(x,b) \right\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

і очевидно, що інтеграл типу Коші від функції  $F(x)$  теж буде суперпозицією цих же функцій:

$$T(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t) dt}{t-x} = \sum_{r=1}^3 [\beta_{1r} J_{2r-1}(x,b) + \beta_{2r} J_{2r}(x,b)]. \quad (5.56)$$

Для функцій  $J_r(x,b)$  на проміжку  $[-a; a]$  слушні одержані на основі формули (3.616.7) [191] розвинення

$$\begin{aligned} J_{2r-1}(x,b) &= \sum_{l=0}^{\infty} J_{2r-1}^l(a,b) U_{2l}(x/a), \\ J_{2r}(x,b) &= \sum_{l=0}^{\infty} J_{2r}^l(a,b) U_{2l+1}(x/a) \quad (r=1,2,3), \end{aligned} \quad (5.57)$$

де

$$\begin{aligned} J_1^l(a,b) &= \frac{2 \operatorname{sign}(b) \sqrt{-cc^l}}{a}, \quad J_3^l(a,b) = \frac{16B^3 \operatorname{sign}(b) (1-c)^2 [1+l(1+c)] c^{l+2}}{a(1-c^2)^3}, \\ J_5^l(a,b) &= -\frac{32B^5 \operatorname{sign}(b) (1-c)^2 \left\{ 2[c+(1-c)^2] + l(1+c) [2+(1-c)^2 + l(1-c)^2] \right\} c^{l+3}}{a(1-c^2)^5}, \\ J_2^l(a,b) &= -\frac{2c^{l+1}}{a}, \quad J_4^l(a,b) = \frac{8B^2 (1+l) c^{l+2}}{a(1-c^2)}, \quad 1-c = 2\sqrt{1+B^2} \sqrt{-c}, \quad 1+c = 2B\sqrt{-c}, \\ J_6^l(a,b) &= -\frac{16B^4 [2+l(3-c^2) + l^2(1-c^2)^2] c^{l+3}}{a(1-c^2)^3}, \quad c = -\left( \sqrt{1+B^2} - B \right)^2, \quad B = b/a. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a T(x) \{U_{2l}(x), U_{2l-1}(x)\} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \sum_{r=1}^3 \left\{ \beta_{1r} J_{2r-1}^l(a,b), \beta_{2r} J_{2r}^l(a,b) \right\}, \\ & F_l = \int_{-a}^a F(x) \{U_{2l}(x), U_{2l-1}(x)\} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \sum_{r=1}^3 \left\{ \alpha_{1r} J_{2r-1}^l(a,b), \alpha_{2r} J_{2r}^l(a,b) \right\}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

## § 6. Застосування методу ортогональних многочленів до сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Фредгольма типу інтегралів Фур'є

Обмежимося одним проміжком інтегрування та однією функцією стрибка ( $I = M = 1$ ) і розглянемо ядра Фредгольма виду [977]

$$K(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \sin[\xi(t-x)] \\ \cos[\xi(t-x)] \end{array} \right\} d\xi, \quad G(\xi) = o(e^{-\xi p}) \quad \text{якщо } \xi \rightarrow \infty, \quad p > 0. \quad (6.1)$$

Замінімо безмежну межу інтегрування додатним числом  $R > 0$  і апроксимуємо ядро виразом

$$K(t, x) \cong \frac{R}{\pi} \int_0^1 G(Ry) \left\{ \begin{array}{l} \sin[Ry(t-x)] \\ \cos[Ry(t-x)] \end{array} \right\} dy. \quad (6.2)$$

$$(6.3)$$

Скористаємося розвиненнями [525]

$$\begin{aligned} \sin \xi t &\cong 2 \sum_{i=0}^{N_1} ' (-1)^i J_{2i+1}(\xi) T_{2i+1}(t), & \cos \xi t &\cong 2 \sum_{i=0}^{N_1} ' (-1)^i J_{2i}(\xi) T_{2i}(t), \\ J_{2p+1}(2kx) &\cong 2 \sum_{i=1}^{N_2} ' J_{p+i+1}(k) J_{p-i}(k) T_{2i+1}(x), & (6.4) \\ J_{2p}(2kx) &\cong 2 \sum_{i=1}^{N_2} ' J_{p+i}(k) J_{p-i}(k) T_{2i}(x), \end{aligned}$$

де  $T_i(x)$  – многочлени Чебишева першого роду;  $J_i(x)$  – функції Бесселя першого роду;  $N_1, N_2$  – цілі додатні числа; штрих означає, що перший член суми домножується на 1/2.

Підставимо (6.2) – (6.4) у вирази

$$H_{nk} = \int_{-a}^a H_n(x) U_k(x) \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad H_n(x) = \int_{-a}^a \frac{K(x, t) T_n(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (6.5)$$

Змінімо порядок інтегрування та використовуючи формули (4.4), (4.11), одержимо для ядра (6.2)

$$\begin{aligned} H_{2p+1, 2l} &\cong 2\pi (-1)^{p+l} \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} T_{2p+1}^i S_{2l}^j G_{2i+1}^{2j}, & H_{2p+1, 2l+1} &= 0, \\ H_{2p, 2l+1} &\cong -2\pi (-1)^{p+l} \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} T_{2p}^i S_{2l+1}^j G_{2i}^{2j+1}, & H_{2p, 2l} &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

та для ядра (6.3)

$$\begin{aligned} H_{2p, 2l} &\cong 2\pi (-1)^{p+l} \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} T_{2p}^i S_{2l}^j G_{2i}^{2j}, & H_{2p, 2l+1} &= 0, \\ H_{2p+1, 2l+1} &\cong 2\pi (-1)^{p+l} \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{N_2} T_{2p+1}^i S_{2l+1}^j G_{2i+1}^{2j+1}, & H_{2p+1, 2l} &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

де

$$T_{2p}^i = J_{p+i}(R_2)J_{p-i}(R_2), \quad T_{2p+1}^i = J_{p+i+1}(R_2)J_{p-i}(R_2), \quad R_2 = R/2, \\ S_k^j = T_k^j + T_{k+2}^j, \quad G_i^j = \int_0^1 G(Ry)T_i(y)T_j(y)dy. \quad (6.8)$$

Для обчислення інтегралів  $G_i^j$  використовуємо розвинення

$$G(Ry) \cong \sum_{k=0}^{N_3} g_k T_k(y) \quad (N_3 > 0) \quad (6.9)$$

і тоді

$$G_i^j \cong \sum_{k=0}^{N_3} g_k g_{ijk}, \\ g_{ijk} = \int_0^1 T_i(y)T_j(y)T_k(y)dy = \frac{1}{8} \sum_{i=\pm i} \sum_{j=\pm j} \sum_{k=\pm k} \frac{1}{1+i+j+k} \left[ 1 - \cos\left(\frac{1+i+j+k}{2}\pi\right) \right]. \quad (6.10)$$

Попри позірну громіздкість процедури обчислення  $H_{nk}$  вона виявилася простою, ефективною та легкою щодо програмування на комп'ютері. Коефіцієнти  $g_k$  розвинень (6.9) визначають ефективним методом [526],

$$G(y) = \sum_{n=0}^N g_n T_n(y) \quad (-1 < y < 1), \\ g_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{l=1}^{N+1} G(y_l), \quad y_l = \cos\left(\frac{2l-1}{N+1} \frac{\pi}{2}\right), \\ g_m = \frac{2}{N+1} \sum_{l=1}^{N+1} G(y_l) \cos\left(\frac{2l-1}{N+1} \frac{\pi m}{2}\right) \quad (m = \overline{1, N}), \quad (6.11)$$

що використовує ортогональність поліномів Чебишева; у вирази для коефіцієнтів (6.8) входять функції Бесселя різних порядків але від одного аргументу, які швидко і легко обчислюються економним методом [525].

Суть цього методу полягає у тому, що для якогось великого значення цілого порядку  $M+1$  (для зручності  $M$  – парне) вважається, що функція Бесселя  $J_{M+1}(x) = 0$ , а функція порядку  $M$  є дуже малою величиною  $\varepsilon$ , близькою до машинного нуля ( $J_M(x) = \varepsilon$ ). Далі, використовуючи тричленну рекурентну формулу для циліндричних функцій у її зворотному поданні  $Z_{\nu-1}(x) = 2\nu Z_\nu(x)/x - Z_{\nu+1}(x)$  (8.471.1) [191] послідовно для  $\nu = M, M-1, \dots, 1$ , обчислюють функції  $\tilde{J}_{M-1}(x) = \varepsilon, \tilde{J}_{M-1}(x), \tilde{J}_{M-1}(x), \dots, \tilde{J}_0(x)$ . Ці значення позначено хвилькою, бо оскільки за число  $\varepsilon$  взяте довільне число, то вони є хибними. Однак виявляється, що усі ці хибні значення пропорційні до дійсних значень з одним і ти же коефіцієнтом пропорційності:  $\tilde{J}_m(x) = k J_m(x)$  ( $m = \overline{0, M}$ ). Для обчислення цього коефіцієнта можна скористати-

ся формулою (8.512.1) [191]  $J_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(x) = 1$ , відповідно до якої

$$k \approx \tilde{J}_0(x) + \sum_{j=1}^{M/2} \tilde{J}_{2j}(x), \quad J_m(x) = \frac{\tilde{J}_m(x)}{k} \quad (m = \overline{0, M}). \quad (6.12)$$

Потреба у застосуванні цього алгоритму спричинена тим, що застосування прямих рекурентних формул внаслідок зникання зі збільшенням порядку функції Бесселя відбувається “з’їдання” кількості значущих цифр у обчислених функціях Бесселя, так що починаючи з якогось значення порядку в обчислених значеннях вже немає жодної вірної цифри і обчислене таким чином значення є цілком випадковим числом.

Верхні межі інтегралу (6.1) та сум (6.6), (6.7), (6.9), (6.12) (сталі  $R, N_2, N_3, M$ ) вибирають з огляду на необхідність забезпечення певної точності обчислень. На  $N_1$  обмеження тут не накладають.

## § 7. Метод колокацій

Матеріал пп. 7.1–7.4 був отриманий сумісно із Й.З.Піскозубом і ще не публікувався.

### 7.1. Загальні передумови

Вважатимемо  $A = 0$  і розглянемо відповідне до (3.27) сингулярне інтегральне рівняння першого роду, у якому без зменшення загальності можна вважати теж  $B = 1$ . Тоді у рівнянні (5.1) оператор  $S = H_T$  і отримуємо відповідні результати для сингулярного інтегрального

рівняння першого роду. У цьому випадку  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} + \left\{ \begin{matrix} L \\ M \end{matrix} \right\}$ . Зокрема, якщо  $\kappa = -1$ , то

$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  і аналогічно до § 5 буде справедливим перехід (3.24) від поліномів Якобі до поліномів Чебишева першого роду. Це означає, що  $f(x) = w(x)\varphi(x)$ , де  $w(x) = (1-t^2)^{-1/2}$ ;

операторне рівняння (3.32) для визначення  $\varphi(x)$  має вигляд

$$(\mathbf{H}_T + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\varphi = F(x) \quad (|x| \leq 1), \quad (7.1)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_T\varphi(x) &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\varepsilon)}{\xi - x} dt(\varepsilon), \quad \mathbf{K}_1\varphi(x) = \frac{C}{n} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln|\xi - x| dt(\varepsilon), \\ \mathbf{K}_2\varphi(x) &= \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K(\xi, x) dt(\xi), \quad t(\xi) = \int_{-1}^{\xi} (1-x^2)^{-1/2} dx. \end{aligned} \quad (7.2)$$

У цьому випадку оператори  $\mathbf{H}_T, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  здійснюють відображення з гільбертового простору  $L_T^2$  у  $L_U^2$ . Тому вважатимемо, що  $F(x) \in L_T^2[-1, 1]$ .

Ідея методу колокацій (МК) полягає у тому, що наближений розв’язок сингулярного інтегрального рівняння (7.1) шукають у вигляді

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n A_n(x), \quad A_n(x) \in L_T^2[-1; 1]. \quad (7.3)$$

Означають нев’язку формулою

$$r_N(x) = (\mathbf{H}_T + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\varphi_N(x) - F(x) \quad (7.4)$$

і обчислюють  $N$  точок колокації  $\{x_N^{(i)}\} \in [-1; 1]$ . Тоді коефіцієнти  $\{a_n\}_0^N$  можна обчислити, вимагаючи, щоб у точках колокації нев'язка була нульовою:  $r_N(x_N^{(i)}) = 0$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Це породжує систему  $N$  лінійних алгебричних рівнянь щодо  $\{a_n\}_0^N$ . Вважаючи, що матриця  $\left\| \left( \mathbf{H}_T + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \right) A_n(x^{(i)}) \right\|$  ( $n, i = \overline{1, N}$ ) несингулярна, отримаємо загальний клас методів колокації для наближення  $\varphi_N(x)$ .

Найзручніше в ролі базових елементів  $A_n(x)$  взяти ортонормовану систему функцій  $\hat{T}_n(x)$  чи  $T_n(x)$ . Тоді розв'язок (7.4) можна подати у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n \hat{T}_n(x), \quad \hat{a}_n = \left( \varphi, \hat{T}_n \right)_T, \quad (7.5)$$

а його наближення – притятим рядом (5.13).

У ролі точок колокації обиратимемо нулі функції  $U_N(x)$  чи відповідно  $\hat{U}_N(x)$ , що мають вигляд

$$x_N^{(i)} = \cos \left[ \pi i / (N+1) \right] \quad (i = \overline{1, N}). \quad (7.6)$$

Такий вибір обґрунтований як за допомогою методу найменших квадратів [358, 1174, 1267], так і методу Гальоркіна [1295, 1684, 1688], де нулі функції  $U_N(x)$  з'являються як вузли квадратурних формул типу Гаусса–Якобі для вагової функції  $U_N(x)$ . В результаті маємо систему  $N$  лінійних алгебричних рівнянь для визначення  $N+1$ -ї сталої  $\{\hat{A}_n\}_0^N$  чи  $\{A_n\}_0^N$ . Додаткове рівняння, якого бракує,

$$\hat{A}_0 = Q/\sqrt{\pi} \quad \text{чи} \quad A_0 = Q/\pi \quad (7.7)$$

дає умова (3.36) чи (5.12).

Для розглядуваного випадку виконуються залежності (3.22<sup>1</sup>), (3.23<sup>2</sup>), (3.23<sup>1</sup>), (3.23<sup>2</sup>). Зокрема з останніх двох маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_T \hat{T}_n(x) &\equiv \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{\hat{T}_n(\varepsilon)}{\xi - x} dT(\varepsilon) = \hat{U}_{n-1}(x) \quad (\hat{U}_{-1}(x) \equiv 0), \\ \mathbf{H}_U \hat{U}_n(x) &\equiv \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{\hat{U}_n(\varepsilon)}{\xi - x} dT(\varepsilon) = -\hat{T}_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Зазначимо теж, що

$$\mathbf{K}_1 \hat{T}_n(x) = \begin{cases} -\frac{C \ln 2}{\sqrt{2\pi}} & (n=0), \\ -\frac{C}{n} \hat{T}_n = \frac{C}{2n} [\hat{U}_{n-2} - \hat{U}_n(x)] & (n \geq 1). \end{cases} \quad (7.9)$$

## 7.2. Обґрунтування операторного подання

Доведемо законність подання сингулярного інтегрального рівняння (3.27) при  $A=1$ ,  $B=1$  у вигляді (7.1). Для цього розглянемо два комплексні гільбертові простори  $H_i$  ( $i=1, 2$ )

з внутрішнім добутком  $(\cdot, \cdot)_i$  та нормою  $\|\cdot\|_i$ . Розглянемо множину лінійних обмежених операторів

$$[H_1, H_2] = \{\mathbf{H}: H_1 \rightarrow H_2 \mid \mathbf{H} \text{ — лінійний обмежений оператор}\}.$$

**Означення 7.1.** Нехай  $\mathbf{H} \in [H_1, H_2]$ . Якщо  $\|\mathbf{H}x\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall x \in H_1$ , то  $\mathbf{H}$  — ізометрія. Якщо до того ж  $\mathbf{H}$  має обмежений обернений оператор, то  $\mathbf{H}$  — унітарний.

**Теорема 7.1** [278]. Нехай  $H_1$  гільбертовий простір з ортонормованим базисом  $\{A_n\}_0^\infty$ . Необхідною і достатньою умовою унітарності оператора  $\mathbf{H} \in [H_1, H_2]$  є ортонормованість в  $H_2$  базису  $\{\mathbf{H}A_n\}_0^\infty$ .

**Означення 7.2.** Нехай  $\mathbf{H} \in [H_1, H_2]$ . Спряжений до  $\mathbf{H}$  оператор  $\mathbf{H}^*$  визначається співвідношенням  $(\mathbf{H}^*x, y)_1 = (x, \mathbf{H}y)_2$ , де  $x \in H_2$ ,  $y \in H_1$ .

**Теорема 7.2** [1295]. Якщо  $\mathbf{H} \in [H_1, H_2]$  — унітарний, то  $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}^{-1}$ .

**Означення 7.3.** Нехай  $\mathbf{T} \in [H_1, H_2]$  і  $\{A_n\}_0^\infty$  ортонормований базис в  $H_1$ . Якщо  $\sum_{n=0}^\infty \|\mathbf{T}A_n\|_2^2 < \infty$ , то  $\mathbf{T}$  називають оператором Гільберта–Шмідта.

**Теорема 7.3** [278, 1295]. Якщо  $\mathbf{T}$  — оператор Гільберта–Шмідта, то  $\mathbf{T}$  — компактний.

Ґрунтуючись на теоремах 7.1–7.3 доведемо теорему 7.4, яка підсумовує основні властивості введених інтегральних операторів (7.2).

**Теорема 7.4.** Нехай  $\mathbf{H}_T$ ,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  визначають обмежені лінійні оператори з  $L_T^2$  у  $L_U^2$ . Окрім того,  $\mathbf{H}_T$  — унітарний;  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  — компактні.

**Доведення.** З використанням співвідношень (7.8), (7.5), де  $\{\hat{T}_n\}_0^\infty$  та  $\{\hat{U}_n\}_0^\infty$  визначаються формулами (3.26),  $\mathbf{H}_T$  як обмежений оператор з  $L_T^2$  у  $L_U^2$  можна єдиним чином подати у вигляді

$$\mathbf{H}_T\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty (\varphi, \hat{T}_n)_T \mathbf{H}_T \hat{T}_n(x) = \sum_{n=0}^\infty (\varphi, \hat{T}_n)_T \mathbf{H}_T \hat{U}_{n-1}(x). \quad (7.10)$$

Оскільки  $\{\hat{U}_n\}_0^\infty$  — ортонормований базис в  $L_U^2$ , то з теореми 7.1 випливає, що  $\mathbf{H}_T$  — унітарний, причому  $\mathbf{H}_T^* = \mathbf{H}_U$ , який визначений (7.8).

За першою формулою (7.8) подамо  $\mathbf{K}_1: L_T^2 \rightarrow L_U^2$  у вигляді

$$\mathbf{K}_1\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty (\varphi, \hat{T}_n)_T \mathbf{K}_1 \hat{T}_n(x), \quad (7.11)$$

вважаючи, що сума (7.11) збігається за нормою  $L_U^2$ . Щоб у цьому переконатися, зазначимо, що

$$\|\mathbf{K}_1 \hat{T}_n\|_U^2 = (\mathbf{K}_1 \hat{T}_n, \mathbf{K}_1 \hat{T}_n)_U = \begin{cases} (C^2 \ln^2 2)/4 & (n=0), \\ C^2/4 & (n=1), \\ C^2/(2n^2) & (n>1). \end{cases} \quad (7.12)$$

Отже сума (7.11) збігається. Окрім того, оскільки  $\|\mathbf{K}_1 \hat{T}_n\|_U^2$  має порядок  $1/n^2$ , то збігається сума  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{K}_1 \hat{T}_n\|_U^2$  і за теоремою 7.3 маємо, що оператор  $\mathbf{K}_1$  – компактний. Далі – використання нерівності Буняковського–Шварца дає

$$|\mathbf{K}_2 \varphi(x)| \leq \int_{-1}^1 |K(\xi, x)| \cdot |\varphi(\xi)| dt(\xi) \leq \left[ \int_{-1}^1 |\varphi(\xi)|^2 dt(\xi) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-1}^1 |K(\xi, x)|^2 dt(\xi) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.13)$$

Оскільки функція  $K(\xi, x)$  обмежена, то

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |K(\xi, x)|^2 dt(\xi) du(\xi) < \infty; \quad (7.14)$$

$$\|\mathbf{K}_2 \varphi(x)\|_U^2 \leq \pi \|\varphi\|_T^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |K(\xi, x)|^2 dt(\xi) du(\xi) \quad (7.15)$$

і звідси

$$\|\mathbf{K}_2 \varphi(x)\|_U \leq M \|\varphi\|_T. \quad (7.16)$$

Отже згідно з означенням оператор  $\mathbf{K}_2$  – обмежений.

Для доведення його компактності покажемо, що  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{K}_2 \hat{T}_n\|_U^2 < \infty$ . Зазначимо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{K}_2 \hat{T}_n\|_U^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 |K(\xi, x) \hat{T}_n(\xi) dt(\xi)|^2. \quad (7.17)$$

Але якщо зафіксувати  $x$  та ввести у розгляд функцію  $\mu_x(\xi) = K(\xi, x)$ , то права частина (7.17) за теоремою Парсеваля дорівнює

$$n^2 \sum_{n=0}^{\infty} |(\mu_x, \hat{T}_n)_T|^2 = n \int_{-1}^1 |\mu_x(\xi)|^2 dt(\xi). \quad (7.18)$$

Домноживши цей вираз на  $du(x)$  та зінтегрувавши, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 |\mathbf{K}_2 \hat{T}_n|^2 du(x) = n \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{K}_2 \hat{T}_n\|_U^2 = n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |K(\xi, x)|^2 dt(\xi) du(x). \quad (7.19)$$

Тому внаслідок оцінки (7.14) і теореми 7.3 справедливе теж твердження, що  $\mathbf{K}_2$  – компактний оператор. Цим доведення теореми завершено і тому сингулярне інтегральне рівняння (3.27) при  $A=0$ ,  $B=1$  можна подати у вигляді (7.1). ■

### 7.3. Збіжність методу колокацій

Доведемо збіжність методу колокацій для рівняння (7.1). Для цього розглянемо інтерполяційний поліном Лагранжа  $L_N(f)$  степеню  $N-1$  [1436], який інтерполює функцію  $f$  за

$N$  точками  $\left\{x_N^{(k)}\right\}_1^N$ , визначеними формулою (7.6):

$$L_N(f) = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_N^{(k)}), \quad l_k(x) = \frac{\pi}{N+1} \sqrt{1-x^2} (1-x_N^{(k)2}) \sum_{i=1}^N \hat{U}_{i-1}(x_N^{(k)}) \hat{U}_{i-1}(x). \quad (7.20)$$

Вважаємо також, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 |K(x+h, \xi) - K(x, \xi)|^2 dT(\xi) = 0. \quad (7.21)$$

З нерівності Буняковського – Шварца випливає, що якщо

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \quad \mathbf{K}_N \varphi = L_N(\mathbf{K}\varphi), \quad (7.22)$$

то  $\mathbf{K}\varphi \in L_U^2[-1; 1]$  – неперервний;  $\mathbf{K}_N : L_T^2 \rightarrow L_U^2$  – цілком визначений.

На основі (7.22) метод колокацій для розв'язування (7.1) подамо в операторній формі

$$\mathbf{H}_T \varphi_N + \mathbf{K}_N \varphi_N = F_N \quad (F_N = L_N(F)). \quad (7.23)$$

**Лема 7.1.** Нехай  $\varphi_N$  задовольняє наближеній схемі (7.23).

Вважатимемо, що  $\{\mathbf{K}_N\}_1^\infty$  – послідовність обмежених операторів і що  $\|\mathbf{K} - \mathbf{K}_N\| \rightarrow 0$ .

Тоді  $\mathbf{B}_N = (\mathbf{H}_T + \mathbf{K}_N)^{-1}$  існує для досить великого  $N$ ,  $\|\mathbf{B}_N\|$  – рівномірно обмежена і

$$\|\varphi - \varphi_N\| \leq \|\mathbf{B}_N\| \cdot \|\mathbf{H}_T \varphi - L_N(\mathbf{H}_T \varphi)\|. \quad (7.24)$$

**Доведення.** Існування і рівномірна обмеженість для загальнішого випадку доведені в монографії [278]

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_N &= \varphi - \mathbf{B}_N F_N = \mathbf{B}_N [(\mathbf{H}_T + \mathbf{K}_N)\varphi - F_N] = \\ &= \mathbf{B}_N [\mathbf{H}_T \varphi + L_N(\mathbf{K}\varphi - F)] = \mathbf{B}_N [\mathbf{H}_T \varphi + L_N(\mathbf{K}_T \varphi)]. \end{aligned}$$

Звідси з використанням нерівності трикутника випливає (7.24). ■

**Лема 7.2** (теорема 14.3.1 [875]). Нехай для комплекснозначної функції  $f(x)$  існує інтеграл  $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 du(x) < \infty$ . Тоді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - L_N(f)\| = 0. \quad (7.25)$$

Значимо тепер, що  $\mathbf{H}_T \varphi = F - \mathbf{K}\varphi$ . Оскільки функція  $\mathbf{K}\varphi$  – неперервна,  $F$  – інтегровна з квадратом, то й  $\mathbf{H}_T \varphi$  – така сама. Тому припущення леми 7.1 означають, що  $\|\mathbf{H}_T \varphi - L_N(\mathbf{H}_T \varphi)\|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  і отже з леми 7.1 випливає, що  $\varphi_N \rightarrow \varphi$  в  $L_U^2[-1; 1]$ , якщо  $\|\mathbf{K} - \mathbf{K}_N\| \rightarrow 0$ . Значимо, що за лемою 7.2  $\|\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_{2N}\| \rightarrow 0$  і доведемо аналогічне твердження для  $K_{1N}$ , узагальнивши лему 7.2 так, щоб її можна було застосовувати до функцій з логарифмічною особливістю. ■

**Означення 7.4.** Функція  $f(x) \in L_U^2$  – квадратурно збіжна, якщо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(f) = \int_{-1}^1 f(x) du(x),$$

де

$$Q_N = \frac{\pi}{N+1} \sum_{k=1}^N (1-x_N^{(k)2}) f(x_N^{(k)}),$$



вузли  $\left\{x_N^{(k)}\right\}_1^N$  визначені формулою (7.6).

Згідно з [1320] твердження лема 7.2 лишається вірним для всіх таких функцій  $f(x) \in L_U^2[-1; 1]$ , що  $|f(x)|^2$  – квадратурнозбіжна. Доведемо, що функція  $f(x) = \ln|x|$  належить до цього класу.

**Лема 7.3.** Нехай  $\Phi(x) = \ln^2|x|$ . Тоді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(\Phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N+1} \sum_{k=1}^N (1 - x_N^{(k)2}) f(x_N^{(k)}) = \int_{-1}^1 \Phi(x) du(x). \quad (7.26)$$

Доведення ґрунтується на інтерпретуванні поданого вище виразу для  $Q_N$  як ріманової суми для інтеграла

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \Phi(\cos \theta) d\theta, \text{ якщо } \Phi(1) = 0.$$

Дійсно, розглянемо розбиття проміжку  $[0; 1]$  вузлами  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_{N+1} = \pi$ ,  $\theta_k = \frac{k\pi}{N+1}$  ( $k = \overline{1, N}$ ). Тоді позначимо  $g(\theta) = (1 - \cos^2 \theta) \Phi(\cos \theta)$  і розглянемо ріманову суму  $\sigma_N(g) = \sum_{k=1}^N g(\theta_k) \frac{\pi}{N+1} + g(\pi) \frac{\pi}{N+1}$ . Оскільки  $\Phi(1) = 0$ , то  $g(\pi) = 0$  і далі

$$\sigma_N(g) = \frac{\pi}{N+1} \sum_{k=1}^N (1 - \cos^2 \theta_k) \Phi(\cos \theta_k) = Q_N(\Phi).$$

Тепер зробимо заміну змінних  $x = \cos \omega$  в інтегралі

$$I \equiv \int_{-1}^1 \ln^2|x| du(x) = \int_0^\pi \ln^2|\cos \omega| (1 - \cos^2 \omega) d\omega.$$

Оскільки  $\ln(1) = 0$ , то видно, що  $Q_N(\Phi)$  – ріманова сума для наближення інтегралу  $I$ . Отже

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(\Phi) = \int_{-1}^1 \ln^2|x| du(x),$$

тобто  $\ln^2|x|$  – квадратурнозбіжна, а тому до функції  $f(x) = \ln|x|$  можна застосовувати лему 7.2. ■

**Лема 7.4.** Нехай  $K(\xi, x) \in L_2[du(x) \times dt(\xi)]$ ,  $\mu_\xi(x) \equiv K(\xi, x)$  – квадратурнозбіжна  $\forall \xi$ . Введемо оператор  $\mathbf{K} : L_T^2 \rightarrow L_U^2$  таким чином, що  $\mathbf{K}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(\xi, x) \varphi(\xi) dt(\xi)$ . Нехай

теж  $\mathbf{K}_N \varphi = L_N(\mathbf{K}\varphi)$ ,  $N \geq 1$ .

Тоді  $\forall N : N \geq 1$  оператор  $\mathbf{K}_N$  – обмежений, компактний і

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{K} - \mathbf{K}_N\| \rightarrow 0.$$

**Доведення.** Спочатку покажемо обмеженість. З рівняння (14.2.4) [875] маємо

$$\int_{-1}^1 |L_N(f)|^2 du(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \left| f\left(x_N^{(k)}\right) \right|^2,$$

де  $\lambda_k = \frac{\pi}{N+1} \left(1 - x_N^{(k)2}\right)$  – ваги квадратурної формули (7.27). Звідси

$$\|\mathbf{K}_N \varphi\|^2 = \int_{-1}^1 |L_N(\mathbf{K}\varphi)|^2 du(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \left| \mathbf{K}\varphi\left(x_N^{(k)}\right) \right|^2.$$

Але

$$\left| \mathbf{K}\varphi\left(x_N^{(k)}\right) \right|^2 = \left| \int_{-1}^1 K\left(\xi, x_N^{(k)}\right) \varphi(\xi) dt(\xi) \right|^2 \leq \int_{-1}^1 \left| K\left(\xi, x_N^{(k)}\right) \right|^2 dt(\xi) \cdot \int_{-1}^1 |\varphi(\xi)|^2 dt(\xi).$$

Тому

$$\|\mathbf{K}_N \varphi\|^2 \leq K \left( \sum_{k=1}^N \lambda_k \beta_k \right) \|\varphi\|^2, \quad \beta_k = \int_{-1}^1 \left| K\left(\xi, x_N^{(k)}\right) \right|^2 dt(\xi) < \infty.$$

Отже  $\|\mathbf{K}_N \varphi\| \leq M \|\varphi\|$ , тобто оператор  $\mathbf{K}_N$  – обмежений. Компактність  $\mathbf{K}_N$  випливає з того факту, що  $\forall N: N \geq 1$  оператор  $\mathbf{K}_N$  має скінченний ранг.

Щоб довести рівномірну збіжність  $\mathbf{K}_N$  до  $\mathbf{K}$  зазначимо, що

$$\mathbf{K}\varphi - \mathbf{K}_N \varphi = \int_{-1}^1 R_N(\xi, x) \varphi(\xi) dt(\xi), \quad R_N(\xi, x) = K(\xi, x) - \sum_{k=1}^N l_k(x) K\left(\xi, x_N^{(k)}\right).$$

Звідси

$$\|\mathbf{K} - \mathbf{K}_N\|^2 \leq \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x) dt(\xi).$$

Нехай тепер

$$R_N(\xi, x) = \mu_\xi(x) - L_N(\mu_\xi(x)).$$

З леми 7.2 маємо, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left| \mu_\xi(x) - L_N(\mu_\xi(x)) \right|^2 du(x) = 0$$

для кожного фіксованого  $\xi$ . Під час доведення теореми 14.3.1 [875] показано, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left( \int_{-1}^1 \left| \mu_\xi(x) - L_N(\mu_\xi(x)) \right|^2 du(x) \right) \leq 4 \int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x).$$

Тепер з формули (7.38) з урахуванням (7.22) випливає, що існує функція  $\rho(\xi)$  така, що

$$\int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x) \leq \rho(\xi) \quad \text{і} \quad \int_{-1}^1 |\rho(\xi)|^2 dt(\xi) < \infty,$$

причому

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x) dt(\xi) = \int_{-1}^1 \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x) \right] dt(\xi) = 0.$$

Звідси

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{K} - \mathbf{K}_N\|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |R_N(\xi, x)|^2 du(x) dt(\xi) = 0$$

і лема 7.4 доведена. ■

**Теорема 7.5.** Нехай  $K(\xi, x)$  відповідає умовам леми 7.2, умові (7.21), а функція  $F(x)$  – квадратурнозбіжна. Тоді  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_N\|^2 = 0$ , де  $\varphi$  – єдиний розв'язок (7.1), а  $\varphi_N$  – задовольняє дискретний аналог (7.23) рівняння (7.1).

**Доведення.** Результат теореми безпосередньо випливає з лем 7.1 і 7.4. ■

Зазначимо, що отримані тут результати легко узагальнюються на випадок системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^I (B_{ij} \mathbf{H}_T + C_{ij} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{2ij}) \varphi_j = F_i(x) \quad (|x| \leq 1; i = \overline{1, I}),$$

$$\mathbf{K}_{2ij} \varphi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K_{ij}(\xi, x) dt$$
(7.27)

з додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) dt(\xi) = Q_i \quad (i = \overline{1, I}),$$
(7.28)

яка відповідає системі сингулярних інтегральних рівнянь (4.1) при  $A_{ij}^{mn} = 0$ ,  $M = 1$ . Розв'язок (7.27), (7.28) тоді шукають у вигляді

$$\varphi_N^j(\xi) = \sum_{n=0}^N \hat{A}_n^j \hat{T}_n(\xi) = \sum_{n=0}^N A_n^j T_n(\xi), \quad A_n^j = \varepsilon_n \sqrt{2/\pi} \hat{A}_n^j$$
(7.29)

і після підставлення в (7.27), (7.28) з урахуванням залежностей (7.8), (7.9) отримують систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \hat{A}_n^j J_n^{j1} \left( x_N^{(k)} \right) F \left( x_N^{(k)} \right), \quad \hat{A}_0^j = Q_i / \sqrt{\pi} \quad (i = \overline{1, I}; k = \overline{1, N}),$$
(7.30)

де

$$J_0^{j1} \left( x_N^{(k)} \right) = -\frac{C_{ij} \ln 2}{\sqrt{2\pi}} + I_0^{ij1} \left( x_N^{(k)} \right); \quad I_n^{ij1} \left( x_N^{(k)} \right) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K_{ij} \left( \xi, x_N^{(k)} \right) dt(\xi),$$
(7.31)

$$J_n^{j1} \left( x_N^{(k)} \right) = B_{ij} \hat{U}_{n-1} \left( x_N^{(k)} \right) - \frac{C_{ij}}{n} \hat{T}_n \left( x_N^{(k)} \right) + I_n^{ij1} \left( x_N^{(k)} \right) \quad (n \geq 1).$$

Для обчислення  $I_n^{ij1} \left( x_N^{(k)} \right)$  можна запропонувати квадратурну формулу

$$I_n^{ij1} \left( x_N^{(k)} \right) \cong \frac{\pi}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} K_{ij} \left( \xi_{N+1}^{(i)}, x_N^{(k)} \right) \hat{T}_n \left( \xi_{N+1}^{(i)} \right),$$
(7.32)

де вузли  $\xi_{N+1}^{(i)}$  квадратурної формули визначаються як нулі функції  $T_{N+1}(\xi)$  чи  $\hat{T}_{N+1}(\xi)$ :

$$\xi_{N+1}^{(k)} = \cos \frac{2k-1}{2(N+1)} \pi \quad (k = \overline{1, N+1}).$$
(7.33)

Результати цього підpunkту можна перенести і на ще загальніший випадок системи сингулярних інтегральних рівнянь (4.1), якщо  $A_{ij}^{mn} = 0$ ,  $M \neq 1$ .

#### 7.4. Зв'язок між методами колокацій і механічних квадратур

Метод механічних квадратур [706, 860, 707, 1684] полягає в обчисленні наближених значень  $\varphi_N\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right)$  функції  $\varphi(x)$  у  $N+1$  вузлі квадратурної формули. Якщо подати наближений розв'язок у вигляді інтерполяційного поліному [1436]

$$\varphi_N(x) = \frac{\pi}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_N\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right) \sum_{n=0}^N \hat{T}_n\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right) \quad (7.34)$$

і зіставити з (5.13), то знайдемо співвідношення між величинами  $N+1$  коефіцієнтів  $\hat{A}_n$ , які слід визначити за методом колокацій, та  $N+1$ -ним значенням  $\varphi_N\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right)$ , які шукає метод механічних квадратур:

$$\hat{A}_n(x) = \frac{\pi}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_N\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right) \hat{T}_n\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right). \quad (7.35)$$

З урахуванням цього виразу а також формули [1275]

$$\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\hat{T}_n\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right)}{\xi_{N+1}^{(i)} - x_N^{(k)}} = \hat{U}_{n-1}\left(x_N^{(k)}\right) \quad (n = \overline{0, N}; k = \overline{1, N}) \quad (7.36)$$

з (7.30) можна отримати систему лінійних алгебричних рівнянь, що відповідає схемі розв'язування сингулярного інтегрального рівняння (7.39) методом механічних квадратур

$$\frac{\pi}{N+1} \sum_{j=1}^I \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_N^j\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right) J^{j2}\left(\xi_{N+1}^{(i)}, x_N^{(k)}\right) = F_m\left(x_N^{(k)}\right), \quad \frac{\pi}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_N^m\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right) = Q_m \quad (7.37)$$

$$(i = \overline{1, I}; k = \overline{1, N}),$$

де

$$J^{j2}\left(\xi_{N+1}^{(i)}, x_N^{(k)}\right) = \frac{B_{ij}}{\xi_{N+1}^{(i)} - x_N^{(k)}} - C_{ij} I\left(\xi_{N+1}^{(i)}, x_N^{(k)}\right) + K_{ij}\left(\xi_{N+1}^{(i)}, x_N^{(k)}\right), \quad (7.38)$$

$$I\left(\xi_{N+1}^{(i)}, x_N^{(k)}\right) = \frac{\ln 2}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^N \frac{\hat{T}_n\left(\xi_{N+1}^{(i)}\right) \hat{T}_n\left(x_N^{(k)}\right)}{n}.$$

#### 7.5. Базова схема методу колокацій

У тих випадках, коли для обчислення  $H_{nk}^p$ ,  $G_{nk}^{mp}$ ,  $F_{ipk}$  інтегрування у формулах (5.18) проводити надто складно, прирівнюють праві та ліві частини рівності (4.8) у вузлах колокацій, які згідно з (7.6) оберемо у точках

$$x_{Np}^{(k)} = a_p \cos\left(\pi k / (N+1)\right) \quad (k = \overline{1, N}), \quad (7.39)$$

після чого з урахуванням (4.10) приходять до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \left\{ A_n^{pj} H_n^{pj} \left( x_{Np}^{(k)} / a_p \right) + \sum_{m=1}^M A_n^{mj} G_n^{mpj} \left( z_{mp}^{(k)} / a_m \right) \right\} = F_{ip} \left( x_{Np}^{(k)} \right), \quad (7.40)$$

$$A_0^{mj} = Q_{mj} / \pi \quad (i = \overline{1, I}; \quad p = \overline{1, M}; \quad k = \overline{1, N}),$$

$(z_{mp}^{(k)})$  – значення  $z_{mp}$  при  $x_p = x_{Np}^{(k)}$  стосовно шуканих коефіцієнтів  $A_n^{mj}$  розвинення (4.3).

На відміну від методу ортогональних многочленів метод колокацій можна застосовувати практично у довільному випадку. Числові експерименти розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь для тонкостінних пружних включень засвідчили [973], що за однакою кількістю  $M$  врахованих у розвиненні (4.3) членів методи ортогональних многочленів і колокацій за однакового порядку систем лінійних алгебричних рівнянь забезпечують практично однакову точність. Підтверджений теж тісний зв'язок методу колокацій з методом механічних квадратур – також досить зручним і ефективним під час використання комп'ютерів.

### 7.6. Тестовий приклад

Складена на основі схеми (7.39) (7.40) фортран-програма тестувалася [117] під час розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь четвертого порядку ( $I = M = 2$ ;  $L'_1 = [-0, 25; 0, 25]$ ;  $L'_2 = [3; 7]$ ;  $a_1 = 0, 25$ ;  $x_{01} = 0$ ;  $a_2 = 2$ ;  $x_{02} = 4$ ), коли

$$B_{ij}^{mp} = \begin{cases} i + j & (m = p), \\ i + j + p & (m \neq p); \end{cases} \quad C_{ij}^{mp} = D_{ij}^p = A_{mj} = 0,$$

$$K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) = \sqrt{a_m^2 - t^2} \begin{cases} (i + j) \begin{cases} 1,5 \operatorname{Real}(z_{mp}) & (p = 1) \\ 1 & (p = 2) \end{cases} & (m = p), \\ (i + j + m) \begin{cases} 1,5 \operatorname{Real}(z_{mp}) & (p = 1) \\ 1 & (p = 2) \end{cases} & (m \neq p), \end{cases}$$

$$F_{ip}(x) = \begin{cases} 10 \frac{x}{a_1} + 3,5 - 7 \left\{ 0,5(x-5) \operatorname{sign}(x-5) \left[ (x-5)^2 - a_2^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} - 5xa_1^2 & (p=1, i=1), \\ 14 \frac{x}{a_1} + 4,5 - 9 \left\{ 0,5(x-5) \operatorname{sign}(x-5) \left[ (x-5)^2 - a_2^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} - 7xa_1^2 & (p=1, i=2), \\ 18 \frac{(x+5)}{a_1} + 2,5 - 9 \left\{ \left[ 2 \frac{(x+5)^2}{a_1^2} - 1 \right] \operatorname{sign}(x+5) \left[ (x+5)^2 - a_1^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} - 7(x+5)a_1^2 & (p=2, i=1), \\ 22 \frac{(x+5)}{a_1} + 3,5 - 11 \left\{ \left[ 2 \frac{(x+5)^2}{a_1^2} - 1 \right] \operatorname{sign}(x+5) \left[ (x+5)^2 - a_1^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} - 9(x+5)a_1^2 & (p=1, i=2). \end{cases}$$

Підстановкою неважко переконатися, що точний розв'язок цієї системи має вигляд

$$f_j^1(x) = a_1 T_2 \left( (x - x_{01})/a_1 \right) / \sqrt{a_1^2 - (x - x_{01})^2},$$

$$f_j^2(x) = 0,5 a_2 T_1 \left( (x - x_{02})/a_2 \right) / \sqrt{a_2^2 - (x - x_{02})^2} \quad (j = 1, 2).$$

У табл. 7.1 містяться наближені ( $N = 30$ ) з точністю до трьох значущих цифр значення трьох перших коефіцієнтів розвинення (4.3).

**Таблиця 7.1.** Коефіцієнти розвинення (4.3)  $A_n^{mj}$  розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь (4.1), (4.2), (7.53)

	точно	наближено		точно	наближено
$A_0^{11}$	0	$-4,72 \cdot 10^{-6}$	$A_0^{21}$	0	$1,40 \cdot 10^{-6}$
$A_1^{11}$	0	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$A_1^{21}$	0,5	0,501
$A_2^{11}$	1	1,00	$A_2^{21}$	0	$3,44 \cdot 10^{-5}$
$A_0^{12}$	0	$2,90 \cdot 10^{-6}$	$A_0^{22}$	0	$1,05 \cdot 10^{-7}$
$A_1^{12}$	0	$-2,00 \cdot 10^{-3}$	$A_1^{22}$	0,5	0,498
$A_2^{12}$	1	1,00	$A_2^{22}$	0	$-2,36 \cdot 10^{-4}$

## § 8. Лінійна періодичність

### 8.1. Загальний підхід

У випадку лінійної періодичності вважають, що кожна з ліній  $L'_m$  повторюється у площині  $x_0 O_0 y_0$  безмежну кількість разів з періодом  $d^1 = d_x^1 + i d_y^1$  (рис. 8.1) і розв'язок задачі повинен давати на кожній із цих ліній однакові значення функцій  $f_j^m$ . З урахуванням цієї обставини і формул (1.421.3) [191] або (5.1.3.4) [834] можна здійснити підсумовування і отримати дещо змінений запис інтегральних рівнянь. Наприклад, ядро Коші перетвориться у ядро Гільберта [706, 860]

$$\int_{L'_m} \frac{f_j^m(t)}{t - z_{mp}} dt \rightarrow \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t)}{t - z_{mp}} dt + \sum_{q=\pm 1}^{\pm\infty} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t)}{t - z_{mp}^q} dt = \frac{\pi}{d_m^1} \int_{L'_m} f_j^m(t) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi(t - z_{mp})}{d_m^1} \right) dt,$$

$$\int_{L'_m} f_j^m(t) \ln(t - z_{mp}) dt \rightarrow \int_{L'_m} f_j^m(t) \ln \sin \left( \frac{\pi(t - z_{mp})}{d_m^1} \right) dt, \tag{8.1}$$

$$\int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt \rightarrow \int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt + \sum_{q=\pm 1}^{\pm\infty} \int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}^q) f_j^m(t) dt,$$

$$z_{mp}^q = z_{mp} - q d_m^1, \quad d_m^k = d^k \exp(-i\alpha_m), \quad d^1 = d_x^1 + i d_y^1 \quad (z_{pp}^q = x_p - q d_p^1).$$

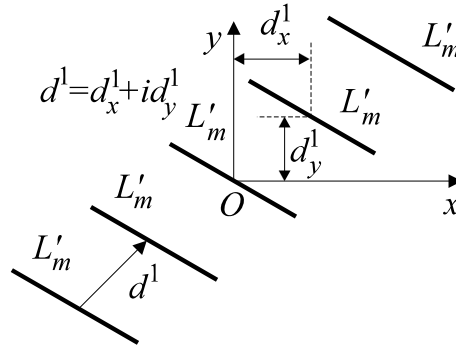


Рис. 8.1. Схема періодичної задачі

## 8.2. Метод ортогональних многочленів

Під час застосування методу ортогональних многочленів до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f(t) \operatorname{ctg} \left( \frac{t-x}{2} \right) dt + \int_{-a}^a K(t, x) f(x) dt = F(x) \quad (|x| \leq a < \pi) \quad (8.2)$$

з додатковою умовою (5.51), яке є частковим випадком рівнянь (4.1), (4.2), (8.1), розв'язок доцільно шукати у вигляді [627, 237]

$$f(x) = \frac{a \sec(x/2)}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}} \sum_{n=0}^N A_n T_n \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) \quad (|x| \leq a < \pi). \quad (8.3)$$

Підставляючи (8.3) у (8.2), з урахуванням залежності

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{a \operatorname{ctg} \left( \frac{t-x}{2} \right) T_n \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right)}{\cot \frac{t}{2} \sqrt{2(\cos t - \cos a)}} dt = \begin{cases} J_{1,n}(x) & (|x| \leq a < \pi), \\ J_{1,n}(x) - \frac{a \operatorname{sign}(x) T_n \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right)}{\cot \frac{t}{2} \sqrt{2(\cos t - \cos a)}} & (a < |x| \leq \pi), \end{cases} \quad (8.4)$$

$$J_{1,0}(x) = \frac{a}{2} \sec \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad J_{1,n} = \frac{a}{2} \operatorname{csc} \frac{a}{2} \left( \sec \frac{x}{2} \right)^2 U_{n-1} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

отримаємо аналог рівняння (5.52), який набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^N [J_{1,n}(x) + H_n(x)] A_n = F(x) \quad (|x| \leq a < \pi). \quad (8.5)$$

Домножуючи (8.5) на систему функцій

$$K_k(x) = \sec \frac{x}{2} \sqrt{2(\cos x - \cos a)} U_k \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.6)$$

та інтегруючи по  $x$  у межах від  $-a$  до  $a$ , отримаємо аналог системи лінійних алгебричних рівнянь (5.53)

$$\frac{\pi}{2} A_{k+1} + \sum_{n=0}^N H_{nk} A_n = F_k - C_k A_0, \quad A_0 = \frac{Q}{\pi} \cos \frac{a}{2}, \quad (8.7)$$

де

$$\begin{aligned}
H_{nk} &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \int_{-a}^a H_n(x) K_k(x) dx = 2 \sin \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \frac{H_n \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi) d\xi}{1+\xi^2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{a}{2} \right)}, \\
F_k &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \int_{-a}^a F(x) K_k(x) dx = 2 \sin \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \frac{F \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi) d\xi}{1+\xi^2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{a}{2} \right)}, \\
C_k &= H_{0k} + c_k, \quad c_k = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{a}{2} \right) \int_{-1}^1 \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi) d\xi}{1+\xi^2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{a}{2} \right)} = \pi \sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{tg}^{k+1} \left( \frac{a}{4} \right), \quad \xi = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2}.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Для фредгольмового ядра  $K(t, x) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-t)/h_0$  отримуємо [627]

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= \frac{\arcsin \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right)}{h_0}, \\
H_n(x) &= - \frac{\operatorname{cosec} a \sec \frac{x}{2} \sqrt{2(\cos x - \cos a)} U_{n-1} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right)}{nh_0}, \\
H_{nk} &= \frac{2 \operatorname{tg}(a/2)}{h_0} B_{n-1,k}, \\
B_{n-1,k} &= 8(k+1) \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i+1) \operatorname{tg}^{2i+1} \left( \frac{a}{4} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi(n+k)}{2} \right)}{\left[ n^2 - (2i-k)^2 \right] \left[ n^2 - (2i+k+2)^2 \right]}.
\end{aligned} \tag{8.9}$$

У граничному випадку, коли  $a \rightarrow 0$ , подання (8.3) функції  $f(x)$  набуває вигляду (4.3) (коли  $x_p \sim x$ ) (див. теж (5.29)), система лінійних алгебричних рівнянь (8.7) перетворюється на (5.53), а вираз (8.9) для  $H_{n-1,k}$  трансформується у відповідну залежність (5.48).

### 8.3. Застосування методу ортогональних многочленів до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта та ядрами Фредгольма типу інтегралів Фур'є

У § 6 викладений спосіб застосування методу ортогональних многочленів до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші та ядрами Фредгольма типу інтегралів Фур'є. Подібним чином [979] розв'язується сингулярне інтегральне рівняння з ядром Гільберта та ядрами Фредгольма

$$\begin{aligned}
K(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \sin [\xi(t-x+2k\pi)] \\ \cos [\xi(t-x+2k\pi)] \end{array} \right\} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G^{\infty}(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \sin [\xi(t-x)] \\ \cos [\xi(t-x)] \end{array} \right\} d\xi, \\
G^k(\xi) &= \sum_{i=-k}^k G(\xi) \cos(2i\pi\xi), \quad G(\xi) = o(e^{-\xi p}), \quad \text{якщо } \xi \rightarrow \infty, \quad p > 0.
\end{aligned} \tag{8.10}$$



Замінюється безмежна межа інтегрування на деяке додатне число  $R$ , після чого

$$K(x, t) \cong \frac{R}{\pi} \int_0^1 G^\infty(Ry) \left\{ \begin{array}{l} \sin[Ry(t-x)] \\ \cos[Ry(t-x)] \end{array} \right\} dy. \quad (8.11)$$

$$(8.12)$$

Спочатку розглянемо (8.11). Скориставшись розвиненнями (6.4)

$$\begin{aligned} \sin \left[ 2Ry \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] &\cong 2 \sum_{i=0}^{N_1} (-1)^i J_{2i+1}(R'y) T_{2i+1} \left[ \frac{2}{a} \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right], \\ \sin \left[ 2Ry \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] &\cong 2 \sum_{i=0}^{N_1} (-1)^i J_{2i}(R'y) T_{2i} \left[ \frac{2}{a} \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right], \quad R' = aR, \end{aligned}$$

та

$$T_{2i} \left[ \frac{2}{a} \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] \cong \sum_{p=0}^{N_4} B_{2p}^{2i} T_{2p}(\xi), \quad T_{2i+1} \left[ \frac{2}{a} \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] \cong \sum_{p=0}^{N_4} B_{2p+1}^{2i+1} T_{2p+1}(\xi), \quad (8.13)$$

після застосування (4.4) одержимо

$$\begin{aligned} H_{2p+1}(x) &\cong R \sec \frac{a}{2} \int_0^1 G^\infty(Ry) \cos(Rxy) \left[ \sum_{i=0}^{N_1} (-1)^i B_{2p+1}^{2i+1} J_{2i+1}(R'y) \right] dy, \\ H_{2p}(x) &\cong R \sec \frac{a}{2} \int_0^1 G^\infty(Ry) \sin(Rxy) \left[ \sum_{i=0}^{N_1} (-1)^i B_{2p}^{2i} J_{2i}(R'y) \right] dy. \end{aligned}$$

Тепер з використанням (8.13), виразів

$$\int_{-a}^a T_{2n+1}(x/a) U_{2m}(x/a) \sqrt{a^2 - x^2} dx = 0, \quad \int_{-a}^a T_{2n}(x/a) U_{2m+1}(x/a) \sqrt{a^2 - x^2} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi a^2} \int_{-a}^a T_{2n+1}(x/a) U_{2m+1}(x/a) \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \begin{cases} 1 & (n = m), \\ -1 & (n = m + 1), \\ 1 & (n \neq m, n \neq m + 1), \end{cases} \\ \frac{4}{\pi a^2} \int_{-a}^a T_{2n}(x/a) U_{2m}(x/a) \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \begin{cases} 2 & (n = m = 0), \\ 1 & (n = m \neq 0), \\ -1 & (n = m + 1), \\ 0 & (n \neq m, n \neq m + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

та розвинень

$$\begin{aligned} T_{2j} \left[ \frac{2}{a} \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] / \left( 1 + \xi^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \right) &\cong \sum_{l=0}^{N_5} B_{2l}^{2j} T_{2l}(\xi), \\ T_{2j+1} \left[ \frac{2}{a} \arctg \left( \xi \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] / \left( 1 + \xi^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \right) &\cong \sum_{p=0}^{N_5} B_{2l+1}^{2j+1} T_{2l+1}(\xi), \end{aligned} \quad (8.14)$$

з (8.15) одержимо

$$H_{2p+1,2l} \cong \pi R \operatorname{tg} \frac{a}{2} \int_0^1 G^\infty(Ry) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_1} (-1)^{i+j} B_{2p+1}^{2i+1} E_{2l}^{2j} J_{2i+1}(R'y) J_{2j}(R'y) dy,$$

$$H_{2p,2l+1} \cong \pi R \operatorname{tg} \frac{a}{2} \int_0^1 G^\infty(Ry) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_1} (-1)^{i+j} B_{2p}^{2i} E_{2l+1}^{2j+1} J_{2i}(R'y) J_{2j+1}(R'y) dy,$$

$$H_{2p+1,2l+1} = H_{2p,2l} = 0.$$

Беручи до відома два останні вирази у (6.4) та підставляючи у них  $aR = R'$ , з (8.17) остаточно знайдемо

$$H_{2p+1,2l} \cong 4\pi R \operatorname{tg} \frac{a}{2} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{r=0}^{N_2} I_{2m+1}^{2p+1} J_{2r}^{2l} G_{2m+1,2r}^\infty, \quad H_{2p+1,2l+1} = 0, \quad (8.15)$$

$$H_{2p,2l+1} \cong -4\pi R \operatorname{tg} \frac{a}{2} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{r=0}^{N_2} I_{2m}^{2p} J_{2r+1}^{2l+1} G_{2m,2r+1}^\infty, \quad H_{2p,2l} = 0,$$

де

$$I_{2m}^{2p} = (-1)^m \sum_{i=0}^{N_1} T_{2m}^i B_{2p}^{2i}, \quad I_{2m+1}^{2p+1} = (-1)^m \sum_{i=0}^{N_1} T_{2m+1}^i B_{2p+1}^{2i+1},$$

$$J_{2r}^{2l} = (-1)^r \sum_{j=0}^{N_1} T_{2r}^j E_{2l}^{2j}, \quad J_{2r+1}^{2l+1} = (-1)^r \sum_{j=0}^{N_1} T_{2r+1}^j E_{2l+1}^{2j+1}, \quad (8.16)$$

$$T_{2p}^i = J_{p+i}(R'_2) J_{p-i}(R'_2), \quad T_{2p+1}^i = J_{p+i+1}(R'_2) J_{p-i}(R'_2),$$

$$G_{ij}^\infty = \int_0^1 G^\infty(Ry) T_i(y) T_j(y) dy, \quad R'_2 = \frac{R'}{2}, \quad E_i^j = C_i^j - C_{i+2}^j.$$

Цілком подібно для ядра (8.12)

$$H_{2p+1} \cong R \operatorname{sec} \frac{a}{2} \int_0^1 G^\infty(Ry) \sin(Rxy) \left[ \sum_{j=0}^{N_1} (-1)^j B_{2p+1}^{2j+1} J_{2j+1}(R'y) \right] dy,$$

$$H_{2p} \cong -R \operatorname{sec} \frac{a}{2} \int_0^1 G^\infty(Ry) \sin(Rxy) \left[ \sum_{j=0}^{N_1} (-1)^j B_{2p}^{2j} J_{2j}(R'y) \right] dy, \quad (8.17)$$

$$H_{2p+1,2l+1} \cong 4\pi R \operatorname{tg} \frac{a}{2} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{r=0}^{N_2} I_{2m+1}^{2p+1} J_{2r+1}^{2l+1} G_{2m+1,2r+1}^\infty, \quad H_{2p+1,2l} = 0,$$

$$H_{2p,2l} \cong 4\pi R \operatorname{tg} \frac{a}{2} \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{r=0}^{N_2} I_{2m}^{2p} J_{2r}^{2l} G_{2m,2r}^\infty, \quad H_{2p,2l+1} = 0.$$

Інтеграл  $G_{ij}^\infty$ , що визначені формулою (8.16) наближено дорівнюють

$$G_{ij}^\infty \cong G_{ij}^k \cong \sum_{l=0}^{N_3} g_l g_{ijl}, \quad (8.18)$$

де коефіцієнти розвинення функції

$$G^k(Ry) \cong \sum_{l=0}^{N_3} g_l T_l(y) \quad (8.19)$$

разом з коефіцієнтами розвинень (8.13), (8.14) визначають згаданим вище числовим методом (6.11);  $g_{ijl}$  – формулою (6.10). Значення  $N_1, N_2, N_5, k, R$  обирають залежно від потреби досягнення певної точності обчислень.

#### 8.4. Метод колокацій

Під час використання методу колокацій можна використати трансформовані за формулами (8.1) вирази і користуватися загальною схемою (7.40). Однак виявляється, що у більшості випадків зручніше відмовитися від урахування безмежної повторюваності ліній інтегрування і у кожному такому безмежно повторюваному ряді обмежитися лише  $2Q$  першими найближчими до  $L'_m$  відрізками, додаючи таким чином до лівої частини рівнянь (7.40) член

$$\sum_{j=1}^I \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_q A_n^{mj} \left[ B_{ij}^{mp} K^{(n)} \left( z_{mp}^{q(k)} / a_m \right) + C_{ij}^{mp} L^{(n)} \left( z_{mp}^{q(k)} / a_m \right) + K_{\Phi}^{(n)} \left( z_{mp}^{q(k)} / a_m \right) \right] \quad (8.20)$$

$$(q = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm Q),$$

де  $z_{mp}^{q(k)}$  значення  $z_{mp}^q$  коли  $x_p = x_p^{(k)}, y_p = 0$ .

### § 9. Циклічна періодичність

За циклічної періодичності з періодом  $\alpha = 2\pi/P$  кожна з ліній  $L'_m$  переміщується  $P$  разів уздовж кола з центром в  $O_0$  на кут  $\alpha$ , повертаючись одночасно кожний раз на цей кут (рис. 9.1).

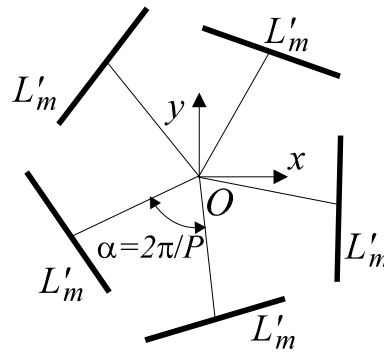


Рис. 9.1. Циклічна періодичність

При цьому вимагається, щоб розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь на кожному з періодично повторених відрізків був однаковий. Координати центру кожної з повторених ліній  $L_m^q$  –

$$\begin{aligned} x_{0m}^q + iy_{0m}^q &= (x_{0m} + iy_{0m}) \exp(2\pi i q / P) = \\ &= (x_{0m} + iy_{0m}) \exp(i\alpha q), \end{aligned} \quad (9.1)$$

а її кут з віссю  $O_0x_0$  дорівнює  $\alpha_m^q = \alpha_m + q\alpha$ . Тому у цьому випадку у рівняннях (4.1) слід зробити заміну

$$\begin{aligned}
\int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}} &\rightarrow \sum_{q=0}^{P-1} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}^q}, \\
\int_{L'_m} f_j^m(t) \ln(t - z_{mp}) dt &\rightarrow \sum_{q=0}^{P-1} \int_{L'_m} f_j^m(t) \ln(t - z_{mp}^q) dt, \\
\int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt &\rightarrow \sum_{q=0}^{P-1} \int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}^q) f_j^m(t) dt, \\
z_{mp}^q &= \left[ x_{0p} + iy_{0p} - (x_{0m}^q + iy_{0m}^q) + x_p \exp(i\alpha_p) \right] \exp[-i(\alpha_m + \alpha q)]
\end{aligned} \tag{9.2}$$

і тоді під час застосування методу колокацій до лівої частини системи лінійних алгебричних рівнянь (7.40) слід додати вираз

$$\sum_{j=1}^I \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{P-1} A_n^{mj} \left[ B_{ij}^{mp} K^{(n)} \left( \frac{z_{mp}^{q(k)}}{a_m} \right) + C_{ij}^{mp} L^{(n)} \left( \frac{z_{mp}^{q(k)}}{a_m} \right) + K_{\Phi}^{(n)} \left( \frac{z_{mp}^{q(k)}}{a_m} \right) \right]. \tag{9.3}$$

## § 10. Підсумовування ядер Коші за подвійної періодичності

Під час застосування апарату сингулярних інтегральних рівнянь до розв'язування багатьох класів задач з подвійною періодичністю розв'язку [199, 860] необхідно заступити ядро Коші  $1/u$  подвійною сумою

$$S(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - P}, \quad u = t - z, \quad P = qd^1 + ld^2, \tag{10.1}$$

де  $d^1, d^2$  – періоди повторюваності комірки періодичності вздовж першої та другої осей періодичності відповідно. Для визначеності

$$\text{Im}(D) > 0, \quad D = d^2/d^1. \tag{10.2}$$

Використання формули (1.421.3) [191]

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + q} = \pi \text{ctg}(\pi u) \tag{10.3}$$

дає спершу

$$S(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - ld^2 - qd^1} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{d^1} \text{ctg} \frac{\pi(u - ld^2)}{d^1},$$

а наступне застосування виразу (8.174) [191]

$$\zeta(u) - 2 \frac{\delta_1 u}{d^1} = \frac{\pi}{d^1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{ctg} \left( \frac{\pi u}{d^1} + l\pi \frac{d^2}{d^1} \right), \quad \delta_i = \zeta(d^i/2)$$

дає можливість записати

$$S(u) = \zeta(u) - \frac{2\delta_1 u}{d^1}.$$

Тут  $\zeta(u)$  – еліптична дзета-функція Вейерштрасса;  $d^1, d^2$  – періоди цієї функції, які у [191, 325, 833] позначають  $2\omega_1, 2\omega_2$ , а у [42, 199, 273, 860] –  $\omega_1, \omega_2$ .

Змінивши порядок підсумовування у формулі (10.1), отримуємо

$$S(u) = \zeta(u) - \frac{2\delta_2 u}{d^2}. \quad (10.4)$$

Оскільки повинно справджуватися співвідношення Лежандра

$$\delta_1/d^1 - \delta_2/d^2 = A, \quad A = \pi i / (d^1 d^2), \quad (10.5)$$

то формули (10.3), (10.4) можуть бути вірними лише за умови  $A = 0$ .

Причина протиріччя полягає у розбіжності ряду (10.1), через що результат підсумовування залежить від способу його організації. Під час одержання виразу (10.3) спершу підсумовувалося за  $q$ , а потім за  $l$ , а вираз (10.4) отриманий після підсумовування спочатку за  $l$ , а вже потім за  $q$ .

Розглянемо вираз

$$I(u) \equiv \zeta(u) - u(\delta_1/d^1 + \delta_2/d^2) = \zeta(u) - 2u\delta_1/d^1 + uA = \zeta(u) - 2u\delta_2/d^2 - uA, \quad (10.6)$$

що залежить лише від  $u$  та періодів функції  $\zeta(z)$  і не залежить від способу підсумовування рядів. Якщо підставити сюди розвинення дзета-функції (8.172.1) [191]

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum' \left( \frac{1}{u-P} + \frac{1}{P} + \frac{u}{P^2} \right), \quad (10.7)$$

де штрих біля символу  $\Sigma$  означає, що у сумі відсутній член, який відповідає одночасній рівності нулю  $q$  та  $l$ , то звідси з урахуванням (10.5) дістаємо

$$S(u) = I(u) + Cu = \zeta(u) - 2u \frac{\delta_j}{d^j}, \quad C = \frac{1}{d^1 d^2} \tilde{I}_{12}, \quad C_j = \frac{1}{d^1 d^2} \left( \tilde{I}_{12} - (-1)^j \pi i \right), \quad (10.8)$$

$$\tilde{I}_{12} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \quad \tilde{I}_i = d^1 d^2 I_i, \quad I_i = \frac{1}{d^i} \sum_{l,q} \frac{2}{d^i - 2P} \quad (j=1, 2).$$

Залежно від способу підсумовування величини  $\tilde{I}_i, \tilde{I}_{12}$  можуть набувати різних значень.

Вважатимемо

$$\tilde{I}_i = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ Q \rightarrow \infty}} \tilde{I}_i^{LQ}, \quad \tilde{I}_i^{LQ} \equiv \frac{d^1 d^2}{d^i} \sum_{l=-L}^L \sum_{q=-Q}^Q \frac{2}{d^i - 2P}.$$

Якщо врахувати, що

$$\begin{aligned} \sum_{l=-L}^L \sum_{q=-Q}^Q \frac{2}{d^1 - 2P} &= \sum_{l=-L}^L \sum_{q=-Q}^Q \frac{1}{d^1 (1-2q) - 2ld^2} = \sum_{l=-L}^L \frac{1}{d^1 (1+2Q) + 2ld^2}, \\ \sum_{l=-L}^L \sum_{q=-Q}^Q \frac{2}{d^2 - 2P} &= \sum_{l=-L}^L \sum_{q=-Q}^Q \frac{1}{d^2 (1-2q) - 2ld^1} = \sum_{l=-Q}^Q \frac{1}{d^2 (1+2L) + 2ld^1}, \end{aligned}$$

то

$$\tilde{I}_1^{LQ} = \sum_{l=-L}^L \frac{1}{(Q+1/2)/D+1}, \quad \tilde{I}_2^{LQ} = \sum_{q=-Q}^Q \frac{1}{(L+1/2)D+1}. \quad (10.9)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{12}^{LQ} \equiv \tilde{I}_{12}^{LQ}(L, Q, D) &= \tilde{I}_1^{LQ} + \tilde{I}_2^{LQ} = \tilde{I}_1^{LQ} = \frac{D}{Q+1/2} + \frac{1}{(L+1/2)D} + \\ &+ \frac{2Q+1}{D} \sum_{l=1}^L \frac{1}{[(Q+1/2)/D]^2 - l^2} + \left(2L + \frac{1}{2}\right) D \sum_{q=1}^Q \frac{1}{[(L+1/2)D]^2 - q^2}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

У випадку прямокутної ґратки  $D = id$  (для визначеності  $d > 1$ ,  $Q > L$ ), коли  $d$  ціле, а  $R \equiv Q/L = d$  (відповідні точки  $u - P$  лежать всередині квадрату)

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{12}^{LQ} \equiv \tilde{I}_{12}(L, dL, id) &= \sum_{l=1}^L \left( \frac{L+1/2}{(L+1/2)^2 + l^2} - \frac{L+1/2}{d} \sum_{p=0}^{d-1} \frac{1}{(L+1/2)^2 + (1-p/a)^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{id(L+1/2)} - \frac{d}{i(dL+1/2)}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Зокрема, якщо  $d = 1$  (квадратна ґратка) і при цьому  $R = 1$ , то

$$\tilde{I}_{12}^{LQ} = \tilde{I}_{12}(L, L, i) = 0. \quad (10.12)$$

У загальнішому випадку  $\tilde{I}_{12}(L, dL, id) \neq 0$ , але  $\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{I}_{12}(L, dL, id) \rightarrow 0$  і у цьому випадку теж, як і для квадратної ґратки,

$$S(u) = I(u). \quad (10.13)$$

Хоча на основі (1.421.3) [191] формула  $\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=-L}^L \frac{1}{u + \pi l} = \text{ctg}(u)$  залишається вірною,

але оскільки вона справджується для кожного фіксованого  $u$ , то попри залежність (10.9) за фіксованого відношення  $R = \text{const}$

$$\tilde{I}_1 = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ Q \rightarrow \infty}} \sum_{l=-L}^L \frac{1}{(Q+1/2)D+1} \neq \pi \lim_{Q \rightarrow \infty} \text{ctg} \left( \frac{\pi(Q+1/2)d^1}{d^2} \right) \quad (10.14)$$

і спроба записати

$$\tilde{I}_{12} = \pi \left[ \lim_{Q \rightarrow \infty} \text{ctg} \left( \frac{\pi(Q+1/2)d^1}{d^2} \right) + \lim_{L \rightarrow \infty} \text{ctg} \left( \frac{\pi(L+1/2)d^2}{d^1} \right) \right]$$

не має підстав. Це підтверджують і числові експерименти. Причому, чим менше відношення  $R$  (чим менше значення  $Q$  у порівнянні з межами підсумовування  $L$ ), тим менша різниця між границею суми і правою частиною виразу (10.13).

Якщо ж  $R = k \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{l=-L}^L \frac{1}{(kL+1/2)/D+1} = 0, \\ \tilde{I}_2 &= \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{l=-kL}^{kL} \frac{1}{(L+1/2)D+q} = \pi \text{ctg} \left( \frac{\pi(L+1/2)d^2}{d^1} \right). \end{aligned} \quad (10.15)$$

На відміну від (10.14) тут можна перейти до границі з огляду на те, що  $k \rightarrow \infty$ .

Оскільки  $\text{ctg}(z) = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$ , то при  $y > 0$  границя  $\text{ctg}(z) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} -i$ , а при  $y < 0$  –  $\text{ctg}(z) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} i$ . Тому

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \operatorname{ctg}(z) = \begin{cases} -i & \text{при } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ i & \text{при } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

і на основі (10.15) при  $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{I}_{12}(L, kL, D) = \begin{cases} -\pi i & \text{при } \operatorname{Im}(D) > 0, \\ \pi i & \text{при } \operatorname{Im}(D) < 0. \end{cases} \quad (10.16)$$

З огляду на умову (10.2) на основі (10.8) та (10.6)  $S(u) = \zeta(u) - 2u\delta_1/d^1$ , що збігається з виразом (10.3), одержаним на основі первісного підсумовування у напрямку періоду  $d^1$ .

Коли  $1/R \equiv L/Q = k \rightarrow \infty$ , то подібним чином отримуємо

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \tilde{I}_{12}(kQ, L, D) = \begin{cases} \pi i & \text{при } \operatorname{Im}(D) > 0, \\ -\pi i & \text{при } \operatorname{Im}(D) < 0 \end{cases} \quad (10.17)$$

і тоді  $S(u) = \zeta(u) - 2u\delta_2/d^2$ . Це збігається з виразом (10.4), отриманим за початкового підсумовування в напрямі періоду  $d^2$ .

Таблиця 10.1

$a$	$I_1$	$I_2$	$I_{12}$
1	1,5708	-1,5708	0
2	1,1071	-0,46365	0,64350
3	0,83270	-0,21450	0,61820
4	0,66291	-0,12249	0,54042
5	0,54936	-0,078958	0,47040
10	0,29423	-0,019934	0,27420
100	0,031216	-0,000200	0,031216
1000	0,0031514	-0,000002	0,0031494

Використання в [860] під час розв'язування сингулярного інтегрального рівняння для подвійно-періодичних задач теорії тріщин асимптотичного розвинення ядра інтегрального рівняння (головна функція  $\zeta(z)$ ) за великих значень параметра  $d^1$  можливо рівнозначне наданню переваги підсумовуванню в напрямі періоду  $d^1$  і тому одержані результати дуже близькі до розв'язку відповідної періодичної задачі для співвісних тріщин.

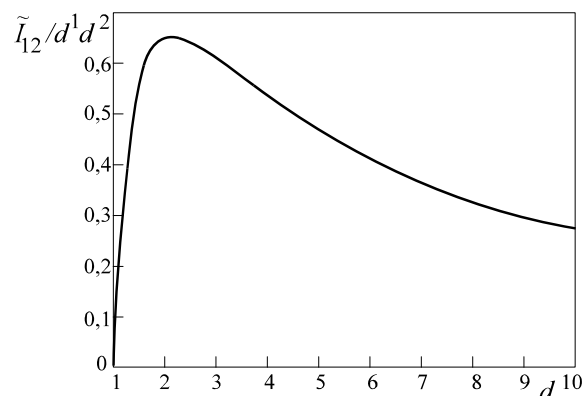


Рис. 10.1. Залежність  $I_{12} = \tilde{I}_{12}/(id)$  для прямокутної ґратки від  $d$

У табл. 10.1 поміщені окремі значення сум  $I_i = \tilde{I}_i/d^1d^2$ ,  $I_{12} = \tilde{I}_{12}/d^1d^2$  для прямокутної ґратки ( $D = id$ ,  $d^1 = 1$ ), обчислені для різних значень від параметра  $d$  при  $R = 1$ . Збіж-

ність числових результатів досить хороша, оскільки вже при  $L = 2$  забезпечується точність до 1%, а при  $L = 1000$  – до п'яти значущих цифр.

Рис. 10.1 дає відповідне графічне зображення залежності  $I_{12}$ . Підтверджується, що для прямокутної ґратки  $\tilde{I}_{12}(L, Q, id) = \bar{\tilde{I}}_{12}(Q, L, i/a)$ .

Таблиця 10.2

$L/Q$	$\tilde{I}_{12}/\pi i$				
	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 10$
0,01	-0,986	-0,975	-0,961	-0,949	-0,873
0,02	-0,971	-0,950	-0,923	-0,898	-0,748
0,04	-0,949	-0,898	-0,848	-0,798	-0,515
0,1	-0,873	-0,748	-0,629	-0,515	0
0,2	-0,749	-0,515	-0,312	-0,141	0,410
0,25	-0,688	-0,410	-0,180	0	0,516
1/3	-0,590	-0,251	0	0,181	0,629
0,5	-0,410	0	0,251	0,410	0,749
1	0	0,410	0,550	0,688	0,873
2	0,410	0,688	0,790	0,842	0,936
3	0,590	0,790	0,859	0,894	0,958
4	0,688	0,842	0,894	0,920	0,968
5	0,749	0,873	0,915	0,936	0,975
10	0,873	0,936	0,957	0,968	0,987
25	0,949	0,974	0,983	0,987	0,995
50	0,971	0,987	0,991	0,994	0,997
100	0,986	0,993	0,996	0,997	0,999

Табл. 10.2 містить дані визначення величини  $\tilde{I}_{12}/\pi i$  для прямокутної ґратки при деяких відношеннях  $L/Q$ . Вона підтверджує залежності (10.18) та (10.19). Те ж саме (табл. 10.3) вірне і в розрахунках для трикутної ґратки, коли кут  $\theta$  між векторами  $d^1$  та  $d^2$  становить  $60^\circ$  ( $D = (1 + i\sqrt{3})/2$ ) та  $30^\circ$  ( $D = (\sqrt{3} + i)/2$ ). Для таких ґраток  $\tilde{I}_{12}(L, Q, D) = \bar{\tilde{I}}_{12}(L, Q, D)$ .

Таблиця 10.3

$Q/L$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 30^\circ$
1	-0,350i	-0,838i
2	-0,454-0,270i	-0,625-0,544i
3	-0,633-0,197i	-0,772-0,367i
4	-0,724-0,153i	-0,834-0,276i
5	-0,779-0,124i	-0,869-0,221i
10	-0,890-0,633i	-0,936-0,110i
25	-0,956-0,025i	-0,974-0,044i
50	-0,978-0,013i	-0,987-0,022i
100	-0,989-0,006i	-0,993-0,011i

Таким чином, під час підсумовування ядер Коші (10.1) в процесі побудови сингулярного інтегрального рівняння двоперіодичних задач слід користуватися залежністю (10.8), де стали  $C$  (чи  $\tilde{I}_{12}$ ) визначають, використовуючи окрему умову, якій повинен задовольняти розв'язок задачі, чи з якихось інших міркувань.



### § 11. Подвійна періодичність

У випадку подвійної періодичності вважається, що лінії  $L'_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ) поширені безмежну кількість разів уздовж одної осі з періодом  $d^1 = d_x^1 + id_y^1$ , а потім кожна із ліній отриманої системи повторена безмежну кількість разів вздовж другої осі з періодом  $d^2 = d_x^2 + id_y^2$  (рис. 11.1). Розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь на кожній з репродукованих з подвійним періодом ліній збігається з розв'язком на  $L'_m$ . З урахуванням формул (10.1) і (10.10)

$$\int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}} \rightarrow \int_{L'_m} f_j^m(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t - z_{mp} + qd_m^1 + ld_m^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{L'_m} f_j^m(t) \left[ \zeta(t - z_{mp}) - 2\zeta\left(\frac{d_m^1}{2}\right) \frac{(t - z_{mp})}{d_m^1} + (t - z_{mp}) C_1 \right] dt, \quad (11.1)$$

де  $C_1$  – стала, яку визначають з додаткової умови, яку повинен задовольняти розв'язок дво-періодичної задачі.

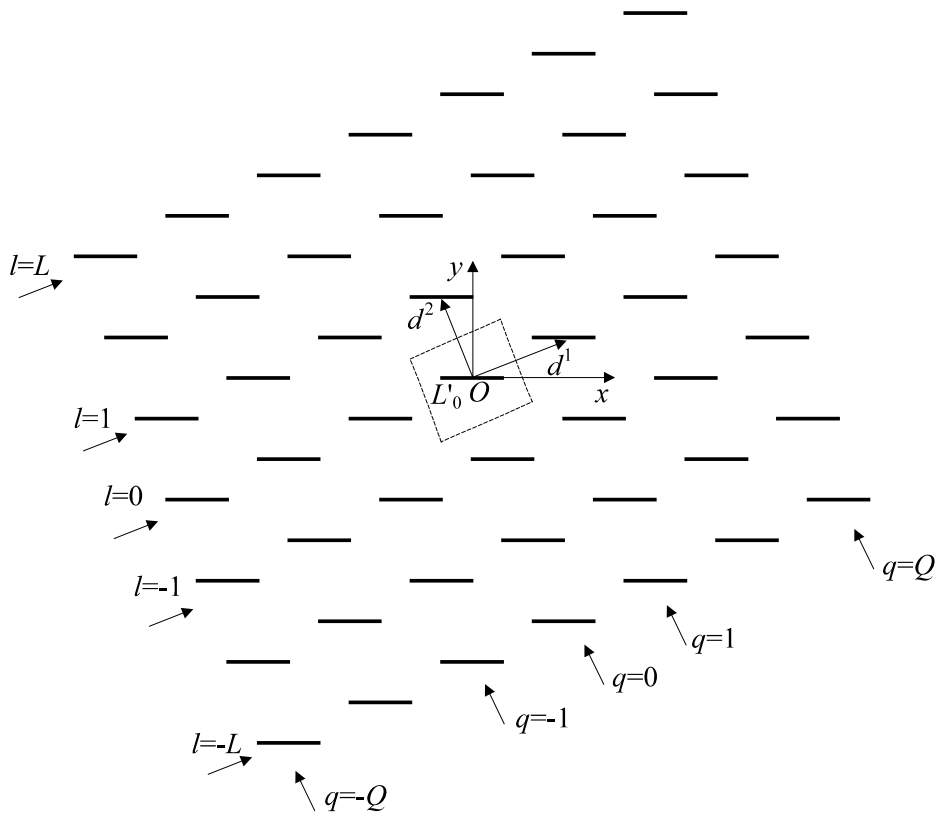


Рис. 11.1. Схема двоперіодичної задачі

Використовуючи формулу (1.17.5.9) [832], тобто залежність

$$\int \zeta(u) du = \ln[\sigma(u)],$$

де  $\sigma(u)$  – сігма-функція Вейерштрасса, з (11.1) отримаємо

$$\int_{L'_m} f_j^m(t) \ln|t - z_{mp}| dt \rightarrow \int_{L'_m} f_j^m(t) \left\{ \ln[\sigma(t - z_{mp})] - 2\zeta(d_m^1/2) \ln(t - z_{mp})/d_m^1 + (t - z_{mp}) C_1 \right\} dt. \quad (11.2)$$

Для ядер Фредгольма

$$\int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt \rightarrow \sum_{l=0, \pm 1}^{\pm \infty} \int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}^{ql}) f_j^m(t) dt; \quad z_{mp}^{ql} = z_{mp} - qd_m^1 - ld_m^2. \quad (11.3)$$

Якщо в безмежних сумах обмежитися найближчими  $2Q$  членами по першому періоду і  $2L$  рядами образів  $L'_m$  по другому періоду, то при наближеному розв'язуванні системи сингулярних інтегральних рівнянь можна розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь (7.40), додавши до її лівої частини члени

$$\sum_{j=1}^I \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \frac{1}{2} B_{ij}^{mp} \left( A_1^{mj} - 2z_{mp}^{(k)} A_0^{mj} \right) + C_{ij}^{mp} A_0^{mj} \right] C_1 + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^N \sum_{q,l} A_n^{mj} \left[ B_{ij}^{mp} K^{(n)} \left( z_{mp}^{ql(k)} / a_m \right) + C_{ij}^{mp} L^{(n)} \left( z_{mp}^{ql(k)} / a_m \right) + K_{\Phi}^{(n)} \left( z_{mp}^{ql(k)} / a_m \right) \right] \right\}, \quad (11.4)$$

$$z_{mp}^{ql(k)} = z_{mp}^{(k)} - qd_m^1 - ld_m^2.$$

Штрих у сумі означає, що індекси  $q, l$  перебігають цілі значення  $q = -Q \dots Q$ ;  $l = -L \dots L$  крім пари  $q = l = 0$  (член, що відповідає  $q = l = 0$  міститься у лівій частині рівняння (7.40)).

Відзначимо, що дещо подібний до використаного тут спосіб побудови сингулярного інтегрального рівняння двоперіодичної задачі для прямокутної ґратки використаний у праці [1237]. Однак метод розв'язування сингулярного інтегрального рівняння був іншим, зокрема, використовувалося явне підсумовування ядер Коші "по вертикалі" (по всіх проміжках у напрямку, перпендикулярному до площини розрізів), а потім приймалася до відома обмежена кількість членів "по горизонталі", тобто враховувалася безмежна кількість рядів і скінченна кількість стовпців тріщин.

Другий метод побудови сингулярних інтегральних рівнянь двоперіодичних задач теорії тріщин був вжитий у [706, 860, 1373, 1589], коли використовувалася пряма побудова комплексних потенціалів для представницького елемента з використанням двоперіодичних еліптичних функцій Вейерштрасса.

## § 12. Екстраполяція за Річардсоном [114]

Теоретичні дослідження свідчать, що зі збільшенням кількості  $N$  врахованих у розвиненнях шуканих функцій членів (методи ортогональних многочленів чи колокацій) або вузлових точок у методі механічних квадратур наближений розв'язок повинен збігатися до точного. Однак на практиці існує межа [1347], коли подальше підвищення  $N$  не покращуватиме, а, навпаки, породжуватиме пришвидшене зменшення точності обчислень. Спричинене це тим, що розрядна сітка комп'ютера обмежена і через це під час тривалих обчислень відбувається накопичення похибок, а поряд з цим отримані системи лінійних алгебричних рівнянь внаслідок погіршення обумовленості набувають все гіршої структури. З другого боку, розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь великого розміру не завжди можливе через обмеженість ресурсів пам'яті чи машинного часу, особливо коли це стосується розв'язування задач оптимізації. Адже для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь порядку  $N$

слід виконати приблизно  $O(N^3)$  операцій за використання прямих методів (методом обернення матриці Гаусса – Жордано –  $N^3 + O(N^2)$ ), методом факторизації Гаусса – Дуліттла –  $\frac{1}{3}N^3 + O(N^2)$  та приблизно  $O(N^2)$  операцій під час використання ефективних ітераційних методів.

Зменшити кількість обчислень та одночасно підвищити точність обчислень частково може допомогти екстраполяція за Річардсоном [579, 1347, 114]. Нехай деяка величина  $\sigma$  обчислена при  $R$  різних значеннях числа  $N \in \{N_p\}$  ( $p = \overline{1, R}$ ), яким відповідають різні рівномірні або нерівномірні розбиття  $\{h_p\}$  (за нерівномірного вважатимемо, що  $h_i = \max_{N_i} \{x_{N_i}^{(k+1)} - x_{N_i}^{(k)}\}$  або середньому значенню кроку). Позначимо такі значення  $\{\sigma_p\}$ . Зі збільшенням  $N$  (зменшенням  $h$ )  $\sigma(N)$  прямує до свого точного значення:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = \lim_{R \rightarrow 0} \sigma(R) = \sigma. \quad (12.1)$$

Для найкращого наближення до точного значення апроксимуємо  $\sigma(h)$  поліномом  $P(h)$  степеню  $R-1$  від  $R$  пар значень  $h_i, \sigma(h_i)$ . Екстрапольоване значення  $P(0)$  розташоване ближче до точної величини  $\sigma$ , ніж найкраще з наближених значень  $\sigma(h_i)$  [1347].

Якщо похибку наближеного розв'язку можна подати як многочлен

$$\sigma(h_i) - \sigma = \sum_n b_n h_i^n, \quad (12.2)$$

то екстрапольоване значення  $P(0) \cong \sigma$  збігатиметься зі значенням лінійної форми

$$P(0) = L[\sigma(h_1), \dots, \sigma(h_R)] = \sum_{i=1}^R d_i \sigma(h_i), \quad (12.3)$$

де  $\{d_i\}_1^R$  визначаються з умови

$$P(0) = \sigma + 0 + \dots + 0 + g_M h_M^m + g_{M+1} h_M^{m+1}, \quad (12.4)$$

яка породжує систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^R d_i h_i^n = \sigma_{0n} \quad (n = 0 \dots R-1). \quad (12.5)$$

Як показано в [579] екстраполяція (12.3), (12.4) теоретично гарантує похибку не меншу від

$$|P(0) - \sigma| \leq |\sigma(h_R/2) - \sigma|. \quad (12.6)$$

Тобто, маючи набір наближених значень  $\sigma(h_1), \dots, \sigma(h_R)$  екстрапольованням можна досягти точності, теоретично гарантованої удвоє більшою від  $R$  кількістю точок колокацій.

Теоретичне обґрунтування екстраполяції за Річардсоном зроблене для рівномірного кроку розбиття. Використання методів колокацій чи механічних квадратур до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь ґрунтується на нерівномірних розбиттях проміжку інтегрування  $L$ . Однак і у цьому випадку, коли в ролі  $h_i$  вибране середнє значення  $L/(N_i + 1)$  кроку розбиття, екстраполяція за Річардсоном виявляється ефективною. Покаже-

мо це емпірично, обчислюючи суму  $\sigma(N) = \sum_{i=0}^N A_n$  коефіцієнтів наближеного розв'язку (5.29).

Таблиця 12.1. Числова реалізація процедури методу колокацій для (12.7)

$p$	$N_p$	$\sigma(N_p)$	$\sigma_c^{(1)}(p)$
1	1	1,7500	1,7500
2	2	3,0000	3,4167
3	3	3,8083	4,5847
4	4	4,0262	4,2350
5	5	4,1140	4,2490
6	10	4,2184	4,2500
7	15	4,2361	4,2500
8	20	4,2422	4,2500
9	30	4,2465	4,2502
10	40	4,2480	4,2499
11	50	4,2487	4,2499
12	60	4,2491	4,2499
13	70	4,2493	4,2499
14	80	4,2495	4,2499

Для сингулярного інтегрального рівняння

$$t(x) + 0,75x \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f(t) dt = 1,75 + 2,5x \quad (|x| \leq 1), \quad \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \quad (12.7)$$

з умовою (5.28) при  $Q = 0$  точний розв'язок відповідає  $A_1 = 1,75$ ,  $A_2 = 2,5$  (інші коефіцієнти дорівнюють нулю) і  $\sigma = 4,25$ . У табл. 12.1 подані значення  $\sigma(N_p)$   $p = \overline{1, M}$ , обчислені на основі схеми (7.51), (7.72) та  $\sigma_c^{(1)}(M)$  – екстрапольовані за  $M$  значеннями. Помітно, що вже при  $N = 10$  екстраполяція за шістьма значеннями  $\sigma(N_p)$  дає розв'язок задачі з точністю до п'яти знаків, хоча прямим методом це недосяжне навіть і при  $N = 80$ .

Таблиця 12.2. Порівняння значень  $\sigma(N)$  і двочленних екстраполяцій  $\sigma_c^{(1)}(2)$

$N$	$\sigma(N)$	$\sigma_c^{(1)}(2)$
2	3,0000	3,4165
4	4,0262	4,3683
10	4,2184	4,2824
20	4,2422	4,2501
30	4,2465	4,2500
40	4,2480	4,2500
60	4,2491	4,2500
80	4,2495	4,2500

Екстраполяцію за Річардсоном зручно здійснювати за двома значеннями  $\sigma(N)$  та  $\sigma(N/2)$ . У цьому випадку  $d_1 = -1/3$ ,  $d_2 = 4/3$ . Вона менш точна (табл. 12.2) порівняно з багаточленною, однак її ефективність доволі висока, особливо за великих значень  $N$ . Причому, як видно зі зіставлення з табл. 12.1, збільшення кількості членів ряду (12.3) вносить свої похибки у результат екстраполяції.

Як другий приклад розглянемо результати розв'язування сингулярного інтегрального рівняння

$$t(x) + \frac{1}{10\sqrt{1-x^2}} \left( \int_{-1}^1 S(x-t)f(t)dt - \int_{-1}^x f(t)dt \right) = F(x) \quad (|x| \leq 1), \quad \int_{-1}^1 f(t)dt = 0. \quad (12.8)$$

Перший інтеграл у дужках, який містить сходинову функцію  $S(x-t)$ , з точністю до знаку дорівнює другому інтегралу Прандтля і, таким чином, вираз у дужках дорівнює нулю. Тим не менше, оскільки у числовій процедурі під час обчислення інтегралу Прандтля використовується аналітичне значення інтегралу, а до ядра Фредгольма застосовуються методи числового інтегрування, то у даному прикладі спостерігається відносно повільна збіжність. Зокрема, при  $F(x) = 5,5$  точний розв'язок (12.8) дає  $A_1 = \sigma = 5,5$ ; відповідні наближені й екстрапольовані значення поміщені у табл. 12.3.

Таблиця 12.3. Наближені і екстрапольовані результати розв'язування (12.8)

$p$	$N_p$	$\sigma(N_p)$	$\sigma_c^{(1)}(p)$
1	1	0,917	0,917
2	2	-13,3	-16,1
3	3	14,1	42,9
4	4	9,21	-11,6
5	5	10,4	24,5
6	10	7,76	3,58
7	15	6,91	6,29
8	20	6,54	5,98
9	30	6,17	7,19
10	40	6,00	5,63

Таблиця 12.4. Значення  $\sigma_c^{(1)}(p)$ , визначені на вибіркових наближених значеннях

$p$	$N_p$	$\sigma_c^{(1)}(p)$
1	10	7,76
2	15	6,23
3	20	6,00
4	30	5,80
5	40	5,72
6	50	5,66

Таблиця 12.5. Екстрапольовання розв'язку рівняння (12.8) для  $F(x) = 5,5$

$p$	$N_p$	$\sigma(N_p)$	$\sigma_c^{(1)}(p)$
1	3	8,14	8,14
2	4	8,47	8,91
3	5	6,93	1,51
4	10	6,54	7,37
5	15	6,24	5,81
6	20	6,00	5,54
7	30	5,83	5,69
8	40	5,74	5,61
9	50	5,69	5,63
10	60	5,66	5,65
11	70	5,64	5,69
12	80	5,62	5,58

Таблиця 12.6. Дослідження рівняння (12.8) для  $F(x) = 1,75 + 2,5x$  ( $\sigma = 3$ )

$p$	$N_p$	$\sigma(N_p)$	$\sigma_c^{(1)}(p)$	$N_p$	$\sigma_c^{(1)}(p)$
1	1	2,91	2,91	4	4,35
2	2	-3,88	-5,27	5	6,49
3	3	9,98	24,4	10	2,86
4	4	4,35	-13,2	15	3,19
5	5	5,12	17,3	20	3,32
6	10	3,96	1,23	30	3,05
7	15	3,49	3,27	40	3,11
8	20	3,40	3,32	50	3,11
9	30	3,25	5,11	60	3,11
10	40	3,19	2,93	70	4,43
11	50	3,15	3,08	80	2,95
12	60	3,13	3,04		
13	70	3,10	3,09		
14	80	3,09	3,24		

Таблиця 12.7. Двочленні екстраполяції 1–4 порядків на основі даних табл.12.5

$N$	$\sigma_c^{(1)}(2)$	$\sigma_c^{(2)}(2)$	$\sigma_c^{(3)}(2)$	$\sigma_c^{(4)}(2)$
10	6,42			
20	5,82	5,62		
30	5,69			
40	5,66	5,61	5,61	
60	5,61	5,58		
80	5,58	5,55	5,54	5,1

Таблиця 12.8. Двочленні екстраполяції 1–4 порядків на основі даних табл.12.6

$N$	$\sigma_c^{(1)}(2)$	$\sigma_c^{(2)}(2)$	$\sigma_c^{(3)}(2)$	$\sigma_c^{(4)}(2)$
10	2,55			
20	3,24	3,47		
30	3,17			
40	3,12	3,08	2,95	
60	3,08	3,05		
80	3,06	3,04	3,03	3,05

Зазначимо, що якщо зі зміною  $N$  наближений розв'язок не змінюється монотонно чи досить правильно, то екстрапольованим значенням властивий збільшений розкид, тобто вони не згладжують розв'язку. У табл. 12.4 містяться екстрапольовані значення  $\sigma_c^{(1)}(p)$ , визначені на тих наближених значеннях, які відзначаються монотонним прямуванням до точного результату. За таких обставин екстраполяція істотно надійніша.

Розв'язок рівняння (12.8) для  $F(x) = 5,5$  з урахуванням лише непарних значень  $n$  у розвиненні шуканої функції у ряд за многочленами Чебишева еквівалентний збільшенню удвоє значення параметра  $N$ . Екстраполяція у даному випадку (табл. 12.5) теж значно краща.

Подібні результати отримані під час дослідження рівняння (12.8) для  $F(x) = 1,75 + 2,5x$ , коли  $A_1 = 1,75$ ;  $A_2 = 1,25$ ;  $\sigma = 3$  (табл. 12.6).

Можливе застосування екстраполяції за Річардсоном до вже екстрапольованих значень (екстраполяції другого та вищих порядків). Табл. 12.7, 12.8 містять результати двочленної

екстраполяції 1–4-го порядків, побудовані на основі даних таблиць 12.5 і 12.6 відповідно. Якщо порівняти 12-членну  $\sigma_c^{(1)}(12) = 5,58$  (табл. 12.5) з відповідною значенню  $N = 80$  дво-членною екстраполяцією четвертого порядку 5,51 (табл. 12.6), то побачимо, що остання – точніша, хоча й отримана дуже просто, а обчислення  $\sigma_c^{(1)}(12)$  потребує додаткового розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь 12-го порядку та побудови відповідного многочлена. Хоча двочленне наближення першого порядку для  $N = 80$  дещо гірше від  $\sigma_c^{(1)}(12)$ , то вже екстраполяція другого порядку (5,55), яка враховує фактично  $\sigma(20)$ ,  $\sigma(40)$  та  $\sigma(80)$ , виявляється кращою від  $\sigma_c^{(1)}(12)$ . Оскільки екстраполяції першого порядку в табл. 12.8 не змінюються монотонно зі збільшенням  $N$ , то це негативно впливає на поводження одержаних результатів.

## Р О З Д І Л І І І

### У М О В И В З А Є М О Д І Ї

#### § 13. Основні співвідношення двовимірної стаціонарної теорії теплопровідності, пружності та термопружності

##### 13.1. Теплопровідність

Залежність між температурним полем  $T(x, y, z)$  і вектором теплового потоку  $\mathbf{q}(q_x, q_y, q_z)$  у тілі дає закон Фур'є [380, 486, 778]

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad}T \quad \text{або} \quad q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (13.1)$$

Якщо записати умову теплового балансу для елементарного об'єму середовища, то отримане рівняння теплопровідності у декартовій системі координат  $Oxyz$  за незалежного від температури і координат коефіцієнту теплопровідності  $\lambda$  має вигляд

$$\lambda \Delta_3 T(x, y, z) = -Q(x, y, z), \quad (13.2)$$

де  $\Delta_3 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  – тривимірний оператор Лапласа;  $Q(x, y, z)$  – інтенсивність об'ємних джерел тепла.

Зведення до двовимірної задачі теплопровідності можливе, коли:

1) відсутнє теплоперенесення уздовж однієї з осей координат, зокрема,

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad (13.3)$$

2) тіло є тонкою пластиною, на бічних поверхнях  $z = \pm \delta$  якої симетрично відносно середньої поверхні  $z = 0$  здійснюється теплообмін з довкіллям, зокрема, конвективний

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \mp \alpha (T - T_C) \quad \text{на} \quad z = \pm \delta. \quad (13.4)$$

Тут  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $T_C$  – температура довкілля;  $\delta$  – півтовщина пластинки.

Для першого випадку рівняння (13.1) набуває вигляду

$$\lambda \Delta T(x, y) = -q(x, y). \quad (13.5)$$

Тут  $\Delta = \Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – двовимірний оператор Лапласа;  $q(x, y)$  – інтенсивність об'ємних джерел тепла. Температурне поле тоді називають **плоским** [778] і визначають за формулами [396, 635, 835]

$$T(x, y) = \text{Re} \Phi_T(z), \quad \Phi_T(z) = \sum_k \left[ m_k \ln(z - z_{*k}) - m_{kk} \frac{\exp(i\theta_k)}{z - z_{*k}} \right] + \Phi_{T0}(z), \quad (13.6)$$

де  $z = x + iy$  – комплексна змінна (очевидна різниця у вживанні однакових традиційних позначень  $z$  для комплексної змінної та декартової координати);  $m_k = \frac{q_k}{2\pi\lambda}$ ,  $m_{kk} = \frac{q_{kk}}{2\pi\lambda}$ ,  $q_k$ ,  $q_{kk}$  – потужність джерел і диполів тепла у точках  $z_{*k}$  області  $S$ ;  $\theta_k$  – кут орієнтації диполя;  $\Phi_{T0}(z)$  – голоморфна у  $S$  функція.



Загалом загальний розв'язок рівняння (13.5) можна розглядати як суму загального розв'язку однорідного рівняння  $\Delta T(x, y) = 0$  та часткового розв'язку неоднорідного рівняння (13.5). Тому через те, що температура (як загальний розв'язок) є гармонічною функцією, її відповідно до теорії аналітичних функцій можна подати дійсною частиною аналітичної функції (потенціалу температурного поля  $\Phi_T(z)$ ):  $T(x, y) = \text{Re } \Phi_T(z)$ . У зв'язку з цим, оскільки

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(z)}{\partial x} &= \text{Re } \Phi_T'(z) = \text{Re } \mathfrak{F}_T(z), \\ \frac{\partial T(z)}{\partial y} &= -\text{Im } \Phi_T'(z) = -\text{Im } \mathfrak{F}_T(z), \quad \mathfrak{F}_T(z) = \Phi_T'(z),\end{aligned}$$

то вирази для густин потоків тепла мають вигляд

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = -\lambda \text{Re } \mathfrak{F}_T'(z), \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = \lambda \text{Im } \mathfrak{F}_T'(z). \quad (13.7)$$

Відповідно до цього виразу вектор потоку тепла через довільну дугу  $\widehat{AB}$  з лівого її боку стосовно напрямку руху від  $A$  до  $B$  дорівнює

$$\mathbf{q}_{AB} \sim q_{AB} \equiv q_{x,AB} + i q_{y,AB} = -\lambda \{ \mathfrak{F}_T'(z_B) - \mathfrak{F}_T'(z_A) \}. \quad (13.8)$$

Якщо дуга  $\widehat{AB}$  є відрізком прямої, що йде вертикально вгору від  $A$  до  $B$ , то величина потоку тепла з лівого боку правобіч дорівнює

$$q_{AB} = -\lambda \text{Im} \{ \mathfrak{F}_T'(z_B) - \mathfrak{F}_T'(z_A) \}. \quad (13.8^1)$$

Якщо область  $S$  необмежена, то з урахуванням потоку тепла на нескінченності  $q^\infty = q_x^\infty + i q_y^\infty$  отримаємо вираз для потенціалу

$$\Phi_T(z) = -\frac{q^\infty}{\lambda} z + \sum_k \left[ m_k \ln(z - z_{*k}) - m_{kk} \frac{\exp(i\theta_k)}{z - z_{*k}} \right] + \Phi_{T0}(z). \quad (13.9)$$

У другому випадку, якщо температурне поле у пластинці симетричне відносно середньої площини, говорять про **узагальнене плоске температурне поле** і рівняння (13.1) зводиться до [778]

$$\lambda \Delta T(x, y) - \frac{\alpha}{\delta} [T(x, y) - T_C] = -\frac{Q(x, y)}{2\delta}. \quad (13.10)$$

Якщо бічні поверхні пластини теплоізовані ( $\alpha = 0$ ), то (13.10) збігається з (13.5).

Згідно з аналогією Г.С.Кіта [393] задача поздовжнього зсуву еквівалентна у математичному сенсі двовимірній задачі теплопровідності без урахування тепловіддачі з бічних поверхонь. У цьому випадку зміщенню  $w$  відповідає температура  $T$ , модулю зсуву  $G$  – коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ , компонентам  $\partial w / \partial x$ ,  $\partial w / \partial y$  градієнта переміщення – компоненти градієнтів температури  $\partial T / \partial x$ ,  $\partial T / \partial y$ , напруженням  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  – компоненти вектора потоку тепла з протилежним знаком  $-q_x$ ,  $-q_y$ , інтенсивностям  $Q_k$  зосереджених сил – інтенсивності джерел тепла з протилежним знаком  $-q_k$  тощо. З урахуванням цієї аналогії всі аналітичні та числові результати можна переносити з одного типу задач на другий, даючи їм відповідне фізико-механічне трактування.

Тому у випадку анізотропії теплофізичних властивостей матеріалу градієнт температури і вектор теплового потоку вже не будуть протилежно напрямленими, а будуть (див. п. 13.3) пов'язані між собою співвідношеннями

$$q_y = -\left( K_{44} \frac{\partial T}{\partial y} + K_{45} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad q_x = -\left( K_{45} \frac{\partial T}{\partial y} + K_{55} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (13.11)$$

або в оберненій формі

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -(k_{44}q_y + k_{45}q_x), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -(k_{45}q_y + k_{55}q_x). \quad (13.12)$$

Тут  $K_{44}$ ,  $K_{45}$ ,  $K_{55}$  – коефіцієнти теплопровідності. Залежність між сталими у формулах (13.11), (13.12) дають вирази

$$K_{44} = \frac{k_{55}}{|k|^2}, \quad K_{45} = \frac{-k_{45}}{|k|^2}, \quad K_{55} = \frac{k_{44}}{|k|^2}, \quad k_{44} = \frac{K_{55}}{|K|^2}, \quad k_{45} = \frac{-K_{45}}{|K|^2}, \quad k_{55} = \frac{K_{44}}{|K|^2}, \quad (13.13)$$

$$|k|^2 = k_{44}k_{55} - (k_{45})^2, \quad |K|^2 = K_{44}K_{55} - (K_{45})^2, \quad |k| \cdot |K| = 1.$$

Замінюючи коефіцієнти  $A_{44}$ ,  $A_{45}$ ,  $A_{55}$  п. 13.3 відповідно на  $K_{44}$ ,  $K_{45}$ ,  $K_{55}$  чи  $a_{44}$ ,  $a_{45}$ ,  $a_{55}$  на  $k_{44}$ ,  $k_{45}$ ,  $k_{55}$ , а потенціали  $\Phi^*(z^*)$ ,  $\Phi(z)$  – на потенціали  $\Phi_T^*(z^*)$ ,  $\Phi_T(z)$ , можна отримати усі потрібні вирази для характеристичного рівняння, його коренів, температурних потенціалів тощо.

### 13.2. Плоска пружність і термопружність для ізотропних матеріалів

За відсутності об'ємних сил [112, 396, 635, 835] рівняння рівноваги пружного тіла у випадку плоскої задачі мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (13.14)$$

Залежність між переміщеннями  $u_x$ ,  $u_y$  і напруженнями  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  та температурою  $T$  у пружному ізотропному тілі дає вираз

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu_* \sigma_{yy}}{E_*} + \alpha_{T_*} T, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \nu_* \sigma_{xx}}{E_*} + \alpha_{T_*} T, \quad \gamma_{xy} \equiv 2\varepsilon_{xy} = \frac{2(1 + \nu_*) \sigma_{xy}}{E_*}, \quad (13.15)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} \equiv 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

де  $E_* \sim E/(1 - \nu^2)$ ,  $\nu_* \sim \nu/(1 - \nu)$ ,  $\alpha_{T_*} \sim (1 + \nu)\alpha_T$  для плоскої деформації (ПД);  $E_* \sim E$ ,  $\nu_* \sim \nu$ ,  $\alpha_{T_*} \sim \alpha_T$  для узагальненого плоского напруженого стану (УПНС);  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_T$  – модуль пружності, коефіцієнти Пуассона та коефіцієнт термічного розширення матеріалу відповідно.

Єдине у цьому випадку рівняння сумісності деформацій у деформаціях чи відповідно напруженнях (інші виконуються автоматично) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{чи} \quad \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha_{T_*} E_* \Delta T = 0. \quad (13.16)$$

Рівняння рівноваги (13.14) задовольняються тотожно, якщо ввести у розгляд функцію Ейрі  $\mathfrak{Z}(x, y)$

$$\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\} \mathfrak{Z}(x, y), \quad (13.17)$$

що згідно з (13.16) задовольняє рівняння

$$\Delta \Delta \mathfrak{Z}(x, y) + \alpha_{T_*} E_* \Delta T(x, y) = 0. \quad (13.18)$$

Якщо температура є гармонічною функцією, то з (13.5), (13.18) впливає бігармонічність функції  $\mathfrak{Z}(x, y)$ . У цьому випадку

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) = 2 \left[ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \\
\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + i\sigma_{xy} &= 2 \left[ z\Phi'(z) + \Psi(z) \right], \\
\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \\
2G(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(x) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)} + \beta_T \int \Phi_T(z) dz, \\
2G \frac{\partial}{\partial x} (u_x + iu_y) &= \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} + \beta_T \Phi_T(z), \\
\Phi(z) &= \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \quad \Phi'(z) = \varphi''(z).
\end{aligned} \tag{13.19}$$

Тут  $\Phi(z), \Psi(z), \kappa = (3 - \nu_*) / (1 + \nu_*)$  – пружні потенціали і стала Мусхелішвілі [112, 635];  $\Phi_T(z)$  – потенціал температурного поля;  $\beta_T = 2\alpha_{T*}G, G = 0,5E/(1 + \nu)$  – модуль зсуву.

Нехай  $\sigma_{xx}^\infty, \sigma_{yy}^\infty, \sigma_{xy}^\infty$  – значення напружень на нескінченності;  $P = P_x + iP_y, M, q_0, q_{00}$  – відповідно зосереджені сила та момент, потужності джерела тепла та диполя у точці  $z_*$ ;  $\theta_0$  – кут орієнтації диполя. Тоді

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \Gamma - \frac{\eta P}{z - z_*} + \frac{\beta_T \eta}{\lambda} q_0 \ln(z - z_*) - \frac{\beta_T \eta}{\lambda} q_{00} \frac{\exp(i\theta_0)}{z - z_*} + \Phi_0(z), \\
\Psi(z) &= \Gamma' + \eta \left[ \frac{\kappa \bar{P}}{z - z_*} - \frac{\bar{z} P}{(z - z_*)^2} \right] - \frac{iM}{2\pi(z - z_*)^2} - \frac{\beta_T \eta}{\lambda} q_0 \frac{\bar{z}_*}{z - z_*} + \\
&\quad + \frac{\beta_T \eta}{\lambda} q_{00} \left[ \frac{\exp(-i\theta_0)}{z - z_*} + \frac{\bar{z}_* \exp(i\theta_0)}{(z - z_*)^2} \right] + \Psi_0(z), \\
\Gamma &= \frac{1}{4} (\sigma_{yy}^\infty + \sigma_{xx}^\infty), \quad \Gamma' = \frac{1}{2} (\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty) + i\sigma_{xy}^\infty, \quad \eta = \frac{1 + \nu_*}{8\pi};
\end{aligned} \tag{13.20}$$

$\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  – голоморфні в  $S$  функції, що зникають на нескінченності.

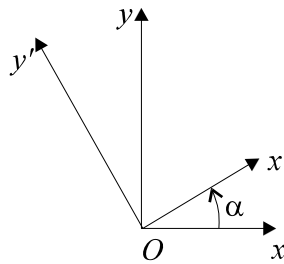


Рис. 13.1. Повертання системи координат

Якщо система координат  $x'O'y'$  повернута стосовно системи  $xOy$  на кут  $\alpha$  (рис. 13.1), то в новій системі координат компоненти тензора напружень і вектора переміщень визначаються зі співвідношень

$$\begin{aligned}
\sigma'_{x'x'} + \sigma'_{y'y'} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \\
\sigma'_{y'y'} - \sigma'_{x'x'} + 2i\sigma'_{x'y'} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) e^{2i\alpha}, \\
u'_{x'} + iu'_{y'} &= (u_x + iu_y) e^{-i\alpha}.
\end{aligned} \tag{13.21}$$

Зокрема, у полярній системі координат  $z \equiv x + iy = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) = 2 \left[ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= 2 \left[ z\Phi'(z) + \Psi(z) \right] e^{2i\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \left[ z\Phi'(z) + \Psi(z) \right] e^{2i\theta}, \\ 2G(u_r + iu_\theta) &= \left[ \kappa\varphi(x) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \beta_T \int \Phi_T(z) dz \right] e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (13.22)$$

### 13.3. Антиплоска анізотропія

Для поздовжнього зсуву у напрямі осі  $z$  анізотропного (ортотропного) середовища у вигляді циліндричного тіла, коли зовнішні навантаження прикладені уздовж прямих ліній, що паралельні до твірної області тіла, і не змінюються уздовж цих прямих (рис. 13.2)  $u_x = 0, u_y = 0, u_x \sim w = w(x, y)$ .

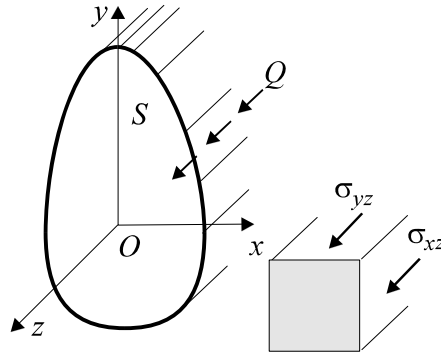


Рис. 13.2. Схема навантаження за поздовжнього зсуву

Ненульовими тоді будуть дві компоненти  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  деформації зсуву та згідно із законом Гука [534, 535, 1092, 103] дві компоненти напружень  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ . Для поздовжнього зсуву анізотропного середовища з властивостями, відзначеними номером  $k$  у напрямі осі  $z$  співвідношення закону Гука у прямій та оберненій формах і рівняння рівноваги мають відповідно вигляд [534, 535, 103]

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= A_{44k}\gamma_{yz} + A_{45k}\gamma_{xz}, \quad \sigma_{xz} = A_{45k}\gamma_{yz} + A_{55k}\gamma_{xz}; \\ \gamma_{yz} \equiv 2\varepsilon_{yz} &\equiv \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44k}\sigma_{yz} + a_{45k}\sigma_{xz}, \end{aligned} \quad (13.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} \equiv 2\varepsilon_{xz} &\equiv \frac{\partial w}{\partial x} = a_{45k}\sigma_{yz} + a_{55k}\sigma_{xz} \quad (u_z \sim w); \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (13.24)$$

У формулах (13.23) пружні властивості матеріалів характеризують модулі пружності  $A_{44k}, A_{45k}, A_{55k}$  та модулі податності  $a_{44k}, a_{45k}, a_{55k}$ , між якими існує залежність

$$A_{44k} = \frac{a_{55k}}{|a|^2}, \quad A_{45k} = \frac{-a_{45k}}{|a|^2}, \quad A_{55k} = \frac{a_{44k}}{|a|^2},$$

$$a_{44k} = \frac{A_{55k}}{|A|^2}, \quad a_{45k} = \frac{-A_{45k}}{|A|^2}, \quad a_{55k} = \frac{A_{44k}}{|A|^2}, \quad (13.25)$$

$$|a|^2 = a_{44k}a_{55k} - (a_{45k})^2, \quad |A|^2 = A_{44k}A_{55k} - (A_{45k})^2, \quad |a| \cdot |A| = 1.$$

Якщо тіло має у кожній точці три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії і осі  $x$ ,  $y$  є головними осями пружної симетрії, то сталі пружності з різними індексами дорівнюють нулю ( $A_{45k} = 0$ ,  $a_{45k} = 0$ ). Тоді співвідношення закону Гука (13.23) спрощуються:

$$\sigma_{yz} = A_{44k}\gamma_{yz} = A_{44k} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \sigma_{xz} = A_{55k}\gamma_{xz} = A_{55k} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44k}\sigma_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} = a_{55k}\sigma_{xz}, \quad (13.26)$$

$$A_{44k} = \frac{1}{a_{44k}}, \quad A_{55k} = \frac{1}{a_{55k}}, \quad a_{44k} = \frac{1}{A_{44k}}, \quad a_{55k} = \frac{1}{A_{55k}}.$$

Напружено-деформований стан у кожному з перерізів  $S$  тіла площиною, перпендикулярною до осі циліндра, однаковий, і можна обмежитися аналізом одного з них, зокрема, у площині  $xOy$ .

Увівши функцію напружень  $\mathfrak{I}(x, y) \sim \mathfrak{I}(z)$ , яка виразами

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x},$$

характеризує напруження та здиференціювавши за  $x$  перше з рівнянь (13.23), друге – за  $y$  і утворивши різницю, маємо рівняння для визначення функції напружень

$$a_{55k} \frac{\partial^2 \mathfrak{I}}{\partial y^2} - 2a_{45k} \frac{\partial^2 \mathfrak{I}}{\partial x \partial y} + a_{44k} \frac{\partial^2 \mathfrak{I}}{\partial x^2} = 0. \quad (13.27)$$

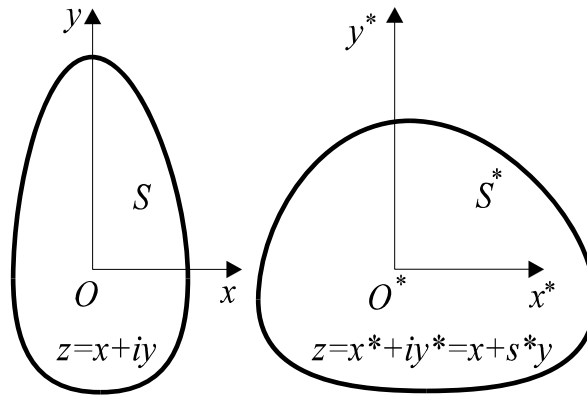


Рис. 13.3. Фізична і математична площини у задачі поздовжнього зсуву

Введемо узагальнену комплексну змінну

$$z^k \equiv x^k + iy^k = x + s^k y \quad (x^k = x + \alpha^k y, \quad y^k = \beta^k y),$$

що змінюється у так званій математичній області  $S^*$ , отриманій з області  $S$  відповідним афінним перетворенням (рис. 13.3). Комплексне число  $s^k = \alpha^k + i\beta^k$  – корінь характеристичного рівняння

$$a_{55k}s^2 - 2a_{45k}s + a_{44k} = 0$$

з додатною характеристичною частиною;  $\alpha^k = a_{45k}/a_{55k}$ ,  $\beta^k = |r^k|/a_{55k}$ ,  $r^k = \sqrt{a_{45k}^2 - a_{44k}a_{55k}}$  – суто уявне число. Зазначимо, що корені характеристичного рівняння будуть дійсними лише, якщо  $a_{44k} = 0$  або  $a_{55k} = 0$ .

Тоді, увівши таку функцію  $\mathfrak{Z}^*(z^k)$ , що  $\mathfrak{Z}(z) = \mathfrak{Z}^*(z^k)$ , з урахуванням залежностей для похідних функції напружень

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{Z}(z)}{\partial x} &= \frac{\partial \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}(z)}{\partial y} = \alpha^k \frac{\partial \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial x^k} + \beta^k \frac{\partial \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial y^k}, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}(z)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*(z^k)}{(\partial x^k)^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}(z)}{\partial x \partial y} = \alpha^k \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*(z^k)}{(\partial x^k)^2} + \beta^k \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial x^k \partial y^k}, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}(z)}{\partial y^2} &= (\alpha^k)^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*(z^k)}{(\partial x^k)^2} + 2\alpha^k \beta^k \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial x^k \partial y^k} + (\beta^k)^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*(z^k)}{(\partial y^k)^2}, \end{aligned} \quad (13.28)$$

рівняння (13.27) у перетвореній математичній площині можна переписати у вигляді

$$\Delta^* \mathfrak{Z}^*(z^k) = 0, \quad \Delta^* = \Delta_2^* = \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial y^k)^2} \quad \text{чи} \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*}{\partial y^k \partial y^k} + \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*}{\partial x^k \partial x^k} = 0. \quad (13.29)$$

Тепер

$$\sigma_{xz}(z) = -\frac{\partial \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial w(z)}{\partial x} = -ir^k \frac{\partial \mathfrak{Z}^*(z^k)}{\partial y^k}. \quad (13.30)$$

Оскільки функція  $\mathfrak{Z}^*(z^k)$  є гармонічною в області  $S^*$ , то її можна шукати у вигляді дійсної частини деякої аналітичної функції  $\omega^*(z^k) \equiv 2\Psi_k(z^k) = \mathfrak{Z}^*(z^k) + iQ^*(z^k)$ . Використавши при цьому умови Коші–Рімана

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}^*}{\partial x^k} = \frac{\partial Q^*}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}^*}{\partial y^k} = -\frac{\partial Q^*}{\partial x^k},$$

(13.30) перепишемо так:

$$-\sigma_{yz}(z) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial w(z)}{\partial x} = \omega^*(z^k) = 2\Psi_k(z^k), \quad \Psi_k(z^k) = \Psi'_k(z^k) \quad (z \in S_k). \quad (13.31)$$

Якщо перше співвідношення (13.23) здиференціювати за  $y$ , друге – за  $x$  і підставити у рівняння рівноваги (13.24), то отримаємо рівняння

$$A_{55k} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2A_{45k} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A_{44k} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

яке після ділення на  $|A|^2$  з урахуванням залежності (13.25) між сталими  $A_{ijk}$  та  $a_{mnk}$  зведеться до рівняння

$$a_{55k} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2a_{45k} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_{44k} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

що збігається з (13.27). Увівши ту ж узагальнену комплексну змінну  $z^k \equiv x^k + iy^k = x + s^k y$  та функцію  $w^*(z^k)$ , що числово дорівнює  $w(z) = w^*(z^k)$ , з урахуванням вищезгаданих залежностей (13.28) для похідних функції напружень матимемо

$$\Delta^* \mathfrak{Z}^*(z^k) = 0.$$

Тепер з огляду на вираз (13.23) запишемо два співвідношення

$$\frac{\partial w(z)}{\partial x} = \frac{\partial w^*(z^k)}{\partial x^k}, \quad \sigma_{yz}(z) = \frac{1}{|a|} \frac{\partial w^*(z^k)}{\partial y^k} = |A| \frac{\partial w^*(z^k)}{\partial y^k},$$

які після введення аналітичної функції  $\Phi^*(z^k) = w^*(z^k) + iq^*(z^k)$  на основі умов Коші-Рімана можна подати у вигляді

$$\sigma_{yz}(z) - \frac{1}{r^k} \frac{\partial w(z)}{\partial x} = -\frac{1}{r^k} \Phi^{*'}(z^k) \quad (z \in S). \quad (13.32)$$

Зіставивши цей вираз з (13.31), матимемо

$$\Phi^{*'}(z^k) = r^k \omega^{*'}(z^k), \quad \Phi^*(z^k) = r^k \omega^*(z^k). \quad (13.33)$$

Для ізотропного випадку

$$A_{45} = 0, \quad A_{44} = A_{55} = G; \quad a_{45} = 0, \quad a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \quad r^k \sim r = \frac{i}{G},$$

$$s^k = i, \quad z^k = z, \quad \mathfrak{Z}^*(z^k) \sim \mathfrak{Z}(z), \quad \omega^*(z^k) \sim \omega(z), \quad \Phi^*(z^k) \sim \Phi(z) = r\omega(z),$$

тобто комплексна зміна  $z^k$  збігається зі звичайною  $z$ , а бігармонічна функція  $\mathfrak{Z}^*$  – з  $\mathfrak{Z}$ . Отже рівняння (13.27) та закон Гука у цьому випадку мають вигляд

$$\Delta \mathfrak{Z}(z) = 0, \quad \Delta w(z) = 0; \quad (13.34)$$

$$G_k \frac{\partial w}{\partial y} = \sigma_{yz}, \quad G_k \frac{\partial w}{\partial x} = \sigma_{xz}. \quad (13.35)$$

Умови (13.31) набувають для ізотропного тіла вигляду

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = -\omega'(z) = -iG\Phi'(z) \quad (z \in S). \quad (13.36)$$

У випадку дії однорідного поля напружень  $\tau^\infty = \sigma_{xz}^\infty + i\sigma_{yz}^\infty$  на нескінченності, зосереджених сил та їх диполів пружний потенціал має структуру

$$\Phi(z) = \frac{i}{G} \omega(z) = \frac{\tau^\infty}{G} z - \sum_k \left[ M_k \ln(z - z_{*k}) - M_{kk} \frac{\exp(i\theta_k)}{z - z_{*k}} \right] + \Phi_0(z). \quad (13.37)$$

Тут  $z = x + iy$  – комплексна змінна (не повинна виникнути двозначність у вживанні традиційних позначень  $z$  для комплексної змінної та декартової координати напрямку  $z$ );

$$M_k = \frac{Q_k + iGb_k^{\text{ГВ}}}{2\pi G}, \quad M_{kk} = \frac{Q_{kk} + iGB_k^{\text{ГВ}}}{2\pi G},$$

$Q_k, b_k^{\text{ГВ}}, Q_{kk}, B_k^{\text{ГВ}}$  – інтенсивність зосереджених сил та гвинтових дислокацій, силових та дислокаційних диполів у точках  $z_{*k}$  області  $S$  відповідно;  $\theta_k$  – кут орієнтації осі диполів стосовно осі  $x$ ;  $\Phi_0(z)$  – голоморфна у області  $S$  функція.

Якщо система координат  $x'O'y'$  повернута відносно системи  $xOy$  на кут  $\alpha$  (див. рис. 13.1), то

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = (\sigma'_{yz} + i\sigma'_{xz}) e^{-i\alpha}. \quad (13.38)$$

Пружні сталі матеріалу у новій системі координат також змінюються. Зокрема,

$$\begin{aligned} a'_{44k} &= a_{44k} \cos^2 \alpha - a_{45k} \sin 2\alpha + a_{55k} \sin^2 \alpha, \\ a'_{45k} &= \frac{1}{2}(a_{44k} - a_{55k}) \sin 2\alpha + a_{45k} \cos 2\alpha, \\ a'_{55k} &= a_{44k} \sin^2 \alpha + a_{45k} \sin 2\alpha + a_{55k} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Для часткового випадку вибору за осі первісної системи координат головних напрямів пружності ( $a_{45k} = 0$ ) мають

$$a'_{44k} = \frac{\cos^2 \alpha}{G_{23}} + \frac{\sin^2 \alpha}{G_{13}}, \quad a'_{55k} = \frac{\sin^2 \alpha}{G_{23}} + \frac{\cos^2 \alpha}{G_{13}}, \quad a'_{45k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_{23}} - \frac{1}{G_{13}} \right) \sin 2\alpha. \quad (13.40)$$

Тут  $G_{13} \sim G_{xz}$ ,  $G_{23} \sim G_{yz}$  – модулі зсуву, що характеризують зміну кутів між головними напрямими  $x, z$  та  $y, z$ .

На основі формули (13.39) легко переконатися у тому, що

$$r^{k'} = \sqrt{(a'_{45k})^2 - a'_{44k}a'_{55k}} = \sqrt{(a_{45k})^2 - a_{44k}a_{55k}} = r^k, \quad |a'| = |a|, \quad |A'| = |A|, \quad (13.41)$$

тобто під час повертання системи координат параметри  $r^k$ ,  $|a|$ ,  $|A|$  матеріалу не змінюються.

З урахуванням залежності між модулями пружності та податності характеристичне рівняння можна також записати у вигляді

$$A_{44}s^2 + 2A_{45}s + A_{55} = 0. \quad (13.42)$$

### 13.4. Плоска анізотропія

Пружні сталі матеріалів з властивостями  $k$  позначимо  $a_{ijk}$ . Для плоского напруженого стану (ПНС)  $a_{ijk}$  визначають податності матеріалу [534, 535, 1092, 103] (у роботі [1021] їм відповідають  $s_{ij}$ ), а за плоскої деформації (ПД) їх слід замінити на  $\beta_{ijk} = a_{ijk} - a_{i3k}a_{j3k}/a_{33k}$  (у роботі [1021]  $S_{KM}$  відповідає  $\beta_{ij}$ ). Співвідношення закону Гука та рівняння рівноваги мають вигляд [535]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &\equiv \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{11k}\sigma_{xx} + a_{12k}\sigma_{yy} + a_{16k}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &\equiv \frac{\partial u_y}{\partial y} = a_{12k}\sigma_{xx} + a_{22k}\sigma_{yy} + a_{26k}\sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (13.43)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &\equiv 2\varepsilon_{xy} \equiv \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = a_{16k}\sigma_{xx} + a_{26k}\sigma_{yy} + a_{66k}\sigma_{xy}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Для того, щоб побудувати диференціальне рівняння стосовно переміщень, здиференціюємо у (13.43) перший вираз за  $y$ , третій – за  $x$  та віднімемо:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = a_{16k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + a_{26k} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + a_{66k} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - a_{12k} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - a_{16k} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - a_{11k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}.$$

З урахуванням рівнянь рівноваги (13.44) це співвідношення можна подати у простішому вигляді



$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 2a_{16k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + a_{26k} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - a_{12k} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - a_{11k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} + (a_{12k} + a_{66k}) \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}.$$

Після того, як здиференціювати перший та останній вирази з (13.43) двічі за  $x$ , будуть отримані шукані диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} &= a_{11k} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + a_{12k} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + a_{16k} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} &= 2a_{16k} \frac{\partial^3 \sigma_{xx}}{\partial x^3} + a_{26k} \frac{\partial^3 \sigma_{yy}}{\partial x^3} - a_{12k} \frac{\partial^3 \sigma_{yy}}{\partial x^2 \partial y} - a_{11k} \frac{\partial^3 \sigma_{xx}}{\partial x^2 \partial y} + (a_{12k} + a_{66k}) \frac{\partial^3 \sigma_{xy}}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (13.45)$$

У випадку ПНС за відсутності масових сил компоненти тензора напружень визначаються формулами [534, 535, 103]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^k}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^k}{\partial x \partial y}, \quad (13.46)$$

де функція напружень  $\mathfrak{Z}^k(x, y) \sim \mathfrak{Z}^k(z)$  задовольняє рівняння

$$a_{22k} \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^4} - 2a_{26k} \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12k} + a_{66k}) \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16k} \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x \partial y^3} + a_{11k} \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial y^4} = 0. \quad (13.47)$$

Нехай  $\mu_m^k = \alpha_{m1}^k + i\beta_m^k$  ( $m = 1, 2$ ) – корені (з додатною уявною частиною  $\beta_m^k > 0$ ) відповідного для нього характеристичного рівняння [534, 535, 103]

$$a_{11k} \mu^4 - 2a_{16k} \mu^3 + (2a_{12k} + a_{66k}) \mu^2 - 2a_{26k} \mu + a_{22k} = 0, \quad (13.48)$$

що мають додатну уявну частину.

У випадку неоднакових коренів  $\mu_m^k$  цього рівняння ( $\mu_1^k \neq \mu_2^k$ ) можна вважати, що функція напружень  $\mathfrak{Z}^k(z)$  визначається двома комплексними функціями  $F_m^k(z_m^k)$  ( $m = 1, 2$ ):

$$\mathfrak{Z}^k = 2 \operatorname{Re} \left[ F_1^k(z_1^k) + F_2^k(z_2^k) \right], \quad \Phi_{mk}(z) = \frac{d}{dz} F_m^k(z), \quad \varphi_{mk}(z) = \frac{d}{dz} \Phi_m^k(z). \quad (13.49)$$

Тут  $z_m^k \equiv x_m^k + iy_m^k = x + \mu_m^k y$  ( $m = 1, 2$ ) – узагальнені комплексні змінні, що змінюються у математичних областях  $S_m$ , отриманих з області  $S$  відповідними афінними перетвореннями (рис. 13.4).

Тоді за формулами (26.9), (26.10) [535] напруження та переміщення у пластині можна подати у вигляді залежності від двох комплексних потенціалів  $\varphi_{1k}(z_1^k)$ ,  $\varphi_{2k}(z_2^k)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2 \operatorname{Re} \left[ \varphi_{1k}(z_1^k) + \varphi_{2k}(z_2^k) \right], \\ \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} \left[ (\mu_1^k)^2 \varphi_{1k}(z_1^k) + (\mu_2^k)^2 \varphi_{2k}(z_2^k) \right], \\ \sigma_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \left[ \mu_1^k \varphi_{1k}(z_1^k) + \mu_2^k \varphi_{2k}(z_2^k) \right], \\ u_x &= 2 \operatorname{Re} \left[ p_1^k \Phi_{1k}(z_1^k) + p_2^k \Phi_{2k}(z_2^k) \right] - \omega_3 y + u_{x0}, \\ u_y &= 2 \operatorname{Re} \left[ q_1^k \Phi_{1k}(z_1^k) + q_2^k \Phi_{2k}(z_2^k) \right] + \omega_3 x + u_{y0}, \end{aligned} \quad (13.50)$$

де  $\Phi_{mk}, \varphi_{mk}$  – комплексні потенціали;  $\omega_3$  – характеризує малий жорсткий поворот;  $u_{x0}, u_{y0}$  – поступальне переміщення (трансляційні складові переміщення);

$$p_m^k = a_{11k} (\mu_m^k)^2 - a_{16k} \mu_m^k + a_{12k}, \quad q_m^k = a_{12k} \mu_m^k - a_{26k} + \frac{a_{22k}}{\mu_m^k} \quad (m = 1, 2). \quad (13.51)$$

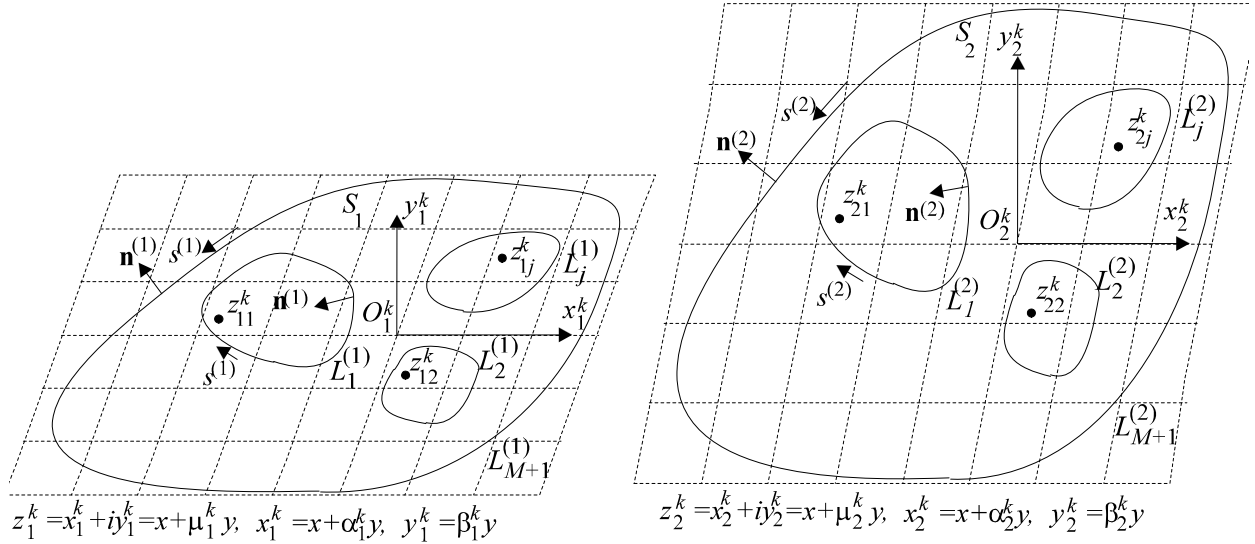


Рис. 13.4. Дві математичні площини у плоскій задачі

Для ортотропної пластинки з головними напрямками пружності, паралельними до осей координат  $x, y$ , коефіцієнти  $a_{ij}$  мають таку залежність від головних "технічних" сталей матеріалу:

$$a_{16k} = 0, \quad a_{26k} = 0, \quad a_{11k} = \frac{1}{E_{1k}}, \quad a_{22k} = \frac{1}{E_{2k}}, \quad a_{66k} = \frac{1}{G_k}, \quad a_{12k} = -\frac{\nu_{1k}}{E_{1k}} = -\frac{\nu_{2k}}{E_{2k}}. \quad (13.52)$$

Тут  $E_{1k} = E_{xk}, E_{2k} = E_{yk}$  – модулі пружності для розтягу-стиску уздовж головних напрямів пружності  $x, y$ ;  $\nu_{1k} = \nu_{12k} = \nu_{xyk}$  – коефіцієнт Пуассона, що означає стиск пластинки у напрямі осі  $y$  під час розтягу уздовж напрямку  $x$ ;  $\nu_{2k} = \nu_{21k} = \nu_{yxk}$  – коефіцієнт Пуассона, що означає стиск пластинки у напрямі осі  $x$  під час розтягу уздовж напрямку  $y$ ;  $G_k = G_{12k} = G_{xyk} = G_{21k} = G_{yxk}$  – модуль зсуву (незалежна стала), що характеризує зміну кутів між головними напрямками.

Для ізотропного матеріалу пластини

$$E_{1k} = E_{2k} = E_k, \quad \nu_{1k} = \nu_{2k} = \nu_k, \quad G_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}. \quad (13.53)$$

Рівняння (13.47) для функції напружень в головних напрямках ортотропної пластинки запишемо у вигляді

$$\frac{1}{E_{2k}} \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G_k} - \frac{2\nu_{1k}}{E_{1k}} \right) \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_{1k}} \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial y^4} = 0, \quad (13.54)$$

а відповідне характеристичне рівняння (13.48) (після віднесення до головних напрямів пружності) набуває вигляду

$$\mu^4 + \left( \frac{E_1}{G_k} - 2\nu_{1k} \right) \mu^2 + \frac{E_{1k}}{E_{2k}} = 0. \quad (13.55)$$

Для ізотропного матеріалу рівняння (13.47) зводиться до бігармонічного

$$\frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}^k}{\partial y^4} = 0,$$

для якого характеристичне рівняння запишемо так:

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0 \quad \text{або} \quad (\mu^2 + 1) = 0. \quad (13.56)$$

Воно має два кратні суто уявні корені  $\mu_m^k = \pm i$  ( $\mu_1^k = \mu_2^k = i$ ), і залежність напружень та компонент вектора переміщення від комплексних потенціалів має вигляд (13.19).

Диференціальні рівняння (13.45) стосовно переміщень в ізотропному випадку мають вигляд

$$\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} = \frac{1}{E_k} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \nu_k \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = \frac{1}{E_k} \left( (2 + \nu_k) \frac{\partial^3 \sigma_{xy}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \sigma_{xx}}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (13.57)$$

Для більшості ортотропних матеріалів корені характеристичного рівняння (13.55) суто уявні  $\mu_m^k = i\beta_m^k$ . У цьому випадку формули (13.51) мають вигляд

$$p_m^k = -\frac{(\beta_m^k)^2 + \nu_{1k}}{E_{1k}}, \quad q_m^k = -i \frac{1 + \nu_{2k} (\beta_m^k)^2}{\beta_m^k E_{2k}}, \quad \mu_m^k = i\beta_m^k \quad (m=1,2). \quad (13.58)$$

Розв'язок першої основної задачі на межі  $L$  області  $S$  зводиться до пошуку аналітичних в областях  $S_m$  функцій  $\varphi_m(z_m^k)$  за крайовою умовою

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_{1k}(z_1^k) + \Phi_{2k}(z_2^k) \right] &= -\int_0^s Y_n ds + C_1, \\ 2 \operatorname{Re} \left[ \mu_1^k \Phi_{1k}(z_1^k) + \mu_2^k \Phi_{2k}(z_2^k) \right] &= \int_0^s X_n ds + C_2, \end{aligned} \quad (13.59)$$

де  $X_n, Y_n$  – складові у напрямі осей  $Ox$  та  $Oy$  зовнішніх зусиль, заданих на  $L$ ;  $C_1, C_2$  – довільні дійсні сталі.

Друга основна задача на межі  $L$  області  $S$  полягає у пошуку аналітичних в областях  $S_m$  функцій  $\varphi_m(z_m^k)$  за крайовою умовою

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[ p_1^k \Phi_{1k}(z_1^k) + p_2^k \Phi_{2k}(z_2^k) \right] - \omega y + u_{x0} &= g_1, \\ 2 \operatorname{Re} \left[ q_1^k \Phi_{1k}(z_1^k) + q_2^k \Phi_{2k}(z_2^k) \right] + \omega x + u_{y0} &= g_2, \end{aligned} \quad (13.60)$$

де  $g_1, g_2$  – задані на межі  $L$  значення компонент переміщень  $u_x, u_y$ .

Для основної змішаної задачі слід комбінувати крайові умови (13.59) та (13.60) і в загальному випадку буде отримана гранична задача з розривними коефіцієнтами.

У випадку багатозв'язних областей  $S$ , обмежених контурами  $L_j$  ( $j = \overline{1, M+1}$ ), з яких лінія  $L_{M+1}$  охоплює усі інші, аналітичні функції  $\varphi_{mk}(z_m^k)$ , що фігурують в узагальнених комплексних поданнях розв'язків плоскої задачі (13.50), повинні задовольняти деякі умови, що забезпечують однозначність зміщень точок пружного середовища [103]. Вони впливають з умови нерозривності переміщень, а також з виразів для головного вектора і головного моменту зусиль, прикладених до контуру  $L_j$ .

Для отримання цих умов у термінах функцій  $\varphi_{mk} \left( z_m^k \right)$  подамо за Т.Л.Мартиновичем та І.О.Ніщенком [103] головний вектор і головний момент зусиль  $X_n, Y_n$ , що діють на дуговий елемент  $ds$  контуру  $L_j$ , а також диференціал переміщень середовища за допомогою формул (13.59), (13.60):

$$\begin{aligned} d \sum_{m=1,2} \left[ \left( 1 + i\mu_m^k \right) \Phi_{mk} \left( z_m^k \right) + \left( 1 + i\overline{\mu_m^k} \right) \overline{\Phi_{mk} \left( z_m^k \right)} \right] &= i \left( X_n + iY_n \right) ds, \\ d \sum_{m=1,2} \left[ \left( p_m^k + iq_m^k \right) \Phi_{mk} \left( z_m^k \right) + \left( \overline{p_m^k} + i\overline{q_m^k} \right) \overline{\Phi_{mk} \left( z_m^k \right)} \right] &= d \left( u_x + iu_y \right), \\ \operatorname{Re} \left\{ i\bar{d} \sum_{m=1,2} \left[ \left( 1 + i\mu_m^k \right) \Phi_{mk} \left( z_m^k \right) + \left( 1 + i\overline{\mu_m^k} \right) \overline{\Phi_{mk} \left( z_m^k \right)} \right] \right\} &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ i\bar{t} \left( X_n + iY_n \right) \right\} ds = -dM_j. \end{aligned} \quad (13.61)$$

Зінтегрувавши рівності (13.61) уздовж замкнутих контурів  $L_j^{(m)}$ , які є образами контура  $L_j$  у математичній площині  $S_m$ , отримаємо

$$\sum_{m=1,2} \left[ \left( 1 + i\mu_m^k \right) \int_{L_j^{(m)}} \varphi_{mk} \left( z_m^k \right) dz_m^k + \left( 1 + i\overline{\mu_m^k} \right) \int_{L_j^{(m)}} \overline{\varphi_{mk} \left( z_m^k \right)} d\overline{z_m^k} \right] = i \left( X_j + iY_j \right), \quad (13.62)$$

$$\sum_{m=1,2} \left( p_m^k + iq_m^k \right) \int_{L_j^{(m)}} \varphi_{mk} \left( z_m^k \right) dz_m^k + \left( \overline{p_m^k} + i\overline{q_m^k} \right) \int_{L_j^{(m)}} \overline{\varphi_{mk} \left( z_m^k \right)} d\overline{z_m^k} = 0;$$

$$\operatorname{Re} \sum_{m=1,2} \int_{L_j^{(m)}} z_m^k \varphi_{mk} \left( z_m^k \right) dz_m^k = \operatorname{Re} \left[ i \int_{L_j^{(m)}} \bar{t} \left( X_n + iY_n \right) ds \right] = -M_j \quad (j = 1 \dots M + 1), \quad (13.63)$$

де  $\varphi_{mk} \left( z_m^k \right) = \Phi'_{mk} \left( z_m^k \right)$ ;  $X_j, Y_j, M_j = M_{jz}$  – компоненти головного вектора і головного моменту зовнішніх зусиль, прикладених до контуру  $L_j$ .

До рівностей (13.62) можна долучити комплексно спряжені до них рівності і, розв'язавши отриману систему рівнянь, отримати умови, які повинні задовольняти комплексні потенціали  $\varphi_{mk} \left( z_m^k \right)$ :

$$\int_{L_j^{(m)}} \varphi_{mk} \left( z_m^k \right) dz_m^k = - \frac{D_1^{(m)} Y_j + D_2^{(m)} X_j}{D} \quad (m = 1, 2; j = 1 \dots M + 1). \quad (13.64)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} D &= \frac{4a_{11k}a_{22k}\beta_1^k\beta_2^k}{|\mu_1^k|^2|\mu_2^k|^2} |\mu_2^k - \mu_1^k|^2 |\overline{\mu_2^k} - \overline{\mu_1^k}|^2, \\ D_1^{(1)} \left( \mu_1^k, \mu_2^k \right) &= \frac{a_{11k}a_{22k}}{\mu_1^k |s_2|^2} \left[ \left( \left( \mu_2^k \right)^2 - \overline{\mu_1^k}^2 \right) \left( \overline{\mu_2^k}^3 - \overline{\mu_1^k}^3 \right) - \left( \overline{\mu_2^k}^2 - \overline{\mu_1^k}^2 \right) \left( \left( \mu_2^k \right)^3 - \mu_1^k^3 \right) \right] - \\ &\quad - \left( \frac{a_{12k}a_{22k}}{\mu_1^k |\overline{\mu_2^k}|^2} + a_{11k}a_{16k} \right) \left( \mu_2^k - \overline{\mu_1^k} \right) \left( \overline{\mu_2^k} - \overline{\mu_1^k} \right) \left( \overline{\mu_2^k} - \mu_2^k \right), \end{aligned}$$

$$D_2^{(1)}(s_1, \mu_2^k) = \frac{a_{11k} a_{22k}}{\mu_1^k |\mu_2^k|^2} \left[ \left( \mu_2^k - \overline{\mu_1^k} \right) \left( \overline{\mu_2^k}^3 - \overline{\mu_1^k}^3 \right) - \left( \overline{\mu_2^k} - \overline{\mu_1^k} \right) \left( \left( \mu_2^k \right)^3 - \left( \mu_1^k \right)^3 \right) \right] - \left( \frac{a_{26k} a_{22k}}{\mu_1^k |\mu_2^k|^2} + a_{11k} a_{12k} \right) \left( \mu_2^k - \overline{\mu_1^k} \right) \left( \overline{\mu_2^k} - \mu_2^k \right) \left( \overline{\mu_2^k} - \overline{\mu_1^k} \right), \quad (13.65)$$

$$D_1^{(2)}(s_1, \mu_2^k) = D_1^{(1)}(\mu_2^k, s_1), \quad D_2^{(2)}(s_1, \mu_2^k) = D_2^{(1)}(\mu_2^k, s_1).$$

Виконання умов (13.64) забезпечує однозначність переміщень у багатозв'язній області  $S$ .

Підсумувавши рівності за  $j$  від 1 до  $M+1$ , з урахуванням рівнянь рівноваги пластинки як твердого цілого

$$X_{M+1} + iY_{M+1} + \sum_{j=1}^M (X_j + iY_j) = 0, \quad M_{M+1} + \sum_{j=1}^M M_j = 0, \quad (13.66)$$

матимемо

$$\int_{L^{(1)}} \varphi_{1k}(t_1^k) dt_1^k = 0, \quad \int_{L^{(2)}} \varphi_{2k}(t_2^k) dt_2^k = 0; \quad (13.67)$$

$$\operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \int_{L^{(m)}} t_m^k \varphi_{mk}(t_m^k) dt_m^k = 0, \quad (13.68)$$

причому  $L^{(m)} = \sum_{j=1}^{M+1} L_j^{(m)}$ ;  $t_m^k$  – афікси точок відповідних контурів  $L^{(m)}$ , що обмежують області  $S_m$  зміни змінних  $z_m^k = x + \mu_m^k y$ .

У формулах (13.64), (13.67), (13.68) додатним напрямом обходу контуру  $L_j$  вважається той, за якого область  $S$  залишається ліворуч.

За виконання умови (13.67) згідно з теоремою Коші для багатозв'язної області функції  $\varphi_{mk}(t_m^k)$  будуть голоморфними в областях  $S_m$  зміни  $z_m^k$ .

З умов (13.64) та (13.67) випливає, що функції  $\Phi_{mk}(z_m^k)$  з обходом замкнених контурів  $L_j^{(m)}$ ,  $L^{(m)}$  у додатному напрямі (області  $S_m$ ,  $S$  залишаються ліворуч) отримують додатні прирости:

$$\left[ \Phi_{mk}(z_m^k) \right]_{L_j^{(m)}} = -\frac{D_1^{(m)} Y_j + D_2^{(m)} X_j}{D} \quad (j = \overline{1, M+1}), \quad (13.69)$$

$$\left[ \Phi_{mk}(z_m^k) \right]_{L^{(m)}} = 0.$$

З урахуванням (13.66) звідси випливає, що функції  $\Phi_{mk}(z_m^k)$  у багатозв'язних областях  $S_m$ , обмежених контурами  $L^{(m)}$ , повинні мати вигляд

$$\Phi_{mk}(z_m^k) = -\sum_{j=1}^M \frac{D_1^{(m)} Y_j + D_2^{(m)} X_j}{2\pi i D} \ln(z_m^k - z_{mj}^k) + \Phi_{mk}^*(z_m^k), \quad (13.70)$$

де  $\Phi_{mk}^* \left( z_m^k \right)$  – однозначні аналітичні функції в областях  $S_m$ ;  $z_{mj}^k$  – точки всередині контурів  $L_j^{(m)}$ .

Для необмеженої багатозв'язної області  $S$ , коли контур  $L_{M+1}$  відсутній, а поле напружень у безмежно віддалених точках пластинки скінченне, подання (13.70) функцій  $\Phi_{mk} \left( z_m^k \right)$  поблизу безмежно віддаленої точки набувають вигляду

$$\Phi_{mk} \left( z_m^k \right) = -\frac{D_1^{(m)} Y + D_2^{(m)} X}{2\pi i D} \ln z_m^k + \Phi_{mk}^0 \left( z_m^k \right) + A_m^0 z_m^k, \quad X = \sum_{j=1}^M X_j, \quad Y = \sum_{j=1}^M Y_j, \quad (13.71)$$

де  $\Phi_{mk}^0 \left( z_m^k \right)$  – функції, голоморфні в околі точки  $z_m^k = \infty$ .

Комплексні сталі  $A_m^0$  визначають напруження та малі повороти пластинки на нескінченності. Вектор переміщень на нескінченності обмежений за умови  $A_m^0 = 0, X = 0, Y = 0$ .

Якщо система координат  $x'O'y'$  повернута стосовно системи  $xOy$  на кут  $\alpha$  (див. рис. 13.1), то в новій системі координат компоненти тензора напружень і вектора переміщень визначаються зі співвідношень (13.21). Пружні сталі (індекс  $k$  на означення матеріалу для скорочення виразів упускаємо) змінюються при цьому за законом

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^4 \alpha + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{22} \sin^4 \alpha + (a_{16} \cos^2 \alpha + a_{26} \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^4 \alpha + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{22} \cos^4 \alpha - (a_{16} \sin^2 \alpha + a_{26} \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha, \\ a'_{12} &= (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{12} + \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha, \\ a'_{66} &= 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{66} + 2(a_{26} - a_{16}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha, \\ a'_{16} &= \left[ a_{22} \sin^2 \alpha - a_{11} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha + \\ &\quad + a_{16} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha) + a_{26} \sin^2 \alpha (3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ a'_{26} &= \left[ a_{22} \cos^2 \alpha - a_{11} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha + \\ &\quad + a_{16} \sin^2 \alpha (3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + a_{26} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (13.72)$$

При цьому слід зазначити інваріантність таких комбінацій сталих:

$$a'_{11} + a'_{22} + 2a'_{12} = a_{11} + a_{22} + 2a_{12}, \quad a'_{66} - 4a'_{12} = a_{66} - 4a_{12}. \quad (13.73)$$

Для ортотропної пластинки у якої головні напрями пружності збігаються з первісною системою координат  $xOy$ , вирази (13.71) з використанням "технічних" модулів пружності мають вигляд

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{E_2}, \\ a'_{22} &= \frac{\sin^4 \alpha}{E_1} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_2}{E_2} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\cos^4 \alpha}{E_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a'_{12} &= \frac{1}{4} \left( \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 2\alpha - \frac{\nu_1}{E_1}, \\
a'_{66} &= \left( \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 2\alpha + \frac{1}{G}, \\
a'_{16} &= \left[ \frac{\sin^2 \alpha}{E_2} - \frac{\cos^2 \alpha}{E_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha, \\
a'_{26} &= \left[ \frac{\cos^2 \alpha}{E_2} - \frac{\sin^2 \alpha}{E_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_2}{E_2} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{13.74}$$

Зважимо на існування таких інваріантних співвідношень:

$$\frac{1}{E'_1} + \frac{1}{E'_2} - \frac{2\nu'_1}{E'_1} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_1}{E_1}, \quad \frac{1}{G'_1} + \frac{4\nu'_1}{E'_1} = \frac{1}{G_1} + \frac{4\nu_1}{E_1} \tag{13.75}$$

та залежності між сталими

$$E_1\nu_2 = E_2\nu_1. \tag{13.76}$$

### 13.5. Інтегральні перетворення Фур'є у двовимірній теорії пружності

#### Плоска задача для ізотропного матеріалу

Функція напружень Ейрі  $\Phi(x, y)$  задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta\Phi(x, y) = 0. \tag{13.77}$$

Вважатимемо, що коли  $x \rightarrow \infty$ , то  $\Phi(x, y)$ ,  $\partial\Phi/\partial z \rightarrow 0$  (тут і надалі  $z = x + iy$ ). У декартовій системі координат напруження і деформації в ізотропному середовищі зі сталими  $E, \nu$  ( $G, \kappa$ ) згідно зі законом Гука залежать від  $\Phi$  таким чином:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = k_1\sigma_{xx} - k_2\sigma_{yy}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = k_1\sigma_{yy} - k_2\sigma_{xx}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\sigma_{xy}}{2G}, \quad k_1 = \frac{1+\kappa}{8G}, \quad k_2 = \frac{3-\kappa}{8G}.
\end{aligned} \tag{13.78}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial x} &= k_1\sigma_{xx} - k_2\sigma_{yy} = k_1 \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} - k_1 \int \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial y} dx + k_2 \int \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} dx = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + k_2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - k_1 \int_0^x \frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} dx = \\
&= -k_3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - k_1 \int \frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} dx, \quad k_3 = \frac{1}{G} - k_2 = \frac{5+\kappa}{8G}.
\end{aligned} \tag{13.79}$$

Інтегральне перетворення Фур'є [593, 896] дає зв'язок між функцією двох змінних  $\Phi(x, y)$  та її трансформантою  $\Phi^F(\xi, y)$  за змінною  $x$  у вигляді

$$\Phi^F(\xi, y) \equiv F(\Phi, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \xi) e^{i\xi x} dx, \quad \Phi(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (13.80)$$

З урахуванням обмежень, накладених на функцію  $\Phi$ , фур'є-перетворення  $\Phi'^F(\xi, y)$   $\Phi''^F(\xi, y)$  першої та другої похідних за  $x$  функції  $\Phi(x, y)$  дорівнюють

$$\Phi''^F(\xi, y) = -i\xi \Phi'^F(\xi, y), \quad \Phi'^F(\xi, y) = -\xi^2 \Phi^F(\xi, y). \quad (13.81)$$

Тому фур'є-перетворення напружень і похідних переміщень (13.78) матимуть вигляд

$$\left\{ \sigma_{xx}^F(\xi, y), \sigma_{yy}^F(\xi, y), \sigma_{xy}^F(\xi, y) \right\} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\xi^2, i\xi \frac{\partial}{\partial y} \right\} \Phi^F(\xi, y), \quad (13.82)$$

$$\left\{ u_x'^F(\xi, y), u_y^F(\xi, y) \right\} = \left\{ k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2 \xi^2, \frac{i}{\xi} \left( k_3 \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} - k_1 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \right\} \Phi^F(\xi, y), \quad (13.83)$$

а розв'язок рівняння (13.77), яке у просторі зображень набуває вигляду

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} \Phi^F(\xi, y) - 2\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi^F(\xi, y) + \xi^4 \Phi^F(\xi, y) = 0,$$

можна подати у формі

$$\Phi^F(\xi, y) = [B_1(\xi) + \xi y B_3(\xi)] e^{-\xi y} + [B_2(\xi) + \xi y B_4(\xi)] e^{\xi y}, \quad (13.84)$$

або з огляду на те, що  $\xi$  повинно змінюватися від  $-\infty$  до  $\infty$ , у зручнішому вигляді

$$\Phi^F(\xi, y) = [A_1(\xi) + \xi y A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [A_2(\xi) + \xi y A_4(\xi)] e^{|\xi|y}, \quad (13.85)$$

де  $A_i(\xi)$ ,  $B_i(\xi)$  – довільні комплексні функції, причому

$$A_i(\xi) = \begin{cases} A_i(\xi) & (\xi \geq 0), \\ A_j(\xi) & (\xi < 0); \end{cases} \quad B_i(\xi) = \begin{cases} B_i(\xi) & (\xi \geq 0), \\ B_j(\xi) & (\xi < 0) \end{cases} \quad (i, j = 1 \dots 4; i \neq j, |i - j| = 1). \quad (13.86)$$

Тут враховано, що для кожного фіксованого значення аргументу  $y$  функція  $\Phi^F(\xi, y)$  обмежена за довільних значень  $\xi$ .

Подамо основні формули, які будуть використовуватися у подальших перетвореннях. Спочатку звернемося до інтегралів

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x^2 + y^2} e^{i\xi x} dx = \pi \operatorname{sign}(y) e^{-|\xi|y},$$

$$I_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} e^{i\xi x} dx = i\pi \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|y},$$

$$I_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} e^{i\xi x} dx = -\pi |\xi| y e^{-|\xi|y},$$

$$I_4 = I_2 - I_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} e^{i\xi x} dx = i\pi \operatorname{sign}(\xi) (1 - |\xi||y|) e^{-|\xi|y},$$



$$\begin{aligned}
I_5 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{2xy^2}{[x^2 + y^2]^2} e^{i\xi x} dx = i\pi\xi |y| e^{-|\xi y|}, \\
I_6 &= I_1 + I_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 y}{[x^2 + y^2]^2} e^{i\xi x} dx = \pi \operatorname{sign}(y) (-|\xi| |y|) e^{-|\xi y|}, \\
I_7 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} 2y \frac{3x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^3} e^{i\xi x} dx = -\pi \operatorname{sign}(y) \xi^2 e^{-|\xi y|}, \\
I_8 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} 2x \frac{x^2 - 3y^2}{[x^2 + y^2]^3} e^{i\xi x} dx = -i\pi\xi |\xi| e^{-|\xi y|}.
\end{aligned} \tag{13.87}$$

Перші два випливають з (3.2.3), (3.2.4) [52]; вирази для  $I_3$ ,  $I_5$ ,  $I_7$ ,  $I_8$  – внаслідок диференціювання за  $y$  інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_5$  відповідно.

З інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$  отримується:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{dx}{z} = i\pi [\operatorname{sign}(\xi) - \operatorname{sign}(y)] e^{-|\xi y|} \quad (z = x + iy),$$

а також (після заміни  $z = x + iy$  на  $t - z = (t - x) - iy$ ) –

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{dx}{t - z} = i\pi [\operatorname{sign}(y) - \operatorname{sign}(\xi)] e^{-|\xi y|} e^{i\xi t}. \tag{13.88}$$

Таким чином, якщо  $f = \alpha + i\beta$  – деяке комплексне число чи незалежна від  $x$  функція, то на підставі (13.88)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{f}{t - z} \right] e^{i\xi x} dx \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{if}{t - z} \right] e^{i\xi x} dx = \pi [\operatorname{sign}(y)\alpha - i \operatorname{sign}(\xi)\beta] e^{-|\xi y|} e^{i\xi t}. \tag{13.89}$$

Звідси з урахуванням (13.80) можна одержати залежність

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \frac{f}{t - z} &\equiv - \operatorname{Re} \frac{if}{t - z} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sign}(y)\alpha - i \operatorname{sign}(\xi)\beta] e^{-|\xi y|} e^{i\xi t} e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{sign}(y) [\alpha \cos(\xi(x - t)) - \beta \sin(\xi(x - t))] \right\} e^{-|\xi y|} d\xi = \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{sign}(y) [\alpha \cos(\xi(x - t)) - \beta \sin(\xi(x - t))] \right\} e^{-\xi |y|} d\xi.
\end{aligned} \tag{13.90}$$

Урахування формул (13.88) дає можливість також записати

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{z}}{z^2} e^{i\xi x} dx &= I_4 - iI_3 - iI_6 - I_5 = i\pi [\operatorname{sign}(\xi) - \operatorname{sign}(y) - 2\xi |y| + 2|\xi| |y|] e^{-|\xi y|}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{z} - z}{z^2} e^{i\xi x} dx &= i\pi [2|\xi| |y| - 2\xi |y|] e^{-|\xi y|}.
\end{aligned}$$

Розділяючи в останньому виразі дійсну та уявну частини, отримаємо

$$2i\pi \{ \xi |y|, |\xi|y \} e^{-|\xi|y} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \frac{z-\bar{z}}{\bar{z}^2} \right], \operatorname{Im} \left[ \frac{z-\bar{z}}{\bar{z}^2} \right] \right\} e^{i\xi x} dx,$$

звідки

$$-2i\pi (a\xi |y| + b|\xi|y) e^{-|\xi|y} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ a \operatorname{Re} \left[ \frac{z-\bar{z}}{\bar{z}^2} \right] + ib \operatorname{Im} \left[ \frac{z-\bar{z}}{\bar{z}^2} \right] \right\} e^{i\xi x} dx,$$

а якщо замінити  $z$  на  $t-z$ , то

$$2i\pi (a\xi |y| + b|\xi|y) e^{-|\xi|y} e^{i\xi t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ a \operatorname{Re} \left[ \frac{\bar{z}-z}{(t-\bar{z})^2} \right] + ib \operatorname{Im} \left[ \frac{\bar{z}-z}{(t-\bar{z})^2} \right] \right\} e^{i\xi x} dx. \quad (13.91)$$

Це дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A(\bar{z}-z)}{(t-\bar{z})^2} \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{iA(\bar{z}-z)}{(t-\bar{z})^2} \right] dx = 2i\pi (a\xi |y| - b|\xi|y) e^{-|\xi|y} e^{i\xi t}. \quad (13.92)$$

Здійснюючи обернення перетворення Фур'є на основі (13.80) та (13.87)

$$\begin{aligned} i_1 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{2|y|}{x^2 + y^2} = 2 \operatorname{sign}(y) \operatorname{Re} \frac{i}{z} = -2 \operatorname{sign}(y) \operatorname{Im} \frac{1}{z}, \\ i_2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{-2ix}{x^2 + y^2} = -2i \operatorname{Re} \frac{1}{z} = -2i \operatorname{Im} \frac{i}{z}, \\ i_3 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{-4ix|y|}{[x^2 + y^2]^2} = -2i \operatorname{sign}(y) \operatorname{Re} \frac{i}{z^2} = 2i \operatorname{sign}(y) \operatorname{Im} \frac{1}{z^2}, \\ i_4 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = -2 \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} = -2 \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} = 2 \operatorname{Im} \frac{i}{z^2}, \\ i_5 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi y e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = yi_3 = \frac{-4ixy|y|}{[x^2 + y^2]^2} = -i \operatorname{sign}(y) \operatorname{Re} \frac{i(z-\bar{z})}{z^2} = i \operatorname{sign}(y) \operatorname{Im} \frac{z-\bar{z}}{z^2}, \\ i_6 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| y e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = yi_4 = -2y \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} = -\operatorname{Re} \frac{z-\bar{z}}{z^2} = 2 \operatorname{Im} \frac{i(z-\bar{z})}{z^2}, \\ i_7 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 y e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = -4y^2 \frac{3x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^3} = 2 \operatorname{Im} \frac{z-\bar{z}}{z^3} = -2 \operatorname{Re} \frac{i(z-\bar{z})}{z^3}, \\ i_8 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\xi| y e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = 4ixy \frac{x^2 - 3y^2}{[x^2 + y^2]^3} = 2i \operatorname{Re} \frac{z-\bar{z}}{z^3} = 2i \operatorname{Im} \frac{i(z-\bar{z})}{z^3} \quad (z = x + iy). \end{aligned} \quad (13.93)$$

Звідси, зокрема,

$$\left\{ a \operatorname{Re} \left[ \frac{\bar{z}-z}{(t-\bar{z})^2} \right] + ib \operatorname{Im} \left[ \frac{\bar{z}-z}{(t-\bar{z})^2} \right] \right\} = i \int_{-\infty}^{\infty} (a\xi |y| + by|\xi|) e^{-|\xi|y} e^{i\xi t} e^{-i\xi x} d\xi. \quad (13.94)$$

Згідно властивостей дельта-функції Дірака

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ \infty & (x = 0); \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1; \quad \int_a^b f(x) \delta(x-t) dx = \begin{cases} 0 & (x < a, x > b), \\ 0,5 f(x) & (x = a, x = b), \\ f(x) & (a < x < b). \end{cases} \quad (13.95)$$

Відповідно до цього

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t) e^{-i\xi x} dx = e^{i\xi t}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\xi x} dx = 1. \quad (13.96)$$

Обернене перетворення Фур'є дає

$$\delta(x-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi, \quad (13.97)$$

а оскільки  $\delta(x) = \delta(-x)$ , то також і

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d\xi. \quad (13.98)$$

Перший вираз (13.99) можна також подати у вигляді інтегралу

$$\delta(x-t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( e^{i\xi t} e^{-i\xi x} + e^{-i\xi t} e^{i\xi x} \right) d\xi. \quad (13.99)$$

На основі залежності (13.99) легко записати

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x) \varphi(t, y) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, y) e^{i\xi(t-x)} d\xi dt. \quad (13.100)$$

Розглянемо функцію

$$Y(x, y) = \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)}.$$

Для додатних значень  $y > 0$  обчислення інтегралу від цієї функції дає незалежний від  $y$  вираз

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(x, y) dx = 1.$$

Якщо врахувати разом з цією властивістю також і те, що граничне значення цієї функції при  $y \rightarrow 0$  ( $y > 0$ ) дорівнює

$$\lim_{y \rightarrow +0} Y(x, y) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ \infty & (x = 0), \end{cases}$$

та зіставити останні дві залежності з першою та другою ознаками дельта-функції (13.95), можна зробити висновок, що

$$\lim_{y \rightarrow +0} Y(x, y) \equiv \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)} = \delta(x). \quad (13.101)$$

Залежності (1.4.1), (2.4.1) [52] дають вирази

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi = \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y} \sin(\xi x) d\xi = \frac{x}{\pi(y^2 + x^2)} \quad (y > 0),$$

звідки після граничного переходу з урахуванням (13.104)

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi = \delta(x), \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y} \sin(\xi x) d\xi = \frac{1}{\pi x},$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\mp \xi y} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x) + \frac{i}{\pi x}$$

або після заміни  $x$  на  $t-x$

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y} \cos \xi(t-x) d\xi = \delta(x), \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y} \sin \xi(t-x) d\xi = \frac{1}{\pi(t-x)},$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\mp \xi y} e^{i\xi(t-x)} d\xi = \delta(t-x) + \frac{i}{\pi(t-x)}.$$
(13.102)

### Антиплоска задача

В умовах поздовжнього зсуву в напрямі осі  $t$  переміщення  $w$  задовольняє гармонічному рівнянню

$$\Delta w(x, y) = 0. \quad (13.103)$$

Вважатимемо, що коли  $x \rightarrow \infty$ , то  $w(x, y)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow 0$  (тут і далі  $z = x + iy$ ). У декартовій системі координат напруження згідно із законом Гука залежать від  $w$  так:

$$\sigma_{yt} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \sigma_{xt} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (13.104)$$

Інтегральне перетворення Фур'є дає зв'язок між функцією  $w(x, y)$  та її трансформантою  $w^F(\xi, y)$  за змінною  $x$  у такому вигляді:

$$w^F(\xi, y) \equiv F(w; \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\xi x} dx, \quad w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (13.105)$$

З урахуванням обмежень, накладених на функцію  $w$ , фур'є-перетворення  $w'^F(\xi, y)$  похідної за  $x$  переміщення та напружень (13.104) матимуть вигляд

$$w'^F(\xi, y) = -i\xi w^F(\xi, y); \quad (13.106)$$

$$\sigma_{xt}^F(\xi, y) = -\mu i \xi w^F(\xi, y); \quad (13.107)$$

$$\sigma_{yt}^F(\xi, y) = -\mu \frac{\partial}{\partial y} w^F(\xi, y). \quad (13.108)$$

Розв'язок рівняння (13.103), яке у просторі зображень запишеться

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} w^F(\xi, y) - \xi^2 w^F(\xi, y) = 0,$$

має структуру

$$w^F = A_1(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2(\xi) e^{|\xi|y}. \quad (13.109)$$

### § 14. Температурна взаємодія тонкого теплоактивного включення з матрицею

Розглянемо симетричне відносно серединної лінії включення малої ширини (товщини)  $2h(x)$  ( $h'(x) \ll 1$ ), розташоване уздовж лінії  $L' = [a; b]$  на осі абсцис (рис. 14.1). Прийнемо для загальності товщину включення  $2\delta$  (для плоского температурного поля  $\delta \rightarrow \infty$ ). Вважатимемо теж, що температурне поле  $t_B(x, y, z)$  у ньому симетричне відносно серединної площини включення  $xOy$ . Усі величини, які стосуються включення, позначатимемо нижнім індексом "В".

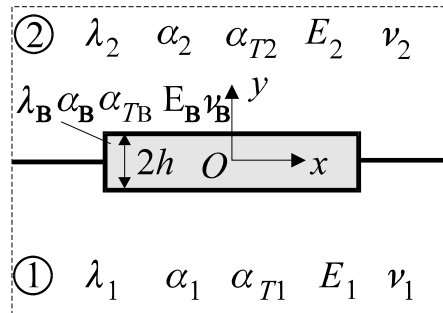


Рис. 14.1. Тонке міжфазне включення

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму, виділеного з включення, має вигляд

$$\frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} + \frac{q_{Bn}}{\delta} + \frac{q_B(x, y, z)}{2\delta} = 0, \quad (14.1)$$

де  $q_{Bx}, q_{By}, q_{Bn}$  – теплові потоки у напрямках  $x, y, n$ ;  $n$  – зовнішня нормаль до бічних поверхонь включення;  $q_B(x, y, z)$  – питома густина джерел тепла.

Нехай теплообмін на бічних поверхнях відповідає закону

$$q_{Bn} = f(t_B, T_C, \alpha, \beta, \dots) \text{ при } z = \pm\delta, \quad (14.2)$$

де  $t_B, T_C, \alpha, \beta, \dots$  – температура включення і температура й теплофізичні параметри довкілля відповідно. Тоді з урахуванням закону Фур'є (13.1) маємо

$$\lambda_B \Delta T_B(x, y) - f(T_B, T_C, \alpha, \beta, \dots) / \delta - Q_B(x, y) = 0. \quad (14.3)$$

Тут  $T_B, Q_B$  – середня за товщиною температура та інтегральна характеристика внутрішніх джерел тепла:

$$\{T_B(x, y), Q_B(x, y)\} = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \{t_B(x, y, z), q_B(x, y, z)\} dz.$$

Зокрема, для теплообміну за Ньютоном

$$f(T_B, T_C, \alpha_B) = \alpha_B (T_B - T_C) \text{ при } z = \pm\delta \quad (14.4)$$

і рівняння (14.3) збігається з рівнянням (13.10).

Для плоского температурного поля ( $\delta \rightarrow \infty$ )  $t_B(x, y, z) \sim T_B(x, y)$  і з (14.1), (13.1) випливає рівняння теплопровідності (13.5).

Розглянемо (14.3) як загальніше з математичного погляду (рівняння (13.5) – частинний випадок (14.3) при  $f = 0$ ). Усреднюючи (14.3) за шириною  $y$  та інтегруючи по  $x$  в межах  $[a; x]$ , матимемо

$$\lambda_B \int_{-h}^h \frac{\partial T_B(x, y)}{\partial x} dy - Q_x(a) + \lambda_B \int_a^x \left[ \frac{\partial T_B(\xi, h)}{\partial y} - \frac{\partial T_B(\xi, -h)}{\partial y} \right] d\xi -$$

$$- \frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi + 2h \int_a^x Q_B^C(\xi) d\xi = 0. \quad (14.5)$$

Тут

$$Q_x(w) = \int_{-h(w)}^{h(w)} \lambda_B \frac{\partial T_B(w, y)}{\partial x} dy, \quad w = \{a, b\}, \quad \varphi^C(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi(x, y) dy. \quad (14.6)$$

Розглянемо два розвинення деякої функції у ряди Тейлора за  $y$  в околі точок  $(x, \pm h)$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-h)^n}{n!} \frac{\partial^{(n)} \varphi(x, h)}{\partial y^n}, \quad \varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+h)^n}{n!} \frac{\partial^{(n)} \varphi(x, -h)}{\partial y^n}. \quad (14.7)$$

Звідси неважко отримати

$$2\varphi(x, y) = \langle \varphi \rangle_h + h \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_h + \frac{h^2}{2!} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\rangle_h + \frac{h^3}{3!} \left\langle \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \right\rangle_h + \dots +$$

$$+ y \left\{ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_h + h \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_h + \frac{h^2}{2!} \left\langle \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \right\rangle_h + \frac{h^3}{3!} \left[ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right]_h + \dots \right\} + \dots; \quad (14.8)$$

$$\int_{-h}^h \varphi(x, y) dy = h \langle \varphi \rangle_h + h^2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_h + \frac{(2h)^3}{2 \cdot 3!} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\rangle_h + \frac{(2h)^4}{2 \cdot 4!} \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \right]_h + \dots +$$

$$+ \frac{(2h)^{m+1}}{2 \cdot (m+1)!} \left[ \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m} \right]_h + \dots \quad (14.9)$$

Тут використане значення інтегралу та позначення суми та стрибка функції

$$\int_{-h}^h \frac{(y \mp h)^m}{m!} dy = \frac{(\mp 1)^m}{(m+1)!} (2h)^{m+1},$$

$$\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, h), \quad [\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, h).$$

На основі (14.7) температура  $T_B(x, y)$  має розвинення

$$T_B(x, 0) = T_B(x, \pm h) \mp h \frac{\partial T_B(x, \pm h)}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_B(x, \pm h)}{\partial y^2} + O(h^3). \quad (14.10)$$

Тому після деяких перетворень отримаємо

$$\lambda_B [T_B]_h + h \left\langle \lambda_B \frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} \right\rangle_h + \frac{h^2}{2} \left[ \lambda_B \frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} \right]_h + O(h^3) = 0. \quad (14.11)$$

Відповідно

$$\lambda_B \int_{-h}^h \frac{\partial T_B(x, y)}{\partial x} dy = \lambda_B h \left\langle \frac{\partial T_B}{\partial x} \right\rangle_h + h^2 \left[ \lambda_B \frac{\partial^2 T_B}{\partial x \partial y} \right]_h + O(h^3). \quad (14.12)$$

Зберігаючи в (14.11) і (14.5) з (14.12) члени порядку мализни не вищої від  $h^2$ , з урахуванням (14.3) отримаємо рівняння математичної моделі включення

$$\lambda_B [T_B]_h + h \left\langle \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right\rangle_h + \frac{h^2}{2} \left\{ -\lambda_B \frac{\partial^2 [T_B]_h}{\partial x^2} + \frac{[f]_h}{\delta} + [Q_B]_h \right\} = 0,$$

$$\lambda_B h \left\langle \frac{\partial T_B}{\partial x} \right\rangle_h + h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right]_h - \int_a^x \left[ \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right]_h d\xi - \frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi +$$

$$+ 2h \int_a^x Q_B^C(\xi) d\xi - Q_x(a) = 0. \quad (14.13)$$

Тут доданки порядку  $h^2$  підкреслені. Цей варіант рівнянь математичної моделі включення відрізняється від рівнянь моделі "проміжного шару" [775, 777] лише коефіцієнтами та доданками, що враховують теплоактивність включення.

Можна врахувати і члени порядку  $h^3$  та інші й одержати ще точніші, однак, істотно складніші моделі включення.

Припустимо тепер, що між включенням та матрицею уздовж усієї товщини існує неідеальний тепловий контакт

$$\lambda_B \frac{\partial T_B(x, y)}{\partial y} \pm \alpha_{yk} \{T_B(x, \pm h) - T(x, \pm h)\} = 0; \quad (14.14)$$

$$\lambda_B \frac{\partial T_B(x, y)}{\partial y} = \lambda_k \frac{\partial T(x, \pm h)}{\partial y}, \quad k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad x \in L', \quad (14.15)$$

де  $T(x, y)$  – температура матриці;  $\lambda_k$  ( $k=1, 2$ ) – коефіцієнти теплопровідності матеріалів матриці;  $\alpha_{yk}$  ( $k=1, 2$ ) – коефіцієнти тепловіддачі (для плинного чи газового включення) або величини, обернені до коефіцієнтів термоопору (для включення кристалічної структури). Вважаючи в (14.14)  $\alpha_{yk} = 0$ , отримаємо частковий випадок теплоізолизованого включення (тріщини). Якщо  $\alpha_{yk} \rightarrow \infty$ , то умови (14.14), (14.15) описують ідеальний тепловий контакт.

Для побудови точнішої моделі температурне поле  $T(x, y)$  подамо у вигляді суми основного температурного поля  $t^0(x, y)$ , що відповідає відсутності включень у матриці, та збуреного температурного поля  $\hat{t}(x, y)$ , спричиненого присутністю включень:

$$T(x, y) = t^0(x, y) + \hat{t}(x, y). \quad (14.16)$$

Збурене поле знесемо на вісь включення, а основне – ні, оскільки знесення на вісь також і основного поля призводить до невиконання у подальшому умов для часткового випадку абсолютно теплопровідного включення (це питання обговорене у [734] під час аналізу результатів роботи [1423]). Тобто, беручи до відома мализну ширини включення ( $h \ll b - a$ ,  $x \in L'$ ), припустимо, що

$$\hat{t}(x, y) \cong \hat{t}^\pm(x), \quad \frac{\partial \hat{t}(x, \pm h)}{\partial y} \cong \frac{\partial \hat{t}^\pm(x)}{\partial y}. \quad (14.17)$$

Тут і надалі граничні значення функцій з прямуванням аргументу до  $L'$  зверху і знизу позначаємо верхніми індексами "+" та "-" відповідно.

Використання умов контакту (14.14), (14.15) з урахуванням (14.16), (14.17) у рівняннях (14.12) або (14.13) математичної моделі включення породжує умови теплової взаємодії тонкого теплоактивного включення з матрицею

$$\frac{\lambda_B}{h} \left( 1 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left\{ [\hat{t}]_{L'} + \left\langle \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right\rangle_{L'} \right\} + \left\langle \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right\rangle_{L'} + \frac{h}{2\delta} [f]_{L'} = F_5(x),$$

$$\lambda_B h \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left\langle \hat{t} \right\rangle_{L'} + \left[ \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_{L'} \right\} + h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_{L'} - \int_a^x \left[ \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_{L'} d\xi - \frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi = F_6(x) \quad (14.18)$$

( $x \in L$ ),

де

$$F_5(x) = \frac{\lambda_B}{h} \left( 1 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left\{ [t^0]_h + \left\langle \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h \right\} - \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h - \frac{h}{2\delta} [Q_B]_h,$$

$$F_6(x) = Q_x(a) - \lambda_B h \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \langle t^0 \rangle_h + \left[ \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h \right\} - h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h + \int_a^x \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h d\xi -$$

$$- 2h \int_a^x Q_B^C(\xi) d\xi, \quad [\varphi]_{L'} = \varphi_1^-(x) - \varphi_2^+(x), \quad \langle \varphi \rangle_{L'} = \varphi_1^-(x) + \varphi_2^+(x) \quad (x \in L').$$

Суцільними лініями у (14.18) підкреслені члени, які враховують в умовах взаємодії величини порядку  $h^2$ ; пунктиром – відкидувані за ідеального контакту з включенням ( $\alpha_{yk} = \infty$ ); штриховими лініями – відкидувані на основі наближеної формули

$$\psi(x \pm ih) \cong \psi^\pm(x) \pm h(x) \frac{\partial \psi^\pm(x)}{\partial y} \quad \text{або} \quad \psi(x \pm ih) \cong \psi^\pm(x). \quad (14.19)$$

Прийнявши в (14.5)  $x = b$ , з використанням (14.14), (14.15) отримаємо інтегральну умову балансу тепла в області включення

$$\int_{L'} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h d\xi = Q_x(b) - Q_x(a) - \frac{2h}{\delta} \int_{L'} f^C(\xi) d\xi + 2h \int_{L'} Q_B^C(\xi) d\xi. \quad (14.20)$$

Необхідною є також умова нерозривності температурного поля

$$\int_{L'} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h d\xi = 0. \quad (14.21)$$

У частковому випадку, якщо теплообмін з довкіллям на бічних поверхнях включення здійснюється за законом Ньютона (14.4), умова (14.20) з урахуванням (14.16) набуває вигляду

$$\int_{L'} \left[ \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_h d\xi + \frac{\alpha_B h}{\delta} \int_{L'} \langle \hat{t} \rangle_{L'} d\xi = Q_x(b) - Q_x(a) - \int_{L'} \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h d\xi -$$

$$- \frac{\alpha_B h}{\delta} \int_{L'} \left\{ \langle t^0 \rangle_h - 2T_C \right\} d\xi + 2h \int_{L'} Q_B^C(\xi) d\xi. \quad (14.22)$$



Питання визначення величин  $Q_x(w)$  – **торцювих потоків тепла** (ТПТ) – можна вирішити [734, 955] апіорним припущенням

$$Q_x(w) = 2\lambda_B h(w) \min \left\{ \left[ \frac{\lambda_B}{\max(\lambda, \lambda_B)} \right]^\varphi, \left[ \frac{\lambda}{\max(\lambda, \lambda_B)} \right]^\psi \right\} \frac{\partial T_B}{\partial x} \quad (w = a, b; \varphi, \psi > 0), \quad (14.23)$$

яке дає можливість точно задовольнити усім граничним частковим випадкам (теплоізолюване; абсолютно теплопровідне включення; теплофізична еквівалентність матеріалів включення та матриці). У п. 18.4 буде запропонований ще один підхід до наближеного визначення торцювих потоків тепла у всьому діапазоні зміни теплофізичних параметрів включення.

Можна побудувати простіший варіант другої умови взаємодії (14.18), вважаючи включення термічно ортотропним ( $\lambda_{Bx} = 0$ ), тобто, нехтуючи поширенням тепла у поперечному напрямку, яке може спостерігатися за існування у включенні ізолюючих перегородок (наприклад, рідкий теплоносій рухається всередині включення численними практично теплоізолюваними каналами). У цьому випадку  $\partial q_x / \partial x = -\lambda_{Bx} \partial^2 T_B / \partial^2 x = 0$  і рівняння (14.3) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 T_B}{\partial y^2} - \frac{f(t_B, T_C, \alpha, \beta, \dots)}{\delta \lambda_B} - \frac{Q_B(x, y)}{\lambda_B} = 0. \quad (14.3^1)$$

Усереднюючи цей вираз по  $y$  та враховуючи члени не вище першого порядку від  $h$ , отримаємо спрощений варіант другої умови (14.18) взаємодії середовища з тонким лінійчастим включенням-тепловідводом

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h - 2h \left\{ \frac{f^C(x)}{\delta} - Q_B^C(x) \right\} = 0 \quad (14.24)$$

або ще простіший

$$\left[ \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_{L'} - 2h \left\{ \frac{f^C(x)}{\delta} - Q_B^C(x) \right\} = 0. \quad (14.25)$$

Отримані умови можуть формувати певні свої комбінації. Скажімо, у випадку ідеального контакту з включенням і з урахуванням членів до першого порядку  $h$  та інших можливих спрощень залежності (14.18) дають [734]

$$\left\langle \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right\rangle_{L'} + \frac{\lambda_B}{h} [\hat{t}]_{L'} = F_5(x); \quad (14.26)$$

$$F_5(x) = - \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h - \frac{\lambda_B}{h} [t^0]_h; \quad (14.27)$$

$$F_5(x) = - \left\{ 1 - \frac{\lambda_B(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1\lambda_2} \right\} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h; \quad (14.28)$$

$$F_5(x) = - \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h; \quad (14.29)$$

$$\lambda_B h \frac{\partial}{\partial x} \langle \hat{t} \rangle_{L'} - \int_a^x \left[ \lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_{L'} d\xi - \frac{2h}{\delta} \int_a^x f^C(\xi) d\xi = F_6(x), \quad (14.30)$$

$$F_6(x) = Q_x(a) - 2\lambda_B h \frac{\partial}{\partial x} t^0(x) + \int_a^x \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h d\xi - 2h \int_a^x Q_B^C(\xi) d\xi.$$

Зазначимо, що суми і різниці виразів, що містять однорідну складову  $t^0$  температури на лініях  $y = \pm h$ , які позначені виразами  $[ ]_h, \langle \rangle_h$ , можна для спрощення обчислень знести на лінію  $y = 0$  і замінити виразами  $[ ]_{L'}, \langle \rangle_{L'}$ .

У [734] досліджені шість варіантів умов взаємодії стосовно однорідної матриці ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ): перший (найповніший і найточніший) – (14.26), (14.27), (14.30); другий – (14.26), (14.27), (14.25); третій – (14.26), (14.28), (14.30); четвертий – (14.26), (14.28), (14.25); п'ятий – (14.26), (14.29), (14.30); шостий – (14.26), (14.29), (14.25).

Лише перший та третій забезпечують найповнішу точну реалізацію усіх граничних випадків; другий і четвертий варіанти добре задовольняють граничні випадки  $\lambda_B = 0; \lambda; \infty$  при цьому варіант 2 забезпечує точніші результати при  $\lambda_B \rightarrow \infty$ , а варіант 4 – при  $\lambda_B \cong \lambda$ . Різниця у результатах використання варіантів 2 і 4 не перевищувала 1...3%. Застосування варіанту 6 доцільне лише у випадку  $\lambda_B \cong 0$ , оскільки при  $\lambda_B > 0,5\lambda$  помилка у порівнянні з використанням точніших варіантів 2 і 4 перевищує 100%. Якщо  $\lambda_B \cong 0$ , вибір моделі не має значення: усі вони дають практично однакові результати.

## § 15. Умови взаємодії для включення в умовах поздовжнього зсуву

За відомою аналогією Г.С.Кіта [393] поздовжній зсув еквівалентний до двовимірної задачі теплопровідності без урахування тепловіддачі з бічних поверхонь. У цьому випадку зміщенню  $w$  відповідає температура  $T$ , модулю зсуву  $G$  – коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  тощо. Зрозуміло, що умови взаємодії, які відповідають антиплоскій деформації, можна одержати з відповідної інтерпретації (14.18)–(14.21), (14.24). Однак це питання розглядається окремо у зв'язку з можливістю ширшого механічного аналізу питання.

### 15.1. Пружне ізотропне включення

Використовуючи рівняння рівноваги (13.24) та інтегруючи його спочатку по  $y$  від  $-h$  до  $h$ , а потім по  $x$  від  $a$  до  $x$ , отримуємо

$$\sigma_{xz}^c(x) \equiv \frac{1}{2h(x)} \int_{-h}^h \sigma_{xzB}^c dy = \sigma_{xz}^c(a) - \frac{1}{2h(x)} \int_a^x (\sigma_{yzB}^2 - \sigma_{yzB}^1) dt,$$

де нижній індекс "В" означає величини, які стосуються включення; індекси  $k = 1, 2$  – значення відповідних функцій на нижньому та верхньому берегах лінії  $L'$ . З іншого боку, враховуючи малу товщину включення та співвідношення закону Гука (13.23), які в ізотропному випадку набувають вигляду  $\sigma_{yzB} = G_B \partial w_B / \partial y$ ,  $\sigma_{xzB} = G_B \partial w_B / \partial x$ , отримуємо на основі припущення, що  $h \ll 1$  таку наближену рівність

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^c(x) &\approx \frac{1}{2}(\sigma_{yzB}^2 + \sigma_{yzB}^1) = \frac{1}{2}G_B \frac{\partial}{\partial y}(w_B^2 + w_B^1) = \\ &= G_B \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w_B(x+ih)}{\partial y} + \frac{\partial w_B(x-ih)}{\partial y} \right] \approx G_B \left[ \frac{w_B(x+ih) - w_B(x-ih)}{2h} \right].\end{aligned}$$

Умови ідеального механічного контакту включення з матрицею можна подати у вигляді

$$w = w_B, \quad \sigma_{yz} \equiv G_k \frac{\partial w}{\partial y} = \sigma_{yzB} \equiv G_B \frac{\partial w_B}{\partial y} \quad (k=1, 2)$$

на верхньому ( $k=2$ ) та нижньому ( $k=1$ ) берегах включення. Тут  $w$  – поле переміщень у матриці, яке дорівнює сумі збуреного розв'язку  $\hat{w}$  та однорідного розв'язку задачі (поле переміщень за відсутності у тілі включень)  $w^0$ , який задовольняє умови ідеального механічного контакту на межі півплощин

$$w^{0+} = w^{0-}, \quad G_2 \frac{\partial w^{0+}}{\partial y} = G_1 \frac{\partial w^{0-}}{\partial y} \rightarrow G_2 \frac{\partial w^0(x+ih)}{\partial y} \approx G_1 \frac{\partial w^0(x-ih)}{\partial y}.$$

Тому

$$\begin{aligned}2\sigma_{yz}^c(x) &\approx \sigma_{yz}(x+ih) + \sigma_{yz}(x-ih) \approx \sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^- \approx \\ &\approx G_B \left[ \frac{w_B(x+ih) - w_B(x-ih)}{h} \right] = G_B \left[ \frac{w(x+ih) - w(x-ih)}{h} \right].\end{aligned}$$

На основі наближеної рівності для переміщень у матриці на межі контакту з включенням

$$w(x \pm ih) \approx w^\pm(x) \pm h \frac{\partial w}{\partial y} \approx w^\pm(x) \pm h \frac{\partial(\hat{w} + w^0)}{\partial y} \approx w^\pm(x) \pm h \frac{\partial w^0(x \pm ih)}{\partial y}$$

(не враховується похідна  $\partial \hat{w} / \partial y$ ) та з урахуванням закону Гука для однорідного розв'язку попередній вираз зведеться до такого:

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- &\approx \sigma_{yz}(x+ih) + \sigma_{yz}(x-ih) \approx G_B \left[ \frac{w^+ - w^-}{h} + \frac{\partial w^0(x+ih)}{\partial y} + \frac{\partial w^0(x-ih)}{\partial y} \right] = \\ &= G_B \left[ \frac{w^+ - w^-}{h} + \frac{\sigma_{yz}^0(x+ih)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz}^0(x-ih)}{G_1} \right].\end{aligned}$$

Таким чином остаточно отримуємо основну математичну модель тонкостінного включення

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- &\approx \sigma_{yz}(x+ih) + \sigma_{yz}(x-ih) = G_B \left[ \frac{w^+ - w^-}{h} + \frac{\sigma_{yz}^0(x+ih)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz}^0(x-ih)}{G_1} \right], \\ w^+ - w^- &= \int_a^x \left( \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} - \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} \right) dt + w_-^* \quad (w_-^* - \text{const}).\end{aligned}$$

Якщо вважати, що  $w(x \pm ih) \approx w^\pm(x)$ , то перший вираз у математичній моделі набуде набагато простішого вигляду

$$\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- = G_B \frac{w^+ - w^-}{h}.$$

Це співвідношення разом з другою залежністю основної моделі дає так звану плівкову модель тонкого включення.

З урахуванням у двох передостанніх залежностях основної математичної моделі першого подання цього підпункту та умов записаного вище ідеального механічного контакту **основну модель (ОМ)** [951] умов взаємодії подамо у вигляді двох залежностей

$$\begin{aligned} G_B \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_{L'} - \frac{1}{h} \int_a^x [\sigma_{yz}]_{L'} d\xi &= 2\sigma_{xz}^C(a), \\ \langle \sigma_{yz} \rangle_{L'} + \frac{G_B}{h} \int_a^x [\sigma_{xz}/G]_{L'} d\xi &= w_-^* \frac{G_B}{h} + G_B \langle \sigma_{yz}^0/G \rangle_{L'}, \end{aligned} \quad (15.1)$$

де  $\sigma_{yz}^0$ ,  $\sigma_{xz}^0$  – значення напружень у відповідному середовищі без включень (однорідний розв'язок);  $\sigma_{xz}^C(a)$  – значення дотичного напруження на лівому торці включення;  $w_-^*$  – відносне зміщення верхнього краю лівого торця прошарку відносно нижнього.

Так само будується і **плівкова модель (ПМ)** умов взаємодії, яку можна також отримати з основної (15.1), якщо знехтувати у ній підкресленим членом:

$$\begin{aligned} G_B \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_{L'} - \frac{1}{h} \int_a^x [\sigma_{yz}]_{L'} d\xi &= 2\sigma_{xz}^C(a), \\ \langle \sigma_{yz} \rangle_{L'} + \frac{G_B}{h} \int_a^x [\sigma_{xz}/G]_{L'} d\xi &= w_-^* \frac{G_B}{h}. \end{aligned} \quad (15.2)$$

З неї при  $G_B \rightarrow \infty$  випливають співвідношення для **абсолютно жорсткої плівки (АЖП)** нульової товщини (з основної моделі (15.1) такі результати можна отримати лише якщо одночасно  $h \rightarrow 0$  і  $G_B h \rightarrow \infty$ ).

Для сталих  $\sigma_{xz}^C(a)$ ,  $w_-^*$  можна побудувати апріорні залежності, аналогічні (14.23). Зокрема, якщо матеріали прилеглих до включення матеріалів однакові ( $G_1 = G_2 = G$ ), то

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^C(b) &= \sigma_{xz}^0(b) \tau_z, \quad w_-^* = 2h(b) \sigma_{yz}^0(b) w^*, \\ \tau_z &= \frac{G}{\max(G_B, G)}, \quad w^* = \frac{\min(G_B, G)}{G^2}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Можливий інший вибір залежностей для сталих  $\sigma_{xz}^C(b)$ ,  $w_-^*$ , однак аналіз багатьох подібних виразів засвідчив [999], що цей є у певному сенсі оптимальним.

Умови (15.3) дають можливість отримати з (15.1) та (15.2) коректні співвідношення для розрізів із заданими на їхніх берегах напруженнями, для ідентичних матеріалів ( $G_1 = G_2 = G_B = G$ ) та для **абсолютно жорсткого включення (АЖВ)** нульової чи ненульової товщини (залежності (15.1) основної моделі) і абсолютно жорсткої плівки (залежності (15.2) плівкової моделі).

Якщо включення моделює щілину, на берегах якої задані напруження  $\tau^\pm(x)$ , то умови взаємодії мають вигляд

$$\sigma_{yz1} = \tau^-(x), \quad \sigma_{yz2} = \tau^+(x) \quad \text{або} \quad \langle \sigma_{yz} \rangle_{L'} = \tau^- + \tau^+, \quad [\sigma_{yz}]_{L'} = \tau^- - \tau^+; \quad (15.4)$$

якщо ж абсолютно жорстка плівка впроваджена у масив з натягом  $w^\pm(x)$  на кожному з берегів, то умови взаємодії набудуть вигляду

$$w_1 = w^-(x), w_2 = w^+(x) \quad \text{або} \quad \langle w \rangle_{L'} = w^- + w^+, \quad [w]_{L'} = w^- - w^+. \quad (15.5)$$

Додаткові умови однозначності зміщень під час обходу навколо неоднорідності та глобальної рівноваги включення, яким повинен задовольняти розв'язок, зводяться до виразів

$$\int_{L'} \frac{\partial}{\partial \xi} [w] d\xi \equiv \int_{L'} [\sigma_{xz}/G] d\xi = 0, \quad \int_{L'} [\sigma_{yz}] d\xi = Q, \quad (15.6)$$

де  $Q$  – головний вектор зусиль, прикладених до включення.

## 15.2. Анізотропне включення

Скористаємося законом Гука (13.23), приймаючи  $k = v$ . Тоді

$$a_{44B} \frac{\partial w_B}{\partial x} = a_{45B} \frac{\partial w_B}{\partial y} + |r_B|^2 \sigma_{xzB}, \quad (15.7)$$

$$a_{44B} \sigma_{yzB} = \frac{\partial w_B}{\partial y} - a_{45B} \sigma_{xzB}$$

Подібно до того, як це було зроблено у випадку ізотропії матеріалів, з урахуванням малої товщини включення середнє значення  $\sigma_{xzB}^c$  напруження  $\sigma_{xzB}$  у прошарку дорівнює

$$\sigma_{xzB}^c(x) = \sigma_{xzB}^c(a) - \frac{1}{2h(x)} \int_a^x [\sigma_{yzB}(\xi + ih) - \sigma_{yzB}(\xi - ih)] d\xi \quad (x \in L'), \quad (15.8)$$

а середнє значення величини  $\frac{\partial w_B(x, y)}{\partial y}$  дорівнюватиме  $\frac{\partial w_B^c(x)}{\partial y} = \frac{w_B(x + ih) - w_B(x - ih)}{2h}$ .

Контакт включення з матрицею вважатимемо ідеальним:

$$w_k(x \pm ih) = w_B(x \pm ih), \quad \sigma_{yzk}(x \pm ih) = \sigma_{yzB}(x \pm ih), \quad k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (15.9)$$

де  $w_k(x \pm ih) \approx w^\pm(x) \pm h(x) \frac{\partial w^0(x \pm ih)}{\partial y}$ ,  $\sigma_{yzk}(x \pm ih) \approx \sigma_{yz}^\pm(x)$  – значення відповідних величин у матриці. Тоді

$$\frac{\partial w_B^c(x)}{\partial y} = \frac{w^+(x) - w^-(x)}{2h} + Q_6(x), \quad (15.10)$$

де

$$2Q_6(x) = \frac{\partial w^0(x + ih)}{\partial y} + \frac{\partial w^0(x - ih)}{\partial y} = a_{442} \sigma_{yz}^0(x + ih) + a_{441} \sigma_{yz}^0(x - ih) + a_{452} \sigma_{xz}^0(x + ih) + a_{451} \sigma_{xz}^0(x - ih), \quad w^+(x) - w^-(x) = w_-^* + \int_a^x \left( \frac{\partial w^+}{\partial x} - \frac{\partial w^-}{\partial x} \right) dt. \quad (15.11)$$

Усереднимо (15.7) по товщині включення та підставимо у отримані вирази залежності (15.8) і (15.9) для  $\sigma_{xzB}^c(x)$  і  $\partial w_B^c(x)/\partial y$ ; врахуємо наближені залежності

$$\frac{\partial w_B^c(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w_1(x - ih)}{\partial x} + \frac{\partial w_2(x + ih)}{\partial x} \right] \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w^+(x)}{\partial x} + \frac{\partial w^-(x)}{\partial x} \right],$$

$$\sigma_{yzB}^c(x) = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{yz1}(x - ih) + \sigma_{yz2}(x + ih) \right] \approx \frac{1}{2} \left[ \sigma_{yz}^+(x) + \sigma_{yz}^-(x) \right]$$

для вектора стану  $\sigma = \|\sigma_{yz}(z), \partial w(z)/\partial x\|$  і внаслідок цього отримаємо умови взаємодії

$$\begin{aligned} \sigma^+(x) + \sigma^-(x) - \left( 2\mathbf{N} + \frac{1}{h} \int_a^x \left\| \left[ \sigma_{yz} \right]_{L'}, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'} \right\| \right) \Lambda = 0, \\ \mathbf{N} = \left\| \sigma_{xz}^C(a), - \left[ \frac{w_-^*}{2h(a)} + \underline{Q}_6(a) \right] \right\|, \quad \Lambda = \frac{1}{a_{44B}} \left\| \begin{array}{cc} -a_{45B} & |r_B|^2 \\ -1 & -a_{45B} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Торцеві сталі  $\sigma_{xz}^C(a)$  та  $w_-^*$  визначаються апріорними залежностями типу (15.3) або з інших міркувань, аналогічних наведеним у п. 18.4.

Співвідношення (15.12) відповідають **основній моделі** умов взаємодії пружного анізотропного включення. Якщо вважати, що  $Q_6(x) = 0$  (це еквівалентне наближенню  $w_k(x \pm ih) \approx w^\pm(x)$ ), то отримаємо простішу **плівкову модель** умов взаємодії. Для ізотропного включення, якщо  $a_{45B} = 0, a_{44B} = a_{55B} = 1/G_B$ , залежність (15.12) зводиться до (15.1).

### 15.3. Нелінійні моделі

Допущення повного чи часткового (уздовж довжини) переходу включення до пластичного стану дає можливість з використанням умови Губера – Мізеса записати умови взаємодії у кусково-однорідному вигляді: для пружної ділянки – умови (15.1) чи (15.2), а для пластичної –

$$\left[ \sigma_{yz} \right]_{L'} = 0, \quad \langle \sigma_{xz} \rangle_{L'} = 2c_0 = 2\sqrt{k^2 - \left( \sigma_{xz}^C(a) \right)^2}. \quad (15.13)$$

Для включення рідкого або в'язкого умови взаємодії подамо у вигляді залежностей

$$\left[ \sigma_{yz} \right] = 0, \quad \langle \sigma_{xz} \rangle = G \left( \frac{\partial}{\partial \xi} [w] \right), \quad (15.14)$$

де  $G$  – певна функція.

Для викривлених включень умови взаємодії слід будувати у вигляді

$$\Psi_j \left( \sigma_{nz}^\pm, \sigma_{\tau z}^\pm \right) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (15.15)$$

де  $n, \tau$  – напрями нормалі та дотичної до осьової лінії  $L'$  включення.

## § 16. Термопружна взаємодія тонкого теплоактивного включення з матрицею (плоска задача)

### 16.1. Ізотропія матеріалу включення

Методики побудови плоских умов термопружної чи температурної або антиплоскої взаємодії принципово не різняться. Усереднюючи рівняння рівноваги включення (13.14) по ширині (висоті) та інтегруючи по  $x$  в межах від  $a$  до  $x$ , одержимо

$$\int_{-h}^h \sigma_{xxB}(x, y) dy - \int_{-h}^h \sigma_{xxB}(a, y) dy - \int_a^x \left[ \sigma_{xyB} \right]_h d\xi = 0; \quad (16.1)$$

$$\int_{-h}^h \sigma_{xyB}(x, y) dy - \int_{-h}^h \sigma_{xyB}(a, y) dy - \int_a^x \left[ \sigma_{yyB} \right]_h d\xi = 0. \quad (16.2)$$

Використовуючи рівняння закону Гука (13.15) і співвідношення

$$\int_{-h}^h \frac{\partial u_{yB}(x, y)}{\partial y} dy = - \int_a^x \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right]_h d\xi + u_{yB}(a, h) - u_{yB}(a, -h),$$

$$\int_{-h}^h \left\{ \frac{\partial u_{xB}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_{xB}(a, y)}{\partial y} \right\} dy = - \int_a^x \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi$$
(16.3)

після деяких перетворень отримаємо чотири рівняння математичної моделі тонкого пружного теплопровідного включення у випадку плоскої задачі

$$-\frac{\nu_B}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xyB}]_h d\xi + \int_a^x \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{1}{E_B} \int_{-h}^h \sigma_{yyB}(x, y) dy + \alpha_{TB} \int_{-h}^h T_B(x, y) dy -$$

$$-\frac{\nu_B}{E_B} \int_{-h}^h \sigma_{xxB}(a, y) dy + u_{yB}(a, -h) - u_{yB}(a, h) = 0;$$
(16.4)

$$-\frac{1}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xyB}]_h d\xi + \int_{-h}^h \frac{\partial u_{yB}(x, y)}{\partial x} dy + \frac{\nu_B}{E_B} \int_{-h}^h \sigma_{yyB}(x, y) dy - \alpha_{TB} \int_{-h}^h T_B(x, y) dy -$$

$$-\frac{1}{E_B} \int_{-h}^h \sigma_{xxB}(a, y) dy = 0;$$
(16.5)

$$-\int_a^x \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{1}{\nu_B E_B} \int_a^x [\sigma_{yyB}]_h d\xi - \frac{\nu_B}{E_B} \int_{-h}^h \sigma_{xyB}(x, y) dy + \frac{\nu_B}{E_B} \int_{-h}^h \sigma_{xyB}(a, y) dy +$$

$$+ \frac{1 + \nu_B}{\nu_B} \alpha_{TB} \int_a^x [T_B]_h d\xi - \frac{1}{\nu_B} \int_a^x \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right]_h d\xi = 0;$$
(16.6)

$$-\int_a^x \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi - \frac{1}{G_B} \int_a^x [\sigma_{yyB}]_h d\xi + \int_{-h}^h \frac{\partial u_{yB}(x, y)}{\partial x} dy - \int_{-h}^h \frac{\partial u_{yB}(a, y)}{\partial x} dy = 0.$$
(16.7)

Скориставшись наближеним співвідношенням (14.8) та зберігши члени порядку мализни не вище від  $h^2$ , отримаємо такий варіант математичної моделі включення

$$-\frac{\nu_B}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xyB}]_h d\xi + \int_a^x \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{h}{E_B} \langle \sigma_{yyB} \rangle_h + \alpha_{TB} h \langle T_B \rangle_h - \frac{h^2}{E_B} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xyB}]_h +$$

$$+ \frac{\alpha_{TB} h^2}{\lambda_B} \left[ \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right]_h - \frac{\nu_B}{E_B} N_x(a) + V(a) = 0,$$

$$-\frac{1}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xyB}]_h d\xi + h \left\langle \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right\rangle_h + \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{yyB} \rangle_h - \alpha_{TB} h \langle T_B \rangle_h - h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right]_h +$$

$$+ \frac{2 + \nu_B}{E_B} h^2 \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xyB}]_h - \frac{\alpha_{TB} h^2}{\lambda_B} \left[ \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial y} \right]_h - \frac{1}{E_B} N_x(a) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & -\int_a^x \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{1}{\nu_B E_B} \int_a^x [\sigma_{yyB}]_h d\xi - \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{xyB} \rangle_h + \frac{h^2}{E_B} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{yyB}]_h + \frac{1+\nu_B}{\nu_B} \alpha_{TB} \times \\
 & \times \int_a^x [T_B]_h d\xi + \alpha_{TB} h^2 \frac{\partial}{\partial x} [T_B]_h + \frac{\nu_B}{E_B} N_{xy}(a) - \frac{1}{\nu_B} \int_a^x \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right]_h d\xi - h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right]_h = 0, \\
 & -\int_a^x \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} \right]_h d\xi - \frac{1}{G_B} \int_a^x [\sigma_{yyB}]_h d\xi + h \left\langle \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right\rangle_h + h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right]_h - V'(a) = 0 \quad (x \in L'). \quad (16.8)
 \end{aligned}$$

Тут підкреслені члени, які були би відсутні за збереження лише членів порядку мализни не вище  $h$ .

Диференціюючи (16.8) за  $x$ , з урахуванням того, що  $h'(x) \ll 1$ , отримуємо рівняння, які відрізняються від рівнянь моделі "проміжного шару" [750, 737], побудованих операторним методом, фактично лише коефіцієнтами та доданками, що враховують температуру.

Якщо (16.4)–(16.7) здиференціювати за  $x$ , зберігши члени до  $h^4$  включно, то отримані рівняння будуть подібні до рівнянь тонких прошарків [25], знайдених асимптотичним інтегруванням рівнянь теорії пружності.

Вважатимемо контакт між включенням та матрицею ідеальним:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yyB}(x, \pm h) &= \sigma_{yyk}(x, \pm h), \quad \sigma_{xyB}(x, \pm h) = \sigma_{xyk}(x, \pm h), \quad u'_{xB}(x, \pm h) = u'_{xk}(x, \pm h), \\
 u'_{yB}(x, \pm h) &= u'_{yk}(x, \pm h) + \varepsilon_B, \quad k = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad (x \in L'), \quad (16.9)
 \end{aligned}$$

де  $\sigma_{yyk}$ ,  $\sigma_{xyk}$ ,  $u'_{xk}$ ,  $u'_{yk}$  ( $k=1, 2$ ) – напруження і переміщення у матриці відповідно на нижній ( $k=1$ ) та верхній ( $k=2$ ) межах контакту;  $\varepsilon_B$  жорсткий поворот включення.

Ураховуючи тонкостінність включення, приймемо, що

$$\frac{\partial u_{yB}(x, h)}{\partial y} = \frac{\partial u_{yB}(x, -h)}{\partial y} \quad \text{або} \quad \left[ \frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right]_h = 0. \quad (16.10)$$

Внаслідок лінійності напруження в матриці подаються у вигляді

$$\left\{ \sigma_{yyk}, \sigma_{xxk}, \sigma_{xyk}, u'_{xk}, u'_{yk} \right\} = \left\{ \sigma_{yyk}^0, \sigma_{xxk}^0, \sigma_{xyk}^0, u'_{xk}^0, u'_{yk}^0 \right\} + \left\{ \hat{\sigma}_{yyk}, \hat{\sigma}_{xxk}, \hat{\sigma}_{xyk}, \hat{u}'_{xk}, \hat{u}'_{yk} \right\}. \quad (16.11)$$

Тут індекс "0" стосується однорідного розв'язку; індекс " $\hat{\phantom{x}}$ " – збуреного включеннями. Допустимо також, що

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \hat{\sigma}_{yyk}(x, \pm h), \hat{\sigma}_{xxk}(x, \pm h), \hat{\sigma}_{xyk}(x, \pm h), \hat{u}'_{xk}(x, \pm h), \hat{u}'_{yk}(x, \pm h) \right\} \cong \\
 & \cong \left\{ \hat{\sigma}_{yyk}^{\pm}(x), \hat{\sigma}_{xxk}^{\pm}(x), \hat{\sigma}_{xyk}^{\pm}(x), \hat{u}'_{xk}^{\pm}(x), \hat{u}'_{yk}^{\pm}(x) \right\}. \quad (16.12)
 \end{aligned}$$

Підставляючи умови контакту (16.9), (14.14), (14.15) з урахуванням (16.10) – (16.12) у рівняння математичної моделі включення (16.8), знаходимо умови термомеханічної взаємодії тонкого пружного теплопровідного включення-прошарку:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\nu_B}{E_B} \int_a^x [\hat{\sigma}_{xy}]_{L'} d\xi + \int_a^x [u'_y]_{L'} d\xi + \frac{h}{E_B} \langle \hat{\sigma}_{yy} \rangle_{L'} - \frac{h^2}{E_B} \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\sigma}_{xy}]_{L'} = F_1(x), \\
 & -\frac{1}{E_B} \int_a^x [\hat{\sigma}_{xy}]_{L'} d\xi + h \langle \hat{u}'_x \rangle_{L'} + \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \hat{\sigma}_{yy} \rangle_{L'} + \frac{2+\nu_B}{E_B} h^2 \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\sigma}_{xy}]_{L'} - h^2 \frac{\partial}{\partial x} [u'_y]_{L'} = F_2(x),
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\int_a^x [\hat{u}'_x]_{L'} d\xi + \frac{1}{\nu_B E_B} \int_a^x [\hat{\sigma}_{yy}]_{L'} d\xi - \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \hat{\sigma}_{xy} \rangle_{L'} + \frac{h^2}{E_B} \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\sigma}_{yy}]_{L'} = F_3(x), \\
& -\int_a^x [\hat{u}'_y]_{L'} d\xi - \frac{1}{G_B} \int_a^x [\hat{\sigma}_{yy}]_{L'} d\xi + h \langle \hat{u}'_y \rangle_{L'} = F_4(x) \quad (x \in L'), \tag{16.13}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{\nu_B}{E_B} N_x(a) - V(a) + \frac{\nu_B}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xy}^0]_h d\xi - \int_a^x [u_y^{0'}]_h d\xi - \frac{h}{E_B} \langle \sigma_{yy}^0 \rangle_h + \frac{h^2}{E_B} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xy}^0]_h - \\
& - \alpha_{TB} h \left\{ \langle T \rangle_h + \left[ \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h \right\} - \frac{\alpha_{TB}}{\lambda_B} h^2 \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h, \\
F_2(x) &= \frac{1}{E_B} N_x(a) + \frac{1}{E_B} \int_a^x [\sigma_{xy}^0]_h d\xi - h \langle u_x^{0'} \rangle_h - \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{yy}^0 \rangle_h - \frac{2-\nu_B}{E_B} h^2 \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xy}^0]_h + \\
& + h^2 \frac{\partial}{\partial x} [u_y^{0'}]_h + \alpha_{TB} h \left\{ \langle T \rangle_h + \left[ \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h \right\} + \frac{\alpha_{TB}}{\lambda_B} h^2 \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h, \\
F_3(x) &= -\frac{\nu_B}{E_B} N_{xy}(a) + \int_a^x [u_x^{0'}]_h d\xi - \frac{1}{\nu_B E_B} \int_a^x [\sigma_{yy}^0]_h d\xi + \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{xy}^0 \rangle_h - \frac{h^2}{E_B} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{yy}^0]_h - \\
& - \frac{1+\nu_B}{\nu_B} \alpha_{TB} \int_a^x \left\{ [T]_h + \left\langle \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_h \right\} d\xi - \alpha_{TB} h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [T]_h + \left\langle \frac{\lambda}{\alpha_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_h \right\}, \\
F_4(x) &= V'(a) + \int_a^x [u_x^{0'}]_h d\xi + \frac{1}{G_B} \int_a^x [\sigma_{yy}^0]_h d\xi - h \langle u_y^{0'} \rangle_h - 2h \varepsilon_B. \tag{16.14}
\end{aligned}$$

Тут підкреслені члени порядку  $h^2$  та введені позначення

$$\{N_x(w), N_{xy}(w), U'(w), V'(w)\} = \int_{-h(w)}^{h(w)} \left\{ \sigma_{xxB}(w, y), \sigma_{xyB}(w, y), \frac{\partial u_{xB}(w, y)}{\partial x}, \frac{\partial u_{yB}(w, y)}{\partial x} \right\} dy,$$

$$U(w) = u_{xB}(w, -h) - u_{xB}(w, h), \quad V(w) = u_{yB}(w, -h) - u_{yB}(w, h), \quad w = \{a, b\}. \tag{16.15}$$

Це – **торцьові напруження** (ТН) і **торцьові переміщення** (ТП).

Вважаючи у (16.1), (16.2)  $x = b$ , з використанням (16.9), (16.15) отримаємо інтегральні умови рівноваги включення

$$\int_a^b [\sigma_{yy}]_h d\xi = N_{xy}(b) - N_{xy}(a), \quad \int_a^b [\sigma_{xy}]_h d\xi = N_x(b) - N_x(a). \tag{16.16}$$

Окрім того, очевидні умови, які характеризують однозначність поля переміщень під час обходу навколо кожного з включень

$$\int_a^b [u'_x]_h d\xi = U(b) - U(a), \quad \int_a^b [u'_y]_h d\xi = V(b) - V(a). \tag{16.17}$$

Загальний поворот  $c^*$  торця  $w$  включення складається з пружного  $c = U(w)/2h(w)$  та жорсткого  $\varepsilon_B^w$  поворотів (рис. 16.1). Застосування гіпотези плоских перерізів означає, що

$c = 0$ ; якщо ж  $c \neq 0$ , то врахування у  $c^*$  складової  $\varepsilon_B^w$  узагальнює цю гіпотезу: після деформування переріз включення залишається плоским, але не обов'язково ортогональним до осі включення [316].

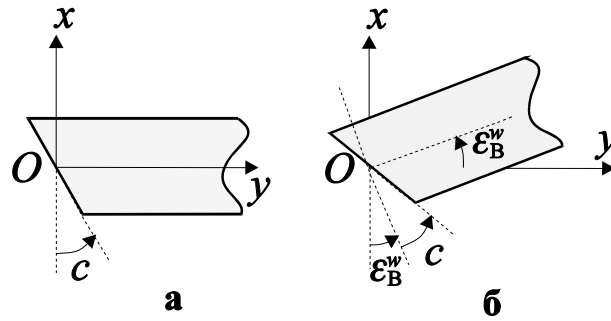


Рис. 16.1. Схема переміщень у торці включення

Таким чином, для врахування жорсткого повертання включення у рівняннях моделі  $U(w)$  слід замінити на  $U(w) + 2h(x)\varepsilon_B^w$ . Для визначення додаткового жорсткого повороту включення  $\varepsilon_B^w$  до умов взаємодії (16.13) необхідно додати умови рівності нулю головного моменту сил, прикладених до включення

$$-\int_a^b \left\{ x [\sigma_{yyB}]_h + h \langle \sigma_{xyB} \rangle_h \right\} d\xi = M(b) - M(a) \quad (16.18)$$

або з використанням умов ідеального контакту –

$$-\int_a^b \left\{ x [\hat{\sigma}_{yy}]_{L'} + h \langle \hat{\sigma}_{xy} \rangle_{L'} \right\} d\xi = M(b) - M(a) + \int_a^b \left\{ x [\sigma_{yy}^0]_h + h \langle \sigma_{xy}^0 \rangle_h \right\} d\xi. \quad (16.19)$$

Тут

$$M(w) = \left( w - \frac{a+b}{2} \right) N_{xy}(w) - \int_{-h(w)}^{h(w)} y \sigma_{xxB}(w, y) dy, \quad w = \{a, b\}. \quad (16.20)$$

Зазначимо, що найчастіше торцеві напруження і торцеві переміщення до уваги не бралися [1097]. Праці [960, 237, 239] започаткували вживання апріорних співвідношень. Зрозуміло, що такий підхід дає точні значення лише у крайніх випадках (тріщина, абсолютно жорстке включення, механічна еквівалентність матеріалів включення й матриці тощо), а у проміжних випадках допускається існування певних похибок. Уникнути цього недоліку можна за допомогою використання певних додаткових гіпотез, які детальніше розглядаються у пп. 18.4, 19.2, 39.3.

Умови термопружної взаємодії тонкого пружного теплоактивного включення (16.13) придатні для всього діапазону зміни механічних властивостей матеріалу включення. Вони є подальшим узагальненням умов взаємодії [208, 239, 510, 958, 1064, 1097] та еквівалентні за точністю найзагальнішим з рівнянь "проміжного шару" [750, 737] та "пружного тонкого прошарку" [25]. Перевага запропонованих умов також у можливості механічної інтерпретації кожного члена, тобто у визначенні кола врахованих чи відкинутих під час побудови моделі механічних явищ.

## 16.2. Ортотропія та викривленість включення

У роботі [974], виходячи з рівнянь рівноваги вузького елемента включення та низки додаткових припущень, побудовані чотири основні варіанти умов взаємодії для викривлено-

го (радіус кривини  $\rho$ ) тонкого термопружного включення з головними напрямими ортотропії  $s, n, z$  (рис. 16.2) у напрямках дотичної і нормалі до серединної лінії  $L$  включення та нормалі до площини  $sn$ .

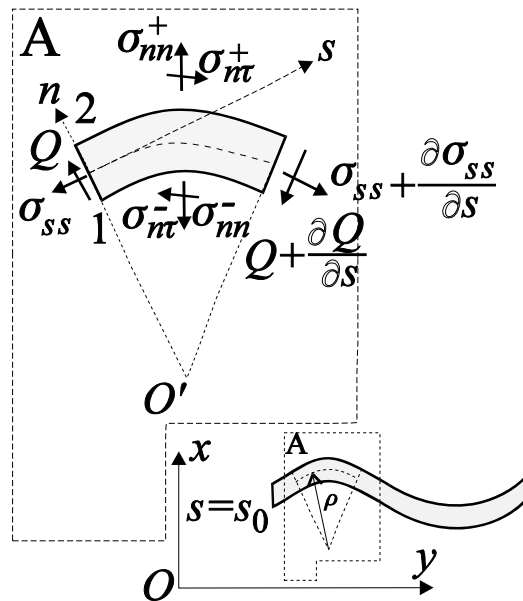


Рис. 16.2. Геометрична схема викривленого тонкого включення

Складаючи рівняння рівноваги вузького елемента включення завдовжки  $ds = \rho d\theta$  і одиничної висоти у напрямі осі  $z$ , що перпендикулярна до площини  $xOy$ , отримуємо

$$\begin{aligned} Q - h\rho(\sigma_{ss}^+ + \sigma_{ss}^-) - \rho(\sigma_{sn}^+ - \sigma_{sn}^-) - h(\sigma_{sn}^+ + \sigma_{sn}^-) &= 0, \\ \rho Q' - \rho(\sigma_{nn}^+ - \sigma_{nn}^-) + h(\sigma_{ss}^+ + \sigma_{ss}^-) - h(\sigma_{nn}^+ + \sigma_{nn}^-) &= 0, \\ Q + \frac{h^2}{3}(\sigma_{ss}^+ - \sigma_{ss}^-) + h(\sigma_{sn}^+ + \sigma_{sn}^-) + \frac{h^2}{\rho}(\sigma_{sn}^+ - \sigma_{sn}^-) &= 0. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Тут  $2h$  – товщина включення;  $Q$  – перерізувальна сила у поперечному перерізі включення; штрихом позначено частинну похідну за  $s$ .

З огляду на ортотропію включення за відповідними формулами узагальненого закону термопружності Дюамеля – Нейбера

$$\varepsilon_{ii} = a_{iiB}\sigma_{ii} - a_{ijB}\sigma_{jj} + \alpha_{iB}(T - T_0), \quad \gamma_{sn} = b_{snB}\sigma_{sn} \quad (i, j = s, n; i \neq j), \quad (16.22)$$

де у випадку плоскої деформації пружні сталі дорівнюють

$$a_{iiB} = \frac{1 - \nu_{izB}\nu_{ziB}}{E_{iB}}, \quad a_{ijB} = a_{jiB} = \frac{\nu_{ijB} + \nu_{izB}\nu_{ziB}}{E_{iB}}, \quad b_{snB} = \frac{1}{G_{snB}}, \quad \alpha_{iB} = \alpha_B(1 + \nu_{ziB});$$

для узагальненого плоского напруженого стану –

$$a_{iiB} = \frac{1}{E_{iB}}, \quad a_{ijB} = a_{jiB} = \frac{\nu_{ijB}}{E_{iB}}, \quad b_{snB} = \frac{1}{G_{snB}}, \quad \alpha_{iB} = \alpha_B,$$

а також  $\alpha_B$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення включення;  $T$  – абсолютна температура включення;  $T_0$  – відлікове (початкове) значення температури;  $E_{iB}, \nu_{ijB}, \nu_{izB}, \nu_{zjB}, G_{snB}$  – пружні сталі включення.

Компоненти деформації визначаються відомими залежностями

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\partial u_n}{\partial n}, \quad \varepsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{\rho}, \quad \gamma_{sn} = \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{\rho}. \quad (16.23)$$

Згідно з формулами Дюамеля – Нейбера, записаними на верхній та нижній поверхнях включення,

$$\varepsilon_{ss}^+ \pm \varepsilon_{ss}^- = a_{ssB} (\sigma_{ss}^+ \pm \sigma_{ss}^-) - a_{nnB} (\sigma_{nn}^+ \pm \sigma_{nn}^-) + \alpha_{sB} [(T_+ - T_0) \pm (T_- - T_0)]; \quad (16.24)$$

$$\varepsilon_{nn}^+ \pm \varepsilon_{nn}^- = a_{nnB} (\sigma_{nn}^+ \pm \sigma_{nn}^-) - a_{ssB} (\sigma_{ss}^+ \pm \sigma_{ss}^-) + \alpha_{nB} [(T_+ - T_0) \pm (T_- - T_0)]; \quad (16.25)$$

$$\gamma_{sn}^+ \pm \gamma_{sn}^- = b_{snB} (\sigma_{sn}^+ \pm \sigma_{sn}^-), \quad (16.26)$$

де внаслідок малої товщини  $2h$  включення виконуються наближені рівності

$$\varepsilon_{nn}^+ + \varepsilon_{nn}^- = \frac{u_n^+ - u_n^-}{h}, \quad \varepsilon_{ss}^+ \pm \varepsilon_{ss}^- = u_s'^+ \pm u_s'^- + \frac{u_n^+ \pm u_n^-}{\rho}, \quad (16.27)$$

$$\gamma_{sn}^+ + \gamma_{sn}^- = \frac{u_s^+ - u_s^-}{h} + u_n'^+ + u_n'^- - \frac{u_s^+ + u_s^-}{\rho}, \quad \gamma_{sn}^+ - \gamma_{sn}^- = u_n'^+ - u_n'^- - \frac{u_s^+ - u_s^-}{\rho}.$$

Після інтегрування другого рівняння рівноваги (16.21) з урахуванням (16.25) і (16.27) запишемо

$$Q = Q_0 + \int_{s_0}^s \left\{ -[\sigma_{nn}]_h + \left\{ \frac{h}{\rho} (1 - a_{nB}) \langle \sigma_{nn} \rangle_h \right\}^* - a_{\rho B} \left\{ [u_n]_h + \alpha_{\rho B} h (\langle T \rangle_h - 2T_0) \right\} \right\} ds,$$

де  $Q_0$  – значення перерізуювальної сили  $Q$  на торці  $s = s_0$ , яке наближено можна вважати нульовим ( $Q_0 = 0$ );

$$a_{\rho B} = \frac{1}{\rho a_{nsB}}, \quad a_{iB} = \frac{a_{iiB}}{a_{ijB}}, \quad b_{iB} = \frac{a_{ssB} a_{nnB} - a_{snB} a_{nsB}}{a_{inB}},$$

$$c_{iB} = \frac{\alpha_{sB} a_{inB} + \alpha_{nB} a_{siB}}{a_{inB}} \quad (i, j = s, n; i \neq j).$$

Якщо з першого і третього рівнянь рівноваги (16.21) виключити  $Q$ , використати поряд із (16.27) рівність (16.24) та знехтувати величиною  $h^2/\rho^2$  порівняно з одиницею, то отримаємо вираз для середнього значення поздовжнього напруження розтягу  $\sigma_{ss}^c$  в поперечному перерізі включення

$$\sigma_{ss}^c = \frac{1}{2} (\sigma_{ss}^+ + \sigma_{ss}^-) = \sigma_{ss}^c(s_0) + \frac{1}{h} \int_{s_0}^s \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{sn}^- - \sigma_{sn}^+) - \frac{h}{\rho} (\sigma_{sn}^+ + \sigma_{sn}^-) \right] ds - \frac{h}{6\rho} (\sigma_{ss}^+ - \sigma_{ss}^-),$$

де

$$\sigma_{ss}^+ - \sigma_{ss}^- = \frac{1}{\alpha_{sB}} (\sigma_{nn}^+ - \sigma_{nn}^-) + \frac{1}{a_{ssB}} (u_s'^+ - u_s'^-) + \frac{1}{\rho a_{ssB}} (u_n^+ - u_n^-) - \frac{\alpha_{sB}}{a_{ssB}} (T_+ - T_0);$$

$\sigma_{ss}^c(s_0)$  – значення  $\sigma_{ss}^c$  у перерізі  $s = s_0$ .

Умови ідеального механічного контакту включення з матрицею мають вигляд

$$u_{i1} = u_i^-, \quad u_{i2} = u_i^+, \quad \sigma_{nn1} = \sigma_{nn}^-, \quad \sigma_{nn2} = \sigma_{nn}^+, \quad \sigma_{sn1} = \sigma_{sn}^-, \quad \sigma_{sn2} = \sigma_{sn}^+ \quad (i = s, n). \quad (16.28)$$

Тепер можна сформулювати чотири варіанти умов взаємодії середовища із включенням.

**Перший варіант**

$$\begin{aligned}
\langle u'_s \rangle_{L'} + \frac{1}{\rho} \langle u_n \rangle_{L'}^* &= 2a_{ssB} \sigma_{ss}^c - a_{snB} \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} + \alpha_{sB} (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0), \\
-\frac{1}{h} [u_n]_{L'} &= a_{nnB} \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} - 2a_{snB} \sigma_{ss}^c + \alpha_{nB} (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0), \\
-\frac{1}{h} [u_s]_{L'} + \left( \langle u'_n \rangle_{L'} - \frac{1}{\rho} \langle u'_s \rangle_{L'}^{**} \right)^{***} &= b_{snB} \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'}, \\
\int_{s_0}^s \left\{ \frac{3}{h} \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'} - \frac{1}{\rho} [\sigma_{sn}]_{L'}^* + \frac{Q}{h^2} \right\} ds + \sigma_{ssB}^+ - \sigma_{ssB}^- &= 0
\end{aligned} \tag{16.29}$$

поряд з

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{s_0}^s \left\{ -[\sigma_{nn}]_{L'} + \left\{ \frac{h}{\rho} (1 - a_{nB}) \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} \right\}^* - a_{\rho B} \left\{ [u_n]_{L'} + \alpha_{\rho B} h (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0) \right\} \right\} ds, \\
\sigma_{ss}^c &= \sigma_{ss}^c(s_0) + \frac{1}{h} \int_{s_0}^s \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{sn}]_{L'} - \frac{h}{\rho} \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'}^* \right\} ds - \frac{h}{6\rho} (\sigma_{ssB}^+ - \sigma_{ssB}^-), \\
-[\sigma_{ssB}]_h &\equiv \sigma_{ssB}^+ - \sigma_{ssB}^- = \frac{1}{a_{sB}} [\sigma_{nn}]_{L'} - \frac{1}{a_{ssB}} [u'_s]_{L'} - \frac{1}{\rho a_{ssB}} [u_n]_{L'}^{**} + \frac{\alpha_{sB}}{a_{ssB}} [T]_{L'}, \\
a_{\rho B} &= \frac{1}{\rho a_{nsB}}, \quad a_{iB} = \frac{a_{iiB}}{a_{ijB}}, \quad b_{iB} = \frac{a_{ssB} a_{nnB} - a_{snB} a_{nsB}}{a_{inB}}, \quad c_{iB} = \frac{\alpha_{sB} a_{inB} + \alpha_{nB} a_{siB}}{a_{inB}} \tag{16.30} \\
&\quad (i, j = s, n; i \neq j),
\end{aligned}$$

причому  $a_{iiB} = (1 - \nu_{iz} \nu_{zi}) / E_{iB}$ ,  $a_{ijB} = a_{jiB} = (\nu_{ijB} + \nu_{izB} \nu_{ziB}) / E_{iB}$ ,  $\alpha_{iB} = \alpha_B (1 + \nu_{ziB})$  для ПД та  $a_{iiB} = 1 / E_{iB}$ ,  $a_{ijB} = a_{jiB} = \nu_{ijB} / E_{iB}$ ,  $\alpha_{iB} = \alpha_B$  для УПНС;  $b_{snB} = 1 / G_{snB}$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення включення;  $T_0$  – температура відлікова;  $E_{iB}$ ,  $\nu_{ijB}$ ,  $\nu_{izB}$ ,  $\nu_{zjB}$ ,  $G_{snB}$  – пружні сталі включення. Зірочки означають, що відзначеними членами за певних обумовлених нижче умов можна знехтувати.

Замість одної з двох перших умов (16.29) зручно взяти співвідношення, отримане виключенням з них значення  $\sigma_{ss}^c$ :

$$\langle u'_s \rangle_{L'} + \frac{1}{\rho} \langle u_n \rangle_{L'}^{**} - \frac{a_{sB}}{\rho} [u_n]_{L'} = b_{sn} \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} + c_{sB} (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0). \tag{16.31}$$

Умови для прямолінійного включення отримуємо при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Можна запропонувати низку спрощень умов взаємодії.

а) Якщо у рівняннях рівноваги за малих  $h/\rho$  не враховувати різниці у довжині ліній контакту елемента включення ліворуч та праворуч, тобто, вважати, що  $h \langle \sigma_{nnB} \rangle_{L'} / \rho$  мале порівняно з  $[\sigma_{nnB}]_{L'}$ , то у (16.29) можна знехтувати членами, відзначеними одною зірочкою.

б) Оскільки  $h/\rho \ll 1$ , то нехтування величинами з множником  $1/\rho$ , рівнозначне відкиданню членів, відзначених двома зірочками.

в) Якщо штивність включення щодо згину мала, то четверта умова з (16.29) набере вигляду

$$Q - \frac{h^2}{\rho} [\sigma_{sn}]_{L'}^* + 3h \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'} = 0. \quad (16.32)$$

г) Для абсолютно гнучкого ниткового включення можна вважати, що

$$[\sigma_{ssB}]_h = 0, Q = 0$$

і не розглядати рівняння рівноваги включення щодо моментів. Тоді замість четвертої умови (16.29) слід взяти вираз

$$-[\sigma_{nn}]_{L'} - \frac{h}{\rho} \int_{s_0}^s \frac{1}{h} [\sigma_{sn}]_{L'} ds + \frac{h}{\rho} \left\{ \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} + \int_{s_0}^s \frac{1}{\rho} \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'} ds - 2\sigma_{sn}^c(s_0) \right\}^* = 0, \quad (16.33)$$

отриманий з першого та другого рівнянь рівноваги після вилучення з них  $\langle \sigma_{ssB} \rangle_h$  та підставлення  $Q = 0$ . Крім того, у третьому рівнянні (16.30) слід знехтувати членом, відзначеним трьома зірочками.

д) Вважаючи товщину включення достатньо малою, включення досить гнучким, нехтуючи поперечними деформаціями та беручи до відома всі попередні припущення, одержуємо гранично спрощені умови взаємодії для малоподатного щодо розтягування, але гнучкого включення

$$[u_n]_{L'} = 0, [u_s]_{L'} = 0, [u_{nn}]_{L'} = 0; \quad (16.34)$$

$$\langle u'_s \rangle_{L'} = 2a_{ssB} \sigma_{ss}^c - a_{snB} \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} + \alpha_{sB} (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0). \quad (16.35)$$

А якщо ще вважати, що нормальні поперечні напруження  $\sigma_{nn}$  не викликають поздовжніх деформацій включення ( $a_{snB} = 0$ ), то замість (16.35) дістанемо ще простішу умову

$$\langle u'_s \rangle_{L'} = 2a_{ssB} \sigma_{ss}^c + \alpha_{sB} (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0), \quad (16.36)$$

де, як і для (16.35),

$$\sigma_{ss}^c = \sigma_{ss}^c(s_0) + \frac{1}{2h} \int_{s_0}^s [\sigma_{sn}]_{L'} ds. \quad (16.37)$$

Співвідношення (16.34) і (16.36) без урахування температури використовуються більшістю дослідників, що вивчають задачі про тонкостінні включення та різні модифікації задачі Рейсснера [1565] щодо витягування стрижня з пружного середовища чи задачі Мелана [1505] про вплив гнучкої накладки на деформування пружної півплощини.

Подібне до (16.36) співвідношення можна отримати з двох перших умов (16.29), якщо з них вилучити  $\langle \sigma_{nn} \rangle$ , прийняти  $\langle \varepsilon_{nnB} \rangle_h = 0$  та вищезгадані спрощення:

$$\langle u'_s \rangle_{L'} = 2b_{nB} \sigma_{ss}^c + c_{nB} (\langle T \rangle_{L'} - 2T_0). \quad (16.38)$$

Така умова поряд з (16.34) використовується Аткінсоном [1156] для ізотропного прямолінійного включення за відсутності нагрівання. У праці [1178] формула (16.38) узагальнюється на випадок неповного контакту включення з матрицею.

К.С.Чобанян і А.С.Хачикян [1097] побудували умови взаємодії гнучкого ортотропного включення без температурних членів з неявним використанням припущень а), б), г), однак до розв'язування задачі у цій та наступних роботах брали лише гранично спрощені умови (16.34), (16.36). У [510] за умови взаємодії прийнято (16.31), третю умову (16.29) та умови  $[\sigma_{nn}]_{L'} = [\sigma_{sn}]_{L'} = 0$ . Подібні, але ще простіші, умови взаємодії використав Г.П.Черепанов [1079] для абсолютно пластичного включення з нестисливого матеріалу. Зазначимо, що у всіх зазначених роботах торцьове зусилля вважається нульовим –

$$\sigma_{ss}^c(s_0) = 0.$$

**Другий варіант.** Для тонкого включення приймемо

$$[\varepsilon_{nnB}]_h = 0. \quad (16.39)$$

Ця умова виконується точно за відсутності згину під час повної силової симетрії задачі. Тоді з (16.24) і (16.25) маємо

$$[u'_s]_{L'} + \frac{1}{\rho}[u_n]_{L'}^{**} = b_{sB}[\sigma_{nn}]_{L'} + c_{sB}[T]_{L'}. \quad (16.40)$$

Ця умова разом з першими трьома з (16.29) формує основний, другий варіант умов взаємодії, який стосовно прямолінійного ізотропного включення використовувався у праці [237] та подальших працях цих авторів.

**Третій варіант.** Використання гіпотези плоских перерізів дає можливість записати умову

$$[u'_n]_{L'} - \frac{1}{\rho}[u_s]_{L'}^{**} = b_{snB}[\sigma_{sn}]_{L'}, \quad (16.41)$$

яка разом з (16.31) та двома останніми з (16.29) дає третій варіант умов взаємодії.

**Четвертий варіант.** Третя формула з (16.29), а також (16.31), (16.40), (16.41) дають у сукупності найпростіший для практичного вжитку четвертий варіант умов взаємодії.

Якщо розглянути гнучке ниткове включення і прийняти

$$E_{sB} = E_{nB} = \infty, \quad T_B^2 = T_B^1 = T_0,$$

то всі чотири варіанти дають відповідні умови: (16.33) та

$$[u_s]_{L'} = [u_n]_{L'} = 0, \quad \langle u'_s \rangle_{L'} + \frac{1}{\rho} \langle u_n \rangle_{L'} = 0. \quad (16.42)$$

Якщо ж  $E_{sB} = E_{nB} = 0$ , то маємо крайові умови для щілини за відсутності контакту берегів

$$\sigma_{nn1} = \sigma_{nn2} = \sigma_{sn1} = \sigma_{sn2} = 0.$$

Очевидно, що розв'язок задачі повинен задовольняти умову

$$[u_n]_{L'} \leq 2h \quad \text{або} \quad u_{nB2} - u_{nB1} \geq -2h, \quad (16.43)$$

яка відображає фізичну неможливість заходження берегів включення один поза другий. Якщо отриманий розв'язок не задовольняє (16.43), то слід змінити постановку задачі: на  $L'$  виділити ділянку  $L'_1$ , де виконується (16.43) та справджуються умови взаємодії обраного варіанту, та  $L'_2$ , де умова

$$[u_n]_{L'} = 2h \quad \text{або} \quad u_{nB2} - u_{nB1} = -2h \quad (16.44)$$

приймається замість другої умови (16.29) у варіантах 1 та 2 та замість (16.31) у варіантах 3,4.

Зазначимо теж, що для отримання умов контактуючої щілини у варіантах 1 та 2 необхідно додатково вважати  $a_{snB} = 0$ , тоді як варіанти 3 й 4 не вимагають додаткових припущень.

Якщо розглянути включення з абсолютно податного, але нестисливого матеріалу (нестисливий плин), то у випадку плоскої деформації дві перші умови (16.29), які використовують у варіантах 1 та 2, збігаються і тоді необхідно залучати додаткову умову. Варіанти 3, 4 цього не вимагають.

Вважаючи модулі пружності включення  $E_{sB}$ ,  $E_{nB}$  ненульовими, але скінченними, і, спрямувавши до нуля значення  $h$ , отримаємо, що варіанти 1, 3 дають умови ідеального механічного контакту

$$[u_n]_{L'} = 0, \quad [u_s]_{L'} = 0, \quad [\sigma_{nn}]_{L'} = 0, \quad [\sigma_{sn}]_{L'} = 0,$$

тоді як варіанти 2 і 4 дають ці умови лише, якщо на берегах безмежно тонкого включення відсутній стрибок температури  $[T]_{L'} = 0$ . Однак це може не виконуватися за відсутності теплопровідності включення.

Підсумовуючи сказане стосовно різних варіантів умов взаємодії, зазначимо, що найточнішим слід вважати 1-й варіант умов взаємодії, менш точним – 3-й варіант. Ще менш точні співвідношення варіантів 2 (найзручніший до вжитку) і 4, оскільки не завжди виконується умова (16.40). Найуніверсальнішим слід вважати варіант 3, бо його використання не вимагає жодних додаткових застережень.

### 16.3. Модель згину включення за Кірхгофом

Модель згину [973] включення за теоріями згину стрижнів і пластин Кірхгофа використовувалася також у праці [1605] для розв'язування задачі термопружності тіла зі стрічковим включенням, коли для осі стрижня виконуються диференціальні співвідношення

$$\frac{du_y}{dx} = \varepsilon_B(x), \quad \frac{d\varepsilon_B}{dx} = -\frac{M(x)}{D}, \quad M(x) = -\int_a^x \xi [\sigma_{yyB}(\xi)]_h d\xi + M(a), \quad (16.45)$$

де  $\varepsilon_B(x)$  – кут повороту осі включення у точці  $x$ ;  $M(x)$  – момент зусиль, прикладених до елемента  $[a, x]$  включення з боку матриці;  $D$  – згинальна штивність ( $D = 2E_B h^3/3$  під час застосування до включення моделі згину стрижнів;  $D = 2E_B h^3 / [3(1 - \nu_B^2)]$  для моделі згину пластин).

Використання тонкості включення дає з огляду на (16.45)

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{du_y}{dx} \right\rangle_{L'} = \frac{1}{D} \int_a^x \left( \int_a^t \xi [\sigma_{yy}(\xi)]_{L'} d\xi - M(a) \right) dt + \varepsilon_B(a) \quad (16.46)$$

– умову взаємодії, якою можна користуватися замість (16.40) у другому варіанті умов (разом з першими трьома з (16.29) вона формуватиме модель Кірхгофа). Використання моделі Кірхгофа обумовлює використання додаткових умов (16.16)–(16.19).

### 16.4. Стисливе рідинне включення

Розглянемо включення зі стислової краплинної рідини уздовж лінії  $L' = [a; b]$ . Для нерухомої рідини всередині порожнини тиск  $p$  є сталим –  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p$  і  $\sigma_{xy} = 0$ . Якщо позначити індексами "–", "+" напруження та переміщення поверхні рідини на нижньому та верхньому краях порожнини, то

$$\sigma_{yy}^- - \sigma_{yy}^+ = 0, \quad \sigma_{xy}^- + \sigma_{xy}^+ = 0, \quad \sigma_{xy}^- - \sigma_{xy}^+ = 0; \quad (16.47)$$

$$\sigma_{yy}^- + \sigma_{yy}^+ = -2p. \quad (16.48)$$

Для краплинної рідини, яка стискується за законом Гука, рівняння стану, що ілюструють залежність густини  $\rho$  рідини від тиску, визначається співвідношенням

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp \left[ \frac{p - p_0}{B} \right],$$

де  $B = 1/\beta$  – модуль пружності рідини;  $\beta$  – коефіцієнт об'ємного стиску рідини;  $p_0$ ,  $\rho_0$  – тиск і густина рідини до моменту прикладання зусиль.

Оскільки  $\beta(p - p_0) \ll 1$ , то з точністю до двох перших членів розвинення в ряд Тейлора наближено можна записати



$$\rho \approx \rho_0 [1 + \beta(p - p_0)].$$

Враховуючи, що маса (об'єм) включення під час деформування не змінюється  $\rho_0 F_0 = \rho F$  ( $F_0, F$  – площа перерізу порожнини за тиску  $p_0$  та  $p$  відповідно), звідси знаходимо

$$p = p_0 - \frac{B(F - F_0)}{F_0 [1 + (F - F_0)/F_0]}. \quad (16.49)$$

Тут  $F - F_0$  еквівалентне приростові об'єму порожнини після прикладання зусиль (у випадку плоскої деформації товщина тіла вважається одиничною). Підставляючи вираз (16.49) у (16.48), отримуємо

$$\sigma_{yy}^- + \sigma_{yy}^+ = -2 \left[ p_0 - \frac{BV}{1+V} \right], \quad (16.50)$$

де об'єм обчислюється за допомогою формули

$$V = \frac{1}{F_0} \int_{-a}^a [u_{yB}^+(\xi) - u_{yB}^-(\xi)] d\xi.$$

Вважаючи контакт між матрицею та рідиною ідеальним, запишемо умови взаємодії так:

$$[\sigma_{nn}]_{L'} = 0, [\sigma_{sn}]_{L'} = 0, \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'} = 0, \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} = -2 \left( p_0 - \frac{BV}{1+V} \right), V = \frac{1}{F_0} \int_a^b [u_n]_{L'} d\xi. \quad (16.51)$$

Якщо у знаменнику правої частини співвідношення (16.49) прийняти  $(F - F_0)/F_0 \ll 1$  (вважається, що зміна початкового об'єму є невеликою), то умови взаємодії (16.51) набудуть простішого вигляду

$$[\sigma_{nn}]_{L'} = 0, [\sigma_{sn}]_{L'} = 0, \langle \sigma_{sn} \rangle_{L'} = 0, \langle \sigma_{nn} \rangle_{L'} = -2(p_0 - BV), V = \frac{1}{F_0} \int_a^b [u_n]_{L'} d\xi. \quad (16.52)$$

## РОЗДІЛ IV

### ПЛОСКЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ЗІ СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ТЕПЛОАКТИВНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

#### § 17. Постановка задачі

Розглядається температурне поле двох злучених півплощин  $S_k$  ( $k=1,2$ ) з коефіцієнтами теплопровідності  $\lambda_k$  (рис. 17.1). Лінія  $-L=L' \cup L''$  поділу матеріалів є віссю абсцис системи координат  $xOy$ . Уздовж  $L' = \bigcup_{n=1}^N L'_n$  локалізовані  $N$  симетричних теплоактивних включень малої ширини  $2h(x)$  з коефіцієнтами теплопровідності  $\lambda_{Bn}$ . На нескінченності діє тепловий потік  $q^\infty = q_{xk}^\infty + iq_y^\infty$ , у точках  $z_{*k} = x_{*k} + iy_{*k} \in S_k$  – джерела тепла  $q_k$  та теплові диполі  $q_{kk}$  з орієнтацією  $\theta_k$ . Між матрицею та включеннями є ідеальний або неідеальний тепловий контакт, між півплощинами – ідеальний; з області включень виділяється тепло  $Q = \sum_{n=1}^N Q_n$ ;  $Q_n = 2h \int_{L'_n} Q_0^c(\xi) d\xi$  – відплив тепла з  $n$ -го включення.

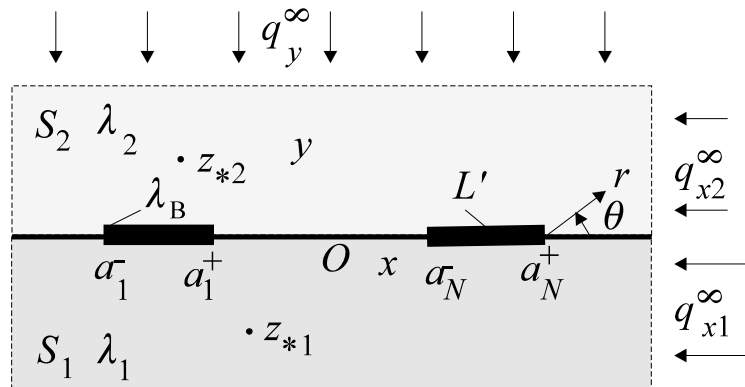


Рис. 17.1. Схема задачі теплопровідності кусково-однорідної пластини з тонкими включеннями на межі поділу матеріалів

Внаслідок лінійності задачі температурне поле  $T$  подамо у вигляді суперпозиції основного  $t^0(z)$  та збуреного  $\hat{t}(z)$  (14.16) –  $T = t^0(z) + \hat{t}(z)$ . Через ідеальність контакту між півплощинами

$$\begin{aligned} [T]_{L''} &= 0, [\lambda \partial T / \partial y]_{L''} = 0; \\ [t^0]_{L'} &= 0, [\lambda \partial t^0 / \partial y]_{L'} = 0 \quad ([f]_{L'} \equiv f^-(x) - f^+(x), x \in L'). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Припущення малої товщини включення дає змогу моделювати його стрибком температури і теплового потоку на  $L'$ :

$$\left[ \frac{\partial \hat{t}}{\partial x} - i\lambda \frac{\partial \hat{t}}{\partial y} \right]_L = f_3(x) - if_6(x) \quad (x \in L'; f_r(x) = 0 \quad (r = 3, 6), \text{ коли } x \in L''). \quad (17.2)$$

Урахування тепловіддачі з бічних поверхонь пластинки передбачає введення у розгляд товщини  $2\delta$  пластинок та включень, їхніх коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha_k$ ,  $\alpha_{Bn}$ , температури довкілля  $T_C$ , припущення про симетричність стосовно серединної площини пластинки дії усіх температурних чинників.

## § 18. Відсутність тепловіддачі з бічних поверхонь пластин

### 18.1. Реалізація методу функцій стрибка

За відсутності тепловіддачі з бічних поверхонь температурне поле є гармонійною функцією і його можна подати у вигляді дійсної частини аналітичної функції – потенціалу температурного поля:

$$T(z) = \operatorname{Re} \Phi_T(z); \quad (18.1)$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial x} = \operatorname{Re} \mathfrak{F}(z), \quad \frac{\partial T(z)}{\partial y} = -\operatorname{Im} \mathfrak{F}(z), \quad \Phi_T'(z) = \mathfrak{F}(z). \quad (18.2)$$

Зіставивши (14.16) та (18.2), матимемо

$$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}^0(z) + \hat{\mathfrak{F}}(z), \quad \Phi_T(z) = \Phi_T^0(z) + \hat{\Phi}_T(z), \quad (18.3)$$

де згідно з [690, 691, 733]

$$\begin{aligned} \Phi_T^0(z) = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi q^\infty}{\lambda_k} z + D_{k1}(z) + D_{k2}(z) + (p_k - p_j) \{ \bar{D}_{k1}(z) + \bar{D}_{k2}(z) \} + \right. \\ & \left. + 2p_j \{ D_{j1}(z) + D_{j2}(z) \} + \Phi_T^\infty \right\}, \quad D_{k1}(z) = \frac{q_k}{\lambda_k} \ln(z - z_{*k}), \quad D_{k2}(z) = -\frac{q_{kk}}{\lambda_k} \frac{\exp(i\theta_k)}{z - z_{*k}}, \quad (18.4) \\ p_k = p\lambda_k, \quad p = & \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad c = p_k \lambda_j = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \Phi_T^\infty = \operatorname{const} \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned}$$

Стала  $\Phi_T^\infty$  – довільна.

З умови (17.1) при  $|x| \rightarrow \infty$  отримуємо додатковий зв'язок між потоками тепла на нескінченності і теплофізичними сталими півплощин

$$\lambda_2 q_{x1}^\infty = \lambda_1 q_{x2}^\infty. \quad (18.5)$$

Використовуючи (18.2), (18.3), з (17.2) маємо дві задачі Рімана–Гільберта

$$\begin{aligned} \left\{ \lambda_2 \hat{\mathfrak{F}}^+(x) + \lambda_1 \overline{\hat{\mathfrak{F}}^-(x)} \right\} - \left\{ \lambda_1 \hat{\mathfrak{F}}^-(x) + \lambda_2 \overline{\hat{\mathfrak{F}}^+(x)} \right\} &= 2if_6(x), \\ \left\{ \hat{\mathfrak{F}}^+(x) - \overline{\hat{\mathfrak{F}}^-(x)} \right\} - \left\{ \hat{\mathfrak{F}}^-(x) - \overline{\hat{\mathfrak{F}}^+(x)} \right\} &= -2f_3(x) \quad (x \in L), \end{aligned} \quad (18.6)$$

розв'язок яких має вигляд [171]

$$\hat{\mathfrak{F}}(z) = -2p_j H_3(z) + 2ip H_6(z) \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k) \quad (18.7)$$

і, отже, зі залученням до  $\Phi_T^\infty$  додаткової довільної сталої

$$\hat{\Phi}_T(x) = 2p_j \tilde{H}_3(z) - 2ip \tilde{H}_6(z) \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k). \quad (18.8)$$

Тут і надалі у цьому розділі

$$\begin{aligned} \{H_r(z), \tilde{H}_r(z)\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \left\{ \frac{1}{\xi - z}, \ln(\xi - z) \right\} f_r(\xi) d\xi, \\ \{t_r(x), l_r(x)\} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \frac{1}{\xi - x}, \ln|\xi - x| \right\} f_r(\xi) d\xi, \\ \tilde{f}_r(x) &= \int f_r(t) dt. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Таким чином, внаслідок (18.1), (18.3), (18.4) та (18.8) знайдене подання температурного поля у довільній точці матриці через невідомі функції стрибка  $f_r$  ( $r = 3, 6$ ).

На основі формул Сохоцького – Племеля [171, 635, 112] з (18.7), (18.8) з урахуванням (14.16) ( $T(x, y) = t^0(x, y) + \hat{t}(x, y)$ ), (18.1), (18.2) отримуються граничні значення збуреної  $\hat{t}(x, y)$  частини температури та її похідних на лінії поділу ( $\hat{t}(x, 0) \sim \hat{t}(x)$ )

$$\begin{aligned} \hat{t}^\pm(x) &= \mp p_j \tilde{f}_3(x) - pl_6(x), \quad \frac{\partial}{\partial x} \hat{t}^\pm(x) = \mp p_j f_3(x) - pt_6(x), \\ \frac{\partial}{\partial y} \hat{t}^\pm(x) &= \mp pf_6(x) - p_j t_3(x), \quad j = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (x \in L'). \end{aligned} \quad (18.10)$$

Згідно з виразом у фігурних дужках верхній знак відповідає значенню  $j = 1$ ; нижній –  $j = 2$ .

Для обмеженості та однозначності на нескінченності поля температур від зосереджених чинників необхідне виконання умови

$$\int_{L'} f_6(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 q_k = 0, \quad (18.11)$$

що впливає з (18.4) та (18.8). Зіставлення (18.11) з умовою балансу тепла в області кожного включення (14.20) вказує, що для обмеженості й однозначності температурного поля на нескінченності необхідне виконання умови загального балансу тепла у середовищі (вона ж є наслідком стаціонарності задачі):

$$Q + \sum_{k=1}^2 q_k + \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{Q}_x(a_n^+) - \hat{Q}_x(a_n^-) \right\} = 0. \quad (18.12)$$

**Зауваження.** Присутність у (18.12) третього доданка пояснюється тим, що теплоактивне включення є об'ємним джерелом тепла [446], який для матриці можна моделювати лінією поділу з розподіленими на ній точковими джерелами тепла. У цьому контексті подання (18.7), (18.8) потенціалів  $\mathfrak{Z}(z)$ ,  $\Phi_T(z)$  не враховує розподілу джерел тепла на торцьових поверхнях включень. Якщо розглядати деяку торцьову поверхню  $B_w$ , якій відповідає вертикальний відрізок  $[-h(w); h(w)]$ ,  $w = \{a_n^-, a_n^+\}$  у матриці без включень, то через  $B_w$  проходить така кількість тепла:

$$Q_x^0(w) = \pm \int_{-h}^0 \lambda_1 \frac{\partial t^0(w+iy)}{\partial x} dy \pm \int_0^h \lambda_2 \frac{\partial t^0(w+iy)}{\partial x} dy, \quad (18.13)$$

де знаки "+", "-" – характеризують напрям теплопередачі. У матриці з включеннями внаслідок різних теплофізичних властивостей матеріалів та теплової активності включення (виникає збурене поле  $\hat{t}$ ) через  $B_w$  додатково поглинається з матриці ще певна кількість тепла:

$$\hat{Q}_x(w) = \pm \int_{-h}^0 \lambda_1 \frac{\partial \hat{t}(w+iy)}{\partial x} dy \pm \int_0^h \lambda_2 \frac{\partial \hat{t}(w+iy)}{\partial x} dy \quad (w = a_n^\pm). \quad (18.14)$$

Отже потенціал збуреного температурного поля  $\hat{\Phi}_T(z)$  повинен містити додаткові члени

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_T(z) = & 2p_j \tilde{H}_3(z) - 2ip \tilde{H}_6(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \left\{ p_1 \int_{-h}^0 \left[ \frac{\partial \hat{t}(a_n^+ + iy)}{\partial x} \ln(z - a_n^+ - iy) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \hat{t}(a_n^- + iy)}{\partial x} \ln(z - a_n^- - iy) \right] dy + p_2 \int_0^h \left[ \frac{\partial \hat{t}(a_n^+ + iy)}{\partial x} \ln(z - a_n^+ - iy) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \hat{t}(a_n^- + iy)}{\partial x} \ln(z - a_n^- - iy) \right] dy \right\} \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k) \end{aligned} \quad (18.15)$$

і умова (18.11) обмеженості та однозначності температурного поля на нескінченності зведеться до

$$\int_{L'} f_6(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 q_k + \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{Q}_x(a_n^+) - \hat{Q}_x(a_n^-) \right\} = 0. \quad (18.16)$$

Відповідно, загальний баланс тепла у середовищі запишеться

$$Q + \sum_{k=1}^2 q_k = 0. \quad (18.17)$$

Однак практичне використання подання (18.15) недоцільне через малість величини додаткових членів. Окрім того, потоки тепла через торці включення  $\hat{Q}_x(w)$  можуть бути враховані рівняннями моделі (14.13), (14.20). ■

## 18.2. Побудова системи інтегральних рівнянь задачі

Підставляючи співвідношення (18.10) в умови взаємодії (14.18), отримуємо систему двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) для визначення функцій стрибка  $f_r$  ( $r = 3, 6$ )

$$\begin{aligned} \rho_{31} t_3(x) + \rho_{32} s_{3n}(x) + \rho_{33} f_6(x) &= F_5(x), \\ \rho_{61} t_6(x) + \rho_{62} t'_3(x) + \rho_{63} s_{6n}(x) + \rho_{64} f_3(x) + \rho_{65} f'_6(x) &= F_6(x) \end{aligned} \quad (18.18)$$

$$(x \in L'_n; n = \overline{1, N}),$$

де позначено

$$\begin{aligned} \rho_{31} &= -2c \left( h + \lambda_B \alpha_y^+ \right), \quad \rho_{33} = \lambda_B \alpha_y^- - (p_2 - p_1) \left( h + \lambda_B \alpha_y^+ \right), \\ \rho_{32} &= \lambda_B, \quad \rho_{61} = 2\lambda_B p h, \quad \rho_{62} = -2c \lambda_B \alpha_y^- h, \quad \rho_{63} = -1, \quad \rho_{64} = \lambda_B (p_2 - p_1) h, \\ \rho_{65} &= \lambda_B h \left( \alpha_y^+ - (p_2 - p_1) \alpha_y^- \right), \quad s_{rn}(x) = \int_{a_n^-}^x f_r(\xi) d\xi, \quad \alpha_y^\pm = \frac{\alpha_{y2} \pm \alpha_{y1}}{2\alpha_{y1}\alpha_{y2}}; \end{aligned}$$

$\alpha_{y1}, \alpha_{y2}$  – коефіцієнти тепловіддачі між матрицею і включенням або величини, обернені до коефіцієнтів термоопору; функції  $F_5(x), F_6(x)$  – визначені виразами (14.18) без урахування підкреслених суцільною лінією членів.

Функції  $f_r(x)$  задовольняють додатковим умовам

$$\begin{aligned} \int_{L'_n} f_r(\xi) d\xi &= Q_n^r \quad (n=1\dots N; r=3,6), \\ Q_n^3 &= 0, \quad Q_n^6 = \hat{Q}_x(a_n^+) - \hat{Q}_x(a_n^-) + Q_n. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Перша з них (для  $r=3$ ) визначає неперервність температурного поля; друга ( $r=6$ ) – впливає з балансу тепла.

**Теплоізольоване включення.** Випадок теплоізольованого включення (ТІВ) впливає з (18.18) або при  $\alpha_{y1} = \alpha_{y2} = 0$  або при  $\lambda_B = 0$ . В результаті маємо вираз для  $f_6(x)$  та сингулярне інтегральне рівняння

$$f_6(x) = - \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h, \quad t_3(x) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2} f_6(x) = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}), \quad (18.20)$$

яке має замкнутий розв'язок [635]

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{-1}{\pi \sqrt{(a_n^+ - x)(x - a_n^-)}} \left\{ \int_{L'_n} \frac{\sqrt{(a_n^+ - \xi)(\xi - a_n^-)}}{\xi - x} \left\langle \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h d\xi - Q_n^3 \right\}, \\ f_6(x) &= - \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (18.21)$$

**Абсолютно теплопровідне включення.** Вважаючи у (18.18)  $\alpha_{y1} = \alpha_{y2} = \alpha_y$  і переходячи до границі  $\lambda_B \rightarrow \infty$ , отримаємо варіант абсолютно теплопровідного включення (АТПВ):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3(x) + \frac{1}{\alpha_y} f_6(x) &= - \left[ t^0 \right]_h - \frac{1}{\alpha_y} \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h, \quad 2pt_6(x) + (p_2 - p_1) f_3(x) + \frac{c}{\alpha_y} \frac{\partial}{\partial x} \{ 2t_3(x) - \\ &- (p_2 - p_1) f_6(x) \} = - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left\langle t^0 \right\rangle_h + \frac{1}{\alpha_y} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h \right\} \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (18.22)$$

Звідси впливають умови неідеального контакту півплощин уздовж  $L'$

$$\left[ T \right]_h + \frac{1}{\alpha_y} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \langle T \rangle_h + \frac{1}{\alpha_y} \left\langle \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_h \right\} = 0. \quad (18.23)$$

Аналогічна задача вивчалася у [396].

**Однорідна матриця.** Коли  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\alpha_{y1} = \alpha_{y2} = \alpha_y$ , то з (18.18) отримуємо систему рівнянь для включень в однорідній матриці

$$\begin{aligned} -\lambda \left\{ h + \lambda_B / \alpha_y \right\} t_3(x) + \lambda_B s_{3n}(x) &= F_5(x), \\ \left\{ \lambda_B h / \lambda \right\} t_6(x) + \left\{ \lambda_B h / \alpha_y \right\} f'_6(x) - s_{6n} &= F_6(x) \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (18.24)$$

**Ідеальний тепловий контакт включення з матрицею.** Переходячи у (18.18) до границі  $\alpha_{yk} \rightarrow \infty$  ( $k = 1, 2$ ), отримаємо рівняння, які відповідають ідеальному тепловому контакту включення на межі поділу матеріалів

$$\begin{aligned} \rho_{31} t_3(x) + \rho_{32} s_{3n}(x) + \rho_{33} f_6(x) &= F_5(x), \\ \rho_{61} t_6(x) + \rho_{63} s_{6n}(x) + \rho_{64} f_3(x) &= F_6(x) \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (18.25)$$

де тепер

$$\rho_{31} = -2ch, \quad \rho_{32} = \lambda_B, \quad \rho_{33} = -(p_2 - p_1)h, \quad \rho_{61} = 2\lambda_B ph, \quad \rho_{63} = -1, \quad \rho_{64} = \lambda_B (p_2 - p_1)h.$$

### 18.3. Теплові потоки біля вістря тонкого включення

Розглянемо випадок ідеального теплового контакту включення з матрицею. Аналіз системи сингулярних інтегральних рівнянь (18.25) за методикою розд. I (§ 3) дає можливість стверджувати, що функції стрибка  $f_3$ ,  $f_6$  можуть бути подані у вигляді

$$\begin{aligned} f_3^m(x) &= \frac{q}{a\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)), \quad f_6^m(x) = \frac{q}{a} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \\ \varphi_k(x) &= \left( a_m^+ - x \right)^{-1/2 \pm \eta} \left( x - a_m^- \right)^{-1/2 \mp \eta} \varphi_k^*(x), \quad k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (18.26)$$

де  $2a = a_m^+ - a_m^-$ ,  $\varphi_k^*(x)$  – безрозмірні регулярні функції,  $q$  – інтенсивність теплового навантаження задачі, величина  $\eta$  визначається характеристичною частиною системи сингулярних інтегральних рівнянь (18.25) [636] і дорівнює

$$\eta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2\lambda_1}}.$$

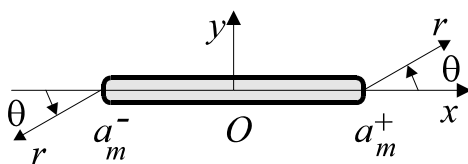


Рис. 18.1. Локальна полярна система координат біля вістря включення

Введемо полярну систему координат  $(r, \theta)$  з початком біля правого або лівого краю включення [993] (рис. 18.1)

$$z = \pm \left( z_1 + a_m^\pm \right), \quad z_1 = r \cdot \exp^{i\theta}, \quad (18.27)$$

і у малому околі торців  $(|z_1| \ll a_m^+ - a_m^-)$  з урахуванням (18.26), (14.16), (18.7) – (18.9) отримаємо для градієнтів температури в околі вістря дефекту двочленні асимптотичні залежності

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}(T-T^0) \\ \frac{\partial}{\partial y}(T-T^0) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi\lambda_1\lambda_2}} \left[ \left( \frac{r}{2a} \right)^{-\frac{1}{2}\pm\eta} k_1^\pm M^\mp(-1) + \left( \frac{r}{2a} \right)^{-\frac{1}{2}\mp\eta} k_2^\pm M^\pm(1) \right] + \frac{pq}{a} \left\{ \begin{array}{l} N_6^\pm \\ -\frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} N_3^\pm \end{array} \right\} +$$

$$+ O\left(r^{\frac{1}{2}\mp\eta}\right), \quad M^\mp(w) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \sin \theta^\mp + w \cos \theta^\mp \\ w \sin \theta^\mp + \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \cos \theta^\mp \end{array} \right\}, \quad \theta^\mp = \frac{\theta}{2} \mp \eta\theta, \quad z \in S_k \quad (k=1,2; j=3-k),$$

$$N_w^\pm = \lim_{x \rightarrow a_m^\pm \mp 0} \left[ t_w^m(x) + tg\pi\eta \cdot f_{9-w}^m(x) \right] = \frac{1}{2 \cos \pi\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2} \mp \eta\right)}{(n-1)! \Gamma\left(\frac{3}{2} \mp \eta\right)} A_n^w, \quad (w=3,6); \quad (18.28)$$

$$A_n^w = \begin{cases} A_n^1 - A_n^2, & w=6 \\ A_n^1 + A_n^2, & w=3 \end{cases}, \quad \text{якщо} \quad \varphi_m^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m P_n^{-\frac{1}{2}\pm\eta, -\frac{1}{2}\mp\eta}(x),$$

$k_1^\pm, k_2^\pm$  – коефіцієнти інтенсивності градієнтів температурного поля (КІГТП), які вводяться із співвідношень

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0, \\ \theta=0}} 2\sqrt{\pi a \lambda_1 \lambda_2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x}(a_m^\pm) - i \frac{\partial T}{\partial y}(a_m^\pm) \right\} = \left( \frac{r}{2a} \right)^{-\frac{1}{2}\pm\eta} L_j(-1) k_1^\pm + \left( \frac{r}{2a} \right)^{-\frac{1}{2}\mp\eta} L_j(1) k_2^\pm,$$

$$k_m^\pm = \frac{q\sqrt{\pi\lambda_1\lambda_2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{a} \cos \pi\eta} \varphi_m^*(\pm 1), \quad L_j(w) = \left( w - i \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \right), \quad z \in S_k \quad (k=1,2; j=3-k), \quad (18.29)$$

Коефіцієнти  $N_w^\pm$  характеризують другі члени асимптотичних залежностей і, як виявляється, у граничних випадках ТІВ й АТІВ вони визначаються лише однорідним розв'язком задачі.

Якщо матеріали півплощин теплофізично еквівалентні ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) або якщо міжфазне включення не проводить тепла (теплоізольоване) чи абсолютно теплопровідне, то особливість розв'язку коренева ( $\eta=0$ ), КІГТП мають координатну спрямованість:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0, \\ \theta=0}} 2\lambda\sqrt{\pi a} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x}(a_m^\pm) - i \frac{\partial T}{\partial y}(a_m^\pm) \right\} = \left( \frac{r}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \left( k_x^\pm - i k_y^\pm \right), \quad \left( k_x^\pm = k_2^\pm - k_1^\pm, k_y^\pm = k_2^\pm + k_1^\pm \right).$$

і побудовані асимптотики дещо спрощуються:

**Теплоізольоване включення.** Система сингулярних інтегральних рівнянь і її розв'язок у випадку теплоізольованого включення (ТІВ) мають вигляд (18.20) та (18.21) відповідно, КІГТП біля  $m$ -го включення –

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = -\frac{c}{\sqrt{\pi a}} \int_{a_m^-}^{a_m^+} \sqrt{\frac{a_m^+ \pm \xi}{a_m^+ \mp \xi}} \left\langle \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle d\xi \quad (2a = a_m^+ - a_m^-). \quad (18.30)$$



**Абсолютно теплопровідне включення.** Для абсолютно теплопровідного включення (АТПВ) слід або у (18.25) перейти до границі  $\lambda_B \rightarrow \infty$  або у (18.22) до границі  $\alpha_{yk} \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\tilde{f}_3(x) = -[t^0]_h, \quad 2pt_6(x) + (p_2 - p_1)f_3(x) + \frac{\partial}{\partial x} \langle t^0 \rangle_h = 0 \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}), \quad (18.31)$$

або, приймаючи до відома (18.10) і передумови побудови умов взаємодії (14.18), у дещо іншому вигляді:

$$[T]_h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle T \rangle_h = 0 \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}). \quad (18.32)$$

Це свідчить, що  $T = \text{const}$  у всій області, зайнятій включенням. Система сингулярних інтегральних рівнянь (18.27) має замкнутий розв'язок

$$f_6(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(a_m^+ - x)(x - a_m^-)}} \left\{ \int_{L'_m} \frac{\pi \sqrt{(a_m^+ - \xi)(\xi - a_m^-)}}{\xi - x} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial x} \right\rangle_h d\xi - Q_m^6 \right\}, \quad (18.33)$$

$$f_3(x) = -\frac{\partial}{\partial x} [t^0]_h \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}).$$

Значення КІГТП у цьому випадку такі:

$$k_y^\pm = 0, \quad k_x^\pm = -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\sqrt{\pi a} (\lambda_1 + \lambda_2)} \left\{ \int_{a_m^-}^{a_m^+} \frac{\sqrt{a_m^\pm \pm \xi}}{\sqrt{a_m^\pm \mp \xi}} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial x} \right\rangle_h d\xi \pm Q_m^6 \right\}. \quad (18.34)$$

**Матеріали півплощин однакові.** За ідеального контакту однорідної пластини ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\eta = 0$ ) з включенням вирази (18.28), (18.29) для градієнтів дають такі асимптотичні вирази для потоків тепла:

$$\begin{cases} q_x - q_x^0 \\ q_y - q_y^0 \end{cases} = -\frac{k_x^\pm}{\lambda \sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} - \frac{k_y^\pm}{\lambda \sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} + \frac{q}{4a\lambda} \begin{cases} n_6^\pm \\ -n_3^\pm \end{cases} + O(\sqrt{r}), \quad (18.35)$$

$$\lambda(T - T_0) = \pm \sqrt{2r/\pi} \left( k_y^\pm \sin \frac{\theta}{2} + k_x^\pm \cos \frac{\theta}{2} \right) + [n_6^\pm (a + r \cos \theta) - n_3^\pm r \sin \theta] + O(r^{3/2});$$

$$k_x^\pm - ik_y^\pm = \frac{q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} [-\varphi_6(a_m^\pm) - i\varphi_3(a_m^\pm)] = \frac{1}{\lambda} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{(\theta=0, \pi)} [\sqrt{2\pi r} (q_x - iq_y)], \quad (18.36)$$

$$n_w^\pm = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a_m^\pm \mp 0} t_w^m(x), \quad (w = 3, 6).$$

У полярній системі координат асимптотики набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} q_r - q_r^0 \\ q_\theta - q_\theta^0 \end{cases} = \frac{\pm k_y^\pm}{\lambda \sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \pm \frac{k_x^\pm}{\lambda \sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{cases} + \begin{cases} n_6^\pm \cos \theta - n_3^\pm \sin \theta \\ -n_6^\pm \sin \theta - n_3^\pm \cos \theta \end{cases} + O(\sqrt{r}). \quad (18.35)$$

**Теплофізично еквівалентні матеріали.** У випадку ідентичності усіх трьох складових слід у (18.25) вважати ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_B = \lambda$ ) і зауваживши, що основне температурне поле  $t^0$  задовольняє рівняння теплопровідності (13.5), з урахуванням допущень, використаних під час побудови умов взаємодії (14.18), отримаємо  $F_5(x) = F_6(x) = 0$ . Отже внаслідок єдиності розв'язку збурене поле відсутнє (функції стрибка дорівнюють нулю):

$$f_3(x) = f_6(x) = 0 \quad (x \in L). \quad (18.37)$$

#### 18.4. Визначення торцевих потоків тепла

В отриманій системі сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (18.18) з додатковими умовами (18.19) та у її частинних випадках (18.24), (18.25) у правих частинах фігурують наперед невідомі ТПТ. Переважно їх або не беруть до відома [446, 706, 860, 861] або визначають апріорними виразами, що точно задовольняють лише граничним виразам [734, 955, 208] (14.23).

Для усунення певної довільності торцевих сталих для проміжних значень теплофізичних параметрів розглянемо ще один спосіб, який дає змогу дати обґрунтованіші значення цих сталих. Обмежимося випадком ідеального контакту матриці з торцем включення, коли

$$Q_x(w_n) = \int_{-h(w_n)}^0 \lambda_1 \frac{\partial T(w_n, y)}{\partial x} dy + \int_0^{h(w_n)} \lambda_2 \frac{\partial T(w_n, y)}{\partial x} dy, \quad w_n = \begin{Bmatrix} a_n^- \\ a_n^+ \end{Bmatrix}. \quad (18.38)$$

Якщо у (18.38) врахувати розбиття (14.16), то аналогічно до нього

$$Q_x(w_n) = Q_x^0(w_n) + \hat{Q}_x(w_n)$$

і тому

$$Q_x^0(w_n) = \int_{-h(w_n)}^0 \lambda_1 \frac{\partial t^0(w_n, y)}{\partial x} dy + \int_0^{h(w_n)} \lambda_2 \frac{\partial t^0(w_n, y)}{\partial x} dy; \quad (18.39)$$

$$\hat{Q}_x(w_n) = \int_{-h(w_n)}^0 \lambda_1 \frac{\partial \hat{t}(w_n, y)}{\partial x} dy + \int_0^{h(w_n)} \lambda_2 \frac{\partial \hat{t}(w_n, y)}{\partial x} dy. \quad (18.40)$$

Для обчислення інтегралів у (18.40) використаємо подання (18.2), (18.7)

$$\begin{aligned} \hat{Q}_x(w_n) &= \operatorname{Re} \left\{ \lambda_1 \int_{-h}^0 \hat{\mathfrak{Z}}(w_n + iy) dy + \lambda_2 \int_0^h \hat{\mathfrak{Z}}(w_n + iy) dy \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \lambda_1 \int_{-h}^0 [-2p_2 H_3(w_n + iy) + \right. \\ &\quad \left. + 2ipH_6(w_n + iy)] dy + \lambda_2 \int_0^h [-2p_1 H_3(w_n + iy) + 2ipH_6(w_n + iy)] dy \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{ic}{\pi} \int_{L'} f_3(\xi) \left[ \int_{-h}^0 \frac{dy}{\xi - w_n - iy} + \int_0^h \frac{dy}{\xi - w_n - iy} \right] d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{L'} f_6(\xi) \left[ p_1 \int_{-h}^0 \frac{dy}{\xi - w_n - iy} + p_2 \int_0^h \frac{dy}{\xi - w_n - iy} \right] d\xi \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{2ic}{\pi} \int_{L'} f_3(\xi) \operatorname{arctg} \frac{h(w_n)}{\xi - w_n} + \frac{1}{\pi} \int_{L'} f_6(\xi) \left[ \operatorname{arctg} \frac{h(w_n)}{\xi - w_n} + \right. \right. \\
&\left. \left. + i(p_2 - p_1) \ln \sqrt{1 + \frac{h^2(w_n)}{(\xi - w_n)^2}} \right] d\xi \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{L'} f_6(\xi) \operatorname{arctg} \frac{h(w_n)}{\xi - w_n} d\xi.
\end{aligned} \tag{18.41}$$

Таким чином, невідомий ТПТ вдалося пов'язати з функцією стрибка  $f_6$ . Зазначимо і те, що у цю залежність теплофізичні параметри явно не входять, хоча, звісно, слід мати на увазі опосередковану залежність від них функцій стрибка.

### 18.5. Одне включення в однорідній матриці

Для одного включення уздовж  $L' = [-a; a]$  ( $N = 1, a_1^\pm = \pm a$ ) у однорідній матриці ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ), переходячи до безрозмірних величин

$$\psi_3(x/a) = \frac{\lambda a}{q} f_3(x), \quad \psi_6(x/a) = \frac{a}{q} f_6(x), \quad \chi(x) = \frac{h}{a}, \quad \gamma = \frac{\lambda_B}{\lambda}, \quad \operatorname{Bi}_y = \frac{\alpha_y a}{\lambda_B}$$

та нормуючи відрізок  $[-a; a]$ , систему (18.24) запишемо у вигляді

$$-\frac{\eta(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi) d\xi}{\xi - x/a} + \gamma \int_{-1}^{x/a} \psi_3(\xi) d\xi = \frac{F_5(x)}{q} \quad (x \in L' = [-a; a]); \tag{18.42}$$

$$\frac{\gamma \chi(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_6(\xi) d\xi}{\xi - x/a} + \frac{\chi(x)}{\operatorname{Bi}_y} \psi_6'(x/a) - \int_{-1}^{x/a} \psi_6(\xi) d\xi = \frac{F_6(x)}{q} \quad (x \in L' = [-a; a]), \tag{18.43}$$

де

$$\eta(x) = \chi(x) + 1/\operatorname{Bi}_y, \quad q = \left\{ q_m, q_{mm}/a, |q^\infty|a \right\} \quad (m = 1, 2).$$

Згідно з (18.19) розв'язки цих рівнянь повинні задовольняти умови

$$\int_{-1}^1 \psi_r(\xi) d\xi = \hat{Q}_1^r \quad (r = 3, 6), \quad \hat{Q}_1^3 = 0, \quad \hat{Q}_1^6 = -\sum_{k=1}^2 q_k/q. \tag{18.44}$$

Аналіз характеристичної частини рівняння (18.42) типу Прандтля свідчить [636], що його розв'язок повинен належати до класу функцій  $\Pi^{-1/2, -1/2}(\psi)$ , тобто має структуру:

$$\psi_w(x/a) = \left[ 1 - (x/a)^2 \right]^{-1/2} \varphi_w(x/a) \quad (w = 3). \tag{18.45}$$

Щодо (18.43), то заміною

$$\Psi(x/a) = \int_{-1}^{x/a} \psi_6(\xi) d\xi$$

воно зведеться до

$$\alpha(x) \Psi''(x) + \Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\beta(x, \xi) \Psi'(\xi) d\xi}{\xi - x} = \Lambda(x). \tag{18.46}$$

У праці [396] розв'язок такого сингулярного інтегро-диференціального рівняння побудований для одного спеціального варіанту функцій  $\beta(x, \xi)$ ,  $\alpha(x)$  за умов  $\Psi(\pm 1) = \Psi'(\pm 1) = 0$ , які тут не виконуються.

Якщо ж  $\text{Bi}_y \rightarrow \infty$  (ідеальний контакт), то (18.43) стає сингулярним інтегро-диференціальним рівнянням типу Прандтля

$$\frac{\gamma\chi(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_6(\xi) d\xi}{\xi - x/a} - \int_{-1}^{x/a} \psi_6(\xi) d\xi = F_6(x)/q \quad (x \in L' = [-a; a]), \quad (18.47)$$

розв'язок якого можна шукати у вигляді (18.45) при  $w = 6$ .

## 18.6. Аналіз прикладів

### Різномодульні півплощини

Вивчалось сім типів навантаження, для яких було отримано такі основні результати.

1. Тепловий потік на нескінченності  $q^\infty = q_{xk}^\infty + iq_y^\infty$ :

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = \sqrt{\pi a} q_y^\infty \quad \text{для ТІВ}; \quad (18.48)$$

$$k_y^\pm = 0, \quad k_x^\pm = \frac{\sqrt{\pi a \lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} (q_{x1}^\infty + q_{x2}^\infty) \quad \text{для АТПВ}. \quad (18.49)$$

2. Джерело і стік тепла потужності  $q_2 = -q_1 = q$  у точках  $z_2 = \bar{z}_1 = iy_*$ :

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = -\frac{q}{\sqrt{\pi a}} \left[ 1 + (y_*/a)^2 \right]^{-1/2} \quad \text{для ТІВ}; \quad (18.50)$$

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = 0 \quad \text{для АТПВ}. \quad (18.51)$$

Цікаво, що вирази для КІГТП за такого навантаження не залежать від теплофізичних сталих.

3. Джерело і стік тепла потужності  $q_2 = -q_1 = q$  у точках  $z_2 = -z_1 = x_*$ :

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = 0 \quad \text{для ТІВ}; \quad (18.52)$$

$$k_x^\pm = -\frac{q}{\sqrt{\pi a}} \left[ (x_*/a)^2 - 1 \right]^{-1/2}, \quad k_y^\pm = 0 \quad \text{для АТПВ}. \quad (18.53)$$

4. Два джерела тепла потужності  $q_2 = q_1 = q$  у точках  $z_2 = \bar{z}_1 = iy_*$  та загальний відплив тепла з включення  $Q = -2q$ :

розв'язок для ТІВ не має фізичного сенсу;

$$k_x^\pm = \pm \frac{2qp\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{\pi a}} \left\{ 2 - \frac{y_*}{a} \left[ 1 + \left( \frac{y_*}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad k_y^\pm = 0 \quad \text{для АТПВ}. \quad (18.54)$$

5. Два джерела тепла потужності  $q_2 = q_1 = q$  у точках  $z_2 = -z_1 = x_*$  та загальний відплив тепла з включення  $Q = -2q$ :

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = 0 \quad \text{для ТІВ}; \quad (18.55)$$

$$k_x^\pm = \pm \frac{q}{\sqrt{\pi a}} \left\{ 2 - \frac{x_*}{a} \left[ \left( \frac{x_*}{a} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \right\}, \quad k_y^\pm = 0 \text{ для АТПВ.} \quad (18.56)$$

6. Два диполі тепла інтенсивності  $q_{kk}$  й орієнтації  $\theta_k$  ( $k=1,2$ ) у точках  $z_2 = \bar{z}_1 = iy_*$ :

$$k_x^\pm = 0, \quad k_y^\pm = \frac{c}{a\sqrt{\pi a}} \left\{ \mp \left( \frac{q_{22}}{\lambda_2} \cos \theta_2 - \frac{q_{11}}{\lambda_1} \cos \theta_1 \right) + \left( \frac{q_{22}}{\lambda_2} \sin \theta_2 + \frac{q_{11}}{\lambda_1} \sin \theta_1 \right) \frac{y_*}{a} \right\} \left[ 1 + \left( \frac{y_*}{a} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad \text{для ТІВ;} \quad (18.57)$$

$$k_x^\pm = \frac{p\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{a\sqrt{\pi a}} \left\{ \pm (q_{22} \sin \theta_2 - q_{11} \cos \theta_1) + (q_{22} \cos \theta_2 + q_{11} \cos \theta_1) \frac{y_*}{a} \right\} \left[ 1 + \left( \frac{y_*}{a} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad k_y^\pm = 0 \quad \text{для АТПВ.} \quad (18.58)$$

7. Два диполі тепла інтенсивності  $q_{kk}$  та орієнтації  $\theta_k$  ( $k=1,2$ ) у точках  $z_2 = -z_1 = x_*$ :

$$k_y^\pm = \frac{-1}{2a\sqrt{\pi a}} \left\{ (q_{22} \sin \theta_2 + q_{11} \sin \theta_1) \frac{x_*}{a} \pm (q_{22} \sin \theta_2 - q_{11} \sin \theta_1) \right\} \left[ \left( \frac{x_*}{a} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2}, \quad (18.59)$$

$k_x^\pm = 0$  для ТІВ;

$$k_x^\pm = \frac{1}{2a\sqrt{\pi a}} \left\{ (q_{22} \cos \theta_2 + q_{11} \cos \theta_1) \frac{x_*}{a} \pm (q_{22} \cos \theta_2 - q_{11} \cos \theta_1) \right\} \left[ \left( \frac{x_*}{a} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2}, \quad (18.60)$$

$k_y^\pm = 0$  для АТПВ.

Зазначимо, що в окремих випадках (навантаження за схемою 4, 5, 6) можна таким чином підібрати співвідношення параметрів  $\lambda_1/\lambda_2$ ,  $x_*/a$ ,  $q_{22}/q_{11}$ ,  $\theta_2/\theta_1$ , що коефіцієнт інтенсивності градієнту температурного поля дорівнюватиме нулю. Наприклад для схеми 6 теплоізованого включення  $k_y^\pm = 0$ , якщо  $q_{22}/\lambda_2 = q_{11}/\lambda_1$ ,  $\theta_2 = -\theta_1$ , і при абсолютно теплопровідному включенні  $k_x^\pm = 0$ , якщо  $q_{11} = q_{22}$ ,  $\theta_1 = \pi - \theta_2$ .

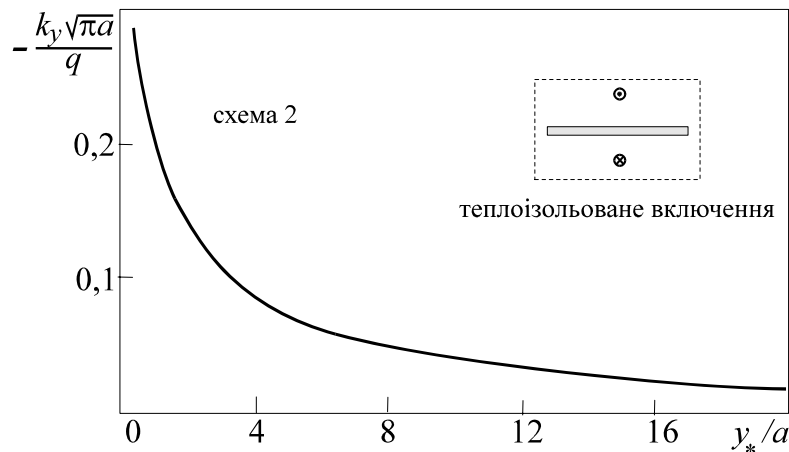


Рис. 18.2

Рис. 18.2–18.4 відображають залежність безрозмірних КІГТП  $k_y^+ \sqrt{\pi a} / q$  для випадку теплоізолюваного включення і  $k_x^+ \sqrt{\pi a} / q$  для абсолютно теплопровідного включення від параметрів  $\lambda_1 / \lambda_2$ ,  $y_* / a$ ,  $x_* / a$  (схеми навантаження 2–5).

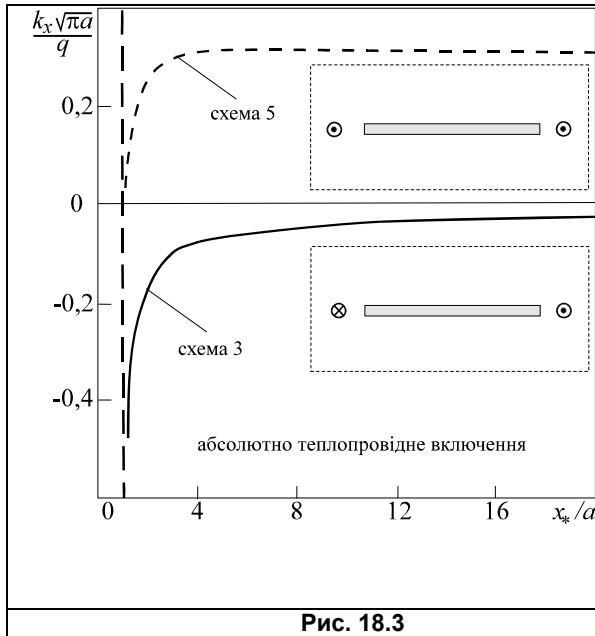


Рис. 18.3

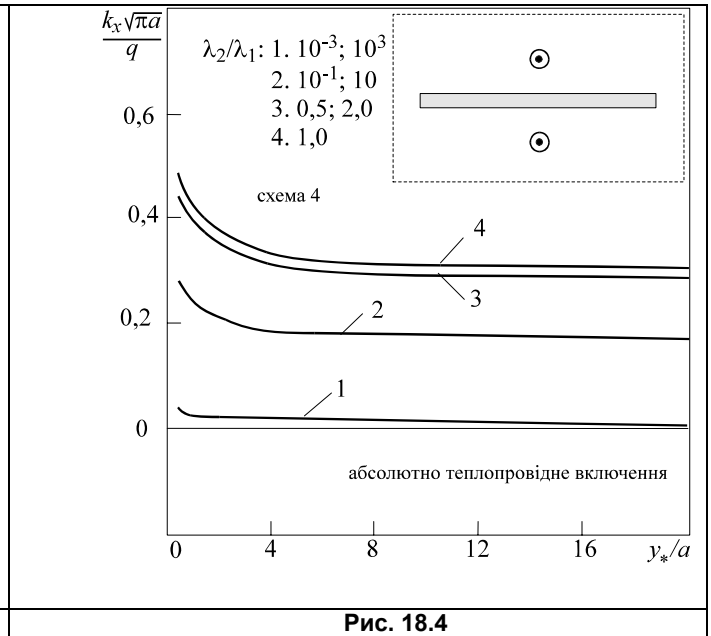


Рис. 18.4

Вплив тих же параметрів та кута  $\theta_2$  орієнтації диполя (схеми навантаження 6, 7,  $q_{11}=0$ ) на безрозмірні КІГТП  $k_x^+ a \sqrt{\pi a} / q_{22}$  у випадку абсолютно теплопровідного включення і  $k_y^+ a \sqrt{\pi a} / q_{22}$  – у випадку теплоізолюваного включення відображений на рис. 18.5 – 18.7.

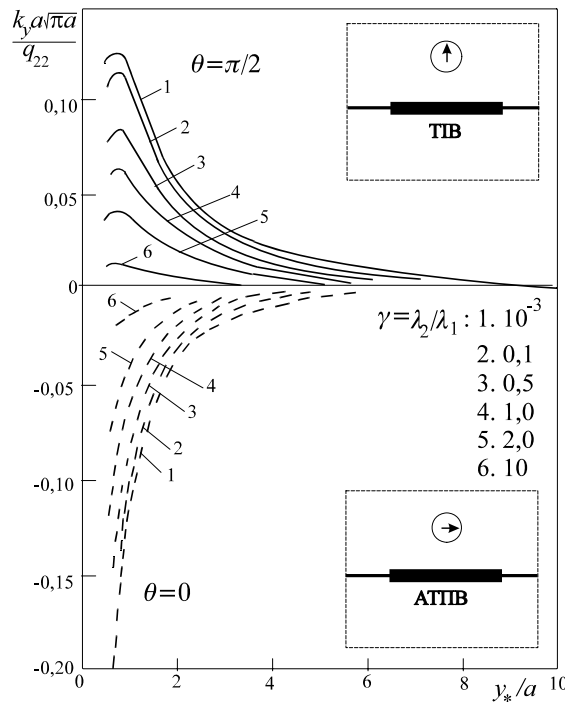


Рис. 18.5

Таким чином, можна стверджувати, що використання диполів як навантажувальних чинників загалом не спричиняє істотних змін якісної картини (у крайньому випадку в досліджених граничних випадках) порівняно з навантаженням джерелами тепла. Основна різниця є у швидкому зниканні його впливу з віддаленням від включення та вплив орієнтації.

З формул (18.48)–(18.60) легко отримати КІГТП для півбезмежного дефекту.

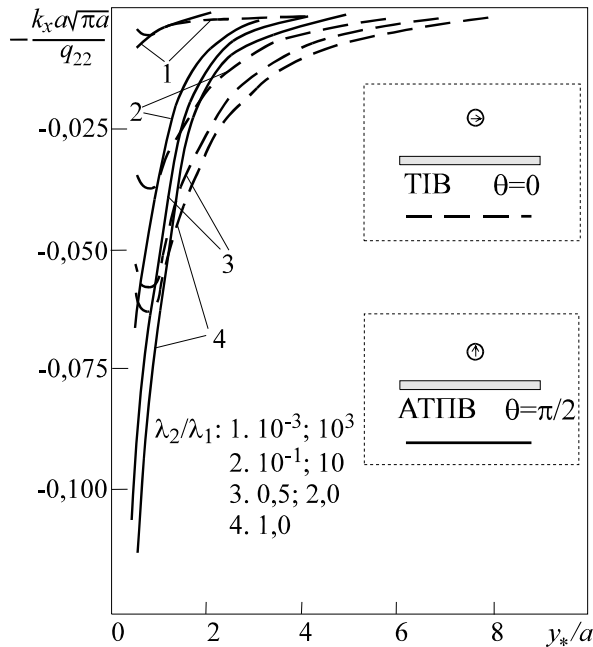


Рис. 18.6

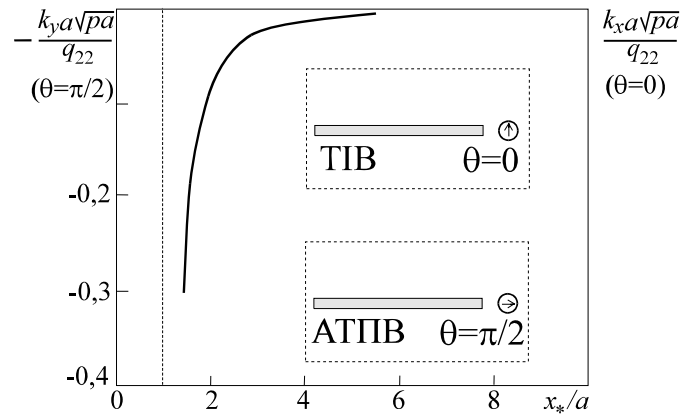


Рис. 18.7

### Однорідна площина

Наближений розв'язок СІР (18.42), (18.47) з додатковою умовою (18.44) будується для  $r = 3, 6$  методом колокацій (§ 7) у вигляді (18.45), де

$$\varphi_r(x/a) = \sum_{n=0}^N A_n^r T_n(x/a) \quad (r = 3, 6). \quad (18.61)$$

На основі знайдених функцій стрибка (18.45), (18.61) температурне поле та його градієнти у середовищі дорівнюють

$$T(z) = \operatorname{Re} \left\{ \Phi_T^0(z) - \frac{q}{\lambda} \sum_{n=0}^N (A_n^6 + iA_n^3) I_2^n(z/a) \right\}, \quad (18.62)$$

$$\frac{\partial T(z)}{\partial x} - i \frac{\partial T(z)}{\partial y} = \mathfrak{F}^0(z) + \frac{q}{\lambda a} \sum_{n=0}^N (A_n^6 + iA_n^3) I_3^n(z/a),$$

де

$$I_2^n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) \ln(z-\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\rho}{2} & (n=0), \\ -\rho^{-n}/2n & (n>0), \end{cases} \quad (18.63)$$

$$I_3^n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} (\xi-z)} = -\frac{\rho^{-n}}{2(\rho-1/\rho)} \quad \left( n \geq 0, \quad \rho = z + \sqrt{z^2-1} \right).$$

Коефіцієнти інтенсивності теплових потоків визначаються сумою

$$k_x^\pm - ik_y^\pm = \pm \frac{2q\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n (A_n^6 + iA_n^3). \quad (18.64)$$

Реалізація обчислювальної процедури за складністю та витратами часу практично не залежить від вибору якоїсь із схем навантаження 1...7. Для ілюстрації подамо приклади обчислення деяких теплофізичних величин за дії джерел тепла (схеми 2...5).

Конкретні обчислення проводилися для змінної ширини включення  $h(x)$  (5.44) при  $h_0/a = 0,01$  з точністю не меншою від 1%. При  $\beta = 1$  включення має еліптичний профіль; при  $\beta = \infty$  – прямокутний; значення  $\gamma$ ,  $Bi_y = 10^{-5} \dots 10^5$  [974, 690, 731, 691, 734, 735, 733]. Отримані наближені розв'язки при  $\gamma = 10^{-5}$  і  $\gamma = 10^5$  (для  $Bi_y = 10^{10}$ ) відрізняються від точних для теплоізованого включення (18.21) та абсолютно теплопровідного включення (18.33) менше як на 1% – тобто перебувають в межах прийнятої точності обчислень. При найнесприятливіших значеннях параметрів задачі для досягнення цієї точності вистачило врахувати перші 20 ненульових членів розвинення (18.61). Деякі результати обчислень містять рис. 18.8–18.14.

На рис. 18.8–18.11 відображені результати обчислення несингулярної частини функцій стрибка  $\varphi_r(x/a)$  ( $r = 3, 6$ ), а також ізотерми температурного поля  $T(x, y)/q$  в околі включення при різних значеннях параметра  $\gamma$  (схеми навантаження 2, 3;  $Bi_y = 10^{10}$ ,  $\beta = 100$ ). Відносна відстань  $y_*/a$  ( $x_*/a$ ) зосереджених теплових чинників (джерел) при цьому дорівнювала 2,0.

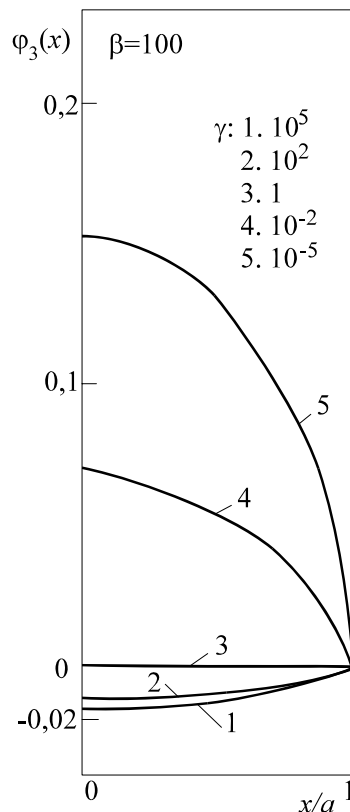


Рис. 18.8.

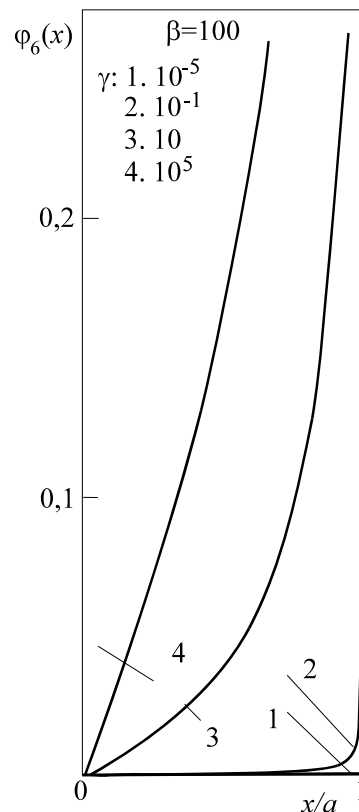


Рис. 18.9



Числові обчислення для абсолютно теплопровідного включення ( $\gamma \geq 10^5$ ) дали сталість температури на реальній межі  $y = \pm h(x)$  включення і матриці при довільних значеннях  $\beta$ , що відповідає властивості теплопровідного включення (рис. 18.10, 18.11 – суцільні лінії 5). Це свідчить про високу міру адекватності методу функцій стрибка для тонких включень. Значимо теж, що температурне поле і розподіл теплових потоків в околі торців включення, визначені за допомогою формул (18.62) точно та обчислені за допомогою асимптотичних виразів на достатньо малій відстані від торців включення з великою мірою точності збігаються.

Залежність безрозмірного КІГТП  $k_y \sqrt{\pi a} / q$  від відносного віддалення  $y^*/a$  джерела тепла (схема навантаження 2) за різних значень параметра  $\gamma$  зображена на рис. 18.12. При цьому тепловий контакт включення, яке має форму, зближену з прямокутником, ( $\beta = 100$ ) з матрицею вважається ідеальним ( $Bi_y = 10^{10}$ ). Добре помітні дві тенденції: зникання КІГТП зі збільшенням  $y^*/a$  та збільшення КІГТП зі зростанням  $\gamma$ .

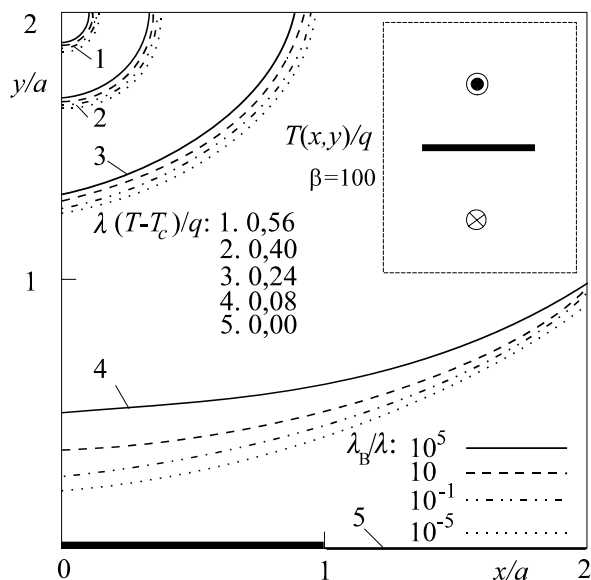


Рис. 18.10

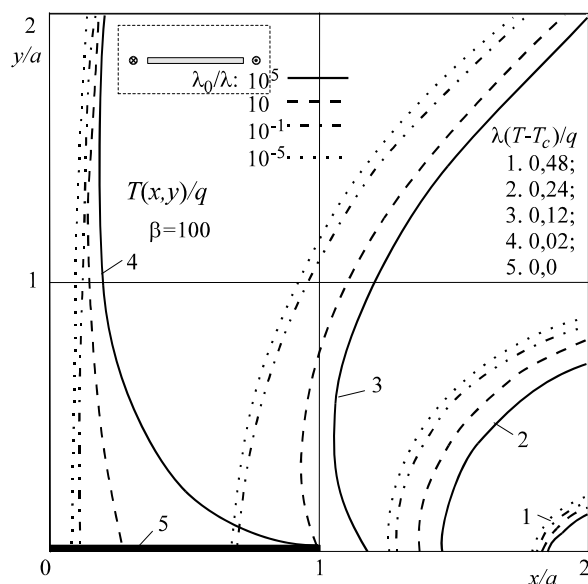


Рис. 18.11

Вплив форми включення ( $\beta = 1 \dots 100$ ) на зміну безрозмірного КІГТП  $k_y \sqrt{\pi a} / q$  (схема навантаження 2) відображає рис. 18.13. Помітно, що зі зміною форми включення від еліптичної ( $\beta = 1$ ) до майже прямокутної ( $\beta = 100$ ) КІГТП зростає за абсолютною величиною. Отже зменшення ширини кінцевої частини включення (зменшення  $\beta$ ) веде до зменшення КІГТП за довільного способу навантажування.

Екстремальні значення КІГТП досягаються для теплоізолюваного та абсолютно теплопровідного включень (рис.18.13) причому, для теплоізолюваного включення домінуючу роль відіграє  $k_y^\pm$ , для абсолютно теплопровідного включення –  $k_x^\pm$ .

Рис. 18.14 подає залежність КІГТП  $k_x \sqrt{\pi a} / q$  від різномодульності  $\lambda_1/\lambda_2$  півплощин та відносної відстані джерел тепла  $x^*/a$  (схема навантаження 3) для випадку АТПВ. Помітне зростання КІГТП зі збільшенням різномодульності. Цікаво також, що віддалення джерел тепла більш ніж на вісім півдовжин включення вже не впливає на зміну КІГТП.

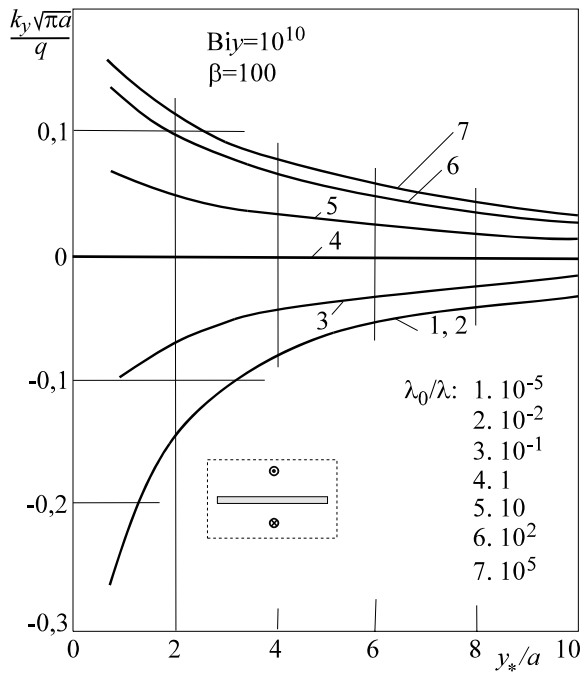


Рис. 18.12

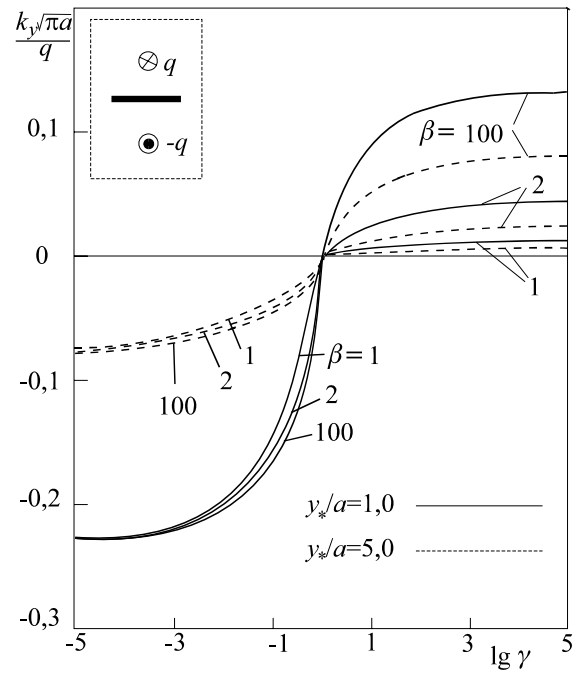


Рис. 18.13

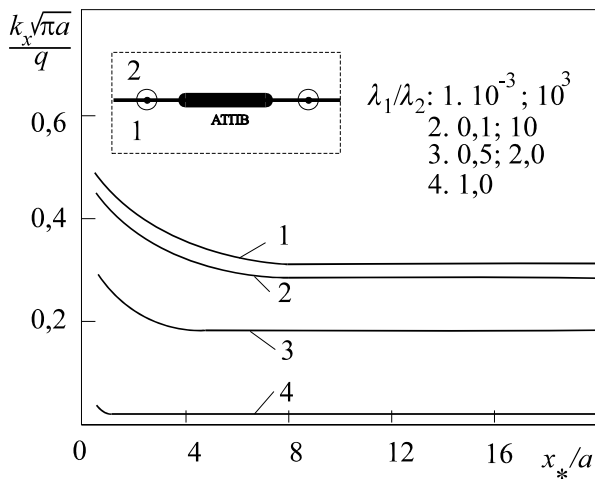


Рис. 18.14

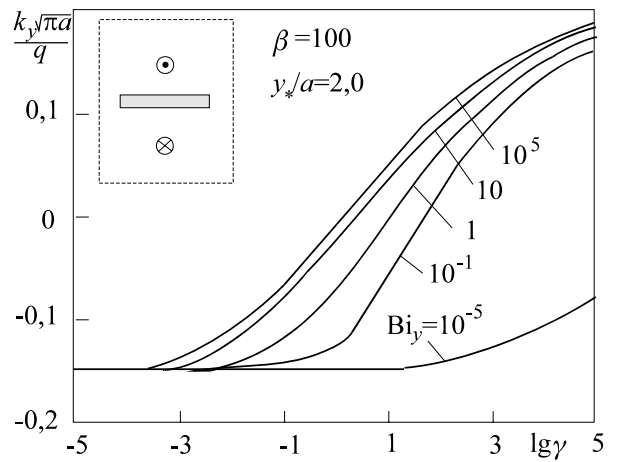


Рис. 18.15

Залежність КІГТП  $k_y\sqrt{\pi a}/q$  від параметра  $Bi_y$ , що враховує або конвективний теплообмін (протікання охолоджуючої чи нагріваючої рідини щільним каналом у середовищі), чи термоопором (неідеальний контакт включення з матрицею) при змінюваному  $\gamma$  зображена на рис. 18.15. При цьому відносна відстань  $y_*/a$  джерела тепла від включення (щілини) профілю близького до прямокутного ( $\beta = 100$ ) вважається рівною 2,0.

Спостерігається прямування КІГТП до збільшення з ростом  $Bi_y$ , тобто збільшенням коефіцієнту тепловіддачі з матриці у рідину чи зменшенням коефіцієнта термоопору за неідеального контакту. Зменшення коефіцієнта конвективної тепловіддачі з матриці у рідке включення (зменшення коефіцієнта термоопору при неідеальному контакті з матрицею) спричинює зменшення КІГТП. Максимум КІГТП досягається за ідеального контакту з включенням –  $Bi_y \rightarrow \infty$ .

Аналіз отриманих результатів, окрім того, свідчить, що значення  $\varphi_r$  ( $m = 3, 6$ ),  $k_x \sqrt{\pi a}/q$ ,  $k_y \sqrt{\pi a}/q$ , отримані при  $\gamma = 0,00001$  та  $\gamma = 100000$  ( $Bi_y = 10^{10}$ ) відрізняються від відповідних величин, отриманих для теплоізоляованого включення (18.21) (тріщини [706]) і абсолютно теплопровідного включення (18.33) відповідно менше, як на 1%, тобто перебувають у межах точності обчислень.

Здійснені за формулами (18.48)–(18.60) розрахунки дають можливість стверджувати загальну тенденцію до зменшення за абсолютним значенням КІГТІІ зі збільшенням відносної відстані температурного чинника від включення. Хоча під час навантажування типу 6 диполем з орієнтацією  $\theta_1 = \pi/2$  для теплоізоляованого включення та  $\theta = 0$  для абсолютно теплопровідного включення (див. рис. 18.5, 18.6) спостерігається локальне ухилення від загальної тенденції на відносних відстанях  $y_*/a \sim 0,75$ . Помітне прямування  $k_x \sqrt{\pi a}/q$  зі збільшенням  $x_*/a$  до деякого сталого значення, коли матриця з абсолютно теплопровідним включенням навантажена за схемами 5, 4, пояснюється теплоактивністю включення (рис. 18.3 (пунктир); рис. 18.4).

Зазначимо теж, що отримані результати і висновки легко трансформуються на випадок задачі про поздовжній зсув середовища зі стрічковими включеннями під впливом відповідного навантаження.

Внаслідок аналогії Г.С.Кіта між стаціонарною теплопровідністю (плоске температурне поле) та поздовжнім зсувом тіл з включеннями і тріщинами легко з'ясувати відповідність

$$k_y \sim k_1^3, k_x \sim k_2^3 \quad (18.65)$$

де  $k_n^3$  ( $n = 1, 2$ ) – узагальнені КІН за антиплоскої деформації

$$k_1^3 + ik_2^3 = \lim_{r \rightarrow 0 (\theta=0)} \left[ \sqrt{2r} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}) \right]. \quad (18.66)$$

## § 19. Узагальнене плоске температурне поле

### 19.1. Реалізація методу функцій стрибка

Залишається в силі постановка задачі § 17 з урахуванням тепловіддачі. Температура за виразом (13.10) тепер задовольняє рівняння

$$\lambda_k \Delta T(x, y) - \frac{\alpha_k}{\delta} \{T(x, y) - T_C\} = -\frac{Q_k(x, y)}{2\delta}, \quad (x, y) \in S_k; k = 1, 2. \quad (19.1)$$

З огляду на лінійність задачі та справедливості композиції (14.16) однорідний розв'язок повинен задовольняти такому ж рівнянню

$$\Delta t^0(x, y) - \frac{\alpha_k}{\lambda_k \delta} \{t^0(x, y) - T_C\} = -\frac{1}{2\lambda_k \delta} Q_k(x, y), \quad (x, y) \in S_k; k = 1, 2, \quad (19.2)$$

а збурене – відповідному однорідному

$$\Delta \hat{t}(x, y) - \frac{\alpha_k}{\lambda_k \delta} \hat{t}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S_k; k = 1, 2 \quad (19.3)$$

та умові (17.2).

Методику розв'язування рівняння (19.2) та побудови однорідного розв'язку можна знайти у численній літературі, зокрема [396, 778, 779, 782]. Для розв'язування рівнянь (19.3) з умовою (17.2) застосуємо до них перетворення Фур'є за координатою  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \hat{t}^F(s, y)}{\partial^2 y} - \omega_k^2 \hat{t}^F(s, y) = 0, \quad \omega_k^2 = s^2 + \frac{\alpha_k}{\lambda_k \delta}; \quad (19.4)$$

$$\hat{t}^F(s, -0) - \hat{t}^F(s, +0) = \frac{i}{s} f_3^F(s), \quad \lambda_1 \frac{\partial \hat{t}^F(s, -0)}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \hat{t}^F(s, +0)}{\partial y} = f_6^F(s). \quad (19.5)$$

Тут враховано, що внаслідок локальності збурення відповідні функції на нескінченності зникають

$$\hat{t}(x, y), \quad \frac{\partial \hat{t}(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \hat{t}(x, y)}{\partial y} \xrightarrow{x, y \rightarrow \infty} 0. \quad (19.6)$$

З урахуванням (19.6) загальний розв'язок (19.4) запишемо

$$\hat{t}^F(s, y) = C_k(s) e^{-\omega_k |y|}, \quad \frac{\partial \hat{t}^F(s, y)}{\partial y} = (-1)^{k-1} \omega_k C_k(s) e^{-\omega_k |y|} \quad (y \in S_k) \quad (19.7)$$

і, підставивши його у крайові умови (19.5), знайдемо

$$C_k(s) = (-1)^j \frac{i}{s} \frac{\lambda_j \omega_j}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} f_3^F(s) + \frac{1}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} f_6^F(s) \quad (j = 3 - k). \quad (19.8)$$

Переходячи у виразах (19.7), (19.8) до оригіналів, отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{t}(x, y) &= (-1)^{k+1} \int_{L'} \tilde{f}_3(\xi) \Lambda_k^1(\xi - x, y) d\xi + \int_{L'} f_6(\xi) \Lambda_k^2(\xi - x, y) d\xi, \\ \frac{\partial \hat{t}(x, y)}{\partial y} &= \int_{L'} \tilde{f}_3(\xi) \Lambda_k^3(\xi - x, y) d\xi - (-1)^k \int_{L'} f_6(\xi) \Lambda_k^4(\xi - x, y) d\xi, \\ \frac{\partial \hat{t}(x, y)}{\partial x} &= (-1)^{k+1} \int_{L'} f_3(\xi) \Lambda_k^5(\xi - x, y) d\xi + \int_{L'} f_6(\xi) \Lambda_k^6(\xi - x, y) d\xi, \end{aligned} \quad (19.9)$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda_k^1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_j \omega_j}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} e^{-\omega_k |y| + isx} ds, \quad \Lambda_k^2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} e^{-\omega_k |y| + isx} ds, \\ \Lambda_k^3(x, y) &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_j \omega_1 \omega_2}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} e^{-\omega_k |y| + isx} ds, \quad \Lambda_k^4(x, y) = \frac{\omega_k |y|}{\pi \lambda_k r} K_1(\omega_k r) - \frac{\Lambda_k^1(x, y)}{\lambda_k}, \end{aligned} \quad (19.10)$$

$$\Lambda_k^5(x, y) = \Lambda_k^1(x, y), \quad \Lambda_k^6(x, y) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2} e^{-\omega_k |y| + isx} ds, \quad \frac{d}{dx} \tilde{f}_m(x) = f_m(x),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (j = 3 - k, k = 1, 2, m = 3, 6).$$

Зокрема, коли  $\omega_1 = \omega_2$ , тобто  $\alpha_2/\lambda_2 = \alpha_1/\lambda_1 = \omega^2 \delta$ , інтеграли (19.10) дорівнюють:

$$\Lambda_k^1(x, y) = \Lambda_k^5(x, y) = \frac{p_j \omega |y|}{\pi r} K_1(\omega r), \quad \Lambda_k^3(x, y) = \frac{p_j \omega}{\pi r} \left\{ K_1(\omega r) - \frac{\omega y^2}{r} K_0(\omega r) \right\}, \quad (19.11)$$

$$\Lambda_k^2(x, y) = \frac{p}{\pi} K_0(\omega r), \quad \Lambda_k^4(x, y) = \frac{\omega p |y|}{\pi r} K_1(\omega r), \quad \Lambda_k^6(x, y) = \frac{\omega p x}{\pi r} K_1(\omega r).$$

Для обчислення функцій Макдональда  $K_m(r)$  використаємо ряди [904]

$$\begin{aligned}
K_0(\omega|z|) &= -\ln|z| - C - \ln \frac{\omega}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\omega z}{2}\right)^{2n} \left[ \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - C - \ln \frac{\omega|z|}{2} \right], \\
\omega \operatorname{sign} z K_1(\omega|z|) &= \frac{1}{z} - \omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\omega z}{2}\right)^{2n+1} \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m} \right) - C - \ln \frac{\omega|z|}{2} \right], \\
\frac{\omega K_1(\omega|z|)}{|z|} &= \frac{1}{z^2} + \frac{\omega^2}{2} \ln|z| + \frac{\omega^2}{2} \left\{ C + \ln \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\omega z}{2}\right)^{2n} \right\} \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m} \right) - C - \ln \frac{\omega|z|}{2} \right];
\end{aligned} \tag{19.12}$$

$C = 0,5772157\dots$  – стала Ойлера (Ейлера).

Переходячи у (19.9) до граничних значень коли  $y \rightarrow \pm 0$  на основі (19.11) матимемо

$$\begin{aligned}
\hat{t}(x, \pm 0) &= \mp p_j \tilde{f}_3(x) + \frac{p}{\pi} \int_{L'} f_3(\xi) K_0(\omega|\xi - x|) d\xi, \\
\frac{\partial \hat{t}(x, \pm 0)}{\partial x} &= \mp p_j f_3(x) + \frac{p\omega}{\pi} \int_{L'} f_6(\xi) \operatorname{sign}(\xi - x) K_1(\omega|\xi - x|) d\xi, \\
\frac{\partial \hat{t}(x, \pm 0)}{\partial y} &= \mp p f_6(x) - \frac{p_j \omega}{\pi} \int_{L'} \tilde{f}_3(\xi) \frac{K_1(\omega|\xi - x|)}{|\xi - x|} d\xi \quad \left( x \in L', j = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \right).
\end{aligned} \tag{19.13}$$

Верхньому знаку відповідає значення  $j = 1$ , нижньому –  $j = 2$ .

Якщо у (19.13) спрямувати  $\omega$  до нуля (відсутня тепловіддача), то будуть отримані відповідні вирази (18.10).

Зазначимо, що на відміну від випадку задачі про плоске температурне поле (§ 18) тут не вимагається балансу тепла у пластині, однак за граничного переходу  $\omega \rightarrow 0$  цю умову слід ввести.

## 19.2. Система інтегральних рівнянь задачі

Підставляючи (19.13) в умови взаємодії (14.18) у припущенні ідеальності контакту з включенням ( $\alpha_{jk} \rightarrow \infty$ ), отримуємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\rho_{31} \int_{L'} f_3(\xi) \Omega_3(\xi, x) d\xi + \rho_{32} \int_{a_n^-}^x f_3(\xi) d\xi + \rho_{33} f_6(\xi) &= F_5(x), \\
\rho_{61} \int_{L'} f_6(\xi) \Omega_6(\xi, x) d\xi - \int_{a_n^-}^x f_6(\xi) d\xi + \rho_{63} f_3(\xi) + \rho_{64} \int_{a_n^-}^x \tilde{f}_3(\xi) d\xi &= \\
= F_6(x) + \rho_{65} \int_{a_n^-}^x \left\{ \langle t^0 \rangle_h - 2T_C \right\} d\xi \quad (x \in L'; n = \overline{1, N}),
\end{aligned} \tag{19.14}$$

де

$$\Omega_3(\xi, x) = \int_{\xi}^{a_n^+} \frac{\omega K_1(\omega|\xi - x|) d\xi}{|\xi - x|}, \quad \Omega_6(\xi, x) = \lambda_{Bn} \omega \operatorname{sign}(\xi - x) K_1(\omega|\xi - x|) -$$

$$-\frac{\alpha_{Bn}}{\delta} \int_{a_n^-}^x K_0(\omega|\xi-x|) d\xi, \quad \rho_{31} = -\frac{2p\lambda_1\lambda_2 h}{\pi}, \quad \rho_{32} = \lambda_{Bn}, \quad \rho_{33} = (p_1 - p_2)h,$$

$$\rho_{61} = \frac{2ph}{\pi}, \quad \rho_{63} = -\lambda_{Bn}\rho_{33}, \quad \rho_{64} = \frac{\alpha_{Bn}\rho_{33}}{\delta}, \quad \rho_{65} = \frac{\alpha_{Bn}h}{\delta}.$$

Функції  $f_r(x)$  повинні задовольняти додаткові умови (18.19).

**Теплоізольоване включення (ТІВ).** Вважаючи у (19.14)  $\lambda_{Bn} = 0$ ,  $\alpha_{Bn}/\delta = 0$ , отримуємо

$$f_6(x) = -\left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h, \quad \frac{1}{\pi} \int_{L'} f_3(\xi) \Omega_3(\xi, x) d\xi = \left\langle \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}). \quad (19.15)$$

**Абсолютно теплопровідне включення (АТПВ).** Переходячи у (19.14) до границі  $\lambda_{Bn} \rightarrow \infty$ , отримуємо

$$\tilde{f}_3(x) = -\left[ t^0 \right]_h, \quad \frac{\omega}{\pi} \int_{L'} f_6(\xi) \text{sign}(\xi - x) K_1(\omega|\xi - x|) d\xi = -\left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h \quad (19.16)$$

$$(x \in L'_n; n = \overline{1, N}).$$

**Однорідна пластина з включеннями.** Припущення  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  поділяє (19.14) на два незалежні рівняння [728, 735]

$$-\frac{\lambda h}{\pi} \int_{L'} f_3(\xi) \Omega_3(\xi, x) d\xi + \lambda_{Bn} \int_{a_n^-}^x f_3(\xi) d\xi = F_5(x) \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}); \quad (19.17)$$

$$\frac{h}{\pi\lambda} \int_{L'} f_6(\xi) \Omega_6(\xi, x) d\xi - \int_{a_n^-}^x f_6(\xi) d\xi = F_6(x) + \frac{\alpha_{Bn}h}{\delta} \int_{a_n^-}^x \left\{ \left\langle t^0 \right\rangle_h - 2T_C \right\} d\xi \quad (19.18)$$

$$(x \in L'_n; n = \overline{1, N}).$$

**Бездефектна пластина.** Цей випадок впливає з (19.14) при  $h \rightarrow 0$ .

### 19.3. Торцьові потоки тепла

У системі сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (19.14) з додатковими умовами (18.19) і у її частковому випадку (19.16), (19.17) у правих частинах присутні наперед невідомі торцьові потоки тепла. До їхнього визначення можна використати апріорну залежність (14.23), а можна модифікувати підхід п.18.4, використавши для обчислення інтегралів, що містяться у (18.40) подання (19.9)

$$\hat{Q}_x(w_n) = \int_{-h(w_n)}^0 \lambda_1 \frac{\partial \hat{t}(w_n, y)}{\partial x} dy + \int_0^{h(w_n)} \lambda_2 \frac{\partial \hat{t}(w_n, y)}{\partial x} dy = \quad (19.19)$$

$$= \int_{L'} f_3(\xi) R_{n3}^-(\xi) d\xi + \int_{L'} f_6(\xi) R_{n6}^+(\xi) d\xi,$$

де

$$R_{nr}^\pm(\xi) = \lambda_1 \int_{-h}^0 \Lambda_1^r(\xi - w_n, y) dy \pm \lambda_2 \int_0^h \Lambda_2^r(\xi - w_n, y) dy \quad (r = 3, 6). \quad (19.20)$$

У випадку, коли  $\omega_1 = \omega_2$ , тобто  $\alpha_2/\lambda_2 = \alpha_1/\lambda_1 = \omega^2\delta$ , маємо

$$R_{n3}^-(\xi) = 0, \quad R_{n6}^+(\xi) = \frac{\omega(\xi - w_n)}{\pi} \int_0^h \frac{K_1 \left( \omega \sqrt{(\xi - w_n)^2 + y^2} \right)}{\sqrt{(\xi - w_n)^2 + y^2}} dy. \quad (19.21)$$

Отже невідомий торцьовий потік тепла вдається подати через функції стрибка. Відзначимо й ту обставину, що за  $\omega \rightarrow 0$  вираз (19.19) з урахуванням (19.21) збігається з (18.41).

#### 19.4. Числовий аналіз для одного включення

Враховуючи розвинення (19.12), доходимо висновку, що за  $\alpha_{yk} \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_{Bn}/\delta = 0$  (ідеальний контакт) інтегральні рівняння (19.14)–(19.18), (18.19) відрізняються від відповідних рівнянь (18.25), (18.20), (18.31), (18.24), (18.19) лише присутністю логарифмічних та регулярних ядер. Тому процедури їхнього числового розв'язування схожі.

Конкретні обчислення здійснювалися для одного включення ( $N=1$ ,  $L'=[-a; a]$ ,  $a_1^\pm = \pm a$ ) за  $\alpha_2/\lambda_2 = \alpha_1/\lambda_1 = \omega^2 \delta$ , коли основне температурне поле визначене формулою

$$\begin{aligned} t^0(x, y) = & T_C + \frac{q_k}{2\pi\lambda_k} K_0 \left[ \omega \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2} \right] + (p_k - p_j) \frac{q_k}{2\pi\lambda_k} \times \\ & \times K_0 \left[ \omega \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y + y_{*k})^2} \right] + 2p_j \frac{q_j}{2\pi\lambda_j} K_0 \left[ \omega \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2} \right] + \\ & + \frac{q_{kk}\omega}{2\pi\lambda_k} \left[ (x - x_{*k}) \cos \theta_k + (y - y_{*k}) \sin \theta_k \right] \frac{K_0 \left[ \omega \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2} \right]}{\sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2}} + \\ & + (p_k - p_j) \frac{q_{kk}\omega}{2\pi\lambda_k} \left[ (x - x_{*k}) \cos \theta_k + (y + y_{*k}) \sin \theta_k \right] \frac{K_1 \left[ \omega \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y + y_{*k})^2} \right]}{\sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y + y_{*k})^2}} + \\ & + 2p_j \frac{q_{jj}\omega}{2\pi\lambda_j} \left[ (x - x_{*k}) \cos \theta_j + (y - y_{*k}) \sin \theta_k \right] \frac{K_1 \left[ \omega \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2} \right]}{\sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2}}. \end{aligned} \quad (19.22)$$

Нормуючи проміжок  $L'$ , введемо безрозмірні величини

$$\psi_3(x/a) = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} a}{q} f_3(x), \quad \psi_6(x/a) = \frac{a}{q} f_6(x), \quad \chi(x) = \frac{h}{a}, \quad \gamma = \frac{\lambda_B}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \quad \frac{\alpha_B a}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \text{Bi}_B, \quad (19.23)$$

$$\mu = \frac{a}{\delta}, \quad \omega^2 a \delta = \text{Bi}, \quad q = \{q_m, q_{mm}/a\}.$$

Тоді для теплоізованого включення на межі поділу матеріалів

$$\begin{aligned} f_6(x) = & - \left[ \lambda \frac{\partial t^0}{\partial y} \right]_h, \quad - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi) d\xi}{\xi - x/a} + \int_{-1}^1 \psi_3(\xi) R_3(\xi, x) d\xi = \frac{\lambda_2 a}{q} \left\langle \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h, \\ & \int_{-1}^1 \psi_3(\xi) d\xi = 0 \quad (x \in [-a; a]), \end{aligned}$$

$$R_3(\xi, x) = \frac{\mu\text{Bi}}{2\pi} \int_{\xi}^1 \left\{ \ln \frac{\sqrt{\mu\text{Bi}}}{2} |\zeta - x| + C - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left[ \frac{\mu\text{Bi}(\zeta - x)^2}{4} \right]^n \left[ \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \frac{1}{2n+2} - C - \ln \frac{\sqrt{\mu\text{Bi}}}{2} |\zeta - x| \right] \right\} d\zeta; \quad (19.24)$$

для абсолютно теплопровідного включення (АТПВ) на межі поділу матеріалів

$$\tilde{f}_3(x) = -[t^0]_h, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_6(\xi) d\xi}{\xi - x/a} + \int_{-1}^1 \psi_6(\xi) R_6(\xi, x) d\xi = -\frac{a}{q} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial x} \right\rangle_h, \quad (19.25)$$

$$\int_{-1}^1 \psi_6(\xi) d\xi = Q_1^6/q \quad (x \in [-a; a]),$$

$$R_6(\xi, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu\text{Bi}}}{n!(n+1)!} \left[ \frac{\sqrt{\mu\text{Bi}}(\xi - x)^2}{4} \right]^{2n+1} \left[ \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \frac{1}{2n+2} - C - \ln \frac{\sqrt{\mu\text{Bi}}}{2} |\xi - x| \right];$$

для однорідної пластини з прошарком

$$-\frac{\chi(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi) d\xi}{\xi - x/a} + \gamma \int_{-1}^{x/a} \psi_3(\xi) d\xi - \chi(x) \int_{-1}^1 \psi_3(\xi) R_3(\xi, x) d\xi = \frac{F_5(x)}{q}, \quad (19.26)$$

$$\int_{-1}^1 \psi_3(\xi) d\xi = 0 \quad (x \in [-a; a]);$$

$$\frac{\gamma\chi(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_6(\xi) d\xi}{\xi - x/a} - \int_{-1}^{x/a} \psi_6(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 \psi_6(\xi) R_6^*(\xi, x) d\xi = \frac{F_6(x)}{q},$$

$$\int_{-1}^1 \psi_6(\xi) d\xi = Q_1^6/q \quad (x \in [-a; a]), \quad (19.27)$$

$$R_6^*(\xi, x) = \gamma\chi(x) R_6(\xi, x) - \frac{\mu\text{Bi}_B \chi(x)}{\pi} \int_{-1}^{x/a} K_0(\sqrt{\mu\text{Bi}} |\zeta - \xi|) d\zeta.$$

Розв'язування рівнянь (19.24)–(19.27) здійснювалося за допомогою методу колокацій (§ 7). Оскільки характеристичні частини рівнянь задач про плоске температурне поле однакові, то розв'язок СІР (19.24)–(19.27) шукаємо у вигляді (18.45), (18.61) при  $r = 3, 6$ .

Стосовно розподілу градієнтів температури в околі торців включення, то зазначимо, що [714, 747] структура першого члена асимптотичного розвинення розв'язку еліптичного рівняння в околі особливої точки повністю визначається старшим диференціальним оператором рівняння і типами особливої точки й крайових умов. Диференціальний оператор  $\Delta - \omega^2$  рівняння теплопровідності задачі про узагальнене плоске температурне поле є регулярно збуреним стосовно оператора Лапласа рівняння теплопровідності задачі про плоске температурне поле. Отже, перші члени асимптотичних розвинень теплових потоків в околі торців включення у пластині збігаються з аналогічними виразами (18.28), (18.35) для масиву (чи пластини з теплоізолюваними бічними поверхнями), де КІП визначаються формулою (18.64).

Для дослідження впливу тепловіддачі з бічних поверхонь пластини і включення за законом Ньютона на концентрацію температурного поля в околі включення конкретні обчислення подібно до п. 18.6 здійснені для: 1) джерела тепла потужності  $q_2 = -q_1 = q$  у точках



$z_2 = \bar{z}_1 = iy_*$ ,  $y_* = 2a$ ; 2) джерела тепла потужності  $q_2 = -q_1 = q$  у точках  $z_2 = -z_1 = x_*$ ,  $x_* = 2a$ .

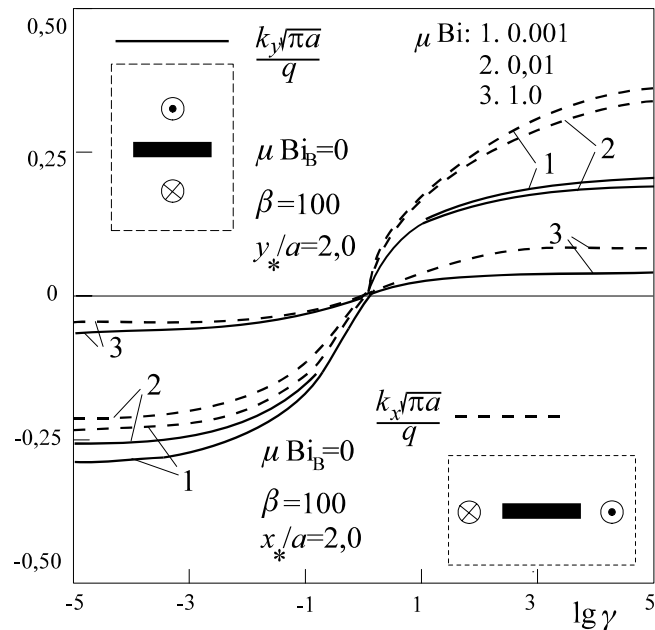


Рис. 19.1

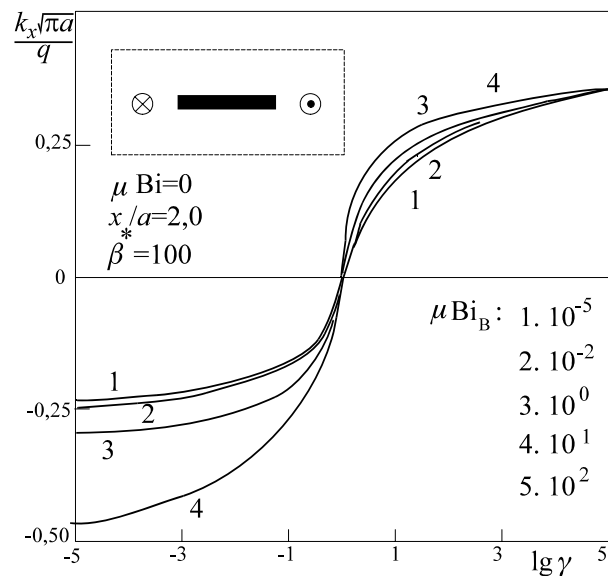


Рис. 19.2

На рис. 19.1 зображена залежність від  $\gamma$  та параметра  $\mu\text{Bi}$ , що визначає тепловіддачу з бічної поверхні пластин безрозмірних КІТП  $k_x\sqrt{\pi a}/q$  (суцільна лінія, навантаження за схемою 1) та  $k_y\sqrt{\pi a}/q$  (штрихова лінія, навантаження за схемою 2) за ідеального контакту ( $\text{Bi}_y = 10^{10}$ ), теплоізоляції бічних поверхонь включення ( $\mu\text{Bi} = 0$ ) змінної ширини  $h(x)$  (5.44) при  $h_0/a = 0,01$  та  $\beta = 100$ . Рис. 19.2 подає залежність  $k_x\sqrt{\pi a}/q$  від  $\gamma$  та  $\mu\text{Bi}_B$  для  $\text{Bi}_y = 10^{10}$ ,  $\mu\text{Bi} = 0$ ,  $\beta = 100$  для другого способу навантажування. Видно, що збільшення тепловіддачі з області включення або ж зменшення тепловіддачі з бічних поверхонь пластини спричиняє збільшення абсолютного значення КІТП.

## РОЗДІЛ V

### ЗАДАЧІ АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ТІЛ ЗІ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

З урахуванням аналогії [393] між антипласкою деформацією та теплопровідністю можна повністю перенести одержані у §§ 17, 18 результати для теплоактивних включень на межі поділу двох пластин за відсутності тепловіддачі з бічних поверхонь на випадок поздовжнього зсуву, замінивши формально коефіцієнти теплопровідності  $\lambda$ , температуру  $T$  тощо на модулі зсуву  $G$ , переміщення  $w$  та ін. Однак у цьому розділі будуть здійснені незалежні побудови, виходячи з можливостей та потреби механічної інтерпретації явищ.

#### § 20. Стрічкові включення в ізотропному середовищі

##### 20.1. Постановка задачі для стрічкового включення на межі поділу двох середовищ

Розглянемо ізотропний масив за умов поздовжнього зсуву уздовж осі  $z$  [951], що складається з двох півпросторів з модулями зсуву  $G_k$  ( $k = 1, 2$ ), якщо на межі поділу розташовані  $N$  тонких включень з іншого матеріалу (модулі зсуву  $G_B$  у кожного з включень можуть бути різними). Вивчатимемо напружено-деформований стан перерізу тіла площиною  $xOy$ , перпендикулярною до напрямку  $z$  зсуву. Межі поділу відповідає вісь  $Ox$  – лінія  $L = L' \cup L''$ , частина  $L' = \bigcup_{p=1}^N L'_p$  ( $L'_p = [a_p^-; a_p^+]$ ) якої відповідає серединним лініям перерізів включень, товщину яких визначає функція  $2h(x)$ .

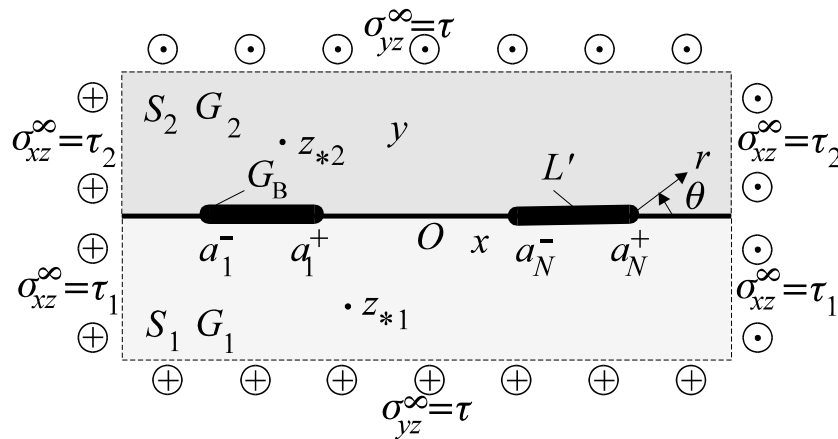


Рис. 20.1. Схема задачі

Зовнішнє навантаження визначають рівномірно розподілені на нескінченності напруження  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_k$  ( $z \in S_k, S_1 \sim \text{Re } z < 0; S_2 \sim \text{Re } z > 0, k = 1, 2$ ), сили  $Q_k$ , гвинтові дислокації зі складовою вектора Бюргерса  $b_k$ , силові та дислокаційні диполі у точках  $z_{*k} \in S_k$  (рис. 20.1). Значимо, що додатний напрям векторів сили та Бюргерса [461] обраний уздовж осі  $z$  (так, щоб з осями  $x, y$  утворювалася права система) на відміну від неявно прийнятого

у [706] та деяких інших протилежного напрямку. Одночасне використання однакового традиційного позначення для осі  $z$  та комплексної змінної  $z = x + iy$  не повинно викликати непорозумінь. На лінії  $L''$  поділу матеріалів півплощин – ідеальний механічний контакт.

Включення вважають настільки тонкими, що їхній вплив можна моделювати стрибком напружень і переміщень на  $L'$

$$[\sigma]_L = \mathbf{f} \text{ на } L, \quad (20.1)$$

де  $\sigma(z) = \{\sigma_{yz}(z), \partial w(z)/\partial x\}$  – вектор стану;  $\mathbf{f}(x) = \{f_3(x), f_6(x)\}$  – вектор стрибка,  $\{\mathbf{f}(x), f_r(x)\} = \{\mathbf{f}^p(x), f_r^p(x)\}$  якщо треба конкретизувати, що  $x \in L'_p$ . З урахуванням закону Гука (13.5) вираз (20.1) дає

$$[\sigma_{yz}]_{L'} = f_3(x), \quad [\sigma_{yz}/G]_{L'} = f_6(x) \quad (x \in L; f_r(x) = 0 \text{ якщо } x \in L'_p; r = 3, 6). \quad (20.2)$$

## 20.2. Спряження континуумів різної вимірності

У кожній з півплощин для вектора напруження

$$\mathbf{t}(z) = \{\sigma_{yz}(z), \sigma_{xz}(z)\} \sim \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z)$$

згідно з (13.23) можна записати

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(z) &= \omega'(z), \quad w(z) = \frac{\text{Im } \omega(z)}{G_k}, \quad \omega'(z) = \tau + i\tau_k + iS(z) + \omega'_0(z), \\ S(z) &= \sum_{k=1,2} \frac{Q_k + iG_k b_k}{2\pi(z - z_{*k})} \quad (z \in S_k, k = 1, 2), \end{aligned} \quad (20.3)$$

причому  $\omega'_0(z)$  – функція, що голоморфна у кожній з півплощин і зникає на нескінченності.

Підставляючи перше зі співвідношень (20.3) в умову (20.2) отримаємо

$$\begin{aligned} \left[ \tau + i\tau_1 + \overline{\omega'_0(x)} + \tau - i\tau_1 + \overline{\omega'_0(x)} \right] - \left[ \tau + i\tau_2 + \overline{\omega'_0(x)} + \tau - i\tau_2 + \overline{\omega'_0(x)} \right] &= 2f_5(x), \\ \left[ \tau + i\tau_1 + \overline{\omega'_0(x)} - \tau + i\tau_1 - \overline{\omega'_0(x)} \right] / \mu_1 - \\ - \left[ \tau + i\tau_2 + \overline{\omega'_0(x)} - \tau + i\tau_2 - \overline{\omega'_0(x)} \right] / \mu_2 &= 2if_6(x), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \left[ \omega'_0(x) - \overline{\omega'_0(x)} \right] - \left[ \omega'_0(x) - \overline{\omega'_0(x)} \right] &= -2f_5(x), \\ \left[ \omega'_0(x)/\mu_2 - \overline{\omega'_0(x)}/\mu_1 \right] - \left[ \omega'_0(x)/\mu_1 - \overline{\omega'_0(x)}/\mu_2 \right] &= -2f_6(x) + 2i[\tau_1/\mu_1 - \tau_2/\mu_2]. \end{aligned}$$

Оскільки  $f_6(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то з останньої залежності випливає, що  $\tau_1\mu_2 = \tau_2\mu_1$ , тобто напруження на нескінченності та пружні характеристики півплощин (півпросторів) пов'язані між собою.

Тепер попередні співвідношення запишемо простіше:

$$\begin{aligned} \left[ \omega'_0(x) - \overline{\omega'_0(x)} \right] - \left[ \omega'_0(x) - \overline{\omega'_0(x)} \right] &= -2f_5(x), \\ \left[ \omega'_0(x)/\mu_2 - \overline{\omega'_0(x)}/\mu_1 \right] - \left[ \omega'_0(x)/\mu_1 - \overline{\omega'_0(x)}/\mu_2 \right] &= -2if_6(x). \end{aligned}$$

Розв'язки цих задач лінійного спряження, які прямують до нуля на нескінченності такі:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{-2f_5(t) dt}{t-z} \equiv it_5(z) = \begin{cases} \omega'_0(z) - \overline{\omega'_0(z)} & (z \in S_2), \\ \omega'_0(z) - \overline{\omega'_0(z)} & (z \in S_1), \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{-2if_6(t) dt}{t-z} \equiv -t_6(z) = \begin{cases} \omega'_0(z)/\mu_2 + \overline{\omega'_0(z)}/\mu_1 & (z \in S_2), \\ \omega'_0(z)/\mu_1 + \overline{\omega'_0(z)}/\mu_2 & (z \in S_1), \end{cases}$$

або більш стисло –

$$it_5(z) = \omega'_0(z) - \overline{\omega'_0(z)}, \quad -t_6(z) = \omega'_0(z)/\mu_k + \overline{\omega'_0(z)}/\mu_l \quad (z \in S_k; k, l = 1, 2; k \neq l).$$

На основі отриманих залежностей з урахуванням (20.3) можна стверджувати, що

$$\omega'_0(z) = -ct_6(z) + ip_k t_5(z), \quad c = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad p_k = \frac{\mu_k}{\mu_1 + \mu_2},$$

а отже,

$$\tau(z) = ip_k t_3(z) - ct_6(z) + \tau^0(z), \quad \tau^0(z) = \left\{ \sigma_{yz}^0(x); \sigma_{xz}^0(x) \right\}, \quad p_k = G_k p, \quad p = \frac{1}{G_1 + G_2},$$

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) \equiv c_k(z) = \tau + i \left\{ \tau_k + S(z) + n_{kl} p_k S^*(z) \right\}, \quad S^*(z) = S_1(z) + \overline{S_k(z)}, \quad (20.4)$$

$$n_{kl} = \frac{G_k - G_l}{G_k}, \quad t_r^p(z) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{f_r(t) dt}{t-z}, \quad c = G_1 G_2 p \quad (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2; l = 3 - k),$$

де  $\sigma_{ytk}^0(z) + i\sigma_{xtk}^0(z) = \tau + i\tau_k$  – однорідний розв'язок, тобто напруження у кусково-однорідному масиві за відсутності розрізів. Якщо у тілі задана інша система навантажувальних чинників, для якої відомий однорідний зв'язок, то його слід підставити у залежність (20.4) для побудови розв'язку відповідної задачі теорії тріщин.

Отримана вище умова матеріалів

$$\tau_2 G_1 = \tau_1 G_2. \quad (20.5)$$

свідчить про залежність напружень на нескінченності від модулів зсуву. Якщо вважати, що на межі поділу матеріалів зроблено два півбезмежні розрізи, то виконання цієї умови не обов'язкове. Вона отримується також і з умови ідеального механічного контакту на нескінченності та закону Гука:

$$\sigma_{yz1}^\infty = \sigma_{yz2}^\infty = \tau, \quad w_1^\infty = w_2^\infty \rightarrow \frac{\partial w_1^\infty}{\partial x} = \frac{\partial w_2^\infty}{\partial x}; \quad \tau_k = \sigma_{xzk}^\infty = G_k \frac{\partial w_k^\infty}{\partial x} \rightarrow \frac{\tau_1}{G_1} = \frac{\tau_2}{G_2}.$$

Вираз (20.4) збігається з (2.24), одержаним за допомогою формули Сомільяно.

Застосування формул Сохоцького – Племеля [635, 112] дає граничні значення напружень на  $L$

$$\sigma_{yz}^\pm(x) = \mp p_k f_3(x) - ct_6(x) + \sigma_{yz}^{0\pm}(x), \quad \sigma_{xz}^\pm(x) = \mp cf_6(x) + p_k t_3(x) + \sigma_{xz}^{0\pm}(x), \quad k = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}. \quad (20.6)$$

Верхній індекс стосується значення  $k = 2$ ; нижній –  $k = 1$ .

Якщо матеріали півплощин однакові ( $G_1 = G_2 = G$ ), то  $n_{kl} = 0$ ,  $p_k = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{G}{2}$ ,

$$\tau(z) = \frac{i}{2} t_3^*(z) + \tau^0(z), \quad t_3^*(z) = t_3(z) + iGt_6(z), \quad f_3^*(z) = f_3(z) + iGf_6(z). \quad (20.7)$$

Якщо у виразах (20.4) і (20.7) функції стрибка задати як дельта-функції

$$f_r(t) = f_r \delta(t), \quad f_3 = Q, \quad f_6 = b \quad (20.8)$$

та знехтувати зовнішнім навантаженням  $\mathbf{T}^0(z) = 0$ , то отримаємо вирази вектора напружень для зосередженої сили  $Q$  та гвинтової дислокації  $b$  у початку системи координат на межі поділу матеріалів:

$$\mathbf{T}(z) = \frac{cb - ip_k Q}{\pi z} \quad (20.9)$$

або дещо простіше в однорідній матриці

$$\mathbf{T}(z) = \frac{Gb - iQ}{2\pi z} \quad (20.10)$$

Таким чином, метод функцій стрибка стосовно задач поздовжнього зсуву означає моделювання тонких включень у деформованих тілах розподіленими на поверхні, що відповідає середній поверхні включення, силами та гвинтовими дислокаціями з невідомою наперед густиною розподілу. Важливо зазначити, що дія зосередженої сили у ізотропному пружному середовищі еквівалентна впливу дислокації суто уявної інтенсивності (з точністю до множника  $Q \sim iGb$ ) і навпаки.

### 20.3. Система прямолінійних включень в однорідному ізотропному середовищі

Розглянемо  $N+1$  тонкостінне включення в однорідній ізотропній площині з модулем зсуву  $G \sim G_0$ . Середина лінія  $L'_p$   $p$ -го включення ( $p = \overline{0, N}$ ) належить осі абсцис  $L_p$  локальної системи координат  $x_p O_p y_p$ , що визначає комплексну змінну  $z_p = x_p + iy_p$ . Координати точки  $O_p$  в основній системі  $x O y \sim x_0 O_0 y_0$  визначаються значеннями  $z_0 = z_{0p}$ ; вісь  $x_p$  утворює з віссю  $x \sim x_0$  кут  $\alpha_p$  ( $z_{00} = 0, \alpha_0 = 0$ ).

Зовнішнє навантаження довільного типу (наприклад напруження на нескінченності, сила  $Q_1$  та дислокація  $b_1$  у точці  $z_{*1}^0$  основної системи координат  $x_0 O_0 y_0$ ) за відсутності включень визначає в основній системі координат вектор напружень

$$\mathbf{T}^{00}(z_0) = \tau + i\tau_1 + iS_0^0(z_0), \quad S_0^p(z_p) = \frac{Q_k + iG_k b_k}{2\pi(z - z_{*1}^p)}, \quad z_{*1}^p = (z_{*1}^0 - z_{0p})e^{-i\alpha_p}. \quad (20.11)$$

Для одного включення уздовж лінії  $L'_m$  однорідної площини згідно з (20.7) та використанням функції  $f_{3m}^{m*}(z_m) = f_{3m}^m(z_m) + iGf_{6m}^m(z_m)$  маємо

$$\mathbf{T}_m(z) = \frac{i}{2} t_{3m}^{m*}(z_m), \quad t_{3m}^{m*}(z_m) = t_{3m}^m(z_m) + iGf_{6m}^m(z_m). \quad (20.12)$$

Позначимо через  $\mathbf{T}_m^p(z_p)$ ,  $\mathbf{T}^{0p}(z_p)$  вирази для векторів напруження  $\mathbf{T}_m(z_m)$ ,  $\mathbf{T}^{00}(z_0)$  у  $p$ -ій системі;  $\sigma_{xzm}$ ,  $\sigma_{yzm}$  – напруження у  $m$ -ій системі і з урахуванням (13.26), яке у даному випадку дає  $\sigma_{yz0} + i\sigma_{xz0} = (\sigma_{yzm} + i\sigma_{xzm}) \exp(-i\alpha_m)$ , запишемо

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_m^p(z_p) &= \mathbf{T}_m(z_m^p) e^{i\alpha_{pm}}, \quad \mathbf{T}^{0p}(z_p) = iS_0^p(z_p) + (\tau + i\tau_1) e^{i\alpha_p}, \\ z_m^p &= (Z_p - z_{0m}) e^{-i\alpha_m}, \quad Z_p = z_p e^{i\alpha_p} + z_{0p}, \quad \alpha_{pm} = \alpha_p - \alpha_m. \end{aligned} \quad (20.13)$$

За принципом суперпозиції у  $p$ -ій системі координат

$$\begin{aligned} \tau_p(z_p) &= \sum_{m=0}^N \tau_m^p(z_p) + \tau^{0p}(z_p), \quad \sigma_{yzp}^0(z_p) + i\sigma_{xzp}^0(z_p) = iS_0^p(z_p) + (\tau + i\tau_1)e^{i\alpha_p}, \\ \sigma_{yzp}(z_p) + i\sigma_{xzp}(z_p) &= \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L'_m} P_{pm}(t, z) f_{3m}^*(t) dt + \sigma_{yzp}^0(z_p) + i\sigma_{xzp}^0(z_p), \end{aligned} \quad (20.14)$$

$$P_{pm}(t, z) = \frac{\exp(i\alpha_p)}{T_m - Z_p}, \quad T_m = te^{i\alpha_m} + z_{0m} \quad (p = \overline{0, N}),$$

а використання формул Сохоцького – Племеля [635, 112] дає граничні значення напружень на осі кожного  $p$ -го включення

$$\begin{aligned} \sigma_{yzp}^{\pm}(x_p) + i\sigma_{xzp}^{\pm}(x_p) &= \mp \frac{1}{2} f_{3p}^*(x_p) + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L'_m} P_{pm}(t, x) f_{3m}^*(t) dt + \\ &+ \sigma_{yzp}^0(x_p) + i\sigma_{xzp}^0(x_p), \quad P_{pm}(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_p)}{T_m - X_p}, \quad X_p = x_p e^{i\alpha_p} + z_{0p} \quad (p = \overline{0, N}). \end{aligned} \quad (20.15)$$

#### 20.4. Система прямолінійних включень в ізотропному півпросторі

Нехай включення з нульовим номером має безмежну величину  $L'_0 = (-\infty; \infty)$ , а всі інші включення розташовані у нижній півплощині. Тоді на основі формули обернення СІР [636] зі співвідношення (20.15), взятого при  $p = 0$  випливає

$$f_{30}^*(\eta) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sigma_{yz0}^{\pm} + i\sigma_{xz0}^{\pm} \pm \frac{1}{2} f_{30}^* - \sigma_{yz0}^0 - i\sigma_{xz0}^0 \right\} \frac{dt}{t - \eta} + \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} P_{0m}(t, \eta) f_{3m}^*(t) dt. \quad (20.16)$$

Визначаючи  $f_{30}(\eta)$  як дійсну частину виразу (20.16), після підставлення отриманого виразу у решту співвідношень (20.15) при  $p = 1 \dots N$  маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yzp}^{\pm}(x_p) + i\sigma_{xzp}^{\pm}(x_p) &= \mp \frac{1}{2} f_{3p}^*(x_p) + I^+(x_p) - I_x(x_p) + \sigma_{yzp}^0(x_p) + i\sigma_{xzp}^0(x_p), \\ I^{\pm}(x_p) &= \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ P_{pm}^{\mp}(t, x) f_{3m}^*(t) + iGP_{pm}^{\pm}(t, x) f_{6m}(t) \right\} dt, \\ I_a(x_p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{p0}(t, x) \left( \sigma_{az0}^-(t) - \sigma_{az0}^0(t) \right) dt \quad (a = x, y; p = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (20.17)$$

$$P_{pm}^{\pm}(t, x) = P_{pm}(t, x) \pm P_{pm}^*(t, x), \quad P_{pm}^*(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_p)}{\overline{T}_m - X_p}.$$

Аналогічним чином, визначаючи з (20.16) функцію  $f_{60}(\eta)$  як поділену на  $G$  уявну частину функції  $f_{30}^*(\eta)$ , отримаємо вираз, подібний до першого у (20.17)

$$\sigma_{yzp}^{\pm}(x_p) + i\sigma_{xzp}^{\pm}(x_p) = \mp \frac{1}{2} f_{3p}^*(x_p) + I^-(x_p) + iI_y(x_p) + \sigma_{yzp}^0(x_p) + i\sigma_{xzp}^0(x_p). \quad (20.18)$$

Під час побудови формул (20.17), (20.18) використані залежності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ P_{0m}(t, \eta), P_{p0}(\eta, t) \right\} \frac{d\eta}{\eta - z} = \pi i \left\{ P_{0m}(t, x), P_{p0}(x, t) \right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ P_{0m}(t, \eta), \overline{P_{0m}(t, \eta)} \right\} P_{p0}(\eta, x) d\eta = \left\{ 0, -2\pi i P_{pm}^*(t, x) \right\}. \quad (20.19)$$

Залежністю (20.17) слід користуватися, якщо на межі півпростору (півплощини) задані похідні переміщення  $w'^-(x) \equiv \sigma_{xz0}^-(x)/G$ ; виразом (20.18) – за даних на межі тіла дотичних напружень  $\sigma_{yz0}^-$ .

Замінивши у (20.17), (20.18) формально  $x_p$  на  $z_p$ , відкинувши знаки  $\pm$  та члени  $\frac{1}{2} f_{3p}^*(x_p)$ , отримаємо вирази для напружень у довільній точці півпростору.

### 20.5. Включення криволінійної конфігурації

Отримані у попередніх підпунктах результати природно узагальнити на випадок, якщо  $L'_p$  – довільні гладкі криві, задані параметрично рівнянням  $z_0 = z_p^*(x) \equiv x_p^*(x) + iy_p^*(x)$ . Внаслідок можливості розглядати таку лінію як границю сукупності стичних прямолінійних відрізків, зазначимо, що співвідношення (20.14) зберігають свою силу, якщо припустити, що

$$T_p = z_p^*(x), \quad \alpha_p \sim \alpha_p(t) \equiv \operatorname{arctg} \left( y_p^{*'}(t) / x_p^{*'}(x) \right),$$

$$f_{3p}^*(t) = \sigma_{nzp}^-(t) - \sigma_{nzp}^+(t) + i \left( \sigma_{\tau zp}^-(t) - \sigma_{\tau zp}^+(t) \right). \quad (20.20)$$

Тут  $n, \tau$  у множині індексів визначають напрямки нормалі і дотичної у відповідній точці  $z_p^*(t)$  лінії  $L'_p$ . Формула (20.15) у цьому перетворюється у

$$\sigma_{nzp}^{\pm}(x) + i\sigma_{\tau zp}^{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2} f_{3p}^*(x) + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L'_m} P_{pm}(t, x) f_{3m}^*(t) dt +$$

$$+ \sigma_{nzp}^0(x) + i\sigma_{\tau zp}^0(x) \quad (p = \overline{0, N}), \quad (20.21)$$

причому  $X_p = z_p^*(x)$ ,  $\alpha_p \sim \alpha_p(x)$ ;  $x$  – значення натурального параметра на дузі. Подібним чином змінюються і вирази (20.17), (20.18) для випадку скривлених включень у півпросторі.

Якщо підставити ці вирази в умову  $\sigma_{nzp}^{\pm} = 0$  ( $p = \overline{0, N}$ ), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для викривленої тріщини, аналогічне (з урахуванням аналогії Г.С.Кіта [393]) сингулярному інтегральному рівнянню [401]. Використання спрощених умов взаємодії (11) [393] (тріщина з термоопором) дає на основі згаданої аналогії результати [1052] для пружного дугового включення, що деформується за найпростішим вінклеровим законом.

### 20.6. Асимптотичні формули

Використання аналогії Г.С.Кіта [393] дає можливість скористатися асимптотичними залежностями (18.28), (18.29) для включення на межі поділу, замінивши у них

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T-T^0)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(w-w^0)}{\partial x} &= \frac{\sigma_{xz} - \sigma_{xz}^0}{G_k}, \quad \frac{\partial(T-T^0)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial(w-w^0)}{\partial y} = \frac{\sigma_{yz} - \sigma_{yz}^0}{G_k}, \\ q_x - q_x^0 &\rightarrow -(\sigma_{xz} - \sigma_{xz}^0), \quad q_y - q_y^0 \rightarrow -(\sigma_{yz} - \sigma_{yz}^0), \quad q_n - q_n^0 \rightarrow -(\sigma_{nz} - \sigma_{nz}^0), \\ q_\tau - q_\tau^0 &\rightarrow -(\sigma_{\tau z} - \sigma_{\tau z}^0), \quad \lambda \rightarrow G, \quad f_3 \rightarrow f_6, \quad f_6 \rightarrow f_3, \quad t_3 \rightarrow t_6, \quad t_6 \rightarrow t_3, \\ k_x^\pm &\sim \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} K_x^\pm \rightarrow -K_{3,2}^\pm, \quad k_y^\pm \sim \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} K_y^\pm \rightarrow -K_{3,1}^\pm, \quad n_3^\pm \rightarrow n_6^\pm, \quad n_6^\pm \rightarrow n_3^\pm, \end{aligned}$$

де  $K_{3,1}$ ,  $K_{3,2}$  – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН) для поздовжнього зсуву. Знаки "+" та "-" стосуються правого та лівого торців відповідно.

Для міжфазного пружного вклучення в антиплоскій задачі, так само, як і випадку задачі теплопровідності, осциляції не буде, однак особливість не буде кореневою. Якщо ж матеріали півплощин пружно еквівалентні ( $G_1 = G_2$ ), або якщо міжфазне вклучення абсолютно жорстке чи абсолютно податне, то особливість напружень буде кореневою і асимптотики спрощуються. Зокрема, якщо вклучення (пласке чи вигнуте) розміщене у однорідному матеріалі, то справедливі простіші асимптотичні залежності (18.35), (18.35<sup>2</sup>), (18.36), які для розглядуваного тут випадку набудуть вигляду [111]

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sigma_{yz} - \sigma_{yz}^0 \\ \sigma_{xz} - \sigma_{xz}^0 \end{cases} &= \frac{K_{3,1}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{cases} + \frac{K_{3,2}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \pm \frac{1}{2} \begin{cases} -Gq_6^\pm \\ q_3^\pm \end{cases} + O(r^{1/2}), \\ \begin{cases} \sigma_{rz} - \sigma_{rz}^0 \\ \sigma_{\theta z} - \sigma_{\theta z}^0 \end{cases} &= \pm \frac{K_{3,1}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \pm \frac{K_{3,2}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} q_3^\pm \cos \theta - Gq_6^\pm \sin \theta \\ -q_3^\pm \sin \theta - Gq_6^\pm \cos \theta \end{cases} + O(r^{1/2}), \\ w - w^0 &= \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{\pi G}} \left[ K_{3,1} \sin \frac{\theta}{2} + K_{3,2} \cos \frac{\theta}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[ q_3^\pm \frac{a + r \cos \theta}{G} - q_6^\pm \sin \theta \right] + O(r^{3/2}), \quad (20.22) \\ K_{3,2} - iK_{3,1} &= \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( p_3^\pm + iGp_6^\pm \right), \end{aligned}$$

$$p_r^\pm = \lim_{s_m \rightarrow 0} \left[ \sqrt{s_m} f_r^m(x) \right], \quad n_r^\pm = \pm \frac{1}{2} q_r^\pm = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a_m^\pm \mp 0} t_r^m(x), \quad t_r^m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{L'_m} \frac{f_r^m(t)}{t-x} \quad (x \in L'_m).$$

Дугова відстань  $s_m$  від точки  $t$  на осі  $L'_m$  вклучення до її кінця  $a_m^\pm$ , тобто в разі прямування до лівого краю  $s_m = t - a_m^- \sim t + a$ , а у разі прямування до правого вістря –  $s_m = a_m^+ - t \sim a - t$  ( $2a = a_m^+ - a_m^-$ ).

У випадку щілини УКІН  $K_{3,1}$  відповідає класичний КІН  $K_3$ , а  $K_{3,2} = 0$ . Загалом  $K_{3,1}$  відповідає за гнучку,  $K_{3,2}$  – за штивну частину розподілу (за термінологією [74]). Вирази (18.35), (18.35<sup>2</sup>) збігаються у своїй першій (сингулярній) частині з отриманими у [74] для гострокінцевих пружних вклучень довільної форми, зокрема, гіпоциклоїдної і гіпотрохоїдної.

За допомогою формули (20.22) легко з'ясувати фізичний сенс УКІН. Якщо прийняти  $\theta = 0$  і  $\theta = \pi$ , то

$$K_{3,1} = \lim_{r \rightarrow 0 (\theta=0)} \left( \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz} \right), \quad K_{3,2} = \lim_{r \rightarrow 0 (\theta=\pi)} \left( \sqrt{2\pi r} \sigma_{xz} \right).$$



Застосування формул (18.35), (18.35<sup>2</sup>), (18.36), (20.22) до криволінійних включень вимагає орієнтування осі  $x_{pm}$  локальної системи координат уздовж напрямку дотичної у відповідному кінці лінії  $L'_p$ .

## 20.7. Побудова інтегральних рівнянь

Підставляючи граничні значення напружень на лінії стрибка, куди крім однорідного розв'язку входять функції стрибка, в умови взаємодії (§ 15), отримуємо інтегральні рівняння стосовно функцій стрибка, аналогічні рівнянням (18.25) (вважається, що контакт між включенням і матрицею ідеальний). У конкретному випадку використання умов взаємодії основної моделі (15.1) отримуємо

$$\begin{aligned} \rho_{31}t_3(x) + \rho_{32}s_{3p}(x) + \rho_{33}f_6(x) &= F_3(x), \\ \rho_{61}t_6(x) + \rho_{63}s_{6p}(x) + \rho_{64}f_3(x) &= F_6(x) \quad (x \in L'_p; p = \overline{0, N}), \end{aligned} \quad (20.23)$$

де

$$\begin{aligned} \rho_{31} &= -2ch, \quad \rho_{32} = G_B, \quad \rho_{33} = -(p_2 - p_1)h, \quad \rho_{61} = 2G_Bph, \quad \rho_{63} = -1, \\ \rho_{64} &= G_B(p_2 - p_1)h, \quad F_3(x) = -G_1G_2h \left[ \frac{2\sigma_{xz}^c(a_n^-)}{G_B} - \frac{\sigma_{xz}^0(x+ih)}{G_2} - \frac{\sigma_{xz}^0(x-ih)}{G_1} \right], \\ F_6(x) &= \frac{G_Bh}{G_1G_2} (G_{B2}\sigma_{yz}^0(x+ih) + G_{B1}\sigma_{yz}^0(x-ih) - G_Bw_-^*), \quad G_{Bk} = \frac{G_k - G_B}{G_k}. \end{aligned}$$

Додаткові умови (15.6) при  $Q = 0$  (у даному випадку за відсутності прикладених до включення зусиль) еквівалентні

$$\int_{L'_p} f_r(t) dt = 0 \quad (r = 3, 6; p = \overline{0, N}). \quad (20.24)$$

Величини  $\sigma_{xz}^c(a_n^-)$ ,  $w_-^*$  визначають з апіорних залежностей, наприклад, (15.3) чи інших міркувань, подібних до наведених у п. 18.4.

Якщо  $h \rightarrow 0$  і  $G_B = 0$  або  $G_B = \infty$ , то з (20.23) випливають результати для **щільни та абсолютно жорсткої плівки** (АЖП) на межі поділу матеріалів відповідно:

$$\begin{aligned} f_3(x) = 0, \quad n_3^\pm = 0, \quad t_6(x) = \sigma_{yz}^0(x)/c \equiv \Phi_6(x), \quad n_6^\pm = \sigma_{yz}^0(a_n^\pm)/G \\ (\text{необхідно, щоб } \sigma_{xz}^c(a_n^-) = 0); \end{aligned} \quad (20.25)$$

$$\begin{aligned} f_6(x) = 0, \quad n_6^\pm = 0, \quad t_3(x) = -\sigma_{xz}^0(x)/p_2 \equiv \Phi_3(x), \quad n_3^\pm = -\sigma_{xz}^0(a_n^\pm) \\ (\text{необхідно, щоб } w_-^* = 0). \end{aligned} \quad (20.26)$$

Для **абсолютно жорсткого включення** (АЖВ) з ненульовою товщиною слід припустити  $G_B = \infty$ ,  $w_-^* = 0$  і тоді (20.23) зведеться до

$$\begin{aligned} s_{6q}(x) \equiv \int_{a_q^-}^x f_6(t) dt = -h(x) \left[ \frac{\sigma_{yz}^0(x+ih)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz}^0(x-ih)}{G_1} \right], \\ t_3(x) + \frac{\rho_{33}}{\rho_{31}} f_6(x) = -\frac{1}{2p} \left[ \frac{\sigma_{xz}^0(x+ih)}{G_2} + \frac{\sigma_{xz}^0(x-ih)}{G_1} \right] \quad (x \in L'_q; q = \overline{0, N}). \end{aligned} \quad (20.27)$$

Неважко довести, що внаслідок (20.27) стрибок переміщень на берегах абсолютно жорсткого включення  $w(x-ih) - w(x+ih)$  в рамках наближень п. 15.1 нульовий.

Якщо матеріали півплощин ідентичні ( $G_1 = G_2 = G_B$ ), то  $\rho_{33} = \rho_{64} = 0$  і система рівнянь (20.23) розділюється на два незалежні рівняння

$$\begin{aligned} \rho_{31}t_3(x) + \rho_{32}s_{3p}(x) &= F_3(x), \\ \rho_{61}t_6(x) + \rho_{63}s_{6p}(x) &= F_6(x) \quad (x \in L'_p; p = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (20.23^1)$$

Якщо матеріали півплощин та включення ідентичні ( $G_1 = G_2 = G$ ), то (20.23) дає  $f_3(x) = f_6(x) = 0$ , що приводить до розв'язку для однорідної площини (простору). Запропоновані іншими авторами [1052, 393, 710] підходи до розв'язування задач антиплоского зсуву тіл з пружними включеннями не дають можливості отримати настільки точні розв'язки у двох останніх випадках.

### 20.8. Одне включення в однорідній матриці

Детальніше вивчимо випадок одного включення уздовж  $L' = [-a; a]$  ( $N = 1, a_1^- = -a, a_1^+ = a$ ) у однорідній матриці ( $G_1 = G_2 = G$ ). Тоді відповідно до (20.23<sup>1</sup>) система рівнянь (20.23) розділена на два незалежні рівняння

$$\begin{aligned} \rho_{31}t_3(x) + \rho_{32}s_{3p}(x) &= F_3(x), \\ \rho_{61}t_6(x) + \rho_{63}s_{6p}(x) &= F_6(x) \quad (x \in [-1; 1]), \end{aligned} \quad (20.28)$$

розв'язок яких можна шукати у вигляді

$$f_r(x) = \left[1 - (x/a)^2\right]^{-1/2} \varphi_r(x/a), \quad \varphi_r(x) = \sum_{n=0}^N A_n^r T_n(x) \quad (r = 3, 6). \quad (20.29)$$

Тоді

$$\begin{aligned} t_r(z) &= -\frac{a}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sum_{n=0}^N A_n^r \rho^{-n}, \quad \int t_r(z) dz = -a \left[ A_0^r \ln \frac{\rho}{2} - \sum_{n=1}^N \frac{A_n^r}{n \rho^n} \right], \\ t'_r(z) &= \frac{a}{z^2 - a^2} \sum_{n=0}^N A_n^r \rho^{-n} \left( n + \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right), \quad \rho = \frac{1}{a} \left[ z + \sqrt{z^2 - a^2} \right]. \end{aligned} \quad (20.30)$$

З урахуванням цього напружено-деформований стан тіла дають вирази

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) &= \frac{-ia}{2\sqrt{z^2 - a^2}} \sum_{n=0}^N (A_n^3 + iGA_n^6) \rho^{-n} + \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z), \\ w(z) &= \frac{-a}{2G} \operatorname{Re} \left\{ \left( A_0^3 + iGA_0^6 \right) \ln \frac{\rho}{2} - \sum_{n=1}^N \left( A_n^3 + iGA_n^6 \right) / (n \rho^n) \right\} + w^0(z), \\ K_{3,2} - iK_{3,1} &= \mp \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n (A_n^3 + iGA_n^6), \quad n_r^\pm = \pm \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n n A_n^r. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Тобто коефіцієнти розвинення (20.29), які визначаються методами ортогональних многочленів чи колокацій (розд. II), повністю визначають усі характеристики напружено-деформованого стану.

У випадку включення еліптичного профілю (вираз (5.44) за  $\beta = 1$ ) побудована система лінійних алгебричних рівнянь (20.31) дає замкнутий розв'язок

$$A_0^r, A_n^r = \frac{2nf_{n-1}^r}{\pi(n + \alpha_{0r})\rho_{r1}} \quad (n \geq 1), \quad (20.32)$$

$$\alpha_{0r} = \frac{\alpha_r a}{h_0}, \quad \alpha_3 = \frac{G}{G_B}, \quad \alpha_6 = \frac{G_B}{G}, \quad f_k^r = \int_{-1}^1 F_r(at) \sqrt{1-t^2} U_k(t) dt.$$

Тоді згідно з (20.30)

$$\varphi_r(\pm a) = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n n f_{n-1}^r}{(n + \alpha_{0r})\rho_{r1}}, \quad n_r^{\pm} = \pm \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n n^2 f_{n-1}^r}{(n + \alpha_{0r})\rho_{r1}}. \quad (20.33)$$

**Зауваження.** Оскільки під час постановки задачі збурене поле з поверхонь контакту з включенням зносилося на його серединну поверхню, то обчислюючи  $t_r(z)$ ,  $\int t_r(z) dz$  замість  $z = x + iy$  можна брати  $z_1 = z - \text{sign}(y)h(x)$ . Таким чином, якщо точка  $z$  лежить на межі включення, то  $z_1 = x$ . Обчислення свідчать, що це дає можливість дещо підвищити точність розв'язування поставленої задачі. ■

## 20.9. Дія однорідного поля напружень на нескінченності

У випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності ( $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1$ )

$$\sigma_{yz}^0(z) = \tau, \quad \sigma_{xz}^0(z) = \tau_1, \quad w^0(z) = \frac{1}{G}(\tau y + \tau_1 x). \quad (20.34)$$

Тоді для тріщини уздовж відрізка  $[-a; a]$

$$f_3(x) = 0, \quad f_6(x) = \frac{2\tau x}{G\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad K_{3,1} = \tau\sqrt{\pi a}, \quad K_{3,2} = 0, \quad n_3^{\pm} = 0, \quad n_6^{\pm} = \frac{\tau}{G}; \quad (20.35)$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + i\tau_1, \quad w(z) = \frac{1}{G} \text{Im} \left[ \tau \sqrt{z^2 - a^2} + i\tau_1 z \right]; \quad (20.36)$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \frac{\tau\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right] + i\tau_1 + O(r^{1/2}),$$

$$\sigma_{rz}(z) - i\sigma_{\theta z}(z) = \pm \left( \frac{\tau\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left[ \sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right] + \tau_1 (\cos \theta + i \sin \theta) \right) + O(r^{1/2}), \quad (20.37)$$

$$w = \pm \frac{1}{G} \left[ \tau \sqrt{2ra} \sin \frac{\theta}{2} + \tau_1 (a + r \cos \theta) \right] + O(r^{3/2}).$$

Для відповідної **абсолютно жорсткої плівки**

$$f_3(x) = \frac{-2\tau_1 x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad f_6(x) = 0, \quad K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = \tau_1 \sqrt{\pi a}, \quad n_3^{\pm} = -\tau_1, \quad n_6^{\pm} = 0; \quad (20.38)$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \tau + \frac{i\tau_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad w(z) = \frac{1}{G} \text{Im} \left[ \tau z + i\tau_1 \sqrt{z^2 - a^2} \right]; \quad (20.39)$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \frac{\tau_1\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left[ \sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right] + \tau + O(r^{1/2}),$$

$$\sigma_{rz}(z) - i\sigma_{\theta z}(z) = \pm \left( \frac{\tau_1\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right] + \tau (\sin \theta - i \cos \theta) \right) + O(r^{1/2}), \quad (20.40)$$

$$w = \pm \frac{1}{G} \left[ \tau_1 \sqrt{2ra} \cos \frac{\theta}{2} + \tau r \sin \theta \right] + O(r^{3/2}).$$

Для пружного включення еліптичного профілю згідно з (20.32), (20.33)

$$\begin{aligned}
 f_r(x) &= \frac{A_1^r x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad K_{3,1} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} G A_1^6, \quad K_{3,2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi a} A_1^3, \quad n_r^\pm = \frac{A_1^r}{2} \quad (r = 3, 6), \\
 A_1^r &= \frac{F_r}{1 + \alpha_{0r}}, \quad \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \frac{i}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) (A_1^3 + iG A_1^6) + \tau + i\tau_1, \\
 F_3 &= 2G \left[ \frac{\sigma_{xz}^c(-a)}{G_B} - \frac{\tau_1}{G} \right], \quad w = \frac{1}{G} \operatorname{Im} \left[ \left( z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) (iA_1^3 - G A_1^6) + (\tau + i\tau_1) z \right], \\
 F_6 &= \frac{2(G - G_B)\tau - G G_B w_-^*}{G^2}.
 \end{aligned} \tag{20.41}$$

Якщо  $G_B = 0$ , то звідси теж впливають вирази для щілини ( $A_1^3 = 0$ ,  $A_1^6 = 2\tau/G$ ); при  $G_B = \infty$  – для абсолютно жорсткого включення, якщо  $A_1^3 = -2\tau_1$ ,  $A_1^6 = -2\tau h_0/(Ga)$ ; при  $G_B = \infty$ ,  $h_0 = 0$  – для абсолютно жорсткої плівки ( $A_1^3 = -2\tau_1$ ,  $A_1^6 = 0$ ).

Числові розрахунки здійснені з використанням методу колокацій для  $a/h_0 = 10$  та різних значень відносної жорсткості включення  $k = G_B/G$  і параметра форми  $\beta$  включення змінної товщини  $h(x)$  (5.44). Враховувалися перші 25 ненульових членів розвинення функцій стрибка у ряди, щоб забезпечити точність обчислень не меншу від 1%. Загальною тенденцією є збільшення абсолютного значення УКІН зі збільшенням  $\beta$  від  $\beta = 1$  (еліптичний профіль) до  $\beta = \infty$  (прямокутний профіль).

### Зсув у площині включення

На рис. 20.2 подана залежність  $K_{3,1}$  ( $K_{3,2} = 0$ ) від  $k$  та  $\beta$  при  $\tau_1 = 0$ . Виявилось, що  $K_{3,1}$  для відносно податних включень залежить від форми включення незначно, однак, для великих  $k$  вплив форми є доволі значним і не дає нульових значень  $K_{3,1}$ . Разом з тим за такого навантаження і  $k = \infty$  за результатами праці [1052, 393]  $K_{3,1} = 0$ .

Рис. 20.3 подає відповідні значення зведеного переміщення  $w/(\tau a)$  на верхньому березі включення. Суцільні лінії відповідають еліптичному профілю, штрихові – прямокутному ( $\beta = 10^4$ ). Підтверджується очікуване прямування  $w$  до нуля за збільшення параметра  $k$ .

У табл. 20.1 містяться числові значення зведеного переміщення  $w/(\tau a)$  поблизу абсолютно жорсткого прямокутного включення, одержані з урахуванням зауваження наприкінці п. 20.8. Використані іншими авторами [1052], а також запропонована плівкова модель, приводять до значення  $w = 0$  на осьовій лінії абсолютно жорсткого включення, однак така умова виконується і для довільного включення за навантаження, симетричного стосовно середнього перпендикуляра і антисиметричного стосовно осі включення

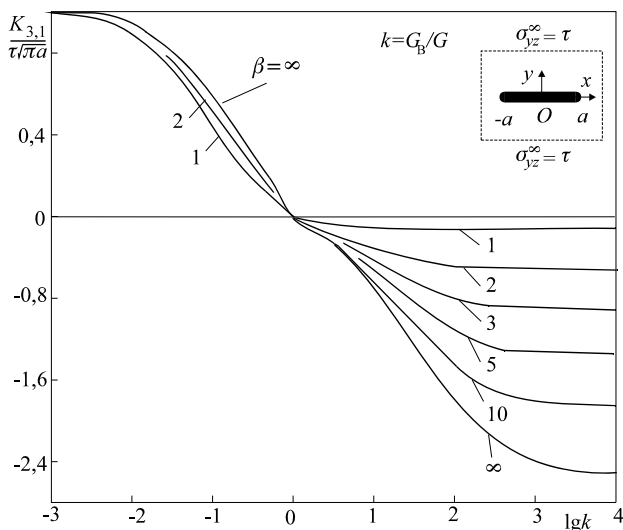


Рис. 20.2

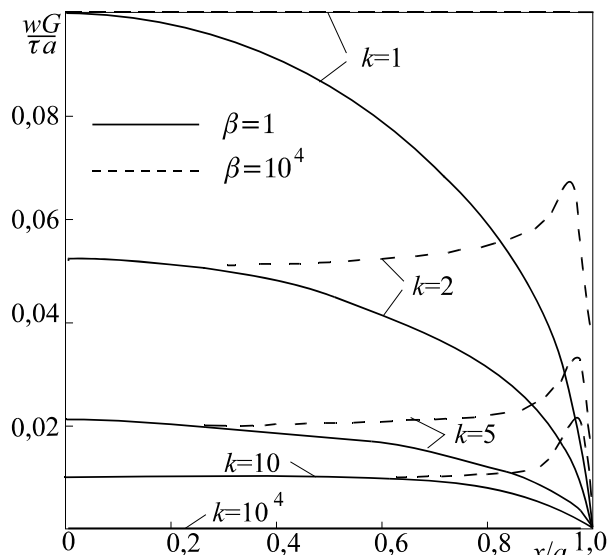


Рис. 20.3

Таблиця 20.1.

y/a	x/a						
	0,000	0,900	0,950	0,999	1,050	1,100	2,000
0,00	—	—	—	—	0,000	0,000	0,000
0,05	—	—	—	—	0,026	0,036	0,049
0,10	0,000	-0,001	-0,001	0,009	0,066	0,077	0,098
0,15	0,053	0,066	0,076	0,100	0,113	0,121	0,147
0,20	0,106	0,127	0,137	0,151	0,161	0,168	0,196
0,30	0,213	0,239	0,245	0,253	0,260	0,265	0,294
0,40	0,319	0,345	0,350	0,355	0,360	0,364	0,392
0,50	0,424	0,449	0,459	0,456	0,461	0,464	0,491
1,00	0,947	0,961	0,962	0,963	0,966	0,967	0,985
2,00	1,969	1,973	1,974	1,974	1,975	1,976	1,983

Рис. 20.4 відображає вплив використання точних модельних і наближених асимптотичних залежностей (одно і двочленних) на рівень дотичних напружень  $\sigma_{yz}$  ( $\tau_1 = 0$ ) на колі радіуса  $r/a = 0,1$  з центром у вістрі пружного включення з модулем зсуву  $G_B = 0,5G$  для прямокутного ( $\beta = \infty$ ) та еліптичного ( $\beta = 1$ ). Помітно, що помилка асимптотичних розв'язків є дуже великою і те, що двочленна асимптотика дає набагато кращу точність, особливо для включення з еліптичним профілем.

На рис. 20.5 відображені обчислені значення напруження  $\sigma_{yz}$  уздовж межі тонкого пружного еліптичного включення та на продовженні його осі. Характерно, що побудований [1001] наближений розв'язок дає сталість дотичних напружень на поверхні поділу матеріалів. Це ж дає і точний розв'язок задачі для еліптичного включення, що свідчить про високу міру адекватності побудованої математичної моделі включення і методу функцій стрибка для аналізу тонких включень.

На рис. 20.6–20.8 зображена зміна  $\sigma_{yz}$  уздовж прямих, перпендикулярних до осі неоднорідності за значень  $x/a$ , що дорівнюють 0; 0,95; 1,05 відповідно.

На рис. 20.9–20.10 подають розраховані за точними формулами дотичні напруження на колах радіуса  $r/a = 0,005; 0,01; 0,05; 0,1$  з центром у правому торці включення у залежності

від полярного кута  $\theta$  і типу матеріалу (рис. 20.9 – порожнина; рис. 20.10 абсолютно жорсткий матеріал).

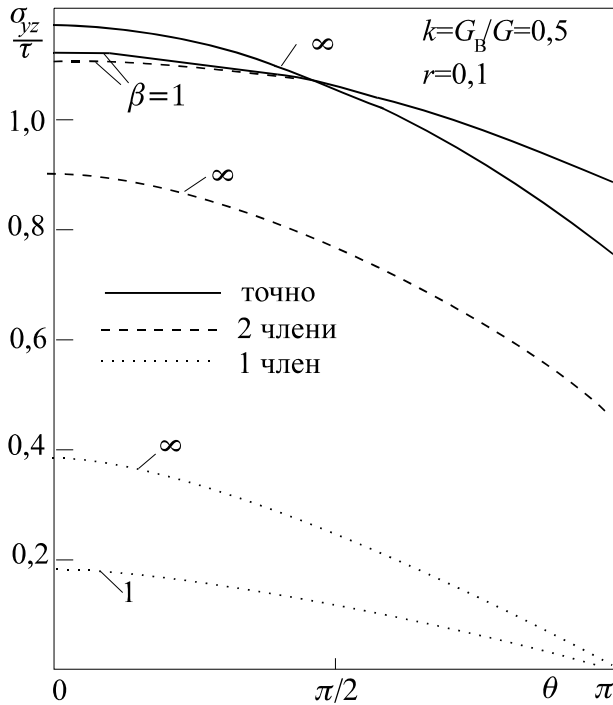


Рис. 20.4.

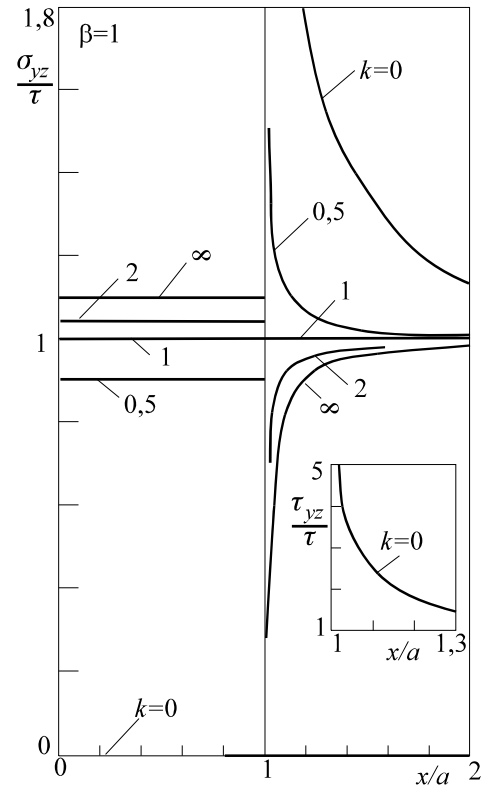


Рис. 20.5.

Під час навантажування у площині еліптичної щілини (рис. 20.9) результати обчислення  $\sigma_{yz}$  за точними формулами (20.36) (суцільні лінії) незначно (навіть для  $r/a = 0,1$  до 10%) відрізняються від зображених штриховою лінією значень, отриманих на основі однакових у цьому випадку одно- і двочленних асимптотик (20.37). Разом з тим за такого ж навантаження тіла з жорстким еліптичним включенням (див. рис. 20.10) двочленна апроксимація  $\sigma_{yz}$  навіть для  $r/a = 0,1$  дає похибку не більшу від 2%, тоді як одночленна зовсім непридатна, оскільки помиляється навіть у знаку.

Вказані закономірності зберігаються зі зміною профілю включення від еліптичного до прямокутного, однак, важливо зазначити, що зі зростанням параметра  $\beta$  одночленна апроксимація збільшує свою точність, а двочленна – зменшує, хоча вона, безумовно, більш надійна. Зі зміною пружних властивостей прошарку отримані результати займають проміжне місце між даними для щілин, абсолютно жорстких включень і однорідним розв'язком задачі. На рис. 20.11 зображений порівняльний числовий матеріал зміни  $\sigma_{yz}$ , обчисленої за точним розв'язком та одно- і двочленним асимптотичним на колі радіуса  $r/a = 0,1$  з центром у правому торці включення еліптичного ( $\beta = 1$ ) і прямокутного ( $\beta = \infty$ ) профілю за  $G_B/G = 0,5$  і дії навантаження у площині неоднорідності.

### Зсув, перпендикулярний до площини включення

На рис. 20.12 зображена залежність  $K_{3,2}$  ( $K_{3,1} = 0$ ) від  $k$  та  $\beta$  при  $\tau = 0$ ,  $\tau_1 \neq 0$ . Цей УКІН слабо залежить від форми включення і мало різниться від нуля при  $k < 1$ . Розрахунки свідчать, що прийняте у [1052] допущення  $\sigma_{xz}^c(-a) = 0$ , спричиняє фізично невірне ненульове значення  $K_{3,2}/(\tau_1\sqrt{\pi a}) = 0,0909$  для еліптичного та  $K_{3,2}/(\tau_1\sqrt{\pi a}) = 0,247$  для прямокутного включення, що дорівнює відповідно 9% і 25% від його максимального значення.

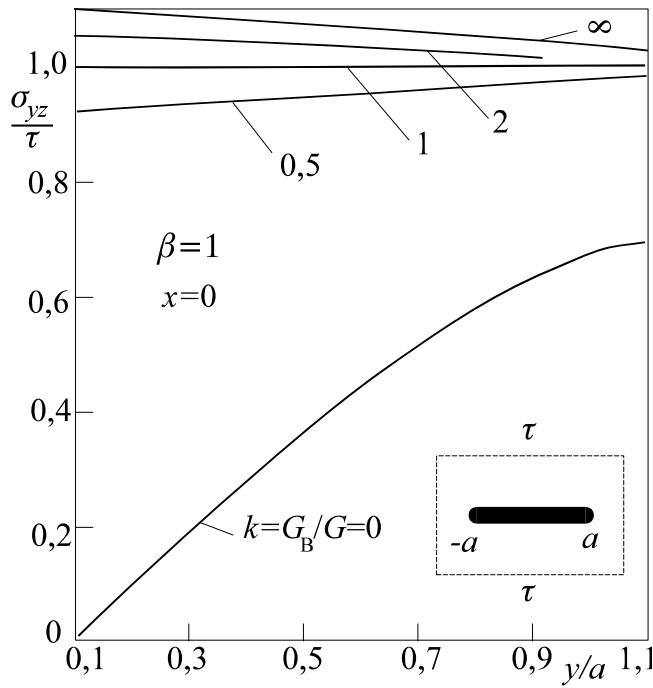


Рис. 20.6

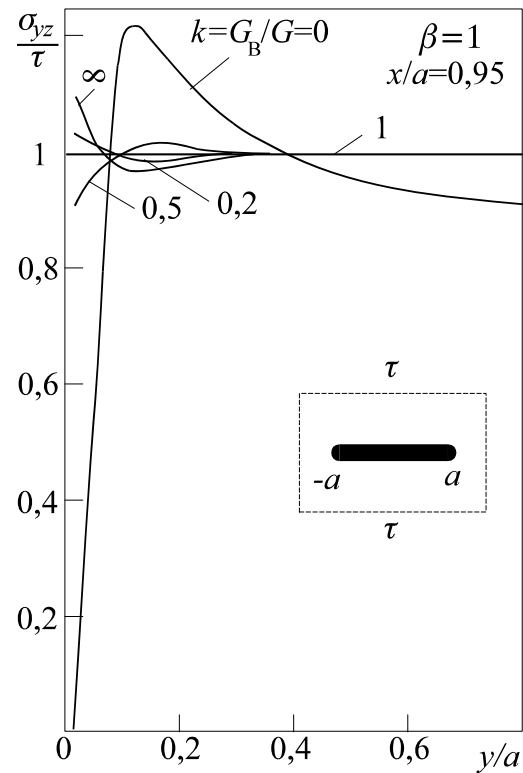


Рис. 20.7

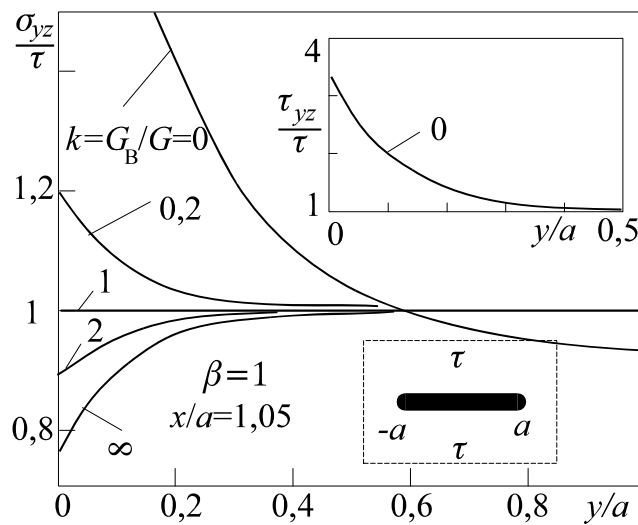


Рис. 20.8

Зіставлення точного розв'язку (20.36) для  $\sigma_{yz}$  ( $\tau=0$ ) з асимптотичними свідчить [1001], що для жорсткого еліптичного вклучення (рис. 20.13) одно- і двочленна апроксимації збігаються, відрізняючись від точного значення не більше як на 1% при  $r/a \leq 0,01$ ; на 3% при  $r/a \leq 0,05$  і на 7% при  $r/a \leq 0,1$ . Для еліптичної щілини (рис. 20.14)  $\sigma_{yz} = 0$  за точними і наближеними формулами;  $\sigma_{xz} = 0$  за одночленним та  $\sigma_{xz} = \tau_1$  за двочленним і точним виразами.

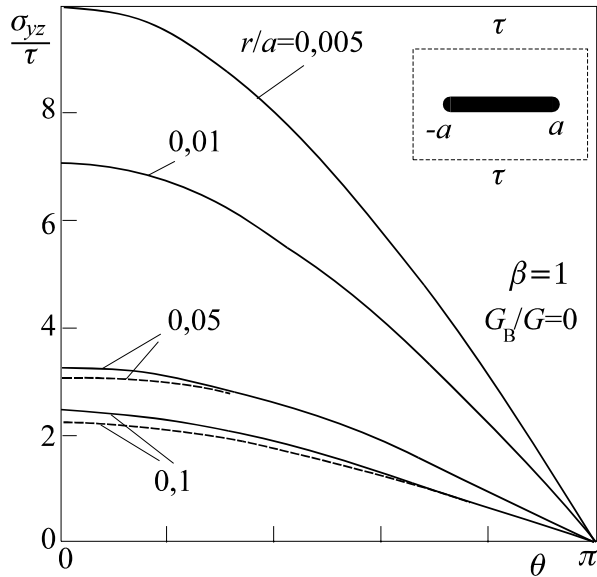


Рис. 20.9

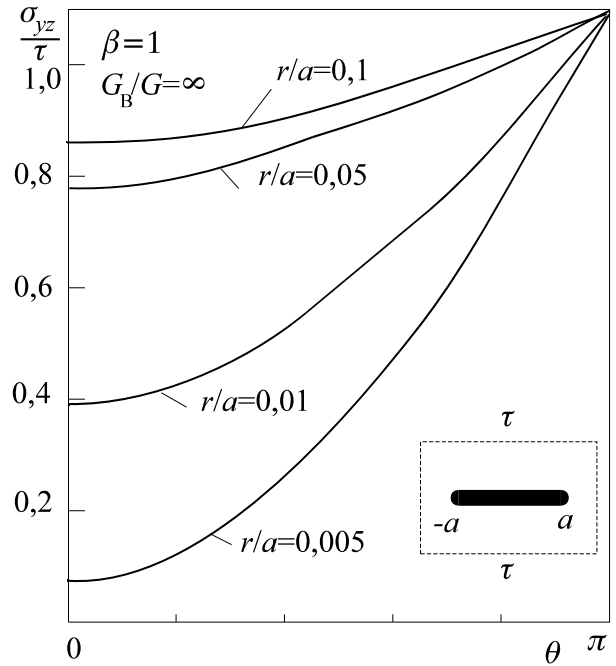


Рис. 20.10

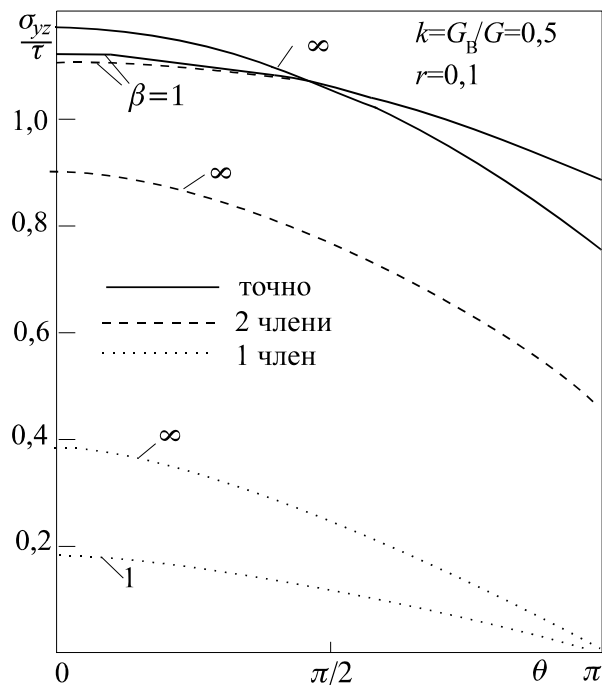


Рис. 20.11

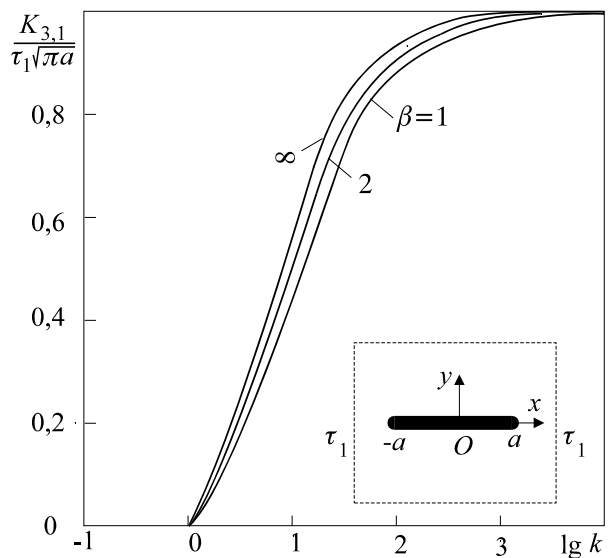


Рис. 20.12



Так само, як і для навантаження у площині неоднорідності, відзначені закономірності поведінки асимптотичних залежностей зберігаються зі зміною профілю неоднорідності від еліптичної до прямокутної, однак при цьому одночленна апроксимація свою точність підвищує, а двочленна – зменшує, хоча й залишається точнішою від одночленної. Зі зміною пружних властивостей прошарку отримані результати займають проміжне місце між даними для щілини, абсолютно жорстких включень і однорідним розв'язком задачі (рис. 20.6).

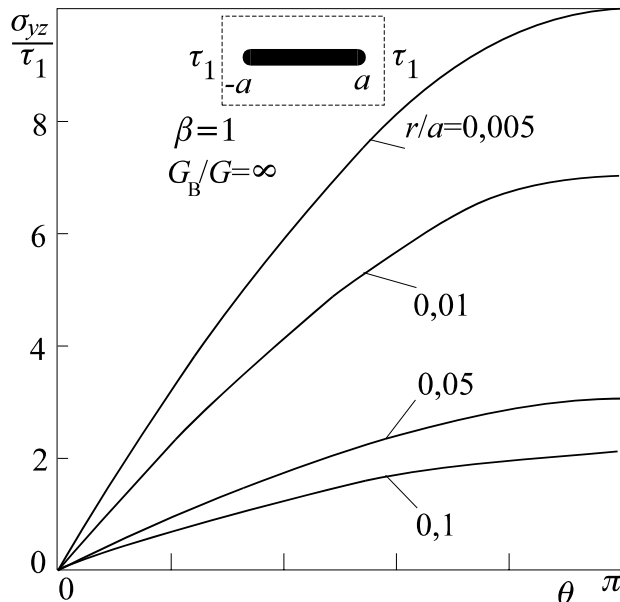


Рис. 20.13.

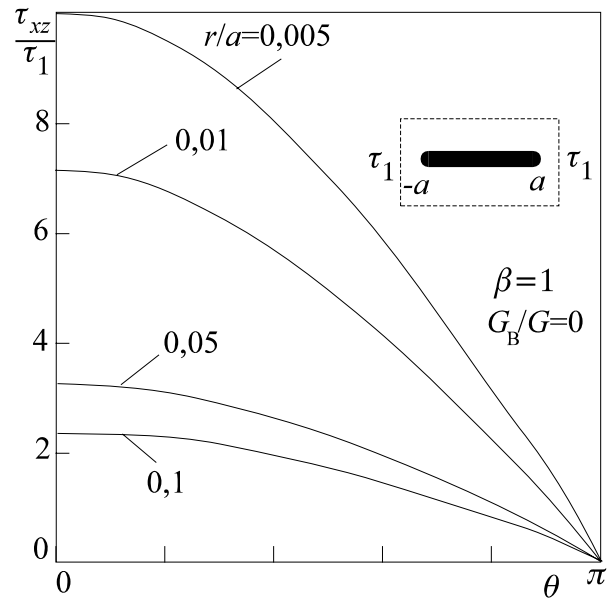


Рис. 20.14.

Отже, під час використання асимптотичних залежностей для оцінювання напруженого стану в околі краю прошарку необхідно бути обережним, оскільки вони (особливо одночленні) можуть іноді давати не лише кількісно але і якісно хибну картину.

## 20.10. Аналіз варіантів умов взаємодії та апріорних сталих

Розв'язок задачі про тонкостінне включення великою мірою обумовлюється вибором математичної моделі включення (умов взаємодії) та сталих  $\sigma_{xz}^c$ ,  $w_-^*$  на лівому торці включення. В роботі [999] детально досліджений вплив цих чинників. Зіставлені результати обчислення УКІН за основною (ОМ) та плівковою (ПМ) моделями з різними виразами для апріорних сталих (15.3).

Щодо однорідної матриці, то вибір моделі не впливає на систему інтегральних рівнянь стосовно функції стрибка  $f_3(x)$  та УКІН  $K_{3,2}$ . У це рівняння входить параметр  $\sigma_{xz}^c = \sigma_{xz}^0 \tau_z$ . Дослідження трьох варіантів вибору сталої  $\tau_z$ , якщо: 1)  $\tau_z = G/\max(G_B, G)$ ; 2)  $\tau_z = G\sqrt{G_B} [\max(G_B, G)]^{-3/2}$ ; 3)  $\tau_z = 0$ , засвідчило, що перевагу слід надати першому.

Друге сингулярне інтегральне рівняння стосовно функції стрибка  $f_3(x)$  та УКІН  $K_{3,1}$  залежить від вибору моделі та сталої  $w_-^* = 2h\sigma_{yz}^0 w^*$ . Здійснювалися розрахунки 4-х варіантів цієї сталої для плівкової моделі: 1пм)  $w^* = \min(1, k)/G$ ,  $k = G_B/G$ ; 2пм)  $w^* = \min(1, \sqrt{k})/G$ ; 3пм)  $w^* = 0$ ; 4пм)  $w^* = 1/\max(G_B, G)$  та 3-х варіантів для основної моделі: 1ом)  $w^* = 0$ ; 2ом)  $w^* = 1/\max(G_B, G)$ ; 3ом)  $w^* = \min(1, \sqrt{k})/G$ . Виявилось, що для плівкової моделі най-

доцільнішим є варіант 4пм, який найбільш універсальний та найпридатніший у випадках відносної жорсткості включення  $k = 0; 1; \infty$ ; для основної – найдоцільніший 1ом.

Загалом, основна модель є точнішою. Плівкова модель у її варіанті 1пм не дає для абсолютно жорсткого включення результатів абсолютно жорсткої плівки, збігаючись у даному випадку з розрахунками за 1ом.

## § 21. Зосереджені сили і гвинтові дислокації. Диполі

### 21.1. Концентрація напружень від сил і дислокацій

Аналіз руйнування, що зароджується біля включень, вимагає дослідження також і дислокаційних механізмів. Виявляється, що у математичному плані вивчення впливу зосереджених сил та дислокацій в рамках методу функцій стрибка еквівалентні. Напружено-деформований стан тіл можуть збурювати і об'єднання певних чинників у вигляді диполів (дублетів), точкові дефекти ідеальної будови матеріалів (вакансії, домішки заміщення чи впровадження), які у свою чергу можна моделювати за допомогою диполів [532]. Основні результати для тріщини у пружному полі сил, диполів і дислокацій одержані у роботі [1352]. Вплив зосереджених сил на абсолютно жорстку плівку досліджувався теж у публікації [925].

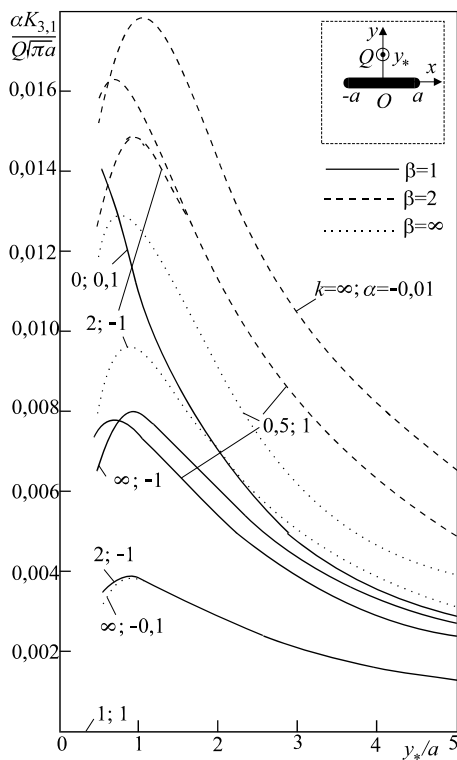


Рис. 21.1

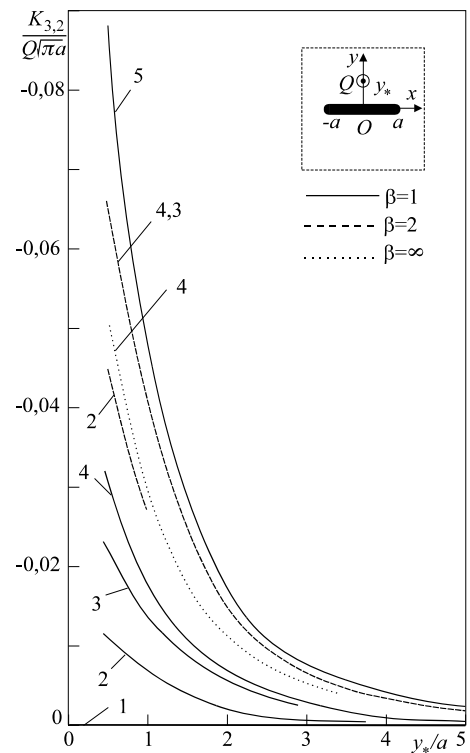


Рис. 21.2

Вважатимемо, що зовнішнє навантаження визначається лише силою  $Q$  і дислокацією  $b_3 \sim b$  у точці  $z_*$  однорідного середовища з модулем зсуву  $G$  та одним включенням уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$ . Тоді на основі (20.10)

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = \frac{-if_3^*}{2\pi(z-z_*)}, \quad f_3^* = Q + iGb, \quad (21.1)$$

$$w^0(z) = -\frac{Q}{4\pi G} \ln \left[ (x-x_*)^2 + (y-y_*)^2 \right] + \frac{b}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y-y_*}{x-x_*} \right).$$

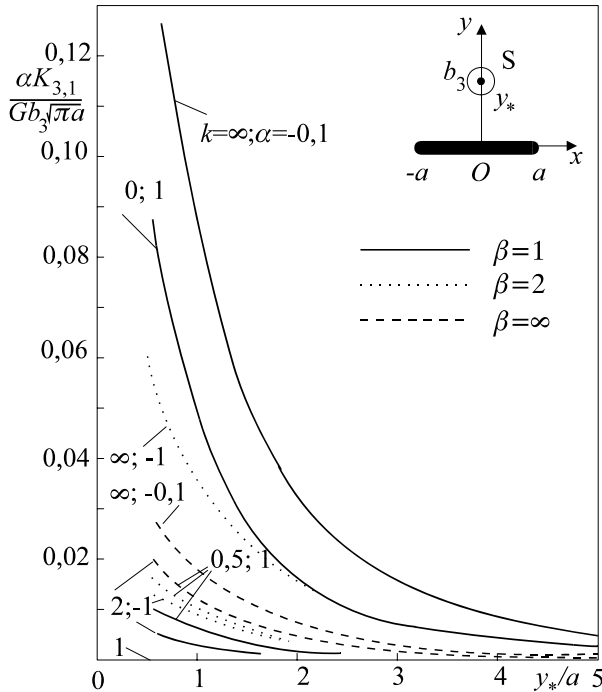


Рис. 21.3

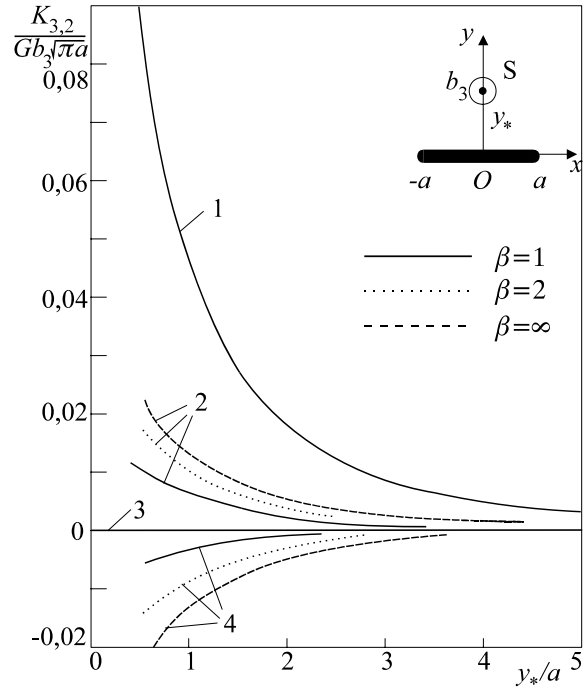


Рис. 21.4

### Скінченні тріщина й абсолютно жорстка плівка

З урахуванням (21.1) розв'язок інтегральних рівнянь (20.25), (20.26) для тріщини та абсолютно жорсткої плівки (АЖП) дасть відповідно [950, 122]

$$f_3(x) = 0, \quad f_6(x) = \frac{1}{\pi G} \operatorname{Im} G(x), \quad t_6(z) = \frac{1}{2\pi G} [F^-(z) + \bar{F}^-(z)], \quad K_{3,2} = 0,$$

$$K_{3,1} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} Q(\pm a), \quad \hat{\sigma}_{yz}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}(z) = \hat{w}'(z) = -\frac{1}{4\pi} [F^-(z) + \bar{F}^-(z)], \quad (21.2)$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \omega'(z) = -\frac{1}{4\pi} [F^+(z) + \bar{F}^-(z)];$$

$$f_6(x) = 0, \quad f_3(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} G(x), \quad t_3(z) = \frac{i}{2\pi} [F^-(z) - \bar{F}^-(z)], \quad K_{3,1} = 0,$$

$$K_{3,2} = \mp \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} Q(\pm a), \quad \hat{\sigma}_{yz}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}(z) = \hat{w}'(z) = -\frac{1}{4\pi} [F^-(z) - \bar{F}^-(z)], \quad (21.3)$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \omega'(z) = -\frac{1}{4\pi} [F^+(z) - \bar{F}^-(z)],$$

де

$$F^{\pm}(z) = if_3^* \left[ \frac{1}{X(z)} + \frac{1}{z-z_*} \left( \frac{X(z_*)}{X(z)} \pm 1 \right) \right], \quad Q(z) = \frac{f_3^*}{\sqrt{a}} \left[ 1 + \frac{X(z_*)}{z-z_*} \right], \quad (21.4)$$

$$G(x) = \frac{\sqrt{a}Q(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \sqrt{a^2-z^2} = -iX(z), \quad \sqrt{a^2-\bar{z}^2} = iX(\bar{z}), \quad X(z) = \sqrt{z^2-a^2};$$

дашком відзначений збурений включеннями розв'язок:

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz} + \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0. \quad (21.5)$$

### Півнескінченні тріщина й абсолютно жорстка плівка

Замкнуті співвідношення для півнескінченної тріщини та абсолютно жорсткої плівки (АЖП) одержимо з (21.2)–(21.4), помістивши у правий торець прошарку локальну систему координат  $\xi = z - a$  (рис. 21.5) та перейшовши до границі  $a \rightarrow \infty$ . Тоді

$$F^{\pm}(z) = \frac{\pm if_3^*}{\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} \mp \sqrt{\xi_*})}, \quad \bar{F}^{\pm}(z) = \frac{\mp if_3^*}{\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} \mp \sqrt{\xi_*})}, \quad (21.6)$$

$$Q(z) = -\frac{f_3^* \sqrt{2\xi_*}}{\xi - \xi_*}, \quad G(z) = \frac{iQ(z)}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi = z - a, \quad \xi_* = z_* - a;$$

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \frac{i}{4\pi\sqrt{\xi}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi_*}} + \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_*}} \right], \quad K_{3,1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi_*}}, \quad (тріщина); \quad (21.7)$$

$$K_{3,2} = 0, \quad \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz} = \frac{i}{4\pi\sqrt{\xi}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_*}} - \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_*}} \right]$$

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = -\frac{i}{4\pi\sqrt{\xi}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi_*}} - \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_*}} \right], \quad K_{3,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi_*}}, \quad (АЖП). \quad (21.8)$$

$$K_{3,1} = 0, \quad \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz} = \frac{i}{4\pi\sqrt{\xi}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_*}} + \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_*}} \right]$$

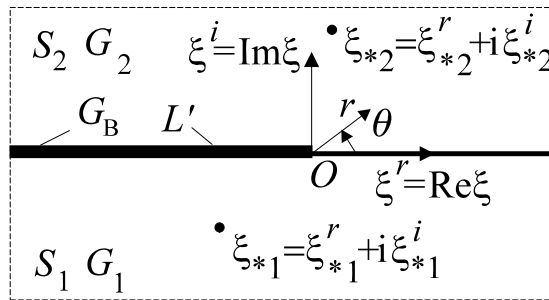


Рис. 21.5. Півнескінченне включення

Вираз (21.7) для напружень  $\hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz}$  збігається зі замкнутими залежностями (21.27), (14), (15) [1352], а вирази для  $K_{3,1}$  (21.2), (21.7) – з поданнями (15), (19) [1352] для КІН  $K_3$ .

### Пружне включення скінченної ширини

На основі методу колокацій розв'язані [950] відповідні інтегральні рівняння з урахуванням (21.1). Досліджений вплив відносної віддалі точки  $D = y_*/a$  ( $x_* = 0$ ) прикладання сили  $Q$  і дислокації  $b_3 \sim b$ ; відносної жорсткості включення  $k = G_B/G$  та параметра форми  $\beta$  включення (еліптичний профіль  $\beta = 1$ ;  $\beta = 2$ ; прямокутний профіль  $\beta = \infty$ ) змінної товщини  $h(x)$  (5.44) на УКІН  $K_{3,1}, K_{3,2}$  для параметра товщини  $h_0/a = 0,1$  (рис. 21.1–21.4). Нумерація кривих відповідає таким значенням  $k$ : 1 –  $10^{-10}$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 2; 5 –  $10^{10}$ . Для зручності подання даних на деяких рисунках введений масштабний множник  $\alpha$ .

У табл. 21.1 поміщені значення максимальних відносних похибок у процентах під час обчислення УКІН та сталих членів  $q_{r0}^+ = \sum_{m=0}^M mA_m^r$  у дослідженому діапазоні  $y_*/a = 0,5 \dots 10$  розташування сили чи дислокації від кількості  $M + 1$  врахованих членів у розвиненні функції стрибка. Вважалось, що при  $M = 51$  досягнута точність вже досягнута; параметр форми  $\beta = 10000$ ; відносна жорсткість включення  $k = 0,5$ ;  $h_0/a = 0,1$ .

Таблиця 21.1

M	Дислокація					Зосереджена сила			
	$K_{3,1}$	$K_{3,2}$	$q_{30}^+$	$q_{60}^+$	*	$K_{3,1}$	$K_{3,2}$	$q_{30}^+$	$q_{60}^+$
1	100	755	2330	100	729	79	86	97	82
6	11	64	1550	32	252	11	33	67	42
11	4	47	1460	17	444	7	14	41	43
16	2	8,5	1060	14	119	1,8	7	27	19
21	0,94	3,4	727	8	45	0,9	3,8	17	10
26	0,54	2,23	511	5	41	0,54	2,1	12	7
31	0,33	1,30	338	3	28	0,33	1,34	8	5
36	0,20	0,80	226	2,2	18	0,20	0,80	5	3,3
41	0,10	0,42	142	1,3	10	0,10	0,43	3	2,0
46	0,04	0,18	66	0,6	5	0,04	0,18	1,3	0,9

Як і слід було сподіватися, значення  $q_{r0}^+$  збігаються значно повільніше від УКІН. Великі похибки під час обчислення  $q_{30}^+$  для дислокації пояснюються тим, що вони досягаються при  $y_*/a = 10$ , якщо  $q_{30}^+ / (b_3 \sqrt{a})$  дуже мале (порядку  $10^{-6}$ ). При  $y_*/a = 0,5$  ці похибки вже набагато менші – вони подані у шостому стовпчику, зазначеному символом “\*”.

Отримані результати для  $k = 10^{-10}$  відрізнялися від поданих аналітичними залежностями (21.2) для тріщини не більше як на 1% і не залежали від  $\beta$ . Зі збільшенням  $k$  вплив  $\beta$  збільшується і для кожного фіксованого  $k$  збільшення  $\beta$  спричиняє збільшення абсолютного значення УКІН, так що максимум досягається для дефекту прямокутного профілю. З віддаленням сили чи дислокації від включення УКІН, як правило, зменшує свою величину, хоча в окремих випадках безпосереднє наближення збурювального чинника до поверхні включення (особливо жорсткішого від матриці) теж дещо знижує концентрацію напружень біля краю прошарку у порівнянні з деяким його максимальним значенням. Характерно, що збіжність обчислених значень  $K_{3,1}$  для дуже жорстких включень ненульової товщини є досить повільною, хоча знайдений розв'язок у вигляді функції стрибка дуже добре відображає фізичну ка-

рину задачі, оскільки для абсолютно жорстких дефектів дає нульові переміщення на реальній поверхні включення  $y = \pm h(x)$ ,  $x \in [-a; a]$  для довільних  $\beta \geq 1$ .

### Про уточнення рівнянь моделі [120]

Задовольняння умовам взаємодії на реальних поверхнях  $x \pm ih(x)$  контакту тонкого включення з матрицею приводить до появи у правих частинах сингулярних інтегральних рівнянь функцій  $\sigma_{yz}^0(x \pm ih)$ ,  $\sigma_{xz}^0(x \pm ih)$ , які визначають напружено-деформований стан на відповідній лінії тіла без прошарку. Може видаватися, що такий підхід (перший), особливо за дії зосереджених чинників, точніший порівняно з повним знесенням (другий підхід) крайових умов на лінію стрибка, яке приведе до заміни цих функцій на  $\sigma_{yz}^0(x)$ ,  $\sigma_{xz}^0(x)$  відповідно.

Таблиця 21.2

$\frac{d}{a}$	$k$	перший підхід		другий підхід	
		$\sqrt{\pi a}K_{3,1}/Q$	$\sqrt{\pi a}K_{3,2}/Q$	$\sqrt{\pi a}K_{3,1}/Q$	$\sqrt{\pi a}K_{3,2}/Q$
2	$10^{-10}$	$7,125 \cdot 10^{-2}$	$-6,366 \cdot 10^{-13}$	$7,117 \cdot 10^{-2}$	$-6,366 \cdot 10^{-13}$
	0,5	$5,533 \cdot 10^{-3}$	$-2,976 \cdot 10^{-3}$	$5,531 \cdot 10^{-3}$	$-2,975 \cdot 10^{-3}$
	1,0	0	$-5,588 \cdot 10^{-3}$	0	$-5,587 \cdot 10^{-3}$
	2,0	$-3,067 \cdot 10^{-3}$	$-7,313 \cdot 10^{-3}$	$-3,075 \cdot 10^{-3}$	$-7,310 \cdot 10^{-3}$
	$10^9$	$-6,366 \cdot 10^{-3}$	$-1,683 \cdot 10^{-2}$	$-6,366 \cdot 10^{-3}$	$-1,680 \cdot 10^{-2}$
1	$10^{-10}$	$1,128 \cdot 10^{-1}$	$-1,592 \cdot 10^{-12}$	$1,125 \cdot 10^{-1}$	$-1,592 \cdot 10^{-12}$
	0,5	$7,556 \cdot 10^{-3}$	$-7,500 \cdot 10^{-3}$	$7,553 \cdot 10^{-3}$	$-7,498 \cdot 10^{-3}$
	1,0	0	$-1,417 \cdot 10^{-2}$	0	$-1,416 \cdot 10^{-2}$
	2,0	$-3,961 \cdot 10^{-3}$	$-1,882 \cdot 10^{-2}$	$-3,961 \cdot 10^{-3}$	$-1,800 \cdot 10^{-2}$
	$10^9$	$-7,958 \cdot 10^{-3}$	$-4,680 \cdot 10^{-2}$	$-7,958 \cdot 10^{-3}$	$-4,652 \cdot 10^{-2}$

Таблиця 21.3

$\frac{d}{a}$	$k$	перший підхід		другий підхід	
		$\sqrt{\pi a}K_{3,1}/Q$	$\sqrt{\pi a}K_{3,2}/Q$	$\sqrt{\pi a}K_{3,1}/Q$	$\sqrt{\pi a}K_{3,2}/Q$
2	$10^{-10}$	$7,127 \cdot 10^{-2}$	$-1,435 \cdot 10^{-11}$	$7,117 \cdot 10^{-2}$	$-1,432 \cdot 10^{-11}$
	0,5	$1,148 \cdot 10^{-2}$	$-1,090 \cdot 10^{-2}$	$1,147 \cdot 10^{-2}$	$-1,088 \cdot 10^{-2}$
	1,0	0	$-1,504 \cdot 10^{-2}$	0	$-1,501 \cdot 10^{-2}$
	2,0	$-1,142 \cdot 10^{-2}$	$-1,481 \cdot 10^{-2}$	$-1,142 \cdot 10^{-2}$	$-1,477 \cdot 10^{-2}$
	$10^9$	$-1,433 \cdot 10^{-1}$	$-1,689 \cdot 10^{-2}$	$-1,432 \cdot 10^{-1}$	$-1,680 \cdot 10^{-2}$
1	$10^{-10}$	$1,127 \cdot 10^{-1}$	$-3,589 \cdot 10^{-11}$	$1,125 \cdot 10^{-1}$	$-3,580 \cdot 10^{-11}$
	0,5	$1,587 \cdot 10^{-2}$	$-2,763 \cdot 10^{-2}$	$1,591 \cdot 10^{-2}$	$-2,755 \cdot 10^{-2}$
	1,0	0	$-3,839 \cdot 10^{-2}$	0	$-3,827 \cdot 10^{-2}$
	2,0	$-1,483 \cdot 10^{-2}$	$-3,846 \cdot 10^{-2}$	$-1,489 \cdot 10^{-2}$	$-3,829 \cdot 10^{-2}$
	$10^9$	$-1,782 \cdot 10^{-1}$	$-4,704 \cdot 10^{-2}$	$-1,791 \cdot 10^{-1}$	$-4,139 \cdot 10^{-2}$

Деякі результати обчислення УКІН за обома підходами для зосередженої сили  $Q$  в точці  $z_* = id$  ( $d/a = 2; 1$ ) містять табл. 21.2 (параметр форми  $\beta = 10^{10}$ ) та табл. 21.3 ( $\beta = 1$ ). Застосовувався метод колокацій за 50 вузлами з урахуванням симетрії розв'язку, причому вважалося  $a/h_0 = 10$ .

Обчислення дають можливість зробити висновок, що таке уточнення рівнянь дає неістотне покращення результатів і його можна не вживати. Це пояснюється великою мірою адекватності використаної математичної моделі.

## 21.2. Силкові та дислокаційні диполі

Звернемося до розв'язування відповідної задачі поздовжнього зсуву тіла з включенням, вважаючи, що зосередженим чинником є силівий диполь інтенсивності  $M_{ij}$ .

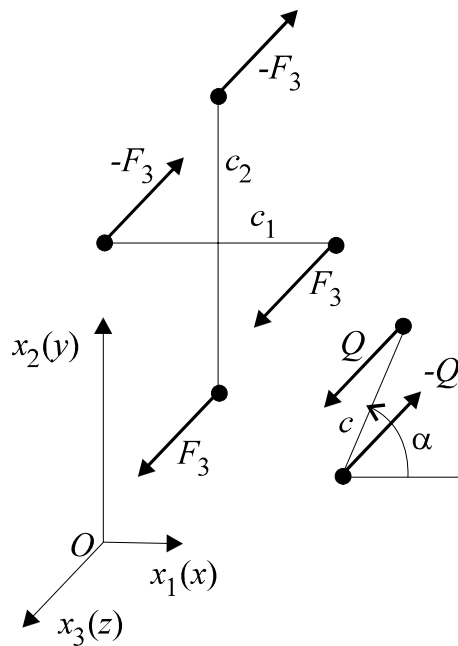


Рис. 21.6. Силівий диполь

Диполь формує пара сил  $Q_i \rightarrow \infty$  з плечем  $c_j \rightarrow 0$ , орієнтованим уздовж осі  $x_j$ , таких, що  $M_{ij} = Q_i c_j = \text{const}$  [112] (рис. 21.6). Якщо позначити  $f(Q_i)$  розв'язок для зосередженої сили  $Q_i$  у точці  $z_*$ , то розв'язок для диполя  $f_d(M_{ij})$  у цій же точці за (8.25) [112] дорівнюватиме

$$f_d(M_{ij}) = -c_j \frac{\partial f(Q_i)}{\partial x_j} \quad (x_1 \sim x, x_2 \sim y, x_3 \sim z) \quad (21.9)$$

або з урахуванням взаємності точок  $z(x, y)$  та  $z_*(x_*, y_*)$

$$f_d(M_{ij}) = c_j \frac{\partial f(Q_i)}{\partial x_{*j}} \quad (x_{*1} \sim x_*, x_{*2} \sim y_*, x_{*3} \sim z_*). \quad (21.10)$$

Тепер на основі співвідношення (21.1) для комбінованого силового та дислокаційного диполя, орієнтованого у точці  $z_*$  під кутом  $\alpha$  до осі  $x$

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = -\frac{if_{3d}^*}{2\pi} Q_{01}(0, z), \quad Q_{01}(0, z) = (z_* - z)^{-2},$$

$$f_{3d}^* = (cQ + iGcb)e^{i\alpha} = M_{31} + iM_{32}, \quad (21.11)$$

$$M_{31} = cQ \cos \alpha - Gcb \sin \alpha, \quad M_{32} = Gcb \cos \alpha + cQ \sin \alpha.$$

Тут  $cQ$ ,  $cb$  – інтенсивність силового та дислокаційного диполів відповідно.

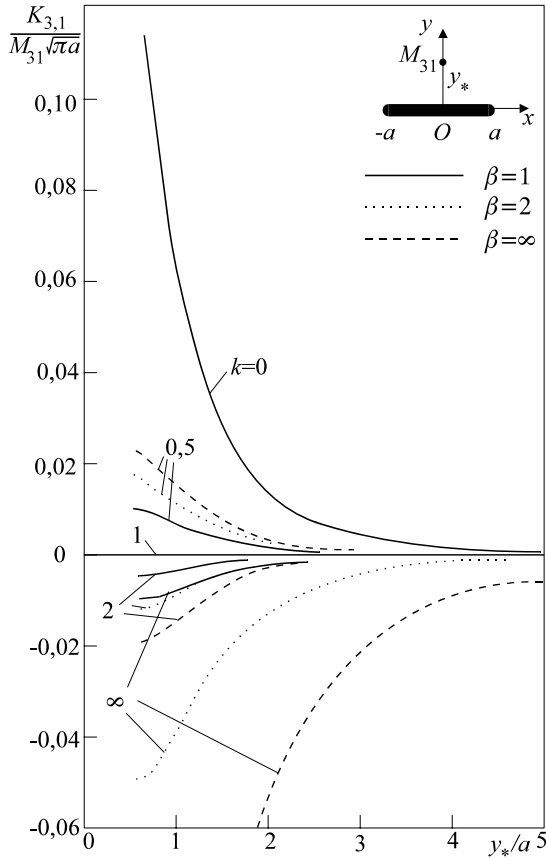


Рис. 21.7

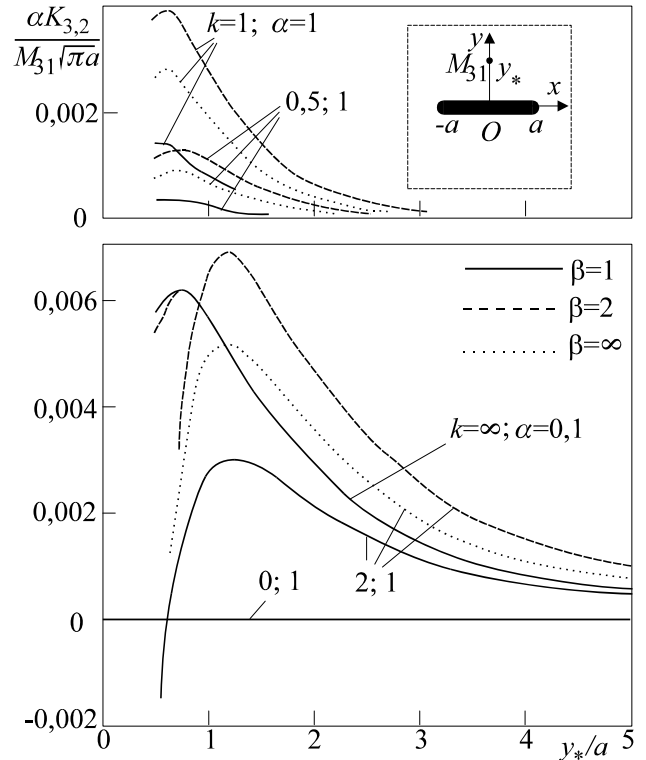


Рис. 21.8

З формули (21.11) випливає, що дислокаційний диполь інтенсивності  $cb$  еквівалентний силовому диполію  $cQ/G$ , повернутому на кут  $\pi/2$ . Тому у випадку диполів можна не розрізняти методики аналізу впливу силових та дислокаційних – з урахуванням згаданої кількісної та орієнтаційної відмінності силові та дислокаційні диполі у антиплоскій задачі математично тотожні.

З іншого боку, орієнтований під кутом  $\alpha$  силовий (так само і дислокаційний) диполь відповідно до (21.11) можна подати суперпозицією двох взаємно перпендикулярних диполів інтенсивності  $M_{31}, M_{32}$ .

На основі (21.11) інтегральні рівняння (20.25), (20.26) для тріщини та абсолютно жорсткої півки (АЖП) скінченної ширини дадуть вирази (21.2), (21.3), де на цей раз [950]

$$F^\pm(z) = \frac{if_{3d}^*}{(z - z_*)^2} \left[ \frac{a^2 - zz_*}{\sqrt{(a^2 - z^2)(a^2 - z_*^2)}} \pm 1 \right], \quad Q(z) = \frac{f_{3d}^*(zz_* - a^2)}{\sqrt{a}\sqrt{z_*^2 - a^2}(z_* - z)^2}. \quad (21.12)$$

З урахуванням цієї залежності вираз для  $K_{3,1}$  стосовно тріщини збігається з виразом (35) [1352].



Замкнуті співвідношення для півнескінченної тріщини чи абсолютно жорсткої плівки теж впливають з (21.2), (21.3), якщо у них вважати

$$F^{\pm}(z) = \frac{if_{3d}^*}{(\xi - \xi_*)^2} \left[ \frac{\xi + \xi_*}{2\sqrt{\xi\xi_*}} \pm 1 \right], \quad \bar{F}^{\pm}(z) = \frac{i\overline{f_{3d}^*}}{(\xi - \bar{\xi}_*)^2} \left[ \frac{\xi + \bar{\xi}_*}{2\sqrt{\xi\bar{\xi}_*}} \mp 1 \right], \quad (21.13)$$

$$Q(z) = \frac{f_{3d}^*(\xi + \xi_*)}{\sqrt{2\xi_*}(\xi - \xi_*)^2}, \quad \xi = z - a, \quad \xi_* = z_* - a.$$

Таким чином, для півнескінченної тріщини (див. теж (38) [1352]) та півнескінченної абсолютно жорсткої плівки

$$K_{3,1} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \operatorname{Im} \left( f_{3d}^* \xi_*^{-3/2} \right), \quad K_{3,2} = 0 \text{ (тріщина);} \quad (21.14)$$

$$K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \operatorname{Re} \left( f_{3d}^* \xi_*^{-3/2} \right) \text{ (АЖП).} \quad (21.15)$$

Подібно як і у випадку дії зосереджених сил та дислокацій за допомогою методу колокацій здійснений числовий аналіз УКІН за дії силових та дислокаційних диполів  $M_{31}, M_{32}$  у точці  $z_* = iy_*$ . Прийнята та ж розрахункова схема і ті ж значення досліджуваних параметрів. На рис. 21.7 – 21.10 відображена залежність УКІН від параметра  $y_*/a$  для різних значень відносної жорсткості включення  $k$  для трьох значень параметра форми включення  $\beta = 1, 2, \infty$ . Розрахунки для пружного включення свідчать [976, 950], що якісна картина зміни УКІН зберігається тою ж, що й під час дії сил та дислокацій (див. п. 21.1). З огляду на певну механічну самоврівноваженість диполів (за головним вектором) абсолютні значення УКІН від них є меншими, ніж від сил та дислокацій.

Подібним чином змінюються максимальні відносні похибки у процентах під час обчислення УКІН та сталих членів  $q_{r0}^+$  у дослідженому діапазоні  $y_*/a = 0,5 \dots 10$  розташування силового чи дислокаційного диполя  $M_{31}, M_{32}$  від кількості  $M+1$  врахованих членів у розвиненні функції стрибка. Вважалося, що при  $M = 51$  досягнута точність вже досягнута; параметр форми  $\beta = 10000$ ; відносна жорсткість включення  $k = 0,5$ ;  $h_0/a = 0,1$ .

Таблиця 21.4

$M$	$M_{31}$					$M_{32}$				
	$K_{3,1}$	$K_{3,2}$	$q_{30}^+$	$q_{60}^+$	*	$K_{3,1}$	$K_{3,2}$	$q_{30}^+$	$q_{60}^+$	**
1	100	3200	2580	100	2580	3110	87	97	1345	260
6	95	470	2360	301	2360	243	34	67	146	146
11	5	554	5035	25	5035	72	14	42	180	180
16	7	50	915	60	654	4	11	42	95	12
21	1,3	21	628	14	357	3,9	4,1	20	62	18
26	0,54	2,1	442	6,1	10	0,73	2,2	12	42	4,1
31	0,32	2,2	294	4,4	52	0,32	1,3	8,5	28	1,4
36	0,20	0,87	194	3,0	21	0,20	0,79	5,5	18	1,2
41	0,11	0,43	120	1,8	11	0,11	0,44	3,3	11	0,78
46	0,05	0,12	55	0,77	5	0,05	0,18	1,4	5	0,33

Великі похибки під час обчислення  $q_{30}^+$  для диполя  $M_{31}$ , а також значення  $q_{60}^+$  для диполя  $M_{32}$  пояснюються їх дуже малою абсолютною величиною. При  $y_*/a = 0,5$  ці похибки

вже набагато менші – вони подані у шостому і останньому стовпчиках відповідно, зазначених символами “\*” і “\*\*”.

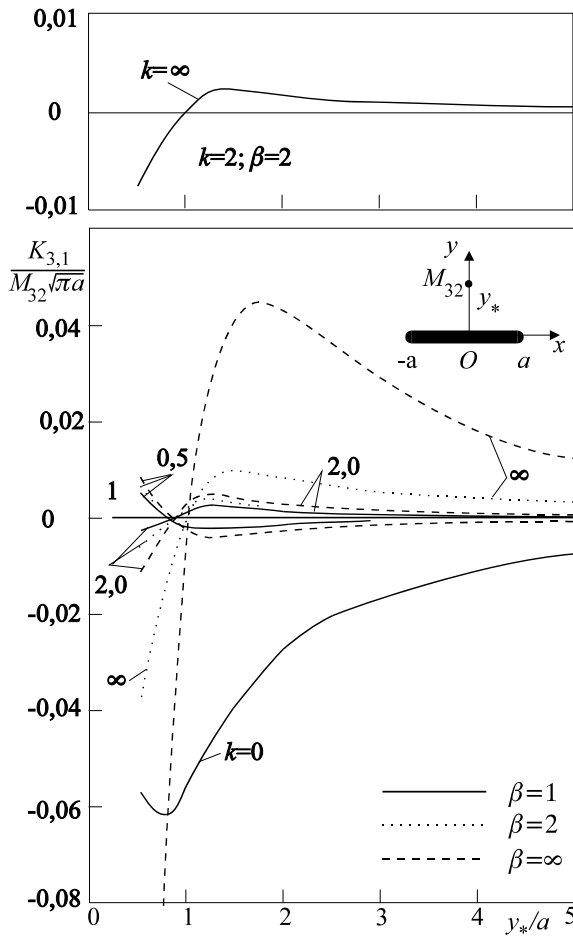


Рис. 21.9

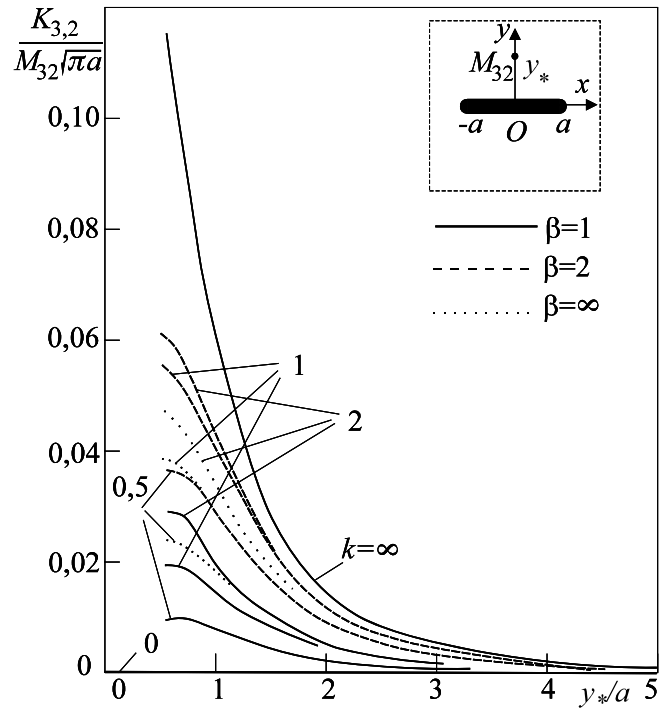


Рис. 21.10

### 21.3. Антиплоска деформація півпростору з тонким дефектом під впливом зосереджених чинників

Для побудови розв’язку задачі про тонкі дефекти у пружному півпросторі можна використати фундаментальні розв’язки для зосередженої сили і дислокації у півпросторі.

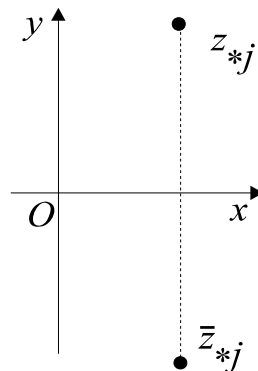


Рис. 21.11. Схема побудови фундаментального розв’язку для півпростору з вільним краєм

### Зосереджена сила і дислокація всередині півпростору

**Вільний край.** Для сили  $Q^j$  і дислокації  $b^j$  у точці  $z_{*j} = x_{*j} + iy_{*j}$  необмеженого ізо-  
тропного простору з модулем зсуву  $\mu_j$

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi(z - z_{*j})}. \quad (21.16)$$

Якщо у точці  $\bar{z}_{*j}$  помістити силу і дислокацію протилежних знаків (рис. 21.11), то для  
суперпозиції розв'язків

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi(z - z_{*j})} - \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi(z - \bar{z}_{*j})}. \quad (21.17)$$

Для розв'язку (21.17) на поверхні  $y = 0$  отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{00j}(x) + i\sigma_{xz}^{00j}(x) &= \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi} \left( \frac{1}{x - z_{*j}} - \frac{1}{x - \bar{z}_{*j}} \right) = \\ &= \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi} \left( \frac{z_{*j} - \bar{z}_{*j}}{(x - z_{*j})(x - \bar{z}_{*j})} \right) = \\ &= \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi} \frac{2iy_{*j}}{(x - x_{*j})^2 + y_{*j}^2} = \frac{Q^j + i\mu_j b^j}{2\pi} \frac{2y_{*j}}{(x - x_{*j})^2 + y_{*j}^2}. \end{aligned} \quad (21.18)$$

Такий розв'язок для дислокації ( $Q^j = 0$ ) задовольняє умову вільної поверхні

$$\sigma_{yz} \Big|_{y=0} = 0. \quad (21.19)$$

Тому розв'язок

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{\mu_j b^j}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_{*j}} - \frac{1}{z - \bar{z}_{*j}} \right) \quad (21.20)$$

є фундаментальним розв'язком для гвинтової дислокації  $b^j$  у точці  $z_{*j}$  півплощини  
 $\text{Re}(z) \geq 0$  з вільним краєм.

Аналогічним чином, для суперпозиції зосереджених чинників однакових знаків

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi(z - z_{*j})} + \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi(z - \bar{z}_{*j})} \quad (21.21)$$

при  $y = 0$  маємо залежність

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{00j}(x) + i\sigma_{xz}^{00j}(x) &= \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi} \left( \frac{1}{x - z_{*j}} + \frac{1}{x - \bar{z}_{*j}} \right) = \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi} \left( \frac{2x - z_{*j} - \bar{z}_{*j}}{(x - z_{*j})(x - \bar{z}_{*j})} \right) = \\ &= \frac{\mu_j b^j - iQ^j}{2\pi} \frac{2x - 2x_{*j}}{(x - x_{*j})^2 + y_{*j}^2}, \end{aligned} \quad (21.22)$$

яка для зосередженої сили ( $b^j = 0$ ) задовольняє умову вільної поверхні (21.19). Тому розв'язок

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = -\frac{iQ^j}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_{*j}} + \frac{1}{z - \bar{z}_{*j}} \right) \quad (21.23)$$

є фундаментальним розв'язком для зосередженої сили  $Q^j$  у точці  $z_{*j}$  півплощини  $\text{Re}(z) \geq 0$  з вільним краєм.

**Защемлений край.** Якщо границя  $y = 0$  жорстко защемлена, то

$$w|_{y=0} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{y=0} = 0 \rightarrow \sigma_{xz}|_{y=0} = 0. \quad (21.24)$$

Для виконання такої умови з (21.18) і (21.17) треба, щоб було  $b^j = 0$  (рис. 21.12). Тому

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = -\frac{iQ^j}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_{*j}} - \frac{1}{z - \bar{z}_{*j}} \right) \quad (21.25)$$

є фундаментальним розв'язком для зосередженої сили  $Q^j$  у точці  $z_{*j}$  жорстко защемленої півплощини  $\text{Re}(z) \geq 0$ .

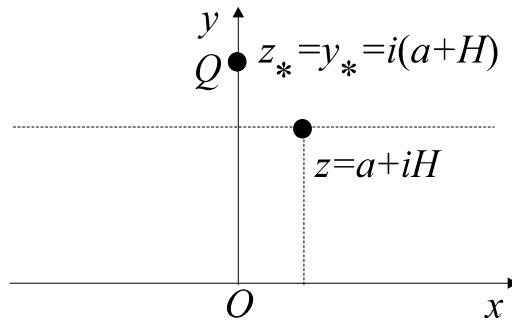


Рис. 21.12. Схема побудови фундаментального розв'язку для півпростору з защемленим краєм

Аналогічно на основі (21.22), (21.21)

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{\mu_j b^j}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_{*j}} + \frac{1}{z - \bar{z}_{*j}} \right) \quad (21.26)$$

є фундаментальним розв'язком для дислокації  $b^j$  у точці  $z_{*j}$  жорстко защемленої півплощини  $\text{Re}(z) \geq 0$ .

Компактно ці розв'язки запишуться:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) &= -\frac{iQ^j}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_{*j}} \pm \frac{1}{z - \bar{z}_{*j}} \right), \\ \sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) &= \frac{\mu_j b^j}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_{*j}} \mp \frac{1}{z - \bar{z}_{*j}} \right), \end{aligned} \quad (21.27)$$

де верхній знак стосуються півплощини з вільною межею, нижній – зі защемленою.

Несподіваною особливістю цих розв'язків є їх повільне прямування окремих складових до відповідних розв'язків для необмеженої площини. У табл. 21.5 відображена залежність від параметра  $h = H/a$  значень компонент  $\sigma_{yz}^0(a, H) = k_y \sigma_{yz}^0(a, \infty)$ ,  $\sigma_{xz}^0(a, H) = k_x \sigma_{yz}^0(a, \infty)$  тен-

зора напружень у точці  $z = a + iH$  від сили  $Q$ , яка діє в точці  $z_* = y_* = i(a + H)$ . У цьому випадку граничні значення напружень для необмеженої площини дорівнюють  $\sigma_{yx}^0(a, \infty) = -\sigma_{xx}^0(a, \infty) = \frac{Q}{4\pi a}$ , поправкові коефіцієнти

$$k_y = \frac{2h^2}{1+2h+2h^2} \rightarrow 1, \quad k_x = \frac{2+2h+2h^2}{1+2h+2h^2} \rightarrow 1, \quad h = \frac{H}{a}.$$

У зв'язку з цим відносна похибка у відсотках

$$\Delta_y = \left( \frac{\sigma_{yz}^0(a, H) - \sigma_{yz}^0(a, \infty)}{\sigma_{yz}^0(a, \infty)} \right) \cdot 100\% = (k_y - 1) \cdot 100\% = \left( \frac{1+2h}{1+2h+2h^2} \right) \cdot 100\% \sim \frac{1}{h} \cdot 100\%,$$

$$\Delta_x = \left( \frac{\sigma_{xz}^0(a, H) - \sigma_{xz}^0(a, \infty)}{\sigma_{xz}^0(a, \infty)} \right) \cdot 100\% = (k_x - 1) \cdot 100\% = \left( \frac{1}{1+2h+2h^2} \right) \cdot 100\% \sim \frac{1}{2h^2} \cdot 100\%.$$

На відміну від швидкозбіжної складової  $\sigma_{xz}$  зі збільшенням  $H$  складова  $\sigma_{yz}$  прямує до свого граничного значення дуже повільно: відмінність у 1% досягається при  $h = 100$ ; 7 знаків точності – при  $h = 100000$  (для  $\sigma_{xz}$  це відповідно  $h = 7$  та  $h = 2000$ ).

Таблиця 21.5

$h = H/a$	$\sigma_{yz}^0(a, H) \frac{a}{Q}$	$\Delta_y$	$\sigma_{xz}^0(a, H) \frac{a}{Q}$	$\Delta_x$
0	0,000000	$\infty$	-0,159154	100,000000
1	0,031831	60,00000	-0,095493	20,000000
2	0,048971	38,46148	-0,085699	7,692308
3	0,057296	28,99992	-0,082761	3,999997
5	0,065227	18,03271	-0,080882	1,639339
10	0,072016	9,50217	-0,079938	0,452400
50	0,078002	1,97991	-0,079593	0,019605
100	0,078786	0,99490	-0,079581	0,004943
1000	0,079498	0,99853	-0,079578	0,000047
10000	0,079570	0,09896	-0,079577	0,000000
50000	0,079576	0,00190	-0,079577	0,000000
100000	0,079577	0,00090	-0,079577	0,000000

Зрозуміло, що оскільки згідно з (21.16) дія дислокації рівносильна впливу зосередженої сили уявної величини, то з урахуванням залежності (21.27) при дії дислокації поведінка компонент тензора напружень буде протилежною.

### Зосереджена сила і дислокація на межі півпростору

У границі  $y_{*j} \rightarrow 0$  ( $z_{*j} \rightarrow \bar{z}_{*j}$ ) отримуємо для сили

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \begin{cases} -\frac{iQ^j}{2\pi} \frac{2}{z - x_{*j}} & (\text{вільна межа}), \\ 0 & (\text{защемлена межа}) \end{cases} \quad (21.28)$$

і для дислокації –

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \begin{cases} 0 & \text{(вільна межа),} \\ \frac{\mu_j b^j}{2\pi} \frac{2}{z - x_{*j}} & \text{(защемлена межа).} \end{cases} \quad (21.29)$$

Тобто в отриманих виразах можна формально підставляти  $y_{*j} = 0$ . Дислокація на вільній поверхні та сила на защемленій не мають жодного прояву.

**Антиплоска деформація півпростору зі стрічковим включенням від зосередженої сили**

Постановка задачі є звичною: на осьовій лінії включення з модулем зсуву  $\mu_B$  (рис. 21.13) задані стрибки вектора напруження та похідної вектора переміщення

$$\sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_3(x), \quad \frac{\partial}{\partial x} [w^- - w^+] = f_6(x) \quad (y = H). \quad (21.30)$$

Використання методики інтегральних перетворень Фур'є та умов взаємодії пружного включення з навколишнім середовищем дає змогу побудувати систему двох сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(t) dt}{t - x} - \alpha_r \int_{-a}^x f_r(t) dt + (-1)^K \sum_m \int_{L'} K_{rm}(x, t) f_m(t) dt = F_r(x) \quad (21.31)$$

$(r = 3, 6; x \in L' = (-a; a))$

з додатковими умовами

$$\int_{L'} f_3(t) dt = C, \quad \int_{L'} f_6(t) dt = 0. \quad (21.32)$$

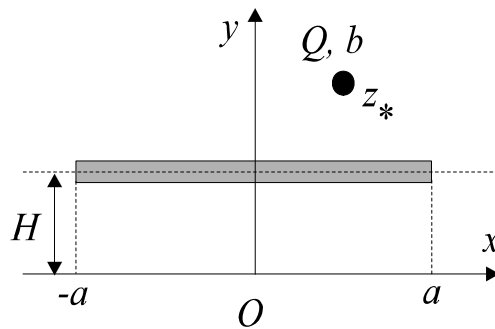


Рис. 21.13. Тонке включення у півпросторі

Параметр  $\kappa = 0$  стосується випадку заданих на границі тіла напружень;  $\kappa = 1$  – заданих на межі переміщень. Функції  $F_r(x)$  визначаються однорідним розв'язком – виразами (21.27) для сили чи дислокації у півплощині.

Застосування методу колокацій дає змогу розв'язати рівняння (21.31) та визначити узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН). У граничних випадках модуля зсуву включення отримуються результати для абсолютно жорсткого включення та тріщини. Якщо  $H \rightarrow \infty$ , то з рівнянь (21.31), (21.32) випливають результати для включення у безмежному просторі (безмежній площині).

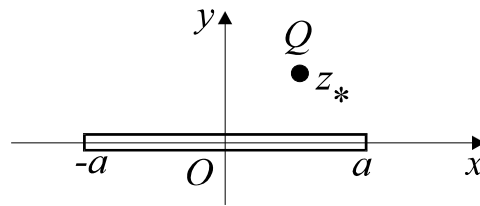


Рис. 21.14. Тріщина у безмежному просторі

На основі результатів В.В.Панасюка, М.П.Саврука, О.П.Дацишин [706] КІН біля тріщини у безмежному просторі від дії зосередженої сили  $Q$  у точці  $z_*$  (рис. 21.14) дорівнює

$$K_3^\pm = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a}} \operatorname{Im} \left[ \frac{\sqrt{z_*^2 - a^2}}{a \mp z_*} \right]. \quad (21.33)$$

Зокрема при  $x_* = 0$  маємо

$$K_3^\pm = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a} \sqrt{1 + (y_*/a)^2}}. \quad (21.34)$$

Таблиця 21.6

$H/a$	$K_{1,3}^0$	$K_{2,3}^0$	$H/a$	$K_{1,3}^0$	$K_{2,3}^0$
0,10	0,048608	-0,10681	5,00	0,17495	-0,074617
0,15	0,058560	-0,078762	10,00	0,18633	-0,073913
0,25	0,073305	-0,096453	25,00	0,19399	-0,073690
0,50	0,096949	-0,092577	50,00	0,19669	-0,073656
0,75	0,11221	-0,088216	100,00	0,19807	-0,073647
1,00	0,16979	-0,084776	1000,00	0,19933	-0,073644
2,00	0,14920	-0,078167	10000,00	0,19946	-0,073644
3,00	0,16215	-0,076014	100000,00	0,19947	-0,073644
4,00	0,16986	-0,075092	1000000,00	0,19947	-0,073644

У табл. 21.6 відображена залежність нормованого УКІН  $K_{1,3}^0 = K_{1,3}\sqrt{a}/Q$  для включення з абсолютно податного матеріалу та  $K_{2,3}^0 = K_{2,3}\sqrt{a}/Q$  для абсолютно жорсткого включення еліптичного профілю ( $a/h(0) = 10$ ) від  $h = H/a$ , коли зосереджена сила  $Q$  діє у точці  $y_* = H + a$  вільної півплощини.

Видно, що лише при значенні  $H=100000$  обчисленні значення КІН  $K_{1,3}^0$  збігаються з точністю до п'яти значущих цифр зі значеннями, які дає точний вираз (21.34). Для  $K_{2,3}^0$  така точність досягається вже при  $H=1000$ . Це стає зрозумілим, якщо врахувати, що  $K_{1,3}^0$  визначається напруженнями  $\sigma_{yz}^0$ , УКІН  $K_{2,3}^0$  – напруженнями  $\sigma_{xz}^0$ .

Для дислокації швидкість збіжності матиме протилежну тенденцію.

Якщо розглянути задачу поздовжнього зсуву для півпростору з півбезмежною тріщиною (рис. 21.15) під впливом протилежно спрямованих зосереджених сил, прикладених до берегів тріщини, то згідно з [650, 589] КІН дорівнює

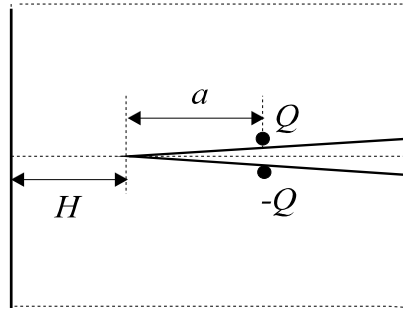


Рис. 21.15. Зосереджені сили на берегах півбезмежного розрізу біля краю півпростору

$$K_3 = YK_3^\infty, K_3^\infty = \frac{2Q}{\sqrt{2\pi a}}, Y = \sqrt{\frac{2h^2 + 4h + 2}{2h^2 + h}}, h = \frac{H}{a}.$$

Тут  $K_3^\infty$  – КІН у відповідній задачі [1668, 589] для необмеженого простору ( $H \rightarrow \infty$ ).

Залежність поправкового коефіцієнту  $Y$  та відносної різниці  $\Delta_k = (Y - 1) \cdot 100\%$  у відсотках від параметра  $h$  відображена в табл. 21.7. Видно, що значення  $K_3$  прямує з  $h \rightarrow \infty$  до свого граничного значення так само швидко, як  $\sigma_{yz}^0$  та  $K_{13}^0$  у попередніх прикладах.

Таблиця 21.6

$H/a$	$Y$	$\Delta_k$
0	$\infty$	$\infty$
1	1,632993	63,299320
2	1,341641	34,164080
3	1,234427	23,442680
5	1,144155	14,415510
10	1,073490	7,349008
50	1,014938	1,493793
100	1,007484	0,748443
1000	1,000750	0,074984
10000	1,000075	0,007500
50000	1,000015	0,001500
100000	1,000008	0,000750

Таким чином, можна стверджувати, що у випадку дії зосереджених силових чинників вплив межі тіла на окремі механічні величини може сягати значних віддалей і для них не існуватиме яскраво вираженого крайового характеру, властивого тілам скінченного розміру.

## § 22. Включення у шаруватих середовищах

Деякі результати цього параграфу для шаруватих середовищ опубліковані у працях [964, 939].

### 22.1. Основні співвідношення

Згідно з виразами (13.103)–(13.109) у випадку антиплоскої задачі інтегральне перетворення Фур'є дає зв'язок між переміщенням  $w(x, y)$  та її трансформантою  $w^F(\xi, y)$  за змінною  $x$  у вигляді



$$w^F(\xi, y) \equiv F(w, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\xi x} dx, \quad w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (22.1)$$

Якщо вважати, що  $x \rightarrow \infty$ , то  $w(x, y)$ ,  $\partial w / \partial z \rightarrow 0$  і фур'є-перетворення  $w^{F'}(\xi, y)$  похідної за  $x$  переміщення  $w'(x, y)$  та напруження матиме вигляд

$$w^{F'}(\xi, y) = -i\xi w^F(\xi, y), \quad \sigma_{xz}^F(\xi, y) = -iG\xi w^F(\xi, y), \quad \sigma_{yz}^F(\xi, y) = G \frac{\partial w^F(\xi, y)}{\partial y}, \quad (22.2)$$

а розв'язок рівняння (13.103) у просторі зображень перетворення Фур'є –

$$w^F(\xi, y) = A_1(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2(\xi) e^{|\xi|y}, \quad (22.3)$$

де  $A_i(\xi)$  – довільні комплексні функції.

## 22.2. Стрибки напружень і переміщень на відрізку в однорідній площині та на лінії поділу двох матеріалів

### Однорідна площина

Розглянемо необмежену площину  $xOy$  (рис. 22.1), яка відповідає необмеженому середовищу з модулем зсуву  $G_k \sim G$  та вважатимемо, що уздовж частини  $L'$  осі  $x$  задані стрибки напружень  $\sigma_{yz}$  та похідної  $w'$  переміщення (20.2)  $\sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_3(\xi)$ ,  $w'^- - w'^+ = f_6(\xi)$  ( $x \in L'$ ).

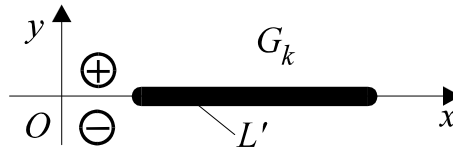


Рис. 22.1. Одне включення в однорідному середовищі

На решті точок осі  $x$  функції стрибка дорівнюють нулю  $f_3(x) = f_6(x) = 0$  ( $x \notin L'$ ). Тут індексами “+” і “-” позначено граничні значення відповідних величин при  $y \rightarrow 0$  з верхньої і нижньої півплощин відповідно. Фур'є-перетворення цих крайових умов має вигляд

$$\sigma_{yz}^{F-} - \sigma_{yz}^{F+} = f_3^F(\xi), \quad w^{F'-} - w^{F'+} = f_6^F(\xi), \quad f_r^F(\xi) \equiv \int_{L'} f_r(t) e^{i\xi t} dt \quad (r = 3, 6). \quad (22.4)$$

Якщо подати фур'є-трансформанту переміщення  $w$  у верхній півплощині у вигляді (22.3), то з огляду на її обмеженість у разі  $y \rightarrow \infty$  за умови  $y > 0$  отримаємо, що слід вважати  $A_2(\xi) = 0$ . Подібним чином отримують, що за умови  $y < 0$  треба покласти  $A_1(\xi) = 0$ . Отже, для випадку необмеженого середовища вираз (22.3) трансформується до залежності

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] A_1(\xi) e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] A_2(\xi) e^{|\xi|y} \right\}. \quad (22.5)$$

Фур'є-перетворення напружень і похідних переміщень на лінії  $y = 0$  з урахуванням (22.4) та (22.2)

$$\sigma_{yz}^{F+} = -G_k |\xi| A_1(\xi), \quad w^{F'+} = -i\xi A_1(\xi), \quad \sigma_{yz}^{F-} = G_k |\xi| A_1(\xi), \quad w^{F'-} = -i\xi A_2(\xi). \quad (22.6)$$

Підставляючи (22.6) у (22.4), отримуємо систему двох рівнянь:

$$A_1(\xi) + A_2(\xi) = \frac{f_5^F(\xi)}{G_k |\xi|}, \quad A_1(\xi) - A_2(\xi) = -\frac{if_6^F(\xi)}{\xi},$$

звідки з урахуванням того, що  $\xi = \text{sign}(\xi)|\xi|$ ,

$$A_r(\xi) = \sum_r a_{ir}(\xi) f_r^F(\xi), \quad (r = 3, 6), \quad \|a_{ir}\| = \frac{1}{2\mu_k \xi} \begin{vmatrix} \text{sign}(\xi) & -iG_k \\ \text{sign}(\xi) & iG_k \end{vmatrix}. \quad (22.7)$$

Згідно з (22.7), (22.5) і (22.2)

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^F &= -\frac{\mu_k |\xi|}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] A_1(\xi) e^{-|\xi|y} - [1 - \text{sign}(y)] A_2(\xi) e^{|\xi|y} \right\} = \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] \left[ f_3^F(\xi) - iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} - [1 - \text{sign}(y)] \times \right. \\ &\times \left. \left[ f_3^F(\xi) + iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left( f_3^F - iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F \right) e^{-|\xi|y} & (y > 0), \\ \frac{1}{2} \left( f_3^F + iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F \right) e^{|\xi|y} & (y < 0) \end{cases} = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \text{sign}(y) f_3^F(\xi) - iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y}. \end{aligned}$$

Тепер, здійснивши обернення, з урахуванням (22.4) отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) f_3^F(\xi) - iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{L' - \infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) f_3(t) - iG_k \text{sign}(\xi) f_6(t) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt. \end{aligned}$$

Подібним чином з (22.7) та (22.4) і (22.2)

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^F &= -iG_k \xi w^F = -\frac{i \text{sign}(\xi) G_k |\xi|}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] A_1(\xi) e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] A_2(\xi) e^{|\xi|y} \right\} = \\ &= -\frac{i \text{sign}(\xi)}{4} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] \left[ f_3^F(\xi) - iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] \times \right. \\ &\times \left. \left[ f_3^F(\xi) + iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} = \begin{cases} -\frac{i}{2} \text{sign}(\xi) \left( f_3^F - iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F \right) e^{-|\xi|y} & (y > 0), \\ -\frac{i}{2} \text{sign}(\xi) \left( f_3^F + iG_k \text{sign}(\xi) f_6^F \right) e^{|\xi|y} & (y < 0) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left( G_k f_6^F + i \text{sign}(\xi) f_3^F \right) e^{-|\xi|y} & (y > 0), \\ \frac{1}{2} \left( G_k f_6^F - i \text{sign}(\xi) f_3^F \right) e^{|\xi|y} & (y < 0) \end{cases} = -\frac{1}{2} \left[ \text{sign}(y) G_k f_6^F(\xi) + i \text{sign}(\xi) f_3^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) G_k f_6^F(\xi) + i \text{sign}(\xi) f_3^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{L' - \infty}^{\infty} \text{sign}(y) G_k f_6(\xi) + i \text{sign}(\xi) f_3(\xi) e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt. \end{aligned}$$

Таким чином, компоненти тензора напружень дорівнюють

$$\sigma_{yz} = -\frac{1}{4\pi} \int_{L'=-\infty}^{+\infty} \int_{L'=-\infty}^{+\infty} [\text{sign}(y) f_3(t) - iG_k \text{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi y|} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt,$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{1}{4\pi} \int_{L'=-\infty}^{+\infty} \int_{L'=-\infty}^{+\infty} [\text{sign}(y) G_k f_6(t) + i \text{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi y|} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt.$$

Враховувши у цих виразах залежність (13.90), маємо

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{2\pi} \int_{L'} \text{Re} \left[ \frac{if_3^*(t)}{t-z} \right] dt, \quad \sigma_{xz} = \frac{1}{2\pi} \int_{L'} \text{Im} \left[ \frac{if_3^*(t)}{t-z} \right] dt \quad (f_3^*(t) = f_3(t) + iG_k f_6(t)).$$

Позначивши отриманий розв'язок верхніми індексами " $^{0k}$ ", подамо його у формі

$$\hat{\mathbf{f}}^{0k}(z) \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0k}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{0k}(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{L'} \frac{f_3^*(t)}{t-z} dt \quad (f_3^*(t) = f_3(t) + iG_k f_6(t)). \quad (22.8)$$

Звідси граничні значення компонент тензора напружень на лінії  $y=0$  згідно з формулою Сохоцького – Племеля дорівнюють

$$\hat{\mathbf{f}}^{0k\pm}(x) \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0k\pm}(x) + i\hat{\sigma}_{xz}^{0k\pm}(x) = \mp \frac{1}{2} f_3^*(x) + \frac{i}{2\pi} \int_{L'} \frac{f_3^*(t)}{t-x} dt. \quad (22.9)$$

### Дві півплощини з різних матеріалів

Нехай тепер півплощині  $S_0$  ( $y > 0$ ) відповідає пружне середовище з модулем зсуву  $G_0$ , а півплощині  $S_{-1}$  ( $y < 0$ ) – середовище з модулем зсуву  $G_{-1}$ . Уздовж фрагменту  $L'$  осі  $x$  задані функції стрибка (20.2)  $\sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_3^-(\xi)$ ,  $w'^- - w'^+ = f_6^-(\xi)$  ( $x \in L'$ ). Подібно до того, як це зроблено у (22.6),

$$\sigma_{yz}^{F+} = -G_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_1(\xi) e^{-|\xi|y} \right] \Big|_{y=0} = -G_0 |\xi| A_1(\xi), \quad w'^+ = -i\xi A_1(\xi),$$

$$\sigma_{yz}^{F-} = -G_{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_2(\xi) e^{|\xi|y} \right] \Big|_{y=0} = G_{-1} |\xi| A_2(\xi), \quad w'^- = -i\xi A_2(\xi).$$

Підставляючи ці вирази у (22.4), отримуємо систему двох рівнянь

$$|\xi| [G_0 A_1(\xi) + G_{-1} A_2(\xi)] = f_3^F(\xi), \quad A_1(\xi) - A_2(\xi) = -if_6^F(\xi)/\xi,$$

звідки

$$A_1(\xi) = \frac{f_3^F(\xi) - iG_{-1} \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi)}{(G_0 + G_{-1})|\xi|}, \quad A_2(\xi) = \frac{f_3^F(\xi) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi)}{(G_0 + G_{-1})|\xi|}. \quad (22.10)$$

Тому

$$\sigma_{yt}^F = -\frac{1}{2} G_k |\xi| \left\{ [1 + \text{sign}(y)] A_1(\xi) e^{-|\xi|y} - [1 - \text{sign}(y)] A_2(\xi) e^{|\xi|y} \right\} =$$

$$= -\frac{G_k}{2(G_0 + G_{-1})} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] \left[ f_3^F(\xi) - iG_{-1} f_6^F(\xi) \text{sign}(\xi) \right] e^{-|\xi|y} - [1 - \text{sign}(y)] \times \right.$$

$$\left. \times \left[ f_3^F(\xi) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} = \begin{cases} -\frac{G_k}{G_{-1} + G_0} \left[ f_3^F(\xi) - iG_{-1} \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} & (y > 0), \\ -\frac{G_k}{G_{-1} + G_0} \left[ f_3^F(\xi) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{|\xi|y} & (y < 0), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yt}^F &= -iG_k \xi w^F = -\frac{1}{2} iG_k \text{sign}(\xi) |\xi| \left\{ [1 + \text{sign}(y)] A_1(\xi) e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] A_2(\xi) e^{|\xi|y} \right\} = \\ &= -\frac{i \text{sign}(\xi) G_k}{2(G_0 + G_{-1})} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] \left[ f_3^F(\xi) - iG_{-1} f_6^F(\xi) \text{sign}(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] \times \right. \\ &\times \left. \left[ f_3^F(\xi) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^F(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} = \begin{cases} -\frac{G_k}{G_{-1} + G_0} \left[ G_{-1} f_6^F(\xi) + i \text{sign}(\xi) f_3^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} & (y > 0), \\ \frac{G_k}{G_{-1} + G_0} \left[ G_0 f_6^F(\xi) - i \text{sign}(\xi) f_3^F(\xi) \right] e^{|\xi|y} & (y < 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Тут  $k = 0$ , якщо  $y > 0$ , і  $k = -1$ , якщо  $y < 0$ .

Отримані вище вирази можна переписати у компактній формі

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^F &= -\left[ \text{sign}(y) p_{0,-1}^k f_3^F(\xi) - i \text{sign}(\xi) c_{0,-1} f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y}, \\ \sigma_{xz}^F &= -\left[ \text{sign}(y) c_{0,-1} f_6^F(\xi) + i \text{sign}(\xi) p_{0,-1}^k f_3^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y}, \end{aligned} \quad (22.11)$$

$$p_{lm}^k = G_k p_{lm}, \quad p_{lm} = \frac{1}{G_l + G_m}, \quad c_{lm} = G_l G_m p_{lm}.$$

Здійснюючи обернення, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) p_{0,-1}^k f_3^F(\xi) - i \text{sign}(\xi) c_{0,-1} f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) p_{0,-1}^k f_3^F(\xi) - i \text{sign}(\xi) c_{0,-1} f_6^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} e^{-i\xi t} d\xi; \\ \sigma_{xz} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) c_{0,-1} f_6^F(\xi) + i \text{sign}(\xi) p_{0,-1}^k f_3^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{sign}(y) c_{0,-1} f_6^F(\xi) + i \text{sign}(\xi) p_{0,-1}^k f_3^F(\xi) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} e^{-i\xi t} d\xi. \end{aligned}$$

Враховавши у цих виразах залежність (13.90), маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= -\frac{1}{\pi} \int_{L'} \text{Im} \left[ \frac{p_{0,-1}^k f_3(t) + i c_{0,-1} f_6(t)}{t - z} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \text{Re} \left[ \frac{i \left[ p_{0,-1}^k f_3(t) + i c_{0,-1} f_6(t) \right]}{t - z} \right], \\ \sigma_{xz} &= -\frac{1}{\pi} \int_{L'} \text{Im} \left[ \frac{c_{0,-1} f_6(t) - i p_{0,-1}^k f_3(t)}{t - z} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \text{Im} \left[ \frac{i \left[ p_{0,-1}^k f_3(t) + i c_{0,-1} f_6(t) \right]}{t - z} \right]. \end{aligned}$$

У комплексній формі ці вирази набудуть вигляду

$$\hat{\tau}^{0k}(z) \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0k}(z) + i \hat{\sigma}_{xz}^{0k}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{L'_0} \frac{p_{0,-1}^k f_3(t) + i c_{0,-1} f_6(t)}{t - z} dt \quad (z \in S_k; k = 0, 1). \quad (22.12)$$

Звідси граничні значення компонент тензора напружень на лінії  $y = 0$  згідно з формулою Сохоцького – Племеля [635, 112] дорівнюють

$$\begin{aligned} \hat{f}^{0k\pm}(x) &\equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0k\pm}(x) + i\hat{\sigma}_{xz}^{0k\pm}(x) = \\ &= \mp \left[ p_{0,-1}^k f_3(x) + ic_{0,-1} f_6(x) \right] + \frac{i}{\pi} \int_{L'} \frac{p_{0,-1}^k f_3(t) + ic_{0,-1} f_6(t)}{t-x} dt. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Тут значенню  $k = 0$  відповідає верхній знак, а  $k = -1$  – нижній.

У частковому випадку, коли матеріали півплощин однакові ( $G_0 = G_{-1} = G$ ), маємо  $p_{0,-1}^k = 1/2$ ,  $c_{0,-1} = G/2$  і вирази (22.12), (22.13) збігаються з (2.8), (22.9) відповідно.

### 22.3. Пакет шарів з внутрішніми стрічковими включеннями

#### Загальні засади

Розглянемо пакет  $l+m+1$  смуг  $S_j$  ( $j = \overline{-m, l}$ ) заввишки  $H_j$  та з модулями зсуву  $G_j$  відповідно (рис. 22.2). Всередині смуг  $S_j$  уздовж відрізків  $L'_j$  осей  $s_j$  розташовані стрічкові включення. У смугах можуть бути також інші включення, або не бути зовсім. У точці  $O_j$  перетину осей  $s_j \sim L_j$  з границею смуги помістимо початок двох локальних декартових систем координат  $x_j O_j y_j$  та  $s_j O_j n_j$ , зв'язаних між собою залежністю

$$s_j + in_j = -z_j e^{i\omega_j} = z_j e^{-i\alpha_j}, \quad z_j = x_j + iy_j, \quad \alpha_j + \omega_j = \frac{\pi}{2}. \quad (22.14)$$

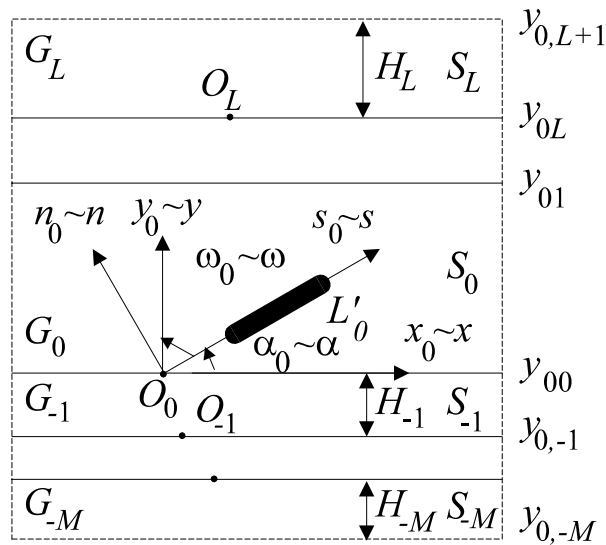


Рис. 22.2. Геометрична схема багат шарового середовища з включеннями

Для спрощення запису вважатимемо  $x_0 \sim x$ ,  $y_0 \sim y$ ,  $s_0 \sim s$ ,  $n_0 \sim n$ ,  $\alpha_0 \sim \alpha$ ,  $\omega_0 \sim \omega$ ,  $O_0 \sim O$ . Координату точки  $O_j$  в системі  $xOy$  позначимо  $z_0 \sim z = z_j + z_{0j}$ .

Крайні смуги  $S_l$  та  $S_{-m}$  можуть мати скінченну, або безмежно велику висоту (товщину), тобто, бути кожна зокрема, або і обидві одночасно, півплощинами (півпросторами).

На лініях  $y = y_{0j}$  розмежування матеріалів смуг  $S_j$  та  $S_{j-1}$  виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yz}^j = \sigma_{yz}^{j-1}, w'^j = w'^{j-1}, y = y_{0j}, -\infty < x < +\infty \quad (j = -(m-1)..l). \quad (22.15)$$

Верхній індекс відзначає номер смуги, де визначена відповідна компонента вектора напруження чи переміщення.

На межах пакету  $y = y_{0,l+1}, -\infty < x < +\infty$ ; та  $y = y_{0,-m}, -\infty < x < +\infty$  задаємо або напруження, або переміщення:

$$1. \sigma_{yz} = f_z^{0\pm}(x); \quad 2. w' = g_z^{0\pm}(x). \quad (22.16)$$

Індекс "+" стосується верхньої, індекс "-" – нижньої меж тіла. Можна задати теж силове навантаження довільного типу всередині кожної зі смуг.

Вважаємо, що товщина стрічкового включення настільки мала, що його можна вилучити з розгляду, замінивши його вплив на тіло стрибком на  $L'_j$  вектора напружень та похідної вектора переміщення

$$\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+} = f_3^j(s_j), \quad \frac{\partial}{\partial s_j} [w^{j-} - w^{j+}] = f_6^j(s_j) \quad (s_j \in L_j), \quad (22.17)$$

причому  $f_3^j(s_j) = f_6^j(s_j) = 0$ , якщо  $s_j \notin L_j$ . Вважаємо також відомими умови взаємодії – дві функції, що зв'язують між собою напруження та переміщення на протилежних точках матриці, що прилягають до берегів прошарку

$$\Psi_r^j \left( \sigma_{nz}^{j\pm}, \frac{\partial w^{j\pm}}{\partial s_j} \right) = 0 \quad (s_j \in L'_j, r = 3, 6). \quad (22.18)$$

Переміщення  $w^j$  всередині  $j$ -ї смуги подамо у вигляді суперпозиції однорідного  $w^{0j}$ , породженого зовнішнім навантаженням (за відсутності включень), та збуреного  $\hat{w}^j$  розв'язків:

$$w^j(z) = w^{0j}(z) + \hat{w}^j(z) \quad (z \in S_j). \quad (22.19)$$

У свою чергу, збурений розв'язок  $\hat{w}^j$  є сумою повного (основного) розв'язку  $\hat{w}^{0j}$  для безмежної площини з такими ж механічними властивостями і такими ж включеннями, які належать  $S_j$  (якщо у  $S_j$  включення немає, то  $\hat{w}^{0j} = 0$ ), та збуреного коригувального  $\hat{w}^{1j} = 0$ , який повинен враховувати скінченність висоти  $H_j$  та вплив сусідніх смуг

$$\hat{w}^j(z) = \hat{w}^{0j}(z) + \hat{w}^{1j}(z) \quad (z \in S_j) \quad (22.20)$$

і не породжувати стрибків напружень і переміщень.

Отже,

$$w^j(z) = w^{0j}(z) + \hat{w}^{0j}(z) + \hat{w}^{1j}(z) \quad (z \in S_j). \quad (22.21)$$

Такими ж індексами відзначатимемо відповідні компоненти тензорів напружень та похідні переміщень.

Зазначимо, що якщо у  $S_j$  міститься не одне, а декілька включень, то  $\hat{w}^{0j}$  визначається як розв'язок для аналогічної системи включень у безмежній площині (див. § 21, [951]).

Однорідний розв'язок  $w^{0j}$  задовольняє крайові умови (22.16) на межі пакету, умови ідеального механічного контакту (22.15) на лініях поділу матеріалів, а за переходу через вісь включень не викликає стрибка напружень чи переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти нульові крайові умови на границі пакету (одне з двох записаних нижче рівнянь на кожній границі),

$$1. \hat{\sigma}_{yz}^l \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0l} + \hat{\sigma}_{yz}^{1l} = 0; \quad 2. \hat{w}^l \equiv \hat{w}^{0l} + \hat{w}^{1l} = 0 \quad (y = y_{0,l+1}), \quad (22.22)$$

$$1. \hat{\sigma}_{yz}^{-m} \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0-m} + \hat{\sigma}_{yz}^{1-m} = 0; \quad 2. \hat{w}^{-m} \equiv \hat{w}^{0-m} + \hat{w}^{1-m} = 0 \quad (y = y_{0,-m}), \quad (22.23)$$

умовам ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yz}^j &\equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0,j} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,j} = \hat{\sigma}_{yz}^{j-1} \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0,j-1} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,j-1}, \\ \hat{w}^j &\equiv \hat{w}^{0,j} + \hat{w}^{1,j} = \hat{w}^{j-1} \equiv \hat{w}^{0,j-1} + \hat{w}^{1,j-1} \end{aligned} \quad (22.24)$$

$$(y = y_{0j}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad j = -(m-1)..l)$$

та породжувати стрибки напружень і похідних переміщень на  $L'_j$ :

$$\hat{\sigma}_{nz}^{j-} - \hat{\sigma}_{nz}^{j+} = f_3^j(s_j); \quad \frac{\partial}{\partial s_j} [\hat{w}^{j-} - \hat{w}^{j+}] = f_6^j(s_j) \quad (s_j \in L'_j), \quad (22.25)$$

причому  $f_r^j(s_j) = 0$  ( $r = 3, 6$ ), якщо  $s_j \notin L'_j$ .

На основі результатів п. 22.2 (формула (22.8)) – розв'язку для безмежної однорідної площини, у якій уздовж відрізка  $L'_j$  заданий стрибок напружень і похідної зміщень – отримуємо

$$\hat{\sigma}_{nz}^{0j} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0j} \equiv \hat{\sigma}_{nz}^{0j} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0j} = \frac{i}{2\pi} \int_{L'_j} \frac{f_3^*(t) dt}{t - (s_j + in_j)}, \quad f_3^*(t) = f_3^j(t) + iG_j f_6^j(t). \quad (22.26)$$

Приводячи на основі залежності

$$\sigma_{y_jz} + i\sigma_{x_jz} = [\sigma_{n_jz} + i\sigma_{s_jz}] \exp(-i\alpha_j) = -i[\sigma_{n_jz} + i\sigma_{s_jz}] \exp(i\omega_j)$$

вирази (22.26) спочатку до повернутої системи  $O_j x_j y_j$

$$\hat{\sigma}_{y_jz}^{0j}(x, y) + \hat{\sigma}_{x_jz}^{0j}(x, y) = \frac{i \exp(-i\alpha_j)}{2\pi} \int_{L'_j} \frac{f_3^{*j}(t) dt}{t - z_j \exp(-i\alpha_j)},$$

а потім до єдиної спільної системи координат  $xOy$ , отримуємо

$$\hat{\sigma}_{yz}^{0j}(x, y) + \hat{\sigma}_{xz}^{0j}(x, y) = \frac{i \exp(-i\alpha_j)}{2\pi} \int_{L'_j} \frac{f_3^{*j}(t) dt}{t - (z - z_{0j}) \exp(-i\alpha_j)} \quad (z - z_{0j} = z_j). \quad (22.27)$$

Для коригувальної функції  $\hat{w}^{1j}$

$$\hat{w}^{1j}(x_j, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}^{1jF}(\xi, y_j) e^{-i\xi x_j} d\xi, \quad (22.28)$$

де

$$\hat{w}^{1jF}(\xi, y_j) = A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y_j} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y_j}. \quad (22.29)$$

Причому, якщо висота  $H_j$  якоїсь зі смуг безмежна, то одна із комплексних функцій  $A_q^j(\xi)$  нульова: для області  $S_l$  буде  $A_2^j(\xi) = 0$ ; для  $S_{-m}$  ( $\xi$ ) –  $A_1^{-m}(\xi) = 0$ .

На основі формул (22.28), (22.29) та (22.2)

$$\hat{w}^{1j}(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y}] \xi e^{-i\xi x} d\xi; \quad (22.30)$$

$$\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(x, y) = -\frac{iG_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi; \quad (22.31)$$

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(x, y) = \frac{G_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi. \quad (22.32)$$

Використання закону Гука  $\hat{w}^{0j}(x, y) = \hat{\sigma}_{xz}^{0j}(x, y)/G_j$  та формул (22.27), (22.30)–(22.32) у виразах (22.20) дає можливість під час задовольнення крайових умов (22.22), (22.23), (22.24) одержати систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно функцій  $A_q^j(\xi)$ .

$$\sum_{j=-m}^l \left[ \sum_{q=1,2} c_{kj}^q(\xi) A_q^j(\xi) - \sum_{r=3,6} \int_{L'_r} F_{kr}^j(\xi, t) f_r^j(t) dt \right] = 0 \quad (j, k = -m, \dots, -1, 1, \dots, l). \quad (22.33)$$

Умова (22.25) задовольняється за рахунок складової  $\hat{w}^{0j}$ .

Розв'язок системи (22.33) має вигляд

$$A_q^j(\xi) = \sum_q \sum_r \int_{L'_r} a_{qr}^{jp}(\xi, t) f_r^p(t) dt, \quad a_{qr}^{jp}(\xi, t) = \Delta_{qr}^{jp}(\xi, t) / \Delta_1(\xi) \quad (22.34)$$

$$(q = 1, 2; r = 3, 6; p, j = -m, \dots, -1, 1, \dots, l),$$

де  $\Delta_1(\xi)$  – визначник системи (22.33);  $\Delta_{qr}^{jp}(\xi, t)$  – відповідні алгебричні доповнення, що стосуються функцій стрибка  $f_r^j(t)$ ; функції  $c_{kj}^q(\xi)$ ,  $F_{kr}^j(\xi, t)$ ,  $a_{qr}^{jp}(\xi, t)$  залежать від пружних сталей та геометрії пакету.

Якщо у суміжних смугах  $S_j$  та  $S_{j-1}$  немає включень, то основні збурені розв'язки у них дорівнюють нулю  $\hat{w}^{0j} = \hat{w}^{0,j-1} = 0$  і тоді умова ідеального механічного контакту (22.24) зводиться до умови

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1,j} = \hat{\sigma}_{yz}^{1,j-1}, \quad \hat{w}^{1,j} = \hat{w}^{1,j-1} \quad (y = y_{0j}, \quad -\infty < x < +\infty).$$

З урахуванням залежностей (22.32) та (22.30) ці вирази зведуться до системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{G_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi = \\ = \frac{G_{j-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A_1^{j-1}(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^{j-1}(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi, \\ \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi = \\ = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_1^{j-1}(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^{j-1}(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi, \end{aligned}$$

або

$$G_j \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} \right] = G_{j-1} \left[ -A_1^{j-1}(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^{j-1}(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} \right]$$

$$A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y_{0j}} = A_1^{j-1}(\xi) e^{-|\xi|y_{0j}} + A_2^{j-1}(\xi) e^{|\xi|y_{0j}}.$$

Це дає розв'язок



$$A_1^{j-1}(\xi) = \frac{1}{2G_{j-1}} \left[ (G_j + G_{j-1}) A_1^j(\xi) - (G_j - G_{j-1}) A_2^j(\xi) e^{2|\xi|y_{0j}} \right],$$

$$A_2^{j-1}(\xi) = \frac{1}{2G_{j-1}} \left[ -(G_j - G_{j-1}) A_1^j(\xi) e^{-2|\xi|y_{0j}} + (G_j + G_{j-1}) A_2^j(\xi) \right].$$

Якщо матеріали суміжних смуг однакові ( $G_j = G_{j-1}$ ), то з цих виразів отримуємо

$$A_1^{j-1}(\xi) = A_1^j(\xi), \quad A_2^{j-1}(\xi) = A_2^j(\xi).$$

Підставляючи отримані з системи (22.34) значення  $A_q^j(\xi)$  у вирази (22.31) та (22.32), будемо коригувальні напруження

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) = \sum_p \sum_r \int_{L'_p} R_r^{jp}(z, t) f_r^p(t) dt, \quad (22.35)$$

$$R_r^{jp}(z, t) = R_{1r}^{jp}(z, t) + iR_{2r}^{jp}(z, t),$$

де  $R_{kr}^{jp}$  – цілком регулярні всередині смуги  $S_j$  дійсні функції впливу.

$$R_{1r}^{jp}(z, t) = \frac{G_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -a_{1r}^{jp}(\xi, t) e^{-|\xi|y} + a_{2r}^{jp}(\xi, t) e^{|\xi|y} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi, \quad (22.36)$$

$$R_{2r}^{jp}(z, t) = -\frac{iG_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ a_{1r}^{jp}(\xi, t) e^{-|\xi|y} + a_{2r}^{jp}(\xi, t) e^{|\xi|y} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi.$$

Переходячи до локальної повернутої системи координат  $x_j O_j y_j$ , всередині смуги  $S_j$  запишемо,

$$\hat{\sigma}_{y_j z}^{1j} + i\hat{\sigma}_{x_j z}^{1j} = \sum_p \sum_r \int_{L'_p} R_r^{jp}(z_j + z_{0j}, t) f_r^p(t) dt,$$

а у локальній повернутій системі координат  $s_j O_j n_j$  –

$$\hat{\sigma}_{n_j z}^{1j} + i\hat{\sigma}_{s_j z}^{1j} = e^{i\alpha_j} \sum_p \sum_r \int_{L'_p} R_r^{jp} \left( (s_j + in_j) e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^p(t) dt.$$

Тому на лінії включення ( $n_j = 0$ )

$$\hat{\sigma}_{n_j z}^{1j\pm} + i\hat{\sigma}_{s_j z}^{1j\pm} = e^{i\alpha_j} \sum_p \sum_r \int_{L'_p} R_r^{jp} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^p(t) dt$$

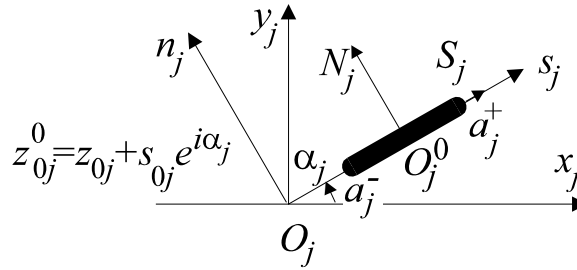
і остаточно отримаємо вислідне поле напружень та похідних переміщень на осі включення

$$\hat{\sigma}_{n_j z}^{j\pm} + i\hat{\sigma}_{s_j z}^{j\pm} = \mp \frac{1}{2} f_3^{*j}(s_j) + \frac{i}{2\pi} \int_{L'_j} \frac{f_3^{*j}(s_j) dt}{t - s_j} + e^{i\alpha_j} \sum_p \sum_r \int_{L'_p} R_r^{jp} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^p(t) dt + \hat{\sigma}_{n_j z}^{j0} + i\hat{\sigma}_{s_j z}^{j0}, \quad w'^{j\pm} = \sigma_{s_j z}^{j\pm} / G_j. \quad (22.37)$$

Підставляючи вирази (22.37) в умови взаємодії (22.18), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка  $f_r^j(t)$ . Розв'язавши її можна вважати визначеним поле напружень і переміщень у довільній точці композиту.

**Включення, паралельне до межі поділу матеріалів**

Незручність виразів (22.35), (22.37) полягає у тому, що їх не можна використовувати, якщо включення розміщене всередині смуги але паралельне до межі поділу матеріалів, оскільки якщо  $\alpha_j = 0$ , то вісь  $S_j$  збігається з лінією  $y = y_{0j}$ .



**Рис. 22.3. Нахилене включення**

Для того, щоб позбутися цього недоліку, розглянемо на осі  $s_j$  точку  $O_j^0$  ( $s_j = s_{0j}$ ) по середині відрізка  $L'_j$  (рис. 22.3) і помістимо у неї початок системи координат  $S_j O_j^0 N_j$ :  $S_j = s_j - s_{0j}$ ,  $N_j = n_j$ . Тоді

$$(s_j + in_j) e^{i\alpha_j} + z_{0j} + s_{0j} e^{i\alpha_j}, s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j} = S_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}^0, \tag{22.38}$$

де  $z_{0j}^0 = z_{0j} + s_{0j} e^{i\alpha_j}$  – координата точки  $O_j^0$  в основній системі координат  $xOy$ . Зокрема, коли  $\alpha_j = 0$ , то

$$s_j + in_j + z_{0j} = S_j + iN_j + z_{0j}^0, s_j + z_{0j} = S_j + z_{0j}^0. \tag{22.39}$$

З урахуванням підстановок (22.38), (22.39) виразами (22.35), (22.37) можна користуватися вже у довільному випадку.

**Зосереджені сили та дислокації всередині пакету смуг**

Побудуємо однорідний розв'язок для сукупності зосереджених сил та гвинтових дислокацій у смугах пакету. Такий розв'язок  $w^{0j}$  розглядатимемо як суму основного однорідного  $w^{00j}$  та коригувального  $w^{01j}$ .

Спочатку вкажемо основний розв'язок, поклавши у (22.8)  $f_r(t) = f_r^j \delta(t)$ ,  $f_3^j = Q^j$ ,  $f_6^j = b^j$  звідки

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{G_j b^j - iQ^j}{2\pi z}.$$

Це поле напружень від сили  $Q^j$  та гвинтової дислокації  $b^j$  у початку системи координат безмежної однорідної площини з модулем зсуву  $G_j$  (тому цей розв'язок наділений верхніми індексами "00j"). Якщо ж ці чинники діють у точці  $z_{*j}$ , то замінивши у отриманому вище виразі  $z$  на  $z - z_{*j}$ , отримаємо відповідну залежність

$$\sigma_{yz}^{00j}(z) + i\sigma_{xz}^{00j}(z) = \frac{G_j b^j - iQ^j}{2\pi(z - z_{*j})}. \quad (22.40)$$

Вважаючи у (22.35)  $f_r(t) = f_r^j \delta(t - s_{*j})$ ,  $f_3^j = Q_y^j$ ,  $f_6^j = b^j$ , отримаємо

$$\sigma_{yz}^{01j} + i\sigma_{xz}^{01j} = \sum_p \sum_r R_r^{j1}(z, s_{*j}) f_r^1. \quad (22.41)$$

### Включення всередині смуги

Розглянемо включення вздовж відрізка  $L'_0$ , орієнтованого під кутом  $\alpha_0 = \alpha$  до краю  $y = 0$  смуги заввишки  $H_0$  та з модулем зсуву  $G_0$  (рис. 22.4).

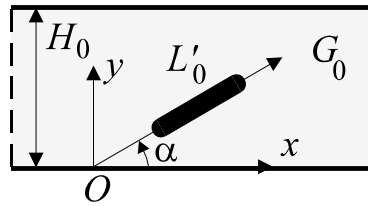


Рис. 22.4

Якщо на межі тіла задані напруження, то крайові умови (22.22), (22.23) набудуть вигляду

$$\left( \hat{\sigma}_{yz}^{00} + \hat{\sigma}_{yz}^{10} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left( \hat{\sigma}_{yz}^{00} + \hat{\sigma}_{yz}^{10} \right) \Big|_{y=H_0} = 0,$$

або з урахуванням (22.27) та (22.32) –

$$\begin{aligned} \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{if_3^*(t) e^{-i\alpha}}{t - x e^{-i\alpha}} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{if_3^*(t)}{te^{i\alpha} - x} \right] dt \equiv \Phi_1(x), \end{aligned}$$

$$\frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{if_3^*(t)}{te^{i\alpha} - x - iH_0} \right] dt \equiv \Phi_0(x).$$

Застосувавши до функцій  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_0(x)$  подання (13.100), отримаємо

$$G_0 \left[ -A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) \right] |\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{if_3^*(t)}{te^{i\alpha} - x} \right] e^{i\xi x} dx dt,$$

$$G_0 \left[ -A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0} \right] |\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{if_3^*(t)}{te^{i\alpha} - x - iH_0} \right] e^{i\xi x} dx dt.$$

Тепер з огляду на залежність (13.87), наслідком якої буде вираз

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{i(f_3(t) + if_6(t))}{te^{i\alpha} - (x + iH_0)} \right] e^{i\xi x} dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f_6(t)(t \cos \alpha - x) + f_3(t)(t \sin \alpha - H_0)}{(t \cos \alpha - x)^2 + (t \sin \alpha - H_0)^2} e^{i\xi x} dx = \\ &= [f_3(t) \operatorname{sign}(t \sin \alpha - H_0) + if_6(t) \operatorname{sign}(\xi)] e^{-|\xi(H_0 - t \sin \alpha)|} e^{i\xi t \cos \alpha} \quad (f_3^*(t) = f_3(t) + if_6(t)), \end{aligned}$$

попередні дві залежності дадуть систему двох алгебричних рівнянь

$$G_0 [-A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi)] |\xi| = -\frac{1}{2} \int_{L'_0} [f_3(t) + iG_0 \operatorname{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi t \sin \alpha|} e^{i\xi t \cos \alpha} dt,$$

$$\begin{aligned} G_0 [-A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0}] |\xi| &= \\ &= -\frac{1}{2} \int_{L'_0} [-f_3(t) + iG_0 \operatorname{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi(H_0 - t \sin \alpha)|} e^{i\xi t \cos \alpha} dt. \end{aligned}$$

Її розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} G_0 |\xi| A_2^0(\xi) &= \frac{1}{2[e^{2|\xi|H_0} - 1]} \int_{L'_0} \left\{ f_3(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} + e^{|\xi|t \sin \alpha}] + \right. \\ &\quad \left. + iG_0 \operatorname{sign}(\xi) f_6(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} - e^{|\xi|t \sin \alpha}] \right\} e^{i\xi t \cos \alpha} dt, \end{aligned} \quad (22.42)$$

$$\begin{aligned} -G_0 |\xi| A_1^0(\xi) &= \frac{1}{2[e^{-2|\xi|H_0} - 1]} \int_{L'_0} \left\{ f_3(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} + e^{-|\xi|(2H_0 - t \sin \alpha)}] + \right. \\ &\quad \left. + iG_0 \operatorname{sign}(\xi) f_6(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} - e^{-|\xi|(2H_0 - t \sin \alpha)}] \right\} e^{i\xi t \cos \alpha} dt. \end{aligned} \quad (22.43)$$

Якщо на межі тіла задані переміщення, то крайові умови (22.22), (22.23) набудуть вигляду

$$\left( \hat{w}'^{00} + \hat{w}'^{10} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left( \hat{w}'^{00} + \hat{w}'^{10} \right) \Big|_{y=H_0} = 0.$$

Тоді з урахуванням (22.30)

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi)] \xi e^{-i\xi x} d\xi &= -\frac{1}{2\pi G_0} \int_{L'_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{if_3^*(t) e^{-i\alpha}}{te^{i\alpha} - x} \right] dt = \Phi_3(x), \\ -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0}] \xi e^{-i\xi x} d\xi &= \\ &= -\frac{1}{2\pi G_0} \int_{L'_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{if_3^*(t) e^{-i\alpha}}{te^{i\alpha} - x - iH_0} \right] dt = \Phi_2(x) \end{aligned}$$

і з огляду на залежність (13.87), наслідком якої буде вираз

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{i(f_3(t) + if_6(t))}{te^{i\alpha} - (x + iH_0)} \right] e^{i\xi x} dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_3(t)(t \cos \alpha - x) + f_6(t)(t \sin \alpha - H_0)}{(t \cos \alpha - x)^2 + (t \sin \alpha - H_0)^2} e^{i\xi x} dx = \\ &= [f_6(t) \operatorname{sign}(t \sin \alpha - H_0) - if_3(t) \operatorname{sign}(\xi)] e^{-|\xi(H_0 - t \sin \alpha)|} e^{i\xi t \cos \alpha} \quad (f_3^*(t) = f_3(t) + if_6(t)), \end{aligned}$$

попередні дві залежності з урахуванням перетворення (13.100) дадуть систему двох алгебричних рівнянь

$$-iG_0 [A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi)] \xi = -\frac{1}{2} \int_{L'_0} [G_0 f_6(t) - i \operatorname{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi|t \sin \alpha} e^{i\xi t \cos \alpha} dt,$$

$$-iG_0 [A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0}] \xi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{L'_0} [-G_0 f_6(t) - i \operatorname{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi|(H_0 - t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} dt.$$

Звідси

$$-i\mu_0 \xi A_2^0(\xi) = \frac{1}{2 [e^{2|\xi|H_0} - 1]} \int_{L'_0} \left\{ G_0 f_6(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} + e^{|\xi|t \sin \alpha}] - \right.$$

$$\left. - i \operatorname{sign}(\xi) f_3(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} - e^{|\xi|t \sin \alpha}] \right\} e^{i\xi t \cos \alpha} dt; \quad (22.44)$$

$$-iG_0 \xi A_1^0(\xi) = \frac{1}{2 [e^{-2|\xi|H_0} - 1]} \int_{L'_0} \left\{ G_0 f_6(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} + e^{-|\xi|(2H_0 - t \sin \alpha)}] - \right.$$

$$\left. - i \operatorname{sign}(\xi) f_3(t) [e^{-|\xi|t \sin \alpha} - e^{-|\xi|(2H_0 - t \sin \alpha)}] \right\} e^{i\xi t \cos \alpha} dt. \quad (22.45)$$

### Включення всередині півплощини (півпростору)

Якщо висота смуги  $H_0$  (див. рис. 22.4) безмежно велика, то на основі (22.42)–(22.45) отримаємо вирази для компенсуючого збуреного поля напружень від довільно орієнтованого включення всередині півплощини (рис. 22.5) за умови заданих на межі півплощини напружень чи переміщень. У випадку заданих на межі тіла напружень згідно з (22.42), (22.43)

$$A_2^0(\xi) = 0, \quad -G_0 |\xi| A_1^0(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{L'_0} [f_3(t) + iG_0 \operatorname{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi|t \sin \alpha} e^{i\xi t \cos \alpha} dt.$$

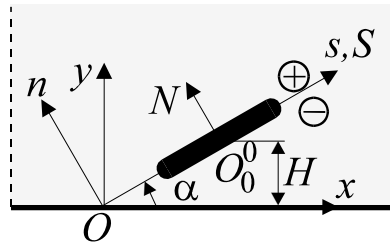


Рис. 22.5. Включення всередині півпростору

Тепер, оскільки у випадку півплощини з огляду на те, що  $y > 0$ ,  $\xi = \operatorname{sign}(\xi) |\omega|$ ,

$$\sigma_{yz}^{10}(z) = \frac{-G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^0(\xi) e^{-|\xi|y} |\xi| e^{-i\xi x} d\xi, \quad \sigma_{xz}^{10}(z) = \frac{-iG_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^0(\xi) e^{-|\xi|y} |\xi| e^{-i\xi x} d\xi,$$

то з урахуванням виразів (13.90)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{yz}^{10}(z) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} [f_3(t) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi|(y+t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} e^{-i\xi x} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \frac{i[f_3(t) - iG_0 f_6(t)]}{t \cos \alpha - [x + i(y + t \sin \alpha)]} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \frac{f_3(t) - iG_0 f_6(t)}{t \cos \alpha - it \sin \alpha - z} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xz}^{10}(z) &= \frac{-i}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) [f_3(t) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi|(y+t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} e^{-i\xi x} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} [G_0 f_6(t) - i \text{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi|(y+t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} e^{-i\xi x} d\xi dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \frac{i[G_0 f_6(t) + if_3(t)]}{t \cos \alpha - [x + i(y + t \sin \alpha)]} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt.\end{aligned}$$

Отже,

$$\hat{\sigma}_{yz}^{10}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{10}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \left[ -\text{Im} \left( \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} \right) + i \text{Re} \left( \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} \right) \right] dt = \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt.$$

Якщо на межі півплощини задані переміщення, то подібно до попереднього

$$A_2^0(\xi) = 0, \quad -iG_0 \xi A_1^0(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{L'_0} [G_0 f_6(t) - i \text{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi|t \sin \alpha} e^{i\xi t \cos \alpha} dt$$

і напруження дорівнюють

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{yz}^{10}(z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} i \text{sign}(\omega) [G_0 f_6(t) - i \text{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi|(y+t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} e^{-i\xi x} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} [f_3(t) + iG_0 \text{sign}(\xi) f_6(t)] e^{-|\xi|(y+t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} e^{-i\xi x} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \frac{f_3(t) - iG_0 f_6(t)}{t \cos \alpha - [x + i(y + t \sin \alpha)]} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xz}^{10}(z) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} [G_0 f_6(t) - i \text{sign}(\xi) f_3(t)] e^{-|\xi|(y+t \sin \alpha)} e^{i\xi t \cos \alpha} e^{-i\xi x} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \left[ \frac{i[G_0 f_6(t) + if_3(t)]}{t \cos \alpha - [x + i(y + t \sin \alpha)]} \right] dt = \frac{-1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \left[ \frac{f_3(t) - iG_0 f_6(t)}{t \cos \alpha - [x + i(y + t \sin \alpha)]} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt.\end{aligned}$$

Отже

$$\hat{\sigma}_{yz}^{10}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{10}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \left[ -\operatorname{Im} \left( \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} \right) + i \operatorname{Re} \left( \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} \right) \right] dt = -\frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt.$$

Помітно, що зміна типу крайової умови на поверхні тіла змінює знак компенсувального збуреного поля напружень на протилежний. Тому можна подати єдину форму виразів для компенсувального збуреного поля напружень від довільно орієнтованого включення всередині півплощини за умови заданих на межі півплощини напружень ( $\kappa = 0$ ) чи переміщень ( $\kappa = 1$ ):

$$\hat{\sigma}_{yz}^{10}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{10}(z) = (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_5^*(t)}}{te^{-i\alpha} - z} dt. \quad (22.46)$$

Якщо підставити у (22.46) вирази  $f_r(t) = f_r \delta(t - s_{*j})$ ,  $f_5 = Q^j$ ,  $f_6 = b^j$  та позначити  $x_{*j} = s_{*j} \cos \alpha_j$ ,  $y_{*j} = s_{*j} \sin \alpha_j$ , то одержимо

$$\sigma_{yz}^{01j}(z) + i\sigma_{xz}^{01j}(z) = -(-1)^\kappa \frac{\mu_j b^j + iQ^j}{2\pi(z - \overline{z_{*j}})} \quad (z_{*j} = x_{*j} + iy_{*j}) \quad (22.47)$$

– вираз для компенсувального поля напружень у півпросторі з модулем зсуву  $G_j$ , коли у точці  $z_{*j}$  діє зосереджена сила  $Q^j$  та гвинтова дислокація  $b^j$  у випадку, якщо на межі півплощини задані напружень ( $\kappa = 0$ ) чи переміщень ( $\kappa = 1$ ).

## 22.4. Пакет шарів з міжфазними включеннями

### Загальні засади

Якщо включення розміщене уздовж відрізка  $L'_0$  межі поділу двох шарів  $S_j$  та  $S_{j-1}$ , то загальна схема розв'язування задачі повністю зберігається. Певна різниця полягає лише у тому, що для побудови основних збурених розв'язків  $\hat{w}^{0j}$  у смугі  $S_j$  та  $\hat{w}^{0,j-1}$  у  $S_{j-1}$  від включення на їх межі використовується розв'язок (22.12) для стрибка напружень і переміщень на лінії поділу двох безмежних середовищ з модулями зсуву відповідних смуг ( $G_j$  та  $G_{j-1}$ ):

$$\hat{\sigma}_{yt}^{0k} + i\hat{\sigma}_{xt}^{0k} = \frac{i}{\pi} \int_{L'_0} \frac{p_{j,j-1}^k f_5^0(t) + ic_{j,j-1} f_6^0(t)}{t - z} dt, \quad (22.48)$$

$$p_{lm}^k = \frac{G_k}{G_l + G_m}, \quad c_{lm} = \frac{G_l G_m}{G_l + G_m} \quad (z \in S_k, l, m, k = j, j-1).$$

Верхній індекс у функціях стрибка відповідає позначенню лінії стрибка (у даному випадку  $L'_0$ ).

Вирази, що стосуються у цьому розв'язку верхньої півплощини, віднесемо до основного збуреного розв'язку в  $S_j$ , а вирази, що відповідають у цьому розв'язку нижній півплощині – до основного збуреного розв'язку в  $S_{j-1}$ . Наприклад, якщо включення розміщене вздовж лінії  $L'_0$  осі  $x_0$  (між шарами  $S_0$  та  $S_{-1}$ ), то

$$\hat{\sigma}_{yt}^{00} + i\hat{\sigma}_{xt}^{00} = \frac{i}{\pi} \int_{L'_0} \frac{p_{0,-1}^0 f_5^0(t) + ic_{0,-1} f_6^0(t)}{t-z} dt,$$

$$\hat{\sigma}_{yt}^{0,-1} + i\hat{\sigma}_{xt}^{0,-1} = \frac{i}{\pi} \int_{L'_0} \frac{p_{0,-1}^{-1} f_5^0(t) + ic_{0,-1} f_6^0(t)}{t-z} dt.$$

Якщо  $i$  на верхньому і на нижньому краях смуги  $S_j$  розміщені включення, то кожне з них дає свій незалежний внесок у розв'язок  $\hat{w}^{0j}$ . Зокрема, якщо окрім включення на осі  $x_0$  вздовж  $L'_0$  між шарами  $S_0$  та  $S_1$  на осі  $x_1$  вздовж відрізка  $L'_1$  розташоване включення, то

$$\hat{\sigma}_{yt}^{00} + i\hat{\sigma}_{xt}^{00} = \frac{i}{\pi} \int_{L'_0} \frac{p_{0,-1}^0 f_5^0(t) + ic_{0,-1} f_6^0(t)}{t-z} dt + \frac{i}{\pi} \int_{L'_0} \frac{p_{10}^0 f_5^1(t) + ic_{10} f_6^1(t)}{t-z} dt. \quad (22.49)$$

Включення, які містяться всередині смуг (шарів)  $S_j$ , дають свій внесок до  $\hat{w}^{0j}$  за загальним правилом.

Оскільки розв'язок (22.48) забезпечує умови ідеального механічного контакту на лінії розташування включення, то за відсутності включень всередині та на інших межах смуг, що пристають до цієї лінії, умови механічного контакту (22.24) повинні задовольняти лише збудрені коригувальні розв'язки  $\hat{w}^{1j}$ , тобто, повинні виконуватися умови

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1,j} = \hat{\sigma}_{yz}^{1,j-1}, \quad \hat{w}^{1,j} = \hat{w}^{1,j-1} \quad (y = y_{0j}, -\infty < x < +\infty),$$

які спричиняють залежності

$$A_1^{j-1}(\xi) = \frac{1}{2G_{j-1}} \left[ (G_j + G_{j-1}) A_1^j(\xi) - (G_j - G_{j-1}) A_2^j(\xi) e^{2|\xi|y_{0j}} \right],$$

$$A_2^{j-1}(\xi) = \frac{1}{2G_{j-1}} \left[ -(G_j - G_{j-1}) A_1^j(\xi) e^{-2|\xi|y_{0j}} + (G_j + G_{j-1}) A_2^j(\xi) \right].$$

### Включення на межі поділу матеріалів двох смуг

Нехай уздовж відрізка  $L'_0$  осі  $x$ , яка поділяє смуги  $S_0$  та  $S_{-1}$ , розміщене тонке включення (рис. 22.6). У цьому випадку основне збудрене поле напружень визначається формулами (22.48) при  $j = 0$ .

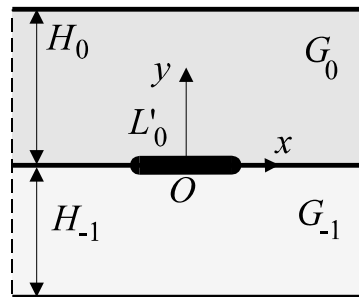


Рис. 22.6. Включення на межі поділу матеріалів двох смуг

Оскільки інших включень у тілі немає, то задовольняння умови ідеального механічного контакту на осі  $x$  поза включенням дає згідно з вищенаведеними виразами залежність



$$A_l^{-1}(\xi) = \frac{1}{2G_{-1}} \left[ \left( -(-1)^l G_0 + G_{-1} \right) A_1^0(\xi) + \left( (-1)^l G_0 + G_{-1} \right) A_2^0(\xi) \right] \quad (l=1,2). \quad (22.50)$$

Зокрема, якщо матеріали однакові ( $G_0 = G_{-1} = G$ ), то

$$A_1^{-1}(\xi) = A_1^0(\xi), \quad A_2^{-1}(\xi) = A_2^0(\xi). \quad (22.51)$$

За даних на межі пакету зовнішніх зусиль

$$\left( \hat{\sigma}_{yz}^{00} + \hat{\sigma}_{yz}^{10} \right) \Big|_{y=H_0} = 0, \quad \left( \hat{\sigma}_{yz}^{0,-1} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,-1} \right) \Big|_{y=-H_{-1}} = 0,$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{ip_{0,-1}^0 f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x + iH_0)} \right] dt \equiv \Phi_0(x), \\ & \frac{G_{-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A_1^{-1}(\xi) e^{|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) e^{-|\xi|H_{-1}} \right] |\xi| e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{ip_{0,-1}^{-1} f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x - iH_{-1})} \right] dt \equiv \Phi_{-1}(x). \end{aligned}$$

Застосування до функцій  $\Phi_0(x)$ ,  $\Phi_{-1}(x)$  подання (13.100) дає можливість отримати

$$\begin{aligned} & G_0 |\xi| \left[ \left[ -A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0} \right] \right] = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{ip_{0,-1}^0 f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x + iH_0)} \right] e^{i\xi x} dx dt, \\ & G_{-1} |\xi| \left[ \left[ -A_1^{-1}(\xi) e^{|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) e^{-|\xi|H_{-1}} \right] \right] = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{ip_{0,-1}^{-1} f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x - iH_{-1})} \right] e^{i\xi x} dx dt. \end{aligned}$$

З огляду на (13.90)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{i(\alpha + i\beta)}{t - (x + iH)} \right] e^{i\xi x} dx = -[\operatorname{sign}(H)\alpha - i\operatorname{sign}(\xi)\beta] e^{-|\xi H|} e^{i\xi t},$$

а тому

$$G_0 |\xi| \left[ -A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) e^{2|\xi|H_0} \right] = \int_{L'_0} \left[ p_{0,-1}^0 f_3^0(t) - i\operatorname{sign}(\xi) c_{0,-1} f_6^0(t) \right] e^{i\xi t} dt; \quad (22.52)$$

$$G_{-1} |\xi| \left[ -A_1^{-1}(\xi) e^{2|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) \right] = \int_{L_0} \left[ -p_{0,-1}^{-1} f_3^0(t) - i\operatorname{sign}(\xi) c_{0,-1} f_6^0(t) \right] e^{i\xi t} dt. \quad (22.53)$$

У частковому випадку однакових матеріалів ( $G_0 = G_{-1}$ )

$$G_0 |\xi| \left[ -A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) e^{2|\xi|H_0} \right] = \frac{1}{2} \int_{L'_0} \left[ f_3^0(t) - i\operatorname{sign}(\xi) G_0 f_6^0(t) \right] e^{i\xi t} dt$$

та

$$G_0 |\xi| \left[ -A_1^{-1}(\xi) e^{2|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) \right] = -\frac{1}{2} \int_{L_0} \left[ f_3^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) G_0 f_6^0(t) \right] e^{i\xi t} dt,$$

або з урахуванням (22.51) –

$$G_0 |\xi| \left[ -A_1^0(\xi) e^{2|\xi|H_{-1}} + A_2^0(\xi) \right] = -\frac{1}{2} \int_{L_0} \left[ f_3^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) G_0 f_6^0(t) \right] e^{i\xi t} dt.$$

Тому

$$G_0 |\xi| A_1^0(\xi) = \frac{e^{2|\xi|H_0} + 1}{2 \left[ e^{2|\xi|H} - 1 \right]} \int_{L'_0} f_3^0(t) e^{i\xi t} dt + i G_0 \operatorname{sign}(\xi) \frac{e^{2|\xi|H_0} - 1}{2 \left[ e^{2|\xi|H} - 1 \right]} \int_{L'_0} f_6^0(t) e^{i\xi t} dt, \quad (22.54)$$

$$H = H_0 + H_{-1};$$

$$G_0 |\xi| A_2^0(\xi) = \frac{e^{2|\xi|H_{-1}} + 1}{2 \left[ e^{2|\xi|H} - 1 \right]} \int_{L'_0} f_3^0(t) e^{i\xi t} dt + i G_0 \operatorname{sign}(\xi) \frac{1 - e^{2|\xi|H_{-1}}}{2 \left[ e^{2|\xi|H} - 1 \right]} \int_{L'_0} f_6^0(t) e^{i\xi t} dt. \quad (22.55)$$

Якщо на межі пакету задати переміщення, то крайові умови (22.22) набувають вигляду

$$\left( \hat{w}^{00} + \hat{w}'^{10} \right) \Big|_{y=H_0} = 0, \quad \left( \hat{w}'^{0,-1} + \hat{w}^{1,-1} \right) \Big|_{y=-H_{-1}} = 0,$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = -\frac{1}{\pi G_0} \int_{L'_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{ip_{0,-1}^0 f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x + iH_0)} \right] dt, \\ & \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_1^{-1}(\xi) e^{|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) e^{-|\xi|H_{-1}} \right] \xi e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = -\frac{1}{\pi G_{-1}} \int_{L'_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{ip_{0,-1}^{-1} f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x - iH_{-1})} \right] dt. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} & -i G_0 \left[ A_1^0(\xi) e^{-|\xi|H_0} + A_2^0(\xi) e^{|\xi|H_0} \right] \xi = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{ip_{0,-1}^0 f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x + iH_0)} \right] e^{i\xi x} dx dt, \\ & -i G_{-1} \left[ A_1^{-1}(\xi) e^{|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) e^{-|\xi|H_{-1}} \right] \xi = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{ip_{0,-1}^{-1} f_3^0(t) - c_{0,-1} f_6^0(t)}{t - (x - iH_{-1})} \right] e^{i\xi x} dx dt. \end{aligned}$$

З огляду на (13.90)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{i(\alpha + i\beta)}{t - (x + iH)} \right] e^{i\xi x} dx = -[\operatorname{sign}(H)\beta + i \operatorname{sign}(\xi)\alpha] e^{-|\xi H|} e^{i\xi t},$$

а тому

$$-iG_0\xi \left[ A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) e^{2|\xi|H_0} \right] = \int_{L'_0} \left[ c_{0,-1} f_6^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) p_{0,-1}^0 f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt; \quad (22.56)$$

$$-iG_{-1}\xi \left[ A_1^{-1}(\xi) e^{2|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) \right] = \int_{L'_0} \left[ -c_{0,-1} f_6^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) p_{0,-1}^{-1} f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt. \quad (22.57)$$

У випадку однакових матеріалів ( $G_0 = G_{-1}$ ) ці співвідношення дають

$$-iG_0\xi \left[ A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) e^{2|\xi|H_0} \right] = \frac{1}{2} \int_{L'_0} \left[ G_0 f_6^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt;$$

та

$$-iG_0\xi \left[ A_1^{-1}(\xi) e^{2|\xi|H_{-1}} + A_2^{-1}(\xi) \right] = \frac{1}{2} \int_{L'_0} \left[ -G_0 f_6^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt,$$

або з урахуванням (22.51)

$$-iG_0\xi \left[ A_1^0(\xi) e^{2|\xi|H_{-1}} + A_2^0(\xi) \right] = \frac{1}{2} \int_{L'_0} \left[ -G_0 f_6^0(t) + i \operatorname{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt.$$

Тому

$$-iG_0\xi A_1^0(\xi) = \frac{G_0 \left[ 1 + e^{2|\xi|H_0} \right]}{2 \left[ 1 - e^{2|\xi|H} \right]} \int_{L'_0} f_6^0(t) e^{i\xi t} dt + i \operatorname{sign}(\xi) \frac{1 - e^{2|\xi|H_0}}{2 \left[ 1 - e^{2|\xi|H} \right]} \int_{L'_0} f_3^0(t) e^{i\xi t} dt, \quad (22.58)$$

$$H = H_0 + H_{-1};$$

$$-iG_0\xi A_2^0(\xi) = -\frac{G_0 \left[ 1 + e^{2|\xi|H_{-1}} \right]}{2 \left[ 1 - e^{2|\xi|H} \right]} \int_{L'_0} f_6^0(t) e^{i\xi t} dt + i \operatorname{sign}(\xi) \frac{1 - e^{2|\xi|H_{-1}}}{2 \left[ 1 - e^{2|\xi|H} \right]} \int_{L'_0} f_3^0(t) e^{i\xi t} dt. \quad (22.59)$$

### Включення, паралельне до межі півплощини

Якщо  $H_{-1} = \infty$  (рис. 22.7), то згідно з попередніми залежностями за довільних умов на межі тіла  $A_1^{-1}(\xi) = 0$  і з (22.50) отримуємо

$$\begin{aligned} A_1^0(\xi) &= G_{0,-1} A_2^0(\xi), \quad A_2^{-1}(\xi) = 2p_{0,-1}^0 A_2^0(\xi), \\ G_{1m} &= \frac{G_1 - G_m}{G_1 + G_m}. \end{aligned} \quad (22.60)$$

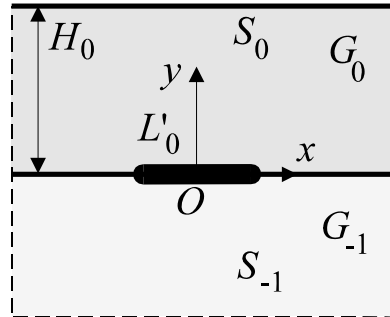


Рис. 22.7. Включення, паралельне до межі півплощини

Зокрема, коли матеріали смуги і півплощини однакові, то у випадку заданого на межі півплощини  $y = H_0$  навантаження з виразів (22.54), (22.55) при  $H_{-1} \rightarrow \infty$  отримуємо

$$A_1^0(\xi) = 0, \quad G_0|\xi|A_2^0(\xi) = \frac{1}{2}e^{-2|\xi|H_0} \int_{L'_0} \left[ f_3^0(t) - iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^0(t) \right] e^{i\xi t} dt. \quad (22.61)$$

У випадку заданих на границі тіла переміщень з виразів (22.58), (22.59) при  $H_{-1} \rightarrow \infty$  отримуємо

$$A_1^0(\xi) = 0, \quad -iG_0\xi A_2^0(\xi) = \frac{1}{2}e^{-2|\xi|H_0} \int_{L'_0} \left[ G_0 f_6^0(t) + i \text{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt. \quad (22.62)$$

Оскільки на основі формул (22.31), (22.32) і залежностей  $A_1^{-1}(\xi) = 0$ ,  $A_1^0(\xi) = 0$ ,  $A_2^{-1}(\xi) = A_2^0(\xi)$  для довільної точки тіла

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) &= \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2^0(\xi) e^{|\xi|y} |\xi| e^{-i\xi x} d\xi, \\ & \hspace{25em} (j = 0, -1), \\ \hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) &= -\frac{iG_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2^0(\xi) e^{|\xi|y} \xi e^{-i\xi x} d\xi \end{aligned} \quad (22.63)$$

то у випадку заданих на межі тіла напружень згідно з (22.61) та (13.90) з огляду на те, що  $2H_0 - y > 0$  і тому  $|\xi(2H_0 - y)| = |\xi|(2H_0 - y)$ , а також  $\text{sign}(2H_0 - y) = 1$ ,  $\xi = \text{sign}(\xi)|\xi|$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_3^0(t) - iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^0(t) \right] e^{-|\xi|(2H_0 - y)} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - [x + i(2H_0 - y)]} \right] dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - \bar{z} - 2iH_0} \right] dt, \\ \hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[ f_3^0(t) - iG_0 \text{sign}(\xi) f_6^0(t) \right] e^{-|\xi|(2H_0 - y)} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ G_0 f_6^0(t) + i \text{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{-|\xi|(2H_0 - y)} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \left[ \frac{G_0 f_6^0(t) - if_3^0(t)}{t - [x + i(2H_0 - y)]} \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - \bar{z} - 2iH_0} \right] dt. \end{aligned}$$

Більш стисло отримані залежності можна подати так:

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - \bar{z} - 2iH_0} \right] dt = \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_3^{0*}(t)}}{t - z + 2iH_0} dt.$$

Задання на межі півплощини переміщень дає можливість отримати цілком подібним чином

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) &= \frac{i}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) \left[ G_0 f_6^0(t) + i \text{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{-|\xi|(2H_0-y)} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_3^0(t) - i G_0 \text{sign}(\xi) f_6^0(t) \right] e^{-|\xi|(2H_0-y)} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - [x + i(2H_0 - y)]} \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Re} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - \bar{z} - 2iH_0} \right] dt, \\
\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ G_0 f_6^0(t) + i \text{sign}(\xi) f_3^0(t) \right] e^{-|\xi|(2H_0-y)} e^{-i\xi x} e^{i\xi t} d\xi dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \left[ \frac{G_0 f_6^0(t) - if_3^0(t)}{t - [x + i(2H_0 - y)]} \right] dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \text{Im} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - \bar{z} - 2iH_0} \right] dt, \\
\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \left[ \frac{if_3^{0*}(t)}{t - \bar{z} - 2iH_0} \right] dt = -\frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_3^{0*}(t)}}{t - z + 2iH_0} dt.
\end{aligned}$$

В остаточному підсумку, за умови заданих на межі півплощини напружень ( $\kappa = 0$ ) чи переміщень ( $\kappa = 1$ ), отримуємо універсальну залежність

$$\hat{\sigma}_{yt}^{1j}(z) + i\hat{\sigma}_{xt}^{1j}(z) = (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_5^{0*}(t)}}{t - z + 2iH_0} dt. \quad (22.64)$$

Це свідчить, що зміна типу крайової умови на краю півплощини (півпростору) спричиняє зміну знака збуреного коригувального поля. Вирази (22.64) збігаються на осі  $x$  з виразами

$$-(-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} R_{11}^*(t, x) [f_3(t) - i\mu f_6(t)] dt \quad (\mu \sim G)$$

для відповідного поля, обчисленого на основі формул (3.2) [951], а також (20.17), (20.18).

Якщо матеріали смуги  $S_0$  та півплощини  $S_{-1}$  різні, то у разі заданих на межі пакету напружень крайова умова (22.52) з огляду на (22.60) дає

$$A_1^0(\xi) = G_{0,-1} A_2^0(\xi), \quad A_2^{-1}(\xi) = 2p_{0,-1}^0 A_2^0(\xi), \quad A_1^{-1}(\xi) = 0; \quad (22.65)$$

$$G_0 |\xi| A_2^0(\xi) = \frac{1}{e^{2|\xi|H_0} - G_{0,-1}} \int_{L'_0} [p_{0,-1}^0 f_3^0(t) - i \text{sign}(\xi) c_{0,-1} f_6^0(t)] e^{i\xi t} dt. \quad (22.66)$$

Якщо ж на границі пакету задані переміщення, то з урахуванням (22.65) та (22.56), маємо

$$-iG_0 \xi A_2^0(\xi) = \frac{1}{e^{2|\xi|H_0} + G_{0,-1}} \int_{L'_0} [c_{0,-1} f_6^0(t) + i \text{sign}(\xi) p_{0,-1}^0 f_3^0(t)] e^{i\xi t} dt. \quad (22.67)$$

Якщо матеріали смуги і півплощини однакові, то у випадку заданого на межі півплощини  $y = -H_{-1}$  навантаження з виразів (22.54), (22.55) при  $H_0 \rightarrow \infty$  (рис. 22.8) отримуємо

$$A_2^0(\xi) = 0, \quad G_{-1} |\xi| A_1^0(\xi) = \frac{1}{2} e^{-2|\xi|H_{-1}} \int_{L'_0} [f_3^0(t) + iG_{-1} \text{sign}(\xi) f_6^0(t)] e^{i\xi t} dt. \quad (22.61^1)$$

У випадку заданих на границі тіла переміщень з виразів (22.58), (22.59) при  $H_0 \rightarrow \infty$  отримуємо

$$A_2^0(\xi) = 0, \quad -iG_{-1}\xi A_1^0(\xi) = -\frac{1}{2}e^{-2|\xi|H_{-1}} \int_{L'_0} \left[ G_{-1}f_6^0(t) - i\text{sign}(\xi)f_3^0(t) \right] e^{i\xi t} dt. \quad (22.62^1)$$

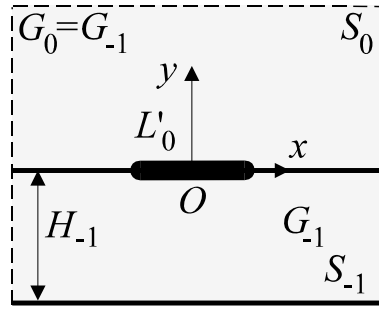


Рис. 22.8. Включення, паралельне (компланарне) до межі півплощини

Компенсувальні збурені напруження у довільній точці обчислюються тепер на основі формул

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) = -\frac{G_{-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^0(\xi) e^{-|\xi|y} |\xi| e^{-i\xi x} d\xi, \quad (j = 0, -1), \quad (22.63^1)$$

$$\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) = -\frac{iG_{-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^0(\xi) e^{-|\xi|y} \xi e^{-i\xi x} d\xi$$

що з урахуванням (22.61<sup>1</sup>), (22.62<sup>1</sup>) дає

$$\hat{\sigma}_{yt}^{1j}(z) + i\hat{\sigma}_{xt}^{1j}(z) = (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_5^{0*}(t)}}{t - z - 2iH_{-1}} dt. \quad (22.64^1)$$

Вираз (22.64<sup>1</sup>) можна також отримати з (22.64) заміною  $H_0 \rightarrow H_{-1}$ .

Вирази (22.64) і (22.64<sup>1</sup>) для точок на межі півплощини ( $z = z^* = x + iH_0$  для формули (22.64) та  $z = z^* = x - iH_{-1}$ ) зводяться до однакових залежностей

$$\hat{\sigma}_{yt}^{1j}(z^*) + i\hat{\sigma}_{xt}^{1j}(z^*) = (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{\overline{f_5^{0*}(t)}}{t - z^*} dt.$$

## 22.5. Приклади

### Пружне стрічкове включення, компланарне до поверхні пружного півпростору

Розглянемо тонке пружне включення з модулем зсуву  $G_B$ , компланарне до поверхні пружного півпростору з модулем зсуву  $G$  і розташоване на відстані  $H$  від неї (рис. 22.9).

Вісь серединного перерізу стрічки розташована вздовж відрізка  $L' = [-a; a]$ . Товщина включення  $2h(x)$ . Внаслідок формул (22.21), (22.12) та (22.64<sup>1</sup>) вислідне поле напружень в тілі задається виразом

$$\sigma_{yt}(z) + i\sigma_{xt}(z) = \sigma_{yt}^0(z) + i\sigma_{xt}^0(z) + \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{f_3^*(t)}{t-z} dt + (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{t-z-2iH} dt, \quad (22.68)$$

$$f_3^*(t) = f_3(t) + iGf_6(t),$$

де  $\kappa = 0$  стосується випадку заданих на границі тіла напружень,  $\kappa = 1$  – переміщень. Значення компонент тензора напружень на лінії  $y = 0$  згідно з формулою Сохоцького – Племеля після поділу на дійсну та уявну частини дорівнюють

$$\sigma_{yt}^\pm(x) = \sigma_{yt}^0(x) \mp \frac{1}{2} f_3(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{L_0} \frac{Gf_6(t)}{t-x} dt + (-1)^\kappa \sum_r \int_{L_0} k_{1r}(x,t) f_r(t) dt, \quad (22.69)$$

$$\sigma_{xt}^\pm(x) = \sigma_{xt}^0(x) \mp \frac{G}{2} f_6(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{L_0} \frac{f_3(t)}{t-x} dt + (-1)^\kappa \sum_r \int_{L_0} k_{2r}(x,t) f_r(t) dt;$$

$$k_{13}(x,t) = -\frac{2H}{2\pi[(t-x)^2 + 4H^2]}, \quad k_{23}(x,t) = \frac{t-x}{2\pi[(t-x)^2 + 4H^2]}, \quad (22.70)$$

$$k_{26}(x,t) = -Gk_{13}(x,t), \quad k_{16}(x,t) = Gk_{23}(x,t).$$

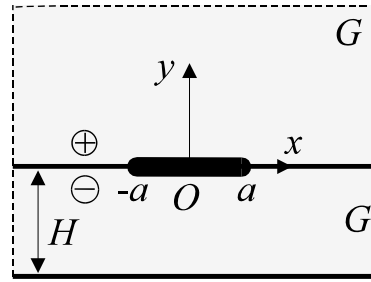


Рис. 22.9. Включення, паралельне (компланарне) до межі півплощини

Тому з використанням умов взаємодії (15.1) для тонкого пружного включення отримуємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{f_6(t)}{t-x} dt - \frac{k}{h} \int_{-a}^x f_6(t) dt + (-1)^\kappa \sum_r \int_{L_0} K_{1r}(x,t) f_r(t) dt = F_6(x), \quad (22.71)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{f_3(t)}{t-x} dt - \frac{1}{kh} \int_{-a}^x f_3(t) dt + (-1)^\kappa \sum_r \int_{L_0} K_{2r}(x,t) f_r(t) dt = F_3(x) \quad (x \in L');$$

$$F_6(x) = \frac{1}{G} \left\{ (1-k) [\sigma_{yt}^0(x+ih) + \sigma_{yt}^0(x-ih)] - \frac{G_B}{h} w_-^* \right\}, \quad k = \frac{G_B}{G},$$

$$F_3(x) = \frac{2}{k} \sigma_{xt}^c(a_0^-) - \sigma_{xt}^0(x+ih) - \sigma_{xt}^0(x-ih),$$

$$K_{16}(x,t) = -K_{23}(x,t) = -2k_{23}(x,t) = -\frac{t-x}{\pi[(t-x)^2 + 4H^2]}, \quad (22.72)$$

$$K_{26}(x,t) = G^2 K_{13}(x,t) = -2Gk_{13}(x,t) = \frac{2GH}{\pi[(t-x)^2 + 4H^2]}.$$

Розв'язок системи рівнянь (22.71) шукаємо у вигляді рядів (20.29) на основі методу колокацій. Здійснене обчислення безрозмірних узагальнених КІН (УКІН) біля правого краю включення  $K_{3,i}^{0j}$  ( $i=1,2$ ) для двох типів крайових умов (а – завантажений або вільний край; б – защемлений край) та трьох способів навантажування ( $j=1$  – до берегів включення прикладене напруження  $\sigma_{nz} = \tau$ ;  $j=2$  –  $\sigma_{yz}^\infty = \tau, \sigma_{xz}^\infty = 0$ ;  $j=3$  –  $\sigma_{yz}^\infty = 0, \sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ ) у комбінаціях від 1а до 3б. Для навантажень 1 і 2  $K_{3,i}^{0j} = K_{3,i}/(\tau\sqrt{\pi a})$  ( $i, j=1,2$ ); для навантаження 3 –  $K_{3,i}^{03} = K_{3,i}/(\tau_1\sqrt{\pi a})$  ( $i, j=1,2$ ).

Досліджений вплив відносної жорсткості включення  $k = G_B/G$ ; відносної глибини його залягання  $\lambda = H/a$ ; відносної товщини центральної частини  $h_0/a = 0,01; 0,1$ . Навантаження за способом 1 і 2 еквівалентні за куту орієнтації включення  $\alpha = 0$ , а при  $\alpha = \pi/2$  еквівалентні навантаження способів 1 і 3. Профіль включення – еліптичний ( $\beta = 1$ ). Розрахунки здійснені з точністю, не меншою за 1%.

**Загальні тенденції.** Розрахунки засвідчили, що зі збільшенням  $\lambda$  значення УКІН прямують до відповідних значень для включень у необмеженому просторі. Вже при  $\lambda=5$  різниця таких розв'язків не перевищує 1%, перебуваючи у межах обраної точності обчислень.

В усіх випадках зі збільшенням  $k$  значення УКІН прямують до значень, що відповідають абсолютно жорсткому включенню; якщо ж  $k \leq 1$ , то  $K_{3,2} = 0$ ; якщо  $k = 1$ , то УКІН дорівнюють нулю; при  $k \rightarrow 0$  УКІН  $K_{3,1}$  прямує до значення класичного КІН  $K_3$  відповідної задачі теорії тріщин.

Якщо  $k \rightarrow 1$ , то вплив вільної поверхні на УКІН зменшується.

Таблиця 22.1

$\lambda = H/a$	$K_{3,1}^{02} = K_{3,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$		$K_3^0 = K_3/(\tau\sqrt{\pi a})$		$[(K_{3,1}^{02} - K_3^0)/K_3^0] \cdot 100\%$	
	умова а	умова б	умова а	умова б	умова а	умова б
0,75	1,1387	0,89589	1,0494*	1,04938*	7,84*	17,13*
1,00	1,0912	0,92440	1,0703	0,96094	1,95	3,95
1,25	1,0640	0,94383	1,0576	0,95520	0,99	1,20
1,50	1,0471	0,95718	1,0448	0,96142	0,22	0,44
1,75	1,0360	0,96654	1,0350	0,96835	0,10	0,19
2,00	1,0283	0,97327	1,0278	0,97412	0,05	0,09
2,50	1,0187	0,98126	1,0186	0,98220	0,001	0,10
3,00	1,0132	0,98709	1,0132	0,98717	0,000	0,008
3,50	1,0098	0,99033	1,0098	0,99037	0,000	0,004
4,00	1,0076	0,99251	1,0076	0,99252	0,000	0,001

**Не защемлена межа (крайова умова а,  $\kappa = 0$ ).** Табл. 22.1 у другому, четвертому та шостому стовпчиках містить знерозмірені значення  $K_{3,1}^{02} = K_{3,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$ , обчислені при  $\alpha = 0$  для  $k = 10^{-7}$  (матеріал включення практично абсолютно податний), та  $K_3^0 = K_3/(\tau\sqrt{\pi a})$ , отримані для тріщини на основі асимптотичного виразу (VIII.82) [706] чи формули до рис. 5.44 [589].

$$K_3^\pm = \tau\sqrt{\pi a} \left[ 1 + \frac{\lambda^{-2}}{8} \pm \frac{\lambda^{-3}}{16} \sin \alpha + \frac{\lambda^{-4}}{128} (2 - 9 \cos 2\alpha) \right] + O(\lambda^{-5}), \quad (22.73)$$



придатного за  $\lambda > 1$  та 1-го способу навантажування, і відносну різницю цих значень у відсотках. Навантаження відповідає способам 1а або 2а. Зірочкою відзначені значення, які одержані за межами істинності асимптотичного виразу. Видно, що зменшення  $\lambda$  збільшує різницю між розв'язками, хоча навіть при  $\lambda = 1$  вона дуже незначна (менша від 2%). Зате на відміну від асимптотичного методу великих  $\lambda$  метод колокацій можна успішно застосовувати і коли  $\lambda < 1$ .

На рис. 22.10 – 22.16 зображена залежність від  $k$  та  $\lambda$  ненульових значень зведених (безрозмірних) УКІН  $K_{3,i}^{0j}$  ( $i=1,2; j=2,3$ ) для випадку а (півпростору з не защемленим краєм), коли включення еліптичного профілю компланарне до його межі ( $\alpha = 0$ ). У цьому випадку навантаження типу 1 і 2 еквівалентні.

Рис. 22.10 – 22.13 стосуються випадку  $a/h_0 = 100$ ; рис. 22.14 – 22.16 –  $a/h_0 = 10$ . Рис. 22.10 – 22.12 та 22.14 – 22.16 дають залежність УКІН від відносної жорсткості включення  $k$  для дев'яти різних значень відносної глибини залягання включення:  $\lambda = 0,1; 0,15; 0,25; 0,5; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 10$ .

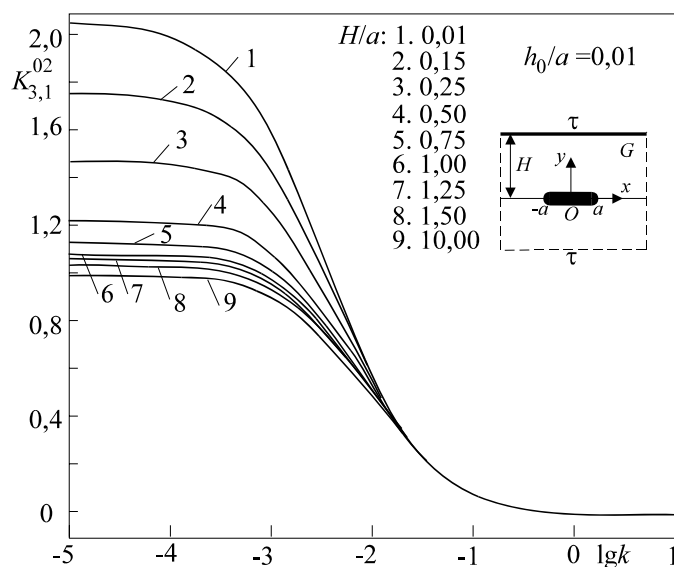


Рис. 22.10

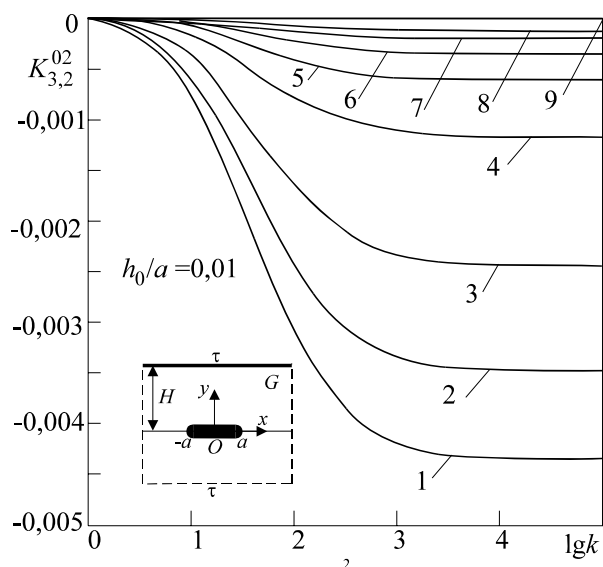


Рис. 22.11

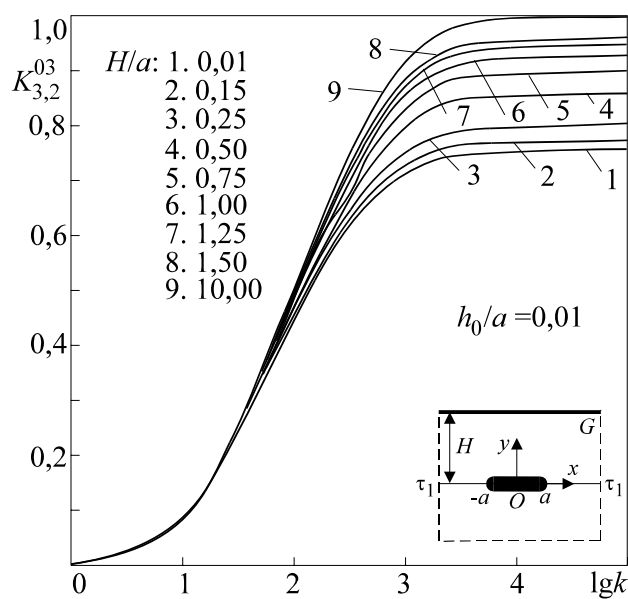


Рис. 22.12

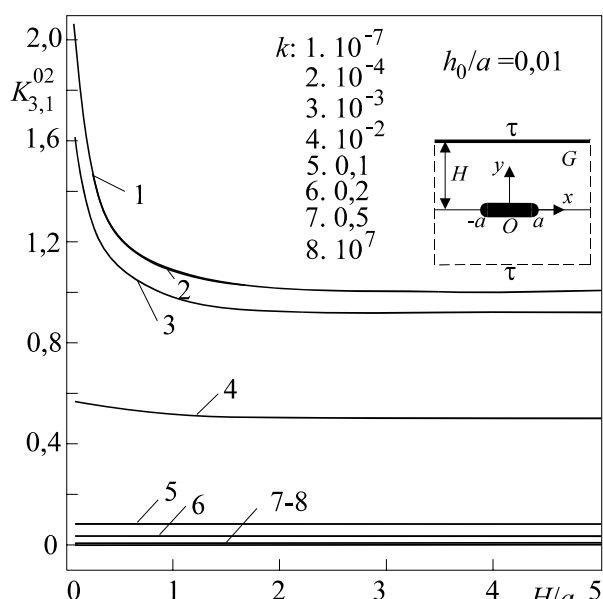


Рис. 22.13

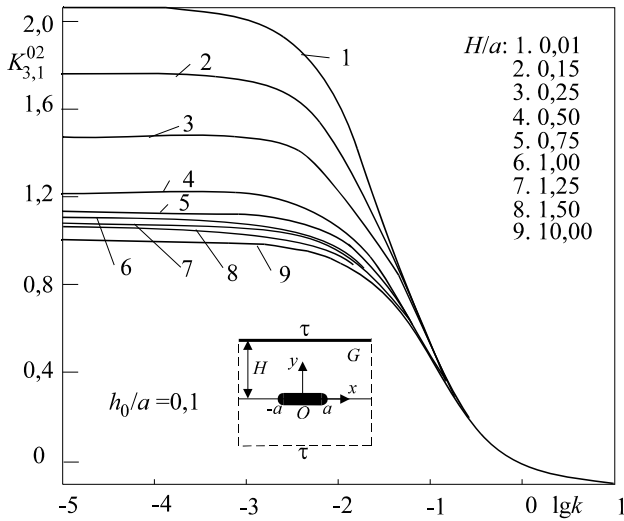


Рис. 22.14

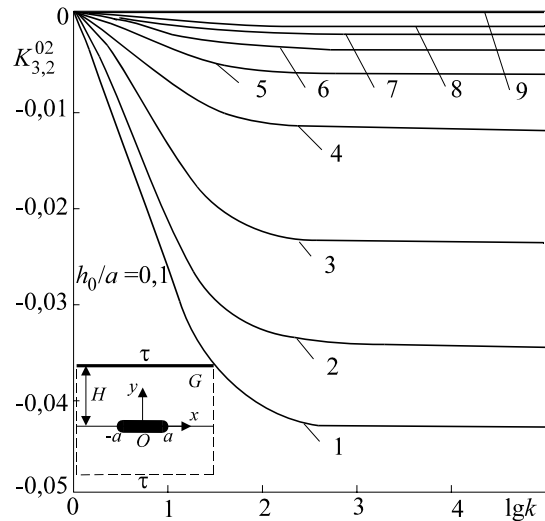


Рис. 22.15

Для відмінності на рис. 22.13 відображена залежність УКІН від відносної глибини залягання включення  $\lambda = H/a$  для випадку  $a/h_0 = 100$  і восьми значень відносної жорсткості включення:  $k = 10^{-7}$  (тріщина);  $10^{-4}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-2}$ ;  $0,1$ ;  $0,2$ ;  $0,5$ ;  $10^7$  (абсолютно жорстке включення).

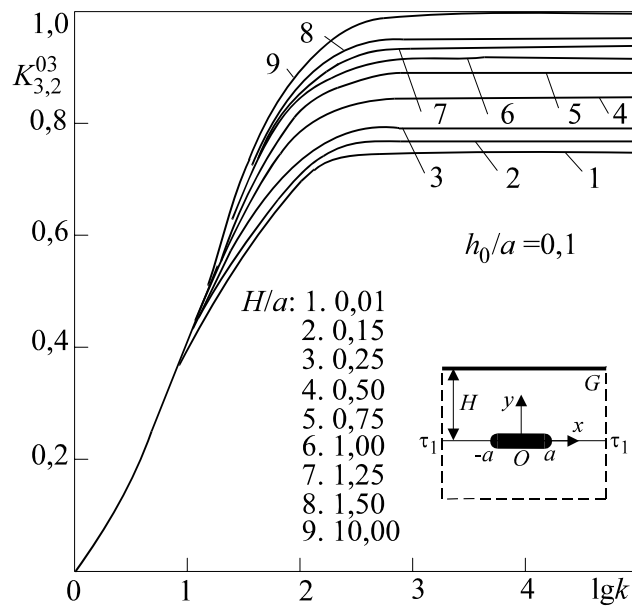


Рис. 22.16

Помітно, що з прямуванням  $k$  до нуля  $K_{3,1}^{0j}$  прямує до відповідного значення КІН  $K_3$  для тріщини без огляду на відносну товщину включення і чим тонше включення, тим швидше досягається ця границя. При  $k=1$  всі УКІН дорівнюють нулю. Якщо  $k \rightarrow \infty$ , то граничне значення  $K_{3,1}^{0j}$  для абсолютно жорсткого включення залежить від його товщини: для еліптичного профілю  $K_{3,1}^{02} \rightarrow -h_0/a$ .

Наближення включення до поверхні півпростору сприяє збільшенню абсолютних значень  $K_{3,i}^{02}$  та зменшенню  $K_{3,2}^{03}$ . Якщо у безмежному масиві  $K_{3,2}^{02} = 0$ , то присутність не заще-

мленого краю хоч і незначно, але збудує відповідний УКІН (рис. 22.15), причому він набуває від'ємних, хоч і доволі малих значень.

**Защемлена межа (крайова умова б,  $\kappa = 1$ ).** Подібно до того, як це зроблено у [706], для такого типу крайової умови стосовно 1-го способу навантажування можна побудувати асимптотичну формулу

$$K_3^\pm = \tau\sqrt{\pi a} \left[ 1 - \frac{\lambda^{-2}}{8} \mp \frac{\lambda^{-3}}{16} \sin \alpha + \frac{\lambda^{-4}}{128} (2 + 9 \cos 2\alpha) \right] + O(\lambda^{-5}), \quad (22.74)$$

слухну, так само як і (22.73), за  $\lambda > 1$ .

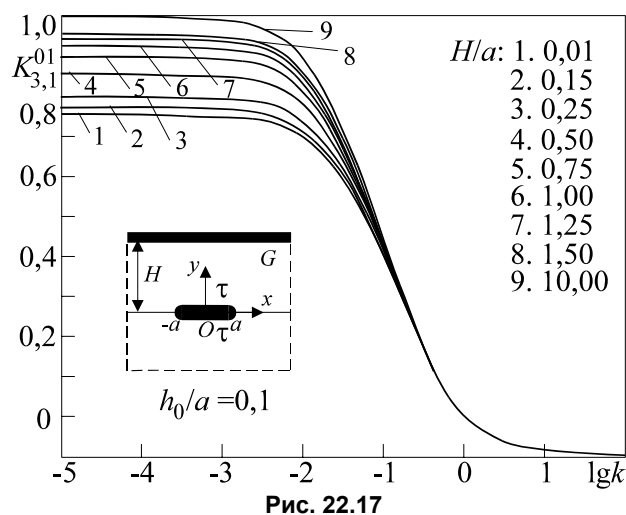


Рис. 22.17

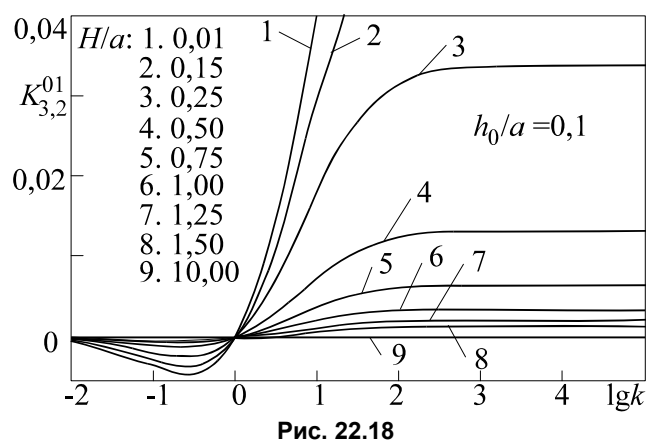


Рис. 22.18

Формули (22.73), (22.74) можна подати єдиним виразом

$$K_3^\pm = \tau\sqrt{\pi a} \left[ 1 + (-1)^\kappa \frac{\lambda^{-2}}{8} \pm (-1)^\kappa \frac{\lambda^{-3}}{16} \sin \alpha + \frac{\lambda^{-4}}{128} \left( 2 - (-1)^\kappa 9 \cos 2\alpha \right) \right] + O(\lambda^{-5}).$$

Табл. 22.1 у третьому, п'ятому та сьомому стовпчиках містить значення  $K_{3,1}^{02} = K_{3,1} / (\tau\sqrt{\pi a})$ , обчислені при  $\alpha = 0$  для  $k = 10^{-7}$  (практично абсолютно податний матеріал), та безрозмірні значення  $K_3^0 = K_3 / (\tau\sqrt{\pi a})$ , отримані для тріщини на основі асимптотичного виразу (22.74) та відносну різницю цих значень у відсотках. Вважалось, що навантаження відповідає способам 1б або 2б. Зірочкою відзначені значення, які одержані за межами істинності асимптотичного виразу. Видно, що зменшення  $\lambda$  збільшує різницю між розв'язками, хоча навіть при  $\lambda = 1$  вона дуже незначна (менша від 4%). Зате на відміну від асимптотичного методу великих  $\lambda$  метод колокацій можна успішно застосовувати і коли  $\lambda < 1$ .

Порівняння з результатами розрахунку задачі а свідчить, що у випадку защемленої границі різниця розв'язків приблизно удвічі більша, ніж у випадку не защемленої межі.

Результати обчислення залежності УКІН  $K_{3,i}^{01}$  ( $i = 1, 2$ ) від  $k$  для дев'яти різних значень  $\lambda$  подані на рис. 22.17, 22.18. Розрахунки підтвердили загальні тенденції зміни УКІН у залежності від  $k$  та  $\lambda$ . На відміну від випадку 1а і 2а у розглядуваному випадку 1б і 2б з наближенням включення до защемленої поверхні  $K_{3,1}^{01}$  зменшується. Для  $k < 1$  КІН  $K_{3,1}^{01} > 0$ ,  $K_{3,2}^{01} < 0$ ; якщо  $k > 1$ , то  $K_{3,1}^{01} < 0$ ,  $K_{3,2}^{01} > 0$ . При  $k \rightarrow \infty$  УКІН  $K_{3,1}^{01} \rightarrow -h_0/a$ , а значення УКІН  $K_{3,2}^{01}$  для малих  $\lambda$  ( $\lambda < 0,25$ ) характеризуються нестійкістю, яка проявляється тим швидше, чим ближче до межі тіла розташоване включення.

Рис. 22.19 подає залежність УКІН  $K_{3,1}^{01}$  від відносної глибини залягання включення  $\lambda = H/a$  для випадку  $h_0/a = 0,1$  і десяти значень відносної жорсткості включення:  $k = 10^{-7}$  (тріщина);  $10^{-3}$ ;  $10^{-2}$ ; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5;  $10^7$  (абсолютно жорстке включення).

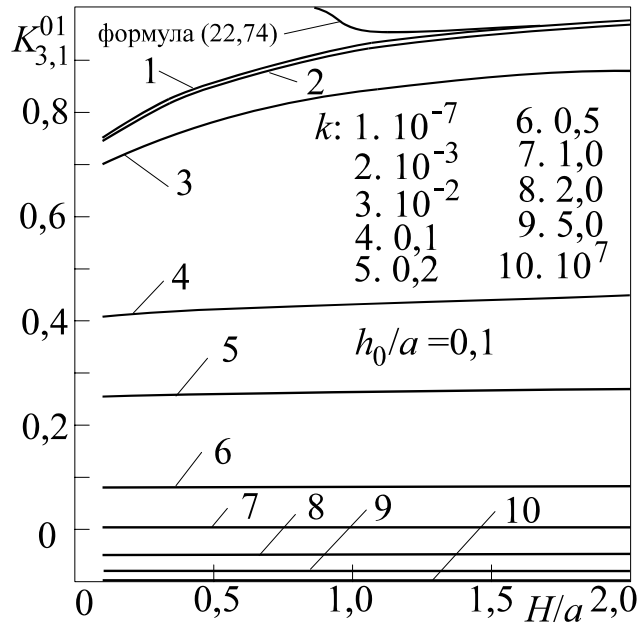


Рис. 22.19

Метод колокацій засвідчив високу ефективність під час розв'язування відповідних сингулярних інтегральних рівнянь. Для забезпечення в обчисленому значенні УКІН точності у 5 значущих цифр для тріщини ( $k = 10^{-7}$ ), паралельної до межі тіла, виявилось достатнім для  $\lambda = 0,1$  взяти  $N = 25$  членів ряду за поліномами Чебишева з виділеною кореневою особливістю; для  $\lambda = 0,25 - N = 15$ ;  $\lambda = 0,5 \dots 0,75 - N = 10$ ;  $\lambda \geq 1 - N = 5$ .

Зіставлення результатів розрахунку КІН для тріщини з використаними для цієї ситуації асимптотичними формулами для  $\lambda > 1$  (22.73) і (22.74) (табл. 22.1 та лінія на рис. 22.19, що відповідає формулі (22.74)) засвідчує надійність побудованої розрахункової схеми також і для малих значень параметра  $\lambda$ . Щоправда, близькість до жорстко защемленої межі вимагає збільшення порівняно з вільною межею кількості членів розвинення. За однакових порядків алгебричних систем защемлення межі півплощини викликає набагато більшу похибку.

### Пружне стрічкове включення, нахилене до межі півпростору

Розглянемо тонке пружне включення завширшки  $2a$  з модулем зсуву  $G_B$  у пружному півпросторі з модулем зсуву  $G$ . Вісь включення розміщена на відстані  $H$  від межі півпростору, а його серединна поверхня (лінія  $L'$ ) нахилена до поверхні під кутом  $\alpha$  (рис. 22.20). Товщина включення  $2h(x)$ .

У основній системі координат  $xOy$  вислідне поле напружень у тілі задається виразом

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) + \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{f_3^*(t)}{te^{i\alpha} - z} dt + (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{i\alpha} - z} dt. \quad (22.75)$$

Тут  $\kappa = 0$  відповідає заданим на межі тіла напружень;  $\kappa = 1$  – переміщень.

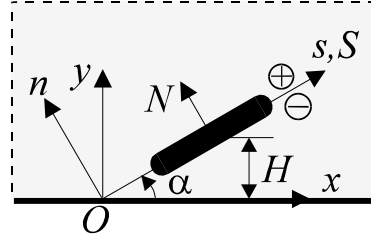


Рис. 22.20. Включення, нахилене до межі півпростору

У повернутій системі координат  $sOn$

$$\sigma_{nz}(z) + i\sigma_{sz}(z) = \sigma_{nz}^0(z) + i\sigma_{sz}^0(z) + \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{f_3^*(t)}{t - (s + in)} dt + (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{-2i\alpha} - (s + in)} dt, \quad (22.76)$$

$$s + in = (x + iy)e^{-i\alpha}, \quad \sigma_{nz}^0(z) + i\sigma_{sz}^0(z) = [\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z)]e^{i\alpha}.$$

З огляду на це граничні значення напружень на осі  $s$  з урахуванням формули Сохоцького – Племеля дорівнюють

$$\sigma_{nz}^\pm + i\sigma_{sz}^\pm = \sigma_{nz}^0(s) + i\sigma_{sz}^0(s) \mp \frac{1}{2} f_3^*(s) + \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{f_3^*(t)}{t - s} dt + (-1)^\kappa \frac{i}{2\pi} \int_{L_0} \frac{\overline{f_3^*(t)}}{te^{-2i\alpha} - s} dt,$$

або після поділу на дійсну та уявну частини –

$$\sigma_{nz}(s) = \sigma_{nz}^0(s) \mp \frac{1}{2} f_3(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{L_0} \frac{Gf_6(t)}{t - s} dt + (-1)^\kappa \sum_r \int_{L_0} k_{1r}(s, t) f_r(t) dt, \quad (22.77)$$

$$\sigma_{sz}(s) = \sigma_{sz}^0(s) \mp \frac{G}{2} f_6(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{L_0} \frac{f_3(t)}{t - s} dt + (-1)^\kappa \sum_r \int_{L_0} k_{2r}(s, t) f_r(t) dt.$$

Тут

$$k_{13}(s, t) = -\frac{(t - s \cos 2\alpha) \sin 2\alpha + s \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\pi [(t - s \cos 2\alpha)^2 + (s \sin 2\alpha)^2]}, \quad k_{26}(s, t) = -Gk_{13}(s, t), \quad (22.78)$$

$$k_{23}(s, t) = \frac{(t - s \cos 2\alpha) \cos 2\alpha - s \sin 2\alpha \sin 2\alpha}{2\pi [(t - s \cos 2\alpha)^2 + (s \sin 2\alpha)^2]}, \quad k_{16}(s, t) = Gk_{23}(s, t).$$

Зробимо заміни  $s = s_0 + S$ ,  $t = t_0 + T$ ,  $s_0 = t_0 = H/\sin \alpha$ , вводячи локальну систему координат з початком в центрі  $s = s_0$  відрізка  $L'$ . Тоді з огляду на залежності

$$t - s \cos 2\alpha = T_1(T, S) \equiv T - S + 2H \sin \alpha + 2S \sin^2 \alpha, \quad (22.79)$$

$$s \sin 2\alpha = T_2(T, S) \equiv 2H \cos \alpha + S \sin 2\alpha$$

отримаємо:

$$\sigma_{nz}(S) = \sigma_{nz}^0(S) \mp \frac{1}{2} f_3(S) - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{Gf_6(T)}{T - S} dT + (-1)^\kappa \sum_{r=3,6-a} \int_{-a}^a k_{1r}^*(S, T) f_r(T) dT, \quad (22.80)$$

$$\sigma_{sz}(S) = \sigma_{sz}^0(S) \mp \frac{G}{2} f_6(S) + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{f_3(T)}{T - S} dT + (-1)^\kappa \sum_{r=3,6-a} \int_{-a}^a k_{2r}^*(S, T) f_r(T) dT;$$

$$k_{13}^*(S, T) = -\frac{T_1(T, S)\sin 2\alpha + T_2(T, S)\cos 2\alpha}{2\pi[T_1^2(T, S) + T_2^2(T, S)]}, \quad k_{26}^*(S, T) = -Gk_{13}^*(S, T),$$

$$k_{23}^*(S, T) = \frac{T_1(T, S)\cos 2\alpha - T_2(T, S)\sin 2\alpha}{2\pi[T_1^2(T, S) + T_2^2(T, S)]}, \quad k_{16}^*(S, T) = Gk_{23}^*(S, T). \quad (22.81)$$

У тому випадку, якщо включення паралельне до межі тіла ( $\alpha = 0$ )

$$T_1(T, S) = T - S, \quad T_2(T, S) = 2H \quad (22.82)$$

і тоді ядра (22.81) інтегрального рівняння набувають вигляду

$$k_{13}^*(S, T) = -\frac{2H}{2\pi[T_1^2(T, S) + T_2^2(T, S)]}, \quad k_{26}^*(S, T) = -Gk_{13}^*(S, T),$$

$$k_{23}^*(S, T) = \frac{T - S}{2\pi[T_1^2(T, S) + T_2^2(T, S)]}, \quad k_{16}^*(S, T) = Gk_{23}^*(S, T).$$

Заміна  $S \sim x, T \sim y$  свідчить про те, що вище отримані вирази збігаються з (22.70) і залежностями (22.80), (22.81) можна користуватися також у випадку включення, паралельного до межі тіла.

Скориставшись умовами взаємодії (15.1) ((5.5), (6.8) [951]), записаними в системі координат  $(sn)$ , одержимо з використанням (22.80), (22.81) систему сингулярних інтегральних рівнянь для тонкого пружного включення

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_6(T)}{T-S} dT - \frac{k}{h} \int_{-a}^S f_6(S) dS + (-1)^\kappa \sum_{r=3,6-a}^a \int K_{1r}(S, T) f_r(T) dT = F_6(S), \quad (22.83)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_3(T)}{T-S} dT - \frac{1}{kh} \int_{-a}^S f_3(T) dT + (-1)^\kappa \sum_{r=3,6-a}^a \int K_{2r}(S, T) f_r(T) dT = F_3(S) \quad (S \in [-a; a]);$$

$$F_6(S) = \left\{ (1-k) \left[ \sigma_{nz}^0(S+ih) + \sigma_{nz}^0(S-ih) \right] - \frac{G_B}{h} w_-^* \right\}, \quad k = \frac{G_B}{G},$$

$$F_3(S) = \frac{2}{k} \sigma_{sz}^c(-a) - \sigma_{sz}^0(S+ih) - \sigma_{sz}^0(S-ih), \quad w_-^* = 0, \quad \sigma_{sz}^c(-a) = \frac{\sigma_{sz}^0(-a)}{\max(1, k^{-1})}, \quad (22.84)$$

$$K_{16}(S, T) = -K_{23}(S, T) = -2k_{23}^*(S, T) = -\frac{T_1(T, S)\cos 2\alpha - T_2(T, S)\sin 2\alpha}{\pi[T_1^2(T, S) + T_2^2(T, S)]},$$

$$K_{26}(S, T) = G^2 K_{13}(S, T) = -2Gk_{13}^*(S, T) = G \frac{T_1(T, S)\sin 2\alpha + T_2(T, S)\cos 2\alpha}{\pi[T_1^2(T, S) + T_2^2(T, S)]}.$$

У випадку горизонтального включення  $\alpha = 0, S \sim x, T \sim y$  ядра

$$K_{1r}(S, T), K_{2r}(S, T) \quad (r = 3, 6)$$

збігаються з відповідними ядрами  $K_{1r}(x, y), K_{2r}(x, y)$  у (22.72) і система сингулярних інтегральних рівнянь (22.83) збігається із системою (22.71) для включення, паралельного до межі тіла.

Розв'язок системи рівнянь (22.83), (22.84) можна шукати у вигляді рядів (20.29) на основі методу колокацій. Здійснене обчислення безрозмірних узагальнених КІН (УКІН) біля ближчого до поверхні (знак "+") та віддаленого від поверхні (знак "-") краю включення

$K_{3,i}^{0j\pm}$  ( $i=1,2; j=1,2,3$ ) для одного типу крайових умов (а – завантажений або вільний край) та трьох способів навантаження ( $j=1$  – до берегів включення прикладене напруження  $\sigma_{nz} = \tau$ ;  $j=2$  –  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau, \sigma_{xz}^{\infty} = 0$ ;  $j=3$  –  $\sigma_{yz}^{\infty} = 0, \sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1$ ). Для навантажень 1 і 2  $K_{3,i}^{0j\pm} = K_{3,i}^{\pm} / (\tau \sqrt{\pi a})$  ( $i, j=1,2$ ); для навантаження 3 –  $K_{3,i}^{0j\pm} = K_{3,i}^{\pm} / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$  ( $i=1,2$ ).

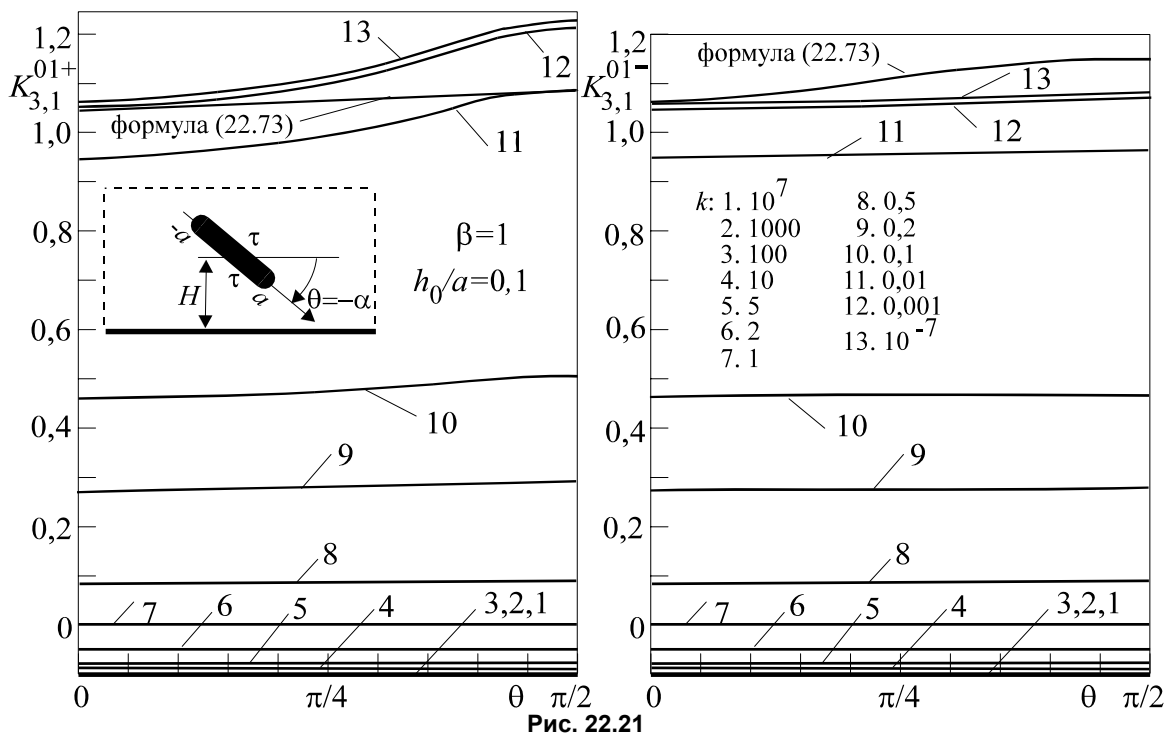


Рис. 22.21

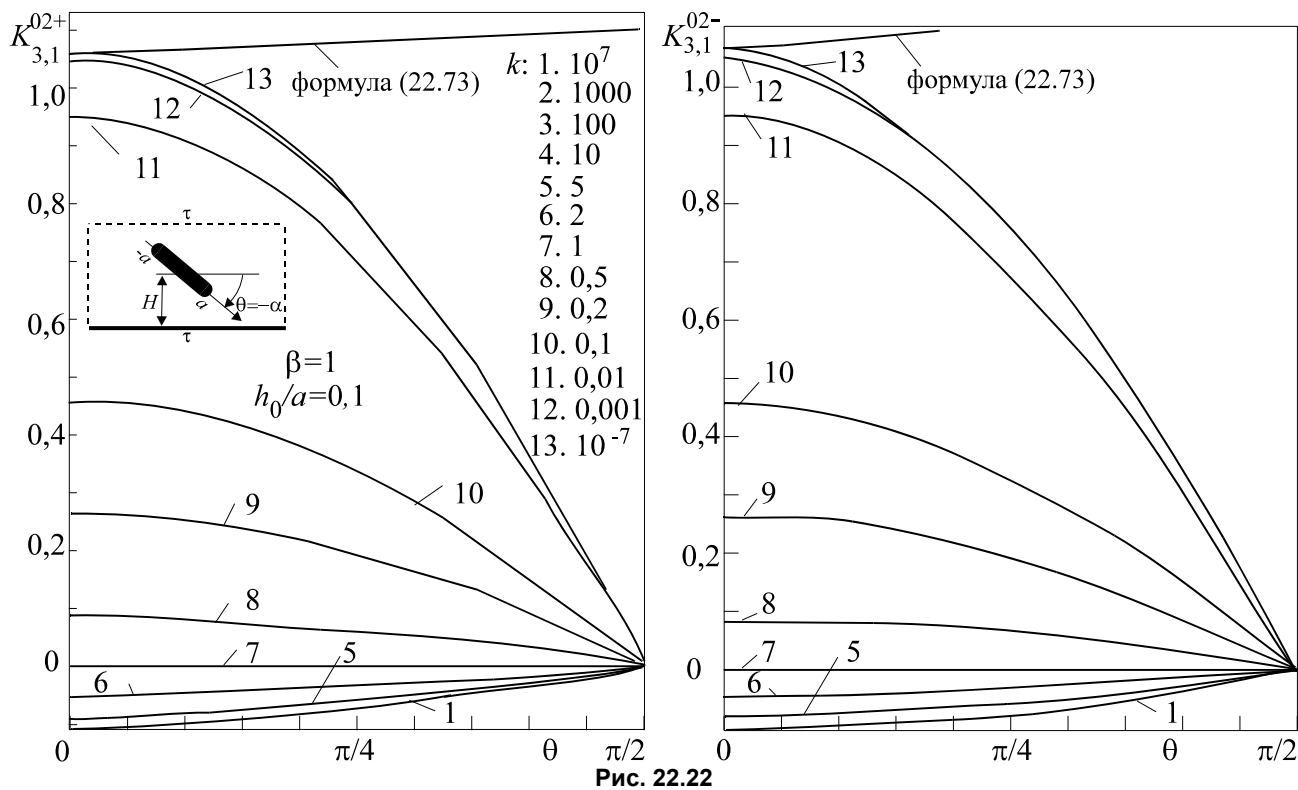


Рис. 22.22

Досліджений вплив відносної жорсткості включення  $k = G_B/G$ ; кута орієнтації  $\alpha$ ; для відносної глибини його залягання  $\lambda = H/a = 1,25$  та відносної товщини центральної частини  $h_0/a = 0,1$ . Навантаження за способом 1 і 2 еквівалентні при  $\theta = -\alpha = 0$ , а при  $\alpha = \pm \pi/2$  еквівалентні навантаження способів 1 і 3. Профіль включення – еліптичний ( $\beta = 1$ ). Розрахунки здійснені з точністю не меншою за 1%.

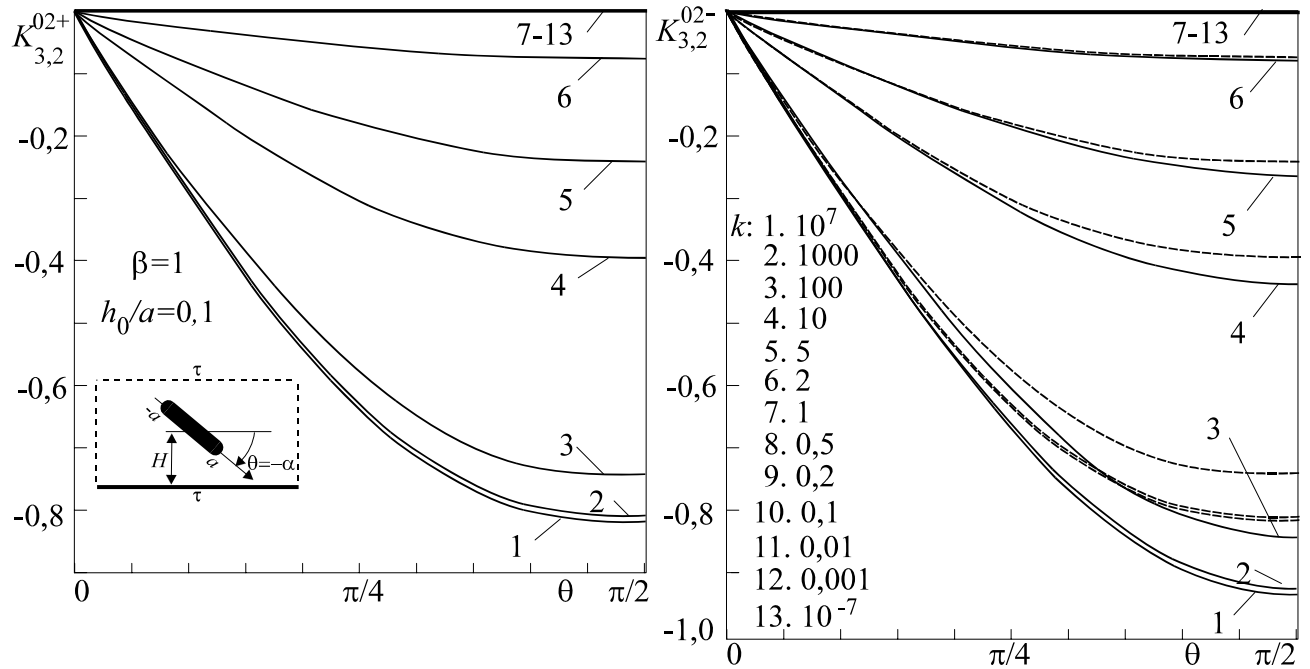


Рис. 22.23

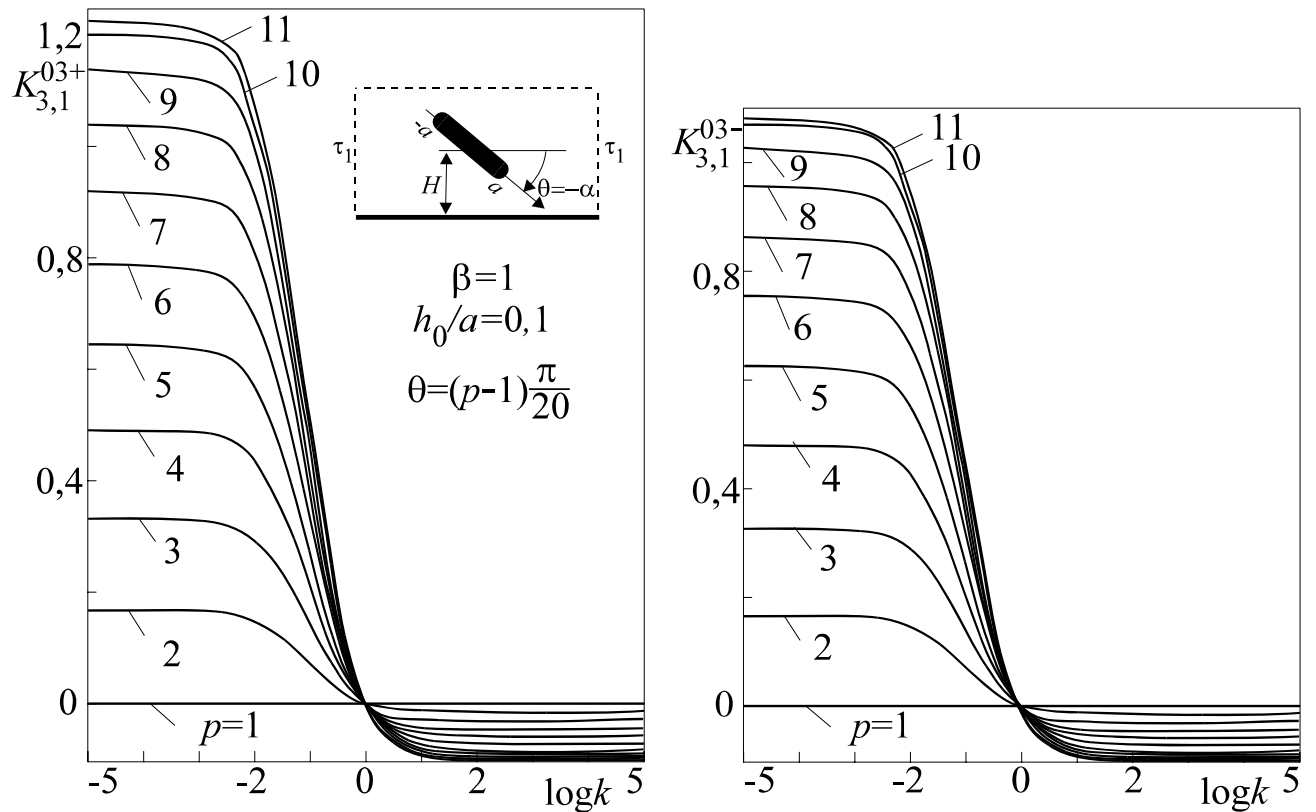


Рис. 22.24



Загальні тенденції зміни УКІН такі ж, як і для включення горизонтальної орієнтації. Більшим є абсолютне значення УКІН на краю того включення, який ближчий до вільної чи завантаженої поверхні.

На рис. 22.21 – 22.25 зображені залежності від відносної жорсткості включення  $k = G_B/G$  та кута орієнтації включення  $\theta = -\alpha$  ненульових значень зведених (безрозмірних) УКІН  $K_{3,i}^{0j\pm}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ ) для півпростору з незашемленим краєм.

Рис. 22.21 стосується першого способу навантаження, якщо навантаження прикладене по поверхні включення. Тут подана залежність  $K_{3,1}^{01\pm}$  від  $\theta$  для тринадцяти значень відносної жорсткості включення  $k = 10^7; 1000; 100; 10; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,01; 0,001; 10^{-7}$  (тріщина). За такого навантаження напружений стан біля вістря дефекту найменшою мірою чутливий до орієнтації включення, а тому УКІН дуже слабо залежить від орієнтації неоднорідності. Помітне лише те, що наближення краю включення до вільної поверхні незначно збільшує  $K_{3,1}^{01\pm} > 0$ , причому завжди  $K_{3,1}^{01+} > K_{3,1}^{01-}$ , якщо тільки  $\theta \neq 0$  ( $\alpha \neq 0$ ).

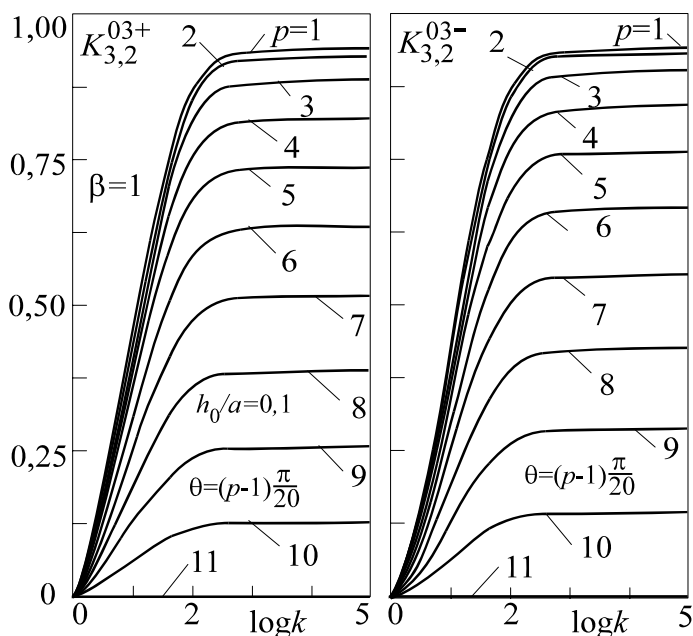


Рис. 22.25

Рис. 22.22, 22.23 стосуються другого способу навантаження  $\sigma_{yz}^{\infty} = \sigma_{yz}^{\infty}|_{y=0} = \tau$ . Тут подана залежність  $K_{3,1}^{02\pm}$  (рис. 22.22) та  $K_{3,2}^{02\pm}$  (рис. 22.23) від  $\theta$  для тих самих тринадцяти значень відносної жорсткості включення  $k = 10^7; 1000; 100; 10; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,01; 0,001; 10^{-7}$  (тріщина). Збільшення кута нахилу до поверхні монотонно зменшує до нуля абсолютне значення УКІН  $K_{3,1}^{02}$  та монотонно збільшує від нуля абсолютне значення  $K_{3,2}^{02} < 0$ . Оскільки при  $\theta = 0$  ( $\alpha = 0$ ) на обох кінцях включення  $K_{3,1}^{02+} = K_{3,1}^{02-}$ ,  $K_{3,2}^{02+} = K_{3,2}^{02-} = 0$ , то для УКІН  $K_{3,1}^{02\pm}$  початкові та кінцеві значення однакові і різні тільки швидкість їх зміни УКІН. Цікаво, що для нахиленого до завантаженої поверхні включення УКІН  $|K_{3,2}^{02+}| < |K_{3,2}^{02-}|$  (для порівняння на рис. 22.23 залежність  $K_{3,2}^{02+}$  подана штриховою лінією).

За третього способу навантаження  $\sigma_{xz}^\infty = \sigma_{xz}^\infty|_{y=0} = \tau_1$  (рис. 22.24, 22.25) картина зворотна: збільшення кута нахилу до поверхні збільшує від нуля УКІН  $K_{3,1}^{03\pm}$  та зменшує до нуля абсолютне значення  $K_{3,2}^{03\pm}$ . Тут подані залежності  $K_{3,1}^{03\pm}$ ,  $K_{3,2}^{03\pm}$  від логарифма відносної жорсткості  $k$  для одинадцяти значень кута орієнтації  $\theta = -\alpha = \pi(p-1)/20$  ( $p=1,2,\dots,11$ ). Для податних включень УКІН  $K_{3,1}^{03+}$  істотно більший від УКІН  $K_{3,1}^{03-}$  для віддаленого вістря. Так само, як і для навантаження другого типу у нахиленому до вільної поверхні включення УКІН  $K_{3,2}^{02+} < K_{3,2}^{02-}$ .

### 22.6 Побудова однорідних розв'язків (антиплоска задача)

Структура сингулярних інтегральних рівнянь задачі для пружних стрічкових включень у шаруватих середовищах загалом однакова. Різняться вони для різних задач конкретним виглядом ядер і правими частинами, які, у свою чергу, залежать передусім від однорідного розв'язку відповідної задачі. Загальна методика побудови таких розв'язків міститься у п. 22.3 – вона тотожна методиці побудови збурених розв'язків у шаруватому середовищі, вважаючи, що однорідний розв'язок є сумою основного однорідного поля та збуреного однорідного, який, у свою чергу, є сумою основного збуреного однорідного і коригувального збуреного однорідного. Розглянемо цю техніку на декількох важливих прикладах.

#### Зосереджена сила в точці безмежного простору

Розглянемо спочатку випадок, коли зосереджена сила  $Q$  діє у початку координат необмеженого простору з модулем зсуву  $G_j \sim G$  уздовж осі  $z$  (рис. 22.26). Тоді згідно з виразами (22.31), (22.32) при  $y > 0$  отримуємо такі вирази для подання ненульових компонент тензора напружень

$$\sigma_{yz}^0 = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi, \quad \sigma_{xz}^0 = -\frac{iG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left[ A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi. \quad (22.85)$$

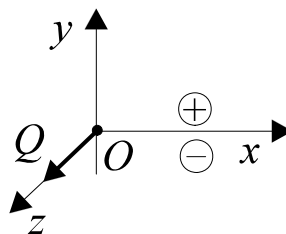


Рис. 22.26

У випадку  $y < 0$  подання мають вигляд

$$\sigma_{yz}^0 = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \sigma_{xz}^0 = -\frac{iG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left[ A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi. \quad (22.86)$$

Дію сили змодельуємо крайовою умовою (функцією стрибка) на лінії  $y = 0$ , що проходить через лінію її дії:  $\sigma_{yz}^{0+} - \sigma_{yz}^{0-} = -Q\delta(x)$ . На рис. 22.27 зображено додатні напрями дотичних напружень на елементах середовища у областях, які примикають до прямої, що прохо-

дить через силу. Це дає розуміння того, чому у попередній формулі перед силою стоїть знак мінуса.

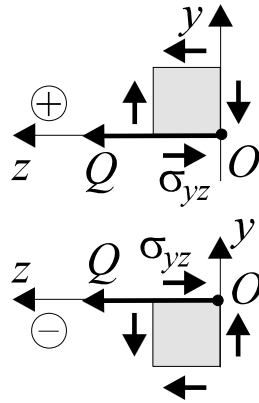


Рис. 22.27

З використанням попередніх виразів це зводиться до умови

$$\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \left[ -A_1^j(\xi) - A_2^j(\xi) \right] e^{-i\xi x} d\xi = -\frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi,$$

звідки

$$G|\xi| \left[ -A_1^j(\xi) - A_2^j(\xi) \right] = -Q. \quad (22.87)$$

Окрім цього повинна виконуватися умова неперервності переміщень, яка еквівалентна умові  $\sigma_{xz}^{0+} - \sigma_{xz}^{0-} = 0$ . Звідси  $-\frac{iG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left[ A_1^j(\xi) - A_2^j(\xi) \right] e^{-i\xi x} d\xi = 0$  і тому  $A_1^j(\xi) = A_2^j(\xi)$ .

Таким чином, умова (22.87) зводиться до двох рівностей

$$-2G|\xi| A_1^j(\xi) = -Q, \quad -2G|\xi| A_2^j(\xi) = -Q,$$

завдяки чому вирази (22.85), (22.86) можна заступити залежностями

$$\sigma_{yz}^0(z) = -\frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \sigma_{xz}^0 = -\frac{iQ}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi.$$

Зручніше використати ці формули у вигляді комплексної композиції

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = -\frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y} [1 - \text{sign}(\xi)] e^{-i\xi x} d\xi = -\frac{iQ}{2\pi z}.$$

Якщо сила діє у деякій точці  $z_*$  комплексної площини  $z = x + iy$ , то після перенесення початку системи координат у точку  $z_*$  з цього виразу отримаємо

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = -\frac{iQ}{2\pi(z - z_*)}. \quad (22.88)$$

Зазначимо, що ці вирази, як і (22.40), випливають також із загальної формули методу функцій стрибка для поля напружень

$$\hat{\sigma}_{yz}^{01} + \hat{\sigma}_{xz}^{01} = \frac{i}{2\pi} \int_a^b \frac{f_5^*(t) dt}{t - z},$$

якщо

$$f_5^* = f_5 + if_6, \quad f_5 = Q\delta(t), \quad f_6(t) = 0.$$

**Зосереджена сила в точці півплощини**

Побудуємо тепер розв'язок  $\sigma_{xz}^{01}, \sigma_{yz}^{01}$  для дії зосередженої сили  $Q$  у довільній точці  $z_*$  пружного півпростору  $y \geq 0$  з модулем зсуву  $G_j \sim G$  (рис. 22.28). Вважаємо його суперпозицією основного поля напружень  $\sigma_{xz}^0, \sigma_{yz}^0$  від зосередженої сили  $Q$  у необмеженому середовищі та збуреного вільною межею розв'язку  $\hat{\sigma}_{xz}^{01}, \hat{\sigma}_{yz}^{01}$ :

$$\sigma_{xz}^{01} = \sigma_{xz}^0 + \hat{\sigma}_{xz}^{01}, \quad \sigma_{yz}^{01} = \sigma_{yz}^0 + \hat{\sigma}_{yz}^{01}. \quad (22.89)$$

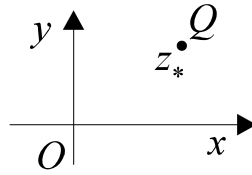


Рис. 22.28

Розглянемо основне поле напружень (22.88) від дії сили  $Q$  у безмежному просторі

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = \frac{iQ}{2\pi(z - z_*)} \quad (22.90)$$

(тут спочатку взято для простоти  $z_* = iy_*$  – рис. 22.29) та збурене поле  $\hat{\sigma}_{xz}^{01}, \hat{\sigma}_{yz}^{01}$  у формі (22.31), (22.32). Оскільки у цьому випадку аналогічно до (22.85)  $A_2^j(\xi) = 0$ , то

$$\hat{\sigma}_{yz}^{01} = -\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi.$$

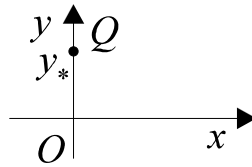


Рис. 22.29

Згідно з першою формулою (22.85) крайова умова  $\sigma_{yz}^{01}|_{y=0} = 0$  щодо напружень на вільній межі тіла  $y = 0$  має вигляд

$$-\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| A_1^j(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = -\operatorname{Re} \frac{iQ}{2\pi(x - iy_*)} = -\operatorname{Re} \frac{iQ(x + iy_*)}{2\pi(x^2 + y_*^2)} = \frac{Qy_*}{2\pi(x^2 + y_*^2)}.$$

Звідси, беручи обернене перетворення Фур'є,

$$-G|\xi| A_1^j(\xi) = \frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_*}{x^2 + y_*^2} e^{i\xi x} dx = \frac{Q}{2\pi} \pi \operatorname{sign}(y_*) e^{-|\xi|y_*},$$

або

$$-G|\xi| A_1^j(\xi) = \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y_*} \text{ при } y_* > 0.$$

Тепер

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{yz}^{01} &= \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y_*} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|(y_*+y)} e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{0 - [x + i(y + y_*)]} \right) = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{x + i(y + y_*)} \right) = \\
&= -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z + iy_*} \right) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{i}{z + iy_*} \right), \\
\hat{\sigma}_{xz}^{01} &= -\frac{iG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left[ A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi = \frac{i}{2\pi} \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|(y_*+y)} e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= -\frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|(y_*+y)} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{Q}{4\pi} 2 \operatorname{Re} \left( \frac{i^2}{0 - [x + i(y + y_*)]} \right) = \\
&= \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{z + iy_*} \right) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{i}{z + iy_*} \right).
\end{aligned}$$

Це дає комплексне подання для збуреного розв'язку

$$\hat{\sigma}_{yz}^{01} + i\hat{\sigma}_{xz}^{01} = \frac{Q}{2\pi} \frac{i}{z + iy_*},$$

а тому у загальному вигляді довільного розташування точки прикладання сили збурений розв'язок є таким:

$$\hat{\sigma}_{yz}^{01}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{01}(z) = \frac{Qi}{2\pi} \frac{1}{z - \bar{z}_*}. \quad (22.91)$$

Остаточно з урахуванням (22.89)–(22.91)

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = \frac{Qi}{2\pi} \left[ \frac{1}{z - z_*} - \frac{1}{z - \bar{z}_*} \right]. \quad (22.92)$$

Якщо використати відповідні формули, отримані з використанням теорії функцій комплексної змінної (20.4) з урахуванням  $G_2 = G$ ,  $G_1 = 0$  (перший (нижній) півпростір має нульовий модуль зсуву), то поле напружень набуде вигляду

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = i[S(z) + n_{21}p_2S^*(z)] = \frac{Qi}{2\pi} \left[ \frac{1}{z - z_*} + \frac{1}{z - \bar{z}_*} \right].$$

Тут враховано, що  $n_{21} = 1$ ,  $p_{21} = 1$ . Перевірка: при  $z = x$ ,  $z_* = iy_*$  ( $x_* = 0$ ) напруження на межі півпростору дає

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \frac{Qi}{2\pi} \left[ \frac{1}{x - iy_*} + \frac{1}{x + iy_*} \right] = \frac{iQx}{\pi(x^2 + y_*^2)},$$

отже  $\sigma_{yz}|_{y=0} = 0$  на межі області, що узгоджується із вимогою крайової умови.

Для однакових матеріалів півпросторів  $n_{kl} = 0$  і тоді  $\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = iS(z)$ . Це збігається з виразами (22.88), (22.90).

**Зосереджена сила в смузі**

Так само, як у попередньому підпункті для сили у півплощині, побудуємо розв’язок  $\sigma_{xz}^{01}, \sigma_{yz}^{01}$  для дії зосередженої сили  $Q$  у довільній точці  $z_*$  пружної смуги  $0 \leq y \leq h_1$  (рис. 22.30). Вважаємо його суперпозицією (22.89) основного поля напружень  $\sigma_{xz}^0, \sigma_{yz}^0$  (22.88) від зосередженої сили  $Q$  у необмеженому середовищі та збуреного вільними межами розв’язку  $\hat{\sigma}_{xz}^{01}, \hat{\sigma}_{yz}^{01}$ .

Розглянемо основне поле напружень (22.88) від зосередженої сили  $Q$  у безмежному просторі

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = \frac{iQ}{2\pi(z - z_*)}.$$

Тут спочатку для деякого спрощення перетворень візьмемо  $z_* = iy_*$ . Збурене поле має структуру (22.32). У цьому випадку

$$\hat{\sigma}_{yz}^{01}(z) = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi.$$

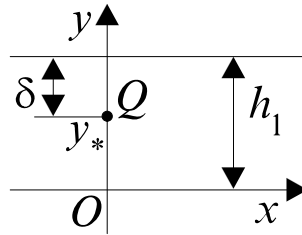


Рис. 22.30

Крайова умова  $\sigma_{yz}^{01}|_{y=0} = 0$  щодо нульових напружень на лінії  $y = 0$  з урахуванням того, як це робилося у випадку сили у півплощині, має вигляд

$$-\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \left[ -A_1^j(\xi) + A_2^j(\xi) \right] e^{-i\xi x} d\xi = -\operatorname{Re} \frac{iQ}{2\pi(x - iy_*)} = \frac{Qy_*}{2\pi(x^2 + y_*^2)}.$$

Звідси, оскільки  $y_* > 0$ ,

$$G|\xi| \left[ -A_1^j(\xi) + A_2^j(\xi) \right] = \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y_*}. \tag{22.93}$$

Крайова умова  $\sigma_{yz}^{01}|_{y=h_1} = 0$  щодо нульових напружень на лінії  $y = h_1$  зводиться до рівняння

$$\begin{aligned} \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|h_1} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|h_1} \right] e^{-i\xi x} d\xi &= -\operatorname{Re} \frac{iQ}{2\pi(x - iy_* + ih_1)} = \\ &= \frac{Q(y_* - h_1)}{2\pi(x^2 + (y_* - h_1)^2)} = -\frac{Q\delta}{2\pi(x^2 + \delta^2)}. \end{aligned}$$

Звідси з урахуванням того, що  $\delta = h_1 - y_* > 0$ , отримуємо

$$G|\xi| \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|h_1} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|h_1} \right] = -\frac{Q}{2} e^{-|\xi|\delta}. \quad (22.94)$$

Тепер з рівнянь (22.93), (22.94) отримаємо

$$\begin{cases} G|\xi| \left[ A_2^j(\xi) - A_2^j(\xi) e^{2|\xi|h_1} \right] = \frac{Q}{2} \left[ e^{-|\xi|y^*} + e^{-|\xi|\delta} e^{|\xi|h_1} \right] = \frac{Q}{2} \left[ e^{-|\xi|y^*} + e^{|\xi|y^*} \right], \\ G|\xi| \left[ -A_1^j(\xi) + A_1^j(\xi) e^{-2|\xi|h_1} \right] = \frac{Q}{2} \left[ e^{-|\xi|y^*} + e^{-|\xi|\delta} e^{-|\xi|h_1} \right], \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} G|\xi| A_2^j(\xi) \left( 1 - e^{2|\xi|h_1} \right) = \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y^*} \left( 1 + e^{2|\xi|y^*} \right), \\ G|\xi| A_1^j(\xi) \left( e^{-2|\xi|h_1} - 1 \right) = \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y^*} \left( 1 + e^{-2|\xi|\delta} \right). \end{cases}$$

Це дає можливість записати, що

$$\begin{aligned} G|\xi| A_2^j(\xi) &= \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y^*} \frac{1 + e^{2|\xi|y^*}}{1 - e^{2|\xi|h_1}}, \\ -G|\xi| A_1^j(\xi) &= \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y^*} \frac{1 + e^{-2|\xi|\delta}}{1 - e^{-2|\xi|h_1}}. \end{aligned} \quad (22.95)$$

Якщо  $h_1 \rightarrow \infty$ , то звідси випливає, що  $A_2^j(\xi) \rightarrow 0$ ,  $-G(\xi) A_1^j(\xi) \rightarrow \frac{Q}{2} e^{-|\xi|y^*}$ . Це збігається з попередніми результатами для півплощини.

Збурене поле напружень з урахуванням виразів (22.95) має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yz}^{01} &= \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y^*} \left[ \frac{1 + e^{-2|\xi|\delta}}{1 - e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1 + e^{2|\xi|y^*}}{1 - e^{2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\xi y^*} \left[ \frac{1 + e^{-2\xi\delta}}{1 - e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1 + e^{2\xi y^*}}{1 - e^{2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} e^{\xi y^*} \left[ \frac{1 + e^{2\xi\delta}}{1 - e^{2\xi h_1}} e^{\xi y} + \frac{1 + e^{-2\xi y^*}}{1 - e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi \right\} = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\xi y^*} \left[ \frac{1 + e^{-2\xi\delta}}{1 - e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1 + e^{2\xi y^*}}{1 - e^{2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-\xi y^*} \left[ \frac{1 + e^{-2\xi\delta}}{1 - e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1 + e^{2\xi y^*}}{1 - e^{2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] e^{i\xi x} d\xi \right\} = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y^*} \left[ \frac{1 + e^{-2\xi\delta}}{1 - e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1 + e^{2\xi y^*}}{1 - e^{2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] \cos(\xi x) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{xz}^{01} &= -\frac{iG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) |\xi| \left[ A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi = \\
 &= -\frac{iQ}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) e^{-|\xi|y} \left[ -\frac{1+e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+e^{2|\xi|y^*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi y} d\xi = \\
 &= -\frac{iQ}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-|\xi|y^*} \left[ -\frac{1+e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+e^{2|\xi|y^*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] \left[ e^{-i\xi y} - e^{i\xi y} \right] d\xi = \\
 &= -\frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-|\xi|y^*} \left[ -\frac{1+e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+e^{2|\xi|y^*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] \sin(\xi x) d\xi.
 \end{aligned}$$

У частковому випадку розташування сили на серединній площині смуги  $y^* = H = \delta = h_1 / 2$  (рис. 22.31)

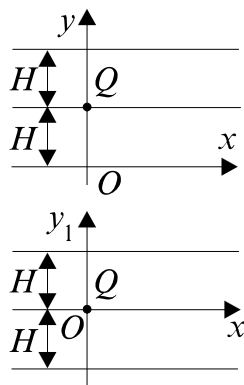


Рис. 22.31

$$\begin{aligned}
 G|\xi| A_2^j(\xi) &= \frac{Q}{2} e^{-|\xi|H} \frac{1+e^{2|\xi|H}}{1-e^{-4|\xi|H}} = \frac{Q}{2} \frac{e^{-k} + e^k}{e^{-2k} - e^{2k}} e^{2k}, \\
 -G|\xi| A_1^j(\xi) &= \frac{Q}{2} e^{-k} \frac{1+e^{-2k}}{1-e^{-4k}} = \frac{Q}{2} \frac{e^k + e^{-k}}{e^{2k} - e^{-2k}} \quad (k = |\xi|H).
 \end{aligned}$$

Після заміни  $y = y_1 + H$  (щоб отримати повну геометричну симетрію) отримаємо, зокрема,

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{yz}^{01} &= \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \left[ -A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y_1} e^{-k} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y_1} e^k \right] e^{-i\xi x} d\xi = \\
 &= \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-k} \frac{e^k + e^{-k}}{e^{2k} - e^{-2k}} e^{-|\xi|y_1} + e^{-k} \frac{e^k + e^{-k}}{e^{-2k} - e^{2k}} e^{|\xi|y_1} \right] e^{-i\xi x} d\xi = \\
 &= \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k} \frac{e^k + e^{-k}}{e^{2k} - e^{-2k}} \left[ e^{-|\xi|y_1} - e^{|\xi|y_1} \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (k = |\xi|H).
 \end{aligned} \tag{22.96}$$

Крайові умови для жорсткого защемлення країв смуг зводяться до вигляду

$$\sigma_{xz}^{01} \Big|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{xz}^{01} \Big|_{y=h_1} = 0. \tag{22.97}$$



Відповідна задача про визначення напруженого стану для смуги із защемленими берегами має подібну структуру. Якщо ввести значення параметра  $\kappa = 1$  за закріплених країв смуги та  $\kappa = 0$  при незакріпленій (вільній від напружень) межі смуги, то для зосередженої сили у смугі збурене поле є таким:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{yz}^{01} &= \frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2|\xi|y_*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= \frac{Q}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\xi y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2\xi\delta}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2\xi y_*}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{-\infty} e^{\xi y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{2\xi\delta}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{\xi y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2\xi y_*}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi \right\} = \\
&= \frac{Q}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\xi y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2\xi\delta}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2\xi y_*}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-\xi y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2\xi\delta}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2\xi y_*}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] e^{i\xi x} d\xi \right\} = \\
&= \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2\xi\delta}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2\xi y_*}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{\xi y} \right] \cos(\xi x) d\xi, \\
\hat{\sigma}_{xz}^{01} &= -\frac{iG}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) |\xi| \left[ A_1^j(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2^j(\xi) e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= -\frac{iQ}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) e^{-|\xi|y_*} \left[ -(-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2|\xi|y_*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi y} d\xi = \\
&= -\frac{iQ}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-|\xi|y_*} \left[ -(-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2|\xi|y_*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] \left[ e^{-i\xi y} - e^{i\xi y} \right] d\xi = \\
&= -\frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-|\xi|y_*} \left[ -(-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2|\xi|\delta}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{-|\xi|y} + \frac{1+(-1)^\kappa e^{2|\xi|y_*}}{1-e^{-2|\xi|h_1}} e^{|\xi|y} \right] \sin(\xi x) d\xi,
\end{aligned}$$

або більш компактно

$$\hat{\sigma}_{yt}^{01} = Q \int_0^{\infty} g_{+\kappa}(\xi) \cos(x\xi) d\xi, \quad \hat{\sigma}_{xt}^{01} = Q \int_0^{\infty} g_{-\kappa}(\xi) \sin(\xi x) d\xi, \quad (22.98)$$

де

$$g_{\pm\kappa}(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\xi y_*} \left[ (-1)^\kappa \frac{1+(-1)^\kappa e^{-2\xi\delta}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{-\xi y} \pm \frac{1+(-1)^\kappa e^{2\xi y_*}}{1-e^{-2\xi h_1}} e^{\xi y} \right]. \quad (22.99)$$

Функція  $g_{\pm\kappa}(\xi)$  залежить також від параметрів  $y, y_*, h_1, \delta = h_1 - y$ .

**Зауваження.** Якщо замість зосередженої сили  $Q$  у відповідній точці середовища діє гвинтова дислокація зі складовою вектора Бюргерса  $b$ , то усі формули пп. 22.6 збережуться з урахуванням заміни  $Q \rightarrow iGb$ . ■

## § 23. Включення в анізотропному середовищі

Розглянемо [967] постановку задачі п. 20.1, вважаючи на відміну, що матеріали півплощин  $S_1 \sim \text{Re } z < 0$ ,  $S_2 \sim \text{Re } z > 0$  є тепер анізотропними. Основні співвідношення для поздовжнього зсуву анізотропного матеріалу містяться у п. 13.3. Використаємо введені там позначення і введемо у розгляд також одиничну матрицю  $\mathbf{E} = \|\delta_{mn}\|$ , матриці

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \mathbf{M}^{kj} = \|M_{mn}^{kj}\|,$$

де

$$K_{mn} = -(-1)^m \delta_{mn}, \quad M_{m1}^{kj} = -1, \quad M_{12}^{kj} = r^k, \quad M_{22}^{kj} = -r^j \quad (k=1,2; j=3-k).$$

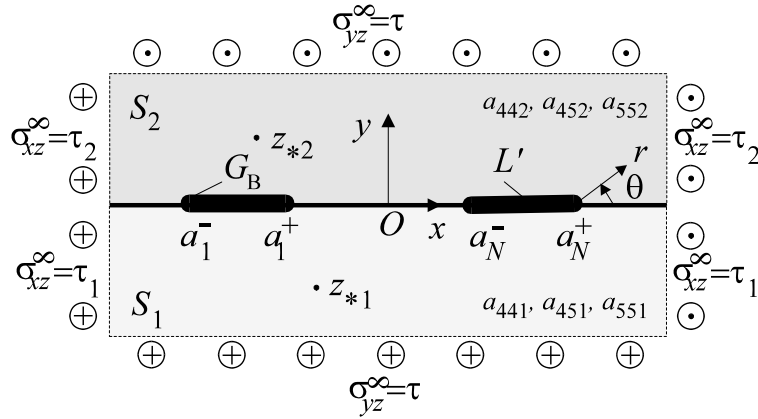


Рис. 23.1. Схема задачі

Оскільки

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial y} \Big|_{z=\infty} = \tau_k, \quad \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} \Big|_{z=\infty} = -\tau,$$

то з урахуванням того, що параметри анізотропії  $r^k = \sqrt{(a_{45B})^2 - a_{44B}a_{55B}}$  є суто уявними числами, вектор стану на основі (13.23) набуде вигляду

$$\sigma(z) \equiv \left\{ \sigma_{yz}(z), \partial w(z)/\partial x \right\} = \sigma^\infty + \Psi_{kk}^0(z^k) \mathbf{M}^{kk}, \quad (23.1)$$

де

$$\sigma^\infty = \left\{ \sigma_{yz}^\infty, \partial w^\infty/\partial x \right\} = \left\{ \tau, w^k \right\}, \quad \Psi_{kj}^0(z) = \left\{ \psi_k(z), \overline{\psi_j(z)} \right\}, \quad w^k = a_{45k}\tau + a_{55k}\tau_k.$$

Присутність на прямій  $L$  тонкого включення враховує умова (20.1)

$$\sigma^-(x) - \sigma^+(x) = \mathbf{f}(x) \quad (x \in L').$$

### 23.1. Прямолінійне включення в однорідній матриці

Вважатимемо матеріали півплощин  $S_k$  ( $k=1,2$ ) однаковими. Тоді величини, відзначені індексами  $k=1$  і  $k=2$ , збігаються. Беручи до відома, що  $z = z^1 = x$  при  $y=0$ , формулу (20.1) з урахуванням подання (23.1) перепишемо

$$\left\{ \psi_1^+(x) - \psi_1^-(x), \overline{\psi_1^-(x)} - \overline{\psi_1^+(x)} \right\} \mathbf{M}^{11} = -\mathbf{f}(x). \quad (23.2)$$

За допомогою функції  $\mathbf{F}(z^k) = \Psi_{11}^*(z^k) \mathbf{K} \mathbf{M}^{11}$ , де  $\Psi_{kj}^*(z^k) = \{\psi_k(z^k), \overline{\psi_j(z^k)}\}$ , залежність (23.2) перепишеться

$$\mathbf{F}^+(x) - \mathbf{F}^-(x) = -\mathbf{f}(x)$$

і розв'язок цієї задачі спряження, що зникає на нескінченності, можна подати у вигляді

$$\mathbf{F}(z^1) = \frac{i}{2} \mathbf{t}(z^1).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^*(z^1) &= \frac{i}{2} \mathbf{t}(z^1) [\mathbf{M}^{11}]^{-1} \mathbf{K}, \quad \mathbf{t}(z^1) = \sum_{n=0}^N \mathbf{t}^n(z^1), \\ \{\mathbf{t}^n(z), t_r^n(z)\} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_n} \frac{\{\mathbf{f}(t), f_r(t)\} dt}{t-z}. \end{aligned} \quad (23.3)$$

Перша компонента вектора  $\Psi_{11}^*(z^1)$  за його означенням є шуканою функцією  $\psi_1(z^1)$ , тому

$$\begin{aligned} \psi_1(z^1) &= \frac{i}{2} \sum_{r=1}^2 t_1(z^1) [\mathbf{M}^{11}]_{r,1}^{-1} = -\frac{1}{2i} \mathbf{t}(z^1) \mathbf{m}_{11} = -\frac{i}{4} t_3^*(z^1), \quad t_3^*(z^1) = \sum_{n=0}^N t_3^{*n}(z^1), \\ \{t_3^{*n}(z), t_r^n(z)\} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_n} \frac{\{f_{3n}^*(t), f_{rn}(t)\} dt}{t-z}, \quad f_{3n}^*(t) = f_{3n}(t) - f_{6n}(t)/r^1, \end{aligned} \quad (23.4)$$

$$\mathbf{m}_{kj} = \|-r_j, 1\|^T / (r_k + r_j), \quad f_{rn}(t) \sim f_r(t) \quad (t \in L'_n);$$

$\mathbf{m}_{kj}$  – перший стовпчик матриці  $[\mathbf{M}^{kj}]^{-1} \mathbf{K}$ ; символ  $\tau$  означає операцію транспонування матриці;  $[\mathbf{A}]^{-1}$  – обернення матриці  $\mathbf{A}$ .

Вважаючи

$$f_r(t) = f_r \delta(t) \quad (r=3,6), \quad f_3 \sim Q, \quad f_6 \sim b,$$

з (23.4) маємо

$$\psi_1(z^1) = A_1/z^1, \quad A_1 = i f_3^*/4\pi, \quad f_3^* = f_3 - f_6/r^1$$

– розв'язок для зосередженої сили  $Q$  та гвинтової дислокації зі складовою  $b$  вектора Бюргерса у початку координат. Якщо вважати, що ці чинники діють у точці  $z_*$ , то

$$\psi_1(z^1) = G_1(z^1), \quad G_k(z) = -A_1 P_{0k}(0, z), \quad P_{0k}(0, z) = (z_*^k - z)^{-1}, \quad z_*^k = x_* + s^k y_*. \quad (23.5)$$

Таким чином, з урахуванням (23.5) за наявності лінії стрибка  $L'$ , дії поля напружень на нескінченності, сили  $f_3$  і дислокації  $f_6$  у точці  $z_*$  однорідного анізотропного середовища вектор стану набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma^0(z) + \Psi_{11}^0(z^1) \mathbf{M}^{11} = \sigma^0(z) + \left\{ \psi_1(z^1), \overline{\psi_1(z^1)} \right\} \mathbf{M}^{11} = \\ &= \sigma^0(z) + \operatorname{Re} \left[ \{-1, r^1\} t_3^*(z^1) / (2i) \right] = \sigma^0(z) + \operatorname{Im} \left[ \{-1, r^1\} t_3^*(z^1) / 2 \right], \end{aligned} \quad (23.6)$$

де  $\sigma^0(z)$  визначає вектор стану за відсутності лінії стрибка:

$$\begin{aligned}\sigma^0(z) &= \sigma^\infty + \mathbf{G}_{11}^0(z^1) \mathbf{M}^{11}, \\ \mathbf{G}_{kj}^0(z^k) &= \left\{ G_k(z^k), \overline{G_j(z^k)} \right\}.\end{aligned}\quad (23.7)$$

За дії напружень на нескінченності та однієї сили й дислокації у точці  $z_*$

$$\sigma^0(z) = \sigma^\infty + \operatorname{Re} \left[ \frac{\{-1, r^1\}}{2\pi i (z_*^1 - z^1)} f_3^* \right] = \sigma^\infty + \operatorname{Im} \left[ \frac{\{-1, r^1\}}{2\pi (z_*^1 - z^1)} f_3^* \right]. \quad (23.8)$$

На основі цих співвідношень легко обчислити

$$\boldsymbol{\tau}(z) = \boldsymbol{\tau}^0(z) + \operatorname{Re} \left[ \{-1, s^1\} t_3^*(z^1) / (2i) \right] = \boldsymbol{\tau}^0(z) + \operatorname{Im} \left[ \{-1, s^1\} t_3^*(z^1) / 2 \right], \quad (23.9)$$

де  $\boldsymbol{\tau}^0(z)$  – вектор напруження за відсутності лінії стрибка

$$\boldsymbol{\tau}^0(z) = \boldsymbol{\tau}^\infty + \operatorname{Re} \left[ \frac{\{-1, s^1\}}{2\pi i (z_*^1 - z^1)} f_3^* \right] = \boldsymbol{\tau}^\infty + \operatorname{Im} \left[ \frac{\{-1, s^1\}}{2\pi (z_*^1 - z^1)} f_3^* \right], \quad \boldsymbol{\tau}^\infty = \{\tau, \tau_1\}. \quad (23.10)$$

Таким чином

$$\begin{aligned}\sigma_{yz} - \sigma_{yz}^0 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ t_3(z^1) - t_6(z^1) / r^1 \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ i \left[ t_3(z^1) - t_6(z^1) / r^1 \right] \right\}, \\ \sigma_{xz} - \sigma_{xz}^0 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ s^1 \left\{ t_3(z^1) - t_6(z^1) / r^1 \right\} \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ i s^1 \left[ t_3(z^1) - t_6(z^1) / r^1 \right] \right\}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w^0}{\partial x} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ r^1 t_3(z^1) - t_6(z^1) \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ i \left[ r^1 t_3(z^1) - t_6(z^1) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (23.11)$$

За формулами Сохоцького – Племея [635, 112]

$$\{\mathbf{t}(z)\}^\pm = \pm i \mathbf{f}(x) + \mathbf{t}(x), \quad \{\overline{\mathbf{t}(z)}\}^\pm = \mp i \overline{\mathbf{f}(x)} + \overline{\mathbf{t}(x)} \quad (23.12)$$

з виразу (23.6) отримаємо

$$\boldsymbol{\sigma}^\pm(x) = \boldsymbol{\sigma}^0(x) \mp \frac{1}{2} \mathbf{f}(x) - \left\{ t_6(x), (r^1)^2 t_3(x) \right\} / \left( 2|r^1| \right) \quad (23.13)$$

і тоді

$$\left\| \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau}^\pm(x) - \boldsymbol{\tau}^0(x) \\ \boldsymbol{\sigma}^\pm(x) - \boldsymbol{\sigma}^0(x) \end{array} \right\| = \operatorname{Re} \left\| \begin{array}{l} \{-1, s^1\} \\ \{-1, r^1\} \end{array} \left[ \pm f_3^*(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_3^*(t) dt}{t-x} \right] \right\|. \quad (23.14)$$

## 23.2. Включення на межі поділу матеріалів

Звернемося тепер до загальнішого випадку, коли площина  $y = 0$  поділяє різні анізотропні матеріали. На основі подання (23.6) вектор стану у кожній з півплощин подамо у вигляді

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \left[ \mathbf{G}_{11}^0(z^k) + \mathbf{G}_{22}^0(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk} + \boldsymbol{\Psi}_{kk}^0(z^k) \mathbf{M}^{kk} \quad (z \in S_k). \quad (23.15)$$

Тоді умова (20.1) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned}\left\{ \psi_2^+(x), \overline{\psi_2^-(x)} \right\} \mathbf{M}^{22} - \left\{ \psi_1^-(x), \overline{\psi_1^+(x)} \right\} \mathbf{M}^{11} &= -\mathbf{f}(x) + \\ &+ \left[ \mathbf{G}_{11}^0(x) + \mathbf{G}_{22}^0(x) \right] \left( \mathbf{M}^{11} - \mathbf{M}^{22} \right),\end{aligned}$$

або

$$\mathbf{F}^+(x) - \mathbf{F}^-(x) = -\mathbf{f}(x) + \left[ \mathbf{G}_{11}^0(x) + \mathbf{G}_{22}^0(x) \right] (\mathbf{M}^{11} - \mathbf{M}^{22}), \quad (23.16)$$

де

$$\mathbf{F}(z^k) = \boldsymbol{\Psi}_{kl}^*(z^k) \mathbf{K} \mathbf{M}^{kl} = \left\{ -\psi_k(z^k) + \bar{\psi}_l(z^k), r^k \psi_k(z^k) + r^k \bar{\psi}_l(z^k) \right\} \quad (23.17)$$

$$(z \in S_k; k=1,2; l=3-k).$$

Розв'язок задачі спряження (23.16), що зникає на нескінченності, запишеться

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(z^k) &= -\frac{\mathbf{t}(z^k)}{2i} + \mathbf{G}_{lk}^*(z^k) \mathbf{K} (\mathbf{M}^{lk} - \mathbf{M}^{kl}) = \\ &= -\frac{\mathbf{t}(z^k)}{2i} + \left\{ 0, (r^l - r^k) [G_l(z^k) - \bar{G}_k(z^k)] \right\}, \quad (23.18) \\ \mathbf{G}_{kj}^*(z) &= \{ G_k(z), \bar{G}_j(z) \} \quad (k=1,2; l=3-k). \end{aligned}$$

На основі (23.17)

$$\boldsymbol{\Psi}_{kl}^*(z^k) = \mathbf{F}(z^k) [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{kl}^*(z^k) &= -\frac{1}{2i} \mathbf{t}(z^k) [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} + \mathbf{G}_{lk}^*(z^k) \left[ \mathbf{M}^{lk} \mathbf{R}^{lk} [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} - \mathbf{E} \right], \quad (23.19) \\ \mathbf{R}^{kl} &= [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} \mathbf{M}^{kl} \quad (\bar{\mathbf{R}}^{kl} = -\mathbf{R}^{lk}). \end{aligned}$$

Перша компонента вектора  $\boldsymbol{\Psi}_{kl}^*(z^k)$  за його означенням є шуканою функцією  $\psi_k(z^k)$ :

$$\begin{aligned} \psi_k(z^k) &= \frac{i}{2} \sum_{m=1}^2 t_{3m}(z^k) [\mathbf{M}^{kl}]_{m1}^{-1} + \sum_{m,s,t=1}^2 [\mathbf{G}_{lk}^*(z^k)]_{m1} K_{ms} M_{st}^{lk} [\mathbf{M}^{kl}]_{t1}^{-1} - G_k(z^k) \quad (23.20) \\ &\quad (z^k \in S_k, k=1,2). \end{aligned}$$

Тут враховано, що домножування довільної матриці правобіч на матрицю  $\mathbf{K}$  не змінює її першого стовпчика; перший індекс унизу визначає номер рядка відповідної матриці, другий – номер її стовпчика.

З урахуванням співвідношень (23.15), (23.20)

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma^0(z) + \frac{1}{2i} \left\{ -\mathbf{t}(z^k) \mathbf{m}_{kl}, \overline{-\mathbf{t}(z^k) \mathbf{m}_{kl}} \right\} \mathbf{M}^{kk} = \\ &= \sigma^0(z) - \frac{i}{2(r^k + r^l)} \left\{ r^l t_3(z^k) - t_6(z^k), \overline{r^l t_3(z^k) - t_6(z^k)} \right\} \mathbf{M}^{kk}, \quad (23.21) \end{aligned}$$

де однорідний розв'язок, що відповідає відсутності лінії стрибка, дорівнює

$$\begin{aligned} \sigma^0(z) &\equiv \left\{ \sigma_{yz}^0(z), \partial w^0(z)/\partial x \right\} = \sigma^\infty + \left[ \mathbf{G}_{11}^0(z^k) + \mathbf{G}_{22}^0(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk} + \\ &+ \frac{r^k - r^l}{r^k + r^l} \left[ \bar{\mathbf{G}}_{kk}^0(z^k) - \mathbf{G}_{ll}^0(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk} \quad (z \in S_k; k=1,2; l=3-k). \quad (23.22) \end{aligned}$$

Граничні значення вектора стану на лінії  $L$  дорівнюють

$$\sigma^\pm(x) = \sigma^0(x) \mp \frac{1}{r^1 + r^2} \left\{ r^l f_3(x), r^k f_6(x) \right\} - \frac{i}{r^1 + r^2} \left\{ t_6(x), r^1 r^2 t_3(x) \right\}, \quad k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (23.23)$$

Тут верхньому знаку відповідають значення  $k = 2, l = 1$ , а нижньому –  $k = 1, l = 2$ . Величину  $\sigma^0(x)$  можна обчислити з використанням формули (23.22) підстановкою  $z = z^k = x$ , а можна записати

$$\sigma^0(x) = \sigma^\infty + \mathbf{G}_{12}^0(x)\mathbf{Q}^{12} + \mathbf{G}_{21}^0(x)\mathbf{Q}^{21},$$

$$\mathbf{Q}^{kl} = \mathbf{M}^{kl}(\mathbf{E} + \mathbf{R}^{kl}\mathbf{R}^{lk}) = -\frac{2}{r^1 + r^2} \begin{vmatrix} r^k & -r^1 r^2 \\ r^l & r^1 r^2 \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2; l = 3 - k). \quad (23.22^1)$$

Якщо на нескінченності діють напруження, то подібно до того, як це було зроблено для випадку ізотропного матеріалу з умови ідеального механічного контакту на нескінченності та закону Гука

$$\sigma_{yz1}^\infty = \sigma_{yz2}^\infty = \tau, \quad w_1^\infty = w_2^\infty,$$

звідки

$$\frac{\partial w_1^\infty}{\partial x} = \frac{\partial w_2^\infty}{\partial x}; \quad \gamma_{xzk}^\infty \equiv \frac{\partial w_k^\infty}{\partial x} = a_{45k}\sigma_{yzk}^\infty + a_{55k}\sigma_{xzk}^\infty,$$

що дає умову

$$a_{451}\tau + a_{551}\tau_1 = a_{452}\tau + a_{552}\tau_2, \quad (22.24)$$

яка зв'язує між собою пружні сталі та напруження на нескінченності. Якщо кусково-однорідний матеріал розділений двома півбезмежними розрізами, то виконання цієї умови не обов'язкове.

В однорідному випадку, коли  $s^1 = s^2, r^1 = r^2$  формули (23.21) – (23.23) з урахуванням кількості розглядуваних сил приводять до виразів (23.6), (23.5), (23.7).

Для двох механічно різних ізотропних півпросторів

$$a_{45k} = 0, \quad a_{44k} = a_{55k} = \frac{1}{G_k},$$

$$r^k = \frac{i}{G_k}, \quad s^k = i, \quad z^k = x + iy = z \in S_k$$

і функція  $\psi_1(z^k) = -0,5\omega'(z)$ . Вектор стану у цьому випадку має сенс (див. (20.4)

$$\sigma(z) = \left\{ \operatorname{Re} \omega'(z), \frac{\operatorname{Im} \omega'(z)}{G_k} \right\}, \quad \sigma^0(z) = \left\{ \operatorname{Re} c_k(z), \frac{\operatorname{Im} c_k(z)}{G_k} \right\}.$$

Умова (22.24) у цьому випадку зводиться до (20.5).

### 23.3. Асимптотичні вирази

Якщо функція стрибка  $f_r(x)$  ( $r = 3, 6$ ) в однорідному матеріалі біля кінців  $a_n^\pm$  лінії  $L'$  має кореневу особливість, то введення там локальної полярної системи координат (рис. 23.2)

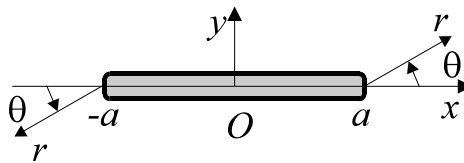


Рис. 23.2. Локальна полярна система координат біля вістря включення

$$z = a_n^\pm \pm \tilde{z}, \quad z^1 = a_n^\pm \pm \tilde{z}^1, \quad \tilde{z} = re^{i\theta}, \quad \tilde{z}^1 = r\omega_1 = r(\cos\theta + s^1 \sin\theta) \quad (23.25)$$

з урахуванням залежностей

$$\begin{aligned} t_r^n(z^1) &= \mp \left[ p_{rn}^\pm (r\omega_1)^{-1/2} - q_{rn}^\pm + O(r^{1/2}) \right], \quad t_r^n(z^1) = \frac{1}{2} p_{rn}^\pm (r\omega_1)^{-3/2} + O(r^{-1/2}), \\ \int t_r^n(z^1) dz &= \left[ -2p_{rn}^\pm (r\omega_1)^{1/2} \pm q_{rn}^\pm z^1 + O(r^{3/2}) \right], \\ q_{rn}^\pm &\equiv \pm 2n_{rn}^\pm = \pm \lim_{x \rightarrow a_n^\pm \mp 0} t_{rn}(x), \quad p_{rn}^\pm = \lim_{s_n \rightarrow 0 (\theta=0)} \left[ \sqrt{s_n} f_{rn}(x) \right] \end{aligned}$$

аналогічно до того, як це зроблено в ізотропному випадку у пп. 18.3, 20.6, дає можливість отримати залежність

$$\begin{aligned} \left\| \begin{aligned} \sigma_{yz}(z) - \sigma_{yz}^0(z) \\ \sigma_{xz}(z) - \sigma_{xz}^0(z) \end{aligned} \right\| &= \frac{K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \lambda^1 \omega_1^{-1/2} \right\} - \frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \lambda^1 \omega_1^{-1/2} \right\} \mp \\ &\mp \frac{1}{2|r^1|} \left\| -|r^1| s_2^1 q_{3n}^\pm - s_1^1 q_{6n}^\pm \right\| + O(r^{1/2}), \quad \lambda^n = \left\| \frac{1}{-s^n} \right\|, \quad s^1 = s_1^1 + is_2^1, \\ w(z) - w^0(z) &= \pm |r^1| \sqrt{2r/\pi} \left( K_{3,1}^n \operatorname{Im} \omega_1^{1/2} + K_{3,2}^n \operatorname{Re} \omega_1^{1/2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ \left( r^l q_{3n}^\pm - q_{6n}^\pm \right) \left( r\omega_1 \pm a_n^\pm \right) \right] + O(r^{3/2}), \end{aligned} \quad (23.26)$$

де узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень

$$K_{3,2}^n - iK_{3,1}^n = \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ p_3^\pm + \frac{ip_6^\pm}{|r^1|} \right] = \mp \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \left[ \varphi_3(a_n^\pm) + i \frac{\varphi_6(a_n^\pm)}{|r^1|} \right], \quad 2a = a_n^+ - a_n^-. \quad (23.27)$$

Тут враховано, що якщо для  $n$ -го включення

$$f_r(x) = \varphi_r(x) \left[ (a_n^+ - x)(x - a_n^-) \right]^{-1/2},$$

то в околі його торців

$$f_r(x) = \frac{\varphi_r(a_n^\pm)}{\sqrt{2as_n}}$$

і тому

$$p_r^\pm = \frac{\varphi_r(a_n^\pm)}{\sqrt{2a}}.$$

У полярній системі координат

$$\sigma_{\theta z} + i\sigma_{rz} = \exp(i\varphi) (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}).$$

Тому, взявши до відома, що  $\varphi = \theta$  біля краю  $a_n^+$  включення та  $\varphi = \theta + \pi$  біля краю  $a_n^-$  включення, отримуємо

$$\sigma_{\theta z} + i\sigma_{rz} = \pm \exp(i\theta) (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz})$$

і тому остаточно

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{array}{l} \sigma_{rz}(z) - \sigma_{rz}^0(z) \\ \sigma_{\theta z}(z) - \sigma_{\theta z}^0(z) \end{array} \right\| = \\
& = \frac{\pm K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\| \frac{(\sin \theta + s^1 \cos \theta) \omega_1^{-1/2}}{\omega_1^{1/2}} \right\| \mp \frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\| \frac{(\sin \theta + s^1 \cos \theta) \omega_1^{-1/2}}{\omega_1^{1/2}} \right\| + \\
& + \frac{1}{2|r^1|} \left\| \begin{array}{l} -q_{6n}^\pm \sin \theta + (|r^1| s_2^1 q_{3n}^\pm + s_1^1 q_{6n}^\pm) \cos \theta \\ -(|r^1| s_2^1 q_{3n}^\pm + s_1^1 q_{6n}^\pm) \sin \theta - q_{6n}^\pm \cos \theta \end{array} \right\| + O(r^{1/2}).
\end{aligned} \quad (23.28)$$

У формулах (23.26) – (23.28) верхній знак вибирається під час розгляду правого краю  $a_n^+$  лінії  $L'_n$ , нижній – під час аналізу поблизу її лівого  $a_n^-$  краю. У випадку ізотропії з цих виразів випливають залежності (5.2) – (5.5) праці [951] та (20.22).

Під час розгляду одного включення (лінія  $L'$  складається з одного фрагменту  $L'_1$ ) індекс  $n$  можна з позначень відкинути.

Одночленні асимптотичні вирази роботи [68] збігаються з головною частиною (23.26).

#### 23.4. Інтегральні рівняння

Підставляючи (23.23) в умови взаємодії (15.12), одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\left\{ t_6(x), r^1 r^2 t_3(x) \right\} + \lambda_1 \left\{ f_3(t), -f_6(x) \right\} + \mathbf{s}_n \Lambda_1 = \mathbf{F}(x) \quad (x \in L'_n), \quad (23.29)$$

де

$$\lambda_1 = \frac{r^1 - r^2}{2i}, \quad \Lambda_1 = \Lambda \frac{r^1 + r^2}{2ih}, \quad \mathbf{s}_n = \int_{a_n}^x \mathbf{f}(t) dt,$$

$$\mathbf{F}(x) \equiv \left\{ F_6(x), r^1 r^2 F_3(x) \right\} = \left( |r^1| + |r^2| \right) \left( \sigma^0(x) - \mathbf{N}\Lambda \right).$$

Додаткові умови при  $Q=0$  (до включення не прикладене окреме навантаження і переміщення однозначні під час обходу навколо кожного включення) еквівалентні (20.24).

**Тріщина.** Для тунельної тріщини на межі поділу середовищ можна вважати  $a_{44B} = a_{55B} = \infty$  і з рівняння (23.29)

$$\begin{aligned}
f_3(x) = 0, \quad t_6(x) = q_6 \sigma_1^0(x) &\equiv q_6 \sigma_{yz}^0(x), \quad q_6 = |r^1| + |r^2| \quad (x \in L'_n), \\
q_{3n}^\pm = \pm 2n_{3n}^\pm = 0, \quad q_{6n}^\pm = \pm 2n_{6n}^\pm &= \pm q_6 \sigma_{yz}^0(a_n^\pm).
\end{aligned} \quad (23.30)$$

**Абсолютно жорстка плівка (АЖП).** Якщо  $a_{44B} = a_{55B} = 0$  і  $h = 0$ , то

$$\begin{aligned}
f_6(x) = 0, \quad t_3(x) = q_3 \sigma_2^0(x) &\equiv q_3 \frac{\partial w^0(x)}{\partial x}, \quad q_3 = -\frac{|r^1| + |r^2|}{|r^1 r^2|} \quad (x \in L'_n), \\
q_{6n}^\pm = \pm 2n_{6n}^\pm = 0, \quad q_{3n}^\pm = \pm 2n_{3n}^\pm &= \pm q_3 \frac{\partial w^0(a_n^\pm)}{\partial x}.
\end{aligned} \quad (23.31)$$

Таке ж рівняння дає і плівкова модель при  $a_{44B} = a_{45B} = a_{55B} = 0$ .

**Однорідна матриця.** Рівняння (23.29) при  $\lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda |r^1|/h$  дає



$$\{t_6(x), r^1 r^2 t_3(x)\} + s_n \Lambda_1 = \mathbf{F}(x) \quad (x \in L'_n). \quad (23.32)$$

Зазначимо, що і для тріщини, і абсолютно жорсткої плівки другі члени асимптотичних виразів згідно з формулами (23.30), (23.31) мають конкретний механічний сенс для довільного навантаження тіла і відповідні асимптотики набувають вигляду

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{xz}(z) \end{array} \right\| = \frac{K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \lambda^1 \omega_1^{-1/2} \right\} + \left\| \begin{array}{l} 0 \\ \sigma_{xz}^0(a_n^\pm) + \sigma_{yz}^0(a_n^\pm) \frac{a_{45}}{a_{55}} \end{array} \right\| + O(r^{1/2}) \quad (\text{тріщина}); \quad (23.33)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{xz}(z) \end{array} \right\| = -\frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \lambda^1 \omega_1^{-1/2} \right\} + \left\| \begin{array}{l} 1 \\ -a_{45}/a_{55} \end{array} \right\| \sigma_{yz}^0(a_n^\pm) + O(r^{1/2}) \quad (\text{АЖП}).$$

Це означає, зокрема, що біля кінців абсолютно жорсткої плівки другі члени асимптотик обох складових тензора напружень не залежать від локального напруження  $\sigma_{yz}^0(a_n^\pm)$ . Якщо таке включення є у однорідному полі напружень на нескінченності, то

$$w(z) = \pm |r^1| \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{3,2}^n \operatorname{Re} \omega_1^{1/2} \pm \tau |r^1| s_2^1 r \sin \theta + O(r^{3/2}). \quad (23.34)$$

Два останні вирази для випадку однорідного поля напружень отримані також у праці [84], в якій вивчалася відповідна задача для жорсткого включення.

Рівняння (23.30), (23.31) мають однакову структуру і для їх розв'язування використовують формулу обернення [636]

$$t(x) = q\psi(x) \quad (x \in L') \Leftrightarrow f(x) = -\frac{q}{\pi X(x)} \int_{L'} \frac{\psi(t) X^+(t) dt}{t-x} + \frac{P_N(x)}{X(x)} \quad (x \in L'),$$

$$X(x) = \prod_{k=0}^N \left[ (x - a_k^-)(x - a_k^+) \right]^{1/2}, \quad P_N(z) = c_N z^N + \dots + c_0.$$

Коефіцієнти полінома  $P_N(z)$  визначаються із залученням додаткових умов, скажімо,

$$\int_{L'} f(t) dt = 0 \quad (n = 0, N).$$

Якщо  $L' = [-a; a]$  і  $\psi(x) = \psi = \text{const}$  або  $\psi(x) = P_{01}(0, x)$ , то з урахуванням вищезгаданої умови маємо відповідно

$$f(x) = \frac{q\psi x}{X_0(x)} \quad \text{або} \quad f(x) = \frac{q}{X_0(x)} \left[ 1 - \frac{X(z_1^*)}{z_1^* - x} \right] \left( X(z) = \sqrt{z^2 - a^2}, \quad X_0(z) = \sqrt{a^2 - z^2} \right).$$

### 23.5. Система викривлених включень в однорідному масиві

#### Основні залежності

Розглянемо систему з  $N+1$  включень в однорідному анізотропному середовищі з пружними сталими  $a_{44} \sim a_{440}$ ,  $a_{45} \sim a_{450}$ ,  $a_{55} \sim a_{550}$ . Пружні сталі у локальній системі координат  $x_n O_n y_n$ , пов'язаній з  $n$ -им включенням, дорівнюють

$$\begin{aligned}
a_{44n} &\equiv a_{44}(\alpha_n) = a_{44} \cos^2 \alpha_n - a_{45} \sin 2\alpha_n + a_{55} \sin^2 \alpha_n, \\
a_{45n} &\equiv a_{45}(\alpha_n) = \frac{1}{2}(a_{44} - a_{55}) \sin 2\alpha_n + a_{45} \cos 2\alpha_n, \\
a_{55n} &\equiv a_{55}(\alpha_n) = a_{44} \sin^2 \alpha_n + a_{45} \sin 2\alpha_n + a_{55} \cos^2 \alpha_n,
\end{aligned} \tag{23.35}$$

причому

$$r^n = \sqrt{a_{45n}^2 - a_{44n}a_{55n}} = \sqrt{a_{450}^2 - a_{440}a_{550}} = r^0,$$

тобто, параметр  $r^n$  не залежить від вибору системи координат, а разом з тим і матриця  $\mathbf{M}^{00}$  під час повертання системи координат не змінюється.

Позначивши відповідні величини у системі координат  $x_n O_n y_n$  через

$$\sigma_n(z) = \left\{ \sigma_{yzn}, \partial w / \partial x_n \right\}, \quad \tau_n(z) = \left\{ \sigma_{yzn}, \sigma_{xzn} \right\},$$

та враховуючи, що  $\sigma_{yzn} + i\sigma_{xzn} = (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}) \exp(i\alpha_n)$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
\tau_0(z) &= \sigma_0(z) \mathbf{A}(\alpha_0), \quad \tau_n(z) = \tau_0(z) \mathbf{a}(\alpha_n), \quad \sigma_n(z) = \tau_n(z) \mathbf{A}^{-1}(\alpha_n), \\
\mathbf{A}(\alpha_n) &= \begin{vmatrix} 1 & -a_{45n}/a_{55n} \\ 0 & 1/a_{55n} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1}(\alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_{45n} \\ 0 & a_{55n} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{23.36}$$

На основі (23.6), (23.35) для випадку дії сил та дислокацій

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{matrix} \tau_0(z) \\ \sigma_0(z) \end{matrix} \right\| &= \operatorname{Re} \left\{ \begin{vmatrix} -1 & s^0 \\ -1 & r^0 \end{vmatrix} \frac{f_3^*}{2\pi i (z_*^0 - z^0)} \right\}, \quad \left\| \begin{matrix} \tau_n(z) \\ \sigma_n(z) \end{matrix} \right\| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{K}(\alpha_n) f_3^* a_0(\alpha_n)}{2\pi i (z_*^0 - z^0)} \right\}, \\
\mathbf{K}(\alpha) &= \begin{vmatrix} -1 & b_0(\alpha)/a_0(\alpha) \\ -1 & r^0 \end{vmatrix}, \quad a_n(\alpha) = \cos \alpha + s^n \sin \alpha, \quad b_n(\alpha) = -\sin \alpha + s^n \cos \alpha,
\end{aligned} \tag{23.37}$$

$$z^0 = x + s^0 y, \quad z_*^0 = x_* + s^0 y_*, \quad f_3^* = f_3 - f_6 / r^0.$$

Вирази (23.37), що визначають вектори стану і напружень у довільній системі координат від дії у точці  $z_*$  сили  $f_3$  та гвинтової дислокації  $f_6$ , є фундаментальним розв'язком задачі тонкостінних включень у анізотропному середовищі. Виходячи з механічного сенсу  $f_3^*$  та способу отримання залежності (23.8), можна стверджувати, що у довільній системі координат  $x_m O_m y_m$  з початком у точці  $z_*$  вектор стану  $\sigma_m(z)$  має стрибок  $\{f_3, f_6\} \delta(x_m)$ . Отже, якщо вважати осьову лінію  $L'_m$  (це може бути дуга Ляпунова)  $m$ -го включення ( $m = 1 \dots N+1$ ) лінією стрибка складових вектора стану

$$f_{3m}(s) = \sigma_{nzm}^- - \sigma_{nzm}^+, \quad f_{6m}(s) = \partial w^- / \partial \tau - \partial w^+ / \partial \tau$$

( $n, \tau$  відповідають нормалі до лівого берега  $L'_m$  та її дотичній, що збігається з  $x_m$ ), то з (23.37) та формули згортки матимемо

$$\left\| \begin{matrix} \tau_n(z) \\ \sigma_n(z) \end{matrix} \right\| = \sum_{m=0}^N \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{K}(\alpha_n) a_0(\alpha_n)}{2\pi i} \int_{L'_m} \frac{f_{3m}^*(s) ds}{z_*^0 - z^0} \right\} + \left\| \begin{matrix} \tau_n^0(z) \\ \sigma_n^0(z) \end{matrix} \right\|,$$

де  $\sigma_n^0(z), \tau_n^0(z)$  – однорідний розв'язок у системі  $x_n O_n y_n$ :

$$\sigma_n^0(z) = \sigma^0(z) \mathbf{A}(\alpha_0) \mathbf{a}(\alpha_n) \mathbf{A}^{-1}(\alpha_0), \quad \tau_n^0(z) = \tau^0(z) \mathbf{a}(\alpha_n).$$

З огляду на те, що точка  $z_*$  належить лінії інтегрування і, отже,  $dz_*^0 = a_0(\alpha_m) ds$ , де  $\alpha_m$  – кут між віссю  $x$  та дотичною до  $L'_m$  у точці  $z_*$ , попередній вираз переписеться

$$\left\| \begin{matrix} \tau_n(z) \\ \sigma_n(z) \end{matrix} \right\| = \sum_{m=0}^N \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{K}(\alpha_n) a_0(\alpha_n)}{2\pi i} \int_{L'_m} \frac{f_{3m}^*(z_*) dz_*^0}{a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} + \left\| \begin{matrix} \tau_n^0(z) \\ \sigma_n^0(z) \end{matrix} \right\|. \quad (23.38)$$

Відповідно до формул Сохоцького – Племеля граничні значення відповідних величин у точці  $z$  лінії  $L'_n$  дорівнюють

$$\left\| \begin{matrix} \tau_n^\pm(z) \\ \sigma_n^\pm(z) \end{matrix} \right\| = \sum_{m=0}^N \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{K}(\alpha_n) \left[ \pm f_{3n}^*(z) + \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi i} \int_{L'_m} \frac{f_{3m}^*(s) ds}{z_*^0 - z^0} \right] \right\} + \left\| \begin{matrix} \tau_n^0(z) \\ \sigma_n^0(z) \end{matrix} \right\| \quad (z \in L'_n). \quad (23.39)$$

Тут  $\alpha_n = \alpha(z)$  – кут між віссю  $x$  і дотичною до  $L'_n$  у точці  $z_0$ , що визначає напрям осі  $x_n$ .

Якщо включення прямолінійні (плоскі стрічки), то зручно  $x_m$  спрямувати уздовж лінії  $L'_m$ , помістивши точку  $O_m$  в  $z_{O_m} \in L'_m$ . Тоді

$$z^0 = x_m a_0(\alpha_m) + y_m b_0(\alpha_m) + z_{0m}^0, \quad z_*^0 = x_{*m} a_0(\alpha_m) + z_{0m}^0$$

і тому у виразах (23.38) та (23.39) підінтегральний вираз часто зручніше замінити на інший:

$$\frac{f_{3m}^*(s) ds}{z_*^0 - z^0} = \frac{f_{3m}^*(x_{*m}) dx_{*m}}{x_{*m} a_0(\alpha_m) + z_{0m}^0 - z^0} \sim \frac{f_{3m}^*(t) dt}{t a_0(\alpha_m) - x_m a_0(\alpha_m) - y_m b_0(\alpha_m)}. \quad (23.40)$$

В ізотропному випадку

$$r^0 = \frac{i}{G}, \quad s^0 = i, \quad a_0(\alpha_n) = \exp(i\alpha_n), \quad b_0(\alpha_n) = i \exp(i\alpha_n),$$

$$z_*^0 - z^0 = z_* - z, \quad f_{3m}^* = f_{3m} + iGf_{6m}$$

і вираз (23.38), зокрема, дає

$$\tau_n(z) = \sum_{m=0}^N \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_m} \frac{\{-1, i\} \exp(i\alpha_n) f_{3m}^*(s) ds}{z_* - z} \right\} + \tau_n^0(z) \quad (z_* = z_*(s) \in L'_m). \quad (23.41)$$

Підставляючи вирази (23.39) в умови рівноваги, отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка.

Другий вираз у (23.37) можна отримати також і без використання фундаментального розв'язку та механічної суті функцій стрибка. Для цього спершу розглянемо систему  $N+1$  прямолінійного включень. Нехай серединна лінія  $L'_n$   $n$ -го включення належить осі  $L'_n \equiv x_n$  локальної системи координат  $x_n O_n y_n$ , що визначає комплексну змінну  $z_n = x_n + iy_n$ . Координати точки  $O_n$  характеризуються значеннями  $z_0 = z_{0n}$ , вісь  $x_n$  утворює з віссю  $x_0$  кут  $\alpha_0$  ( $z_{00} = 0, \alpha_0 = 0$ ). Зовнішнє навантаження задане однорідним розв'язком  $\sigma^0(z_0)$ . На основі (23.35) та співвідношення  $r^n = r^0$  можна отримати, що

$$A_n(\alpha_n) \equiv \cos \alpha_n - s^n \sin \alpha_n = 1/a_0(\alpha_n), \quad B_n(\alpha_n) \equiv \sin \alpha_n + s^n \cos \alpha_n = s^0/a_0(\alpha_n). \quad (23.42)$$

Для одного прямолінійного включення уздовж  $L'_m$ , що характеризується стрибком

$$f_{3m}^*(x_m) = f_{3m}(x_m) - f_{6m}(x_m)/r^m = f_{3m}(x_m) - f_{6m}(x_m)/r^0,$$

відповідно до (23.6) та (23.9)

$$\begin{aligned}\sigma_m(z_m) &= \Psi_{mm}^0(z_m^m) \mathbf{M}^{mm} = \left\{ \psi_m(z_m^m), \overline{\psi_m(z_m^m)} \right\} \mathbf{M}^{mm}, \\ \psi_m(z_m^m) &= -\frac{i}{4} \left[ t_{3m}^m(z_m^m) - t_{6m}^m(z_m^m) / r^0 \right] \equiv -\frac{i}{4} t_{3m}^{*m}(z_m^m).\end{aligned}\quad (23.43)$$

Позначимо через  $\sigma_n^0(z_n)$ ,  $\sigma_{mn}(z_n)$  вирази для  $\sigma_n^0(z_0)$ ,  $\sigma_m(z_m)$  у відповідній системі координат. За допомогою залежностей

$\tau_m(z_m) = \sigma_m(z_m) \mathbf{A}(\alpha_m)$ ,  $\sigma_m(z_m) = \tau_m(z_m) \mathbf{A}^{-1}(\alpha_m)$ ,  $\tau_n = \tau_m \alpha(\alpha_{mn})$ ,  $\alpha_{mn} = \alpha_m - \alpha_n$  отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma_{mn}(z_n) &= \sigma_m(z_{mn}) \Delta^{mn}, \quad \sigma_n^0(z_n) = \sigma^0(z_{0n}) \Delta^{0n} \\ \Delta^{mn} &= \mathbf{A}(\alpha_m) \alpha(\alpha_{mn}) \mathbf{A}^{-1}(\alpha_n), \quad z_{mn} = (z_0 - z_{0m}) \exp(-i\alpha_m), \quad z_0 = z_n \exp(i\alpha_n) + z_{0n}.\end{aligned}\quad (23.44)$$

Тут  $z_{mn}$  – координата точки  $z_m$  у  $n$ -ій системі координат (у праці [951] вона позначена  $z_m^n$ ).

Тепер на основі принципу суперпозиції вектори  $\sigma_n(z_n)$ ,  $\tau_n(z_n)$  дорівнюватимуть

$$\begin{aligned}\sigma_n(z_n) &= \sum_{m=0}^N \sigma_{mn}(z_n) + \sigma_n^0(z_n) = \sum_{m=0}^N \Psi_{mm}^0(z_{mn}^m) \mathbf{C}(\alpha_m, \alpha_n) + \sigma_n^0(z_n), \\ \tau_n(z_n) &= \sum_{m=0}^N \Psi_{mm}^0(z_{mn}^m) \mathbf{B}(\alpha_m, \alpha_n) + \tau_n^0(z_n),\end{aligned}\quad (23.45)$$

причому

$$\sigma_m(z_{mn}) = \Psi_{mn}^0(z_{mn}^m) \mathbf{M}^{mm} = \left\{ \psi_m(z_{mn}^m), \overline{\psi_m(z_{mn}^m)} \right\} \mathbf{M}^{mm}, \quad z_{mn}^m = x_{mn} + s^1 y_{mn},$$

$$\mathbf{B}(\alpha_m, \alpha_n) = \mathbf{M}^{mm} \mathbf{A}(\alpha_m) \alpha(\alpha_{mn}), \quad \mathbf{C}(\alpha_m, \alpha_n) = \mathbf{B}(\alpha_m, \alpha_n) \mathbf{A}^{-1}(\alpha_n).$$

Коефіцієнти матриць  $\mathbf{B}(\alpha_m, \alpha_n)$ ,  $\mathbf{C}(\alpha_m, \alpha_n)$  відповідно дорівнюють

$$B_{11} = \overline{B_{21}} = -A_m(\alpha_{mn}), \quad B_{12} = \overline{B_{22}} = B_m(\alpha_{mn}),$$

$$C_{11} = \overline{C_{21}} = B_{11}, \quad C_{12} = \overline{C_{22}} = B_{11} a_{45n} + B_{12} a_{55n}.$$

Таким чином

$$\left\| \begin{array}{l} \tau_n(z_n) - \tau_n^0(z_n) \\ \sigma_n(z_n) - \sigma_n^0(z_n) \end{array} \right\| = \sum_{m=0}^N \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ C_{11} & C_{12} \end{array} \right\| \frac{f_{3m}^*(s) ds}{s - z_{mn}^m} \right\}.$$

### Викривлена тріщина в однорідному середовищі

Для тріщини із заданими на її берегах дотичними напруженнями  $\tau_n^\pm$  умови взаємодії можна записати  $\sigma_{nzn}^\pm = \tau_n^\pm$  і тоді маємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь

$$\mp f_{3n}(z) - \operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi} \int_{L'_m} \frac{f_{3m}^*(z_*) dz_*^0}{a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} = \tau_n^\pm - \sigma_{nzn}^0(z) \quad (z \in L'_n; n = \overline{0, N}). \quad (23.46)$$

Різниця та сума цих рівнянь дають вираз для однієї функції стрибка  $f_{3n}(z) = \tau_n^- - \tau_n^+$  та рівняння для визначення другої –

$$\operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi} \int_{L'_m} \frac{f_{6m}(z_*) dz_*^0}{r^0 a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} = \frac{1}{2} (\tau_n^+ + \tau_n^-) - \sigma_{nzn}^0(z) \quad (z \in L'_n; n = \overline{0, N}).$$

Якщо навантаження берегів ідентичне ( $\tau_n^- = \tau_n^+$ ), то маємо  $f_{3n}(z) = 0$  та рівняння

$$\operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi} \int_{L'_m} \frac{f_{6m}(z_*) dz_*^0}{r^0 a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} = \tau_n^+ - \sigma_{nzn}^0(z) \quad (z \in L'_n; n = \overline{0, N}). \quad (23.47)$$

Для одної прямолинійної щілини завдовжки (завширшки)  $2a$  під кутом  $\alpha$  у полі однорідних напружень на нескінченності  $\alpha_n = \alpha_m = \alpha$  і з попереднього виразу

$$\operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{f_6(z_*) dz_*^0}{r^0 (z_*^0 - z^0)} \right\} = -\sigma_{nzn}^0, \quad \sigma_{nzn}^0 = \tau \cos \alpha - \tau_1 \sin \alpha \quad (z \in L'_0) \quad (23.48)$$

або з урахуванням того, що

$$dz_*^0 = a_0(\alpha) ds, \quad z_*^0 - z^0 = a_0(\alpha)(s - x)$$

отримуємо рівняння та вирази для УКІН

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{f_6(s) ds}{|r^0|(s-x)} = \sigma_{nzn}^0, \quad f_3(x) = 0, \quad K_{3,1} = \sigma_{nzn}^0 \sqrt{\pi a}, \quad K_{3,2} = 0, \quad (23.49)$$

$$\sigma_{nzn}^0 = \tau \cos \alpha - \tau_1 \sin \alpha \quad (|x| \leq a).$$

### Абсолютно жорстка плівка в однорідному середовищі

Для абсолютно жорсткої плівки з натягом  $w_{0n}^\pm$  на берегах, що дорівнює похідним уздовж дотичної до  $L'_n$  переміщень  $w$  відповідних берегів, умови взаємодії  $\sigma_{2n}^\pm = w_{0n}^{\pm \prime}$  приведе до системи рівнянь

$$\mp f_{6n}(z) + \operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi} \int_{L'_m} \frac{r^0 f_{3m}^*(z_*) dz_*^0}{a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} = w_{0n}^{\pm \prime} - \sigma_{2n}^0(z) \quad (z \in L'_n; n = \overline{0, N}). \quad (23.50)$$

Різниця та сума цих рівнянь дають вираз для однієї функції стрибка  $f_{6n}(z) = w_{0n}^{-\prime} - w_{0n}^{+\prime}$  та рівняння для визначення другої –

$$\operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi} \int_{L'_m} \frac{r^0 f_{3m}(z_*) dz_*^0}{a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} = \frac{1}{2} (w_{0n}^{+\prime} + w_{0n}^{-\prime}) - \sigma_{2n}^0(z) \quad (z \in L'_n; n = \overline{0, N}).$$

Якщо натяги берегів ідентичні ( $w_{0n}^{+\prime} = w_{0n}^{-\prime}$ ), то маємо  $f_{6n}(z) = 0$  та рівняння

$$\operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{a_0(\alpha_n)}{2\pi} \int_{L'_m} \frac{r^0 f_{3m}(z_*) dz_*^0}{a_0(\alpha_m)(z_*^0 - z^0)} \right\} = w_{0n}^{+\prime} - \sigma_{2n}^0(z) \quad (z \in L'_n; n = \overline{0, N}). \quad (23.51)$$

Для одної плоскої абсолютно жорсткої плівки завдовжки (завширшки)  $2a$  під кутом  $\alpha$  у полі однорідних напружень на нескінченності  $\alpha_n = \alpha_m = \alpha$  і з попереднього виразу

$$\operatorname{Im} \sum_{m=0}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L'_0} \frac{r^0 f_3(z^*) dz^*_0}{z^*_0 - z^0} \right\} = -\sigma_{2n}^0, \quad f_6(z) = 0 \quad (z \in L'_0) \quad (23.52)$$

або

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{|r^0| f_3(s) ds}{s-x} &= -\sigma_{2n}^0, \quad f_6(s) = 0 \quad (|x| \leq a), \\ \sigma_{2n}^0 &= \tau(a_{45n} \cos \alpha + a_{55n} \sin \alpha) + \tau_1(a_{55n} \cos \alpha - a_{45n} \sin \alpha) = \\ &= \tau(a_{45} \cos \alpha + a_{55} \sin \alpha) + \tau_1(a_{55} \cos \alpha - a_{45} \sin \alpha). \end{aligned} \quad (23.53)$$

### Асимптотичні формули

Асимптотичні формули (23.26) будуть виконуватися і в околі краю викривленого включення, якщо вісь  $x_n$  системи  $x_n O_n y_n$  спрямувати уздовж дотичної до  $L'_n$  у відповідному кінці лінії і скористатися відповідними значеннями  $s^n$  та  $\omega_n = \cos \theta + s^n \sin \theta$ . Наприклад, вираз для напружень набуде вигляду

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \sigma_{yzn}(z_n) - \sigma_{yzn}^0(z_n) \\ \sigma_{xzn}(z_n) - \sigma_{xzn}^0(z_n) \end{array} \right\| &= \frac{K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \lambda^n \omega_1^{-1/2} \right\} - \frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \lambda^n \omega_1^{-1/2} \right\} \mp \dots, \quad \lambda^n = \left\| \begin{array}{l} 1 \\ -s^n \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Враховуючи, що в основній системі координат

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} \equiv \sigma_{yz0} + i\sigma_{xz0} = (\sigma_{yzn} + i\sigma_{xzn}) \exp(-i\alpha_n),$$

в околі кінця  $n$ -го включення отримаємо

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \sigma_{yzn} - \sigma_{yzn}^0 \\ \sigma_{xzn} - \sigma_{xzn}^0 \end{array} \right\| &= \frac{K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \mu^n \omega_n^{-1/2} \right\} - \frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \mu^n \omega_n^{-1/2} \right\} \mp \\ &\mp \frac{1}{2|r^0|} \operatorname{Re} \left\| \begin{array}{l} q_{6n}^\pm (\cos \alpha_n - s_1^n \sin \alpha_n) - |r^0| s_2^n q_{3n}^\pm \sin \alpha_n \\ -q_{6n}^\pm (\sin \alpha_n + s_1^n \cos \alpha_n) - |r^0| s_2^n q_{3n}^\pm \cos \alpha_n \end{array} \right\| + O(r^{1/2}), \\ \mu^n &= \left\| \begin{array}{l} A_n(\alpha_n) \\ -B_n(\alpha_n) \end{array} \right\|, \quad A_n(\alpha) = \cos \alpha - s^n \sin \alpha, \quad B_n(\alpha) = \sin \alpha + s^n \cos \alpha. \end{aligned}$$

Оскільки з виразу (23.35) випливає

$$B_n(\alpha_n) = \frac{s^0}{a_0(\alpha_n)},$$

то остаточно

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \sigma_{yzn} - \sigma_{yzn}^0 \\ \sigma_{xzn} - \sigma_{xzn}^0 \end{array} \right\| &= \frac{K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \lambda^0 \frac{\omega_n^{-1/2}}{a_0(\alpha_n)} \right\} - \frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \lambda^0 \frac{\omega_n^{-1/2}}{a_0(\alpha_n)} \right\} \mp \\ &\mp \frac{1}{2|r^0|} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{a_0(\alpha_n)} \left\| \begin{array}{l} q_{6n}^\pm - |r^0|^2 q_{3n}^\pm \sin \alpha_n / a_{55n} \\ -q_{6n}^\pm s^0 - |r^0|^2 q_{3n}^\pm \cos \alpha_n / a_{55n} \end{array} \right\| \right\} + O(r^{1/2}). \end{aligned} \quad (23.54)$$

Зазначимо, що на продовженні осьової лінії включення  $\omega_n = 1$ , а на самій осі включення –  $\omega_n = -1$ .

Порівняння результатів цього пункту і праці [1044], де досліджувалася задача викривлених тріщин у анізотропному середовищі, свідчить, що використані тут  $\psi_1(z^0)$  та  $f_3^*$  мають сенс функцій  $\Phi(z_1)$  та  $-2\omega(\mathbf{t})$  праці [1044], якщо взяти також до відома, що  $\alpha_m = \psi - \pi/2$  (є протиріччя між означенням  $\psi$  у тексті згаданої праці та поданим там рисунком). Врахувавши ці зауваги, замінивши  $\tau_n^\pm$  на  $\pm Z_n^\pm$  та відкинувши інші зовнішні силові чинники, зведемо рівняння (23.47) до (2.1), (2.2) [1044]. Внаслідок рівності

$$\lambda_1(\psi) = -\operatorname{Re}\left[s^0/a_0(\alpha_n)\right] \equiv \lambda_{21}^0, \quad \lambda_2(\psi) = -\operatorname{Re}\left[1/a_0(\alpha_n)\right] \quad \text{при } \theta = 0,$$

$K_{3,2}^n = 0$  і без урахування членів порядку  $O(1)$  з виразів (23.49), (23.54) впливають асимптотичні вирази (3.3), (3.4) [1044] для прямолінійного розрізу з точністю до загубленого там знаку "мінус" біля  $\tau_{2,3}$ .

Загалом питання поздовжнього зсуву анізотропного середовища з тріщинами досить детально вивчене у багатьох працях, зокрема [878, 1044, 701]. З'ясовано [701], що у загальному випадку прямолінійної анізотропії задачу для тривимірного середовища не можна розщепити на плоску та антиплоску лише у трьох випадках: 1) коли тіло взагалі не має площини пружної симетрії; 2) коли ця площина існує, але орієнтована під деяким кутом до поздовжньої осі тіла; 3) для тіла з віссю симетрії пружних сталей третього порядку.

Дослідження поля напружень поблизу гострокутних типу астро- і гіпоциклоїдних включень засвідчило, що вони мають кореневу особливість, що характеризується одним КІН [81]. Поширення використаних там методів на пружні включення [68] підтвердило і у цьому випадку існування кореневої особливості, що характеризуються вже двома КІН. Там також було отримано асимптотичні вирази, які збігаються з головною частиною розвинення (23.26).

У граничному випадку однорідного ізотропного матеріалу із асимптотичних залежностей (23.54) впливають вирази (20.22).

### 23.6. Одне включення в однорідній матриці

Для одного включення  $L' = [-a; a]$  в однорідній матриці, коли виконуються залежності

$$r^1 = r^2, \quad q_3 = -\frac{2}{|r^1|}, \quad q_6 = 2|r^1|,$$

розв'язок інтегральних рівнянь (23.32) шукаємо у вигляді рядів (20.29), коли

$$f_r(x) = \left[1 - (x/a)^2\right] \varphi_r(x/a), \quad \varphi_r(t) = \sum_{n=1}^M A_n^r T_n(t) \quad (|t| \leq 1),$$

$$\varphi_r(\pm 1) = \sum_{n=1}^M (\pm 1)^n A_n^r, \quad p_r^\pm = \sqrt{\frac{a}{2}} \sum_{n=1}^M (\pm 1)^n A_n^r, \quad q_r^\pm = \pm 2n_r^\pm = \pm \sum_{n=1}^M (\pm 1)^n n A_n^r. \quad (23.55)$$

#### Дія поля напружень на нескінченності

Для тріщини

$$\begin{aligned}
f_3(x) = 0, \quad t_3(z) = 0, \quad t_6(x) = q_6\tau, \quad f_6(x) = q_6\tau x/X_0(x), \quad X_0(z) = \sqrt{a^2 - z^2}, \\
t_6(z^1) = \tau q_6 \left[ 1 - z^1/X(z^1) \right], \quad \sigma_{yz}(z) = \tau - \operatorname{Re} t_6(z^1) = \tau \operatorname{Re} \left[ z^1/X(z^1) \right], \\
\sigma_{xz}(z) = \operatorname{Re} \left[ s^1 t_6(z^1) \right] / q_6 + \tau_1 = \tau \operatorname{Re} \left[ s^1 \left( 1 - z^1/X(z^1) \right) \right] + \tau_1, \quad X(z) = \sqrt{z^2 - a^2}, \quad (23.56) \\
w(z) = \frac{1}{2} \tau q_6 \operatorname{Im} X(z^1) + w^1 x^1, \quad w^1 = a_{45}\tau + a_{55}\tau_1, \\
K_{3,1} = \tau \sqrt{\pi a}, \quad K_{3,2} = 0, \quad q_3^\pm = \pm 2n_3^\pm = 0, \quad q_6^\pm = \pm 2n_6^\pm = \pm |r^1| \tau.
\end{aligned}$$

Для абсолютно жорсткої плівки

$$\begin{aligned}
f_6(x) = 0, \quad t_6(z) = 0, \quad t_3(x) = q_3 w^1, \quad f_3(x) = q_3 w^1 x / X_0(x), \\
t_3(z^1) = q_3 w^1 \left[ 1 - z^1 / X(z^1) \right], \quad \sigma_{yz}(z) = \frac{1}{2} q_3 w^1 \operatorname{Im} \left[ z^1 / X(z^1) \right] + \tau, \\
\sigma_{xz}(z) = -\tau s_1^1 - \frac{1}{2} q_3 w^1 \operatorname{Im} \left[ s^1 z^1 / X(z^1) \right], \quad (23.57) \\
w(z) = w^1 \operatorname{Re} X(z^1) + \tau |r^1| y^1, \quad w^1 = a_{45}\tau + a_{55}\tau_1, \\
K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = w^1 \sqrt{\pi a} / |r^1|, \quad q_6^\pm = \pm 2n_6^\pm = 0, \quad q_3^\pm = \pm 2n_3^\pm = \mp w^1 / |r^1|.
\end{aligned}$$

Тобто, для тріщини УКІН є такими є самими, як і у випадку ізотропного матеріалу. а для абсолютно жорсткої плівки – вже ні.

### Дія сили і гвинтової дислокації

Якщо у точці  $z_{*1}$  локалізована сила  $f_3 = Q$  і ядро гвинтової дислокації зі складовою вектора Бюргерса  $f_6 = b$ , то згідно з (23.5) – (23.8)

$$\sigma^0(x) = \mathbf{G}_{11} \mathbf{M}^{11} = \left\{ -G_1(x) - \bar{G}_1(x), r^1 G_1(x) - r^1 \bar{G}_1(x) \right\}.$$

Тоді для тріщини

$$\begin{aligned}
f_3(x) = 0, \quad t_3(z) = 0, \quad t_6(x) = \frac{|r^1|}{\pi} \operatorname{Re} \left[ i f_3^* P_{01}(0, x) \right], \quad f_3(x) = \frac{|r^1|}{\pi} \operatorname{Re} G(x), \\
t_6(z^1) = \frac{|r^1|}{2\pi} \left[ F^-(z^1) + \bar{F}^-(z^1) \right], \quad \sigma_{yz}(z) = \frac{\operatorname{Re} t_6(z^1)}{2|r^1|} + \sigma_{yz}^0(z), \\
\sigma_{yz}^0(z) = \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ f_3^* P_{01}(0, z^1) \right], \quad \sigma_{xz}(z) = \frac{\operatorname{Re} \left[ s^1 t_6(z^1) \right]}{2|r^1|} + \sigma_{xz}^0(z), \\
\sigma_{xz}^0(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ f_3^* s^1 P_{01}(0, z^1) \right], \quad K_{3,1} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} Q(\pm a), \quad K_{3,2} = 0;
\end{aligned} \quad (23.58)$$

для абсолютно жорсткої плівки –



$$\begin{aligned}
f_6(x) = 0, \quad t_6(z) = 0, \quad t_3(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ f_3^* P_{01}(0, x) \right], \quad f_3(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} G(x), \\
t_3(z^1) = \frac{i}{2\pi} \left[ F^-(z^1) - \bar{F}^-(z^1) \right], \quad \sigma_{yz}(z) = \frac{\operatorname{Re} \left[ r^1 t_3(z^1) \right]}{2|r^1|} + \sigma_{yz}^0(z), \\
\sigma_{yz}^0(z) = \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ f_3^* P_{01}(0, z^1) \right], \quad \sigma_{xz}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ s^1 t_3(z^1) \right] + \sigma_{xz}^0(z), \\
\sigma_{xz}^0(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ f_3^* s^1 P_{01}(0, z^1) \right], \quad K_{3,2} = \frac{\mp 1}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} Q(\pm a), \quad K_{3,1} = 0,
\end{aligned} \tag{23.59}$$

де

$$\begin{aligned}
F^\pm(z^1) = if_3^* \left[ \frac{1}{X(z^1)} + \frac{1}{z^1 - z_{*1}^1} \left( \frac{X_0(z_{*1}^1)}{X_0(z^1)} \pm 1 \right) \right], \quad Q(z^1) = \frac{f_3^*}{\sqrt{a}} \left[ 1 + \frac{X(z_{*1}^1)}{z^1 - z_{*1}^1} \right], \\
G(x) = \frac{\sqrt{a} Q(x)}{X_0(x)}, \quad X_0(z) = -iX(z), \quad X_0(\bar{z}) = iX(\bar{z}), \quad f_3^* = f_3 - \frac{f_6}{r^1}.
\end{aligned} \tag{23.60}$$

Для півнескінченної тріщини і абсолютно жорсткого включення вирази (23.58), (23.59) збережуть свою силу, тільки слід вважати

$$\xi^1 = z^1 - a, \quad \xi_{*1}^1 = z_{*1}^1 - a$$

та

$$\begin{aligned}
F^\pm(z^1) = \frac{\pm if_3^*}{\sqrt{\xi^1} \left( \sqrt{\xi^1} \mp \sqrt{\xi_{*1}^1} \right)}, \quad \bar{F}^\pm(z^1) = \frac{\mp if_3^*}{\sqrt{\xi^1} \left( \sqrt{\xi^1} \mp \sqrt{\xi_{*1}^1} \right)}, \\
Q(z^1) = -\frac{f_3^* \sqrt{2\xi_{*1}^1}}{\xi^1 - \xi_{*1}^1}, \quad G(x) = \frac{iQ(x)}{\sqrt{\xi^1}}.
\end{aligned} \tag{23.61}$$

Тому для півнескінченної тріщини

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \frac{i}{4\pi\sqrt{\xi^1}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi^1} - \sqrt{\xi_{*1}^1}} + \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi^1} + \sqrt{\xi_{*1}^1}} \right], \quad K_{3,1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi_{*1}^1}}, \\
K_{3,2} = 0, \quad \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz} = \frac{i}{4\pi\sqrt{\xi^1}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi^1} + \sqrt{\xi_{*1}^1}} - \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi^1} + \sqrt{\xi_{*1}^1}} \right];
\end{aligned} \tag{23.62}$$

для півнескінченної абсолютно жорсткої плівки

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = -\frac{i}{4\pi\sqrt{\xi^1}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi^1} - \sqrt{\xi_{*1}^1}} - \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi^1} + \sqrt{\xi_{*1}^1}} \right], \quad K_{3,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi_{*1}^1}}, \\
K_{3,1} = 0, \quad \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz} = \frac{i}{4\pi\sqrt{\xi^1}} \left[ \frac{f_3^*}{\sqrt{\xi^1} + \sqrt{\xi_{*1}^1}} + \frac{\bar{f}_3^*}{\sqrt{\xi^1} + \sqrt{\xi_{*1}^1}} \right].
\end{aligned} \tag{23.63}$$

**Дія силового та гвинтового диполів**

Оскільки для сили та дислокації в анізотропній площині  $G_1(z^1) = -A_1 P_{01}(0, z^1)$ , то для силового і дислокаційного диполя, орієнтованого під кутом  $\varphi$  з плечем  $c \rightarrow 0$ , згідно з (21.9) відповідна функція дорівнює

$$G_1(z^1) = -c \left\{ \frac{\partial G_1}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial G_1}{\partial y} \sin \varphi \right\} = c A_1 Q_{01}(0, z^1) [\cos \varphi + s^1 \sin \varphi],$$

$$Q_{01}(0, z^1) = (z_{*1}^1 - z^1)^{-2}.$$

Тому, переходячи до границі при  $c A_1 \rightarrow \text{const}$ , отримаємо

$$G_1(z^1) = A_{1d} Q_{01}(0, z^1), \quad A_{1d} = i \frac{f^*(\varphi)}{4\pi}, \quad f^*(\varphi) = f_3^*(\cos \varphi + s^1 \sin \varphi), \quad f_3^* = f_{3d} + i \frac{f_{6d}}{|r^1|},$$

(23.64)

де  $f_{3d} = \lim_{c \rightarrow 0} (c f_3)$ ,  $f_{6d} = \lim_{c \rightarrow 0} (c f_6)$  – інтенсивності силового та дислокаційного диполів відповідно.

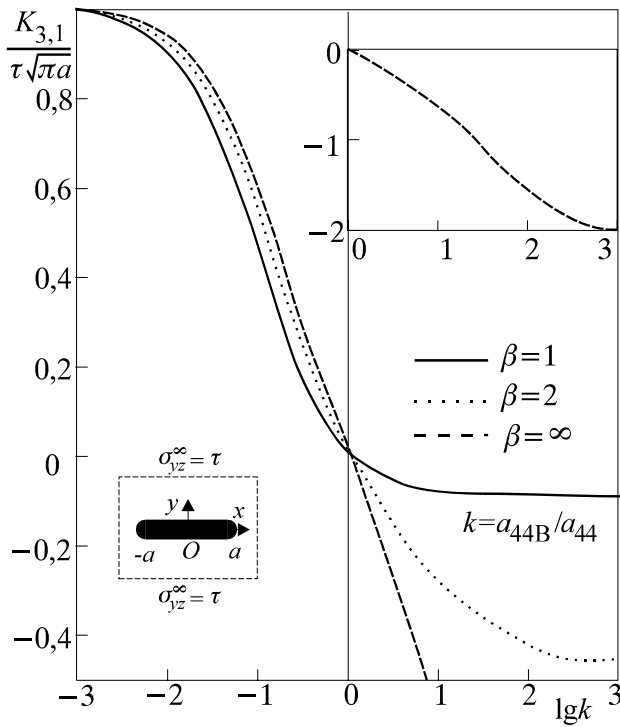


Рис. 23.3

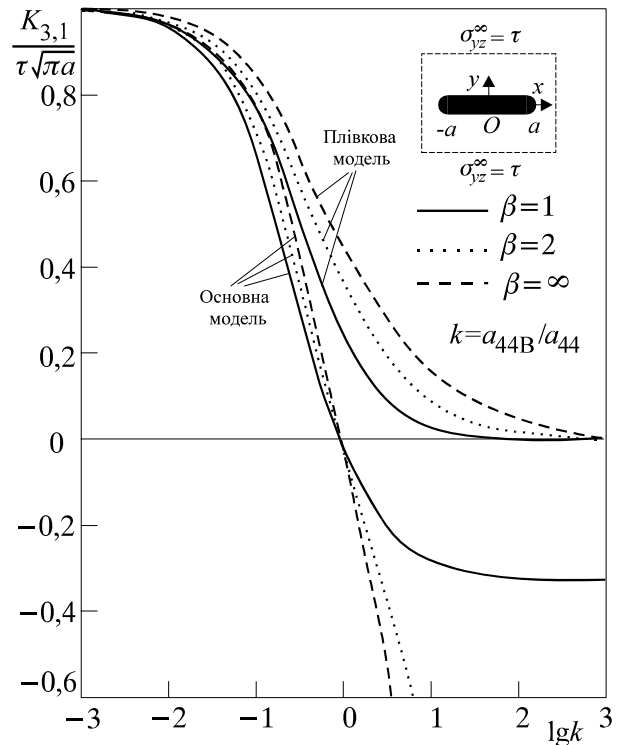


Рис. 23.4

На відміну від ізотропного випадку, коли  $\cos \varphi + s^1 \sin \varphi = \exp(i\varphi)$ , не для кожного дислокаційного диполя знайдеться еквівалентний до нього силовий диполь та навпаки. Відповідно до (23.64) розв’язок для силового диполя  $f_{3d}$  під кутом  $\varphi$  рівнозначний суперпозиції  $M_{31} \cos \varphi + M_{32} \sin \varphi$ , де  $M_{31}$ ,  $M_{32}$  – силові диполі величиною  $f_{3d}$ , орієнтовані під кутами  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \pi/2$  відповідно. Аналогічно і для дислокаційного диполя зручніше здійснювати обчислення на основі суперпозиції  $D_{31} \cos \varphi + D_{32} \sin \varphi$ , де  $D_{31}$ ,  $D_{32}$  – дислокаційні диполі

величиною  $f_{6d}$ , орієнтовані під кутами  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \pi/2$  відповідно. Тому під час здійснення обчислень достатньо обмежитися значеннями кутів  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \pi/2$ , розв'язуючи рівняння лише для навантажень  $M_{31}, M_{32}, D_{31}, D_{32}$ .

Формули (23.58), (23.59) для тріщини та абсолютно жорсткої плівки зберігають свій вигляд і для диполів, якщо для випадку одного такого дефекту скінченної довжини (ширини) уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  вважати

$$F^\pm(z^1) = \frac{if^*(\varphi)}{(z^1 - z_{*1}^1)^2} \left[ \frac{a^2 - z^1 z_{*1}^1}{\sqrt{[a^2 - (z^1)^2][a^2 - (z_{*1}^1)^2]}} \pm 1 \right], \tag{23.65}$$

$$Q(z^1) = \frac{f^*(\varphi)(z^1 z_{*1}^1 - a^2)}{\sqrt{a[(z_{*1}^1)^2 - a^2][(z_{*1}^1)^2 - (z^1)^2]}};$$

для півнескінченного дефекту уздовж  $L' = (-\infty; 0]$  –

$$F^\pm(z^1) \sim \frac{if^*(\varphi)}{(\xi^1 - \xi_{*1}^1)^2} \left[ \frac{\xi^1 + \xi_{*1}^1}{2\sqrt{\xi^1 \xi_{*1}^1}} \pm 1 \right], \quad \bar{F}^\pm(z^1) = \frac{if^*(\varphi)}{(\xi^1 - \xi_{*1}^1)^2} \left[ \frac{\xi^1 + \bar{\xi}_{*1}^1}{2\sqrt{\xi^1 \bar{\xi}_{*1}^1}} \mp 1 \right], \tag{23.66}$$

$$Q(z^1) = \frac{f^*(\varphi)(\xi^1 + \xi_{*1}^1)}{\sqrt{2\xi_{*1}^1(\xi^1 - \xi_{*1}^1)^2}}, \quad \xi^1 = z^1 - a, \quad \xi_{*1}^1 = z_{*1}^1 - a.$$

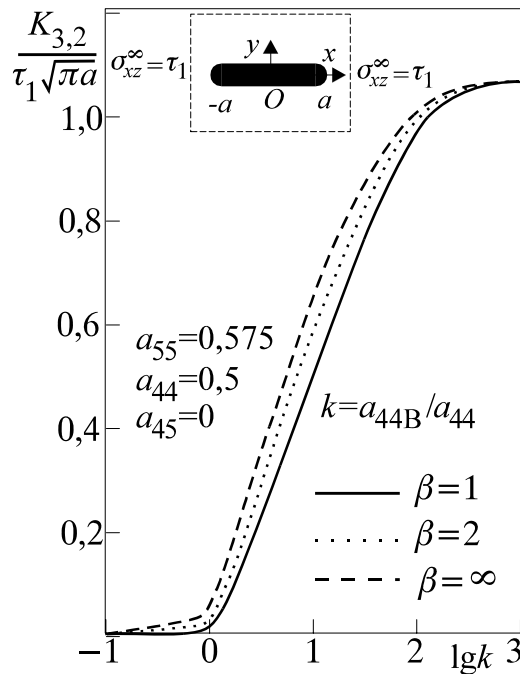


Рис. 23.5

Тому під час дії диполів для півнескінченної тріщини

$$K_{3,1} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \operatorname{Im} \left[ f^* (\varphi) (\xi_{*1}^1)^{-3/2} \right], \quad K_{3,2} = 0; \quad (23.67)$$

для півнескінченної абсолютно жорсткої плівки –

$$K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \operatorname{Re} \left[ f^* (\varphi) (\xi_{*1}^1)^{-3/2} \right]. \quad (23.68)$$

Пружні поля від гвинтових дислокацій в анізотропному середовищі розглядалися у [1656, 1150, 461].

### Пружне включення

Для прикладу досліджувалася [967] концентрація напружень на тонкому ізотропному включенні ( $a_{44B} = a_{55B} = 1/G_B$ ,  $a_{45B} = 0$ ) в однорідній матриці ( $a_{44}, a_{55}, a_{45}$ ) за умов взаємодії (15.12), що породжують систему сингулярних інтегральних рівнянь (23.32). Півтовщина  $h(x)$  включення змінювалася за законом (5.20); вважалося  $h_0/a = 0,1$ . Параметр форми  $\beta = 1; \infty; 2$  (включення еліптичної, прямокутної та деякої проміжної форми). Застосовувалася схема методу колокацій з точністю обчислень не меншою від 1 %.

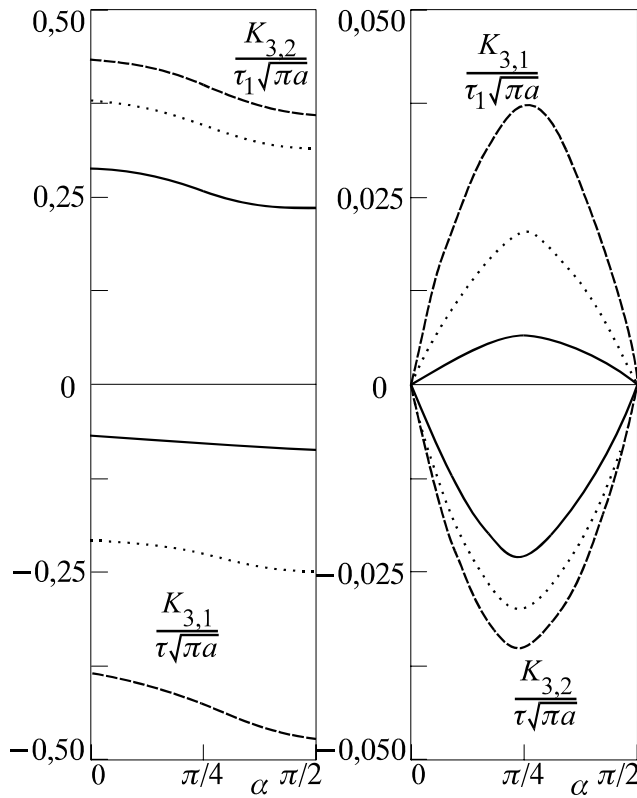


Рис. 23.6

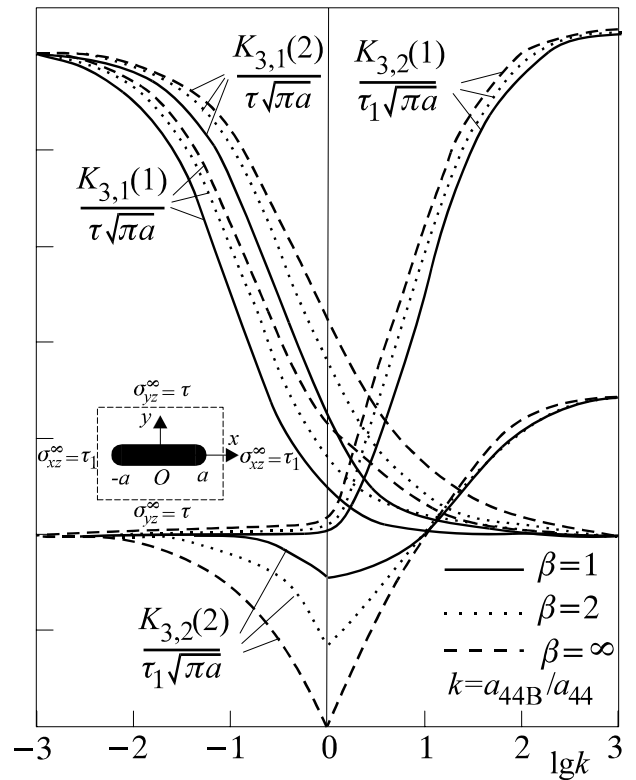


Рис. 23.7

Розглядалося п'ять типів навантаження: 1) однорідне поле напружень на нескінченності; 2) сила  $Q$  у точці  $z_{*1} = iy_*$ ; 3) ядро гвинтової дислокації зі складовою  $b$  вектора Бюргерса у точці  $z_{*1} = iy_*$ ; 4) силовий диполь  $M_{32}$  у точці  $z_{*1} = iy_*$ ; 5) дислокаційний диполь  $D_{32}$  у точці  $z_{*1} = iy_*$ .

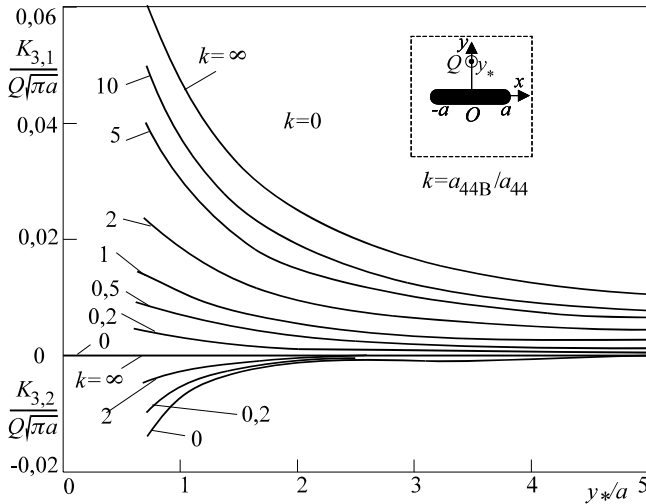


Рис. 23.8

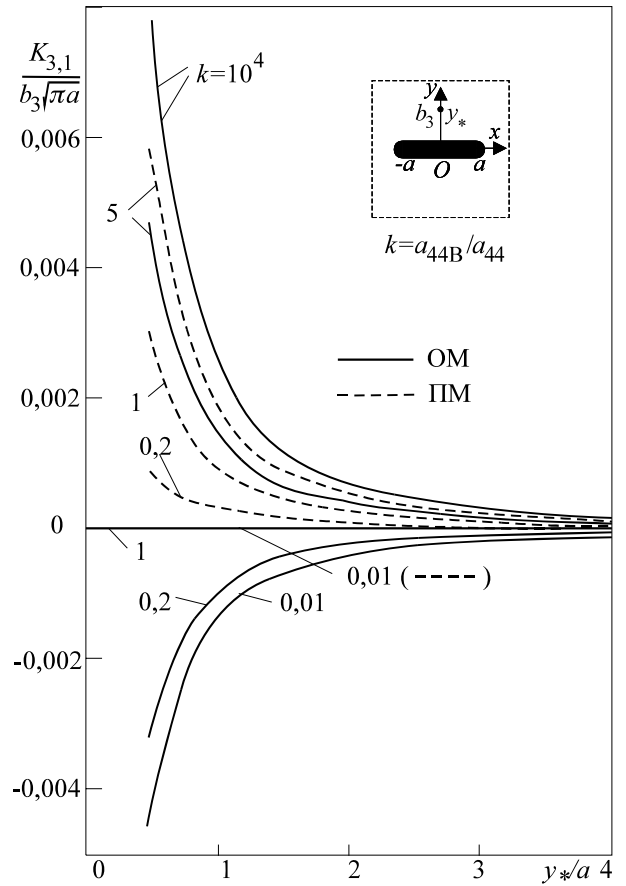


Рис. 23.9

Вивчалояся також два типи матриці:

а) намоточного однонапрявленого склопластику [535, 43] з параметрами

$$G_{xz} = \frac{1}{a_{44}} = 5,75 \text{ ГПа}, \quad G_{yz} = \frac{1}{a_{55}} = 5,00 \text{ ГПа}, \quad a_{45} = 0;$$

б) з абстрактного матеріалу зі сталими

$$a_{45} = 0, \quad \frac{G_{xz}}{G_{yz}} = \frac{a_{55}}{a_{44}} = 0,1.$$

Під час виконання обчислень припускалося, що

$$w_-^* = 0, \quad \sigma_{xz}^c(-a) = \frac{\sigma_{xzp}^0(-a)}{\max(1, a_{44B}/a_{55p})}.$$

Включення вважалояся ізотропним з модулем зсуву  $G_B = 1/a_{44B}$ , що змінюється від нуля (тріщина) до нескінченності (абсолютно жорстке включення), або з алюмінію ( $G_B = 26 \text{ ГПа}$ ). Застосовувалояся переважно основна модель (використання плівкової згадується окремо). В усіх вивчених випадках результати обчислень засвідчили, що за відносної жорсткості включення  $k = a_{44}/a_{44B} \leq 10^{-3}$  результати практично збігаються з аналітичними для тріщини. При  $k \geq 1000$  дані обчислення УКІН  $K_{3,2}$  практично збігаються з аналітичними результатами для абсолютно жорсткої плівки, а з використанням плівкової моделі цю ж тенденцію виявляють і значення  $K_{3,1}$ .

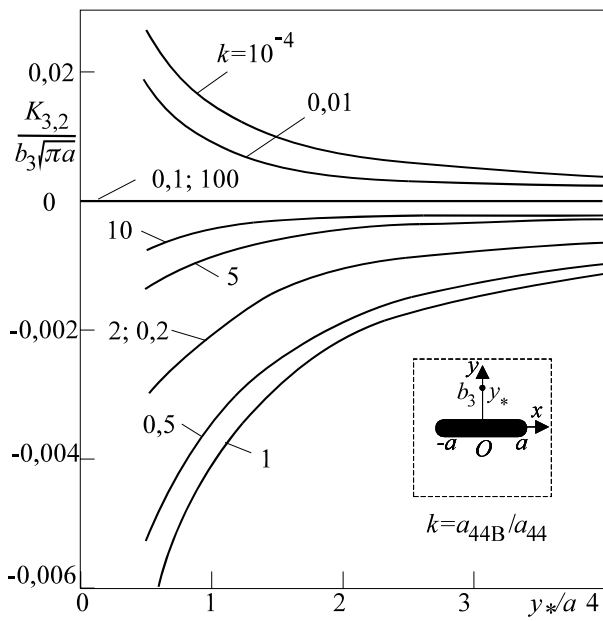


Рис. 23.10

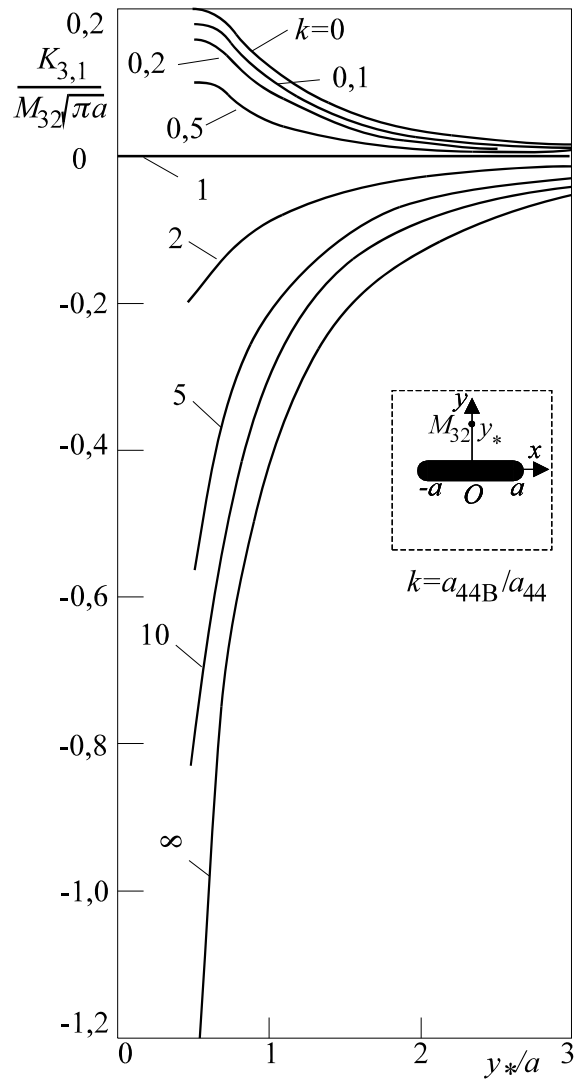


Рис. 23.11

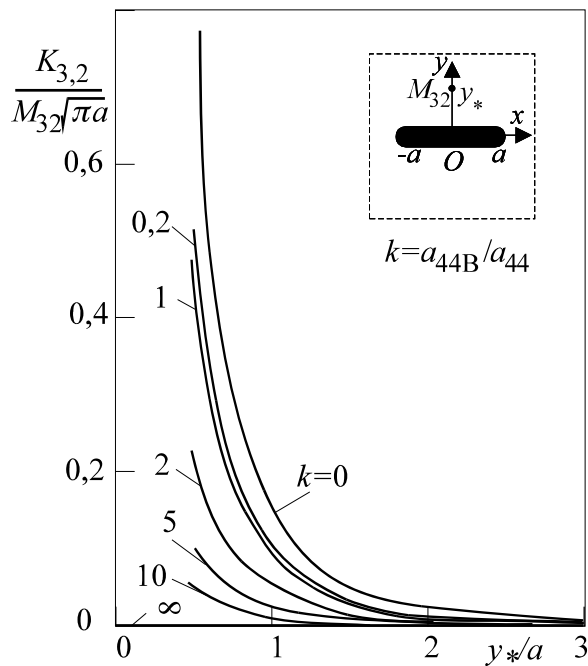


Рис. 23.12

Рис. 23.3–23.7 подають вплив на УКІН орієнтації зсуву на нескінченності та відносної жорсткості включень. При  $k > 1$  та дії напружень  $\tau$  УКІН  $K_{3,1}$  ( $K_{3,2}$  у цьому випадку дорівнює нулю), так само, як і в ізотропному випадку, характеризується (рис. 23.3, матриця а) доволі повільною збіжністю, хоча отримані при цьому переміщення цілком відповідають механічній картині явища: наприклад, для абсолютно жорсткого включення (практично  $k \geq 1000$ ) переміщення на реальній межі включення  $y = \pm h(x)$  дорівнюють нулю для довільного значення параметра  $\beta$  форми. У випадку плівкової моделі  $K_{3,1}$  зберігає хорошу збіжність для довільних  $\beta$ , однак, знайдене при цьому поле переміщень додатне або для дуже тонких включень, або на деякій відстані від поверхні прошарку.

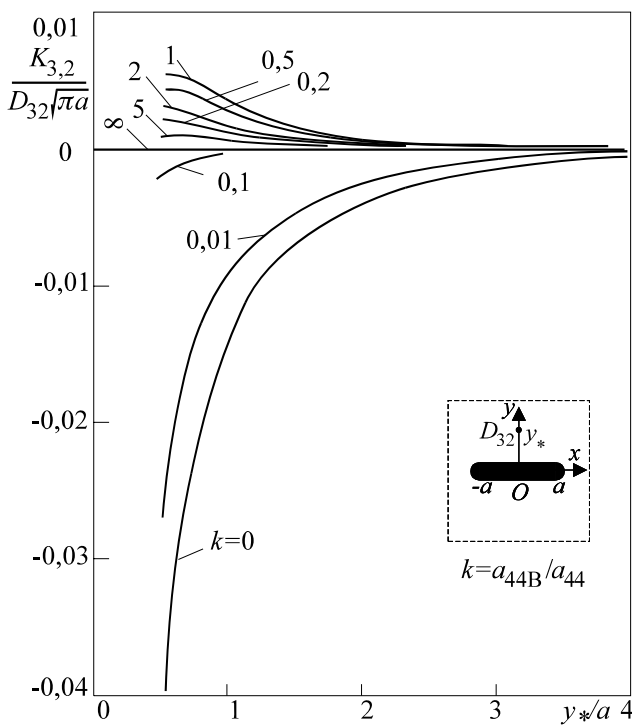


Рис. 23.13

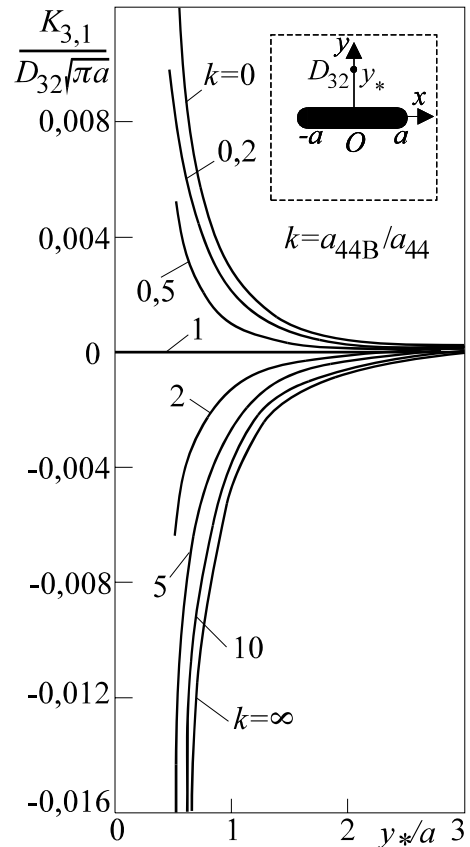


Рис. 23.14

Порівняння результатів обчислення УКІН за основною (ом) та плівковою (пм) моделями містить рис. 23.4 (матриця б). При дії напруження  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$  у випадку матриці типу а (склопластик) УКІН  $K_{3,1} = 0$ , а зміна УКІН  $K_{3,2}$  відображена на рис. 23.5.

У табл. 23.1 містяться ненульові значення УКІН для еліптичного включення, обчислені за різної міри анізотропії матриці. Ліва частина таблиці побудована для відносної жорсткості включення  $k = 2, 6$ ; права – при  $k = 1$ . Спостерігається істотна кількісна залежність УКІН від міри анізотропії матриці. У другому випадку величина  $K_{3,1}$  практично дорівнює нулю.

На рис. 23.6 відображені результати зміни УКІН для алюмінієвого включення у матриці типу а залежно від орієнтації  $\alpha$  осей симетрії матеріалу, уздовж яких діють напруження на нескінченності. Спостерігається і кількісний, і якісний вплив анізотропії матеріалу на концентрацію напружень.

Таблиця 23.1

$\frac{a_{55}}{a_{44}} = \frac{G_{xz}}{G_{yz}}$	$k \equiv a_{44}/a_{44B} = 2,6$		$k \equiv a_{44}/a_{44B} = 1$	
	$\frac{K_{3,1}}{\tau\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{3,2}}{\tau\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{3,1}}{\tau_1\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{3,2}}{\tau_1\sqrt{\pi a}}$
$10^7$	$-0,304 \cdot 10^{-4}$	$0,316 \cdot 10^4$	$-0,316 \cdot 10^{-7}$	$0,315 \cdot 10^4$
$10^5$	$-0,304 \cdot 10^{-3}$	$0,316 \cdot 10^3$	$-0,316 \cdot 10^{-6}$	$0,306 \cdot 10^3$
$10^3$	$-0,304 \cdot 10^{-2}$	$0,312 \cdot 10^2$	$-0,315 \cdot 10^{-5}$	$0,240 \cdot 10^2$
$10^2$	$-0,961 \cdot 10^{-2}$	$0,963 \cdot 10^1$	$-0,990 \cdot 10^{-5}$	$0,495 \cdot 10^1$
10	$-0,304 \cdot 10^{-1}$	$0,281 \cdot 10^1$	$-0,306 \cdot 10^{-4}$	$0,684 \cdot 10^0$
5	$-0,429 \cdot 10^{-1}$	$0,189 \cdot 10^1$	$-0,428 \cdot 10^{-4}$	$0,327 \cdot 10^0$
2	$-0,678 \cdot 10^{-1}$	$0,109 \cdot 10^1$	$-0,660 \cdot 10^{-4}$	$0,878 \cdot 10^{-1}$
1	$-0,958 \cdot 10^{-1}$	$0,694 \cdot 10^0$	$-0,909 \cdot 10^{-4}$	$0,910 \cdot 10^{-4}$
0,5	$-0,135 \cdot 10^0$	$0,423 \cdot 10^0$	$-0,124 \cdot 10^{-3}$	$-0,466 \cdot 10^{-1}$
0,2	$-0,213 \cdot 10^0$	$0,194 \cdot 10^0$	$-0,183 \cdot 10^{-3}$	$-0,766 \cdot 10^{-1}$
0,1	$-0,300 \cdot 10^0$	$0,878 \cdot 10^{-1}$	$-0,240 \cdot 10^{-3}$	$-0,872 \cdot 10^{-1}$
$10^{-2}$	$-0,926 \cdot 10^0$	$-0,587 \cdot 10^{-1}$	$-0,500 \cdot 10^{-3}$	$-0,980 \cdot 10^{-1}$
$10^{-3}$	$-0,271 \cdot 10^1$	$-0,900 \cdot 10^{-1}$	$-0,760 \cdot 10^{-3}$	$-0,996 \cdot 10^{-1}$
$10^{-5}$	$-0,137 \cdot 10^2$	$-0,992 \cdot 10^{-1}$	$-0,970 \cdot 10^{-3}$	$-0,100 \cdot 10^0$
$10^{-7}$	$-0,238 \cdot 10^2$	$-0,179 \cdot 10^1$	$-0,997 \cdot 10^{-3}$	$-0,100 \cdot 10^0$

Якщо включення орієнтоване уздовж однієї з осей симетрії ( $\alpha = 0; \pi/2$ ), то один з УКІН (залежно від орієнтації напружень) дорівнює нулю, а коли  $\alpha = \pi/4$ , то цей УКІН досягає максимального значення. Якщо включення не орієнтоване уздовж осей симетрії матеріалу, то обидва УКІН ненульові (виняток становлять тріщина та абсолютно жорстка плівка).

На рис. 23.7 для порівняння подано залежність ненульових УКІН для двох досліджуваних типів матриці (номер типу поміщено у дужках біля відповідного позначення УКІН), обчислені за плівковою моделлю. І тут помітний якісний та кількісний вплив анізотропії матриці.

Рис. 23.8 характеризує зміну УКІН  $K_{3,1}$  (верхня частина рисунка) та  $K_{3,2}$  під час переміщення точки прикладання зосередженої сили  $Q$  уздовж вертикальної осі геометричної симетрії задачі для окремих значень відносної жорсткості включення. Рис. 23.9, 23.10 містять подібні результати розрахунків для дислокації зі складовою вектора Бюргерса  $b$  (штрихова лінія характеризує результати обчислень з використанням плівкової моделі). Рис. 23.11, 23.12 та 23.13, 23.14 стосуються вивчення впливу на УКІН силового  $M_{32}$  та дислокаційного  $D_{32}$  диполів, орієнтованих під кутом  $\alpha = \pi/2$ . З віддаленням зосередженого чинника від включення концентрація напружень істотно зменшується, причому для диполів це зменшення відбувається набагато яскравіше, ніж для породжуючих їх основних чинників, оскільки вони в певному сенсі слова є самоврівноваженими. Виняток становлять зосереджені чинники поблизу відносно жорстких включень – з їх віддаленням від поверхні УКІН спочатку зростають до певного максимального значення, а вже потім починають монотонно зменшуватися.

Додаткові поглиблені дослідження впливу на УКІН відносної жорсткості включення за дії зосереджених чинників було зроблено у праці [947]. Для унаочнення впливу анізотропії середовища на концентрацію напружень біля краю включення побудуємо графічні залежності



ті УКІН від параметра відносної жорсткості матриці  $G = \lg(a_{44B}/a_{441})$ . Рис. 23.15 – 23.18 стосуються випадку ізотропного включення (податності включення)  $a_{44B} = a_{55B} = 0,1 \cdot 10^l$  ГПа<sup>-1</sup>,  $a_{45B} = 0$  зі залежною від параметра  $l$  жорсткістю (абсолютно жорстке при  $l \rightarrow -\infty$ ; абсолютно податне – тріщина при  $l \rightarrow +\infty$ ). У цьому випадку для ізотропного середовища з будь-якими пружними характеристиками отримаємо ідентичні залежності УКІН від параметра  $G$ ; середовища з різною мірою анізотропії характеризуються іншими специфічними графічними залежностями.

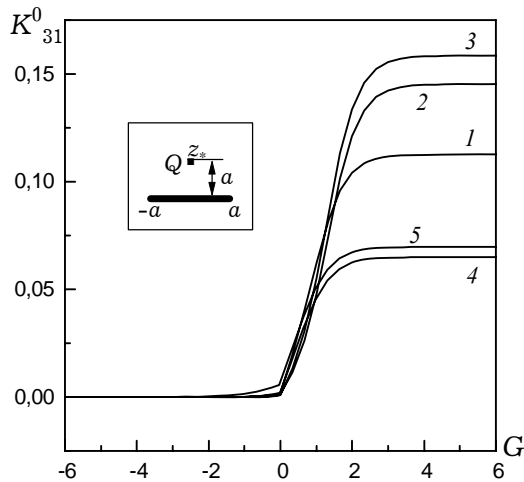


Рис. 23.15

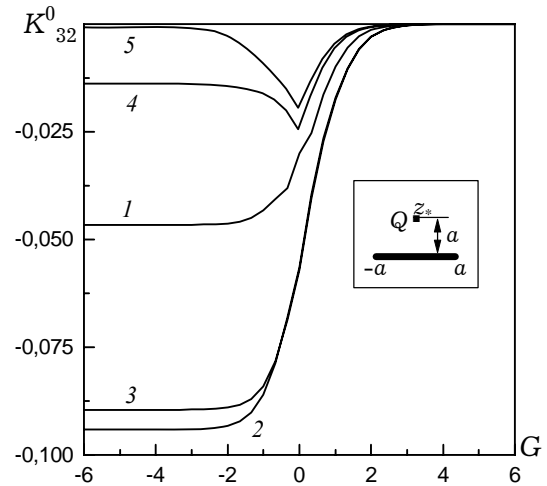


Рис. 23.16

Обчислення виконано для тих випадків, коли матеріал середовища є:

1. Ізотропним  $\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 1; 0, 1; 0\}$  ГПа<sup>-1</sup>;
2. Ортотропним  $\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 1; 0, 5; 0\}$  ГПа<sup>-1</sup>;
3. Анізотропним  $\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 1; 0, 5; 0, 05\}$  ГПа<sup>-1</sup>;
4. Ортотропним  $\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 5; 0, 1; 0\}$  ГПа<sup>-1</sup>;
5. Анізотропним  $\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 5; 0, 1; 0, 05\}$  ГПа<sup>-1</sup>.

Номери ліній на рис. 23.15 – 23.18 відповідають розглядуваним випадкам.

Рис. 23.15, 23.16 відображають залежність безрозмірних УКІН  $K_{3j}^0 = K_{3j} \sqrt{a} / (Q \sqrt{\pi})$  ( $j=1, 2$  відповідно) від параметра  $G$ , якщо у точці  $z_* = ia$  середовища діє зосереджена сила  $Q$ . Спостерігається істотний вплив міри анізотропії матеріалу середовища на УКІН. У випадку ортотропного середовища з відношенням пружних характеристик  $A \equiv a_{441}/a_{551} = 1/5$  безрозмірний УКІН  $K_{31}^0$  збільшується у півтора рази стосовно УКІН для ізотропного середовища;  $K_{32}^0$  удвічі більший за модулем. Суто анізотропне середовище з таким же відношенням  $A=1/5$  за наявності ненульового коефіцієнта  $a_{451}$  додатково збільшує безрозмірні УКІН (лінії 2, 3). Анізотропні матеріали з оберненим відношенням пружних характеристик  $A=5$  (лінії 4, 5) зменшують концентрацію напружень біля краю включення проти ізотропного середовища з таким само включенням. Тобто існує доволі широка можливість керувати концентрацією напружень біля стрічки належним підбором пружних властивостей матриці.

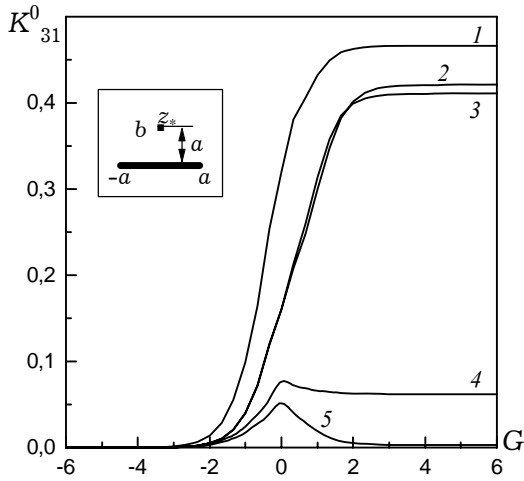


Рис. 23.17

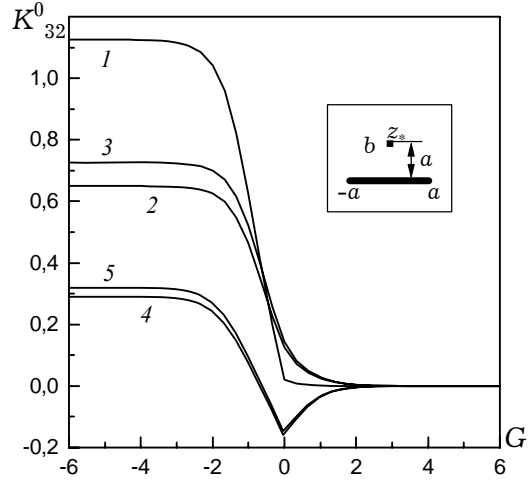


Рис. 23.18

Аналогічні залежності для випадку, коли у точці  $z_* = ia$  середовища розміщена гвинтова дислокація з вектором Бюргерса  $b$  містять рис. 23.17, 23.18. Для такого навантаження  $K_{3j}^0 = K_{3j} a_{551} \sqrt{a} / (b |a_{551}| \sqrt{\pi})$  ( $|a_{551}|$  – безрозмірне значення відповідної пружної сталої  $a_{551}$ ). Максимальних значень УКІН досягають переважно за включень в ізотропному середовищі  $A = 1$ . При  $G > 3$  і  $G < -3$  усі числові розв'язки з точністю до 1% збігаються з граничними значеннями відповідних аналітичних розв'язків для щілини та абсолютно жорсткого включення.

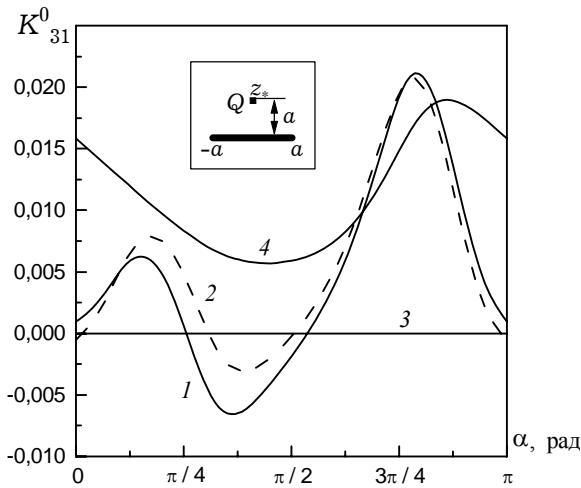


Рис. 23.19

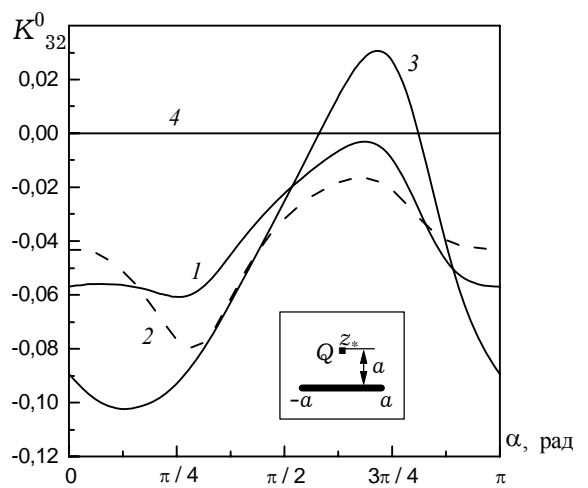


Рис. 23.20

Взаємна орієнтація головних осей анізотропії включення та середовища теж впливає на концентрацію напружень. Рис. 23.19 – 23.22 відображають залежність УКІН від кута  $\alpha$  орієнтації головних осей анізотропії матеріалу матриці. Вважаємо, що при  $\alpha = 0$  пружні характеристики середовища такі:  $\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 5; 0, 1; 0, 05\}$  ГПа<sup>-1</sup>. Матеріал включення є таким:

1. Ізотропним  $\{a_{44B}; a_{55B}; a_{45B}\} = \{0, 1; 0, 1; 0\}$  ГПа<sup>-1</sup>;

- 2. Анізотропним  $\{a_{44B}; a_{55B}; a_{45B}\} = \{0, 1; 0, 5; 0, 05\}$  ГПа<sup>-1</sup> (штрихова лінія);
- 3. Абсолютно жорстким;
- 4. Абсолютно податним.

Номери ліній на рис. 23.19 – 23.22 відповідають розглядуваним випадкам.

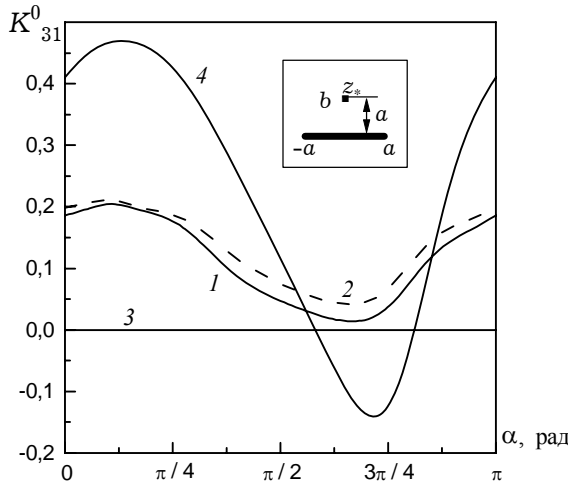


Рис. 23.21

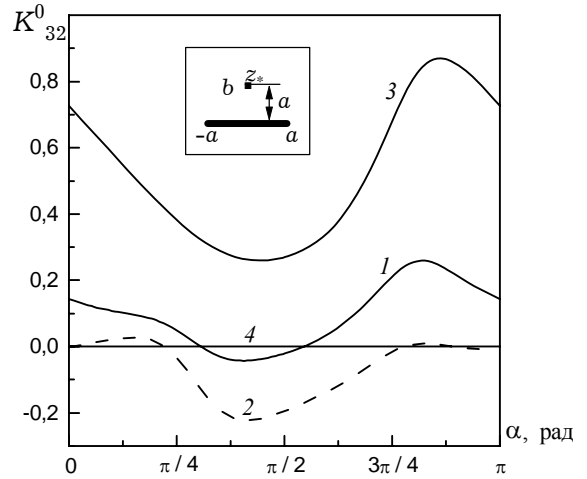


Рис. 23.22

Рис. 23.19, 23.20 стосуються випадку дії зосередженої сили  $Q$  у точці  $z_* = ia$ ; рис. 23.21, 23.22 – гвинтової дислокації з вектором Бюргерса  $b$ . Лінія 4 на рис. 23.19 відповідає значенню  $K_{31}^0/10$ . Для абсолютно жорсткого включення  $K_{31}^0 = 0$ , а для  $K_{32}^0$  спостерігається найбільший розмах його зміни. У випадку щілини  $K_{32}^0 = 0$ , УКІН  $K_{31}^0$  властива максимальна зміна.

### 23.7. Антиплоска задача для анізотропного шаруватого середовища з тонкими пружними включеннями

Застосуємо метод функцій стрибка та інтегральне перетворення Фур'є до розв'язування антиплоскої задачі для пакету анізотропних смуг, що містять плоскі стрічкові неоднорідності [1662, 1006, 1663, 1004, 1117].

#### Постановка задачі

Розглянемо антиплоску задачу теорії пружності для пакету анізотропних смуг  $S_j$ , де  $j = \overline{-M, L}$ , заввишки  $H_j$  з пружними характеристиками  $a_{kmj}$ , де  $k, m = 4, 5$  (рис. 23.23). Висота крайніх смуг може бути скінченною або безмежно великою. Вісь  $Ox$  основної системи декартових координат  $xOy$  спрямуємо вздовж лінії розмежування смуг  $S_0$  і  $S_{-1}$ . Всередині смуг  $S_j$  уздовж відрізків  $L'_j$  розміщені тонкі пружні неоднорідності, нахилені під кутами  $\alpha_j$  до меж  $y = y_{0j}$ ,  $j = \overline{-M+1, L}$ , поділу матеріалів. У смугах можуть бути також інші включення, або їх може не бути зовсім. Включення можуть також розміщуватися на межі фаз. У

центрі  $O_j$  відрізка  $L'_j$  розмістимо початок двох локальних декартових систем координат  $x_j O_j y_j$  і  $s_j O_j n_j$  ( $O_j s_j \parallel L'_j$ ,  $O_j x_j \parallel O x$ ), зв'язаних залежністю

$$z \equiv x + iy = z_j + z_{0j}, \quad z_j = x_j + iy_j, \quad s_j + in_j = z_j e^{-i\alpha_j}, \quad (23.69)$$

де  $z_{0j}$  – координати точок  $O_j$  в основній системі координат  $x O y$ .

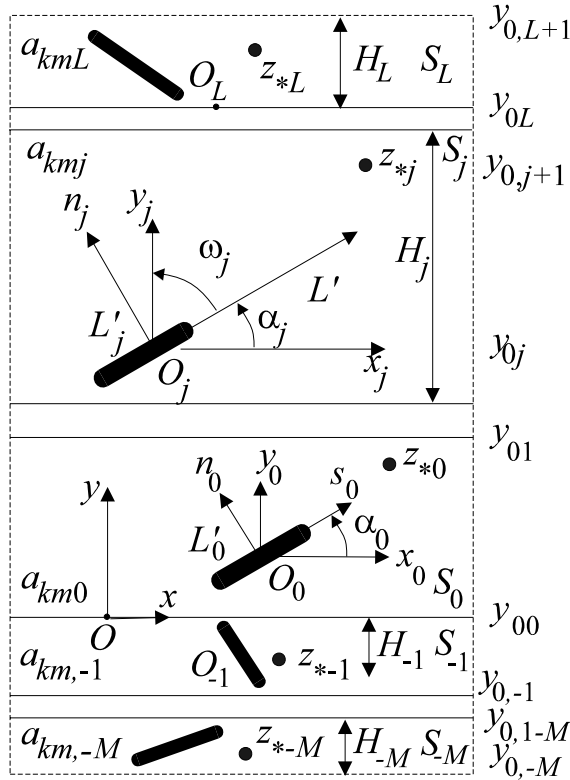


Рис. 23.23. Схема шаруватого середовища з тонкими включеннями

На лініях  $y = y_{0j}$  розмежування матеріалів смуг  $S_j$  і  $S_{j-1}$  поза включеннями виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$\sigma_{yz}^j = \sigma_{yz}^{j-1}, \quad \frac{\partial w^j}{\partial x} = \frac{\partial w^{j-1}}{\partial x}, \quad (23.70)$$

$$y = y_{0j}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (j = \overline{-M+1, L}).$$

На межах пакету задаємо напруження або переміщення:

$$\begin{aligned} 1. \sigma_{yz}^L(z) = f^+(x); \quad 2. \frac{\partial w^L(z)}{\partial x} = g^+(x), \quad y = y_{0,L+1}; \\ 1. \sigma_{yz}^{-M}(z) = f^-(x); \quad 2. \frac{\partial w^{-M}(z)}{\partial x} = g^-(x), \quad y = y_{0,-M}. \end{aligned} \quad (23.71)$$

Індекс «+» стосується верхньої границі, «-» – нижньої. У кожній зі смуг задаємо напруження  $\sigma_{xz}^{\infty j} = \tau_j$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $j = \overline{-M+1, L}$ . Зовнішнє навантаження задане також зосередженими силами  $Q^j$  та гвинтовими дислокаціями з складовою вектора Бюргерса  $b^j$  всередині кожного шару  $S_j$  у точках  $z_{*j} = x_{*j} + iy_{*j}$  відповідно.

### Метод функцій стрибка

Відповідно до методу функцій стрибка задача теорії тонких дефектів базується на принципі спряження континуумів різної вимірності та умовах взаємодії тонкого включення із зовнішнім середовищем, які пов'язують напруження і переміщення на протилежних поверхнях матриці, що прилягають до обох боків включення:

$$\Psi_i^j \left( \sigma_{n_j z}^{j\pm}, \frac{\partial w}{\partial s_j} \right) = 0 \quad (s_j \in L'_j, \quad i=1, 2). \quad (23.72)$$

За принципом спряження вплив тонкого включення на напружено-деформований стан тіла зводиться до утворення на  $L'_j$  стрибків вектора напружень і похідної від вектора переміщень:

$$\sigma_{n_j z}^{j-} - \sigma_{n_j z}^{j+} = f_3^j(s_j), \quad \frac{\partial}{\partial s_j} [w^{j-} - w^{j+}] = f_6^j(s_j) \quad (s_j \in L'_j), \quad (23.73)$$

причому  $f_3^j(s_j) = f_6^j(s_j) = 0$ , якщо  $s_j \notin L'_j$ . Функції стрибка, взагалі кажучи, є невідомими функціями.

Для поздовжнього зсуву в напрямі осі  $Oz$  анізотропного середовища  $S_k$  співвідношення закону Гука та рівняння рівноваги мають вигляд (13.23), (13.24) і якщо ввести функцію напружень  $F^k$  згідно з означенням

$$\sigma_{xz}^k = \frac{\partial \mathfrak{F}^k}{\partial y}, \quad \sigma_{yz}^k = -\frac{\partial \mathfrak{F}^k}{\partial x},$$

то рівняння рівноваги задовольнятиметься тотожно, а з закону Гука отримаємо рівняння

$$a_{55k} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}^k}{\partial y^2} - 2a_{45k} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}^k}{\partial x \partial y} + a_{44k} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}^k}{\partial x^2} = 0. \quad (23.74)$$

Функцію напружень  $\mathfrak{F}^j$  у смугі  $S_j$  можна подати у вигляді суперпозиції однорідного  $\mathfrak{F}^{0j}$ , породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень, і збуреного  $\hat{\mathfrak{F}}^j$  розв'язків. У свою чергу,  $\hat{\mathfrak{F}}^j$  є сумою основного збуреного розв'язку  $\hat{\mathfrak{F}}^{0j}$  для безмежної площини з такими самими механічними властивостями і тими самими включеннями, які належать  $S_j$  (якщо в  $S_j$  включень немає, то  $\hat{\mathfrak{F}}^{0j} = 0$ ), і збуреного коригувального  $\hat{\mathfrak{F}}^{1j}$ , який повинен враховувати скінченність висоти  $H_j$  і вплив сусідніх смуг, не породжуючи стрибків напружень і переміщень:

$$\mathfrak{F}^j(z) = \mathfrak{F}^{0j}(z) + \hat{\mathfrak{F}}^j(z) = \mathfrak{F}^{0j}(z) + \hat{\mathfrak{F}}^{0j}(z) + \hat{\mathfrak{F}}^{1j}(z) \quad (z \in S_j). \quad (23.75)$$

З умови відсутності поворотів на нескінченності ліній поділу матеріалів маємо зв'язок між зусиллями на безмежності:

$$\left( w'^j - w'^{j-1} \right) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \left( w'^{0j} - w'^{0,j-1} \right) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = a_{45j} \tau + a_{55j} \tau_j - a_{45,j-1} \tau - a_{55,j-1} \tau_{j-1} = 0.$$

Однорідний розв'язок відповідає зовнішньому навантаженню всередині смуг, задовольняє крайові умови (23.71) та умови ідеального механічного контакту (23.70). Під час переходу через вісь включень  $L'_j$  він не викликає стрибків напружень і переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти нульові крайові умови (одне з двох рівнянь на кожній межі):

$$1) \hat{\sigma}_{yz}^L \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0L} + \hat{\sigma}_{yz}^{1L} = 0, \quad 2) \hat{w}^L \equiv \hat{w}^{0L} + \hat{w}^{1L} = 0; \quad (23.76)$$

$$1) \hat{\sigma}_{yz}^{-M} \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0,-M} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,-M} = 0, \quad 2) \hat{w}^{-M} \equiv \hat{w}^{0,-M} + \hat{w}^{1,-M} = 0, \quad (23.77)$$

умови ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів:

$$\hat{\sigma}_{yz}^j \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0j} + \hat{\sigma}_{yz}^{1j} = \hat{\sigma}_{yz}^{j-1} \equiv \hat{\sigma}_{yz}^{0,j-1} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,j-1}; \quad \hat{w}^j \equiv \hat{w}^{0j} + \hat{w}^{1j} = \hat{w}^{j-1} \equiv \hat{w}^{0,j-1} + \hat{w}^{1,j-1} \quad (23.78)$$

та породжувати стрибки напружень і похідних від переміщень на  $L'_j$ :

$$\hat{\sigma}_{n_j z}^{j-} - \hat{\sigma}_{n_j z}^{j+} = f_3^j(s_j), \quad \frac{\partial}{\partial s_j} [\hat{w}^{j-} - \hat{w}^{j+}] = f_6^j(s_j) \quad (s_j \in L'_j).$$

Розглянемо міжфазне включення на межі поділу двох півплощин  $S_j$  і  $S_{j-1}$ . Для цього зафіксуємо певне значення  $j$  і розглянемо випадок, коли висоти відповідних смуг  $S_j$ ,  $S_{j-1}$  є необмежені ( $H_j, H_{j-1} \rightarrow \infty$ ,  $L = j$ ,  $M = 1 - j$ ). Тонке включення характеризується стрибками (23.73):

$$\sigma_{y_j z}^- - \sigma_{y_j z}^+ = f_3^j(x_j), \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_j} - \frac{\partial w^+}{\partial x_j} = f_6^j(x_j), \quad (23.79)$$

де індекс «+» стосується до півплощини  $S_j$ , а індекс «-» – до  $S_{j-1}$ .

Розв'язок рівняння (23.74) у просторі зображень інтегрального перетворення Фур'є має вигляд

$$\mathfrak{F}^{kF}(\xi, y_j) = A_1^k(\xi) \exp(\lambda_1^k y_j) + A_2^k(\xi) \exp(\lambda_2^k y_j) \quad (k = j-1, j), \quad (23.80)$$

де

$$\lambda_i^k = (-1)^{i-1} \alpha^k |\xi| - j \beta^k \xi \quad (i=1, 2) \quad \alpha^k = \frac{\sqrt{a_{44k} a_{55k} - (a_{45k})^2}}{a_{55k}}, \quad \beta^k = \frac{a_{45k}}{a_{55k}}.$$

Оскільки функція напружень (23.80) повинна бути обмеженою у разі  $y_j \rightarrow \pm\infty$ , то

$$\mathfrak{F}^F(\xi, y_j) = \begin{cases} A_2^j \exp(\lambda_2^j y_j) & (y_j > 0), \\ A_1^{j-1} \exp(\lambda_1^{j-1} y_j) & (y_j < 0). \end{cases} \quad (23.81)$$

У просторі зображень справджується такий зв'язок:

$$\sigma_{x_j z}^F = \frac{\partial \mathfrak{F}^F(\xi, y_j)}{\partial y_j}, \quad \sigma_{y_j z}^F = i \xi \mathfrak{F}^F(\xi, y_j), \quad (23.82)$$

а залежності (23.79) зводяться до вигляду

$$\sigma_{y_j z}^{F-} - \sigma_{y_j z}^{F+} = f_3^{jF}(\xi), \quad a_{45, j-1} \sigma_{y_j z}^{F-} + a_{55, j-1} \sigma_{x_j z}^{F-} - a_{45 j} \sigma_{y_j z}^{F+} - a_{55 j} \sigma_{x_j z}^{F+} = f_6^{jF}(\xi). \quad (23.83)$$

Підставивши (23.81) і (23.82) у (23.83), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно  $A_q^k(\xi)$ , розв'язком якої є

$$A_1^{j-1}(\xi) = \frac{\gamma^j f_6^{jF}(\xi) \operatorname{sign} \xi}{\xi} + \frac{\gamma^j a_{55 j} \alpha^j f_3^{jF}(\xi)}{i \xi}, \quad (23.84)$$

$$A_2^j(\xi) = \frac{\gamma^j f_6^{jF}(\xi) \operatorname{sign} \xi}{\xi} - \frac{\gamma^j a_{55, j-1} \alpha^{j-1} f_3^{jF}(\xi)}{i \xi}, \quad \gamma^j = \frac{1}{a_{55, j-1} \alpha^{j-1} + a_{55 j} \alpha^j}.$$

На підставі (23.81), (23.82), (23.84) напружений стан кусково-однорідної анізотропної площини з міжфазним включенням опишемо залежністю

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{y_j z}^{0j} + i\hat{\sigma}_{x_j z}^{0j} &= \frac{a_{55,j-1}\alpha^{j-1}\gamma^j}{2} \left[ -\bar{g}_m^j t_3^j(z_2^j) + g_p^j t_3^j(z_1^j) \right] + \\
&+ \frac{\gamma^j}{2} \left[ \bar{g}_m^j it_6^j(z_2^j) + g_p^j it_6^j(z_1^j) \right] \quad (z \in S_j), \\
\hat{\sigma}_{y_j z}^{0j} + i\hat{\sigma}_{x_j z}^{0j} &= \frac{a_{55j}\alpha^j\gamma^j}{2} \left[ -\bar{g}_m^{j-1} t_3^j(z_2^{j-1}) + g_p^{j-1} t_3^j(z_1^{j-1}) \right] + \\
&+ \frac{\gamma^j}{2} \left[ \bar{g}_m^{j-1} it_6^j(z_2^{j-1}) + g_p^{j-1} it_6^j(z_1^{j-1}) \right] \quad (z \in S_{j-1}).
\end{aligned} \tag{23.85}$$

Тут

$$\begin{aligned}
t_r^j(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_r^j(t) dt}{t-z} \quad (r=3,6), \quad g_p^k = \beta^k + i(\alpha^k + 1), \quad g_m^k = \beta^k + i(\alpha^k - 1), \\
z_1^k &= x_j + \beta^k y_j + i\alpha^k y_j, \quad z_2^k = \bar{z}_1^k \quad (k=j-1, j).
\end{aligned}$$

У випадку однакових матеріалів півплощин ( $a_{kmj} = a_{km,j-1}$ ) залежності (23.85) визначатимуть напружений стан однорідної площини:

$$\hat{\sigma}_{y_j z}^{0j} + i\hat{\sigma}_{x_j z}^{0j} = \frac{1}{4} \left[ -\bar{g}_m^j t_3^j(z_2^j) + g_p^j t_3^j(z_1^j) \right] + \frac{1}{4a_{55j}\alpha^j} \left[ \bar{g}_m^j it_6^j(z_2^j) + g_p^j it_6^j(z_1^j) \right]. \tag{23.86}$$

Для включення в однорідній площині, повернутого на кут  $\alpha_j$  відносно осі  $O_j x_j$ , у системі координат  $s_j O_j n_j$  вираз для напружень (23.86) збережеться, лише в ньому слід формально замінити  $x_j$  та  $y_j$  на  $s_j$  та  $n_j$ , а сталі  $a_{kmj}$ ,  $\alpha^j$ ,  $\beta^j$  на  $a'_{kmj}$ ,  $\alpha'^j$ ,  $\beta'^j$  відповідно. Сталі  $a'_{kmj}$  характеризують пружні властивості матеріалу в системі координат  $s_j O_j n_j$ , а їх зв'язок з  $a_{kmj}$  наведено у виразах (13.39) та (13.40). Використавши залежність

$$\sigma_{y_j z} + i\sigma_{x_j z} = \left( \sigma_{n_j z} + i\sigma_{s_j z} \right) e^{-i\alpha_j}, \tag{23.87}$$

вираз для напружень від повернутого на кут  $\alpha_j$  включення в однорідній півплощині запишемо у вигляді

$$\hat{\sigma}_{y_j z}^{0j} + i\hat{\sigma}_{x_j z}^{0j} = \frac{e^{-i\alpha_j}}{4} \left[ -\bar{g}_m^j t_3^j(z_2^j) + g_p^j t_3^j(z_1^j) \right] + \frac{e^{-i\alpha_j}}{4a'_{55j}\alpha'^j} \left[ \bar{g}_m^j it_6^j(z_2^j) + g_p^j it_6^j(z_1^j) \right]. \tag{23.89}$$

Залежність (23.89) є основним збуреним розв'язком для смуги  $S_j$ .

Коригувальний збурений розв'язок  $\hat{F}^{1j}$  подаємо як

$$\begin{aligned}
\hat{F}^{1j}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_1^j(\xi) e^{\lambda_1^j y} + A_2^j(\xi) e^{\lambda_2^j y} \right) e^{-i\xi x} d\xi, \\
\hat{\sigma}_{xz}^{1j}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_1^j(\xi) \lambda_1^j e^{\lambda_1^j y} + A_2^j(\xi) \lambda_2^j e^{\lambda_2^j y} \right) e^{-i\xi x} d\xi, \\
\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_1^j(\xi) e^{\lambda_1^j y} + A_2^j(\xi) e^{\lambda_2^j y} \right) \xi e^{-i\xi x} d\xi,
\end{aligned} \tag{23.90}$$

де  $A_q^j(\xi)$  – невідомі наперед функції. Причому, якщо висота  $H_j$  якоїсь із смуг є безмежною, то одна з цих функцій дорівнює нулю:  $A_1^L(\xi) = 0$  для  $S_L$ ;  $A_2^{-M}(\xi) = 0$  для  $S_{-M}$ . Підставивши формули (23.89), (23.90) і (23.69) в умови (23.76) – (23.78) отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно  $A_q^j(\xi)$ :

$$\sum_{j=-M}^L \left( \sum_{q=1}^2 c_{kj}^q(\xi) A_q^j(\xi) - \sum_{r=3,6} \int_{L'_j} d_{kj}^r(\xi, t) f_r^j(t) dt \right) = 0 \quad (k = \overline{-M, L}),$$

розв'язок якої має вигляд

$$A_q^j(\xi) = \sum_{p=-M}^L \sum_{r=3,6} \int_{L'_p} g_{qp}^{jr}(\xi, t) f_r^p(t) dt \quad (q = 1, 2; k = \overline{-M, L}). \quad (23.91)$$

Функції  $c_{kj}^q(\xi)$ ,  $d_{kj}^r(\xi, t)$ ,  $g_{qp}^{jr}(\xi, t)$  залежать від пружних сталей і геометрії пакету. Підставивши отримані значення  $A_q^j(\xi)$  (23.91) у співвідношення (23.90), запишемо коригувальні напруження:

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1j}(z) + i \hat{\sigma}_{xz}^{1j}(z) = \sum_{p=-M}^L \sum_{r=3,6} \int_{L'_p} R_p^{jr}(z, t) f_r^p(t) dt, \quad (23.92)$$

$$R_p^{jr} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g_{1p}^{jr}(\xi, t) (\xi + \lambda_1^j) e^{\lambda_1^j y} + g_{2p}^{jr}(\xi, t) (\xi + \lambda_2^j) e^{\lambda_2^j y} \right] e^{-ix\xi} d\xi.$$

Формули (23.75), (23.89) і (23.92) дають повний розв'язок для смуги  $S_j$ . Використовуючи (23.69) і (23.87), його можна записати в локальній системі координат  $s_j O_j n_j$  і за формулою Сохоцького – Племелья знайти його граничні значення на лінії включення

$$\begin{aligned} \sigma_{n_j z}^{j\pm}(s_j) + i \sigma_{s_j z}^{j\pm}(s_j) &= \sigma_{n_j z}^{0j\pm} + i \sigma_{s_j z}^{0j\pm} + \frac{1}{4} \left[ 2i \alpha'^j t_3^j(s_j) \pm 2(i \beta'^j - 1) f_3^j(s_j) \right] - \\ &- \frac{1}{4a'_{55j} \alpha'^j} \left[ 2(1 - i \beta'^j) t_6^j(s_j) \pm 2i \alpha'^j f_6^j(s_j) \right] + e^{i\alpha_j} \sum_{p=-M}^L \sum_{r=3,6} \int_{L'_p} R_p^{jr}(s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t) f_r^p(t) dt, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w^{j\pm}(s_j)}{\partial s_j} = a'_{45j} \sigma_{n_j z}^{j\pm}(s_j) + a'_{55j} \sigma_{s_j z}^{j\pm}(s_j).$$

Їх підстановка в умови взаємодії (23.72) породжує систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка  $f_r^j(t)$ ,  $r = 3, 6$ ;  $j = \overline{-M, L}$ . Розв'язавши її методом колокацій чи механічних квадратур, остаточно побудуємо поле напружень і переміщень у довільній точці пакету смуг.

Біля кінців включення завдовжки  $2a$  в однорідному анізотропному матеріалі з властивостями матеріалу  $S_k$  напруження мають кореневу особливість і визначаються за формулами (23.26), (23.27):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yz} - \sigma_{yz}^0 \\ \sigma_{xz} - \sigma_{xz}^0 \end{pmatrix} = \frac{K_{31}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -s^k \end{pmatrix} \omega_k^{-1/2} \right\} - \frac{K_{32}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -s^k \end{pmatrix} \omega_k^{-1/2} \right\} + O(1),$$

де



$$\omega_k = \cos \theta + s^k \sin \theta; \quad s^k = s_1^k + i s_2^k; \quad s_1^k = \frac{a_{45k}}{a_{55k}};$$

$$s_2^k = \frac{|r^k|}{a_{55k}}; \quad r^k = \sqrt{(a_{45k})^2 - a_{44k} a_{55k}};$$

$r, \theta$  — полярні координати;  $K_{31}$  і  $K_{32}$  — узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН), які визначаються виразами

$$K_{32} - iK_{31} = \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( p_3^\pm + i \frac{p_6^\pm}{|r^k|} \right), \quad p_r^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a} \left( f_r(x) \sqrt{|x \mp a|} \right).$$

Якщо функція стрибка має вигляд

$$f_r^j(t) = f_r^j \delta(t), \quad f_3^j = Q^j, \quad f_6^j = b^j, \quad z_{0j} = z_{*j} \quad (r = 3, 6; j = \overline{-M, L}), \quad (23.93)$$

де  $\delta(t)$  дельта-функція, то підстановка цих виразів у залежності для збуреного розв'язку дає вирази для зосередженої сили  $Q^j$  та гвинтової дислокації зі складовою вектора Бюргерса  $b^j$ , розташованими у точці  $z_{*j}$  смуги  $S_j$ . З урахуванням (23.93) залежності (23.89) і (23.92) дають основний і коригувальний однорідний розв'язки відповідно

$$\sigma_{yz}^{00j} + i\sigma_{xz}^{00j} = \frac{Q^j}{4\pi} \left( \frac{\bar{g}_m^j}{z_{*2}^j} - \frac{g_p^j}{z_{*1}^j} \right) - \frac{ib^j}{4\pi a_{55j} \alpha^j} \left( \frac{\bar{g}_m^j}{z_{*2}^j} + \frac{g_p^j}{z_{*1}^j} \right), \quad (23.94)$$

$$z_{*1}^j = (x - x_{*j}) + \beta^j (y - y_{*j}) + i\alpha^j (y - y_{*j}), \quad z_{*2}^j = \bar{z}_{*1}^j;$$

$$\sigma_{yz}^{01j} + i\sigma_{xz}^{01j} = \sum_{p=-M}^L \sum_{r=3,6} R_p^{jr}(z, 0) f_r^p. \quad (23.95)$$

Коли включення розміщене на межі поділу двох шарів  $S_j$  і  $S_{j-1}$ , то методика розв'язування задачі повністю зберігається (див. § 22). Особливість полягає лише в тому, що основний збурений розв'язок від такого включення визначається формулою (23.85) відразу для обох смуг  $S_j$  і  $S_{j-1}$ . Включення, які розміщені всередині вказаних смуг, дають свій незалежний внесок до повного розв'язку за загальним правилом.

### Часткові випадки і приклади

**1. Два півпростори з внутрішнім включенням, паралельним до межі поділу матеріалів. Поздовжній зсув зусиллями на безмежності [1006].** Розглянемо спочатку поздовжній зсув зусиллями на безмежності  $\sigma_{yz}^\infty = \sigma_{xz}^\infty = \tau$  кусково-однорідної анізотропної площини, яка складається із двох півплощин  $S_j$ ,  $j = 0, -1$ . Вважатимемо для означеності, що всередині півплощини  $S_0$  паралельно до межі  $y=0$  поділу матеріалів розміщене тонке пружне включення, в основній системі координат  $xOy$  координата центра якого є  $z_{0j} = iH$  ( $j = 0$ ). Включення має довжину  $2a$  і сталу товщину  $2h$ . Відповідні рівняння можна отримати із співвідношень цього параграфу, якщо вважати  $H_0, H_{-1} \rightarrow \infty$ .

Умови взаємодії (23.72) для пружного анізотропного включення мають конкретний вигляд (15.12):

$$\sigma^{j+}(x_j) + \sigma^{j-}(x_j) = \left( 2N^j + \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_j} \mathbf{f}^j(t) dt \right) \Lambda, \quad x_j \in [-a; a], \quad j = 0. \quad (23.96)$$

Тут

$$\sigma^j(z) = \left\| \sigma_{y_j z}^j(z), \partial w^j(z) / \partial x_j \right\|, \quad \mathbf{f}^j(t) = \left\| f_3^j(z), f_6^j(z) \right\|,$$

$$\Lambda = \frac{1}{a_{44B}} \left\| \begin{array}{cc} -a_{45B} & |r^B|^2 \\ -1 & -a_{45B} \end{array} \right\|; \quad N^j = (N_1^j; N_2^j) - \text{вектор апіорних сталих};$$

$$N_1^j = \sigma_{x_j z}^{0j}(-a) \frac{a_{44j}}{\max(a_{44j}, a_{44B})},$$

$$N_2^j = -\frac{\min(a_{44j}, a_{44B})}{a_{44j}} \left[ a_{44j} \sigma_{y_j z}^{0j}(-a) + a_{45j} \sigma_{x_j z}^{0j}(-a) \right].$$

Основний збурений однорідний розв'язок для півплощини  $S_0$  (вираз (23.89) при  $j = 0$ ) на лінії  $y = 0$  є тоді таким:

$$\hat{\sigma}_{yz}^{0,0} \Big|_{y=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi, x) d\xi, \quad \frac{\partial \hat{w}^{0,0}}{\partial x} \Big|_{y=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\xi, x) d\xi,$$

$$q(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\xi x} e^{-\lambda_1^0 H} \left( \int_{L'_0} f_3^0(t) e^{i\xi t} dt + \frac{\text{sign}(\xi) i}{a_{550} \alpha^0} \int_{L'_0} f_6^0(t) e^{i\xi t} dt \right), \quad (23.97)$$

$$r(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\xi x} e^{-\lambda_1^0 H} \left( -a_{550} \alpha^0 \text{sign}(\xi) i \int_{L'_0} f_3^0(t) e^{i\xi t} dt + \int_{L'_0} f_6^0(t) e^{i\xi t} dt \right).$$

Коригувальний збурений однорідний розв'язок у півплощинах  $S_0$  і  $S_{-1}$  отримується із залежності (23.90) при  $j = 0, -1$ , відповідно, з урахуванням того, що  $A_1^0(\xi) = A_2^{-1}(\xi) = 0$ . Тоді

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1,0}(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi A_2^0(\xi) e^{\lambda_2^0 y} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \hat{\sigma}_{xz}^{1,0}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2^0(\xi) \lambda_2^0 e^{\lambda_2^0 y} e^{-i\xi x} d\xi; \quad (23.98)$$

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1,-1}(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi A_1^{-1}(\xi) e^{\lambda_1^{-1} y} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \hat{\sigma}_{xz}^{1,-1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1^{-1}(\xi) \lambda_1^{-1} e^{\lambda_1^{-1} y} e^{-i\xi x} d\xi.$$

Похідні переміщень  $\partial \hat{w}^{1,-1} / \partial x$  та  $\partial \hat{w}^{1,0} / \partial x$  обчислюються з урахуванням закону Гука (13.23).

Коли ми підставимо вирази (23.97), (23.98) в умови ідеального механічного контакту (23.78) при  $L = 0$ ,  $M = 1$ , буде отримана система лінійних алгебричних рівнянь

$$A_1^{-1}(\xi) - A_2^0(\xi) = \frac{2\pi q(\xi, x) e^{i\xi x}}{i\xi}, \quad (23.99)$$

$$a_{55,-1} \alpha^{-1} A_1^{-1}(\xi) - a_{550} \alpha^0 A_2^0(\xi) = \frac{2\pi r(\xi, x) e^{i\xi x}}{|\xi|},$$

розв'язок якої має вигляд

$$A_1^{-1}(\xi) = \frac{2\pi\gamma^0 r(\xi, x)e^{i\xi x}}{|\xi|} + \frac{a_{550}\alpha^0 2\pi\gamma^0 q(\xi, x)e^{i\xi x}}{i\xi}, \quad (23.100)$$

$$A_2^0(\xi) = \frac{2\pi\gamma^0 r(\xi, x)e^{i\xi x}}{|\xi|} - \frac{a_{55,-1}\alpha^{-1} 2\pi\gamma^0 q(\xi, x)e^{i\xi x}}{i\xi}.$$

Підстановкою залежності (23.93) при  $j = 0$  у вирази (23.100), (23.98) отримується коригувальний однорідний розв'язок

$$\sigma_{yz}^{010} + i\sigma_{xz}^{010} = \frac{Q^0 \delta}{4\pi} \left( \frac{g_p^0}{z_3^0} - \frac{\bar{g}_m^0}{\bar{z}_3^0} \right) - \frac{ib^0 \delta}{4\pi a_{550}\alpha^0} \left( \frac{g_p^0}{z_3^0} + \frac{\bar{g}_m^0}{\bar{z}_3^0} \right), \quad (23.101)$$

$$z_3^j = (x - x_{*j}) + \beta^j (y - y_{*j}) + i\alpha^j (y + y_{*j}), \quad \delta = \gamma^0 (a_{550}\alpha^0 - a_{55,-1}\alpha^{-1})$$

для сили  $Q^0$  й дислокації  $b^0$  у точці  $z_{*0}$ . Основний однорідний розв'язок для цього навантаження отримується з виразу (23.94) при  $j = 0$ .

Після підстановки повного розв'язку для верхньої півплощини  $S_0$  (див. рівність (23.75)) в умови взаємодії (23.96), отримують визначальну систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{h} \int_{-a}^{x_0} \mathbf{f}^0(t) \Lambda dt + \mathbf{t}^0(x_0) \mathbf{V} + \mathbf{t}^0(x_0 - 2i\alpha^0 H) \mathbf{D} + \mathbf{t}^0(x_0 + 2i\alpha^0 H) \mathbf{B} = \quad (23.102)$$

$$= 2\boldsymbol{\sigma}^{0,0}(x_0, 0) - 2\mathbf{N}^0 \Lambda \quad (x_0 \in [-a; a]),$$

де

$$\mathbf{t}^j(z) = \left\| t_3^j(z), t_6^j(z) \right\|,$$

$$\mathbf{V} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -a_{550}\alpha^0 \\ 1 & 0 \\ a_{550}\alpha^0 & \end{array} \right\|, \quad \mathbf{D} = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{i\delta}{2} & \frac{a_{550}\alpha^0 \delta}{2} \\ \delta & \frac{i\delta}{2} \\ 2a_{550}\alpha^0 & \end{array} \right\|, \quad \mathbf{B} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{i\delta}{2} & \frac{a_{550}\alpha^0 \delta}{2} \\ \delta & -\frac{i\delta}{2} \\ 2a_{550}\alpha^0 & \end{array} \right\|.$$

Використовуючи умову однозначності переміщень під час обходу навколо включення та те, що до включення зовнішнє навантаження не прикладене, отримуємо додаткову умову

$$\int_{L'_0} \mathbf{f}^0(t) dt = 0. \quad (23.103)$$

Систему сингулярних інтегральних рівнянь (23.102), (23.103) стосовно функцій стрибка  $f_3^0(t)$ ,  $f_6^0(t)$  в усіх розглянутих способах навантажування розв'язано з точністю до 1% методом колокацій. Обчислення виконано для тих випадків, коли матеріалом півплощини  $S_0$  є однонаправлений намоточний склопластик [43]

$$\{a_{442} = 1/G_{yz}; a_{552} = 1/G_{xz}; a_{452}\} = \{0, 2; 0, 174; 0\} \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1};$$

матеріалом півплощини  $S_{-1}$  є або ортогонально напрямлений намоточний склопластик

$$\{a_{441}; a_{551}; a_{451}\} = \{0, 271; 0, 273; 0\} \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1},$$

або абсолютно податний матеріал чи абсолютно жорсткий матеріал (відповідно суцільна, пунктирна та штрихова лінії на рис. 1, 2). Включення є ізотропним:  $a_{55B}/a_{44B} = 1$ ,  $a_{45B} = 0$ .

Випадок абсолютної жорсткості області  $S_1$  еквівалентний задачі для анізотропної пів-

площини  $S_0$  із защемленим краєм; випадок абсолютної податності  $S_{-1}$  – задачі для анізотропної півплощини  $S_0$ , коли на межі задані зусилля  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ . Незалежно від пружних властивостей півплощини  $S_{-1}$  і способу навантажування відповідна лінія графічної залежності УКІН завжди лежатиме між відповідною для механічних властивостей матриці пунктирною і штриховою лініями.

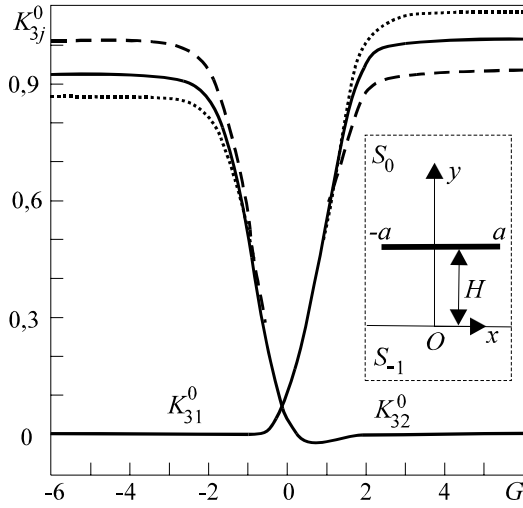


Рис. 23.24

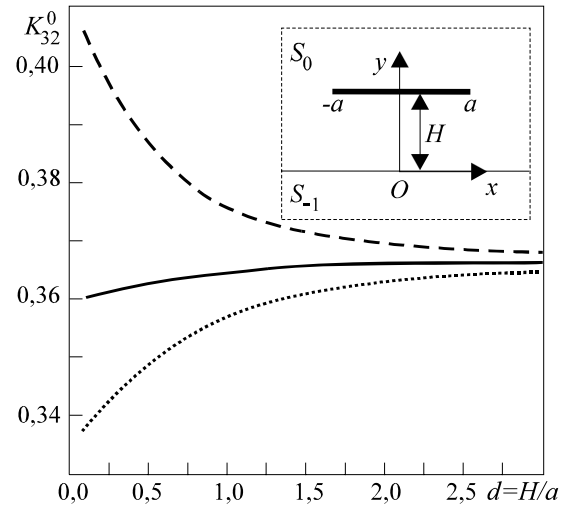


Рис. 23.25

Рис. 23.24 відображає залежність безрозмірних УКІН  $K_{3j}^0 = K_{3j} / \tau \sqrt{a\pi}$ ,  $j = 1, 2$  від параметра жорсткості включення  $G = \lg(a_{44B}/a_{442})$  у випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності. Включення розміщене на відносній глибині  $d = H/a = 1$  від межі поділу півплощин  $y = 0$ . Для  $G > 3$  і  $G < -3$  числові розв'язки з точністю до 1% виходять на граничні значення, властиві розв'язкам для щілини та абсолютно жорсткого включення відповідно.

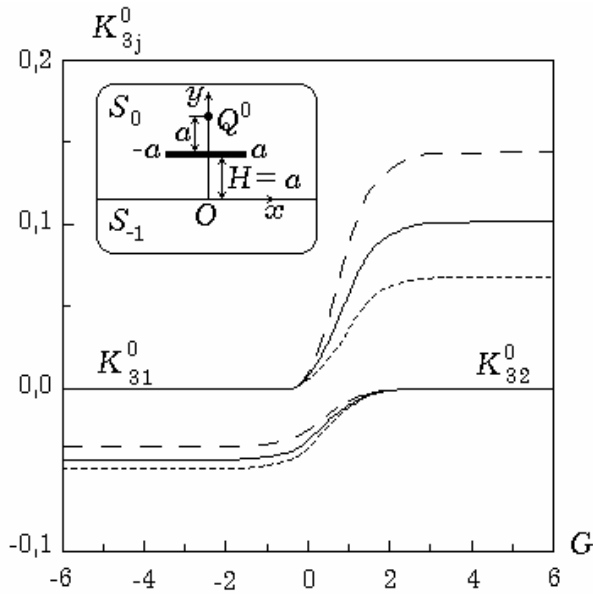


Рис. 23.26

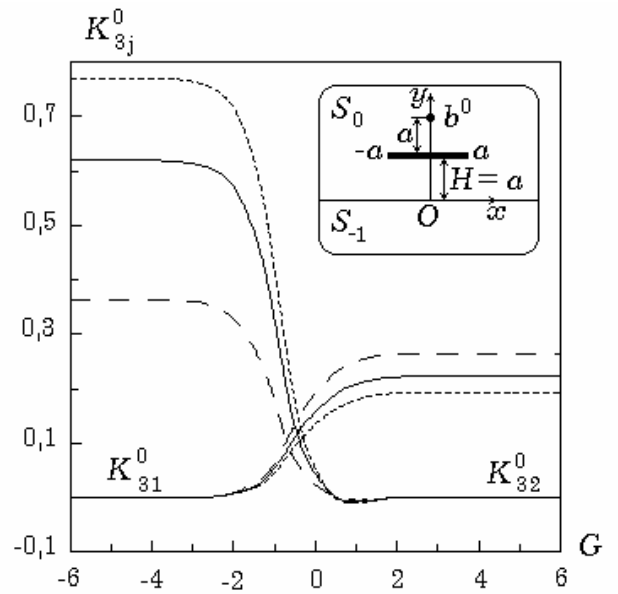


Рис. 23.27

На рис. 23.25 відображено залежність  $K_{32}^0 = K_{32}/\tau\sqrt{a\pi}$  від відносного заглиблення  $d = H/a$  включення. Якщо  $d \rightarrow \infty$ , криві виходять на розв'язок для пружного включення в однорідній площині, який з точністю до 1% отримуємо вже при  $d = 3$ .

**2. Два півпростори з внутрішнім включенням, паралельним до межі поділу матеріалів. Дія зосереджених сил і гвинтових дислокацій [1663].** Подібним способом з урахуванням зміни функцій  $\sigma_{xz}^0, \sigma_{yz}^0$  отримується розв'язок задачі про вплив на концентрацію напружень біля включення зосереджених сил і дислокацій. Рис. 23.26 подає залежність безрозмірного УКІН  $K_{3j}^0 = K_{3j}\sqrt{a/Q^0}\sqrt{\pi}$  від параметра відносної жорсткості включення  $G = \lg(a_{44B}/a_{440})$ . Включення розміщене на відносній глибині  $d \equiv H/a = 1$  від межі поділу матеріалів  $y = 0$ . Зосереджена сила  $Q^0$  діє у точці  $(0, 2a)$ .

Рис. 23.27 відображує аналогічну залежність, якщо у точці  $(0, 2a)$  діє гвинтова дислокація  $b^0$ . Для такого навантаження вважалось, що  $K_{3j}^0 = K_{3j}a_{550}\sqrt{a}/(0,174b^0\sqrt{\pi})$ . Якщо  $G > 3$  або  $G < -3$ , числові значення з точністю до 1% збігаються з граничними значеннями, які дає точний аналітичний розв'язок для розрізу та абсолютно жорсткого плівкового включення відповідно.

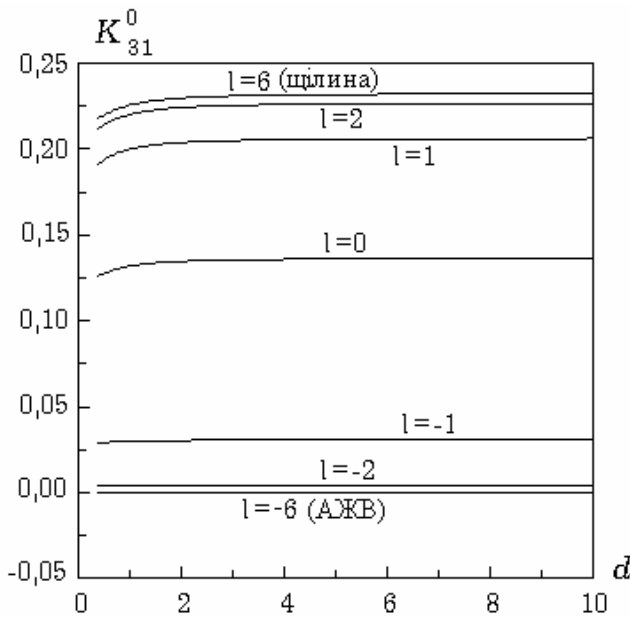


Рис. 23.28

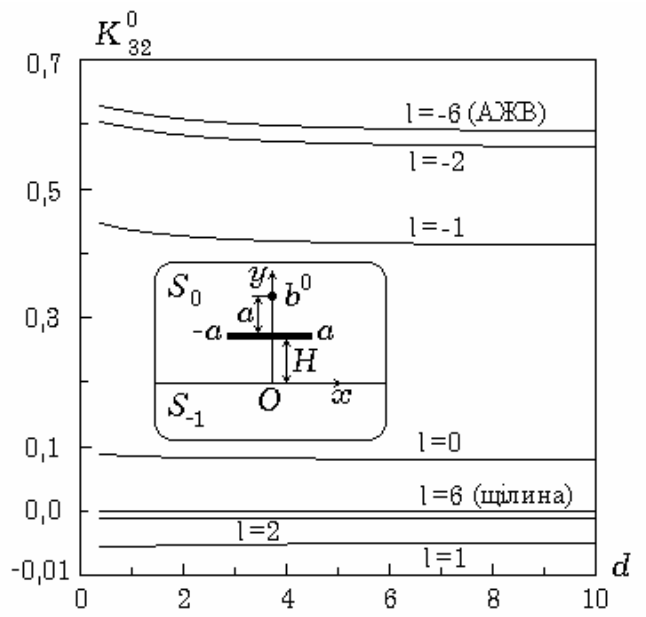


Рис. 23.29

На рис. 23.28, 23.29 подано залежність  $K_{3j}^0 = K_{3j}a_{550}\sqrt{a}/(0,174b^0\sqrt{\pi})$  ( $j = 1, 2$  відповідно) від відносного заглиблення  $d$  включення у верхню півплощину, коли дислокація  $b^0$  діє у точці  $z_{*0} = (0, H + a)$ . Номери  $l$  ліній на рисунках стосується різних податностей матеріалу включення, обчислених за формулою  $a_{44B} = a_{440B} \cdot 10^l$  ( $a_{440B} = 0,1 \cdot 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>). Якщо  $d \rightarrow \infty$ , то в границі отримується розв'язок для пружного включення в однорідному анізотропному масиві (з точністю до 1% збігається із ним за відносного заглиблення включення більшого від  $d = 10$ ).

**3. Вплив пружного стрічкового включення на деформацію поверхні анізотропного півпростору за поздовжнього зсуву [1010, 1117].** Якщо у отриманому вище розв'язку задачі для двох пружних півпросторів вважати, що модулі податності матеріалу  $S_{-1}$  нескінченно малі, то отримаємо розв'язок задачі для області  $S_0$  з включенням та жорстко закріпленням нижнім краєм.

Вважаючи, що  $a_{44,-1} = 0$ ,  $a_{55,-1} = 0$ , отримаємо відповідні інтегральні рівняння та розв'язок задачі про область  $S_0$  ( $y \geq 0$ ) з включенням та вільною від зовнішніх зусиль поверхнею. Розв'язок такої задачі має велике значення хоча б тому, що у задачах технічної діагностики матеріалів та виробів, пошуку копалин постає проблема визначення механічних і геометричних параметрів чужорідних елементів за відомими переміщеннями та деформаціями поверхні досліджуваного тіла. Для розв'язання цієї складної багатопараметричної оберненої задачі потрібні деякі вхідні експериментальні дані, результати інших вимірювань. Першим кроком до вирішення цієї проблеми є детальний аналіз впливу параметрів дефекту на напружено-деформований стан із використанням розв'язку прямої задачі механіки для середовищ із такими включеннями.

У праці [117] досліджено вплив параметрів тонкостінного ізотропного включення на поле деформацій для випадку, коли матеріалом півпростору є однонапрявлений намотувальний склопластик [43]:  $a_{440} = 0,2 \text{ ГПа}^{-1}$ ,  $a_{550} = 0,174 \text{ ГПа}^{-1}$ ,  $a_{450} = 0$ , а включення паралельне до межі півпростору. Міру його жорсткості охарактеризуємо коефіцієнтами податності  $a_{44B} = 0,1 \cdot 10^g \text{ ГПа}^{-1}$ ,  $a_{55B} = 0,1 \cdot 10^g \text{ ГПа}^{-1}$ ,  $a_{45B} = 0$ , залежними від числового параметра  $g$ .

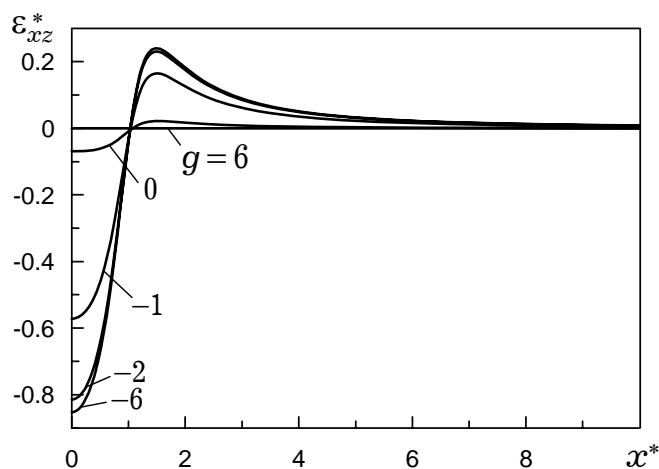


Рис. 23.30

На рис. 23.30 зображено залежність компоненти деформації  $\varepsilon_{xz}^* = \hat{\varepsilon}_{xz} / \varepsilon_{xz}^0$  нормованого збуреного розв'язку від безрозмірної координати  $x^* = x/a$  на межі півпростору  $y=0$  для значень  $g = -6; -2; -1; 0; 6$  (значенню  $g = -6$  відповідає практично абсолютно жорстке включення,  $g = 6$  – майже щілина). Відносна товщина включення  $h/a = 0,1$ , а його відносне заглиблення  $H^* = H/a = 0,5$ . Помітно, що  $\varepsilon_{xz}^*$  змінює свій знак на протилежний в околі  $x^* = 1$ , тобто над вершиною включення. За поздовжнього зсуву зусиллями  $\sigma_{xz}^\infty$  тільки для абсолютно жорсткого включення ( $g = -6$ ) і включень, жорсткіших від середовища ( $g = -6; -2; -1$ ), збурений напружено-деформований стан є істотним. Для податніших він є дуже малим і для щілини – дорівнює нулеві. Тому надалі вплив заглиблення і довжини

включення на поле деформацій досліджено для абсолютно жорсткого включення. У випадку поздовжнього зсуву зусиллями  $\sigma_{yz}^\infty$  результат є протилежним – для щілини та включень, податніших від середовища, збурений напружено-деформований стан є істотним, а для абсолютно жорсткого включення він дорівнює нулеві.

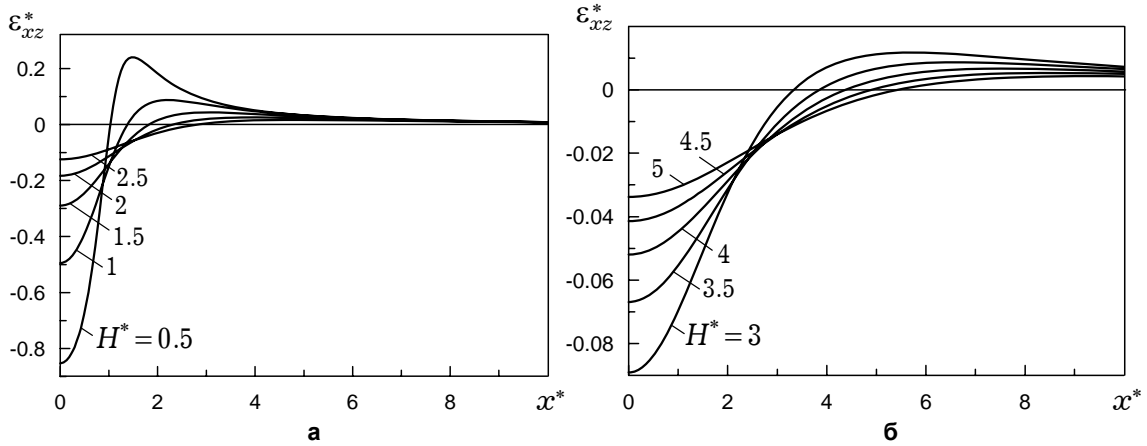


Рис. 23.31

Рис. 23.31 відображає зміну  $\varepsilon_{xz}^*$  на вільній поверхні для різних значень відносної заглибленості ( $H^* = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4, 5; 5$ ) абсолютно жорсткого включення при  $h/a = 0,1$ . Бачимо, що, чим більше заглиблене включення, тим далі від проекції його краю на вільну поверхню нормована компонента деформації  $\varepsilon_{xz}^*$  змінює свій знак, а її величина істотно зменшується.

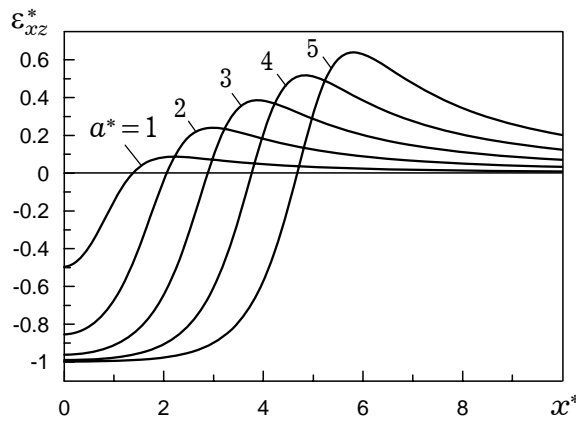


Рис. 23.32

На рис. 23.32 відображено вплив відносної довжини  $a^* = a/H$  включення на залежність компоненти нормованої деформації  $\varepsilon_{xz}^*$  від безрозмірної координати  $x^* = x/H$  на вільній поверхні  $y = 0$ . Помітно, що  $\varepsilon_{xz}$  змінює свій знак на протилежний в околі  $x^* = a^*$ , тобто над проекцією вершини включення. На рис. 23.32–23.34 кривим зі значеннями  $a^* = 1, 2, 3, 4, 5$  відповідають такі значення відносної товщини включення:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{10}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \frac{1}{40}; \frac{1}{50}.$$

Усередині тіла ( $y^* = y/H = 0,2$ ) обидві компоненти деформації  $\varepsilon_{xz}^*$  і  $\varepsilon_{yz}^* = \hat{\varepsilon}_{yz}/\varepsilon_{yz}^0$  нормованого збуреного розв'язку не дорівнюють нулеві. Це дає додаткову інформацію про довжину включення. Компонента деформації  $\varepsilon_{yz}^*$  досягає екстремальних значень над проекцією вершини включення. Ці залежності зображено на рис. 23.33 і 23.34.

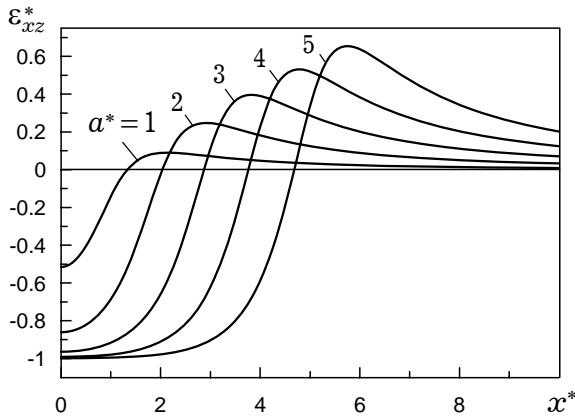


Рис. 23.33

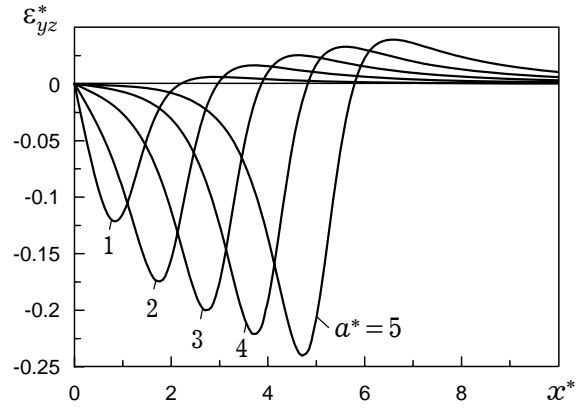


Рис. 23.34

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що, отримавши дані про збурене поле деформацій на поверхні пружного півпростору або під нею, можна визначити розміри і заглиблення включення, яке збурило поле.

**4. Два півпростори з довільно орієнтованим внутрішнім включенням [1003].** Розглянемо антиплоску задачу теорії пружності для кусково-однорідної анізотропної площини, яка складається із двох півплощин  $S_{-1}$  ( $y < 0$ ) та  $S_0$  ( $y > 0$ ) (рис. 23.35).

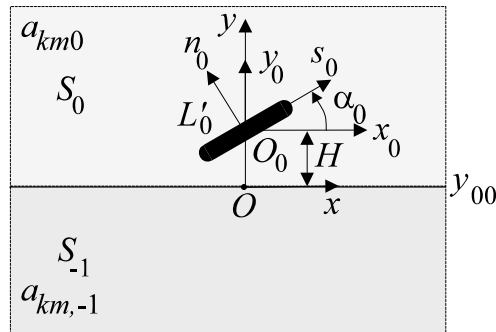


Рис. 23.35

Пружні характеристики матеріалів складових позначимо  $a_{kmj}$  ( $k, m=4, 5; j = -1, 0$ ). Вісь  $Ox$  основної системи декартових координат  $xOy$  спрямуємо вздовж лінії розмежування півплощин. В середині області  $S_0$  уздовж нахилоного під кутом  $\alpha_0$  до осі  $Ox$  відрізка  $L'$  розміщене тонке пружне включення з пружними характеристиками  $a_{kmB}$  ( $k, m=4, 5$ ). Воно має довжину  $2a$  і сталу товщину  $2h$ . Центр  $O_0$  відрізка  $L'$  має координати  $(0, H)$  у основній системі координат  $xOy$ . У центрі  $O_0$  розмістимо початок двох локальних декартових систем координат  $x_0O_0y_0$  та  $s_0O_0n_0$  ( $O_0s_0 \parallel L', O_0x_0 \parallel Ox$ ), пов'язаних між собою залежністю

$$z \equiv x + iy = z_0 + z_{00}, \quad z_0 \equiv x_0 + iy_0, \quad s_0 + in_0 = z_0 e^{-i\alpha_0}. \quad (23.104)$$

Координати точки  $O_0$  в основній системі координат  $xOy$  позначені  $z_{00}$ .



На лінії розмежування матеріалів  $y = y_{00} = 0$  виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yz}^0 = \sigma_{yz}^{-1}, \quad w'^0 = w'^{-1}. \quad (23.105)$$

На нескінченності для визначеності задане однорідне поле напружень

$$\sigma_{yz}^\infty = \tau, \quad \sigma_{xz}^\infty = \tau_j \quad (j = -1, 0). \quad (23.106)$$

Урахування іншого типу навантаження, як відомо, не вносить принципових відмінностей у методику розв'язування задачі.

За принципом спряження континуумів різної вимірності вплив тонкого включення на напружено-деформований стан тіла зводиться до утворення на  $L'$  стрибків вектора напружень та похідної від вектора переміщень

$$\sigma_{nz}^{0-} - \sigma_{nz}^{0+} = f_3(s_0), \quad \frac{\partial}{\partial s_0} [w^{0-} - w^{0+}] = f_6(s_0) \quad (s_0 \in L'), \quad (23.107)$$

причому

$$f_3(s_0) = f_6(s_0) = 0, \quad \text{якщо } s_0 \notin L'.$$

Функцію напружень  $\mathfrak{Z}^j$  у компоненті (складовій)  $S_j$  можна подати у вигляді суперпозиції однорідного  $\mathfrak{Z}^{0j}$ , породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень, і збуреного  $\hat{\mathfrak{Z}}^j$  розв'язків. У свою чергу,  $\hat{\mathfrak{Z}}^j$  є сумою основного збуреного розв'язку  $\hat{\mathfrak{Z}}^{0j}$  для безмежної площини з притаманними  $S_j$  механічними властивостями і включеннями (якщо у  $S_j$  включень немає, то  $\hat{\mathfrak{Z}}^{0j} = 0$ ) та збуреного коригувального  $\hat{\mathfrak{Z}}^{1j}$ , який повинен враховувати скінченність висоти  $H_0$  та вплив сусідніх компонент, не породжуючи стрибків напружень і переміщень.

Однорідний розв'язок відповідає зовнішньому навантаженню та задовольняє умови ідеального механічного контакту (23.105). Під час переходу через вісь включення він не викликає стрибків напружень та переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти умови ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів та породжувати стрибки напружень і похідних від переміщень (23.107).

Розв'язок рівняння (23.74) щодо пружного потенціалу у просторі зображень інтегрального перетворення Фур'є має вигляд

$$\mathfrak{Z}^{jF}(\xi, y) = A_1^j(\xi) e^{\lambda_1^j y} + A_2^j(\xi) e^{\lambda_2^j y}, \quad (23.108)$$

де

$$\lambda_1^j = \alpha^j |\xi| - i\beta^j \xi, \quad \lambda_2^j = -\alpha^j |\xi| - i\beta^j \xi, \quad \alpha^j = \frac{\sqrt{a_{44j} a_{55j} - a_{44j}^2}}{a_{55j}}, \quad \beta^j = \frac{a_{45j}}{a_{55j}} \quad (j = -1, 0);$$

$A_q^j(\xi)$  ( $q = 1, 2; j = -1, 0$ ) – наперед невідомі функції.

Оскільки функція напружень повинна бути обмеженою в разі  $y \rightarrow \pm\infty$ , то

$$\mathfrak{Z}^{jF}(\xi, y) = \begin{cases} A_2^0 e^{\lambda_2^0 y} & (j = 0; y > 0), \\ A_1^{-1} e^{\lambda_1^{-1} y} & (j = -1; y < 0). \end{cases} \quad (23.109)$$

У просторі зображень для напружень виконується залежність

$$\sigma_{xz}^{jF} = \frac{\partial \mathfrak{Z}^{jF}(\xi, y)}{\partial y}, \quad \sigma_{yz}^{jF} = i\xi \mathfrak{Z}^{jF}(\xi, y). \quad (23.110)$$

З умови відсутності повертання лінії поділу матеріалів на нескінченності отримаємо зв'язок між зусиллями на безмежності

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( w^0 - w^{-1} \right) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( w^{00} - w^{0,-1} \right) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \\ &= a_{450} \tau + a_{550} \tau_0 - a_{45,-1} \tau - a_{55,-1} \tau_{-1} = 0. \end{aligned} \quad (23.111)$$

Вираз для напружень від повернутого на кут  $\alpha_0$  включення в однорідній площині з матеріалу  $S_0$  має вигляд

$$\hat{\sigma}_{y_0 z}^{00} + i \hat{\sigma}_{x_0 z}^{00} = \frac{1}{4} \left[ g_p'^0 t_3(z_0) - \bar{g}_m'^0 t_3(\bar{z}_0) \right] + \frac{i}{4 a_{550}' \alpha'^0} \left[ g_p'^0 t_6(z_0) + \bar{g}_m'^0 t_6(\bar{z}_0) \right], \quad (23.112)$$

де

$$\begin{aligned} t_r(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(t) dt}{t-z}, \quad g_p^j = \beta^j + i(\alpha^j + 1), \quad g_m^j = \beta^j + i(\alpha^j - 1), \\ z_j &= x_j + \beta^j y_j + i y_j \alpha^j \quad (r = 3, 6; j = 0, -1). \end{aligned}$$

Для однорідної площини із включенням, повернутим на кут  $\alpha_0$  відносно осі  $O_0 x_0$  вираз (23.112) для напружень у системі координат  $s_0 O_0 n_0$  збережеться, лише у ньому слід формально замінити  $x_0$  та  $y_0$  на  $s_0, n_0$  відповідно; сталі  $a_{kmj}, \alpha^j, \beta^j$  – на

$$a'_{kmj}, \alpha'^j = \frac{\sqrt{a'_{44j} a'_{55j} - a'_{44j}{}^2}}{a'_{55j}}, \quad \beta'^j = \frac{a'_{45j}}{a'_{55j}} \quad (j = -1, 0)$$

відповідно. Сталі  $a'_{kmj}$  характеризують пружні властивості матеріалу в повернутій системі координат  $s_0 O_0 n_0$  і їх зв'язок з  $a_{kmj}$  дається формулою (23.35).

Скориставшись залежністю

$$\sigma_{yz} + i \sigma_{xz} = e^{-i\alpha_0} (\sigma_{nz} + i \sigma_{sz}),$$

виразу для напружень в основній системі координат від повернутого на кут  $\alpha_0$  включення в однорідній площині надамо вигляду

$$\hat{\sigma}_{yz}^{00} + i \hat{\sigma}_{xz}^{00} = \frac{e^{-i\alpha_0}}{4} \left[ g_p'^0 t_3(z_0) - \bar{g}_m'^0 t_3(\bar{z}_0) \right] + \frac{i e^{-i\alpha_0}}{4 a_{550}' \alpha'^0} \left[ g_p'^0 t_6(z_0) + \bar{g}_m'^0 t_6(\bar{z}_0) \right], \quad (23.113)$$

Залежність (23.113) є основним збуреним розв'язком для півплощини  $S_0$ . Відповідний розв'язок  $\hat{\sigma}_{yz}^{0,-1} + i \hat{\sigma}_{xz}^{0,-1}$  для півплощини  $S_{-1}$  є нульовим.

Коригувальні збурені розв'язки у півплощинах  $S_{-1}$  і  $S_0$  впливають із (23.109), (23.110)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yz}^{1j}(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi A_{j+2}^j(\xi) e^{\lambda_{j+2}^j y} e^{-ix\xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{xz}^{1j}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{j+2}^j A_{j+2}^j(\xi) e^{\lambda_{j+2}^j y} e^{-ix\xi} d\xi \quad (j = 0, -1). \end{aligned} \quad (23.114)$$

Підставивши (23.113) і (23.114) в умову ідеального механічного контакту півплощин (23.105), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$A_1^{-1}(\xi) - A_2^0(\xi) = \frac{B_1(\xi)}{i\xi},$$

$$a_{55,-1}\alpha^{-1}A_1^{-1}(\xi) - a_{550}\alpha^0A_2^0(\xi) = \frac{B_2(\xi)}{|\xi|},$$
(23.115)

де

$$B_1(\xi) = \begin{cases} \frac{i\gamma'^0}{2D_1} C_1(\xi) e^{-i\xi D_2/D_1} & (\xi > 0), \\ \frac{-i\bar{\gamma}'^0}{2D_1} C_2(\xi) e^{-i\xi \bar{D}_2/\bar{D}_1} & (\xi < 0), \end{cases}$$

$$B_2(\xi) = \begin{cases} \frac{i(a_{450}\gamma'^0 + a_{550}\delta'^0)}{2D_1} C_1(\xi) e^{-i\xi D_2/D_1} & (\xi > 0), \\ \frac{-i(a_{450}\bar{\gamma}'^0 + a_{550}\bar{\delta}'^0)}{2D_1} C_2(\xi) e^{-i\xi \bar{D}_2/\bar{D}_1} & (\xi < 0), \end{cases}$$

$$C_1(\xi) = \int_{L'} f_3(t) e^{-i\xi t/D_1} dt + \frac{i}{a'_{550}\alpha'^0} \int_{L'} f_6(t) e^{-i\xi t/D_1} dt,$$

$$C_2(\xi) = \int_{L'} f_3(t) e^{-i\xi t/\bar{D}_1} dt - \frac{i}{a'_{550}\alpha'^0} \int_{L'} f_6(t) e^{-i\xi t/\bar{D}_1} dt,$$

$$D_1 = (\beta'^0 + i\alpha'^0) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0, \quad D_2 = -i\gamma'^0 x_{00} + i\delta'^0 y_{00},$$

$$\delta'^0 = \alpha'^0 \cos \alpha_0 - i(\beta'^0 \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), \quad \gamma'^0 = \alpha'^0 \sin \alpha_0 + i(\cos \alpha_0 - \beta'^0 \sin \alpha_0).$$

Розв'язок цієї системи дорівнює

$$A_1^{-1}(\xi) = \frac{\gamma B_2(\xi) \text{sign}(\xi)}{\xi} + \frac{a_{550}\alpha^0 \gamma B_1(\xi)}{i\xi},$$

$$A_2^0(\xi) = \frac{\gamma B_2(\xi) \text{sign}(\xi)}{\xi} - \frac{a_{550}\alpha^0 \gamma B_1(\xi)}{i\xi}, \quad \gamma = \frac{1}{a_{550}\alpha^0 + a_{55,-1}\alpha^{-1}}.$$
(23.116)

Підставляючи повний розв'язок  $\sigma_{kz}^0 = \sigma_{kz}^{00} + \hat{\sigma}_{kz}^{00} + \hat{\sigma}_{kz}^{10}$  ( $k \sim x, y$ ) для верхньої півплощини Підставивши повний розв'язок для смуги  $S_0$  в умови взаємодії (15.12), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка

$$\frac{1}{h} \int_{-a}^{s_0} \mathbf{f}(t) \mathbf{L} dt + \mathbf{t}(s_0) \mathbf{V} + \mathbf{t}(z_*) \mathbf{D} + \mathbf{t}(\bar{z}_*) \mathbf{B} = 2\sigma^{00} \Big|_{n_0=0} - 2\mathbf{N}^2 \mathbf{L} \quad (s_0 \in [-a; a] \sim L'), \quad (23.117)$$

де

$$\mathbf{t}(z) = (t_3(z), t_6(z)), \quad z_* = D_1(s_0 \sin \alpha_0 + y_{00})(i\alpha^0 - \beta^0) - D_1(s_0 \cos \alpha_0 + x_{00}) - D_2,$$

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0 & -a'_{550}\alpha'^0 \\ 1 & 0 \\ a'_{550}\alpha'^0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = -2 \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = -2 \begin{vmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_{11} = K_n, \quad D_{21} = \frac{iK_n}{a'_{550}\alpha'^0}, \quad D_{12} = a'_{450}K_n + a'_{550}K_s, \quad D_{22} = i\left(\frac{K_s}{\alpha'^0} + \frac{a'_{450}K_n}{a'_{550}\alpha'^0}\right),$$

$$K_n = \frac{i\gamma\left(a_{450}\gamma'^0 + a_{550}\delta'^0 + ia_{55,-1}\alpha^{-1}\gamma'^0\right)}{4}\left(\cos\alpha_0 + \beta^0\sin\alpha_0 - i\alpha^0\sin\alpha_0\right),$$

$$K_s = \frac{i\gamma\left(a_{450}\gamma'^0 + a_{550}\delta'^0 + ia_{55,-1}\alpha^{-1}\gamma'^0\right)}{4}\left(\sin\alpha_0 - \beta^0\cos\alpha_0 + i\alpha^0\cos\alpha_0\right).$$

Вимагаючи однозначності переміщень за обходу по замкнутому контурі включення, отримуємо додаткову умову

$$\int_{L'} \mathbf{f}(t)dt = 0. \quad (23.118)$$

Система (23.117)–(23.118) в загальному випадку розв'язується методом колокацій.

Біля кінців включення всередині  $S_0$  напруження мають кореневу особливість і визначаються за формулами (23.26):

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{yz}(z) - \sigma_{yz}^0(z) \\ \sigma_{xz}(z) - \sigma_{xz}^0(z) \end{array} \right\| = \frac{K_{3,1}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re}\left\{\lambda^1\omega_0^{-1/2}\right\} - \frac{K_{3,2}^n}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im}\left\{\lambda^1\omega_0^{-1/2}\right\} + O(1). \quad (23.119)$$

**Часткові випадки.** У граничному випадку абсолютно податного включення-щілини ( $a_{kmB} \rightarrow \infty$ ) ССІР (23.117)–(23.118) дає

$$f_3(s_0) = 0,$$

та одне сингулярне інтегральне рівняння для визначення  $f_6(s_0)$ .

Коли включення є абсолютно жорстким ( $a_{kmB} \rightarrow 0$ ), то з (23.117)–(23.118) отримуємо

$$f_6(s_0) = 0$$

і сингулярне інтегральне рівняння на  $f_3(s_0)$ . Якщо вважати  $a_{kmB} = a_{km0}$ , права частина ССІР (23.117)–(23.118) дорівнює нулю, що дає

$$\hat{\sigma}_{yz}^j + i\hat{\sigma}_{xz}^j = 0 \quad (j = -1, 0).$$

Підставляючи у формулі (23.117)  $a_{km,-1} = a_{km0}$ , отримуємо

$$\hat{\sigma}_{yz}^{10} + i\hat{\sigma}_{xz}^{10} = 0, \quad \hat{\sigma}_{yz}^{1,-1} + i\hat{\sigma}_{xz}^{1,-1} = \hat{\sigma}_{yz}^{00} + i\hat{\sigma}_{xz}^{00}, \quad (23.120)$$

що збігається з розв'язком антиплоскої задачі для анізотропного однорідного тіла з включенням.

Якщо у формулі (23.117)  $a_{km,-1} \rightarrow \infty$  (матеріал півплощини  $S_{-1}$  є абсолютно податним), то отримуємо

$$A_2^0(\xi) = \begin{cases} -\frac{2\gamma'^0 C_1(\xi) e^{-i\xi D_2/D_1}}{4\xi D_1} & (\xi > 0), \\ \frac{2\bar{\gamma}'^0 C_2(\xi) e^{-i\xi \bar{D}_2/\bar{D}_1}}{4\xi D_1} & (\xi < 0). \end{cases} \quad (23.121)$$

Вираз (23.121) збігається з відповідним розв'язком у задачі поздовжнього зсуву для відокремленого пружного півпростору  $S_0$ , коли на його межі  $y = 0$  задані рівномірно розподілені зусилля  $\sigma_{yz}^0(x, 0) = \tau$ .

Коли ж у співвідношенні (23.117)  $a_{km,-1} \rightarrow 0$  (матеріал півплощини  $S_{-1}$  абсолютно жорсткий), воно набуде вигляду

$$A_2^0(\xi) = \begin{cases} \frac{-2i(a_{450}\gamma'^0 + a_{550}\delta'^0)C_1(\xi)e^{-i\xi D_2/D_1}}{4D_1(a_{450}i\xi + a_{550}\lambda_2^0)} & (\xi > 0), \\ \frac{2i(a_{450}\bar{\gamma}'^0 + a_{550}\bar{\delta}'^0)C_2(\xi)e^{-i\xi \bar{D}_2/\bar{D}_1}}{4\bar{D}_1(a_{450}i\xi + a_{550}\lambda_2^0)} & (\xi < 0). \end{cases} \quad (23.122)$$

Цей результат збігається з відповідним розв'язком у задачі поздовжнього зсуву для відокремленого пружного півпростору  $S_0$  із жорстко защемленим краєм, коли  $w^0(x, 0) = 0$ .

Граничний перехід у співвідношеннях (23.109) – (23.119) від анізотропії пружних властивостей матеріалу до ізотропії

$$a_{45j} \rightarrow 0, \quad a_{44j} \rightarrow a_{55j} \sim \frac{1}{G_j} \quad (j = -1, 0), \quad (23.123)$$

де  $G_j$  – модулі зсуву матеріалів півплощин, дає залежності для включення всередині пружного ізотропного півпростору, що контактує з іншим ізотропним півпростором.

Граничний перехід (23.123) у виразах (23.121), (23.122) дає такі вирази для коригувального збуреного поля напружень:

$$\hat{\sigma}_{yz}^{10} + i\hat{\sigma}_{xz}^{10} = (-1)^k \frac{i}{2\pi} \int_{L'} \frac{f_3(t) + iG_0 f_6(t)}{te^{-i\alpha_0} - z + z_{00}} dt. \quad (23.124)$$

Тут  $k = 0$  за умови задання на границі півпростору напружень (відповідає (23.121)),  $k = 1$  – переміщень (відповідає (23.122)). Бачимо, що зміна типу крайової умови на поверхні півплощини змінює у (23.124) знак коригувального збуреного поля напружень на протилежний.

Якщо кут нахилу включення  $\alpha_0 = 0$ , то будуть отримані усі результати прикладу 1.

**5. Два півпростори, поєднані смугою з включеннями [1004].** Розглянемо антиплоску задачу теорії пружності для кусково-однорідної анізотропної площини, яка складається із двох півплощин  $S_{-1}$  ( $y < 0$ ) та  $S_1$  ( $y > H_0$ ) і анізотропної смуги  $S_0$  ( $H_0 > y > 0$ ) заввишки  $H_0$  (рис. 23.36).

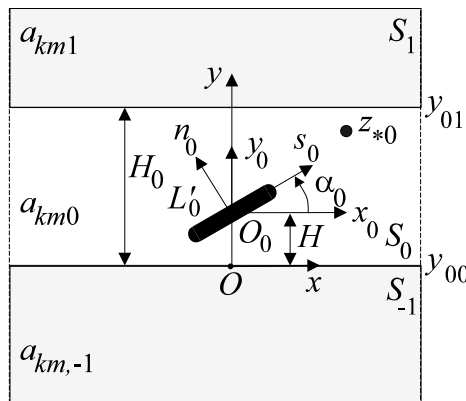


Рис. 23.36. Схема задачі

Пружні характеристики матеріалів складових позначимо  $a_{kmj}$  ( $k, m=4, 5; j = \overline{-1,1}$ ). Вісь  $Ox$  основної системи декартових координат  $xOy$  спрямуємо вздовж лінії розмежування пів-

площини  $S_{-1}$  та смуги  $S_0$ . Всередині області  $S_0$  уздовж нахиленого під кутом  $\alpha_0$  до осі  $Ox$  відрізка  $L'$  розміщене тонке пружне включення з пружними характеристиками  $a_{kmB}$  ( $k, m=4, 5$ ). Воно має довжину  $2a$  і сталу товщину  $2h$ . Центр  $O_0$  відрізка  $L'$  має координати  $(0, H)$  у основній системі координат  $xOy$ . У центрі  $O_0$  розмістимо початок двох локальних декартових систем координат  $x_0O_0y_0$  та  $s_0O_0n_0$  ( $O_0s_0 \parallel L'$ ,  $O_0x_0 \parallel Ox$ ), пов'язаних між собою залежністю

$$z \equiv x + iy = z_0 + z_{00}, \quad z_0 \equiv x_0 + iy_0, \quad s_0 + in_0 = z_0 e^{-i\alpha_0}. \quad (23.125)$$

Координати точки  $O_0$  в основній системі координат  $xOy$  позначені  $z_{00}$ .

На лініях розмежування матеріалів  $y = y_{00} = 0$  та  $y = y_{01} = H_0$  виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yz}^{j+1} = \sigma_{yz}^j, \quad w'^{j+1} = w'^j \quad (j = -1, 0). \quad (23.126)$$

За принципом спряження континуумів різної вимірності вплив тонкого включення на напружено-деформований стан тіла зводиться до утворення на  $L'$  стрибків вектора напружень та похідної від вектора переміщень

$$\sigma_{nz}^{0-} - \sigma_{nz}^{0+} = f_3(s_0), \quad \frac{\partial}{\partial s_0} [w^{0-} - w^{0+}] = f_6(s_0) \quad (s_0 \in L'), \quad (23.127)$$

причому

$$f_3(s_0) = f_6(s_0) = 0, \quad \text{якщо } s_0 \notin L'.$$

Функцію напружень  $\mathfrak{F}^j$  у компоненті (складовій)  $S_j$  можна подати у вигляді суперпозиції однорідного  $\mathfrak{F}^{0j}$ , породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень, і збуреного  $\hat{\mathfrak{F}}^j$  розв'язків. У свою чергу,  $\hat{\mathfrak{F}}^j$  є сумою основного збуреного розв'язку  $\hat{\mathfrak{S}}^{0j}$  для безмежної площини з притаманними  $S_j$  механічними властивостями і включеннями (якщо у  $S_j$  включень немає, то  $\hat{\mathfrak{S}}^{0j} = 0$ ) та збуреного коригувального  $\hat{\mathfrak{S}}^{1j}$ , який повинен враховувати скінченність висоти  $H_0$  та вплив сусідніх компонент, не породжуючи стрибків напружень і переміщень. Однорідний розв'язок відповідає зовнішньому навантаженню та задовольняє умови ідеального механічного контакту (23.126). Під час переходу через вісь включення він не викликає стрибків напружень та переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти умови ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів та породжувати стрибки напружень і похідних від переміщень (23.127).

Подібно до того, як це було зроблено у попередньому прикладі, вираз для напружень від повернутого на кут  $\alpha_0$  включення в однорідній площині має вигляд

$$\hat{\sigma}_{yz}^{00} + i\hat{\sigma}_{xz}^{00} = \frac{e^{-i\alpha_0}}{4} [g_p'^0 t_3(z_0) - \bar{g}_m'^0 t_3(\bar{z}_0)] + \frac{ie^{-i\alpha_0}}{4a'_{550}\alpha'^0} [g_p'^0 t_6(z_0) + \bar{g}_m'^0 t_6(\bar{z}_0)]. \quad (23.128)$$

Тут

$$g_p'^0 = \beta'^0 + i(\alpha'^0 + 1), \quad g_m'^0 = \beta'^0 + i(\alpha'^0 - 1), \quad \alpha'^0 = \frac{\sqrt{a'_{440}a'_{550} - (a'_{450})^2}}{a'_{550}},$$

$$\beta'^0 = a'_{450}/a'_{550}, \quad t_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(t) dt}{t - z} \quad (r = 3, 6), \quad z_0 = x_0 + \beta'^0 y_0 + i\alpha'^0 y_0.$$

Залежність (23.128) є основним збуреним розв'язком для смуги  $S_0$ . Відповідний розв'язок для півплощин  $S_{-1}$  та  $S_1$ , внаслідок відсутності там включень, дорівнює нулю.

Розв'язок рівняння (23.74) у просторі зображень інтегрального перетворення Фур'є має вигляд

$$\mathfrak{F}^{jF}(\xi, y) = A_1^j(\xi)e^{\lambda_1^j y} + A_2^j(\xi)e^{\lambda_2^j y}, \quad (23.129)$$

де

$$\lambda_1^j = \alpha^j |\xi| - i\beta^j \xi, \quad \lambda_2^j = -\alpha^j |\xi| - i\beta^j \xi.$$

Із подання (23.129) отримаємо коригувальні збурені розв'язки

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{yz}^{1,-1}(x, y) \\ \hat{\sigma}_{xz}^{1,-1}(x, y) \end{array} \right\| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{i\xi}{\lambda_1^{-1}} \right\| \left\| A_1^{-1}(\xi) e^{\lambda_1^{-1} y} e^{-ix\xi} d\xi \right\|, \\ \left\| \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{yz}^{10}(x, y) \\ \hat{\sigma}_{xz}^{10}(x, y) \end{array} \right\| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left\| \frac{i\xi}{\lambda_1^0} \right\| \left\| A_1^0(\xi) e^{\lambda_1^0 y} \right\| + \left\| \frac{i\xi}{\lambda_2^0} \right\| \left\| A_2^0(\xi) e^{\lambda_2^0 y} \right\| \right] e^{-ix\xi} d\xi, \\ \left\| \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{yz}^{11}(x, y) \\ \hat{\sigma}_{xz}^{11}(x, y) \end{array} \right\| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{i\xi}{\lambda_2^1} \right\| \left\| A_2^1(\xi) e^{\lambda_2^1 y} e^{-ix\xi} d\xi \right\|. \end{aligned} \quad (23.130)$$

Підставивши вирази (23.128) і (23.130) в умови ідеального механічного контакту (23.126), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь, розв'язок якої має вигляд:

$$\begin{aligned} A_1^{-1}(\xi) &= \begin{cases} C^+(\xi, S_1) \frac{e^{-i\xi s_0}}{2S_1 \xi} D_{11}(\xi) + C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{i\bar{k}^{01}(p^{-10} - c^{-10})e^{-i\xi \bar{s}_H}}{2\bar{S}_1 \xi d(\xi)} & (\xi > 0), \\ C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{e^{-i\xi \bar{s}_0}}{2\bar{S}_1 \xi} D_{12}(\xi) + C^+(\xi, S_1) \frac{ik^{01}(p^{-10} - c^{-10})e^{-i\xi s_H}}{2S_1 \xi d(\xi)} & (\xi < 0), \end{cases} \\ A_1^0(\xi) &= \begin{cases} C^+(\xi, S_1) \frac{ik^{0,-1} p^{01} e^{\lambda_2^0 H_0} e^{-i\xi s_0}}{2S_1 \xi d(\xi)} - C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{i\bar{k}^{01} c^{-10} e^{-i\xi \bar{s}_H}}{2\bar{S}_1 \xi d(\xi)} & (\xi > 0), \\ C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{i\bar{k}^{0,-1} p^{01} e^{\lambda_2^0 H_0} e^{-i\xi \bar{s}_0}}{2\bar{S}_1 \xi d(\xi)} - C^+(\xi, S_1) \frac{ik^{01} c^{-10} e^{-i\xi s_H}}{2S_1 \xi d(\xi)} & (\xi < 0), \end{cases} \\ A_2^0(\xi) &= \begin{cases} C^+(\xi, S_1) \frac{ik^{0,-1} c^{01} e^{\lambda_1^0 H_0} e^{-i\xi s_0}}{2S_1 \xi d(\xi)} + C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{i\bar{k}^{01} p^{-10} e^{-i\xi \bar{s}_H}}{2\bar{S}_1 \xi d(\xi)} & (\xi > 0), \\ C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{i\bar{k}^{0,-1} c^{01} e^{\lambda_1^0 H_0} e^{-i\xi \bar{s}_0}}{2\bar{S}_1 \xi d(\xi)} + C^+(\xi, S_1) \frac{ik^{01} p^{-10} e^{-i\xi s_H}}{2S_1 \xi d(\xi)} & (\xi < 0), \end{cases} \\ A_2^1(\xi) &= \begin{cases} C^+(\xi, S_1) \frac{ik^{0,-1}(p^{01} + c^{01})e^{-i\xi s_0}}{2S_1 \xi d(\xi) e^{(\lambda_2^1 - \lambda_2^0 - \lambda_1^0)H_0}} + C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{e^{-i\xi \bar{s}_H} D_{31}(\xi)}{2\bar{S}_1 \xi e^{\lambda_2^1 H_0}} & (\xi > 0), \\ C^-(\xi, \bar{S}_1) \frac{i\bar{k}^{0,-1}(p^{01} + c^{01})e^{-i\xi \bar{s}_0}}{2\bar{S}_1 \xi d(\xi) e^{(\lambda_2^1 - \lambda_2^0 - \lambda_1^0)H_0}} + C^+(\xi, S_1) \frac{e^{-i\xi s_H} D_{32}(\xi)}{2S_1 \xi e^{\lambda_2^1 H_0}} & (\xi < 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (23.131)$$

Тут

$$\begin{aligned} k^{0,-1} &= a_{450}\gamma'^0 + a_{550}\delta'^0 + a_{55,-1}\alpha^{-1}i\gamma'^0, \quad k^{01} = a_{450}\gamma'^0 + a_{550}\delta'^0 + a_{551}\alpha^1 i\gamma'^0, \\ \gamma'^0 &= \alpha'^0 \sin \alpha_0 + i(\cos \alpha_0 - \beta'^0 \sin \alpha_0), \quad \delta'^0 = \alpha'^0 \cos \alpha_0 - i(\beta'^0 \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), \\ d(\xi) &= p^{-10} p^{01} e^{\lambda_2^0 H_0} + c^{-10} c^{01} e^{\lambda_1^0 H_0}, \quad S_{2H} = i(\delta'^0 (y_{00} - H_0) - \gamma'^0 x_{00}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{11}(\xi) &= \gamma'^0 + ik^{0,-1} \left( p^{01} e^{\lambda_2^0 H_0} + c^{01} e^{\lambda_1^0 H_0} \right) / d(\xi), \quad S_1 = \left( \beta'^0 + i\alpha'^0 \right) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0, \\
D_{12}(\xi) &= -\bar{\gamma}'^0 + i\bar{k}^{0,-1} \left( p^{01} e^{\lambda_2^0 H_0} + c^{01} e^{\lambda_1^0 H_0} \right) / d(\xi), \quad S_{00} = i \left( \delta'^0 y_{00} - \gamma'^0 x_{00} \right), \\
D_{31}(\xi) &= \bar{\gamma}'^0 + i\bar{k}^{01} \left( p^{-10} e^{\lambda_2^0 H_0} - c^{-10} e^{\lambda_1^0 H_0} \right) / d(\xi), \quad p^{ij} = a_{55i} \alpha^i - a_{55j} \alpha^j, \\
D_{32}(\xi) &= -\gamma'^0 + ik^{01} \left( p^{-10} e^{\lambda_2^0 H_0} - c^{-10} e^{\lambda_1^0 H_0} \right) / d(\xi), \quad c^{ij} = a_{55i} \alpha^i + a_{55j} \alpha^j, \\
C^\pm(\xi, S) &= \int_{L'} f_3(t) e^{-i\xi t/S} dt \pm \frac{i}{a'_{550} \alpha'^0} \int_{L'} f_6(t) e^{-i\xi t/S} dt, \quad s_0 = \frac{S_{00}}{S_1}, \quad s_H = \frac{S_{2H}}{S_1}.
\end{aligned}$$

Сталі  $a'_{km0}$  характеризують пружні властивості матеріалу в системі координат  $s_0 O_0 n_0$ . Їх зв'язок з базовими сталими  $a_{44} \sim a_{440}$ ,  $a_{45} \sim a_{450}$ ,  $a_{55} \sim a_{550}$ .  $a_{km0}$  подано формулою (23.35).

Підставивши повний розв'язок для смуги  $S_0$  в умови взаємодії (15.12), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка, яка у загальному випадку розв'язується методом колокацій.

Якщо у формулах (23.131) перейти до границь  $a_{km,-1} \rightarrow \infty$  та  $a_{km1} \rightarrow \infty$  (матеріали півплощин  $S_{-1}$  і  $S_1$  є абсолютно податними), то отримаємо розв'язок задачі поздовжнього зсуву виокремленої пружної анізотропної смуги (шару)  $S_0$ , коли на її межах задані розподілені зусилля, причому

$$\begin{aligned}
\frac{p^{01} k^{0,-1}}{d(\xi)} &= \frac{-c^{0,-1} k^{01}}{d(\xi)} = \frac{-c^{01} k^{0,-1}}{d(\xi)} = \frac{p^{0,-1} k^{01}}{d(\xi)} = \frac{i\gamma'^0}{e^{\lambda_2^0 H_0} - e^{\lambda_1^0 H_0}}, \\
\frac{p^{10} \bar{k}^{0,-1}}{d(\xi)} &= \frac{c^{0,-1} \bar{k}^{01}}{d(\xi)} = \frac{c^{01} \bar{k}^{0,-1}}{d(\xi)} = \frac{p^{-10} \bar{k}^{01}}{d(\xi)} = \frac{i\bar{\gamma}'^2}{e^{\lambda_2^0 H_0} - e^{\lambda_1^0 H_0}}.
\end{aligned} \tag{23.132}$$

Коли ж у співвідношеннях (23.131)  $a_{km,-1} \rightarrow 0$  і  $a_{km1} \rightarrow 0$  (матеріали півплощин  $S_{-1}$  та  $S_1$  є абсолютно жорсткими), то для задачі поздовжнього зсуву виокремленої пружної смуги  $S_0$  із жорстко зацмеленими межами відношення (23.132) дорівнюють

$$\begin{aligned}
\frac{p^{01} k^{0,-1}}{d(\xi)} &= \frac{c^{0,-1} k^{23}}{d(\xi)} = \frac{c^{01} k^{0,-1}}{d(\xi)} = \frac{p^{0,-1} k^{01}}{d(\xi)} = \frac{a_{450} \gamma'^0 + a_{550} \delta'^0}{a_{550} \alpha^0 \left( e^{\lambda_1^0 H_0} - e^{\lambda_2^0 H_0} \right)}, \\
\frac{p^{10} \bar{k}^{0,-1}}{d(\xi)} &= \frac{-c^{0,-1} \bar{k}^{01}}{d(\xi)} = \frac{-c^{01} \bar{k}^{0,-1}}{d(\xi)} = \frac{p^{-10} \bar{k}^{01}}{d(\xi)} = \frac{a_{450} \bar{\gamma}'^0 + a_{550} \bar{\delta}'^0}{a_{550} \alpha^0 \left( e^{\lambda_2^0 H_0} - e^{\lambda_1^0 H_0} \right)}.
\end{aligned} \tag{23.133}$$

Підставляючи у формули (23.131)  $a_{km1} = a_{km0}$ , отримаємо  $A_1^0(\xi) = 0$ ; функції  $A_1^{-1}(\xi)$  та  $A_2^0(\xi)$  стають такими, як відповідні функції у задачі поздовжнього зсуву кусково-однорідної анізотропної площини, утвореної двома півплощинами  $S_{-1}$  та  $S_0$  [1003] (див. приклад 4). Такий самий результат отримаємо, здійснивши граничний перехід  $H_0 \rightarrow \infty$ .



### 23.8. Антиплоска задача для тріщини перпендикулярної до межі поділу двох анізотропних півпросторів [125]

У роботі [1155] одержані асимптотичні вирази для напружень біля кінця тріщини, перпендикулярної до межі поділу матеріалів і розташованої як завгодно близько до неї. У праці [1154] отриманий аналітичний вираз для напружень, коли тріщина перпендикулярна до межі поділу півпросторів і розташована симетрично відносно неї. Досліджено плоску задачу для тріщини, що перетинає межу поділу матеріалів [1272, 1402]. У згаданих працях розглядалися ізотропні матеріали. Нижче досліджується вплив ортотропії на коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у задачі поздовжнього зсуву про тріщину, перпендикулярну до межі поділу двох анізотропних матеріалів. У випадку ортотропних матеріалів будується апроксимаційна формула для нього, залежна від відносної жорсткості півпросторів і розташування тріщини.

#### Побудова сингулярного інтегрального рівняння задачі

Розглядається віднесене до системи координат  $Oxyz$  суцільне кусково-однорідне середовище, що складається з двох анізотропних півпросторів  $S_k$  (рис. 23.37) з різними пружними властивостями, що характеризуються коефіцієнтами податності  $a_{44k}, a_{55k}, a_{45k}$  ( $k = 1, 2$ ). Площина  $xOz$  збігається з площиною поділу матеріалів. Тунельна тріщина з вільними від навантажень берегами завширшки  $2a$  лежить у площині  $yOz$  і її нижній фронт перебуває на відстані  $c$  від поверхні поділу. Композиція перебуває в умовах поздовжнього зсуву вздовж осі  $Oz$  під впливом однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_k$  ( $z \in S_k$ ),  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ .

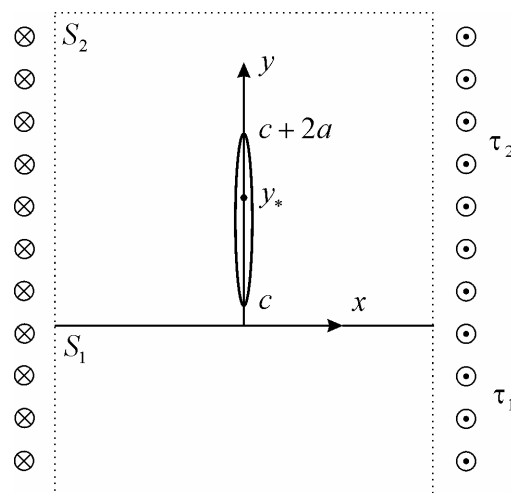


Рис. 23.37. Схема задачі

Для побудови розв'язку задачі спочатку розглянемо розв'язок задачі про навантаження бездефектного кусково-однорідного середовища  $S_1 \cup S_2$  згаданим напруженням  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_k$  ( $z \in S_k$ ),  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$  та гвинтовою дислокацією з вектором Бюргерса  $b_6$  (за механічним змістом - зосередженою функцією стрибка переміщень) у точці  $z_* = iy_* \in S_2$ . Згадане навантаження породжує поле напружень

$$\sigma(z) = \left\| \sigma_{yz}(z), \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right\| = \sigma^\infty + \mathbf{G}_{22}^0(z^k) \mathbf{M}^{kk} + \frac{r_k - r_l}{r_k + r_l} \left[ \overline{\mathbf{G}}_{kk}^0(z^k) - \mathbf{G}_{ll}^0(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk} \quad (23.134)$$

$$(z \in S_k; \quad k=1,2; \quad l=3-k),$$

де

$$\sigma^\infty = \left\| \tau, w^k \right\| \quad (w^k = a_{45k} \tau + a_{55k} \tau_k),$$

$$\mathbf{G}_{ll}^0(z^k) = \left\| G_l(z^k), \overline{G_l(z^k)} \right\|, \quad G_l(z^k) = \frac{b_6}{4\pi i r_l} \frac{1}{z^k - z_*^l}, \quad \mathbf{G}_{11}^0(z^k) = 0,$$

$$\mathbf{M}^{kj} = \left\| M_{mn}^{kj} \right\|, \quad M_{m1}^{kj} = -1, \quad M_{12}^{kj} = r_k, \quad M_{22}^{kj} = -r_j,$$

$$s^k = s_1^k + i s_2^k, \quad s_1^k = \frac{a_{45k}}{a_{55k}}, \quad s_2^k = \frac{|r^k|}{a_{55k}}, \quad r_k = \sqrt{(a_{45k})^2 - a_{44k} a_{55k}} = i |r_k|,$$

$$z_*^k = x_*^k + i y_*^k = x_* + s^k y_*.$$

Вважаємо, що параметр  $r_k$  характеризує жорсткість матеріалу півпростору.

Використовуючи співвідношення (23.134), запишемо вирази для компоненти тензора напружень  $\sigma_{yz}(z)$  і похідної переміщення  $\partial w(z)/\partial z$  у півпросторі ( $z \in S_2$ )

$$\sigma_{yz}(z) = \tau - \frac{b_6}{4\pi i r_2} \left[ \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} \right],$$

$$\frac{\partial w(z)}{\partial x} = w^2 + \frac{b_6}{4\pi i r_2} r_2 \left[ \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} - \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} \right] \quad (23.135)$$

$$(z \in S_2).$$

На основі виразу (23.135) та закону Гука

$$\sigma_{xz}(z) = -\frac{a_{45k}}{a_{55k}} \sigma_{yz}(z) + \frac{1}{a_{55k}} \frac{\partial w(z)}{\partial x} \quad (z \in S_k, \quad k=1,2) \quad (23.136)$$

отримується вираз для другої ненульової компоненти тензора напружень

$$\sigma_{xz}(z) = \tau_2 + \frac{b_6(y_*)}{2\pi i r_2 a_{552}} \operatorname{Re} \left[ (a_{452} + r_2) \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{(r_2 + a_{452})(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} \right] \quad (23.137)$$

$$(z \in S_2).$$

Тріщина, перпендикулярна до межі поділу матеріалів, моделюється неперервно розподіленими гвинтовими дислокаціями уздовж відрізка  $y_* = [c, 2a + c]$ ,  $x_* = 0$  з наперед невідомою функцією стрибка (густини розподілу вектора Бюргерса)  $b_6(y_*)$  [1154, 115, 111]. У цьому випадку напруження  $\sigma_{xz}$  у довільній точці середовища дорівнюють

$$\sigma_{xz}(z) = \tau_2 + \frac{1}{2\pi i r_2 a_{552}} \int_c^{c+2a} b_6(y_*) \operatorname{Re} \left[ (a_{452} + r_2) \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{(r_2 + a_{452})(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} \right] dy_* \quad (23.138)$$

Оскільки береги тріщини вільні від навантаження, то крайова умова на поверхні тріщини

$$\sigma_{xz}^{\pm}(iy) = 0, \quad y \in [c; 2a + c] \quad (23.139)$$

дає можливість отримати сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i r_2 a_{552}} \int_c^{c+2a} b_6(y_*) \operatorname{Re} \left[ \frac{(a_{452} + r_2)}{s^2} \frac{1}{y - y_*} + \frac{(r_2 + a_{452})(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2} \frac{1}{s^2 y - s^2 y_*} \right] dy_* = -\tau_2, \quad (23.140)$$

$$y \in [c; 2a + c]$$

стосовно шуканої густини вектора Бюргерса  $b_6(y_*)$ .

Умови однозначності зміщень під час обходу навколо тріщини запишуться так [111]:

$$\int_{-a}^a b_6(y_*) dy_* = 0. \quad (23.141)$$

Після заміни змінних

$$p = y_* - c - a, \quad t = y - c - a, \quad b_6(y_*) = b_6(p + c + a) \equiv b(p) \quad (23.142)$$

сингулярне інтегральне рівняння (23.140) набуде вигляду

$$B \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{b(p)}{p-t} dp + \int_{-a}^a K(p,t) b(p) dp = F(t), \quad (23.143)$$

де

$$B = \frac{1}{2i r_2 a_{552}} \operatorname{Re} \left[ \frac{(a_{452} + r_2)}{s^2} \right] = \frac{1}{2i r_2}, \quad F(t) = \tau_2, \quad (23.144)$$

$$K(p,t) = \frac{1}{2\pi i r_2} \operatorname{Re} \left[ \frac{(r_2 - r_1) s^2}{r_1 + r_2} \frac{1}{s^2 (p + c + a) - s^2 (t + c + a)} \right].$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень визначається функцією  $b(p)$  таким чином:

$$K_3 = \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{p \rightarrow \mp a} \left[ \sqrt{|p \pm a|} b(p) \right]. \quad (23.145)$$

### Числові результати

Для прикладу досліджено залежність КІН від жорсткості матеріалів півпросторів та геометрії розташування тріщини за дії однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_k$  ( $\sigma_{yz}^{\infty} = 0$ ). Зазначимо, що напруження  $\sigma_{yz}^{\infty}$  за такої геометрії задачі не впливають на КІН.

Обчислення КІН ґрунтується на залежності

$$K_3 = \frac{\sqrt{\pi a}}{2|r_2|} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_n, \quad (23.146)$$

де  $A_n$  - коефіцієнти розв'язання густини розподілу функції густини розподілу (стрибка) за ортогональними многочленами з виділеною кореневою особливістю

$$b(p) = \frac{1}{\sqrt{1 - (p/a)^2}} \sum_{n=0}^N A_n T_n \left( \frac{p}{a} \right). \quad (23.147)$$

Тут  $T_n(x)$  – многочлени Чебишева першого роду.

Розглядалися такі типи кусково-однорідної матриці:

- 1) верхній півпростір (у якому розміщена тріщина) жорсткіший від нижнього;
- 2) верхній півпростір – податніший;
- 3) півпростір без тріщини – абсолютно жорсткий, тобто півпростір з тріщиною защемлений на своїй межі ( $1/a_{441} \rightarrow \infty, 1/a_{551} \rightarrow \infty$ );
- 4) тріщина розташована перпендикулярно до вільної межі півпростору – півпростір  $S_1$  абсолютно податний ( $1/a_{441} \rightarrow 0, 1/a_{551} \rightarrow 0$ ).

Обчислення були здійснені за схемою методу колокацій з точністю до п'яти значущих цифр. При  $0,001 \leq c/a < 0,01$  кількість  $N$  членів ряду розвинення функції густини (стрибка) за ортогональними многочленами  $N = 80$ ; при  $0,01 \leq c/a \leq 0,05$  –  $N = 40$ ; при  $0,05 < c/a$  достатньо взяти  $N = 20$ .

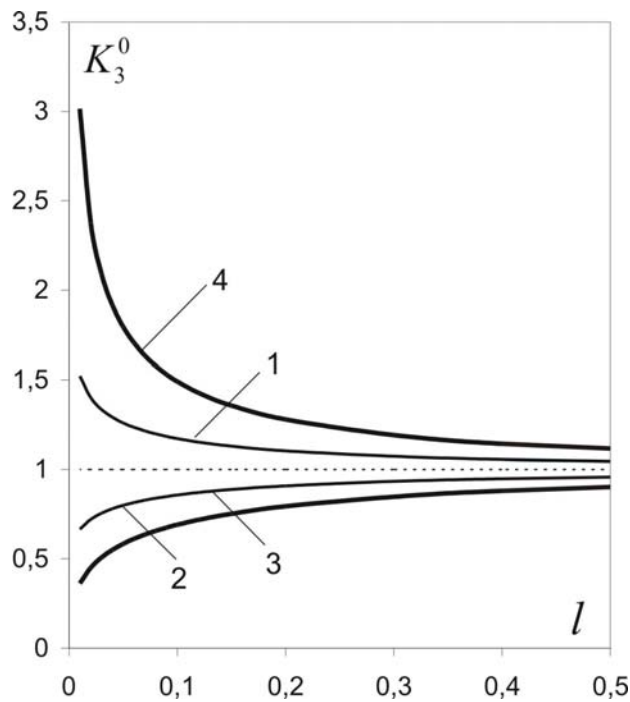


Рис. 23.38. Залежність КІН  $K_3^0$  від відстані тріщини до межі поділу

На рис. 23.38 зображена графічна залежність зведеного КІН  $K_3^0 \equiv K_3 / \sqrt{\pi a \tau_2}$  на нижньому фронті тріщини від відносної відстані між ним і межею поділу матеріалів  $l = c/a$ . Рис. 23.39 містить графічну залежність  $K_3^0$  від відносної жорсткості матеріалів  $r = r_2/r_1$ .

На основі отриманих числових даних була побудована придатна для інженерних розрахунків аналітична апроксимаційна формула для зведеного КІН  $K_3^0$ , залежна від двох параметрів – відносної жорсткості півпросторів  $r$  і відносної відстані між тріщиною і межею поділу матеріалів  $l$ :

$$K_3^0(r, l) = [K_1(l) - K_2(l)] e^{-d(l)r^{p(r)}} + K_2(l), \quad (23.148)$$

де

$$K_i(l) = b_i e^{-(l-0.003)^{p_i} a_i} + 1,$$

$$d(l) = \ln \left[ \frac{K_1(l) - K_2(l)}{1 - K_2(l)} \right], \quad p(r) = 0,4e^{-r} + 0,5,$$

$$b_1 = 3,581, \quad b_2 = -0,755, \quad a_1 = 4,626, \quad a_2 = 3,138, \quad p_1 = 0,367, \quad p_2 = 0,543.$$

Відносна похибка цієї наближеної формули не перевищує 6% при  $0,001 \leq c/a \leq 0,01$ , 4% при  $0,01 < c/a < 0,1$  і 2% при  $c/a \geq 0,1$ .

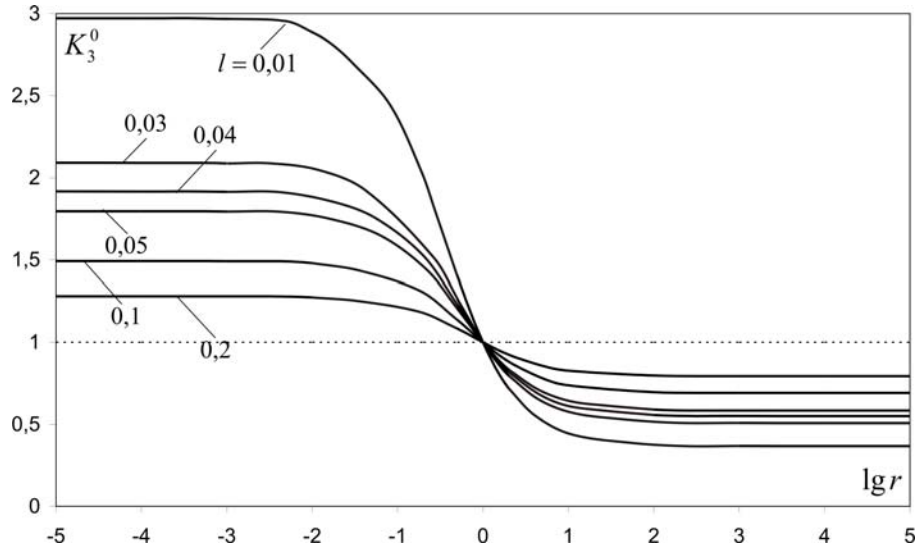


Рис. 23.39. Залежність КІН  $K_3^0$  від відносної жорсткості складових матриці

Отримані результати дають змогу дійти таких висновків:

1. З віддаленням тріщини від межі поділу зведений КІН  $K_1^0$  наближається до 1, що й власне тріщині в однорідній матриці.
2. Зведений КІН тріщини у жорсткішому півпросторі завжди більший за одиницю, причому з наближенням до межі поділу з податнішим матеріалом він збільшується.
3. Чим більша різниця між пружними властивостями півпросторів, тим більше значення  $K_1^0$  за фіксованої геометрії задачі про тріщину у жорсткішому півпросторі.
4. При прямуванні тріщини до межі з податним півпростором (вільна межа півпростору) КІН прямує до  $\infty$ .
5. Якщо тріщина прямує до абсолютно жорсткої межі, то КІН прямує до 0.
6. Якщо тріщина розміщена у податнішому півпросторі, то висновки 2, 3 набувають якісно протилежного змісту.

### 23.9. Моделювання однорідного поля напружень рядами сил [121]

В експериментальних дослідженнях з визначення концентрації напружень та КІН біля тонких та гострокутних неоднорідностей однорідне поле напружень на нескінченності моделюють рядами зосереджених сил, прикладених на достатній відстані від досліджуваного концентратора. Такий підхід є вірним для ізотропних матеріалів, однак, як це буде нижче доведено, його перенесення на випадок анізотропії матеріалу зі сталими  $a_{44}, a_{55}, a_{45}$  може дати хибні результати.

На основі (23.60) для віддаленої сили та дислокації у точці  $z_{*1}$  отримуємо

$$Q(\pm a) = \mp f_3^* \frac{\sqrt{a}}{z_{*1}^1},$$

$$f_3^* = f_3 - \frac{f_6}{r^1}, \quad z_{*1}^1 = x_{*1} + s^1 y_{*1}.$$

Якщо припустити, що такі чинники однакової інтенсивності розташовані (рис. 23.40) у досить віддалених точках

$$z_{*1} = k + iy_{*1} \quad (z_{*1}^1 = k + s^1 y_{*1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

а такі ж чинники протилежного знаку – у точках

$$z_{*1} = k - iy_{*1} \quad (z_{*1}^1 = k - s^1 y_{*1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

то на основі принципу суперпозиції, а також формули (1.421.4) [191]

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$$

отримаємо

$$Q(\pm a) = \pm 2\pi i f_3^* \sqrt{a} \operatorname{ctg} \left[ \pi (s_2^1 - is_1^1) y_{*1} \right].$$

Переходячи до границі  $y_{*1} \rightarrow \infty$  з урахуванням того, що

$$\lim_{y_{*1} \rightarrow \infty} \operatorname{ctg} \left[ \pi (s_2^1 - is_1^1) y_{*1} \right] = 1,$$

отримаємо

$$Q(\pm a) = \pm 2\pi i f_3^* \sqrt{a}.$$

За відсутності дислокацій та інтенсивності сил  $f_5 = \tau$  отримаємо згідно з (23.58) для тріщини

$$K_{3,1} = \tau \sqrt{\pi a}, \quad K_{3,2} = 0, \tag{23.149}$$

а для абсолютно жорсткої тонкої плівки відповідно до виразів (23.59) –

$$K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = 0. \tag{23.150}$$

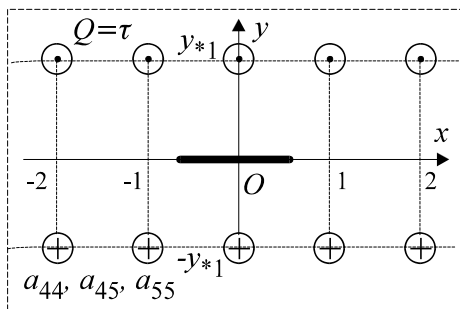


Рис. 23.40. Ряди сил, паралельні до осі  $x$

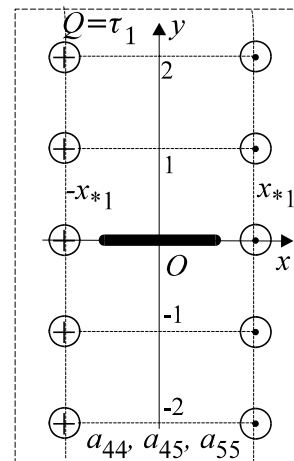


Рис. 23.41. Ряди сил, паралельні до осі  $y$

Цілком подібно під час урахування двох віддалених рядів зосереджених чинників (сил та дислокацій) протилежного знаку, розташованих у точках

$$z_{*1} = x_{*1} + ik \quad (z_{*1}^1 = x_{*1} + s^1 k)$$

та

$$z_{*1} = -x_{*1} + ik \quad (z_{*1}^1 = -x_{*1} + s^1 k),$$

коли  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (ряди паралельні до осі  $y$ , рис. 23.41), отримаємо у границі  $x_{*1} \rightarrow \infty$  вираз

$$Q(\pm a) = \mp 2\pi i f_3^* \frac{\sqrt{a}}{s^1}.$$

У цьому випадку за інтенсивності сил  $f_5 = \tau_1$  отримаємо згідно з (23.58) для тріщини

$$K_{3,1} = -\tau_1 \sqrt{\pi a} \frac{a_{45}}{a_{44}}, \quad K_{3,2} = 0, \quad (23.151)$$

а для абсолютно жорсткої тонкої плівки відповідно до виразів (23.59) –

$$K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = -\tau_1 \sqrt{\pi a} \frac{|r^1|}{a_{44}}, \quad r^1 = \sqrt{(a_{45})^2 - a_{44}a_{55}}. \quad (23.152)$$

Вирази (23.149) – (23.152) для УКІН (за винятком (23.149) не збігаються з поданими у (23.56), (23.57) для загального випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності

$$K_{3,1} = \tau \sqrt{\pi a}, \quad K_{3,2} = 0 \quad (\text{тріщина});$$

$$K_{3,1} = 0, \quad K_{3,2} = w^1 \frac{\sqrt{\pi a}}{|r^1|}, \quad w^1 = a_{45}\tau + a_{55}\tau_1 \quad (\text{АЖП}).$$

Причина полягає у тому, що компоненти тензора напружень у віддаленій від точок дії сил області тіла відповідно до формул (23.8) та вищезгаданої (1.421.4) [191] за дії паралельних до осі  $x$  рядів зосереджених протилежно спрямованих сил дорівнюють

$$\sigma_{yz}^0(z) = \tau, \quad \sigma_{xz}^0(z) = -\tau s^1 = -\tau \frac{a_{45}}{a_{55}}, \quad (23.153)$$

а якщо ряди сил паралельні до осі  $y$ , то

$$\sigma_{xz}^0(z) = \tau_1, \quad \sigma_{yz}^0(z) = -\tau_1 \frac{a_{45}}{a_{44}}. \quad (23.154)$$

Таким чином, подані вище способи навантажування за допомогою двох компланарних рядів зосереджених сил не приводять до природно очікуваної відсутності дотичних напружень в одній із координатних площин, а викликають зсувні зусилля уздовж двох площин (паралельної площині навантаження та перпендикулярної до неї), якщо тільки  $a_{45} \neq 0$ .

Використання зовнішнього навантаження типу (23.153) чи (23.154) під час підставлення у залежності (23.56), (23.57) для УКІН під час дії однорідного поля напружень на нескінченності приводить до виразів (23.149), (23.150) чи (23.151), (23.152) відповідно. Тому для моделювання однорідного поля напружень поздовжнього зсуву на нескінченності лише в одній з площин анізотропного тіла  $\sigma_{yz}^\infty = \tau_y, \sigma_{xz}^\infty = 0$  ( $\sigma_{xz}^\infty = \tau_x, \sigma_{yz}^\infty = 0$ ) треба навантажувати двома взаємно перпендикулярними рядами зосереджених сил інтенсивності

$$\tau = \frac{\tau_y}{R}, \quad \tau_1 = \frac{\tau a_{45}}{a_{55}} \left( \tau_1 = \frac{\tau_x}{R}, \quad \tau = \frac{\tau_1 a_{45}}{a_{44}} \right); \quad (23.155)$$

$$R = \frac{a_{44}a_{55} - (a_{45})^2}{a_{44}a_{55}} = 1 - \frac{(a_{45})^2}{a_{44}a_{55}}.$$

## § 24. Взаємодія лінійних дефектів

### 24.1. П'ять щілин в умовах поздовжнього зсуву

До недавнього часу дуже добре були вивчені задачі поздовжнього зсуву для одної, двох ізольованих тріщин та окремих періодичних систем математичних розрізів [706, 860, 589, 103]. Скінченні системи з трьох, чотирьох та більшої кількості тріщин не досліджувалися, хоча саме такий аналіз може слугувати обґрунтуванню застосовності до визначення концентрації напружень на такій системі тріщин відповідного періодичного розв'язку.

Для вирішення такої проблеми розглянемо [109] приклад розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь задачі поздовжнього зсуву ізотропного тіла з системою  $M \leq 5$  співвісних та розташованих а) в одній площині; б) компланарних щілин (що лежать в паралельних площинах одна над іншою) за їхньої різної кількості  $M = 1; 2; 3; 4; 5$  та однакової півширини  $a_p = a$  ( $p = \overline{1, M}$ ) в умовах однорідного поля напружень зсуву на безмежності  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = 0$ , так що площина розрізів збігається з площиною прикладеного навантаження. На рис. 24.1 відображена геометрія поставлених задач при  $M = 5$ .

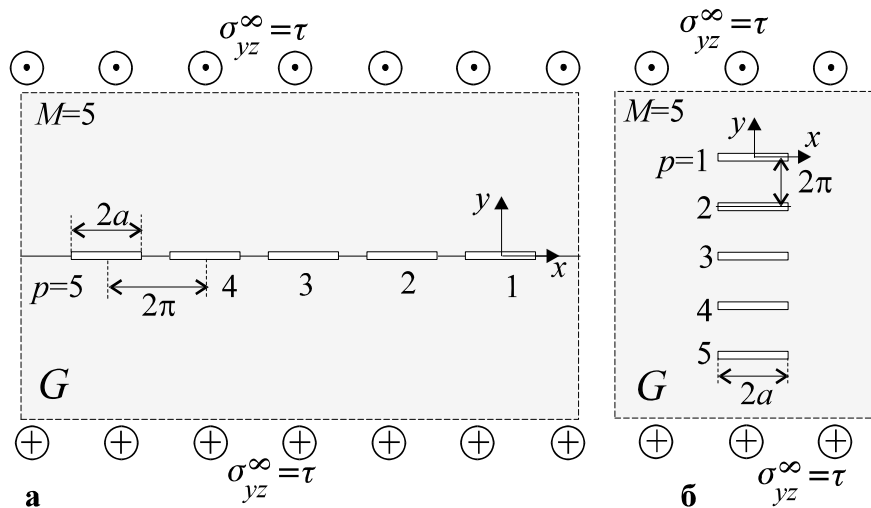


Рис. 24.1. Схеми задач для співвісних (а) та компланарних (б) тріщин

У випадку так поставленої задачі базова система інтегральних рівнянь найпростіше будується з умови, що  $\sigma_{yzp}^\pm(x_p) = 0$  ( $x_p \in L'_p$ ;  $p = \overline{1, M}$ ), яка з урахуванням того, що кути повертання осей тріщин стосовно осі абсцис основної системи координат дорівнюють нулю ( $\alpha_p = 0$ ), дає змогу записати

$$\operatorname{Re} \left[ \mp \frac{1}{2} f_{3p}^*(x_p) + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^M \int_{L'_m} P_{pm}(t, x) f_{3m}^*(t) dt \right] + \sigma_{yzp}^0(z_p) = 0, \quad \sigma_{yzp}^0(z_p) = \tau,$$

$$P_{pm}(t, x) = \frac{1}{T_m - X_p}, \quad X_p = x_p + z_{1p}, \quad T_m = t + z_{1m} \quad (m, p = \overline{1, M})$$

або



$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^M \int_{L'_m} \frac{f_{6m}(t) dt}{t - x_p - z_{1p} + z_{1m}} \right] + \tau = 0, f_{6m}(t) = 0 \quad (m, p = \overline{1, M}).$$

Ця система рівнянь має структуру рівнянь (4.1) з додатковими умовами (4.2), у якій

$$B_{ij}^{mp} = 1, \quad C_{ij}^{mp} = D_{ij}^p = K_{ij}^{mp}(t, z) = 0, \quad F_{ip}(x_p) = \text{const}, \quad Q_{mj} = 0.$$

Розрізи  $p = \overline{1, M}$  нумеруємо залежно від способу їхнього розташування справа наліво чи згори донизу. Обчислення здійснені у припущенні, що відстань між осьовими лініями щілин дорівнює  $2d = 2\pi$ ; півширина розрізів –

$$a = a_p = \pi/r - 0,1 \quad (p = \overline{1, M}; \quad r = \overline{1, 5}).$$

Тоді для тріщин в одній площині маємо  $z_{1p} = 2\pi(1-p)$ ; для тріщин у паралельних площинах –  $z_{1p} = 2\pi i(1-p)$ .

Табл. 24.1, 24.2 містять обчислені значення безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН)  $K_3^0 \equiv K_3 / (\tau\sqrt{\pi a})$  для правого краю кожного із розрізів, занумерованих зліва направо. Випадку а) відповідає табл. 24.1; випадку б) – табл. 24.2. Розв'язок порівнюється з точним аналітичним розв'язком відповідної періодичної задачі [706, 861]:

$$\text{а) } K_3 = \tau \sqrt{2b \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}}, \quad K_3^0 = \frac{K_3}{\tau\sqrt{\pi a}}; \quad (24.1)$$

$$\text{б) } K_3 = \tau \sqrt{2b \cdot \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b}}, \quad K_3^0 = \frac{K_3}{\tau\sqrt{\pi a}}. \quad (24.2)$$

Таблиця 24.1. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_3^0 \equiv K_3 / (\tau\sqrt{\pi a})$   
для системи  $M = 1; 2; 3; 4; 5$  співвісних розрізів

$r$	$a$	$a/2\pi$	$M=1$ $p=1$	Періодичність	$M=2$		$M=3$		
					$p=1$	$p=2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
1	3,0416	0,4841	1	3,625	1,971	1,164	2,288	2,325	1,242
2	1,4708	0,2341	1	1,109	1,040	1,024	1,050	1,065	1,032
3	0,9472	0,1508	1	1,040	1,014	1,010	1,017	1,024	1,013
4	0,6854	0,1091	1	1,020	1,007	1,005	1,008	1,012	1,007
5	0,5283	0,0841	1	1,012	1,005	1,007	1,005	1,008	1,004

$r$	$M=4$				$M=5$				
	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
1	2,409	2,607	2,459	1,285	2,479	2,740	2,752	2,535	1,311
2	1,054	1,075	1,073	1,035	1,056	1,079	1,082	1,076	1,037
3	1,019	1,028	1,027	1,014	1,019	1,029	1,031	1,028	1,015
4	1,009	1,014	1,020	1,008	1,009	1,015	1,015	1,014	1,008
5	1,005	1,008	1,008	1,004	1,005	1,009	1,009	1,009	1,005

Обчислення були здійснені за схемою методу колокацій (7.51), (7.52) з точністю до чотирьох значущих цифр (при  $r = 1$  кількість членів ряду (4.3)  $N = 16$ ; при  $r \geq 2$  виявилось достатнім взяти  $N = 8$ ).

У випадку компланарних тріщин (табл. 24.2) внаслідок симетрії задачі КІН на правому краю тріщини з номерами  $p$  і  $M+1-p$  однакові. Тому значення КІН для  $p=1$  ( $M=3$ ) і  $p=4; 5$  ( $M=5$ ) у таблиці не подані. З лівого боку ( $x=a$ ) КІН такі ж, як і з правого. Подібна, але дещо складніша симетрія, властива й випадку співвісних дефектів (табл. 24.1).

**Таблиця 24.2.** Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_3^0 \equiv K_3 / (\tau\sqrt{\pi a})$  для системи  $M = 1; 2; 3; 4; 5$  компланарних розрізів

$r$	$a$	$a/2\pi$	$M=1$ $p=1$	Періодичність	$M=3$		$M=5$		
					$p=1$	$p=2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
1	3,0416	0,4841	1	0,7731	0,9102	0,8575	0,8982	0,8338	0,8248
2	1,4708	0,2341	1	0,9229	0,9703	0,9526	0,9662	0,9442	0,9411
3	0,9472	0,1508	1	0,9651	0,9867	0,9787	0,9848	0,9748	0,9734
4	0,6854	0,1091	1	0,9811	0,9928	0,9884	0,9918	0,9864	0,9856
5	0,5283	0,0841	1	0,9886	0,9957	0,9931	0,9951	0,9918	0,9913

Отримані результати дають змогу дійти певних висновків. По-перше, у системі співвісних розрізів максимальне значення КІН  $K_3^0 = K_{3\max}^0$  спостерігається на геометрично центральному розрізі. По-друге, збільшення кількості тріщин у системі співвісних тріщин збільшує КІН у кожній з тріщин системи. По-третє,  $K_{3\max}^0$  у такій системі досить добре оцінюється зверху розв'язком відповідної періодичної задачі, причому тим точніше, чим більші відносна відстань між дефектами та їхня кількість. По-четверте, під час вертикального (компланарного) розташування тріщин справедливі усі попередні висновки, тільки у них слова "максимальний", "зменшення КІН", "оцінюється зверху" слід замінити на вирази "мінімальний", "збільшення КІН", "оцінюється знизу" відповідно.

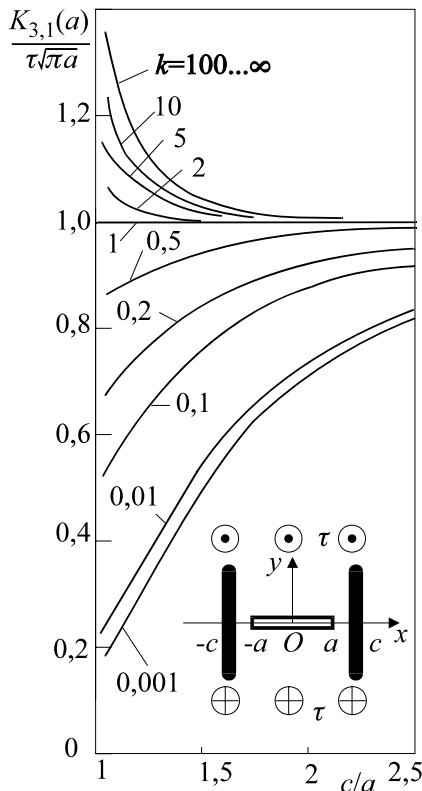


Рис. 24.2

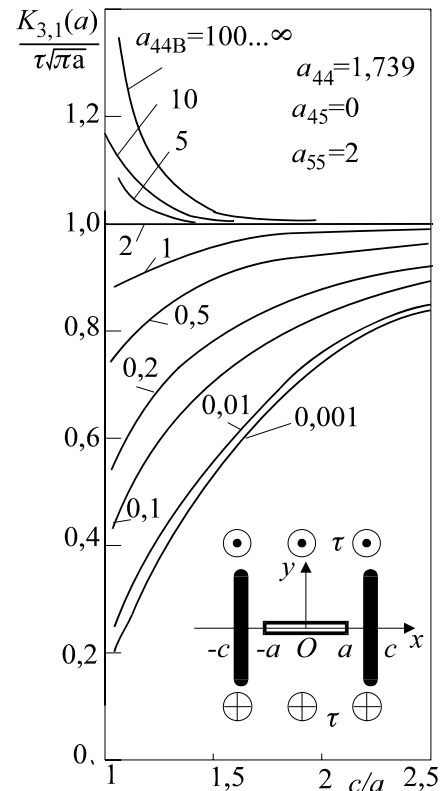


Рис. 24.3

### 24.2. Взаємодія тріщини з тонкостінними включеннями

Питання взаємодії неоднорідностей вивчалось багатьма авторами. У роботі [674] з використанням інших підходів і, відповідно, іншої моделі включення, розглянуті два співвісні або компланарні тонкі пружні включення; у [911] – також і періодичні системи включень.

Тут для прикладу досліджена задача про тріщину, яка одним або двома краями наближається до розташованого перпендикулярно стрічкового включення в ізотропному або анізотропному масиві за його зсуву напруженнями на нескінченності  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ .

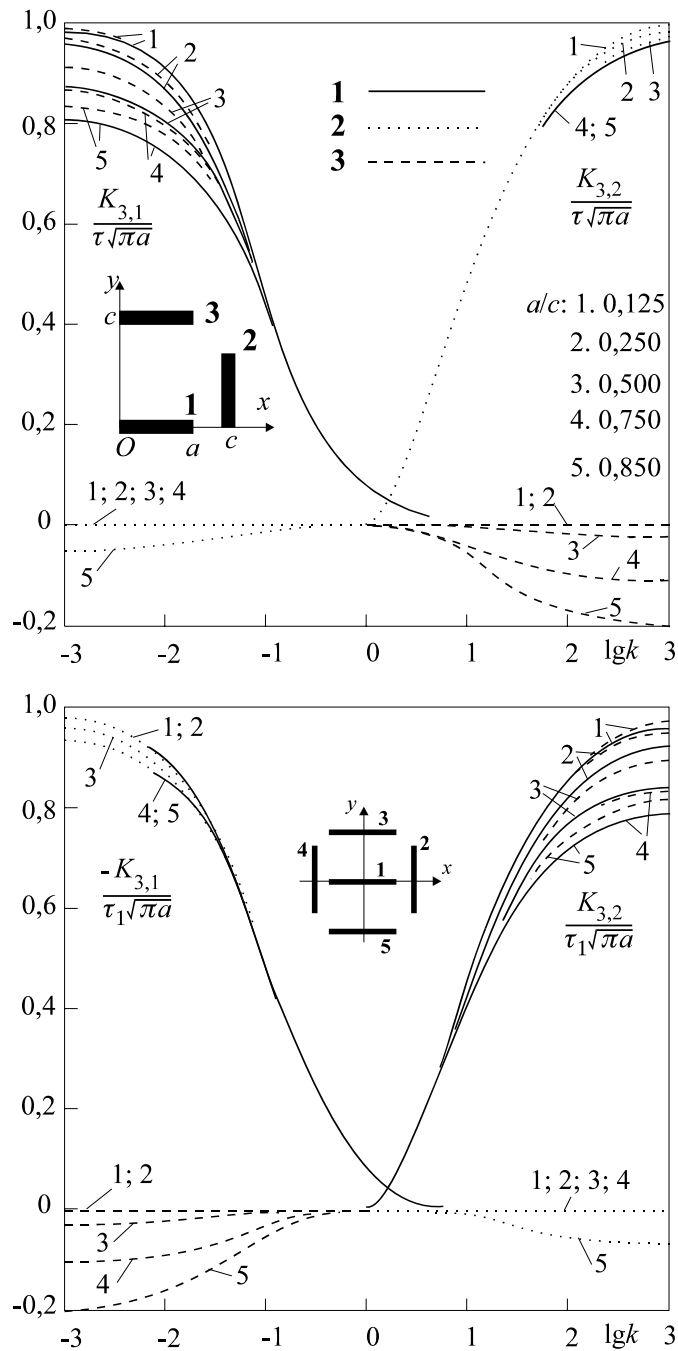


Рис. 24.4

Зокрема для системи двох дефектів (тріщина – включення) отримано, що збільшення відносної жорсткості  $k = G_B/G$  включення збільшує КІН. З наближенням тріщини до податної стрічки ( $k < 1$ ) КІН зменшується; зближення з жорсткою ( $k > 1$ ) стрічкою спричиняє збільшення КІН. Значення КІН на віддаленому від жорсткого ( $k > 1$ ) прошарку фронті тріщини відрізняється від КІН для окремої тріщини не більше як на 4%. У випадку податного включення ця різниця є більшою.

Поява з протилежного боку другої симетрично розташованої стрічки дещо зменшує концентрацію напружень біля тріщини (рис. 24.2). Для анізотропної матриці (намоточний однонаправлений склопластик) з ізотропними включеннями та тріщиною якісні висновки зберігаються, кількісні зміни КІН виявилися незначними (рис. 24.3).

### 24.3. Система з п'яти включень

Вивчена система з п'яти ідентичних тонких стрічок еліптичного профілю [116], розташованих симетрично з обох боків, зверху та знизу від основного в ізотропному середовищі під впливом однорідного поля напружень за плівковою моделлю. На врізці у рис. 24.4, де подана залежність УКІН  $K_{3,1}$  від відносної жорсткості  $k = G_B/G$  включення, зображений правий верхній квадрант схеми задачі, який містить половинки першої, другої і третьої стрічок. Така схема дає можливість вивчити концентрацію напружень на центральному (першому) включенні за одночасного екранування з усіх боків, а щодо крайніх стрічок (друга і третя) виявити вплив несиметричного розташування за зближення кінців взаємно перпендикулярних включень. Вважалось, що  $a/h_0 = 10$  і змінювалася відносна віддаль між включеннями  $A = a/c$ . Суцільна лінія відповідає першому, пунктирна – другому, штрихова – третьому включенню. При  $k < 0,001$  результати практично відповідають системі п'яти тріщин; при  $k > 1000$  – п'яти абсолютно жорстких плівок.

За дії  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$  УКІН  $K_{3,1}$  на центральному включенні приблизно на два порядки менший від відповідної величини для крайніх включень, а УКІН  $K_{3,2}$  для нього взагалі дорівнює нулю. Якщо діє  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ , то картина протилежна:  $K_{3,1}$  для першої стрічки практично дорівнює нулю, а  $K_{3,2}$  – на два порядки менший від  $K_{3,2}$  для крайніх стрічок.

За всіх способів навантажування якщо  $A = 0,75$ , то спостерігається дуже сильна взаємодія неоднорідностей; якщо  $A = 0,25$  – вона мала; якщо  $A = 0,125$  – взаємодія практично відсутня (усі УКІН біля вершини кожного з включень практично збігаються зі значеннями, одержаними для відповідним чином розташованих ізольованих стрічок).

### 24.4. Періодичні задачі для тонких дефектів

Періодичним задачам теорії тріщин поздовжнього зсуву у необмеженому ізотропному середовищі приділялося досить багато уваги з огляду на відносну простоту побудови аналітичних розв'язків та зручність їхнього використання до вивчення особливостей напружено-деформованого стану у неперіодичних системах рівновіддалених множинних дефектів. Переважно розгляд обмежувався одним рядом дефектів [48, 706, 860] за дії однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$  (індекс  $z$  визначає вісь, паралельну напрямку зсуву). Коли площини тріщин паралельні до площини  $xOz$ , то для періодичної системи тріщин завширшки  $2a$ , розташованих в ізотропній матриці вертикально одна над другою на відстані  $2b$  справедлива формула (24.2). Якщо відстань  $2b$  між компланарними тріщинами прямує до нескінченності, то з (24.2) випливає, що  $K_3 = \tau\sqrt{\pi a}$  (поодинокі тріщина), а коли  $a \rightarrow \infty$  ( $b \rightarrow \infty$ ), то отримується розв'язок (5.19) [586] для відповідної паралельної системи півбезмежних тріщин, до берегів якої прикладене стале напруження  $\sigma_{yz} = -\tau$ :

$$K_3 = \tau\sqrt{2b}. \quad (24.3)$$

### Періодичні системи тріщин

Апробація методу колокацій здійснена на прикладі розв'язування задачі поздовжнього зсуву для ізотропного тіла з періодичною системою а) співвісних ( $d_x^1 = 2\pi, d_y^1 = 0$ ) та б) компланарних ( $d_x^1 = 0, d_y^1 = 2\pi$ ) щілин за їхньої різної півширини  $a = a_p = \pi / r - 0,1$  ( $r=1,2,\dots,5$ ) за умов однорідного поля напружень зсуву на нескінченності у площині розрізів  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ , коли

$$B_{ij}^{mp} = 1, C_{ij}^{mp} = D_{ij}^p = K_{ij}^{mp}(t, z) = 0, F_{ip}(x_p) = \text{const}.$$

У табл. 24.3, 24.4 містяться обчислені значення безрозмірних КІН  $K_3^0 = K_3 / (\tau \sqrt{\pi a})$  для правого краю кожного із розрізів за різної кількості врахованих у періодичному розв'язку розрізів  $2Q+1$ . Випадку а) відповідає табл. 24.3; випадку б) – табл.24.4. Розв'язок порівнюється з точним аналітичним розв'язком відповідної періодичної задачі [706, 860]: а) (24.1); б) (24.2). Обчислення здійснені методом колокацій за схемою (7.40), (8.20) з точністю до 4 і 5 значущих цифр при кількості членів ряду (4.3)  $N = 8$ .

**Таблиця 24.3. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_3^0$  для періодичної системи  $M$  співвісних розрізів**

$r$	$a$	$a/2\pi$	Наближено				Точно (24.1)
			$Q=1$	$Q=2$	$Q=5$	$Q=10$	
1	3,0416	0,4841	2,473	2,816	3,157	3,314	3,625
2	1,4708	0,2341	1,067	1,083	1,097	1,103	1,109
3	0,9472	0,1508	1,024	1,031	1,036	1,038	1,040
4	0,6854	0,1091	1,012	1,016	1,018	1,019	1,020
5	0,5283	0,0841	1,007	1,009	1,011	1,011	1,012

**Таблиця 24.4. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_3^0$  для періодичної системи  $M$  компланарних розрізів**

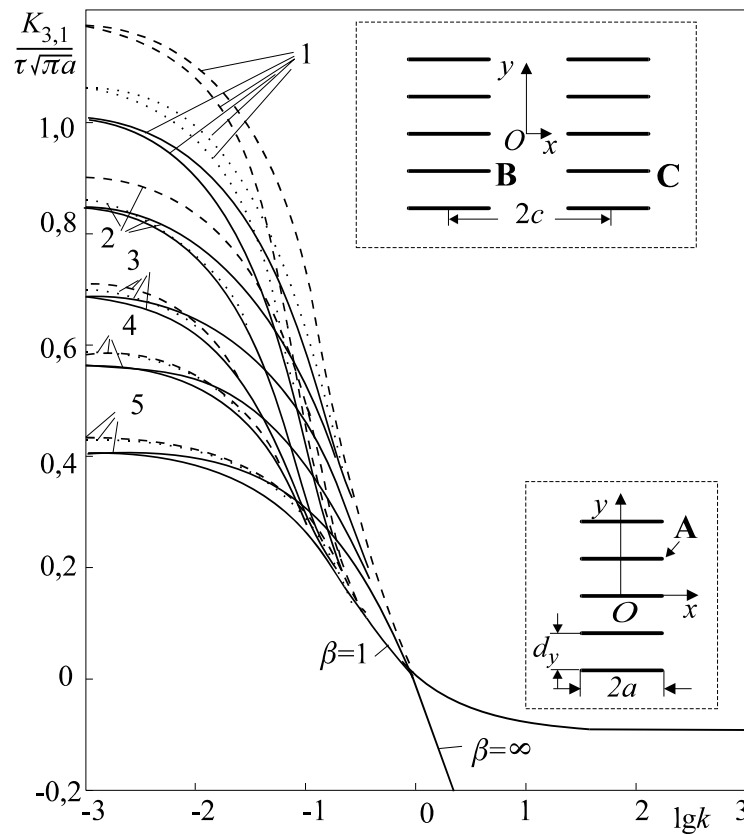
$r$	$a$	$a/2\pi$	Наближено				Точно (24.2)
			$Q=1$	$Q=2$	$Q=5$	$Q=10$	
1	3,0416	0,4841	0,86580	0,82953	0,79854	0,78628	0,77305
2	1,4708	0,2341	0,95344	0,94154	0,93140	0,92734	0,92289
3	0,9472	0,1508	0,97883	0,97349	0,96893	0,96710	0,96508
4	0,6854	0,1091	0,98854	0,98566	0,98320	0,98221	0,98113
5	0,5283	0,0841	0,99309	0,99135	0,98987	0,98928	0,98862

Обчислення підтверджують хорошу збіжність зі збільшенням  $Q$  отриманих результатів до точного розв'язку. Порівняння з результатами обчислень для ізольованої системи розрізів (табл. 24.1, 24.2) свідчить, що КІН біля центральної щілини в групі з  $M$  тріщин дуже добре оцінюється наближеним розв'язком відповідної періодичної задачі, в котрому врахована відповідна кількість дефектів ( $M=2Q+1$ ). У періодичних задачах співвісних щілин зі збільшенням  $Q$  наближений розв'язок прямує до точного результату знизу, а для компланарних розрізів – зверху.

**Система компланарних включень**

Праця [657] довгий час була єдиною, яка стосувалася побудови розв'язку подібної задачі, коли періодичну структуру утворює не одна, а дві тріщини. Там був побудований складний аналітичний розв'язок та наведені графіки КІН біля внутрішнього та зовнішнього вістря тріщини.

У цьому [963] підпункті на основі результатів п. 8.1 інтегральні рівняння для одного, двох та трьох тонких пружних дефектів, що лежать в одній площині, трансформуються у рівняння відповідної періодичної задачі та наближено розв'язуються на основі п. 8.4 методом колокацій шляхом заміни кожного стовпця з безмежною кількістю включень на  $2M + 1$  дефект.



**Рис. 24.5**

На рис. 24.5 відображена залежність безрозмірних значень узагальнених КІН біля вістря **A**, **B**, **C** дефекту від відносної жорсткості  $k = G_B / G$  включення для двох крайніх значень параметра  $\beta = 1, \infty$  форми перерізу включення. Півтовщина прошарку визначена формулою (5.44). Цифрою 1 відзначені криві, які відповідають необмеженій віддалі між рядами дефектів (відповідна суцільна лінія – одному, штрихова – двом, пунктирна – трьом ізольованим дефектам); цифрою 2 – відношення  $B \equiv b / a = 4 / 3$ ; 3 –  $2 / 3$ ; 4 –  $4 / 9$ ; 5 –  $2 / 9$ .

Суцільним лініям на рис. 24.5, 24.6 відповідають УКІН біля краю включень, що формують один стовпчик рівновіддалених дефектів (схема а); штриховим та пунктирним лініям – на внутрішньому та зовнішньому краях включень, які утворюють два стовпці включень відповідно (схема б) з центрами на відстані  $2c = 8a / 3$ . Рис. 24.5 відображає результати обчислення  $K_{3,1}$  за основною моделлю пружного дефекту (15.1), а рис. 24.6 –  $K_{3,1}$  та  $K_{3,2}$  при використанні плівкової моделі (умова (15.1) без підкресленого члена), див. також модель 1пм п. 20.10.

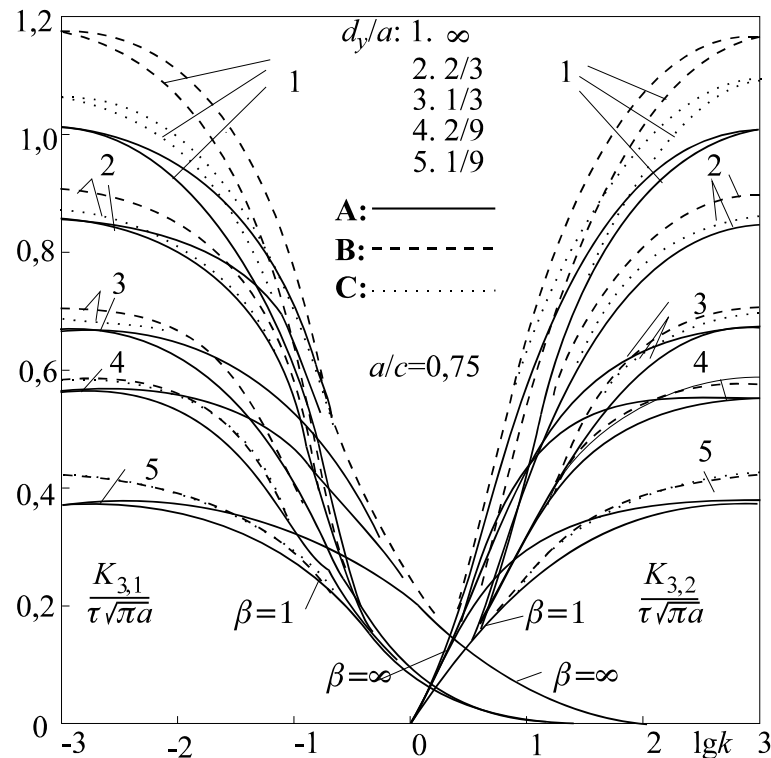


Рис. 24.6

У кожній з груп кривих, що відповідають однаковому значенню  $B$ , є по дві однакового типу лінії: верхня стосується значення параметра форми  $\beta = \infty$ ; нижня –  $\beta = 1$ . Значення КІН, які відповідають проміжним значенням  $\beta$ , розміщені між відповідними крайніми значеннями (лініями). Для випадку тріщини величина  $K_{3,1}$  від  $\beta$  не залежить так само як і  $K_{3,2}$ , обчислене для абсолютно жорсткої тонкої плівки (АЖТП) на підставі плівкової моделі.

При  $k < 0,001$  результати розрахунку  $K_{3,1}$  з точністю до п'яти значущих цифр збігаються з результатами обчислення класичних КІН  $K_3$ . У цьому випадку значення КІН, які відповідають точкам суцільної лінії, можна обчислити за формулою (24.2), а значення штрихових та пунктирних ліній з позначками 1 – 4 відповідають значенням, поданим суцільною та штриховою лініями рисунку праці [657] при введеному там параметрі  $\bar{l} = 0,75$ .

За малої відстані між рядами включень ( $B \leq 4/9$ ; криві 4, 5) КІН в точках **В** та **С** практично збігаються (похибка не перевищує 1%) і при цьому стає помітною відзначена у [657] для випадку тріщин, очевидна тенденція їхнього прямування до значень, отриманих з розв'язку для одного стовпця компланарних півбезмежних дефектів. Для тріщини  $K_{3,1}$  у цьому випадку визначається формулою (24.3), а для абсолютно жорсткої тонкої плівки –

$$K_{3,2} = \tau \sqrt{2b}. \quad (24.4)$$

Рис. 24.7 подає результати визначення  $K_{3,1}$ ,  $K_{3,2}$  за плівковою моделлю на правому краї пружних стрічок еліптичного профілю ( $\beta = 1$ ), що утворюють три однаково віддалені ( $2c = 8a/3$ ) ідентичні стовпчики. Суцільна лінія стосується лівого, пунктирна – центрального, а штрихова – правого стовпчика. При  $B = 4/3$  значення  $K_{3,1}$  на правих краях лівого та центрального стовпчиків (внутрішніх краях системи) практично збігаються, а при  $B = 2/3$  (близьке розташування рядів)  $K_{3,1}$  вже майже однакове для будь-якого краю довільного

включення системи і зближене (як і у випадку одного чи двох стовпчиків) до значення КІН у задачі про один стовпець півбезмежних включень.

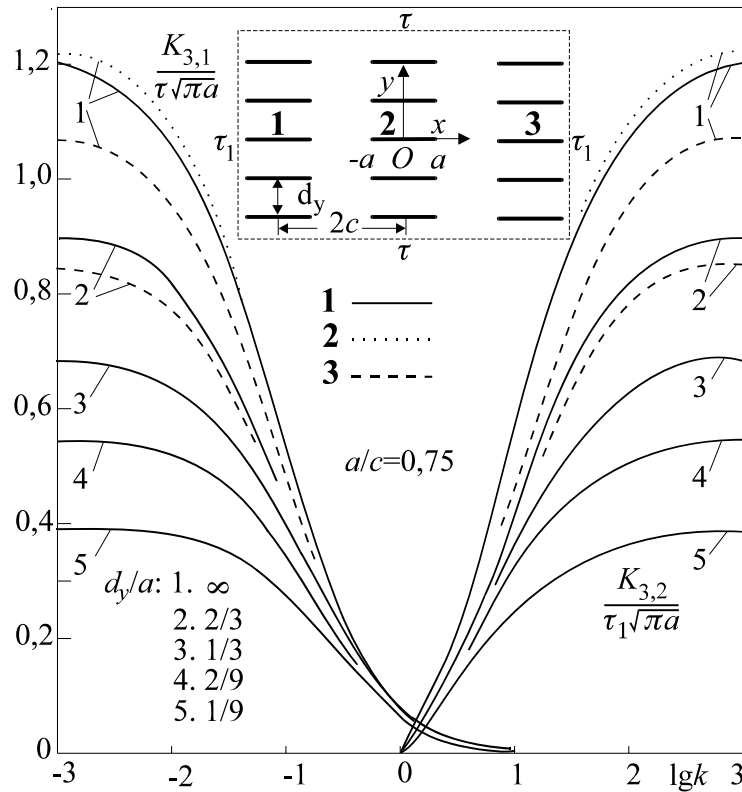


Рис. 24.7

Як і для випадку двох стовпчиків використання плівкової моделі дає для  $K_{3,2}$  на абсолютно жорсткій плівці (практично  $k > 1000$ ), такі ж значення, що й для  $K_{3,1}$  при  $k = 0,001$  (тріщина).

Розрахунки засвідчили, що збільшення кількості стовпчиків включень сприяє підвищенню концентрації напружень на включеннях, причому, за збереження співвідношення віддалей КІН досягають найменших значень на зовнішніх краях зовнішніх стовпчиків і з наближенням відповідного краю включення до вертикальної осі геометричної симетрії задачі вони зростають. Зближення стовпчиків веде до збільшення КІН, зближення рядів включень сприяє зменшенню концентрації напружень на включеннях при їх довільних пружних властивостях (відомий у теорії тріщин ефект екранування).

Під час обчислень було враховано  $N=20$  членів розвинення функцій стрибка [951] у ряди поліномів Чебишева з виділеною кореневою особливістю. Для врахування ефекту періодичності з точністю до 1% для кривих 1 – 3 бралось  $M=15$ , для кривих 4 –  $M=50$ , а для кривих 5 –  $M=100$ , оскільки виявилось, що зі зменшенням відносної відстані  $B$  між двома найближчими дефектами у  $q$  разів необхідне для досягнення заданої точності значення  $M$  приблизно у  $q$  разів зростає. Відзначені на рис. 24.5, 24.6 індексом “5” лінії (відповідають лініям з індексом 5) побудовані при врахуванні  $M=15$ .

Табл. 24.5. містить значення  $K_3^0 = K_3 / (\tau\sqrt{\pi a})$ , обчислені для одного стовпчика компланарних тріщин ( $k < 0,001$ ) за різних значень параметра  $M$  ( $N=10$ ;  $B=2/9$ ;  $4/9$ ). Помітна збіжність до точних значень  $\sim 0,37613$  та  $\sim 0,53192$  відповідно.



Таблиця 24.5. Безрозмірний КІН  $K_3^0$  при ( $N=10$ ;  $B=2/9$ ;  $4/9$ )

$B$	$M$	$K_3^0$	$M$	$K_3^0$	$M$	$K_3^0$	$M$	$K_3^0$	$M$	$K_3^0$
$\frac{2}{9}$	1	1,000	15	0,409	30	0,393	100	0,381	250	0,378
	5	0,473	20	0,401	40	0,388	150	0,379	500	0,377
	10	0,426	25	0,396	50	0,386	200	0,378	1000	0,376
$\frac{4}{9}$	1	1,000	15	0,552	30	0,542	100	0,535	250	0,533
	5	0,591	20	0,547	40	0,539	150	0,534	500	0,532
	10	0,562	25	0,544	50	0,538	200	0,533	1000	0,532

Табл. 24.6 містить значення  $K_3^0$ , обчислені при  $k=10^{-7}$ ,  $M=15$ ,  $N=5$ ;  $10$ ;  $15$ ;  $20$ ;  $25$  та  $B=12/9$ ;  $10/9$ ;  $8/9$ ;  $6/9$ ;  $4/9$ ;  $2/9$  для одного стовпчика тріщин і відповідні точні значення для періодичної задачі скінченних (формула (24.2)) та півнескінченних (формула (24.3)) тріщин. У дослідженому діапазоні зміни  $B$  навіть значення  $N=5$  забезпечує 2%, а  $N=10$  – 0,4% відхилення від остаточного значення. Подальше підвищення точності можливе за допомогою збільшення  $M$  – для ілюстрації цього у другому нижчому рядку, яка відповідає  $B=4/9$  містяться відповідні значення, обчислені при  $M=50$ . Слід врахувати, що тривалість обчислень практично пропорційна до  $M$  та до  $N$  (за не дуже великих  $N$ ).

Таблиця 24.6. Залежність  $K_3^0$  від  $B$  та  $N$ 

$B$	$N$					$\sqrt{\frac{2b}{\pi a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b}}$	$\sqrt{\frac{2b}{\pi a}}$
	5	10	15	20	25		
12/9	0,84409	0,84409	0,84409	0,84409	0,84409	0,683777	0,692132
10/9	0,80077	0,80077	0,80077	0,80077	0,80077	0,79267	0,84104
8/9	0,74120	0,74128	0,74128	0,74128	0,74128	0,73061	0,75225
6/9	0,65999	0,66004	0,66004	0,66004	0,66004	0,64564	0,65147
4/3	0,55314	0,55186	0,55187	0,55187	0,55187	0,53147	0,53192
	0,53884	0,53759	0,53760	0,53760	0,53760		
2/9	0,41701	0,40936	0,40951	0,40951	0,40951	0,37613	0,37613

Подібним чином можна дослідити періодичні задачі для анізотропного середовища з пружними стрічковими включеннями. У частковому випадку однієї періодично повторюваної тріщини відтворюються результати праці [1425].

До переваг запропонованого у п. 8.4 методу розв'язування періодичних задач належить і те, що, на відміну від використаного у праці [657], він дає можливість вивчати взаємодію рядів близько розташованих дефектів.

## 24.5. Антилока деформація тіла з близькими паралельними тріщинами

Досліджується [943, 944] розв'язок задачі про напружений стан тіла, яке перебуває в умовах антиплоскої деформації і містить дві паралельні не зсунуті тріщини завдовжки  $2l$  (рис. 24.8), завантажені однаковим на берегах тріщини самозрівноваженим симетричним відносно їх середин навантаженням  $\tau(x) = \tau(-x)$ . Комплексний потенціал  $F(z)$  можна подати у вигляді [706]

$$F(z) = \frac{2z}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\mu'(t) dt}{(t + i d / 2)^2 - z^2},$$

де  $\mu'(t) \sim f_6(t)$  шукана функція, яка пропорційна похідній від стрибка переміщень точок берегів тріщини і визначається зі сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою [706]

$$\int_{-l}^l \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{t+x}{(t+x)^2 + d^2} \right] \mu'(t) dt = \pi \tau(x) \quad (|x| < l);$$

$$\int_{-l}^l \mu'(t) dt = 0.$$
(24.5)

Таке саме рівняння випливає зі співвідношень п. 24.1.

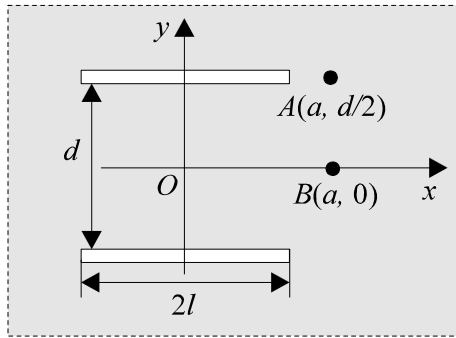


Рис. 24.8. Дві паралельні (компланарні) тріщини

У працях [706, 860, 589, 1647] відзначено, що коли спрямувати відстань між тріщинами до нуля, то коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) прямують до вироджених значень. Дослідимо докладніше особливості цього граничного переходу, застосувавши два методи розв’язування сингулярного інтегрального рівняння – метод ортогональних многочленів та метод колокацій.

**Метод ортогональних поліномів.** Розв’язок рівняння (24.5) шукаємо у вигляді

$$\mu'(t) = \frac{\varphi(u)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \varphi(u) = \sum_{k=1}^N X_k T_{2k-1}(u), \quad u = \frac{t}{l},$$
(24.6)

де  $T_j(u)$  – поліноми Чебишева першого роду;  $X_k$  – невідомі коефіцієнти, які визначаються системою лінійних алгебричних рівнянь

$$X_{m+1} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} S_{nm} X_{n+1} = Y_m, \quad m = \overline{0, N-1},$$
(24.7)

у якій

$$S_{nm} = \operatorname{Re} \left[ \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-v^2} U_{2m}(v) dv}{\sqrt{(v+iq)^2 - 1} \left( v+iq + \sqrt{(v+iq)^2 - 1} \right)^{2n+1}} \right],$$
(24.8)

$$q = \frac{d}{l}, \quad v = \frac{x}{l}, \quad Y_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tau(vl) \sqrt{1-v^2} U_{2n}(v) dv;$$

$U_k(v)$  – поліноми Чебишева другого роду.

З урахуванням (24.6) комплексний потенціал  $F(z)$  матиме вигляд

$$F(z) = i \sum_{k=1}^N X_k \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{z_j^2 - 1} \left( z_j + \sqrt{z_j^2 - 1} \right)^{2k-1}}, \quad z_j = \frac{z}{l} + (-1)^j \frac{iq}{2} \quad (j=1,2) \quad (24.9)$$

і для КІН можна отримати вираз [706]

$$K_3^\pm \equiv \pm \lim_{x \rightarrow \pm l} \left[ \sqrt{\frac{l^2 - x^2}{l}} \mu'(x) \right] = -\sqrt{l} \sum_{k=1}^N X_k. \quad (24.10)$$

Випадок поодинокій тріщини можна отримати з (24.7), (24.8), якщо  $d \rightarrow \infty$ . Тоді  $S_{nm} = 0$  і система (24.7) спрощується до залежності

$$X_{m+1} = Y_m \quad (m = \overline{0, N-1}). \quad (24.11)$$

З урахуванням цього

$$K_3^\pm \equiv K_3^{0\pm} = -\sqrt{l} \sum_{k=1}^N Y_{k-1}. \quad (24.12)$$

Другий крайній випадок дає граничний перехід при  $d \rightarrow 0$ . Тоді

$$S_{nm} = 0 \quad (n \neq m), \quad S_{mm} = -\pi/2 \quad (n, m = \overline{0, N-1})$$

і система (24.7) дає

$$X_{m+1} = Y_m / 2. \quad (24.13)$$

Як видно з порівняння (24.11) та (24.13), для кожної з двох гранично зближених тріщин КІН удвічі менший від КІН для поодинокій тріщини. Окрім того, в останньому випадку  $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z/l$ , тому комплексний потенціал (24.9) набуде вигляду

$$F(z) = 2i \sum_{k=1}^N \frac{X_k}{\sqrt{z_1^2 - 1} \left( z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} \right)^{2k-1}} = i \sum_{k=1}^N \frac{Y_{k-1}}{\sqrt{z_1^2 - 1} \left( z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} \right)^{2k-1}}.$$

Тобто вираз для функції  $F(z)$  збігається з комплексним потенціалом однієї тріщини. Ця ситуація відповідає явищу злиття двох півтріщин в одну тріщину.

За великого зближення тріщин із них повинні формуватися півтріщини внаслідок того, що між тріщинами формується тонка мембрана. Оскільки напруження на її поверхнях залишається незмінним, то відносне зміщення поверхонь мембрани при  $d \rightarrow 0$  повинно дорівнювати нулю. Це означає, що для гранично зближених тріщин прилеглі поверхні не деформуються (на них складова переміщення в напрямі осі  $z$  дорівнює нулю ( $w = 0$ )), а переміщення зовнішніх поверхонь є таким, як для однієї тріщини (рис. 24.9).

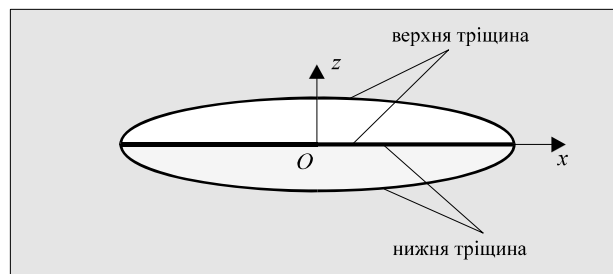


Рис. 24.9. Явище формування двох "півтріщин" під час зближення двох тріщин

Таке злиття розв'язку можна спостерігати і у розподілах напружених станів поблизу вістря кожної з тріщин. Дійсно, якщо перейти до полярної системи координат з полюсом у вістрі якоїсь тріщини, вважаючи, наприклад, що для верхньої (першої) тріщини

$$z = l + i \frac{d}{2} + r e^{i\theta},$$

то згідно з (24.9) за умови  $r > d$  напруження поблизу вістря цієї тріщини дорівнюватимуть

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{i\sqrt{2l}e^{-i\theta/2}}{\sqrt{r}} \sum_{k=1}^N X_k + O(d). \quad (24.14)$$

З урахуванням (24.13) і (24.12) залежність (24.14) зводиться до

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{i\sqrt{l}e^{-i\theta/2}}{\sqrt{2r}} \sum_{k=1}^N Y_{k-1} + O(d) = -\frac{ie^{-i\theta/2}}{\sqrt{2r}} K_3^+ + O(d). \quad (24.15)$$

Якщо в (24.15) спрямувати  $d$  до нуля, то буде отримано відомий розподіл напружень поблизу вістря поодинокі тріщини [706, 860, 589].

**Метод механічних квадратур.** Подамо розв'язок рівняння (24.5) у вигляді (24.6), причому для знаходження вузлових значень функції  $\varphi(u)$  матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь [706]

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \varphi(u_m) \left[ \frac{1}{u_m - v_r} + \frac{u_m + v_r}{(u_m + v_r)^2 + q^2} \right] = \tau(v_r l) \quad (r = \overline{1, M-1}), \quad (24.16)$$

$$\sum_{m=1}^M \varphi(u_m) = 0,$$

де

$$u_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2M} \pi\right) \quad (m = \overline{1, M}); \quad v_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right) \quad (r = \overline{1, M-1}).$$

У цьому випадку КІН визначається за формулою [860]

$$K_3^\pm = -\sqrt{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+\frac{1}{2}M(1\mp 1)} \varphi(u_m) \operatorname{ctg}^{\pm 1} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right). \quad (24.17)$$

Якщо у системі рівнянь (24.16) обчислити границю  $d \rightarrow 0$ , то вона набуває вигляду

$$\frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \varphi(u_m) \left[ \frac{u_m}{u_m^2 - v_r^2} \right] = \tau(v_r l) \quad (r = \overline{1, M-1}); \quad \sum_{m=1}^M \varphi(u_m) = 0. \quad (24.18)$$

Оскільки  $x_1 = -x_{M-1}$ , то визначник системи лінійних алгебричних рівнянь (24.18) дорівнює нулю. Тому слід видозмінити систему лінійних алгебричних рівнянь (24.16), врахувавши те, що оскільки функція  $\mu'(t)$  непарна, то непарною повинна бути і функція  $\varphi(u)$ . Тому останнє рівняння системи (24.16) задовольняється автоматично, а першу групу рівнянь можна звести до системи

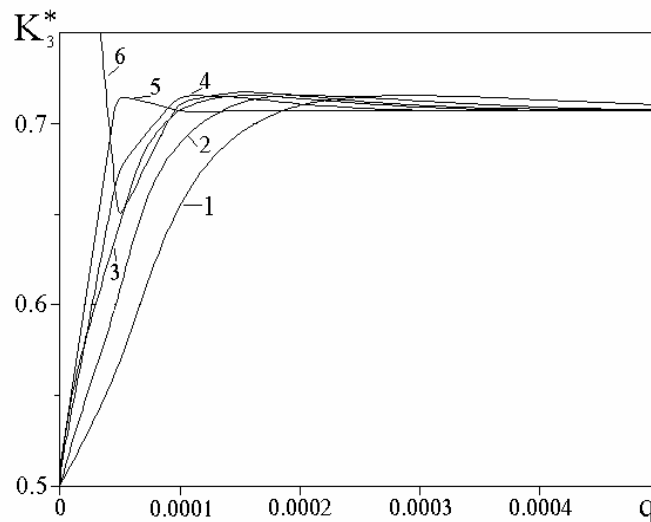
$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{[M/2]} \left[ \frac{1}{u_m^2 - v_r^2} + \frac{u_m^2 - v_r^2 + q^2}{(u_m^2 + v_r^2 + q^2)^2 - 4u_m^2 v_r^2} \right] y(u_m) = \tau(v_r l) \quad (r = \overline{1, [M/2]}), \quad (24.19)$$

де  $y(u_m) = 2u_m \varphi(u_m)$ ;  $[a]$  – ціла частина числа  $a$ .

Формула для визначення КІН (24.17) запишеться

$$K_3^\pm = \mp \sqrt{l} \frac{\gamma^+}{M} \sum_{m=1}^{[M/2]} (-1)^{m+1} y(u_m) \operatorname{cosec} \left( \frac{2m-1}{\gamma^- M} \pi \right), \quad \gamma^\pm = 1 + \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^M). \quad (24.20)$$

**Числові результати застосування методів механічних квадратур та колокацій і їх аналіз.** На рис. 24.10, відображено результати отриманого з використанням методу механічних квадратур числового аналізу впливу взаємного зближення тріщин (зміни параметра  $q$ ) на зміну безрозмірного КІН  $K_3^* = K_3 / K_3^0$  ( $K_3^0 = \tau\sqrt{\pi a}$ ) за різних способів його обчислення, якщо  $\tau(x) = \tau = \text{const}$ . Лінії 1–5 побудовані на основі використання запропонованої обчислювальної схеми (24.19) – (24.20) для різної кількості  $M$  врахованих членів. Лінія 6 отримана з використанням традиційної схеми (24.16) – (24.18) при  $M=300$ .



**Рис. 24.10. Залежність зведених КІН від відносної відстані  $q$  між тріщинами: 1 –  $M=220$ ; 2 –  $M=260$ ; 3 –  $M=300$ ; 4 –  $M=340$ ; 5 –  $M=600$ ; 6 –  $M=300$  з використанням (24.17)**

Стосовно тенденцій зміни КІН можна зробити такі висновки.

1. Для досягнення бажаного рівня точності в обох випадках слід при  $q \rightarrow 0$  збільшувати разом із тим кількість  $M$  врахованих у рядах членів. Для покращення точності й надійності результатів доцільно використовувати екстраполяцію за Річардсоном (див. § 12).

2. Поки розмір розрядної сітки комп'ютера дає можливість уникнути істотного нагромадження похибок округлення під час розв'язування лінійних алгебричних систем великого розміру, обидва методи дають за достатньо великого значення  $M$  результати, які добре узгоджуються з асимптотичним розв'язком с. 394 [589], [1647]

$$K_3^* = \left\{ \sqrt{2} \left[ 1 + (q/2\pi) (2/3 + \ln(q/4\pi)) \right] \right\}^{-1}, \quad (24.21)$$

засвідчуючи при не занадто малих  $q$  (в діапазоні досліджуваних значень параметрів – це  $q > 0,0002$ ) тенденцію утримування поблизу отриманого з виразу (24.21) граничного при  $q \rightarrow 0$  значення  $K_3^* \rightarrow 1/\sqrt{2} \approx 0,707$  (вітка лінії 6 при  $q < 0,00005$ ). Видається, що такий розв'язок є слухним для випадку, поки тріщини є вже дуже близько, але їхні зони інтенсивності все ще розділені чи ще не сильно перекриваються. З подальшим дуже великим зближенням тріщин їхні зони інтенсивності починають зливатися і формувати спільну зону інтенсивності напружень.

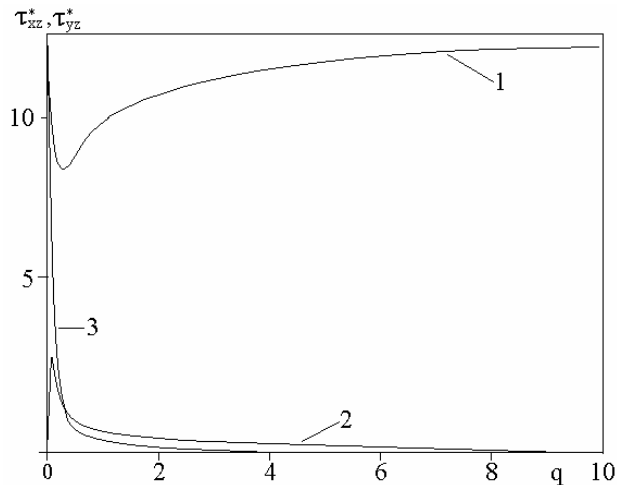
3. Яким би великим не було значення параметра  $M$ , традиційна схема методу механічних квадратур з прямуванням  $q$  до нуля завжди дає в результаті  $K_3^* \rightarrow \infty$  (вітка лінії 6 при  $q < 0,00005$ ). Запропонована тут схема методу механічних квадратур (24.19) – (24.20) чітко

вилловлює тенденцію границі  $K_3^* \rightarrow 0,5$ , властивої для півтріщини ( $q=0$ ) і яке узгоджене з отриманим на основі методу ортогональних многочленів значенням (24.13). Те ж саме можна сказати і про застосування методу колокацій з огляду на його спорідненість із методом механічних квадратур (див. п. 7.4). Таку ситуацію можна пояснити об'єднанням зон інтенсивності кожної з тріщин у спільну зону. Поки це об'єднання не відбулося (у процесі зливання зон інтенсивності – для більших  $q$ ) відбувається поступове зменшення  $K_3^*$  від 0,707 до 0,5.

4. Класична схема методу механічних квадратур теж дає можливість для достатньо великих значень  $M$  вловити таке намагання досягнути  $K_3^*$  після рівня 0,707 граничного значення 0,5 при  $q \rightarrow 0$  (див. спадну ділянку лінії 6 в діапазоні значень  $0,00005 < q < 0,0001$ ).

5. В обох обчислювальних схемах методу механічних квадратур, покидаючи перед прямуванням відповідно до  $\infty$  чи 0,5 лінію тренду  $K_3^* \rightarrow \infty$ , традиційна схема формує “виступ зменшення”, а запропонована схема – “виступ збільшення”, аналогічні відомому в обчислювальній математиці ефекту Гіббса.

6. У випадку зближення аналогічної системи з трьох чи більшої кількості ідентичних тріщин крайні тріщини повинні формувати «півтріщини», а внутрішні – давати нульові КІН.



**Рис. 24.11. Залежність безрозмірних напружень при зближенні тріщин за сталого навантаження  $\tau$  на їх берегах: 1. –  $\tau_{yz}^*(A)$ , 2. –  $\tau_{xz}^*(A)$ ; 3. –  $\tau_{yz}^*(B)$**

На рис. 24.11 зображена залежність безрозмірних напружень  $\tau_{yz}^* = \tau_{yz} / \tau$ ,  $\tau_{xz}^* = \tau_{xz} / \tau$  від відносного зближення  $q$  тріщин у точках  $A(1, 0|l; d/2)$  на продовженні осі тріщини та  $B(1, 0|l; 0)$ . Зі збільшенням  $q$  напруження у точці  $A$  прямують до значень, які відповідають поодинокій тріщині; у точці  $B$  – до нуля. Якщо  $q \rightarrow 0$ , то напруження  $\tau_{yz}^*(A)$  спочатку дещо зменшуються (екранувальний ефект), а потім повертаються до значення, яке відповідає одній повноцінній тріщині. Напруженням  $\tau_{xz}^*(A)$  при  $q \rightarrow 0$  властива обернена властивість – вони зростають від нуля до деякого доволі високого рівня, а вже потім круто зменшуються до нуля. Тобто щодо цих компонент тензора напружень не можна стверджувати екранувальний ефект, оскільки зближення тріщин спричиняє збільшення напружень.

## 24.6. Двоперіодичні задачі для тонких дефектів

### Системи тріщин

Для апробації методу колокацій (§ 11) досліджується розв'язок двоперіодичної задачі поздовжнього зсуву ізотропного середовища з тунельними розрізами під впливом однорідного поля напружень  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1 = 0$  на нескінченності у площині розрізів. Інтегральне рівняння відповідної задачі для ізольованої щілини завширшки  $2a$  має вигляд (VIII.16) [706] або (VI.30) [860]. Вважається, що  $C_1 = 0$ .

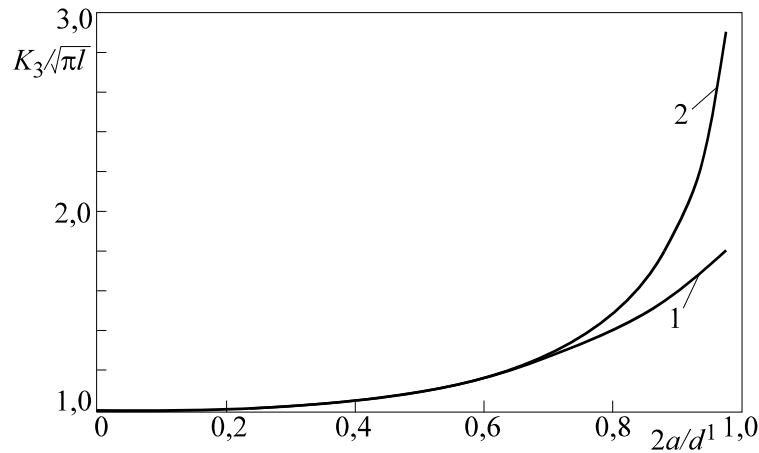


Рис. 24.12. Порівняння точного розв'язку [1439] (лінія 2) та асимптотичного [706] (лінія 1) для квадратної ґратки тріщин

У табл. 24.7, 24.8 записані результати обчислення безрозмірного КІН  $K_3^0 = K_{3,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$  для квадратної з  $d^1 = 2\pi$ ,  $d^2 = 2\pi i$  (табл. 24.7) і трикутної з  $d^1 = 2\pi$ ,  $d^2 = d^1 \exp(\pi i\sqrt{3})$  (табл. 24.8) ґраток для різних значень меж підсумовування  $Q = L$ , відстаней між дефектами  $a = \pi/r - 0,1$  ( $r=1, \dots, 5$ ) і кількості вузлів колокації  $N=8$ ; 10. Помітна дуже швидка збіжність: вже при  $Q = L=2$  у вказаному діапазоні зміни ширини розрізів забезпечена точність розрахунків в 1%. Для порівняння в таблицях подані результати обчислення відповідних величин за асимптотичними формулами (VIII.72) [706] для прямокутної ґратки (табл. 24.7)

$$K_3 = \tau\sqrt{\pi a} \left[ 1 + \pi\lambda^2/8 + \left( \pi^2/64 + 0,2215 \cos 4\alpha \right) \lambda^4 + \left( \pi^3/512 + 0,1448 \cos 6\alpha \right) \lambda^6 \right] + O(\lambda^8), \quad (24.22)$$

$$\lambda = 2a/d^1 \quad (d^1 = d_x^1), \quad d^2 = id^1$$

і (VIII.71) [706] для трикутної ґратки (табл. 24.8)

$$K_3 = \tau\sqrt{\pi a} \left[ 1 + \pi\lambda^2/(4\sqrt{3}) + \pi^2\lambda^4/48 + (0,0932 + 0,2862 \cos 6\alpha) \lambda^6 \right] + O(\lambda^8), \quad (24.23)$$

$$\lambda = 2a/d^1, \quad d^2 = d^1 \exp(\pi i\sqrt{3}),$$

а також розв'язок відповідних періодичних задач для розрізів в одній площині (співвісних) і в паралельних площинах (компланарних).

Таблиця 24.7. Значення  $K_3^0$  і  $K_3^{3B0}$  для квадратної ґратки тріщин ( $d^1 = 2\pi, d^2 = 2\pi i$ )

$r$	$a$	Співвісні	Компланарні	$\bar{K}_3^0$ (24.24)	(24.22)	$K_3^{3B0}$ ( $N=20$ )	$K_3^{3B0}$ ( $N=40$ )
1	3,0416	3,625	0,7731	3,61124	1,8673*	<b>3,5718</b>	<b>3,62393</b>
2	1,4708	1,109	0,9229	1,10677	1,1063	<b>1,1071</b>	<b>1,10707</b>
3	0,9472	1,040	0,9651	1,03871	1,0390	<b>1,0390</b>	<b>1,03896</b>
4	0,6854	1,020	0,9811	1,01931	1,0196	<b>1,0196</b>	<b>1,01955</b>
5	0,5283	1,012	0,9886	1,01116	1,0114	<b>1,0114</b>	<b>1,01139</b>

$r$	$N=8$	$Q=L$						
	1	2	3	4	5	10	15	20
1	1,7760	1,7897	1,7933	1,7947	1,7955	1,7965	1,7967	1,7967
2	1,0109	1,0110	1,0110	1,0110	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111
3	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018
4	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005
5	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002

$r$	$N=10$	$Q=L$							$K_3^{3B0}$	$K_3^{3B0}$
	1	2	3	4	5	10	15	20	5	20
1	1,8085	1,8224	1,8260	1,8275	1,8283	1,8281	1,8293	1,8295	<b>3,5760</b>	<b>3,5718</b>
2	1,0106	1,0109	1,0110	1,0110	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	<b>1,1142</b>	<b>1,1140</b>
3	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	<b>1,0434</b>	<b>1,0433</b>
4	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	<b>1,0222</b>	<b>1,0222</b>
5	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	<b>1,0130</b>	<b>1,0130</b>

Таблиця 24.8. Значення  $K_3^0$  і  $K_3^{3B0}$  для трикутної ґратки тріщин ( $d^1 = 2\pi, d^2 = d^1 \exp(\pi i \sqrt{3})$ )

$r$	$a$	Співвісні	Компланарні	[1439]	(24.23)	$K_3^{3B0}$
1	3,0416	3,625	0,7731	3,0416	1,9182*	<b>3,5760</b>
2	1,4708	1,109	0,9229	1,1139	1,1133	<b>1,1142</b>
3	0,9472	1,040	0,9651	1,0432	1,0432	<b>1,0434</b>
4	0,6854	1,020	0,9811	1,0221	1,0221	<b>1,0222</b>
5	0,5283	1,012	0,9886	1,0130	1,0130	<b>1,0130</b>

$r$	$N=8$	$Q=L$						
	1	2	3	4	5	10	15	20
1	1,7418	1,7513	1,7547	1,7562	1,7569	1,7579	1,7581	1,7581
2	1,0119	1,0126	1,0128	1,0129	1,0129	1,0130	1,0130	1,0130
3	1,0040	1,0042	1,0042	1,0043	1,0043	1,0043	1,0043	1,0043
4	1,0020	1,0021	1,0021	1,0021	1,0021	1,0022	1,0022	1,0022
5	1,0012	1,0012	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013

$r$	$N=10$	$Q=L$						
	1	2	3	4	5	10	15	20
1	1,7736	1,7833	1,7868	1,7883	1,7890	1,7898	1,7899	1,7899
2	1,0119	1,0126	1,0128	1,0129	1,0129	1,0129	1,0130	1,0130
3	1,0040	1,0042	1,0042	1,0043	1,0043	1,0043	1,0043	1,0043
4	1,0020	1,0021	1,0021	1,0021	1,0021	1,0022	1,0022	1,0022
5	1,0012	1,0012	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013

Отримані результати можна також зіставити (рис. 24.12) з результатами обчислення КІН за точним аналітичним виразом для прямокутної ґратки [1439]



$$\begin{aligned} \bar{K}_3 \sim K_3 &= \frac{\tau\sqrt{\pi ad^1}}{g\sqrt{2K(k)}\sqrt{-a\wp'(a)}}, \quad \bar{K}_3^0 = \frac{\bar{K}_3}{\tau\sqrt{\pi a}}, \quad k^2 = \frac{[\wp(a) - e_1](e_2 - e_3)}{[\wp(a) - e_2](e_1 - e_3)}, \\ g &= \left[ [\wp(a) - e_2](e_1 - e_3) \right]^{-1/2}, \quad g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \quad g_3 = 4e_1e_2e_3e_2, \\ d^2 = id^1, \quad \wp(z) \sim \wp(z | d^1, d^2) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[ \left( z - md^1 - nd^2 \right)^{-2} - \left( md^1 + nd^2 \right)^{-2} \right], \\ e_1 &= \wp(d^1/2), \quad e_2 = \wp\left(\left(d^1 + d^2\right)/2\right), \quad e_3 = \wp(d^2/2) \quad (e_1 + e_2 + e_3 = 0), \end{aligned} \tag{24.24}$$

де  $\wp(z)$  – еліптична функція Вейерштрасса (пе-функція);  $\wp'(z)$  – її похідна;  $g_2, g_3$  – інваріанти пе-функції;  $K(k)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду з модулем  $k$ .

Пояснення отриманим істотним відмінностям можна знайти в роботі [1589] і § 10, де відзначається, що під час такого розв'язування двоперіодичних задач (їх можна називати псевдодвоперіодичними) істотне значення має не тільки (і не стільки) абсолютне значення кількості врахованих у розв'язку рядів  $2L+1$  розрізів і їх стовпчиків  $2Q+1$ , але передусім відношення  $R = Q/L$ . Зі збільшенням параметра  $Q$  за збереження значення цього відношення розв'язок прямує до певної границі, властивої цьому відношенню (табл. 24.9). Причому, як видно з цієї таблиці, значення  $R$  є визначальним: збільшення  $Q$  після досягнення ним певного значення за збереження  $R$  практично нічого при даних значеннях  $a$  не змінює.

Зірочкою "\*" відзначене значення, яке отримане за межами дозволеного в [706] значення параметра  $\lambda = 2l/\omega_1 < 1$ .

**Таблиця 24.9. Збіжність значення безрозмірних КІН  $K_3^0$  та зведеного КІН  $K_3^{зв0}$  (виділено грубим шрифтом) для різних значень параметра  $R = Q/L$  ( $N=10$ ) і квадратної ґратки тріщин ( $d^1 = 2\pi, d^2 = 2\pi i$ )**

$r$	$a$	$R=1$									
		$L=1$	$L=5$	$L=10$	$L=15$	$L=20$	$L=25$	$L=50$	$L=50$	$L=99$	$L=99$
1	3,0416	3,4490	3,5628	3,5693	3,5707	3,5711	3,5714	3,8298	<b>3,5717</b>	3,8298	<b>3,5718</b>
2	1,4708	1,1042	1,1069	1,1071	1,1071	1,1071	1,1071	1,0111	<b>1,1071</b>	1,0111	<b>1,1071</b>
3	0,9472	1,0380	1,0390	1,0390	1,0390	1,0390	1,0390	1,0018	<b>1,0390</b>	1,0018	<b>1,0390</b>
4	0,6854	1,0191	1,0196	1,0196	1,0196	1,0196	1,0196	1,0005	<b>1,0196</b>	1,0005	<b>1,0196</b>
5	0,5283	1,0112	1,0114	1,0114	1,0114	1,0114	1,0114	1,0002	<b>1,0114</b>	1,0002	<b>1,0114</b>

$r$	$R=2$					$R=3$				$R=4$	
	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=4$	$L=5$	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=4$	$L=1$	$L=2$
1	2,1449	2,2079	2,2321	2,2450	2,2529	2,3883	2,4696	2,5005	2,5168	2,5651	2,6511
2	1,0389	1,0431	1,0447	1,0455	1,0460	1,0554	1,0600	1,0618	1,0627	1,0655	1,0700
3	1,0131	1,0147	1,0152	1,0156	1,0158	1,0195	1,0213	1,0219	1,0223	1,0234	1,0251
4	1,0064	1,0072	1,0075	1,0077	1,0078	1,0096	1,0106	1,0109	1,0111	1,0117	1,0125
5	1,0037	1,0041	1,0043	1,0044	1,0045	1,0056	1,0061	1,0063	1,0064	1,0068	1,0073

$r$	$R=4$	$R=5$			$R=6$			$R=7$	
	$L=3$	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=1$	$L=2$
1	2,6832	2,6975	2,7826	2,8140	2,7998	2,8818	2,9118	2,8810	2,9592
2	1,0717	1,0725	1,0766	1,0781	1,0775	1,0812	1,0826	1,0812	1,0847
3	1,0258	1,0261	1,0276	1,0282	1,0280	1,0293	1,0299	1,0293	1,0307
4	1,0129	1,0130	1,0138	1,0141	1,0140	1,0147	1,0150	1,0147	1,0154
5	1,0075	1,0076	1,0080	1,0082	1,0081	1,0086	1,0087	1,0085	1,0089

$r$	$R=8$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	2,9469	<b>3,5699</b>	3,0211	<b>3,5712</b>	3,0477	<b>3,5715</b>	3,0614	<b>3,5717</b>	3,0698	<b>3,5717</b>
2	1,0842	<b>1,1071</b>	1,0874	<b>1,1071</b>	1,0884	<b>1,1071</b>	1,0890	<b>1,1071</b>	1,0893	<b>1,1071</b>
3	1,0305	<b>1,0390</b>	1,0317	<b>1,0390</b>	1,0321	<b>1,0390</b>	1,0323	<b>1,0390</b>	1,0324	<b>1,0390</b>
4	1,0153	<b>1,0196</b>	1,0159	<b>1,0196</b>	1,0161	<b>1,0196</b>	1,0162	<b>1,0196</b>	1,0162	<b>1,0196</b>
5	1,0089	<b>1,0114</b>	1,0092	<b>1,0114</b>	1,0094	<b>1,0114</b>	1,0094	<b>1,0114</b>	1,0095	<b>1,0114</b>

$r$	$R=9$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,0014	<b>3,5700</b>	3,0717	<b>3,5714</b>	3,0968	<b>3,5716</b>	3,1096	<b>3,5717</b>	3,1175	<b>3,5717</b>
2	1,0865	<b>1,1071</b>	1,0894	<b>1,1071</b>	1,0984	<b>1,1071</b>	1,0909	<b>1,1071</b>	1,0912	<b>1,1071</b>
3	1,0314	<b>1,0390</b>	1,0324	<b>1,0390</b>	1,0328	<b>1,0390</b>	1,0330	<b>1,0390</b>	1,0331	<b>1,0390</b>
4	1,0157	<b>1,0196</b>	1,0163	<b>1,0196</b>	1,0164	<b>1,0196</b>	1,0165	<b>1,0196</b>	1,0166	<b>1,0196</b>
5	1,0092	<b>1,0114</b>	1,0095	<b>1,0114</b>	1,0096	<b>1,0114</b>	1,0096	<b>1,0114</b>	1,0097	<b>1,0114</b>

$r$	$R=10$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,0473	<b>3,5704</b>	3,1139	<b>3,5715</b>	3,1375	<b>3,5717</b>	3,1496	<b>3,5717</b>	3,1569	<b>3,5718</b>
2	1,0884	<b>1,1071</b>	1,0910	<b>1,1071</b>	1,0920	<b>1,1071</b>	1,0925	<b>1,1071</b>	1,0928	<b>1,1071</b>
3	1,0321	<b>1,0390</b>	1,0331	<b>1,0390</b>	1,0334	<b>1,0390</b>	1,0336	<b>1,0390</b>	1,0337	<b>1,0390</b>
4	1,0161	<b>1,0196</b>	1,0166	<b>1,0196</b>	1,0167	<b>1,0196</b>	1,0168	<b>1,0196</b>	1,0169	<b>1,0196</b>
5	1,0094	<b>1,0114</b>	1,0097	<b>1,0114</b>	1,0098	<b>1,0114</b>	1,0098	<b>1,0114</b>	1,0098	<b>1,0114</b>

$r$	$R=20$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,2814	<b>3,5716</b>	3,3236	<b>3,5718</b>	3,3383	<b>3,5718</b>	3,3456	<b>3,5718</b>	3,3501	<b>3,5718</b>
2	1,0974	<b>1,1071</b>	1,0989	<b>1,1071</b>	1,0994	<b>1,1071</b>	1,0997	<b>1,1071</b>	1,0998	<b>1,1071</b>
3	1,0354	<b>1,0390</b>	1,0360	<b>1,0390</b>	1,0362	<b>1,0390</b>	1,0362	<b>1,0390</b>	1,0363	<b>1,0390</b>
4	1,0178	<b>1,0196</b>	1,0180	<b>1,0196</b>	1,0181	<b>1,0196</b>	1,0182	<b>1,0196</b>	1,0182	<b>1,0196</b>
5	1,0104	<b>1,0114</b>	1,0105	<b>1,0114</b>	1,0106	<b>1,0114</b>	1,0106	<b>1,0114</b>	1,0106	<b>1,0114</b>

$r$	$R=30$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,3713	<b>3,5717</b>	3,4018	<b>3,5718</b>	3,4122	<b>3,5718</b>	3,4175	<b>3,5718</b>	3,4207	<b>3,5718</b>
2	1,1006	<b>1,1071</b>	1,1016	<b>1,1071</b>	1,1019	<b>1,1071</b>	1,1021	<b>1,1071</b>	1,1022	<b>1,1071</b>
3	1,0366	<b>1,0390</b>	1,0370	<b>1,0390</b>	1,0371	<b>1,0390</b>	1,0372	<b>1,0390</b>	1,0372	<b>1,0390</b>
4	1,0184	<b>1,0196</b>	1,0185	<b>1,0196</b>	1,0186	<b>1,0196</b>	1,0186	<b>1,0196</b>	1,0187	<b>1,0196</b>
5	1,0107	<b>1,0114</b>	1,0108	<b>1,0114</b>	1,0109	<b>1,0114</b>	1,0109	<b>1,0114</b>	1,0109	<b>1,0114</b>

$r$	$R=40$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,4480	<b>3,5718</b>	3,4676	<b>3,5718</b>	3,4742	<b>3,5718</b>	3,4775	<b>3,5718</b>	3,4795	<b>3,5718</b>
2	1,1031	<b>1,1071</b>	1,1038	<b>1,1071</b>	1,1040	<b>1,1071</b>	1,1041	<b>1,1071</b>	1,1042	<b>1,1071</b>
3	1,0375	<b>1,0390</b>	1,0378	<b>1,0390</b>	1,0378	<b>1,0390</b>	1,0379	<b>1,0390</b>	1,0379	<b>1,0390</b>
4	1,0188	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>
5	1,0110	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>

$r$	$R=50$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,4480	<b>3,5718</b>	3,4676	<b>3,5718</b>	3,4742	<b>3,5718</b>	3,4775	<b>3,5718</b>	3,4795	<b>3,5718</b>
2	1,1031	<b>1,1071</b>	1,1038	<b>1,1071</b>	1,1040	<b>1,1071</b>	1,1041	<b>1,1071</b>	1,1042	<b>1,1071</b>
3	1,0375	<b>1,0390</b>	1,0378	<b>1,0390</b>	1,0378	<b>1,0390</b>	1,0379	<b>1,0390</b>	1,0379	<b>1,0390</b>
4	1,0188	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>	1,0190	<b>1,0196</b>
5	1,0110	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>	1,0111	<b>1,0114</b>

$r$	$R=100$									
	$L=1$	$L=1$	$L=2$	$L=2$	$L=3$	$L=3$	$L=4$	$L=4$	$L=5$	$L=5$
1	3,5087	<b>3,5718</b>	3,5190	<b>3,5718</b>	3,5224	<b>3,5718</b>	3,5241	<b>3,5718</b>	3,5272	<b>3,5718</b>
2	1,1051	<b>1,1071</b>	1,1054	<b>1,1071</b>	1,1055	<b>1,1071</b>	1,1056	<b>1,1071</b>	1,1056	<b>1,1071</b>
3	1,0380	<b>1,0390</b>	1,0384	<b>1,0390</b>	1,0384	<b>1,0390</b>	1,0384	<b>1,0390</b>	1,0384	<b>1,0390</b>
4	1,0192	<b>1,0196</b>	1,0193	<b>1,0196</b>	1,0193	<b>1,0196</b>	1,0193	<b>1,0196</b>	1,0193	<b>1,0196</b>
5	1,0112	<b>1,0114</b>	1,0112	<b>1,0114</b>	1,0112	<b>1,0114</b>	1,0112	<b>1,0114</b>	1,0113	<b>1,0114</b>

$r$	$R=100$		[706]	Співвісні	$K_3^{3B0}$
	$L=10$	$L=10$			
1	3,5271	<b>3,5718</b>	1,8673*	3,625	<b>3,5718</b>
2	1,1057	<b>1,1071</b>	1,1063	1,109	<b>1,1071</b>
3	1,0385	<b>1,0390</b>	1,0390	1,040	<b>1,0390</b>
4	1,0193	<b>1,0196</b>	1,0196	1,020	<b>1,0196</b>
5	1,0113	<b>1,0114</b>	1,0114	1,012	<b>1,0114</b>

$r$	$a$	Комп- нарні	$R=1/2$					
			$Q=1$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=3$
1	3,0416	0,7731	1,5801	<b>3,5117</b>	1,5579	<b>3,5545</b>	1,5483	<b>3,5635</b>
2	1,4708	0,9229	0,98425	<b>1,1058</b>	0,98090	<b>1,1067</b>	0,97956	<b>1,1069</b>
3	0,9472	0,9651	0,99076	<b>1,0386</b>	0,98930	<b>1,0389</b>	0,98872	<b>1,0390</b>
4	0,6854	0,9811	0,99469	<b>1,0194</b>	0,99391	<b>1,0195</b>	0,99361	<b>1,0196</b>
5	0,5283	0,9886	0,99672	<b>1,0113</b>	0,99625	<b>1,0114</b>	0,99607	<b>1,0114</b>

$r$	$R=1/2$				$R=1/3$			
	$Q=4$	$Q=4$	$Q=5$	$Q=5$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=4$
1	1,5431	<b>3,5669</b>	1,5397	<b>3,5686</b>	1,4762	1,4517	1,4421	1,4370
2	0,97883	<b>1,1070</b>	0,97838	<b>1,1071</b>	0,97026	0,96647	0,96507	0,96424
3	0,98841	<b>1,0390</b>	0,98822	<b>1,0390</b>	0,98477	0,98313	0,98250	0,98218
4	0,99344	<b>1,0196</b>	0,99334	<b>1,0196</b>	0,99151	0,99064	0,99030	0,99013
5	0,99597	<b>1,0114</b>	0,99591	<b>1,0114</b>	0,99482	0,99430	0,99409	0,99399

$r$	$R=1/4$			$R=1/5$			$R=1/6$		
	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=2$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$
1	1,4185	1,3963	1,3879	1,3822	1,3627	1,3555	1,3574	1,3402	1,3334
2	0,96177	0,95831	0,95699	0,95625	0,95303	0,95191	0,95237	0,94948	0,94845
3	0,98112	0,97958	0,97902	0,97871	0,97730	0,97680	0,97699	0,97573	0,97528
4	0,98958	0,98875	0,98844	0,98829	0,98754	0,98726	0,98737	0,98669	0,98645
5	0,99366	0,99316	0,99298	0,99288	0,99244	0,99227	0,99233	0,99193	0,99178

$r$	$R=1/7$			$R=1/8$			$R=1/9$		
	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$
1	1,3394	1,3242	1,3187	1,3258	1,3123	1,3073	1,3152	1,3029	1,2985
2	0,94948	0,94685	0,94594	0,94722	0,94487	0,94404	0,94544	0,94330	0,94256
3	0,97573	0,97458	0,97418	0,97475	0,97371	0,97334	0,97396	0,97302	0,97268
4	0,98668	0,98608	0,98586	0,98616	0,98560	0,98541	0,98574	0,98523	0,98505
5	0,99193	0,99156	0,99143	0,99161	0,99127	0,99116	0,99135	0,99105	0,99094

$r$	$R=1/10$			$R=1/20$			$R=1/30$		
	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$
1	1,3066	1,2955	1,2915	1,2680	1,2624	1,2603	1,2551	1,2551	1,2550
2	0,94404	0,94206	0,94136	0,93738	0,93630	0,93594	0,93509	0,93436	0,93412
3	0,97334	0,97245	0,97215	0,97038	0,96990	0,96973	0,96936	0,96903	0,96892
4	0,98540	0,98493	0,98477	0,98382	0,98355	0,98346	0,98326	0,98308	0,98303
5	0,99116	0,99087	0,99077	0,99020	0,99004	0,98999	0,98987	0,98976	0,98972

Цікаво теж, що за однакових значень  $R$  (чи  $1/R$ ) розв'язок даного сингулярного інтегрального рівняння дає практично однакові значення  $K_3^0$  (порівняти з розв'язками для  $K_{II}$  у праці [1589]), причому отриманий розв'язок зі збільшенням чи  $L$  дуже швидко прямує до певного граничного значення. Цією властивістю пояснюються результати роботи [1237], котрі близькі до розв'язку періодичної задачі для системи компланарних розрізів: те, що здійснене повне підсумовування ядер Коші "по вертикалі" і скінченне – "по горизонталі" і означає необхідність близькості розв'язку до границі, яку має ґратка з відношенням  $R = \infty$ .

Виникає закономірне запитання, яке з цих значень є розв'язком поставленої двоперіодичної задачі? На разі можна відповісти, що жодне. Кожне з них дає наближений розв'язок задачі про пакет зі скінченної кількості  $(2Q+1)(2L+1)$  тріщин у необмеженому середовищі, навантаженому зусиллями інтенсивності  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1 = 0$  на нескінченності, або ж про прямокутну у поперечному перерізі балку із такою ж кількістю внутрішніх стрічкових включень, коли рівномірно розподілені напруження прикладені на її поверхні. Причому він найкраще придатний для тріщин всередині цієї групи (чим ця група більша – тим краще) і з наближенням до краю групи погіршується. До питання про точний розв'язок двоперіодичної задачі повернемося нижче (під час побудови зведеного розв'язку).

Табл. 24.10 подає значення безрозмірних КІН  $K_3^0$  для деяких значень відношення  $Q/L$  та різних значень півширини  $a$  і  $N=10$  для квадратної ґратки з  $d^1 = 2\pi$ ,  $d^2 = 2\pi i$ . Якщо порівняти з даними табл. 24.7, то можна зауважити, що при  $Q=0$ ,  $L=10$  і при  $L=0$ ,  $Q=10$  розв'язки досить добре збігаються з точними значеннями для відповідних періодичних задач (див. у табл. 24.7 третій та четвертий стовпчики). Помітна збіжність до "симетричних розв'язків" ( $Q=L$  табл. 24.7), коли  $Q \rightarrow L$  і відмінність від відповідних "симетричних розв'язків" при  $Q \neq L$  навіть якщо  $Q$  або  $L$  більші від відповідного значення  $L$  або  $Q$ . Очевидно, що відображені у табл. 24.10 розв'язки є наближеними несиметричними розв'язками двоперіодичних задач для квадратних ґраток за різного відношення кількості рядів до кількості стовпців:

$$L/Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}/10 \quad \text{і} \quad L/Q = 10/\{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

**Таблиця 24.10. Значення безрозмірних КІН  $K_3^0$  для деяких значень  $Q/L$  і півширини  $a$  для квадратної ґратки з  $d^1 = 2\pi$ ,  $d^2 = 2\pi i$**

$r$	$a$	$Q=10$					
		$L=0$	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=4$	$L=10$
1	3,0416	3,3769	3,0472	2,7826	2,5689	2,3951	1,8283
2	1,4708	1,1028	1,0884	1,0767	1,0656	1,0554	1,0111
3	0,9472	1,0379	1,0321	1,0276	1,0234	1,0195	1,0018
4	0,6854	1,0192	1,0161	1,0138	1,0117	1,0096	1,0005
5	0,5283	1,0112	1,0094	1,0080	1,0068	1,0056	1,0002

$r$	$a$	$L=10$					
		$Q=0$	$Q=1$	$Q=2$	$Q=3$	$Q=4$	$Q=10$
1	3,0416	0,78628	1,3067	1,3627	1,4204	1,4797	1,8283
2	1,4708	0,92734	0,94402	0,95306	0,96186	0,97034	1,0111
3	0,9472	0,96710	0,97333	0,97731	0,98114	0,98479	1,0018
4	0,6854	0,98222	0,98540	0,98753	0,98958	0,99152	1,0005
5	0,5283	0,98928	0,99115	0,99243	0,99366	0,99482	1,0002

Табл. 24.11, 24.12 містять результати порівняння двоперіодичних розв'язків для квадратної ґратки ( $d^1 = 2\pi$ ,  $d^2 = 2\pi i$ ) за  $Q=5$  (табл. 24.11) та  $Q=10$  (табл. 24.12) і різних значень  $L=0; 1; 2; 5; 10$ , що відповідає 1; 3; 5; 11; 21 врахованому ряду тріщин, з періодичним "по вертикалі" ( $d^2 = 2\pi i$ ) розв'язком для груп з 1, 3 і 5-ти розрізів з відповідним урахуванням  $2Q+1$  щілин у кожній з груп. У таблицях містяться значення безрозмірних КІН на правому краю розрізу  $p$ -ї групи, занумерованої зліва направо. Розрахунки були здійснені при  $N=8$ .

Обчислення двоперіодичного розв'язку на комп'ютері займає менше часу, ніж проведення обчислень для періодичної задачі у випадку декількох груп розрізів, однак двоперіодичний розв'язок за деякого значення  $L$  (або  $Q$ ) досить добре характеризує КІН на центральній групі розрізів у періодичній задачі з  $2L+1$  (або  $2Q+1$ ) груп тріщин – порівняти виділені грубим шрифтом результати у верхній та двох нижніх частинах табл. 24.11 та 24.12.

Таблиця 24.11. Значення безрозмірних КІН  $K_3^0$  для двоперіодичної і відповідних одноперіодичних задач

$r$	$a$	Двоперіодичний розв'язок $Q=5$					Одноперіодичний
		$L=0$	$L=1$	$L=2$	$L=5$	$L=10$	$M=1, p=1$
1	3,0416	0,79454	1,3576	<b>1,4684</b>	1,7995	2,2122	0,79854
2	1,4708	0,93140	0,95625	<b>0,97254</b>	1,0111	1,0461	0,93140
3	0,9472	0,96893	0,97871	<b>0,98574</b>	1,0018	1,0158	0,96893
4	0,6854	0,98320	0,98828	<b>0,99203</b>	1,0005	1,0078	0,98320
5	0,5283	0,98987	0,99288	<b>0,99513</b>	1,0002	1,0045	0,98987

$r$	розв'язок для $M$ груп по $2Q+1$ розрізів							
	$M=3$			$M=5$				
	$p=1$	$p=2$	$p=2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
1	1,3347	<b>1,3392</b>	0,8705	1,4291	1,4550	<b>1,4559</b>	1,4356	0,9260
2	0,9542	<b>0,9562</b>	0,9490	0,9676	0,9716	<b>0,9724</b>	0,9711	0,9618
3	0,9778	<b>0,9787</b>	0,9767	0,9836	0,9853	<b>0,9857</b>	0,9852	0,9823
4	0,9878	<b>0,9883</b>	0,9874	0,9908	0,9918	<b>0,9920</b>	0,9918	0,9904
5	0,9926	<b>0,9929</b>	0,9924	0,9944	0,9950	<b>0,9951</b>	0,9950	0,9942

Таблиця 24.12. Значення безрозмірних КІН  $K_3^0$  для двоперіодичної і відповідних одноперіодичних задач

$r$	$a$	Двоперіодичний розв'язок $Q=10$					Періодичний
		$L=0$	$L=1$	$L=2$	$L=5$	$L=10$	$M=1, p=1$
1	3,0416	0,78628	1,2835	<b>1,3385</b>	1,5122	1,7965	0,78628
2	1,4708	0,92734	0,94402	<b>0,95306</b>	0,97838	1,0111	0,92734
3	0,9472	0,96710	0,97333	<b>0,97731</b>	0,98822	1,0018	0,96710
4	0,6854	0,98221	0,98540	<b>0,98753</b>	0,99334	1,0005	0,98221
5	0,5283	0,98928	0,99115	<b>0,99243</b>	0,99591	1,0002	0,98928

$r$	розв'язок для $M$ груп по $2Q+1$ розрізів							
	$M=3$			$M=5$				
	$p=1$	$p=2$	$p=2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
1	1,2668	<b>1,2706</b>	0,8289	1,3183	1,3332	<b>1,3335</b>	1,3227	0,8612
2	0,9425	<b>0,9440</b>	0,9376	0,9510	0,9529	<b>0,9530</b>	0,9528	0,9459
3	0,9727	<b>0,9733</b>	0,9717	0,9764	0,9772	<b>0,9773</b>	0,9772	0,9753
4	0,9850	<b>0,9854</b>	0,9847	0,9870	0,9875	<b>0,9875</b>	0,9875	0,9867
5	0,9909	<b>0,9911</b>	0,9908	0,9921	0,9924	<b>0,9924</b>	0,9924	0,9920

Табл. 24.13 характеризує збіжність методу залежно від кількості  $N$  врахованих у розвиненні (4.3) членів для прямокутної і правильної трикутної ґратки при  $Q = L = 10$  для двох значень півширини розрізу  $a = \pi / r - 0,1$  ( $r = 1, 2$ ). Відстань між розрізами істотно впливає на величину параметра  $N$ , необхідного для забезпечення заданої точності: в межах дослідженого тут діапазону зміни величини  $a$  для забезпечення точності в 1% досить вважати  $N = 10$ . Близькі результати отримані і при  $Q = L = 15; 20$ .

У табл. 24.14 містяться результати визначення безрозмірного КІН  $K_3^{0(i)} = K_{3,1} / (\tau \sqrt{\pi a_i})$  у двоперіодичній задачі поздовжнього зсуву ізотропного тіла з двома групами компланарних щілин різної довжини, які формують кожна прямокутну ґратку у трьох варіантах геометричних параметрів. Для порівняння подані результати, що містяться у праці [1334].

**Таблиця 24.13. Вплив кількості  $N$  членів розвинення (4.3) на зміну безрозмірного КІН  $K_3^0$  для квадратної і трикутної ґраток**

$N \setminus a$	Квадратна ґратка $d^1 = 2\pi, d^2 = 2\pi i$		Трикутна ґратка $d^1 = 2\pi, d^2 = d^1 \exp(\pi i \sqrt{3})$	
	<b>3,042</b>	<b>1,471</b>	<b>3,042</b>	<b>1,471</b>
<b>1</b>	1,0735	1,0036	1,0702	1,0102
<b>2</b>	1,2131	1,0072	1,1951	1,0113
<b>3</b>	1,4582	1,0110	1,4235	1,0126
<b>4</b>	1,5569	1,0110	1,5221	1,0128
<b>5</b>	1,6726	1,0111	1,6371	1,0130
<b>10</b>	1,8293	1,0111	1,7900	1,0130
<b>15</b>	1,8525	1,0111	1,8127	1,0130
<b>20</b>	1,8555	1,0111	1,8156	1,0130

Аналіз результатів свідчить, що оскільки у варіанті 1 відстань між щілинами дуже велика і тому взаємодії між щілинами практично не повинно бути, то значення  $K_3^{0(i)}$  повинні були би бути дуже близьким до одиниці (що й підтверджують здійснені обчислення). Отримані ж у [1334] для цього випадку значення КІН доволі сильно різняться від одиниці. Це може свідчити про їхню хибність. Однак відношення зведених КІН на різних групах розрізів близьке до одержаних у даному дослідженні.

**Табл. 24.14. Значення безрозмірного КІН  $K_3^{0(i)}$  у двоперіодичній задачі поздовжнього зсуву ізотропного тіла з двома групами компланарних щілин**

Варіант	$a_1$	$a_2$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$d_x^1$	$d_y^1$	$d_x^2$	$d_y^2$
1	1	4/3	0	0	10/3	40/3	20/3	0	0	80/3
2	1	1,2	0	0	2	4	4	0	0	8
3	1	8/7	0	0	10/7	10/7	20/7	0	0	20/7

Варіант	[1334]			Запропонований метод		
	$K_3^{0(1)}$	$K_3^{0(2)}$	$K_3^{0(1)} / K_3^{0(2)}$	$K_3^{0(1)}$	$K_3^{0(2)}$	$K_3^{0(1)} / K_3^{0(2)}$
1	1,63	1,68	1,031	0,996	1,03	1,034
2	1,78	1,90	1,067	0,945	1,01	1,070
3	2,16	2,56	1,185	0,828	0,951	1,150

Таблиця 24.15. Зіставлення різних розв'язків двоперіодичних задач

Задача	$c_1$	$c_2$	Примітка
Двоперіодична трикутна (VIII.71) [706]	$2/\sqrt{3} \approx 1,154396$	$4/3 \approx 1,333333$	Правильна трикутна
Двоперіодична квадратна (VIII.72) [706]	1	$1+14,18/\pi^2 \approx 2,436735$	Кут $\alpha = 0$
Лінійна одноперіодична	$\pi/3 \approx 1,047198$	$19\pi^2/90 \approx 2,083583$	

Якщо позначити через  $a$  довжину тріщини,  $d = 2b$  - період розташування тріщин у одноперіодичній задачі, то у випадку плоскої (поперечний зсув) і антиплоскої задач (поперечний зсув) КІН подається формулою (24.1)  $K = \tau\sqrt{d \operatorname{tg}(\pi a/d)}$ , яку можна розвинути у наближений асимптотичний ряд

$$K = \tau\sqrt{\pi a} \left( 1 + c_1 \frac{\pi a^2}{2d^2} + c_2 \frac{\pi^2 a^4}{4d^4} \right). \quad (24.25)$$

Зіставлення коефіцієнтів  $c_1$ ,  $c_2$  для цієї задачі і двоперіодичних розв'язків [706] дає табл. 24.15.

Помітно, що асимптотичні розвинення (VIII.71), (VIII.72) [706] доволі близькі до розв'язку відповідної періодичної задачі.

### Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень

Нехай представницький елемент двоперіодичної задачі (детальніше про представницькі елементи див. § 25) має форму прямокутника з розмірами  $2c \times 2d$  (періоди  $d^1 = 2c$ ,  $d^2 = 2id$ ; рис. 24.13).

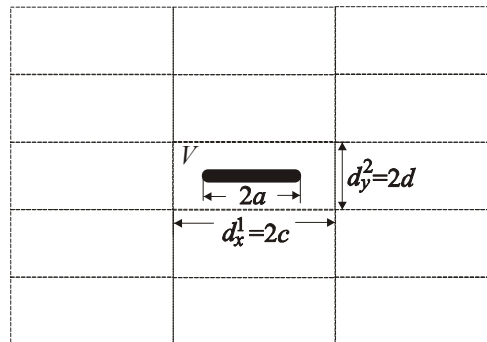


Рис. 24.13. Прямокутний представницький елемент у двоперіодичній задачі

Систему координат  $xOy$  помістимо у центрі цього елемента. Середні за змінною  $x$  значення напруження  $\sigma_{xz}(x+iy)$  та  $\sigma_{yz}(x+iy)$  на відрізку  $x \in [-c; c]$  за фіксованого значення координати  $y$  визначимо виразами

$$\hat{\tau} \equiv \langle \sigma_{yz}(x+iy) \rangle_x = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \sigma_{yz}(x+iy) dx \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \sigma_{yz}(x_i+iy), \quad (24.26)$$

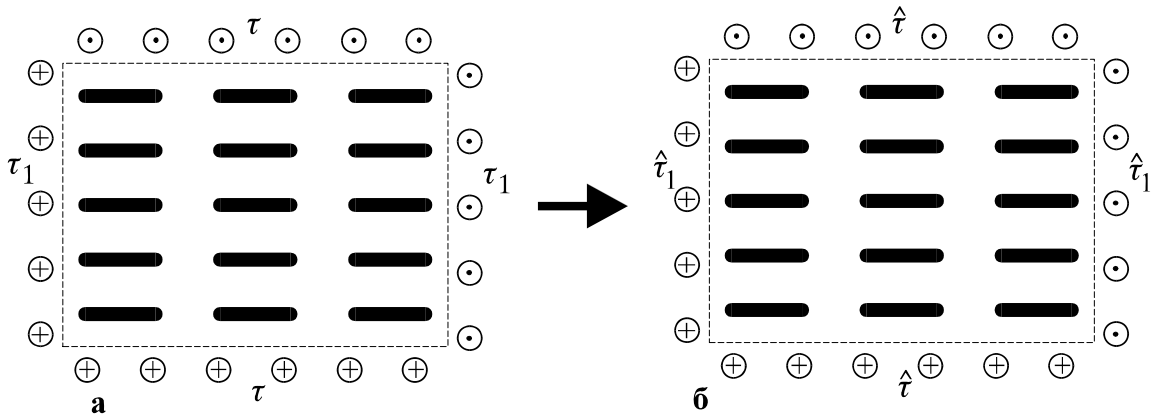
де  $x_i$  ( $i = \overline{1, T}$ ) – це загалом довільно обрана на проміжку  $x \in [-c; c]$  система з  $T$  квадратурних вузлів.

Подібним чином середні за змінною  $y$  значення напруження  $\sigma_{xz}(x+iy)$  та  $\sigma_{yz}(x+iy)$  на відріжку  $y \in [-d; d]$  за фіксованого значення  $x$  визначимо виразами

$$\hat{\tau}_1 \equiv \langle \sigma_{xz}(x+iy) \rangle_y = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \sigma_{xz}(x+iy) dy \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \sigma_{xz}(x+iy_i), \quad (24.27)$$

де у свою чергу  $y_i$  ( $i = \overline{1, T}$ ) – це загалом довільно обрана на проміжку  $y \in [-d; d]$  система з  $T$  квадратурних вузлів.

Розглянемо детальніше поняття напруження на нескінченності. У випадку скінченної кількості тріщин (включень, дефектів) і навіть їх нескінченної кількості для одноперіодичних задач під однорідним полем напружень на нескінченності розуміють рівень напружень у безмежно віддаленій точці, тобто безмежно далеко від кожного з дефектів. У всіх згаданих випадках така точка існує. А ось у випадку двоперіодичної задачі не можна знайти точки площини  $xOy$ , яка би була на безмежній відстані від усіх неоднорідностей. У цьому випадку під напруженням на нескінченності слід розуміти середній рівень напружень на межі представницького елемента.



**Рис. 24.14. Трансформація розв'язку двоперіодичної задачі: розрахункова схема методу колокацій (а); отриманий розв'язок відповідає фактичній схемі навантаження (б)**

Виявляється, що якщо розв'язати за допомогою запропонованого методу відповідну двоперіодичну задачу при дії на нескінченності напружень  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1 = 0$  та обчислити середні напруження  $\langle \sigma_{yz}(x \pm id) \rangle_x \equiv \hat{\sigma}_{yz}^x \equiv \hat{\tau}$  на межах представницького елемента  $x \in [-c; c]$ ,  $y = \pm d$  та середні напруження  $\langle \sigma_{xz}(\pm c + iy) \rangle_y \equiv \hat{\sigma}_{xz}^y \equiv \hat{\tau}_1$  на межах представницького елемента  $y \in [-d; d]$ ,  $x = \pm c$ , то вони (так само, як і безрозмірні КІН  $K_3^0 = K_{3,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$ ) для кожного значення параметра  $R$  будуть різними навіть у граничних випадках  $L, Q \rightarrow \infty$  і не збігатимуться з очікуваними значеннями  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ , за яких здійснювалися обчислення. Це означає, що у реально розв'язаній двоперіодичній задачі фактичне “навантаження на нескінченності” дорівнює не  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ , а  $\sigma_{yz}^\infty = \hat{\sigma}_{yz}^x = \hat{\tau}$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \hat{\sigma}_{xz}^y = \hat{\tau}_1$  (рис. 24.14).



Тому на основі розрахованого за напруження  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1 = 0$  значення КІН  $K_{3,1}$  реальне зведене значення КІН  $K_3^{3B} \sim K_{3,1}^{3B}$  та у розглядуваній конкретній задачі відповідне безрозмірне значення  $K_3^{3B0} \sim K_{3,1}^{3B0}$  обчислюються на основі виразів

$$K_3^{3B} \sim K_{3,1}^{3B} = \frac{\tau}{\hat{\tau}} K_{3,1}, \quad K_3^{3B0} \sim K_{3,1}^{3B0} = \frac{\tau}{\hat{\tau}} K_3^0. \quad (24.28)$$

Цими ж формулами можна користуватися, коли у прямокутному представницькому елементі є не одна, а декілька тріщин, паралельних до осі  $Ox$ .

У табл. 24.16 подані результати розрахунку безрозмірних звичайних  $K_3^0 = K_{3,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$  та зведених  $K_3^{3B0}$  коефіцієнтів інтенсивності напружень у двоперіодичній задачі для пластики з тріщинами завдовжки  $2a$ , навантаженої “напруженнями на нескінченності”  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1 = 0$  (квадратний представницький елемент  $d^1 = 2c$ ,  $d^2 = 2ic$  ( $c = d$ ) і  $c = 1,05a$ ;  $1,25a$ ;  $2,25a$ ;  $4,25a$ ). Обчислення здійснені для різних значень кількості стовпчиків та рядків  $Q, L$  відповідно (значення  $Q = 0, L = 0$  відповідає розв’язку для одної тріщини) за урахування  $N = 10$  членів часткових сум рядів поліномів Чебишева і  $T = 100$  квадратурних вузлів  $x_i$  у формулах (24.27) для обчислення середніх напружень  $\langle \sigma_{yz}(x \pm id) \rangle_x \equiv \hat{\sigma}_{yz}^x \equiv \hat{\tau}$  на межі  $x \in [-c; c]$ ,  $y = \pm d$  представницького елемента. Поряд зі значеннями  $K_3^0, K_3^{3B0}$  у таблиці подано відносні похибки  $\Delta, \Delta^{3B}$  їхнього обчислення стосовно точного знерозміреного значення  $\bar{K}_3^0 = \bar{K}_3/(\tau\sqrt{\pi a}) = 2,97896; 1,56297; 1,09402; 1,02267$ , обчисленого на основі аналітичного розв’язку  $K_3 \sim \bar{K}_3$  праці [1439] (формула (24.24)), а також знерозмірене середнє напруження  $\hat{\tau}/\tau$  на межі представницького елемента й відносне відхилення  $\Delta^{\tau}$  середнього напруження  $\hat{\sigma}_{yz}^x \equiv \hat{\tau}$  від номінального:

$$\Delta = \frac{K_3^0 - \bar{K}_3^0}{\bar{K}_3^0} 100\%, \quad \Delta^{3B} = \frac{K_3^{3B0} - \bar{K}_3^0}{\bar{K}_3^0} 100\%, \quad \Delta^{\tau} = \frac{\hat{\tau} - \tau}{\tau} 100\%.$$

Основна кількість даних отримана для однакових значень  $Q = L$  ( $R = 1$ ), щоб відобразити характер збіжності обчислювальних процесів зі збільшенням кількості врахованих тріщин. Однак приведені також окремі результати, які були обчислені для різних значень  $R \neq 1$ . Помітно, що хоча значення  $R$  виразно впливає на обчислене значення КІН  $K_3^0$ , зведене значення КІН  $K_3^{3B0}$  для довільних значень  $R$  надзвичайно мало відрізняється від точного аналітичного значення.

Грубим шрифтом у таблиці виділено рядки з оптимальними щодо точності обчислень значеннями параметрів  $Q, L$ . Навіть для випадку відносно дуже сильно зближених тріщин ( $c = 1,05a$ ) відносна похибка обчислення  $K_3^{3B0}$  дорівнює усього 0,308%, хоча значення  $K_3^0$  різняться від точного аж на 45%. Причому зі збільшенням розміру представницького елемента похибка зведеного КІН швидко зменшується:  $-0,028\%$  для  $c = 1,25a$ ;  $0,005\%$  для  $c = 2,25a$  та  $-0,012\%$  для  $c = 4,25$  (для  $K_3^0$  ці похибки відповідно дорівнювали 27,120%; 7,780%; 2,148%). Збільшення параметрів  $Q, L$  за межі оптимальних спричиняє навіть невелике зростання модуля похибки, породжене, ймовірно накопиченням похибок обчислення

внаслідок істотного збільшення кількості обчислень. Подібно веде себе зі збільшенням параметрів  $Q, L$  і безрозмірне середнє напруження  $\hat{\tau}/\tau$  – спочатку систематично зменшується, а потім починає злегка зростати.

**Таблиця 24.16.** Безрозмірні значення КІН  $K_3^0$ , зведеного КІН  $K_3^{3B0}$  та середнього напруження  $\hat{\tau}/\tau$  і відносні похибки їхнього обчислення  $\Delta, \Delta^{3B}, \Delta^\tau$

$Q$	$L$	$K_3^0$	$\hat{\tau}/\tau$	$K_3^{3B0}$	$\Delta, \%$	$\Delta^{3B}, \%$	$\Delta^\tau, \%$
$c = 1,05 a, \bar{K}_3^0 = 2,97896$							
0	0	1	0,80334	1,24480	66,431	58,214	19,666
5	5	1,6268	0,54895	2,96348	45,390	0,520	45,105
10	10	1,6277	0,54839	2,96814	45,360	0,363	45,161
15	15	1,6278	0,54827	2,96898	45,357	0,335	45,173
20	20	1,6279	0,54823	2,96937	45,353	0,322	45,177
25	25	1,6279	0,54821	2,96948	45,353	0,318	45,179
<b>50</b>	<b>50</b>	<b>1,628</b>	<b>0,54819</b>	<b>2,96977</b>	<b>45,350</b>	<b>0,308</b>	<b>45,181</b>
15	45	1,289	0,43405	2,96970	56,730	0,311	56,595
45	15	2,2088	0,74379	2,96966	25,853	0,312	25,621
$c = 1,25 a, \bar{K}_3^0 = 1,56297$							
0	0	1	0,85456	1,17019	36,019	25,130	14,544
5	5	1,1388	0,7289	1,56235	27,139	0,039	27,11
<b>10</b>	<b>10</b>	<b>1,1391</b>	<b>0,7286</b>	<b>1,56341</b>	<b>27,120</b>	<b>-0,028</b>	<b>27,14</b>
15	15	1,1392	0,72854	1,56368	27,113	-0,045	27,146
20	20	1,1392	0,72851	1,56374	27,113	-0,049	27,149
25	25	1,1392	0,7285	1,56376	27,113	-0,051	27,15
50	50	1,1392	0,72849	1,56378	27,113	-0,052	27,151
10	5	1,2723	0,81386	1,56329	18,597	-0,021	18,614
5	10	1,0311	0,65956	1,56331	34,029	-0,022	34,044
$c = 2,25 a, \bar{K}_3^0 = 1,09402$							
0	0	1	0,95226	1,05013	8,594	4,012	4,774
1	1	1,0085	0,92367	1,09184	7,817	0,199	7,633
2	2	1,0088	0,92255	1,09349	7,790	0,048	7,745
<b>3</b>	<b>3</b>	<b>1,0089</b>	<b>0,92224</b>	<b>1,09397</b>	<b>7,780</b>	<b>0,005</b>	<b>7,776</b>
4	4	1,0089	0,92212	1,09411	7,780	-0,008	7,788
5	5	1,0089	0,92206	1,09418	7,780	-0,015	7,794
10	10	1,0089	0,92196	1,09430	7,780	-0,026	7,804
50	50	1,0089	0,92193	1,09433	7,780	-0,029	7,807
3	8	0,97085	0,8872	1,09429	11,258	-0,024	11,28
$c = 4,25 a, \bar{K}_3^0 = 1,02267$							
0	0	1	0,98626	1,01393	2,217	0,854	1,374
1	1	1,0006	0,97872	1,02236	2,158	0,031	2,128
<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1,0007</b>	<b>0,9784</b>	<b>1,02279</b>	<b>2,148</b>	<b>-0,012</b>	<b>2,160</b>
3	3	1,0007	0,97831	1,02289	2,148	-0,021	2,169
4	4	1,0007	0,97827	1,02293	2,148	-0,025	2,173
5	5	1,0007	0,97826	1,02294	2,148	-0,026	2,174
10	10	1,0007	0,97823	1,02297	2,148	-0,029	2,177
2	6	0,98922	0,96705	1,02293	3,271	-0,025	3,295
6	2	1,0124	0,98971	1,02293	1,004	-0,025	1,029

У цілому загальний рівень похибок обчислення всіх величин мало залежить від відношення  $R = Q/L$ . Тому розв'язування двоперіодичних задач для тонкостінних дефектів можна ефективно здійснювати на основі запропонованої у § 11 схеми методу колокацій для

довільного значення  $R = Q/L$  (хоча оптимальним видається випадок  $R = 1$ ) з використанням процедури зведення на основі методу коригування розв'язку за допомогою середніх напружень (24.26), (24.27) на межах представницького елемента. Зокрема коригування КІН відбувається на основі залежності (24.28).

За великої відстані між дефектами цілком допустимий рівень похибки в обчисленні КІН точної двоперіодичної задачі можна отримати без використання процедури зведення лише на основі схеми методу колокацій § 11.

Загалом отриманий рівень похибок сформований не лише практично скінченим рівнем параметрів  $Q, L$ , але й інших параметрів –  $N$  (кількості врахованих членів апроксимаційного ряду) та  $T$  (кількості вузлів квадратурних формул для обчислення середніх напружень). Тому збільшенням значень  $N$  та  $T$  можна домагатися додаткового зменшення похибки зведеного значення КІН  $K_3^{3B}$ .

З іншого боку, похибку отриманого на основі лише методу колокації значення  $K_3$  ( $K_3^0$ ) збільшенням  $N$  та  $T$  істотно покращити не вдається, бо між отриманим у такий спосіб розв'язком та точним розв'язком двоперіодичної задачі є принципова різниця, оскільки перший розв'язок стосується лише побудови наближеного розв'язку для центрального дефекту у скінченній, лише квазидвoperіодичній, групі дефектів у центральній скінченній області безмежної площини.

Усі ці висновки підтвержені також даними табл. 24.7 – 24.9, у яких на більшому масиві даних результати обчислення наближених КІН  $K_3^0$  та аналітичних  $\bar{K}_3$  зіставлені з виділеними грубим шрифтом значеннями безрозмірних зведених КІН  $K_3^{3B0}$ .

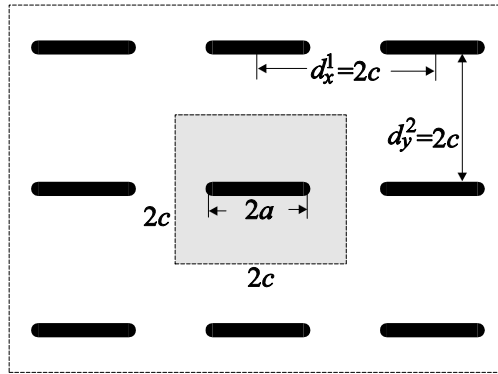
**Таблиця 24.17. Залежність зведеного безрозмірного КІН  $\bar{K}_3^0$  для двоперіодичної задачі від кількості врахованих рядів  $2L+1$  та стовпчиків  $2Q+1$  тріщин і кількості  $N$  членів рядів поліномів Чебишева ( $r=1$ , аналітичний розв'язок 3,61624)**

$\bar{K}_3^0$ ( $N=10$ )							$(N=20)$
$L=Q=5$	$L=Q=10$	$L=Q=15$	$L=Q=20$	$L=Q=25$	$L=Q=50$	$L=Q=99$	$L=Q=50$
3,5760	3,5722	3,5721	3,5718	3,5717	3,5716	3,5715	3,6236
1,1128	1,2178	1,2206	1,2289	1,2317	1,2344	1,2372	-0,2035

Таблиця 24.17 подає залежність (третій рядок) зведеного безрозмірного КІН  $\bar{K}_3^0$  для двоперіодичної задачі від кількості врахованих рядів  $2L+1$  та стовпчиків  $2Q+1$  тріщин і кількості  $N$  членів рядів поліномів Чебишева для квадратної ґратки при  $r=1$ . Порівняння процентного відхилення від точного аналітичного розв'язку 3,61624 (останній рядок) дає можливість стверджувати, що при заданих геометричних значеннях параметрів задачі вже при  $L=Q=5$ ,  $N=10$  отримується точність порядку 1%. Наступне збільшення  $L$  та  $Q$  може навіть дещо зменшити точність зведеного КІН у той час, коли збільшення  $N$  завжди точність підвищує.

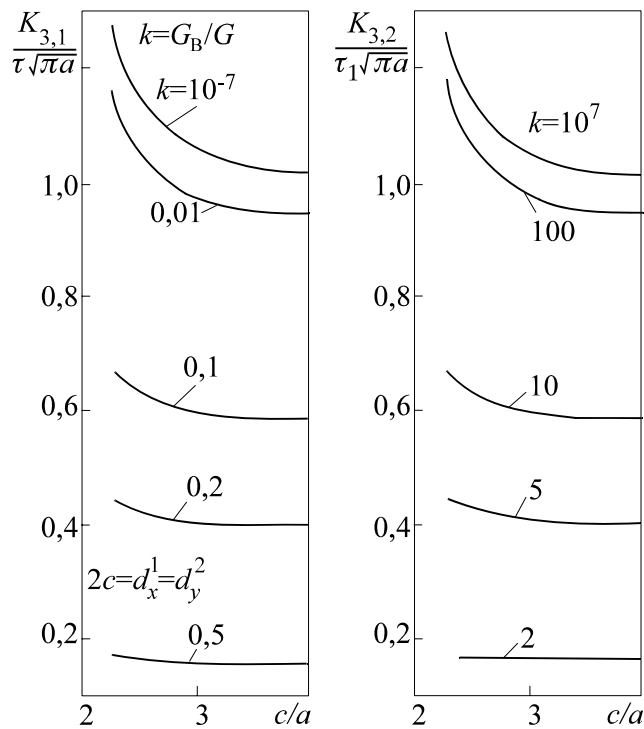
**Система включень**

Досліджені [970] УКІН  $K_{3,1}^0 = K_{3,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$ ,  $K_{3,2}^0 = K_{3,2}/(\tau_1\sqrt{\pi a})$  для двоперіодичного укладання тонких включень еліптичного профілю ( $A \equiv a/h_0 = 10$ ) завдовжки  $2a$  в центрах квадратної ґратки (рис. 24.15) розміром  $2c \times 2c$  (періоди  $d^1 = 2c$ ,  $d^2 = 2ic$ ) при заданих напруженнях на нескінченності.



**Рис. 24.15.** Двоперіодична система включень з квадратною ґраткою

На рис. 24.16 відображена залежність  $K_{3,j}^0$  ( $j = 1, 2$ ) від відносного розміру  $c/a$  представницького елемента для деяких значень відносної жорсткості  $k = G_B/G$  включення. Зменшення періоду (зближення включень) викликає збільшення УКІН, але внаслідок ефекту екранування, властивого і податним і жорстким включенням, воно повільніше, ніж у відповідній періодичній задачі співвісних включень. Якщо  $c/a \rightarrow 1$ , то УКІН необмежено зростають; якщо  $c/a > 4$  взаємодією включень можна практично знехтувати.



**Рис. 24.16**

Значенню  $k = 10^{-7}$  відповідає система тріщин;  $k = 10^7$  – система абсолютно жорстких стрічок.

У випадку двоперіодичної задачі для пружних включень під впливом під дією “навантаження на нескінченності”  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1$  слід так само обчислити за схемою методу колокацій УКІН  $K_{3,1}, K_{3,2}$  та відповідні до цього розв’язку усереднені напруження  $\hat{\sigma}_{yz}^x = \hat{\tau}$ ,  $\hat{\sigma}_{xz}^y = \hat{\tau}_1$  на межі представницького елемента за довільного відношення параметрів  $L$  та  $Q$ . Тобто вважається, що отриманий за допомогою методу колокації розв’язок  $K_{3,1}, K_{3,2}$  стосується не “навантаження на нескінченності”  $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1$ , для якого здійснювалися обчислення, а деякого “ефективного” навантаження  $\sigma_{yz}^{\infty} = \hat{\tau}$  та  $\sigma_{xz}^{\infty} = \hat{\tau}_1$  (див. рис. 24.14).

### 24.7. Антиплоска деформація ізотропного середовища зі злученими пружними стрічковими включеннями

Вище були вивчені питання концентрації напружень поблизу одиноких та систем з тонкими дефектами і неоднорідностями у випадку їх плоскої або гладкої викривленої конфігурації. Однак часто інженерна практика потребує розрахувати вплив дефектів негладкої форми. У рамках антиплоскої задачі теорії пружності розроблені методи опису тріщин ламаного профілю [706, 860, 589, 339, 649]. З інших типів тонких дефектів ламаної форми вивчені плоскі задачі для перехрещених абсолютно жорстких включень [33–35, 821, 797]. Питання аналізу ламаних і перехрещених пружних стрічок, а також дуже важливої для механіки руйнування ситуації, коли з вістря тонкого включення виходить тріщина, навіть за умов повздовжнього зсуву досі не вивчені.

#### Система довільно орієнтованих стрічкових пружних включень

Для розв’язування поставленого завдання [688, 1541] спочатку розглянемо антиплоску деформацію необмеженого ізотропного середовища з модулем зсуву  $G$  (див. п. 20.4)), що містить  $M$  стрічкових пружних включень  $L'_m$  з модулями зсуву  $G_{Bm}$  ( $m = \overline{1, M}$ ) малої товщини  $2h_m$ , які не мають спільних точок (рис. 24.17). Зовнішнє навантаження є довільним і характеризується відомим полем напружень  $\sigma_{yz}^0$ ,  $\sigma_{xz}^0$ , яке воно породжує в однорідному тілі.

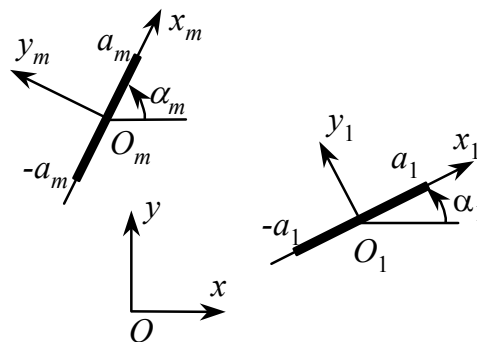


Рис. 24.17. Схема задачі системи відокремлених включень

Згідно з методом функцій стрибка § 20 включення моделюємо наперед невідомими стрибками напружень  $f_3^m(t) = \sigma_{nz}^- - \sigma_{nz}^+$  і похідних переміщень

$$f_6^m(t) = (\partial w / \partial x_m)^- - (\partial w / \partial x_m)^+, \quad t \in L'_m, \quad m = \overline{1, M}.$$

За допомогою функцій стрибка відповідно до (20.14) поле напружень у довільній точці  $z = x + iy$  області визначається виразами

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M e^{-i\alpha_m} \left\{ -Gt_6^m \left[ (z - z_{0m}) e^{-i\alpha_m} \right] + it_3^m \left[ (z - z_{0m}) e^{-i\alpha_m} \right] \right\} + \\ &+ \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z), \quad t_k^m = \int_{L'_m} \frac{f_k^m(t) dt}{t - z} \quad (m = \overline{1, M}; \quad k = 3, 6). \end{aligned} \quad (24.29)$$

Згідно з (15.1) існують умови взаємодії пружного включення з ізотропним масивом (фактично умови неідеального контакту між берегами матриці, що прилягають до включення з протилежних його боків), які стосовно  $p$ -го включення мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{G_{Bp}}{G} (\sigma_{x_{pz}}^- + \sigma_{x_{pz}}^+) - \frac{1}{h} \int_{a_p}^x (\sigma_{y_{pz}}^- - \sigma_{y_{pz}}^+) d\xi &= 2\sigma_{x_{pz}}^C, \\ (\sigma_{y_{pz}}^- + \sigma_{y_{pz}}^+) + \frac{1}{h} \frac{G_{Bp}}{G} \int_{a_m}^x (\sigma_{x_{pz}}^- - \sigma_{x_{pz}}^+) d\xi &= w_-^* \frac{G_{Bp}}{h} + \frac{G_{Bp}}{G} (\sigma_{y_{pz}}^{0-} + \sigma_{y_{pz}}^{0+}) \quad (x \in L'_p), \end{aligned} \quad (24.30)$$

де сталі  $\sigma_{x_{pz}}^C$ ,  $w_-^*$  визначаються апіорними залежностями:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_{pz}}^C &= \sigma_{x_{pz}}^0(-a_p) \frac{G}{\max(G_{Bp}, G)}, \\ w_-^* &= 2h(-a_p) \sigma_{yz}^0(-a_p) \frac{\min(G_{Bp}, G)}{G^2} \quad (p = \overline{1, M}). \end{aligned}$$

Для визначення невідомих функцій стрибка побудуємо систему  $2M$  сингулярних інтегральних рівнянь, підставивши вираз (24.29) в умови (24.30)

$$\begin{aligned} \frac{G_{Bp}}{G} t_3^p(x) - \frac{1}{h} \int_{-a_p}^x f_3^p(\xi) d\xi + \frac{G_{Bp}}{G} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{m \neq p} e^{i(\alpha_p - \alpha_m)} \left[ -Gt_6^m(z_{mp}) + it_3^m(z_{mp}) \right] \right\} &= \\ = 2\sigma_{x_{pz}}^C - 2 \frac{G_{Bp}}{G} \sigma_{x_{pz}}^0, \\ -Gt_6^p(x) + \frac{G_{Bp}}{h} \int_{-a_p}^x f_6^p(\xi) d\xi + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m \neq p} e^{i(\alpha_p - \alpha_m)} \left[ -Gt_6^m(z_{mp}) + it_3^m(z_{mp}) \right] \right\} &= \\ = W^* \frac{G_{Bp}}{h} + \frac{G_{Bp}}{G} (\sigma_{yz}^{0-} + \sigma_{yz}^{0+}) - 2\sigma_{y_{pz}}^0(x), \\ z_{mp} = (z_{0p} + x e^{i\alpha_p} - z_{0m}) e^{-i\alpha_m} \quad (x \in L'_p; \quad p = \overline{1, M}). \end{aligned} \quad (24.31)$$

Розв'язок ССІР (24.31) має класичну кореневу особливість на кінцях проміжків інтегрування  $t \in [-a_m, a_m]$ :

$$f_k^m(t) = \frac{\varphi_k^m(t/a_m)}{\sqrt{1-(t/a_m)^2}} \quad (k = 3, 6; m = \overline{1, M}). \quad (24.32)$$

Для існування однозначного розв'язку цієї ССІР стосовно  $2M$  невідомих функцій стрибка  $f_3^m(t)$  і  $f_6^m(t)$  ( $m = \overline{1, M}$ ) у класі функцій (24.32) необхідне виконання ще  $2M$  додаткових умов

$$\int_{-a_m}^{-a_m} f_k^m(t) dt = 0 \quad (k = 3, 6; m = \overline{1, M}). \quad (24.33)$$

Умови, накладені на  $f_6^m$ , впливають з однозначності вектора переміщень при обході довкола  $m$ -го включення; умови на  $f_3^m$  – це умови рівноваги цих же включень.

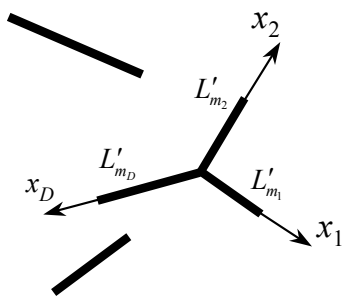


Рис. 24.18. В'язка включень

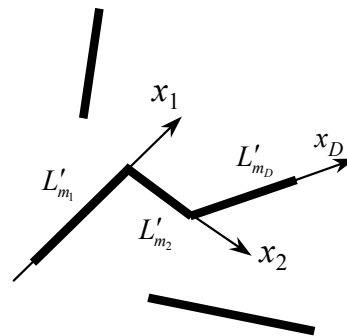


Рис. 24.19. Ланцюжок включень

Розглянемо тепер випадок, якщо  $D$  пружних включень  $L'_{m_d}$  ( $d = \overline{1, D}$ ) сходяться своїми лівими кінцями в одній точці (рис. 24.18). Ця задача зводиться до тієї ж ССІР (24.31). Однак, оскільки неможлива глобальна рівновага кожного з включень в'язки зокрема, а існує лише рівновага всієї в'язки в цілому, до того ж можлива також однозначність зміщень при обході навколо усієї в'язки, а не кожного з її елементів, то порядок сингулярності напружень у точці з'єднання приймається нижчим від класичного кореневого [860, 339], то  $2D$  додаткових умов з (24.33)

$$\int_{-a_{m_d}}^{a_{m_d}} f_k^{m_d}(t) dt = 0 \quad (k = 3, 6; d = \overline{1, D}),$$

які стосуються елементів в'язки, необхідно замінити на  $2D$  інших умов:

$$\sum_{d=1}^D \int_{-a_{m_d}}^{a_{m_d}} f_k^{m_d}(t) dt = 0, \quad \varphi_k^{m_d}(-1) = 0 \quad (k = 3, 6; d = \overline{1, D-1}). \quad (24.34)$$

Інший важливий випадок буде, якщо  $D$  плоских чи гладких включень формують послідовний ламаний ланцюжок (рис. 24.19). Як і у випадку з в'язкою, замінимо вищезгадані  $2D$  додаткових умов з (24.33) на такі:

$$\sum_{d=1}^D \int_{-a_{m_d}}^{a_{m_d}} f_k^{m_d}(t) dt = 0, \quad \varphi_k^{m_d}(1) = 0 \quad (k = 3, 6; d = \overline{1, D-1}). \quad (24.35)$$

У загальному випадку, якщо є різноманітні конфігурації з відокремлених включень, їх в'язок та ланцюжків задача зводиться до ССІР (24.31) і комбінації  $2M$  додаткових умов типу (24.33) – (24.35).

**Метод колокацій**

Для розв'язування ССІР (24.31) з додатковими умовами (24.33) – (24.35) пропонується застосувати метод колокацій. Розглянемо дещо загальнішу ССІР у вигляді

$$\sum_{j=1}^I \left\{ \sum_{m=1}^M \left[ B_{ij}^{mp} t_j^m(z_{mp}) + \int_{L'_m} K_{ij}^{mp}(t, z_{mp}) f_j^m(t) dt \right] + \frac{D_{ij}^p}{h(x_p)} \int_{-a_p}^{x_p} f_j^p(t) dt \right\} = F_{ip}(x_p) \quad (24.36)$$

$$(x_p \in L'_p \quad i, j = \overline{1, I}; \quad m, p = \overline{1, M})$$

з додатковими умовами

$$\int_{L'_m} f_j^m(t) dt = Q_{mj} \quad (j = \overline{1, I}; \quad m = \overline{1, M}). \quad (24.37)$$

Тут  $B_{ij}^{mp}$ ,  $Q_{mj}$  – деякі коефіцієнти;  $F_{ip}(x)$  – гладкі функції;  $K_{ij}^{mp}(t, z)$  – фредгольмові ядра.

Розв'язок системи рівнянь (24.36) шукаємо у вигляді ряду за ортогональними многочленами Чебишева з виділеною кореневою особливістю, тобто у формі (24.32) при

$$\varphi_j^m(t/a_m) = \sum_{n=0}^N A_n^{mj} T_n(t/a_m). \quad (24.38)$$

Підставляючи (24.32), (24.38) в (24.36) і (24.37) з урахуванням співвідношень (4.4), (4.6), (4.7), отримаємо систему функційних рівнянь

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \left[ A_n^{pj} H_n^p(x_p/a_p) + \sum_{m \neq p} A_n^{mj} G_n^{mp}(z_{mp}/a_m) \right] = F_{ip}(x_p). \quad (24.39)$$

Тут

$$H_n^p(x_p/a_p) = B_{ij}^{pp} K^{(n)}(x_p/a_p) + K_{\Phi}^{(n)}(x_p/a_p) + a_p D_{ij}^p H^{(n)}(x_p/a_p) / h(x_p),$$

$$G_n^{mp}(z_{mp}/a_m) = B_{ij}^{mp} K^{(n)}(z_{mp}/a_m) + K_{\Phi}^{(n)}(z_{mp}/a_m).$$

Щоб розв'язати рівняння (24.39) прирівняємо їх ліві й праві частини у вузлах колокації  $x_{Np}^{(k)} = a_p \cos[\pi k / (N + 1)]$  і отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^I \sum_{n=0}^N \left[ A_n^{pj} H_n^p(x_{Np}^{(k)} / a_p) + \sum_{m \neq p} A_n^{mj} G_n^{mp}(z_{Np}^{(k)} / a_m) \right] = F_{ip}(x_{Np}^{(k)}), \quad (24.40)$$

$$A_0^{pj} = Q_{pj} / \pi \quad (i = \overline{1, I}; \quad p = \overline{1, M}; \quad n = \overline{1, N}); \quad (24.41)$$

( $z_{Np}^{(k)}$  – значення  $z_{mp}$  при  $x_p = x_{Np}^{(k)}$ ) відносно коефіцієнтів  $A_n^{mj}$  розвинення (24.38).

Рівняння (24.41) відображають умови (24.37). У випадку умов (24.33) у (24.41) слід вважати  $Q_{mj} = 0$ . Якщо ж існує в'язка включень, що зумовлює умови (24.34), рівняння (24.41) трансформуються до виду

$$\sum_{d=1}^D A_0^{m_d k} = 0, \quad \sum_{n=0}^N (-1)^n A_n^{m_d k} = 0 \quad (k = 3, 6; \quad d = \overline{1, D-1}). \quad (24.42)$$

Для ланцюжка включень умови (24.35) дають

$$\sum_{d=1}^D A_0^{m_d k} = 0, \quad \sum_{n=0}^N A_n^{m_d k} = 0 \quad (k = 3, 6; \quad d = \overline{1, D-1}). \quad (24.43)$$



Напружений стан в околі країв  $m$ -го включення характеризуються двома узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (УКІН)  $K_{3,1}^{m\pm}$ ,  $K_{3,2}^{m\pm}$ , які присутні в асимптотичному поданні поля напружень (20.22), яке з урахуванням лише найстарших членів запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{y_m z}(z) \\ \sigma_{x_m z}(z) \end{Bmatrix} &= \frac{K_{3,1}^m}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{Bmatrix} + \frac{K_{3,2}^m}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix} + O(1), \\ K_{3,1}^m(\pm a_m) &= \pm \sqrt{\pi/2} G \lim_{t \rightarrow \pm a_m} \left[ \sqrt{|t \mp a_m|} f_6^m(t) \right], \\ K_{3,2}^m(\pm a_m) &= \mp \sqrt{\pi/2} \lim_{t \rightarrow \pm a_m} \left[ \sqrt{|t \mp a_m|} f_5^m(t) \right]. \end{aligned} \quad (24.44)$$

### Одно- й двоперіодична задача

У випадку лінійної періодичності вважають, що поряд із навантаженням кожна з ліній  $L'_m$  повторюється у площині  $xOy$  безмежну кількість разів з періодом  $d^1 = d_x^1 + id_y^1$  (рис. 24.20) і розв'язок задачі повинен дати на кожній із цих репродукованих ліній однакові значення функцій  $f_j^m$ .

З урахуванням цієї обставини (див. пп. 8.1, 8.2) можна здійснити підсумовування і отримати дещо інший запис рівняння (24.31). Наприклад, ядро Коші перетвориться у ядро Гільберта:

$$\begin{aligned} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}} &\rightarrow \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}} + \sum_{q=\pm 1}^{\pm\infty} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}^q} = \frac{\pi}{d_m^1} \int_{L'_m} f_j^m \operatorname{ctg} \left[ \frac{\pi(t - z_{mp})}{d_m^1} \right] dt, \\ z_{mp}^q &= z_{mp} - qd_m^1; \quad d_m^k = d^k e^{-ia_m}, \quad d^1 = d_x^1 + id_y^1 \quad (z_{pp}^q = x_p - qd_p^1). \end{aligned}$$

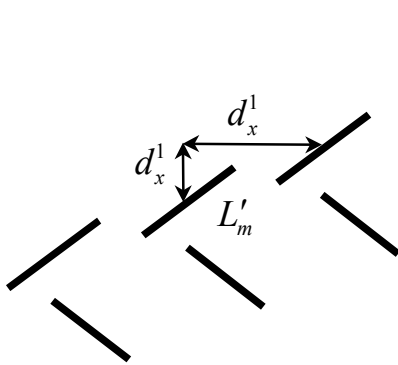


Рис. 24.20. Схема періодичної задачі

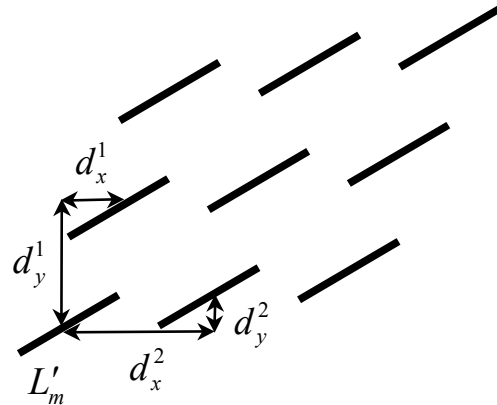


Рис. 24.21. Схема двоперіодичної задачі

Під час обчислень зручніше відмовитися від безмежної повторюваності системи дефектів і обмежитися лише  $2Q$  першими найближчими до  $L'_m$  відрізками, додаючи, таким чином, до лівої частини рівнянь (24.39) член

$$\sum_{j=1}^I \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_q \left[ A_n^{mj} \left\{ B_{ij}^{mp} K^{(n)}(z_{mp}^q/a_m) + K_{\Phi}^{(n)}(z_{mp}^q/a_m) \right\} \right] \quad (q = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm Q), \quad (24.45)$$

де  $z_{mp}^{q(k)}$  значення  $z_{mp}^q$  при  $x_p = x_p^{(k)}$ .

Двоперіодична задача аналогічна до одноперіодичної тим, що разом із навантаженням кожна лінія  $L'_m$  повторюється вже по двох осях періодичності з періодами  $d^1 = d_x^1 + id_y^1$ ,  $d^2 = d_x^2 + id_y^2$  (рис. 24.21).

У цьому випадку (див. § 11) поступають так само, як у одноперіодичній задачі, обмежуючись  $4QR$  першими найближчими до  $L'_m$  відрізками і додаючи до лівої частини рівнянь (24.40) член

$$\sum_{j=1}^I \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{q,r} \left[ A_n^{mj} \left\{ B_{ij}^{mp} K^{(n)}(z_{mp}^{qr}/a_m) + K_{\Phi}^{(n)}(z_{mp}^{qr}/a_m) \right\} \right] \quad (24.46)$$

$$\left( z_{mp}^{qr} = z_{mp} + d^1 q + d^2 r, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm Q; \quad r = \pm 1, \dots, \pm R \right).$$

### Приклади

**Приклад 1 (одномодульна хрестовидна система).** Нехай у тілі присутня хрестовидна конструкція, що складається із трьох пружних включень однакової довжини ( $OA = OC = OD = 2a$ ) та коротшого включення  $OB$  (завдовжки  $2b$ ), товщини  $2h$ , що перебувають під впливом однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma^\infty = \tau$  (рис. 24.22).

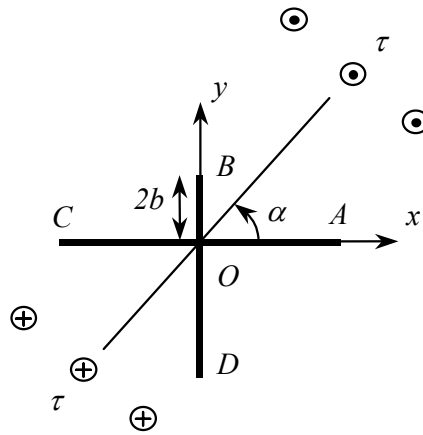


Рис. 24.22. Хрестовидне включення

Досліджено залежність безрозмірного УКІН  $K_{3,1}^{0A} = K_{3,1}(A)/(\tau\sqrt{\pi a})$  в точці  $A$  від кута орієнтації навантаження стосовно конструкції  $\alpha$  при відносній жорсткості включень  $k \equiv G_B/G = 0,01; 0,001; 0,0001$ ; ( $b = a/2$ ;  $h/a = 0,01$ ;  $G_{Bm} = G_B$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ ) (рис. 24.23) і УКІН  $K_{3,1}^{0B} = K_{3,1}(B)/(\tau\sqrt{\pi b})$  в точці  $B$  при тих же механічних та геометричних параметрах (рис. 24.24).

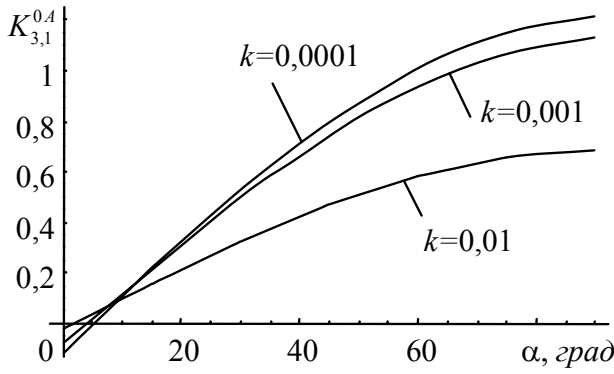


Рис. 24.23. УКІН  $K_{3,1}^{0A}$  в точці А для відносно податних включень

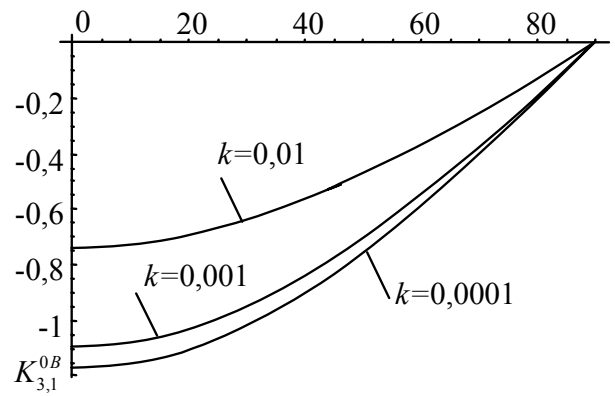


Рис. 24.24. УКІН  $K_{3,1}^{0B}$  в точці В для відносно податних включень

Зазначимо, що при  $k \rightarrow 0$  отриманий результат збігається з випадком, коли у тілі замість пружних включень присутні тріщини [860]. Обчислення свідчать, що при  $k = 0,0001$   $K_{3,1}^{0A}$  та  $K_{3,1}^{0B}$  різняться від точного розв'язку для випадку тріщин не більше ніж на 1%.

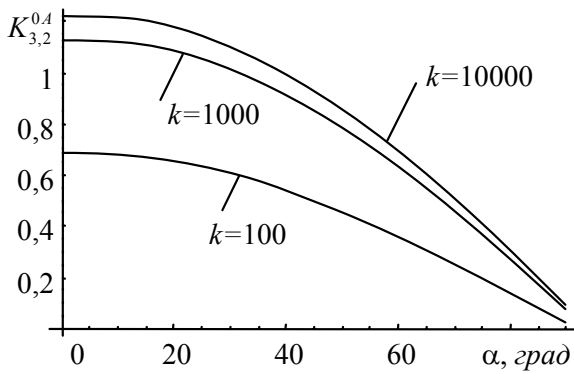


Рис. 24.25. УКІН  $K_{3,2}^{0A}$  в точці А для відносно жорстких включень

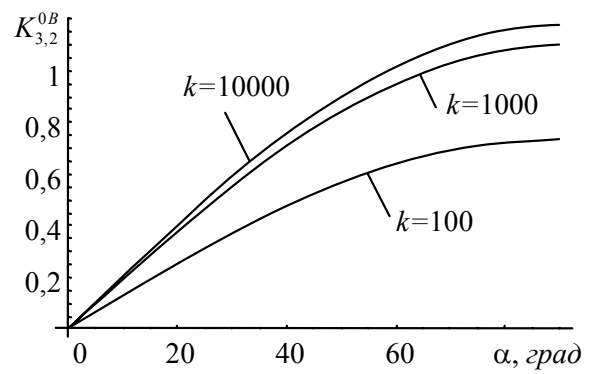


Рис. 24.26. УКІН  $K_{3,2}^{0B}$  в точці В для відносно жорстких включень

Побудовано також графіки залежностей  $K_{3,2}^{0A} = K_{3,2}(A)/(\tau\sqrt{\pi a})$  (рис. 24.25) та  $K_{3,2}^{0B} = K_{3,2}(B)/(\tau\sqrt{\pi b})$  (рис. 24.26) для випадку відносно жорстких включень ( $k = 100; 1000; 10000$ ). Зазначимо, що у випадку з податними ( $k \rightarrow 0$ ) та жорсткими ( $k \rightarrow \infty$ ) включеннями УКІН  $K_{3,2}^0$  та  $K_{3,1}^0$  відповідно прямують до нуля на всіх неоднорідностях. Всі розглянуті вище УКІН є монотонними функціями кута  $\alpha$  на проміжку  $[0, \pi/2]$  і, за винятком  $K_{3,1}^{0A}$  для податних включень, не змінюють знак. Що стосується згаданого винятку, то, як можна бачити на рис. 24.23, УКІН  $K_{3,1}^{0A}$ , обчислений для відносної жорсткості  $k \leq 0,01$ , змінює знак при значеннях кута  $\alpha \leq 5^\circ$ .

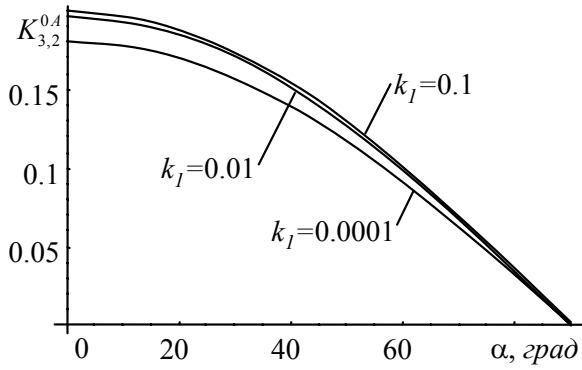


Рис. 24.27. Залежність  $K_{3,2}^{0A}$  для відносно жорсткого влючення OA

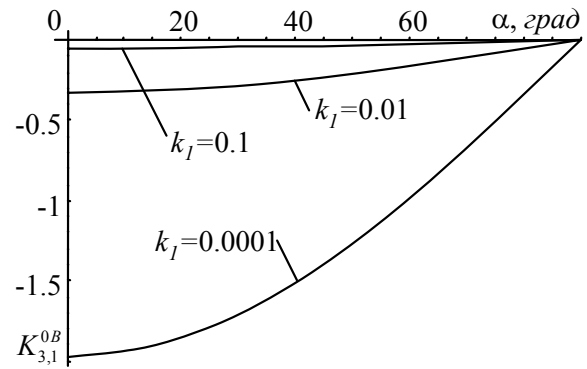


Рис. 24.28. Залежність  $K_{3,1}^{0B}$  для відносно податного влючення OB

Цікаво, що у розглянутих вище випадках максимуми УКІН для відносно податних і відносно жорстких влючень при обернених значеннях жорсткостей  $k$  приймають доволі близькі значення (похибка не перевищує 1%), тобто

$$\max \left| K_{3,1}^{0B}(\alpha) \right|_{k=K \leq 0,01} \approx \max \left| K_{3,2}^{0A}(\alpha) \right|_{k=1/K \geq 100}$$

**Приклад 2 (різно модульна хрестовидна система).** В ролі другого прикладу досліджено систему пружних влючень, аналогічну описаній вище, за тим винятком, що відносна жорсткість податного влючення  $OB$   $k_1 \equiv G_{B1}/G = 0,1; 0,01; 0,0001$  різниться від жорсткості решти відносно жорстких включень ( $k = 100$ ). Графіки залежностей  $K_{3,2}^{0A}(\alpha)$  для жорсткого влючення  $A$  та  $K_{3,1}^{0B}(\alpha)$  для податної неоднорідності  $B$  містять рис. 24.27, 24.28. Зазначимо, що  $\left| K_{3,1}^{0B} \right|$  значно зростає зі зменшенням відносної жорсткості  $k_1$ , тоді як  $\left| K_{3,2}^{0A} \right|$  спадає. Таким чином, при малих значеннях  $k_1 \leq 0,01$  максимальна концентрація напружень досягається поблизу кінчика  $B$  влючення  $OB$ , тоді як при  $k_1 \approx 0,1$  більшою загрозою для цілісності конструкції є концентрація напружень біля кінчика  $A$ .

**Приклад 3 (одноперіодична задача для одномодульної хрестовидної системи).** Як приклад періодичної задачі розглянуто одноперіодичну систему однакових хрестовидних конструкцій (ідентичних розглянутому у першому прикладі), розподілених уздовж осі  $x$  з кроком  $l = 5a$  (рис. 24.29).

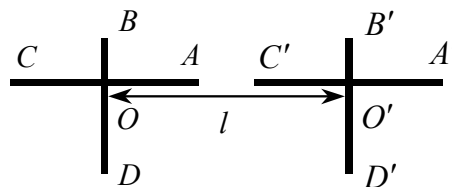


Рис. 24.29. Два сусідні влючення у випадку періодичної задачі

Зовнішнє навантаження, механічні та геометричні параметри аналогічні попереднім. Графічні залежності зведених УКІН від кута  $\alpha$  при різних значеннях відносної жорсткості відображені на рис. 24.30, 24.31. Як і у першому прикладі, вони монотонні за параметром  $k$  і

досягають максимуму при  $k \rightarrow 0$ . Зазначимо, що максимум УКІН  $K_{3,1}^{0A}$  для періодичної задачі зріс тільки на 30%, тоді як  $|K_{3,1}^{0B}|$  збільшився набагато помітніше – на 90%.

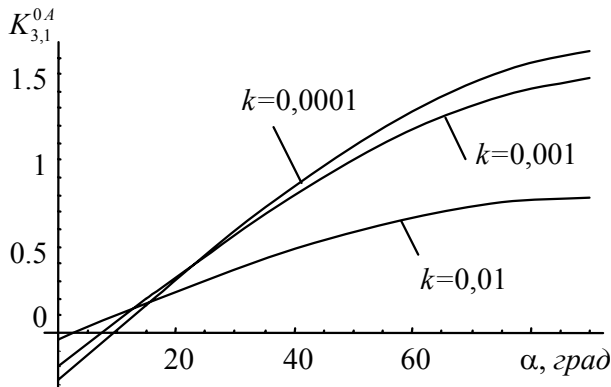


Рис. 24.30. Залежність  $K_{3,1}^{0A}$  у випадку лінійної періодичності

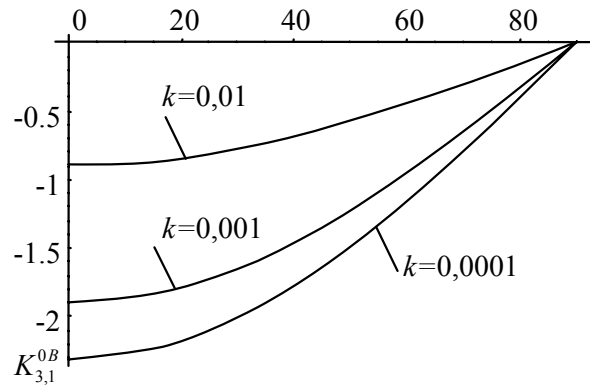


Рис. 24.31. Залежність  $K_{3,1}^{0B}$  у випадку лінійної періодичності

## § 25. Ефективні характеристики композитів

### 25.1. Представницький елемент композита і задача зведення

Під задачею зведення у механіці композиційних матеріалів розуміють визначення ефективних (зведених) характеристик неоднорідного середовища (композита), що дає можливість вважати неоднорідне тіло (композит) однорідним анізотропним матеріалом з певними усередненими (ефективними) пружними характеристиками [483, 868, 879].

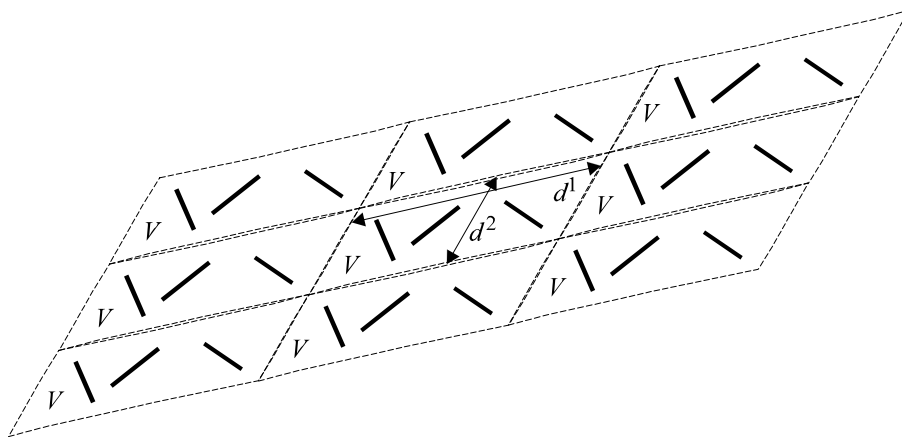


Рис. 25.1. Регулярний композит і його представницькі елементи

Якщо зважити на те, що реальні матеріали, які часто вважають однорідними та ізотропними, мають певну структуру і однорідними в строгому сенсі цього слова не є, то в такому усередненні є не лише математичний, але й фізичний сенс. Обмежимося випадком регулярних композитів, вважаючи, що арматура (включення) складають певну групу, що повторюється у двох не обов'язково перпендикулярних напрямках з періодами  $d^1 = d_x^1 + id_y^1$ ,

$d^2 = d_x^2 + id_y^2$  (рис. 25.1). Згадані періоди  $d^1 \sim \mathbf{d}^1$ ,  $d^2 \sim \mathbf{d}^2$  можна розглядати як вектори у площині, дійсна та уявна частина яких формують першу та другу компоненту відповідно.

Розглянемо найменшу комірку композита, яка повторюється зі згаданими періодами, заповнюючи при цьому без перекриття та без пропусків усю поверхню (простір) матеріалу. У кристалографії її називають примітивною (окремішньою, елементарною) коміркою. У механіці композитів використовують термін представницький елемент. Очевидною формою представницького елемента (але не єдиною) є паралелограм, побудований на періодах  $d^1 = d_x^1 + id_y^1$ ,  $d^2 = d_x^2 + id_y^2$  як на векторах. Його ребра (періоди кристалічної комірки, відповідно представницького елемента) та кут  $\alpha$  між ними визначаються векторами  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$  (періодами, векторами примітивних (основних) трансляцій, основними періодами кристалічної комірки, основними векторами) так, що довільна частинка всередині елемента суміщається з ідентичною їй частинкою іншого елемента за трансляції (поступального переміщення) на відстань  $\mathbf{r} = l\mathbf{d}^1 + m\mathbf{d}^2$ , де  $l, m$  – довільні цілі числа. Об'єм (площа) представницького елемента регулярного композита містить лише включення цієї групи і він дорівнює  $V = |\mathbf{d}^1 \times \mathbf{d}^2| = |d_x^1 d_y^2 - d_x^2 d_y^1|$ .

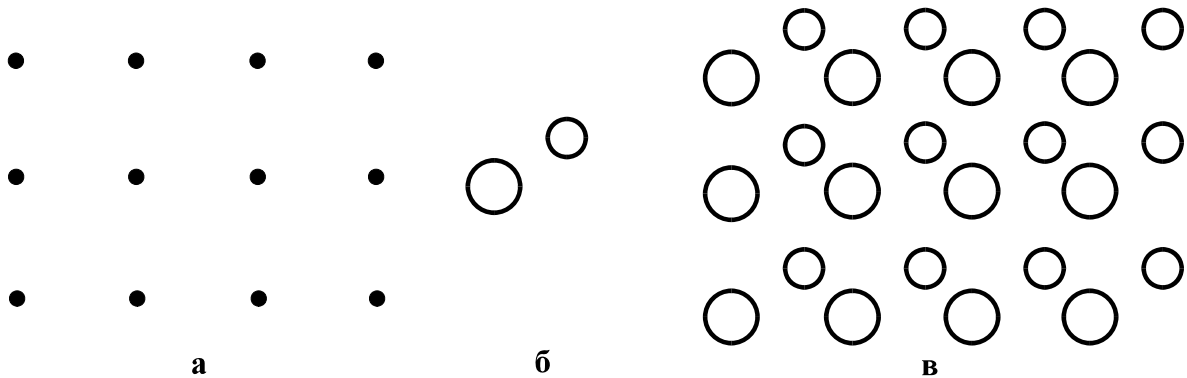


Рис. 25.2. Схема формування кристалічної ґратки

Сукупність точок  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + l\mathbf{d}^1 + m\mathbf{d}^2$ , де  $\mathbf{r}'$  – радіус-вектор довільної фіксованої точки площини, у кристалографії визначає кристалічну ґратку, а у механіці композитів – ґратку композита. Найпростіший двовимірний варіант квадратної кристалічної ґратки поданий на рис.25.2 а. Кристалічна ґратка є геометричним образом будови кристала як фізичного об'єкта (кристалічної структури). Подібним чином і ґратка композита є геометричним образом усього композита. З усіх точок ґратки будова кристала чи композита виглядає ідентично. З кожною точкою ґратки можна зв'язати деяку групу (або один) дефектів – атомів, тріщин, включень тощо – (базис, рис. 25.2 б).

Регулярне повторення базису згідно з ґраткою (її вузлами) утворює періодичну (кристалічну) структуру (рис. 25.2 в) композита чи кристалічного матеріалу. Фактично базисом є вектори, що визначають розташування всіх структурних елементів усередині представницького елемента (примітивної комірки). Разом з векторами основних трансляцій базис повністю визначає положення всіх елементів структури (композита чи кристалу). Якщо базисом є один дефект, то маємо просту структуру (просту ґратку), якщо більше, як один, – складну.

Доволі часто у механіці композитів на відміну від кристалографії ґраткою вважають трикутну конфігурацію, утворену векторами періодів  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$ . І у зв'язку з цим ґратки двох найбільш поширених структур регулярних композиційних матеріалів, утворених відповідно

взаємно перпендикулярними векторами  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$  та однаковими за величиною векторами  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$  з кутом  $\pi/3$  між ними, називають відповідно прямокутною та правильною трикутною ґратками. Відповідно до цього представницький елемент композита з прямокутною ґраткою є прямокутником, сторони якого дорівнюють модулям періодів  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$ . Представницький елемент композита з правильною трикутною ґраткою є паралелограмом, що складається з двох правильних трикутників.

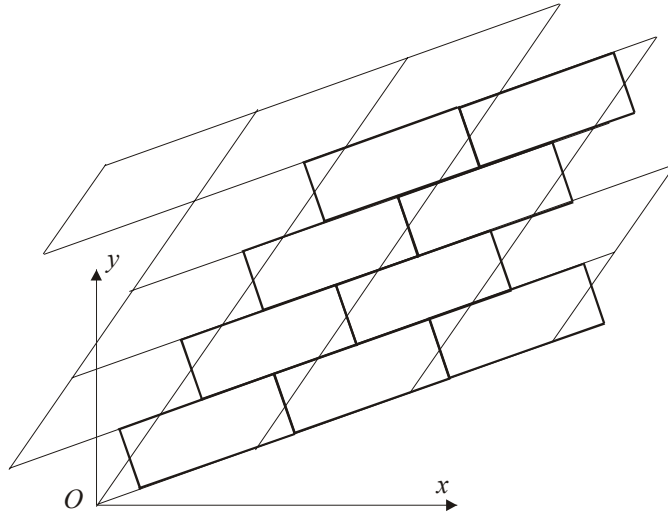


Рис. 25.3. Трансформування паралелограмного представницького елемента у прямокутний

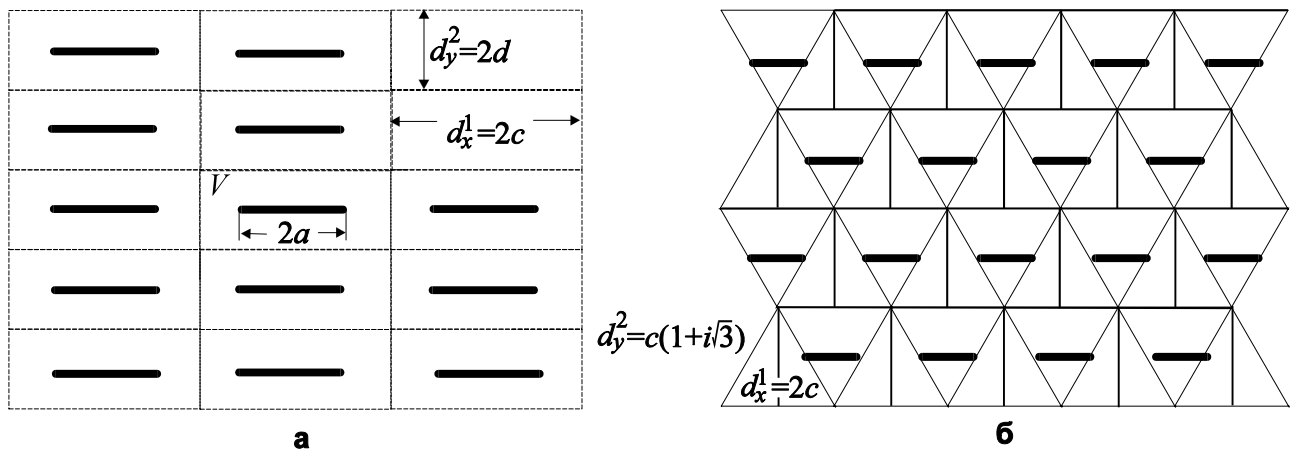


Рис. 25.4. Регулярний композит з прямокутною (а) та правильною трикутною (б) ґратками

У загальному випадку представницький елемент композита має вигляд паралелограма, до того ж, якщо  $d_y^1 \neq 0, d_x^2 \neq 0$ , нахилено своїми обома сторонами до осей системи координат. Однак у кожному випадку завжди можна так видозмінити цей елемент у такий прямокутник, щоб він і надалі при повторенні з цими ж періодами цілком вповнював матеріальний континуум. Дві сторони цього елемента паралельні до одного з періодів, а дві інші – до цього періоду перпендикулярні.

На рис. 25.3 зображено трансформування паралелограмних представницьких елементів, зображених тонкими лініями, у прямокутні представницькі елементи (грубіші лінії). Площа (об'єм  $V$ ) представницького елемента при перетворенні не змінюється.

Таким чином, в обох найчастіше розглядуваних у механіці композитів типах ґратки – прямокутній і правильній трикутній – можна виділити прямокутні представницькі елементи

(рис. 25.4). Різниця полягатиме у тому, що якщо для прямокутної ґратки усі включення групи можуть міститися всередині елемента, то для трикутної ґратки всі включення групи можуть міститися всередині відповідного паралелограма, але не можна знайти прямокутника, щоб деякі з них не перетинали його меж.

Середні напруження, переміщення та деформації у представницькому елементі позначатимемо кутовими дужками і визначимо за формулами:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x, y, z) dV, \quad \langle u_i \rangle = \frac{1}{V} \int_V u_i(x, y, z) dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x, y, z) dV, \quad (25.1)$$

де компоненти тензорів малих деформацій і напружень  $\sigma_{ij}$  та  $\varepsilon_{ij}$  відповідно, а також складові вектора переміщення  $u_i$  – відомі з розв'язку відповідної задачі теорії пружності. Тоді відповідно до запису узагальненого закону Гука  $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^e \sigma_{kl}$  ефективні характеристики  $C_{ijkl}^e$  (модулі податності) композита обчислюються на основі співвідношення

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = C_{ijkl}^e \langle \sigma_{kl} \rangle. \quad (25.2)$$

У випадку антиплоскої деформації залежність (25.2) має вигляд

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle = a_{44}^e \langle \sigma_{yz} \rangle + a_{45}^e \langle \sigma_{xz} \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle = a_{45}^e \langle \sigma_{yz} \rangle + a_{55}^e \langle \sigma_{xz} \rangle, \quad (25.3)$$

де  $a_{ij}^e$  ( $i, j = 4, 5$ ) – ефективні (зведені) пружні сталі стрічкового композиту для антиплоскої деформації.

Нехай представницький елемент композита має форму прямокутника з розмірами  $2c \times 2d$  (див. рис. 25.4) і відомі похідні  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  функції (переміщення)  $w(z)$ . Тоді середнє за змінною  $x$  значення похідної  $\left\langle \frac{\partial w(x+iy)}{\partial x} \right\rangle_x$  на відрізку  $x \in [-c; c]$  за фіксованого  $y$  визначимо виразом

$$\left\langle \frac{\partial w(x+iy)}{\partial x} \right\rangle_x = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \frac{\partial w(x+iy)}{\partial x} dx = \frac{w(c+iy) - w(-c+iy)}{2c}.$$

Оскільки усереднення за площею  $V$  представницького елемента похідної  $\left\langle \frac{\partial w(z)}{\partial x} \right\rangle$  дорівнює  $\left\langle \left\langle \frac{\partial w(x+iy)}{\partial x} \right\rangle_x \right\rangle_y$  – усередненню  $\left\langle \frac{\partial w(x+iy)}{\partial x} \right\rangle_x$  по  $y \in [-d; d]$ , то

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial w(z)}{\partial x} \right\rangle &= \frac{1}{4cd} \int_{-d}^d [w(c+iy) - w(-c+iy)] dy, \\ \left\langle \frac{\partial w(z)}{\partial y} \right\rangle &= \frac{1}{4cd} \int_{-d}^d [w(x+id) - w(x-id)] dx. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Другий вираз у (25.3) отриманий аналогічно до першого.

Розв'яжемо відповідну задачу теорії пружності для тонкого включення для двох основних способів навантаження однорідним полем напружень на нескінченності: I.  $\sigma_{yz}^\infty = \tau, \sigma_{xz}^\infty = 0$ ; II.  $\sigma_{yz}^\infty = 0, \sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ , коли і в усередненому сенсі повинні виконуватися залежності



$$\langle \sigma_{yz}^\infty \rangle^I = \tau, \langle \sigma_{xz}^\infty \rangle^I = 0; \langle \sigma_{yz}^\infty \rangle^{II} = 0, \langle \sigma_{xz}^\infty \rangle^{II} = \tau_1. \quad (25.5)$$

Усреднюючи після цього похідні переміщення та напружень за геометричної симетрії задачі згідно з (25.3), отримаємо вирази ефективних пружних модулів композита  $a_{ij}^e$  як функцій відносної жорсткості арматури  $k = G_B/G$  і геометричних параметрів включення (включень) та представницького елемента

$$a_{44}^e = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial y} \rangle^I}{\langle \sigma_{yz} \rangle^I}, \quad a_{55}^e = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial x} \rangle^{II}}{\langle \sigma_{xz} \rangle^{II}}, \quad a_{45}^e = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial y} \rangle^{II}}{\langle \sigma_{xz} \rangle^{II}} = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial x} \rangle^I}{\langle \sigma_{yz} \rangle^I}. \quad (25.6)$$

З урахуванням аналогії Г.С.Кіта [393] такий підхід дає можливість вивчити ефективну теплопровідність стрічкових композитів та інші споріднені явища.

## 25.2. Відсутня взаємодія включень

Якщо велика відстань між включеннями дає можливість знехтувати їхньою взаємодією, поле напружень  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$  і переміщень  $w$  можна обчислити за розв'язком для одного включення в однорідній матриці (рис. 25.5).

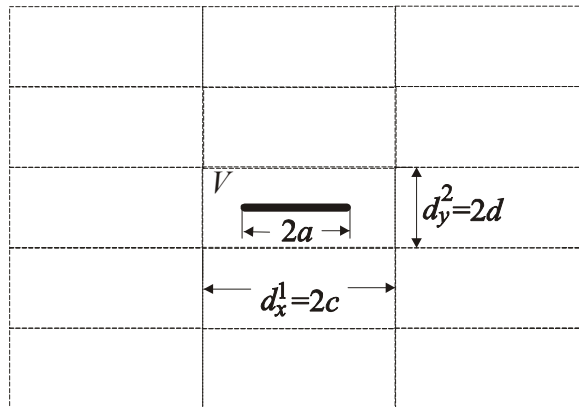


Рис. 25.5. Одне включення у безмежному середовищі

Для ізолюваного включення еліптичного профілю в однорідній матриці розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь можна отримати у замкнутому вигляді (20.32), (20.33), а якщо до того ж навантаження здійснює лише однорідне поле напружень на нескінченності, то функції стрибка і поле напружень та переміщень визначаються виразом (20.41), де коефіцієнти  $A_n^r$  ( $r = 3, 6$ ) залежать від співвідношення пружних сталей матеріалів, відношення геометричних параметрів та інтенсивності навантаження. У цьому випадку:

1. Пружне включення довільного профілю можна з певною мірою точності замінити еквівалентним йому у тому чи іншому сенсі еліптичним і у полі однорідного зсуву побудувати для нього замкнутий розв'язок (20.32), (20.33);

2. На основі цього замкнутого розв'язку можна успішно розвивати статистичну теорію масових дефектів без урахування їхньої взаємодії (мала щільність укладання);

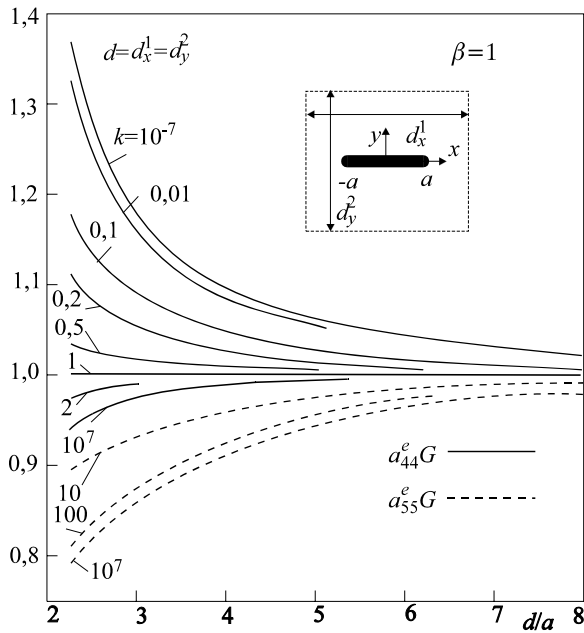


Рис. 25.6

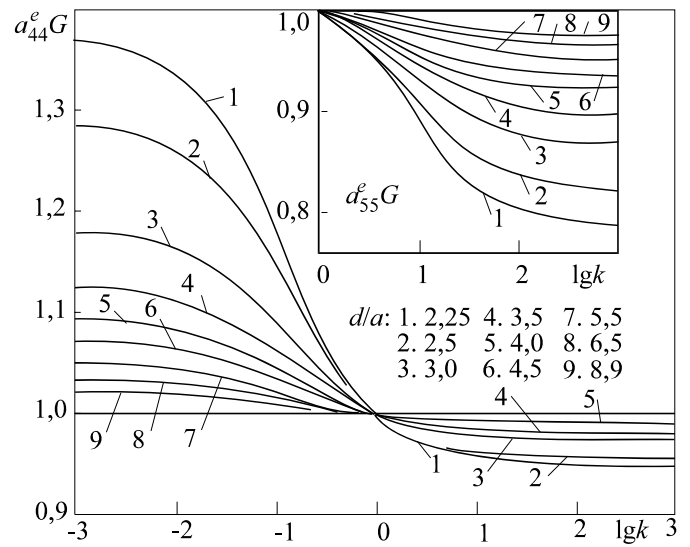


Рис. 25.7

3. Нехтування взаємодією включень дає можливість визначити ефективні характеристики композита з регулярним чи стохастичним укладанням стрічок.

У випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності можна скористатися виразами (25.5) і на основі (25.6)

$$a_{44}^e = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial y} \rangle^I}{\tau}, \quad a_{55}^e = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial x} \rangle^{II}}{\tau_1}, \quad a_{45}^e = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial y} \rangle^{II}}{\tau_1} = \frac{\langle \frac{\partial w}{\partial x} \rangle^I}{\tau}. \quad (25.7)$$

Для включення нееліптичного профілю закон Гука (25.3) слід використати сумісно з (20.31), визначивши коефіцієнти  $A_n^r$  за допомогою методу колокацій.

На рис. 25.6, 25.7 зображена залежність безрозмірних ефективних модулів від відносної відстані та відносної жорсткості  $k$  невазємодіючих стрічок за квадратного армування.

### 25.3. Урахування взаємодії на основі двоперіодичного розв'язку

#### Жорсткість тіла, ослабленого двоперіодичною системою тріщин за антиплоскої деформації

Розглянемо переріз  $t \sim z = 0$  ізотропного простору з модулем зсуву  $G$ , що містить дво-періодичну систему тріщин завдовжки  $2a$  кожна. Переріз збігається із площиною  $xOy$  і перебуває в умовах поздовжнього зсуву у напрямі осі  $t \sim z$  під дією напружень  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$  на нескінченності.

Уздовж відрізків  $L'_p$  ( $p = \overline{0, N}$ ) цієї площини розміщені осі поперечних перерізів тунельних тріщин, які належать локальним системам координат  $x_p O_p y_p$ , що визначають комплексні змінні  $z_p = x_p + iy_p$  (рис. 25.8). Координати точки  $O_p$ , розміщеної у центрі відрізка  $L'_p$  завдовжки  $2a_m$ , в основній системі координат  $xOy$  мають значення  $z_{0p} = x_{0p} + iy_{0p}$ , вісь  $x_p$  утворює з віссю  $Ox$  кут  $\alpha_p$  ( $z_{00} = 0, \alpha_{00} = 0$ ). Тоді координати точки  $x_p \in L'_p$  в системі  $x_m O_m y_m$ , зв'язаній з центром відрізка  $L'_m$ , дорівнюватимуть

$$z_{mp} = \exp(-\alpha_m) \left[ x_{0p} + iy_{0p} - (x_{0m} + iy_{0m}) + x_{0p} \exp(\alpha_p) \right].$$

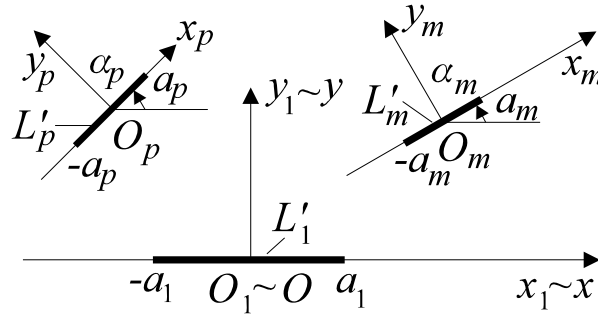


Рис. 25.8. Загальна геометрична схема задачі

Антиплоска задача теорії пружності для системи тріщин в ізотропному середовищі за однорідного навантаження на нескінченності згідно з § 20 зводиться до визначення функції  $f_6^m(t)$  ( $m = \overline{0, N}$ ), що характеризує стрибки похідних складових вектора переміщень на осевій лінії  $L'_m$  тріщин із сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L'_m} \frac{f_6^m(t)}{t - z_{mp}} dt = \frac{2\pi}{G}. \quad (25.8)$$

Тепер нехай кожна з ліній  $L'_m$  повторюється у площині  $x_0O_0y_0 \sim xOy$  нескінченну кількість разів із періодом  $d^1 = d_x^1 + id_y^1$ . У зв'язку з цим розв'язок задачі повинен давати значення функцій стрибка  $f_6^m(t)$ , однакові на кожній із отриманих таким чином ліній. Враховуючи це, можна відповідно до результатів § 8 здійснити підсумовування ядер Коші за формулою

$$\int_{L'_m} \frac{f_j^m(t)}{t - z_{mp}} dt \rightarrow \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t)}{t - z_{mp}} dt + \sum_{q=\pm 1}^{\pm\infty} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t)}{t - z_{mp}^q} dt = \frac{\pi}{d_m^1} \int_{L'_m} f_j^m(t) \operatorname{ctg} \left[ \frac{\pi(t - z_{mp})}{d_m^1} \right] dt, \quad (25.9)$$

$$z_{mp}^q = z_{mp} - qd_m^1, \quad d_m^k = d^k \exp(-i\alpha_m), \quad d^1 = d_x^1 + id_y^1, \quad (z_{pp}^q = x_p - qd_p^1).$$

Далі нехай кожна лінія з отриманої системи повторюється уздовж іншої осі з періодом  $d^2 = d_x^2 + id_y^2$ , причому розв'язок системи інтегральних рівнянь на кожній із репродукованих ліній збігається з розв'язком на  $L'_m$ . Замінюючи в кожному із співвідношень  $z_{mp}^q = z_{mp} - qd_m^1$  величину  $z_{mp}$  на сукупність значень  $z_{mp}^l = z_{mp} - ld_m^2$ , після підсумовування за  $l$  отримаємо формулу

$$\begin{aligned} \int_{L'_m} \frac{f_j^m(t) dt}{t - z_{mp}} &\rightarrow \frac{\pi}{d_m^1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{L'_m} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\pi(t - z_{mp}^l)}{d_m^1} \right] f_j^m(t) dt = \\ &= \int_{L'_m} f_j^m(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t - z_{mp} + qd_m^1 + ld_m^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\pi}{d_m^1} \int_{L'_m} f_j^m(t) \left[ \zeta(t - z_{mp}) - 2\zeta\left(\frac{d_m^1}{2}\right) \frac{(t - z_{mp})}{d_m^1} + (t - z_{mp}) C_1 \right] dt. \end{aligned} \quad (25.10)$$

де  $\zeta(z)$  – дзета-функція Вейерштрасса;  $d_m^1, d_m^2$  – її періоди.

Враховуючи перетворення (25.9), (25.10), отримаємо інтегральне рівняння для визначення функції  $f_6^m(t)$  за антиплоскої деформації тіла з двоперіодичною системою тріщин

$$\sum_{m=0}^N \int_{L'_m} f_6^m(t) K(t - z_{mp}) dt = \frac{2\pi}{G} \left( z_{mp} \in L'_p, p = \overline{0, N} \right), \quad (25.11)$$

$$K(z) = \zeta(z) - 2\zeta\left(d_m^1/2\right)z/d_m^1 + zC_1.$$

Розв'язок рівняння (25.11) шукатимемо за допомогою методу колокацій (див. § 8) у вигляді рядів за многочленами Чебишева з виділеною кореневою особливістю

$$f_6^m(t) = \sum_{n=0}^M \frac{A_n^6 T_n(t/a_m)}{\sqrt{a_m^2 - t^2}}.$$

Якщо відомі коефіцієнти  $A_n^6$ , то переміщення та напруження у довільній точці матриці композиту дорівнюють

$$w(z) = \frac{a_m}{2G} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iGA_n^6}{n\rho^n} \right\} + w_0(z),$$

$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \frac{a_m}{2\sqrt{z^2 - a_m^2}} \sum_{n=0}^{\infty} GA_n^6 \rho^{-n} + \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z), \quad (25.12)$$

$$\rho(z) = \frac{1}{a_m} \left( z + \sqrt{z^2 - a_m^2} \right), \quad w_0(z) = \frac{\tau y}{G}, \quad \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = \tau + i\tau_1.$$

Тут  $w_0(z)$ ,  $\sigma_{yz}^0(z)$ ,  $\sigma_{xz}^0(z)$  – переміщення та напруження у бездефектному середовищі при тому ж навантаженні.

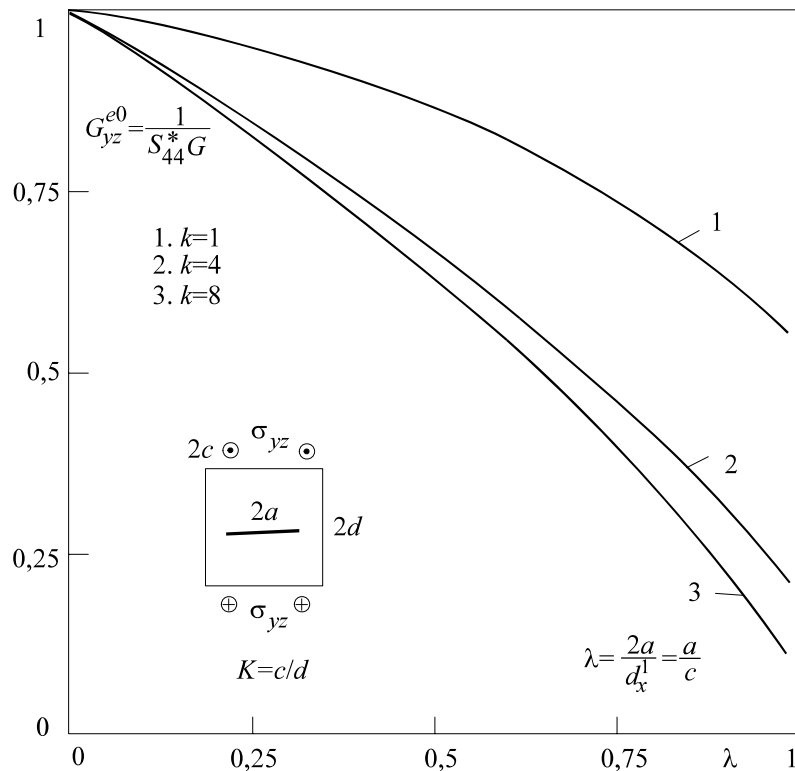


Рис. 25.9

Розглянемо тепер періодично повторювану комірку – представницький елемент композиту об'єму  $V$ , що містить один дефект (див. рис. 25.4 а). Визначимо середні напруження і деформації у такому елементі формулами (25.1), де  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – компоненти тензорів напружень та деформацій, відомі з розв'язку відповідної задачі теорії пружності. Тоді ефективні характеристики  $a_{ij}^e$  тіла згідно із законом Гука (25.3) визначаються формулами (25.6). Застосовуючи до формул (25.12) усереднення (25.3) на основі виразів (25.6), отримують конкретні вирази для ефективних характеристик тіла, що розглядається, як функції об'ємної частки тріщин у матриці та виду ґратки.

Для прикладу числово досліджено вплив параметра геометрії  $\lambda = 2a/d_x^1 = a/c < 1$  прямокутної ґратки для різних значень її відносних розмірів  $K = d_x^1/d_y^2 = c/d$  [984].

На рис. 25.9 відображена графічна залежність безрозмірного ефективного модуля зсуву  $G_{yz}^{e0} = \frac{1}{a_{yz}^e G}$  від параметра  $\lambda$  для трьох значень параметра  $K$  ( $K=1$  (квадратна ґратка) – лінія 1;  $K=4$  – лінія 2;  $K=8$  – лінія 3).

Збільшення відносної довжини тріщин зменшує відносну жорсткість масиву від одиниці до деякого граничного значення (зрозуміло, що параметр  $\lambda$  не може досягати рівня одиниці, бо при цьому тріщини у кожному з рядів повинні злитися між собою і цілісність тіла буде порушена). Зменшення висоти представницького елемента (збільшення  $K$ ) також сприяє зменшенню  $G_{yz}^{e0}$ , оскільки це пов'язане зі збільшенням об'ємної частки тріщин у досліджуваному масиві. Якщо густина заповнення досить велика, то взаємодією включень нехтувати не можна, і тоді ефективні властивості композита за регулярного укладання стрічок можна обчислити за виразами (25.3) на основі пружного розв'язку для двоперіодичної задачі.

### Армування пружними включеннями

Здійснене розв'язування двоперіодичної задачі поздовжнього зсуву (див. п. 24.5) для одного включення у квадратній ґратці  $d^1 = 2\pi$ ,  $d^2 = 2i\pi$ ,  $a = 1$ ,  $h_0/a = 0,1$ ,  $k \equiv G_B/G = 3$ ; кількість врахованих у рядах многочленів Чебишева членів  $N = 10$ ; кількість врахованих рядів і стовпчиків у наближеній схемі методу колокацій для двоперіодичної задачі  $Q = L = 2M + 1$ .

Таблиця 25.1

$\beta$	$M$	$A_1^3$	$A_3^3$	$A_5^3$	$A_1^6$	$A_3^6$	$A_5^6$
1	0	2,5000	0	0	0,7500	0	0
	1	1,6930	0,2612	-0,1799	0,2916	0,0518	0,0240
	2	1,1819	0,4487	0	0,3341	-0,1798	0,0136
	3	1,1721	0,0800	0	-0,4003	0,2982	0,8108
	7	0,9895	0	0	0,1244	0,0035	0,0183
10000	0	2,8638	0,9014	0,2847	0,7801	0,0410	0,0063
	1	1,4762	-0,1348	2,4304	0,2858	0,0980	0,0087
	2	-0,4445	3,6512	1,6864	0,3621	-0,2081	-0,0027
	3	0,8749	0,4998	0,6946	-0,4620	-0,5402	2,7413
	7	0,7181	0,3116	0,4828	0,1129	-0,0636	0,2328

У табл. 25.1 поміщені значення перших трьох ненульових коефіцієнтів (коефіцієнти з усіма нижніми непарними індексами дорівнюють нулю) розвинень функцій стрибків

$$f_r(x) = a(a^2 - x^2)^{-1/2} \sum_{n=1}^N A_n^r T_n(x/a) \quad (x \in L' = [-a; a])$$

для включення еліптичного ( $\beta = 1$ ) та практично прямокутного ( $\beta = 10000$ ) профілю.

Згідно з таблицею для включення еліптичного профілю функції стрибка дорівнюють

$$M = 0 (L = 1) \quad f_3(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} 2,5T_1\left(\frac{x}{a}\right), \quad f_6(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} 0,75T_1\left(\frac{x}{a}\right);$$

$$M = 1 (L = 3) \quad f_3(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ 1,693T_1\left(\frac{x}{a}\right) + 0,2612T_3\left(\frac{x}{a}\right) - 0,1799T_5\left(\frac{x}{a}\right) \right],$$

$$f_6(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ 0,2916T_1\left(\frac{x}{a}\right) + 0,0518T_3\left(\frac{x}{a}\right) + 0,024T_5\left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

і так далі.

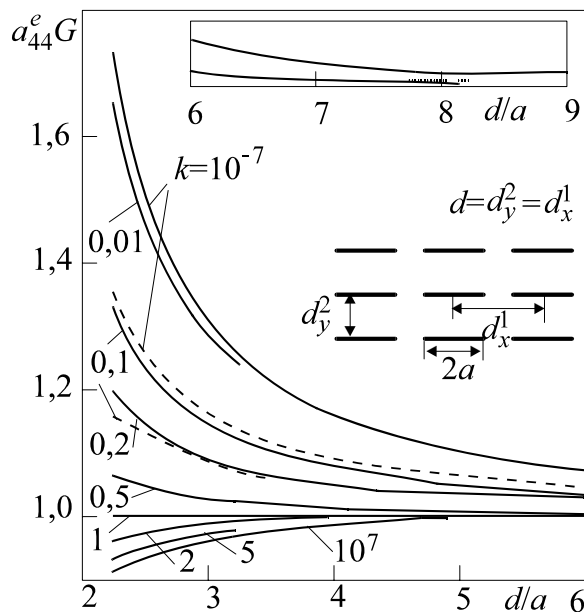


Рис. 25.10

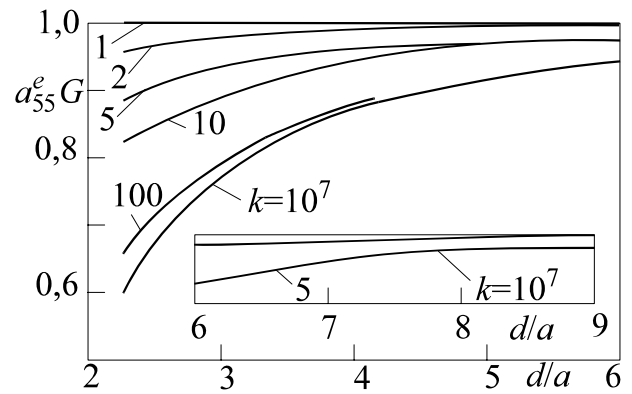


Рис. 25.11

Часткові випадки пружних сталей характеризують виповнені тріщинами середовища ( $k=0$ ) та композити з абсолютно жорсткою стрічковою арматурою ( $k=\infty$ ). На рис. 25.10, 25.11 зображена залежність безрозмірних модулів податності  $Ga_{44}^e$ ,  $Ga_{55}^e$  для різних значень відносних жорсткостей стрічок.

Усі одержані результати дають можливість зробити такі загальні висновки:

1. Розв'язок двоперіодичної задачі виявляє ефект екранування, тобто, врахування взаємодії арматури викликає зменшення, у порівнянні з розв'язком для ізолюваного включення, розрахункового модуля пружності (податності). Причому це виконується для арматури і з податного і з жорсткого матеріалу. Таким чином лише завдяки раціональному вибору параметрів ґратки можна досягти підвищення ефекту армування без збільшення об'ємної частки арматури.

2. Потоншення стрічок (зі збереженням їхньої об'ємної частки) є ефективним засобом для істотного підвищення зведеного модуля зсуву композита. Це є додатковим свідченням перспективності використання матеріалів, армованих дуже тонкими стрічками.

Загалом урахування подвійної періодичності у дослідженому діапазоні зміни геометричних параметрів задачі не спричиняє істотної кількісної зміни результатів і за таких обставин можна ефективно характеризувати обчислювати на основі схеми невзаємодіючих включень.

## 25.4. Стохастичне армування

### Загальні співвідношення

Скориставшись запропонованою в п. 25.2 процедурою визначення ефективних модулів композита, отримаємо співвідношення для пружних сталей стохастично армованого стрічкового композита в припущенні, що взаємодією пружних полів від включень можна знехтувати. Оскільки  $a$  та  $\alpha$  випадкові величини, то й ефективні модулі композита, які є детермінованими функціями цих змінних, також випадкові.

Імовірнісні властивості випадкової величини повністю визначаються її функцією розподілу, проте визначення такої функції у більшості випадків пов'язане зі значними труднощами. Разом з тим, велику кількість практично важливих числових характеристик випадкової величини (математичне сподівання, дисперсію) можна отримати, не застосовуючи поняття функції розподілу.

Розглядається ізотропне тіло, армоване уздовж осі  $z \sim t$  декартової системи координат  $Oxyz$  тонкими пружними ізотропними стрічками довільного профілю (від еліптичного до прямокутного). Матеріали матриці та включення мають пружні сталі  $E, G, \nu$  та  $E_B, G_B, \nu_B$  відповідно. Ширина стрічок –  $2a$ ; товщина –  $2h$  (для кожного включення ці параметри можуть бути різними). Контакт між матрицею та арматурою ідеальний. На нескінченності на тіло діє однорідне поле напружень  $\sigma_{yy}^\infty = p, \sigma_{xx}^\infty = p_1, \sigma_{xy}^\infty = \tau_2, \sigma_{yz}^\infty = \tau, \sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ .

Напружений стан такої структури розіб'ємо на два незалежних – поздовжній зсув та плоску деформацію. Таким чином задача теоретичного опису пружного поведіння композиту, що розглядається, зводиться до двох незалежних двовимірних задач теорії пружності. Тому надалі розглядатимемо площину  $z \sim t = \text{const}$ , яка містить тонкостінні пружні включення практично довільного профілю, що є поперечними перерізами арматури.

Сумістимо площину  $z \sim t = \text{const}$  з координатною площиною  $xOy$ , початок якої – точку  $O$  – розмістимо у центрі довільного перерізу. Вважатимемо включення настільки віддаленими одне від другого, що їхньою взаємодією можна знехтувати. Геометричні параметри включень – півдовжина  $a$  та кут  $\alpha$  між напрямками осі неоднорідності та осі абсцис – випадкові величини із заданою густиною їх сумісного розподілу  $f(a, \alpha)$  в діапазоні допустимих значень.

Оскільки взаємодія включень не враховується, припустимо додатково, що густина розподілу включень стала (кількість включень у виділеному об'ємі пропорційна цьому об'єму) і тому можна обмежитися розглядом представницького елемента композиту об'ємом  $V$ , який містить одне включення і має форму прямокутника розмірами  $2c \times 2d$ . Визначимо середні напруження та деформації у такому елементі за допомогою формул (25.1), де  $\sigma_{ij}$  та  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти тензорів малих деформацій і напружень відповідно, відомі з розв'язків відповідних задач теорії пружності. Тоді ефективні пружні характеристики  $C_{ijkl}^e$  визначаються зі співвідношення (25.2).

Якщо пружний модуль  $a_{ij}^e = a_{ij}^e(a, \alpha)$ , що його шукаємо, є певною випадковою величиною, залежною від величин  $a$  та  $\alpha$  з густиною їх сумісного розподілу  $f(a, \alpha)$ , який ви-

значається на основі (25.4) та пружного розв'язку (20.31) для включення, то середнє значення (математичне сподівання) модуля визначається виразом

$$\langle a_{ij}^e \rangle = \iint_R a_{ij}^e(a, \alpha) f(a, \alpha) da d\alpha, \quad (25.13)$$

де інтегрування здійснюється по всій області  $R$  зміни величин  $a$  і  $\alpha$ . Оскільки в даному випадку ми нехтуємо взаємодією пружних полів стрічок (арматури), то у розвиненнях (20.31) можна зберігати лише перший член і коефіцієнти  $A_n^r$  визначати формулою (20.41). Якщо випадкові величини  $a$  і  $\alpha$  статистично незалежні (або можуть наближено такими вважатися), то  $f(a, \alpha) = f_1(a) f_2(\alpha)$ .

Дисперсія, що характеризує відхилення випадкової величини від її середнього значення, дорівнює

$$D a^e = \iint_R \left( a_{ij}^e(a, \alpha) - \langle a_{ij}^e \rangle \right)^2 f(a, \alpha) da d\alpha = \iint_R \left( a_{ij}^e(a, \alpha) \right)^2 f(a, \alpha) da d\alpha - \langle a_{ij}^e \rangle^2. \quad (25.14)$$

Вид функції розподілу  $f(a, \alpha)$  визначається умовами конкретної задачі. Якщо він невідомий, то у першому наближенні його можна вважати рівномірним.

Визначимо середнє за змінною  $y$  значення довільної функції  $f(x + iy)$  на відрізку  $y \in [-d; d]$  при фіксованому значенні  $x = \gamma$  таким чином:

$$\hat{f}(\gamma + id) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d f(\gamma + iy) dy,$$

а середнє за змінною  $x$  значення довільної функції  $f(x + iy)$  на відрізку  $x \in [-c; c]$  при фіксованому значенні  $y = \beta$  –

$$\hat{f}(c + i\beta) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(x + i\beta) dx.$$

Середнє значення похідних функції  $f(x + iy)$  у представницькому елементі об'єму композиту з урахуванням симетрії розв'язку задачі теорії пружності можна визначити формулами

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2cd} \int_{-d}^d f(c + iy) dy, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{2cd} \int_{-c}^c f(x + id) dx. \quad (25.15)$$

Тепер, якщо записати вираз (25.2) для напруженого стану, що досліджуємо, і скористатися розв'язком відповідної задачі теорії пружності для ізольованого тонкостінного включення у пружному середовищі для плоскої ((30.68) та § 32)) чи антиплоскої (п. 20.8) задач, то за допомогою залежностей (25.15) можна отримати вирази для пружних модулів стрічкового композиту як функції величин  $a$  та  $\alpha$ . Оскільки  $a$  і  $\alpha$  – випадкові величини, то й ефективні характеристики, які є детермінованими функціями згаданих змінних, також будуть випадковими.

### Антиплоска задача

Розглянемо [985, 941] визначення ефективного композиту у простішому випадку антиплоскої деформації. Співвідношення (25.2) тоді набувають вигляду (25.3). Згідно з (20.31)



$$\sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \frac{-ia}{2\sqrt{z^2 - a^2}} \sum_{n=0}^N (A_n^3 + iGA_n^6) \rho^{-n} + \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z),$$

$$w(z) = \frac{-a}{2G} \operatorname{Re} \left\{ \left( A_0^3 + iGA_0^6 \right) \ln \frac{\rho}{2} - \sum_{n=1}^N \left( A_n^3 + iGA_n^6 \right) / \left( n\rho^n \right) \right\} + w^0(z),$$
(25.16)

де коефіцієнти  $A_n^3, A_n^5$  розвинень для довільного профілю включення та навантаження визначаються за допомогою методу колокацій чи якогось іншого. Розглянемо простий випадок дії лише поля напружень на нескінченності за додаткової умови, що всі включення мають такий профіль, що його можна наближено вважати еліптичним. Тоді відповідно до (20.41)

$$w = \frac{1}{2G} \operatorname{Im} \left[ \left( z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) \left( iA_1^3 - GA_1^6 \right) + 2(\tau + i\tau_1)z \right], \quad z = (x + iy)e^{i\alpha},$$

$$A_1^r = \frac{F_r}{1 + \alpha_{0r}}, \quad F_3 = 2G \left[ \frac{\sigma_{xz}^c(-a)}{G_B} - \frac{\tau_1}{G} \right], \quad F_6 = \frac{2(G - G_B)\tau - GG_B w_-^*}{G^2}.$$
(25.17)

Використовуючи (25.15) та (25.3), отримуємо подібно до (20.7)

$$a_{44}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle^I}{\tau} = \frac{1}{2cd\tau} \int_{-c}^c w(x + id) dx, \quad \text{коли } \tau_1 = 0;$$

$$a_{55}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle^{II}}{\tau_1} = \frac{1}{2cd\tau_1} \int_{-c}^c w(c + iy) dy, \quad \text{коли } \tau = 0;$$

$$a_{45}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle^{II}}{\tau_1}, \quad \text{коли } \tau = 0; \quad a_{45}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle^I}{\tau}, \quad \text{коли } \tau_1 = 0.$$
(25.18)

Підставляючи сюди конкретний вираз (25.17), отримаємо формули для ефективних характеристик модулів стрічкового композиту:

$$a_{44}^e = \frac{1}{4cdG\tau} \left\{ 2cd(2\tau - GA_1^6) \cos \alpha + GA_1^6 \operatorname{Im} \int_{-c}^c \sqrt{(x + id)^2 e^{2i\alpha} - a^2} dx \right\},$$

$$a_{55}^e = \frac{1}{4cdG\tau_1} \left\{ 2cd(-2\tau_1 - GA_1^3) \cos \alpha - GA_1^3 \operatorname{Re} \int_{-c}^c \sqrt{(c + iy)^2 e^{2i\alpha} - a^2} dx \right\}.$$
(25.19)

Тепер, якщо відома сумісна густина  $f(a, \alpha)$  розподілу випадкових величин  $a, \alpha$ , то математичне сподівання величин  $\langle a_{ij}^e \rangle$  ефективних модулів податності стрічкового композиту визначається за формулою (25.13), де функції  $a_{ij}^e$  подаються залежно від типу задачі формулами (25.19). Дисперсію за допомогою виразів для значень ефективних характеристик обчислюють на основі залежності (25.14).

Якщо вважати, що випадковість величини параметрів включень обумовлена впливом дії великої кількості незалежних випадкових чинників, то можна припустити, що згадані па-

раметри змінюються у проміжку  $[d_0; d]$  та підпорядковуються  $\beta$ -розподілу з функцією густини

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ((x < d_0) \cup (x > d)), \\ \frac{\Gamma(a+b)}{(d-d_0)\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x-d_0}{d-d_0}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{x-d_0}{d-d_0}\right)^{b-1} & (d_0 \leq x \leq d, a > 0, b > 0). \end{cases}$$

Математичне сподівання цього розподілу дорівнює  $d_0 + (d-d_0)\frac{a}{a+b}$ . Коли обидва параметри  $a, b$  цього розподілу відмінні від одиниці, можна майже довільно формувати  $\beta$ -розподіл, майже довільно роблячи наголос на тих чи інших значеннях випадкової величини, моделюючи ті чи інші особливості їх поведінки. Доволі часто  $\beta$ -розподілом моделюють час перебування технічного об'єкту у працездатному стані; час тривалості ремонту чи діагностування об'єкту.

У доволі простому частковому випадку, коли  $a=1, b=r+1$  ( $r \geq 0$ ) з огляду на те, що тоді

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = r+1,$$

функція густини цього розподілу набуває вигляду

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ((x < d_0) \cup (x > d)), \\ \frac{r+1}{d-d_0} \left(1 - \frac{x-d_0}{d-d_0}\right)^r & (d_0 \leq x \leq d, r \geq 0), \end{cases} \quad (25.20)$$

причому математичне сподівання у цьому випадку дорівнює

$$d_0 + \frac{d-d_0}{r+2}.$$

Якщо  $r = \infty$  маємо детермінований випадок (математичне сподівання, як і кожне значення випадкової функції дорівнює  $x = d_0$ ); при  $r = 0$  – рівномірний розподіл на проміжку  $d_0 \leq x \leq d$  (усі значення з цього проміжку мають однакову імовірність появи і тому математичне сподівання дорівнює  $(d+d_0)/2$ ); при  $r=1$  – розподіл є лінійно спадним півтрикутним.

Для прикладу (рис. 25.12, 25.13) обчислено нормоване безрозмірне математичне сподівання  $\langle G_{55}^{e0} \rangle = \left(G \langle a_{55}^e \rangle\right)^{-1}$  ефективного модуля зсуву  $G_{55}^e = 1/a_{55}^e$  в разі, коли випадкова величина кута  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  підпорядковувалася рівномірному розподілу ( $\beta$ -розподілу (25.20) за  $r=0$ ), а півдовжина включень  $a$  є сталою. Вважалося, що відносна товщина включення у його центральній частині  $h_0/a = 0,1$ ; відношення модулів зсуву включення та ізотропної матриці дорівнює  $k \equiv G_B/G = 100$ .

Подана залежність цієї величини від відносної щодо параметра розміру ґратки півдовжини включення  $\lambda = a/c$ . Лінія 1 (рис. т.25.12) відповідає розтягнутій угору прямокутній ґратці з параметром  $d = 2c$ ; лінія 2 – квадратній ґратці. Помітно, що для відносно малих

розмірів включення математичне сподівання модуля зсуву  $\langle G_{55}^e \rangle$  збігається із величиною модуля зсуву матриці  $G$  (наявність малих включень ніяк не впливає на пружність (податність) композиту).

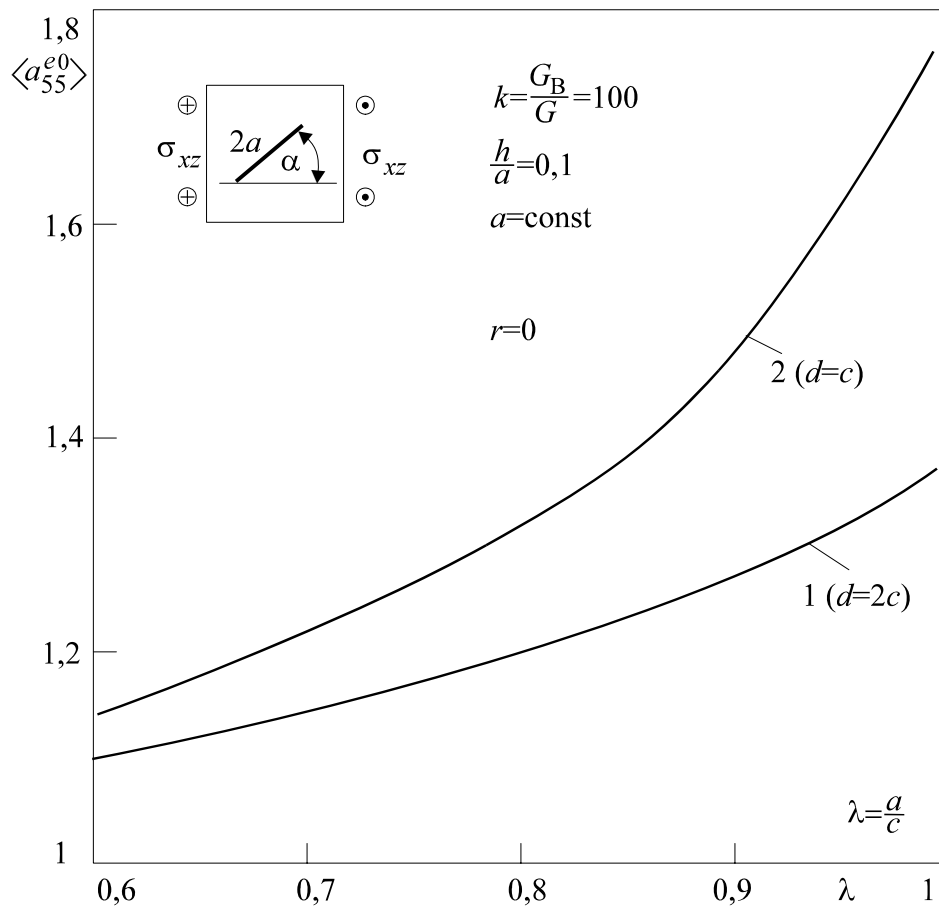


Рис. 25.12

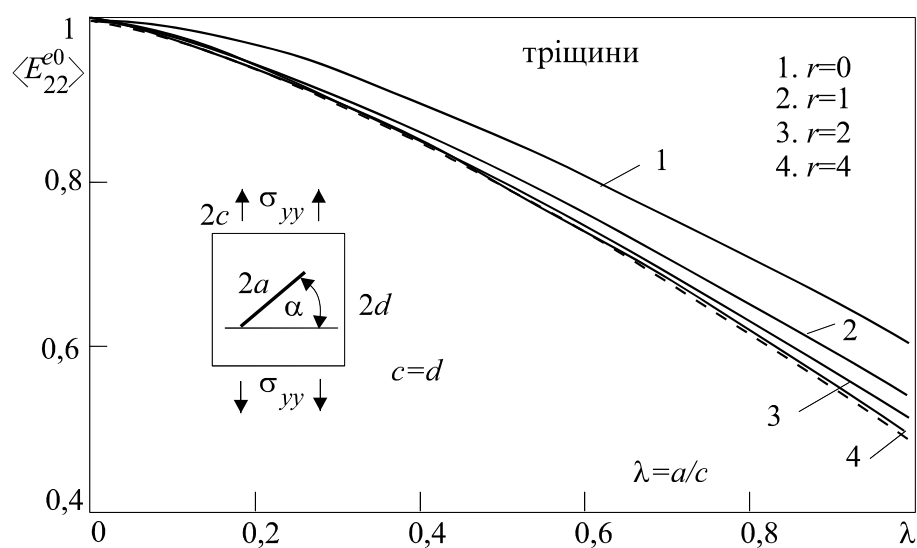


Рис. 25.13

Згідно з аналогією Г.С.Кіта [393] отримані результати автоматично переносяться на випадок впливу стохастично розподілених стрічкових включень на ефективні коефіцієнти теплопровідності композиту.

### Плоска задача

Так само, як і у випадку антиплоскої деформації, для плоскої деформації [985, 941] загальні співвідношення (25.2) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle &= a_{11}^e \langle \sigma_{xx} \rangle + a_{12}^e \langle \sigma_{yy} \rangle + a_{13}^e \langle \sigma_{xy} \rangle, \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle &= a_{21}^e \langle \sigma_{xx} \rangle + a_{22}^e \langle \sigma_{yy} \rangle + a_{23}^e \langle \sigma_{xy} \rangle, \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle &= a_{31}^e \langle \sigma_{xx} \rangle + a_{32}^e \langle \sigma_{yy} \rangle + a_{33}^e \langle \sigma_{xy} \rangle.\end{aligned}\quad (25.21)$$

де  $a_{ij}^e$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – ефективні (зведені) пружні сталі стрічкового композиту (податності) для випадку плоскої деформації.

Згідно з виразами (30.25), (20.30), (30.69) та (30.70), (30.71) для включення еліптичного профілю в однорідному полі напружень на нескінченності поле переміщень має вигляд

$$\begin{aligned}2(u + iv) &= \frac{a}{1 + \kappa} \left\{ \kappa \left( A_1^{1*} - 2GA_1^{4*} \right) \left( z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) - \left( A_1^{1*} + 2GA_1^{4*} \right) \left( \bar{z} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{z - \bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} \left( \bar{z} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2} \right) \left( A_1^{1*} - 2GA_1^{4*} \right) \right\} + \frac{1}{4} \left( (\kappa - 3)p + (\kappa - 1)p_1 \right) + i\tau_2, \\ \kappa &= \frac{3 - 4\nu}{1 + \nu}, \quad z = (x + iy)e^{i\alpha}, \quad A_n^{1*} = A_n^1 - iA_n^2, \quad A_n^{4*} = A_n^4 + iA_n^5,\end{aligned}\quad (25.22)$$

$$A_1^2 = \pi \frac{\lambda_{11} F_3 + (\lambda_4' - 1) F_1}{2r_1}, \quad A_1^5 = \frac{F_1 - (1 + \lambda_1') A_1^2}{\lambda_{11}},$$

$$A_1^1 = \frac{F_2}{(\lambda_{21} - k_2)(1 + \lambda_0')}, \quad A_1^4 = -k_2 A_1^1,$$

де

$$F_1 = \frac{k_0 N_{-a} - u_x^{0'} - k_1 \sigma_{yy}^0}{\Lambda_1}, \quad F_2 = \frac{G_B}{\Lambda_2} \left[ u_y^{0'} - \frac{\sigma_{xy}^0}{G_B} - c_* \right], \quad F_3 = \frac{1}{l_1^+} \left[ \sigma_{yy}^0 + d_* - \nu_B N_{-a} \right],$$

$$\sigma_{yy}^0 = p, \quad \sigma_{xx}^0 = p_1, \quad \sigma_{xy}^0 = \tau, \quad u_x^0 + iu_y^0 = \frac{\kappa \Gamma - \Gamma'}{2G} z - \frac{\bar{\Gamma}'}{2G} \bar{z}, \quad \Gamma_1 = \frac{p + p_1}{4}, \quad \Gamma_1' = \frac{p - p_1}{2} + i\tau,$$

$$\lambda_j' = a\lambda_j, \quad \Lambda_1 = l_2^+ + k_1 m^-, \quad \Lambda_2 = m^- G_B - l_1^+, \quad r_1 = \frac{\pi}{2} (\lambda_{31} \lambda_1 - 1 + \lambda_4' - \lambda_1' - \lambda_{11} \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_4')$$

$$\lambda_{11} = \frac{m^- - k_1 l_1^+}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{21} = -\frac{m^- + G_B l_2^+}{\Lambda_2}, \quad \lambda_{31} = -\frac{m^-}{l_1^+}, \quad \lambda_0 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_2 - \lambda_{21}},$$

$$\lambda_1 = \frac{k_0}{2\Lambda_1 h_0}, \quad \lambda_2 = -\frac{G_B}{2\Lambda_2 h_0}, \quad \lambda_3 = \frac{\nu_B}{2l_1^+ h_0}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2k_0 l_1^+ h_0},$$

$$m^- = \frac{1 - \kappa}{2(1 + \kappa)}, \quad l_1^+ = \frac{2G}{1 + \kappa}, \quad l_2^+ = \frac{\kappa}{2G(1 + \kappa)}, \quad k_0 = \frac{1 + \kappa_B}{8G_B}, \quad k_1 = \frac{3 - \kappa_B}{8G_B},$$

$$k_2 = \frac{1 - \kappa_B}{G_B(1 + \kappa_B)}, \quad c_* \equiv \frac{c_{-a}}{2h(-a)} = -\frac{2}{\max(E, E_B)} \left[ (1 + \nu_B) \sigma_{xy}^0 - E u_{y'}^0 \right],$$

$$d_* \equiv \frac{d_{-a}}{2k_0 h(-a)} = -\frac{1 + \nu_B}{4 \max(E, E_B)} \left[ (1 + \kappa_B) \sigma_{yy}^0 - (3 - \kappa_B) \sigma_{xx}^0 \right].$$

Використовуючи співвідношення (25.15), (25.21) і (25.22), знаходимо при трьох різних способах навантажування послідовно уздовж двох перпендикулярних між собою осей та поперечним зсувом аналогічно до виразів (25.18) ефективні характеристики (модулі податності для плоского напруженого стану) у вигляді

$$a_{11}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle^{\text{II}}}{p_1} = \frac{1}{2cdp_1} \int_{-d}^d u(c + iy) dy, \quad a_{21}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle^{\text{II}}}{p_1}, \quad \text{коли } p = \tau_2 = 0;$$

$$a_{22}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle^{\text{I}}}{p} = \frac{1}{2cdp} \int_{-c}^c v(x + id) dx, \quad a_{12}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle^{\text{II}}}{p_1}, \quad \text{коли } p_1 = \tau_2 = 0;$$

$$a_{13}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle^{\text{III}}}{\tau_2} = \frac{1}{2cd\tau_2} \int_{-d}^d u(c + iy) dy, \quad a_{23}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle^{\text{III}}}{\tau_2} = \frac{1}{2cd\tau_2} \int_{-c}^c v(x + id) dx,$$

$$a_{33}^e = \frac{\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle^{\text{III}} + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle^{\text{III}}}{\tau_2}, \quad \text{коли } p = p_1 = 0. \quad (25.23)$$

Тепер, якщо відома сумісна густина  $f(a, \alpha)$  розподілу випадкових величин  $a, \alpha$ , то математичне сподівання величин  $\left\langle a_{ij}^e \right\rangle$  ефективних модулів податності стрічкового композиту визначається за формулою (25.13), де функції  $a_{ij}^e$  подаються залежно від типу задачі формулами (25.23). Дисперсію за допомогою виразів для значень ефективних характеристик обчислюють на основі залежності (25.14).

**Таблиця 25.2.** Вплив параметрів  $r$  та  $\lambda$  на математичне сподівання ефективного модуля пружності  $\left\langle E_{22}^{e0} \right\rangle$  матриці із системою тріщин у квадратній ґратці при випадковій орієнтації тріщин в інтервалі  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  та фіксованій їх довжині  $a = 1$

$r$	0	1	2	3	4	$\infty$
$\lambda$						
0,990	0,6084	0,5468	0,5225	0,5092	0,5004	0,5000
0,976	0,6147	0,5533	0,5291	0,5158	0,5070	0,5067
0,952	0,6249	0,5640	0,5399	0,5266	0,5178	0,5175
0,909	0,6444	0,5847	0,5608	0,5476	0,5388	0,5386
0,800	0,6965	0,6406	0,6178	0,6051	0,5966	0,5964
0,500	0,8495	0,8142	0,7990	0,7903	0,7844	0,7842
0,200	0,9719	0,9641	0,9605	0,9585	0,9570	0,9568
0,100	0,9928	0,9907	0,9898	0,9893	0,9889	0,9888

Табл. 25.2, 25.3 подають залежність впливу параметра  $r$  розподілу (25.20) на величину математичного сподівання ефективного модуля пружності  $\langle E_{22}^{e0} \rangle = \left( E \langle a_{22}^e \rangle \right)^{-1}$  матриці із системою тріщин у квадратній ґратці  $2c \times 2c$  за різних значень параметра  $\lambda = \frac{a_0 + a_1}{2c}$ , де через  $a \sim d$  позначено змінюваний у межах  $a_0 \leq a \leq a_1$  ( $a_0 = a_1 = 1$  для табл. 25.2 та  $a_0 = 0,8$ ;  $a_1 = 1,2$  для табл. 25.3) параметр півдовжини дефекту.

Табл. 25.2 (див. теж рис. 25.13) відповідає випадку зміни густини розподілу кута орієнтації тріщини на проміжку  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  за законом (25.20) і фіксованої півдовжини дефекту  $a = 1$ . Помітно, що зі зростанням  $r$  жорсткість тіла зменшується, прямуючи до відповідного детермінованого результату. Табл. 25.3 (див. теж рис. 25.14) побудовано для випадку фіксованого кута орієнтації  $\alpha = 0$  та випадкової зміни півдовжини неоднорідності в межах від 0,8 до 1,2.

Порівняння з табл. 25.2 (рис. 25.13) свідчить, що коли випадковою є півдовжина  $a$  тріщини, вірне обернене твердження: зі зростанням  $r$  жорсткість матеріалу дещо підвищується.

**Таблиця 25.3.** Вплив параметрів  $r$  та  $\lambda$  на математичне сподівання ефективного модуля пружності  $\langle E_{22}^{e0} \rangle$  матриці із системою тріщин у квадратній ґратці за однакової орієнтації  $\alpha = 0$  тріщин та стохастичній зміні півдовжини тріщин

$r$	0	1	2	3	4	$\infty$
0,990	0,5027	0,5272	0,5412	0,5488	0,5530	0,5532
0,976	0,5092	0,5338	0,5479	0,5555	0,5597	0,5599
0,952	0,5200	0,5447	0,5586	0,5664	0,5707	0,5710
0,909	0,5409	0,5658	0,5799	0,5875	0,5917	0,5920
0,800	0,5984	0,6230	0,6368	0,6442	0,6484	0,6486
0,500	0,7852	0,8031	0,8128	0,8180	0,8208	0,8211
0,200	0,9572	0,9616	0,9639	0,9651	0,9657	0,9661
0,100	0,9889	0,9901	0,9907	0,9910	0,9912	0,9913

Табл. 25.4, 25.5 (див. теж рис. 25.15 та 25.16) подають за умов плоскої деформації залежність впливу параметра  $r$  розподілу (25.20) випадково змінюваного за законом  $\beta$ -розподілу (25.20) кута  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  на величину нормованого безрозмірного математичного сподівання ефективного модуля пружності  $\langle E_{11}^{e0} \rangle = \left( E \langle a_{11}^e \rangle \right)^{-1}$  модуля  $E_{11}^e$  матриці із системою пружних включень ( $k \equiv E_B/E = 10$  та  $k = 100$  відповідно; модулі Пуассона матеріалів включень та матриці однакові ( $\nu_B = \nu = 1/3$ )). Досліджується випадок квадратної ґратки  $2c \times 2c$  періодичності та різних значень параметра  $\lambda = a/c$  відносної півдовжини дефекту у випадку його детермінованого розміру  $a = 1$  та відносної товщини  $h_0/a = 0,1$  включення еліптичного профілю у його центральній частині.

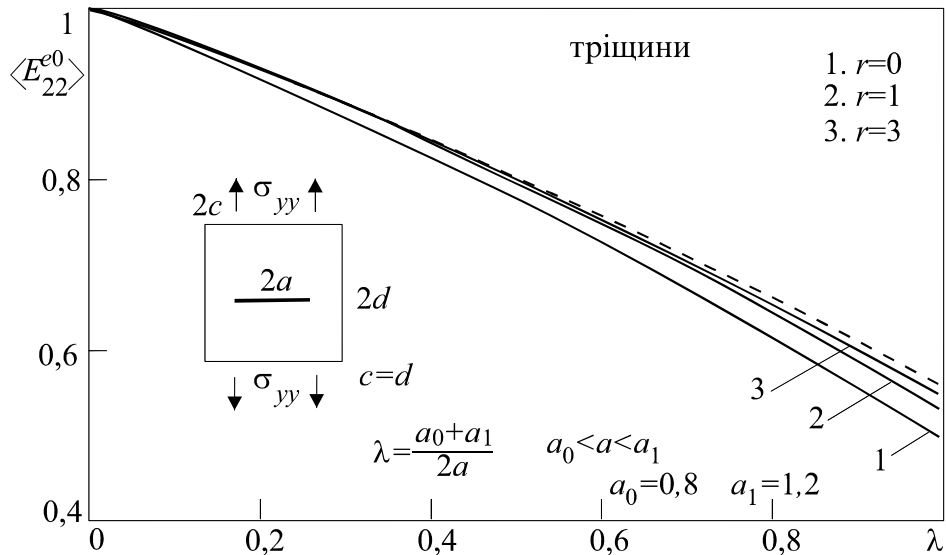


Рис. 25.14

Таблиця 25.4. Вплив параметрів  $r$  та  $\lambda$  на математичне сподівання ефективного модуля пружності  $\langle E_{11}^{e0} \rangle$  матриці із системою пружних включень ( $\nu = \nu_B = 1/3$ ,  $k \equiv E_B/E = 10$ ) у квадратній ґратці при  $a = 1$  та  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

$\lambda$	$r$	0	1	2	3	4	$\infty$
0,990		1,258	1,359	1,412	1,444	1,467	1,470
0,976		1,249	1,345	1,394	1,425	1,447	1,451
0,952		1,234	1,323	1,369	1,397	1,417	1,420
0,909		1,209	1,286	1,325	1,349	1,367	1,369
0,800		1,155	1,208	1,235	1,251	1,262	1,264
0,500		1,055	1,072	1,080	1,085	1,088	1,091
0,200		1,026	1,033	1,351	1,387	1,409	1,410
0,100		1,009	1,100	1,103	1,105	1,110	1,111

Таблиця 25.5. Вплив параметрів  $r$  та  $\lambda$  на математичне сподівання ефективного модуля пружності  $\langle E_{11}^{e0} \rangle$  матриці із системою пружних включень ( $\nu = \nu_B = 1/3$ ,  $k \equiv E_B/E = 100$ ) у квадратній ґратці при  $a = 1$  та  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

$\lambda$	$r$	0	1	2	3	4	$\infty$
0,990		1,258	1,677	1,803	1,886	1,920	1,926
0,976		1,249	1,643	1,760	1,836	1,881	1,885
0,952		1,234	1,594	1,698	1,765	1,810	1,814
0,909		1,209	1,513	1,597	1,651	1,709	1,712
0,800		1,155	1,355	1,406	1,438	1,498	1,500
0,500		1,055	1,113	1,126	1,134	1,151	1,153
0,200		1,026	1,069	1,073	1,079	1,091	1,092
0,100		1,009	1,024	1,030	1,036	1,042	1,042

Обчислення свідчать, що зі зростанням параметра розподілу  $r$  жорсткість композиту збільшується, прямуючи при  $r \rightarrow \infty$  до відповідного результату для регулярно армованого уздовж напрямку розтягу композиту (штрихова лінія), отриманого на основі безпосереднього використання співвідношень (25.23) при детермінованому куті  $\alpha = 0$  (найбільша жорсткість за армування композиту відносно жорсткими волокнами уздовж

напряму розтягу). Помітно, що для відносно малих розмірів включення математичне сподівання модуля пружності  $\langle E_{11}^e \rangle$  збігається із величиною модуля пружності матриці  $E$ .

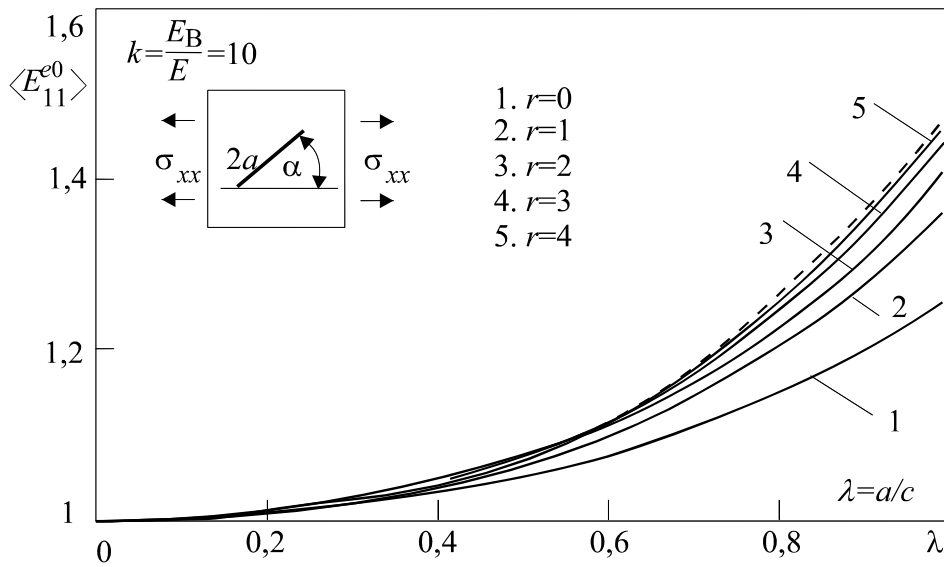


Рис. 25.15

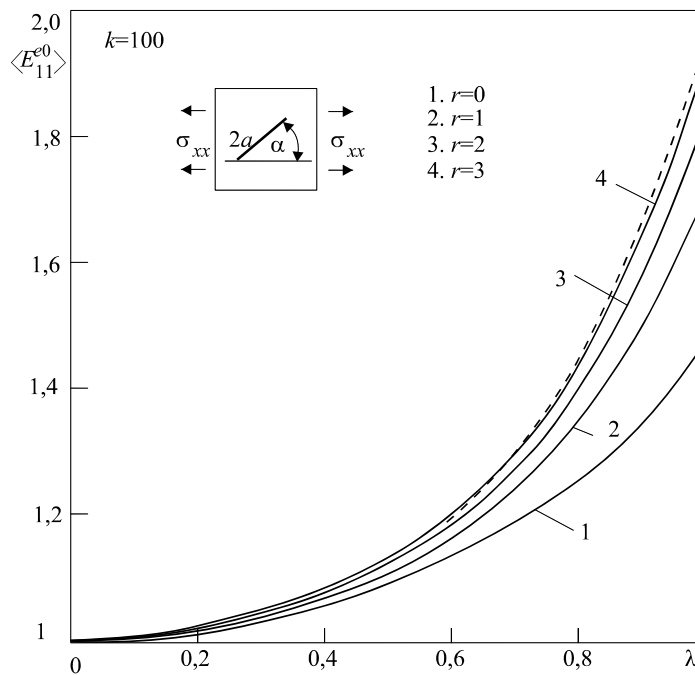


Рис. 25.16

### § 26. Сила, що діє на дислокацію

Пластичне деформування і руйнування матеріалу біля концентраторів напружень тісно пов'язане з рухом у цій зоні дислокацій. Однією з важливих характеристик, які визначають рухливість дислокацій у матеріалі, є сила, що діє на дислокацію (СДД). Ця термодинамічна за своєю природою сила докладно вивчена у випадку взаємодії дислокацій зі скінченними та півбезмежними тріщинами [1075, 1148, 1157, 1278, 1456, 1476, 1572, 1638, 1673]. Однак взаємодія дислокацій з іншими тонкими неоднорідностями, зокрема, абсолютно жорсткими



включеннями, досліджена недостатньо [1251]. У праці [1648] розглянута взаємодія гвинтової дислокації з пружним коловим циліндричним включенням, а також з абсолютно податним (порожнина, пора) та абсолютно жорстким еліптичним циліндром. Тут визначена, зокрема, енергія взаємодії дислокації з прямолінійною щілиною та з жорстким включенням, що дає змогу визначити також силу, що діє на дислокацію. У праці [1390] побудований наближений розв'язок задачі про взаємодію дислокацій із включенням, і як приклад, визначені поле напружень і сила, що діє на дислокацію біля пружного еліпсоїда обертання, зокрема, сплющеного або видовженого. У цьому параграфі [971, 972, 959, 952, 953] застосуємо теорію тонкостінних включень до вивчення цих задач.

За формулою Піча – Келера [461, 1065] сила, що діє на дислокацію у точці  $z_*$  має складові

$$F_x(z_*) = b\sigma_{yz}^{*0}(z_*), \quad F_y(z_*) = -b\sigma_{xz}^{*0}(z_*), \quad (26.1)$$

де  $b$  – компонента вектора Бюргерса дислокації; індексом "\*" відзначене поле напружень у точці  $z_*$  без урахування власного поля напружень від дислокації у цій же точці. Якщо на тіло крім дислокації в точці  $z_*$  інші навантаження не діють, то це є збурене включенням поле напружень  $\hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz}$ . Компоненти напружень визначаються виразом (21.1), (21.2). Тому

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{*0}(z) + i\sigma_{xz}^{*0}(z) &= -\frac{1}{4\pi} \left[ F^-(z) \pm \bar{F}^-(z) \right], \\ F^\pm(z) &= -Gb \left\{ \frac{1}{X(z)} + \frac{1}{z-z_*} \left[ \frac{X(z_*)}{X(z)} \pm 1 \right] \right\}, \\ X(z) &= \sqrt{z^2 - a^2} = iX_0(z), \quad X_0(z) = \sqrt{a^2 - z^2}. \end{aligned} \quad (26.2)$$

У цьому параграфі верхній знак стосується тріщини, нижній – абсолютно жорсткої плівки (АЖП).

Підставляючи (26.2) у (26.1) та переходячи до границі  $z \rightarrow z_*$ , отримуємо

$$F_x - iF_y = 2A \left\{ \frac{1 \pm 1}{X(z_*)} + \frac{z_*}{a^2 - z_*^2} \pm \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left[ \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} - 1 \right] \right\}, \quad A = \frac{Gb^2}{8\pi}. \quad (26.3)$$

У випадку розташування дислокації у площині дефекту на осі абсцис у точці  $(x_*; 0)$  ( $y_* \rightarrow 0$ ) за допомогою граничного переходу одержуємо

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= -2A \left[ -\frac{(1 \pm 1) \operatorname{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} + \frac{x_* \pm x_*}{x_*^2 - a^2} \right] \quad (|x_*| > a), \\ F_x - iF_y &= -2A \left[ [\pm] \frac{(i \pm i)}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} \mp \frac{i}{y_*} + \frac{x_* \mp x_*}{x_*^2 - a^2} \right] \quad (|x_*| < a). \end{aligned} \quad (26.4)$$

Тут і надалі у формулах (26.4)–(26.8) беремо арифметичне значення кореня; верхній знак у квадратних дужках стосується верхнього берега проміжку  $[-a; a]$ , нижній – його нижнього краю. Таким чином, для дислокації, яка розміщена на продовженні осі щілини ( $y_* = 0, |x_*| > a$ ),

$$F_x = 4A \left[ \frac{\text{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2 - a^2} \right], \quad F_y = 0 \quad (y_* = 0, |x_*| > a), \quad (26.5)$$

що збігається з виразом (17) праці [1476] за урахування там  $\sigma = n = 0$ . Для дислокації на продовженні площини абсолютно жорсткої плівки  $|x_*| > a$ ,  $y_* = 0$  складові сили  $F_x = F_y = 0$ , тому дислокація буде нерухома.

Якщо дислокація наближається до берега тріщини, то

$$F_x = 0, \quad F_y = F_\theta = 2A \left( \frac{[\pm]2}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} - \frac{1}{y_*} \right), \quad F_r = -\frac{2A}{r} \quad (|x_*| < a), \quad (26.6)$$

а з рухом до краю абсолютно жорсткої плівки –

$$F_x = \frac{-4Ax_*}{x_*^2 - a^2}, \quad F_y = \frac{2A}{y_*}; \quad F_r = 0, \quad F_\theta = \frac{2A}{y_*} \quad (|x_*| < a, y_* = 0). \quad (26.7)$$

Тут крім декартової системи координат у правому вістрі дефекту введена полярна система  $(r, \theta)$  (рис. 26.1).

Якщо дислокація розташована на осі  $y$  ( $z_* = (0; y_*)$ ), то

$$F_x = 0, \quad F_y = 2A \left[ (1 \pm 1) \frac{\text{sign}(y_*)}{\sqrt{y_*^2 + a^2}} - \frac{y_*}{y_*^2 + a^2} \mp \frac{1}{y_*} \right]. \quad (26.8)$$

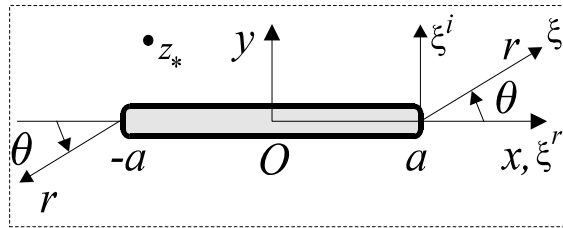


Рис. 26.1. Системи координат у вістрі включення

Зокрема, за граничного переходу  $a \rightarrow \infty$  з формули (26.8) чи (26.6), (26.7) випливає

$$F_x = 0, \quad F_y = (\mp) \frac{2A}{y_*} \quad (26.9)$$

– вираз для сили, що діє на дислокацію у верхній півплощині  $y > 0$  на відстані  $y_*$  від її краю. Верхній знак відповідає вільному краю (див. також [1648], (3.17) [1065]), нижній – жорстко защемленому (див. задачу 3.5 [1065] і [1648]). Величина сили, що діє на дислокацію, у цих випадках однакова: дислокація відштовхується від незмінюваної (защемленої) поверхні з такою ж силою, з якою притягується до вільної поверхні.

Випадок півбезмежного дефекту впливає з виразу (26.3), якщо у точку  $z = a$  помістити систему координат  $\xi \equiv \xi^r + i\xi^i = z - a = r \cdot e^{i\theta}$ ,  $\xi_* = \xi_*^r + i\xi_*^i = z_* - a$  (див. рис. 26.1) та перейти до границі  $a \rightarrow \infty$ . Тоді оскільки  $X(\bar{z}_*)/X(z_*) \rightarrow \sqrt{\xi_*^r/\xi_*^i}$ , то

$$F_x - iF_y = -2A \left[ \frac{1}{2\xi_*^i} \pm \frac{1}{\xi_*^r - \xi_*^i} \left( 1 - \sqrt{\frac{\xi_*^r}{\xi_*^i}} \right) \right]. \quad (26.10)$$

Звідси для півбезмежного розрізу

$$F_x - iF_y = -\frac{A}{r} \left\{ 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - i \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \theta \right] \right\}, \quad (26.11)$$

$$F_r = -\frac{2A}{r}, \quad F_\theta = \frac{A}{r} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right);$$

для півбезмежного жорсткого включення –

$$F_x - iF_y = \frac{A}{r} \left\{ 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - i \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \theta \right] \right\}, \quad (26.12)$$

$$F_r = 0, \quad F_\theta = -\frac{A}{r} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

На відміну від тріщини радіальна складова сили, що діє на дислокацію, в околі півбезмежної абсолютно жорсткої плівки дорівнює нулю, а трансверсальна – відповідній силі біля тріщини, але є протилежно скерована. За можливості вільного переміщення дислокація рухатиметься вздовж дуги кола з центром у вершині включення до місця стійкої рівноваги на продовженні площини абсолютно жорсткої плівки. Від поверхні включення дислокації відштовхуються. Це сприяє емісії дислокацій з межі поділу матеріалів (фаз).

Вираз (26.9) можна також отримати на підставі (26.11) і (26.12), якщо взяти до відома, що

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r^{-1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] = \frac{2}{y_*} \left( y_* = \xi_*^i \right).$$

Потенціальна енергія дислокації, що визначається формулою

$$U = -\int F_r dr - \int r F_\theta d\theta$$

для півбезмежного розрізу приводить до відомого [1456] значення

$$U = 2A \ln \left( r \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

Для півбезмежної абсолютно жорсткої плівки отримуємо до певної міри подібний вираз

$$U = -2A \ln \left( \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (26.13)$$

Енергія дислокації не залежить від її відстані до вершини півбезмежної абсолютно жорсткої плівки і визначається лише полярним кутом: на поверхні дефекту енергія необмежено велика, а на його продовженні – нульова.

В анізотропному випадку (див. § 23) подібним чином отримуємо

$$\{F_x, F_y\} = 2A^* \operatorname{Re} \left\{ \left\{ 1, s^1 \right\} \left[ \frac{1 \pm 1}{X(z_{*1}^1)} + \frac{z_{*1}^1}{a^2 - (z_{*1}^1)^2} \pm \frac{1}{z_{*1}^1 - \bar{z}_{*1}^1} \left[ \frac{X(\bar{z}_{*1}^1)}{X(z_{*1}^1)} - 1 \right] \right] \right\}, \quad A^* = \frac{b^2}{8\pi |r^1|}. \quad (26.14)$$

Для тріщини на її продовженні

$$\{F_x, F_y\} = 4A^* \operatorname{Re} \left\{ \left\{ 1, s^1 \right\} \left[ \frac{\operatorname{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2 - a^2} \right] \right\} \quad (|x_*| > a) \quad (26.15)$$

(у загальному випадку анізотропії  $F_y \neq 0$ ), а на продовженні абсолютно жорсткої плівки

$$\{F_x, F_y\} = \{0, 0\} \quad (|x_*| > a). \quad (26.16)$$

Тут, як і в ізотропному випадку, дислокація перебуває у стані стійкої рівноваги.

Із наближенням дислокації до поверхні тріщини

$$\{F_x, F_y\} = 2A^* \operatorname{Re} \left[ \{1, s^1\} \left( \frac{\mp 2i}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} + \frac{i}{y_*^1} \right) \right], \quad y_*^1 = s_2^1 y_* = \frac{y_* |r^1|}{a'_{55}} \quad (|x_*| < a), \quad (26.17)$$

а з прямуванням до краю абсолютно жорсткої плівки

$$\{F_x, F_y\} = 2A^* \operatorname{Re} \left[ \{1, s^1\} \left( \frac{2x_*}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} - \frac{i}{y_*^1} \right) \right], \quad y_*^1 = s_2^1 y_* = \frac{y_* |r^1|}{a'_{55}} \quad (|x_*| < a). \quad (26.18)$$

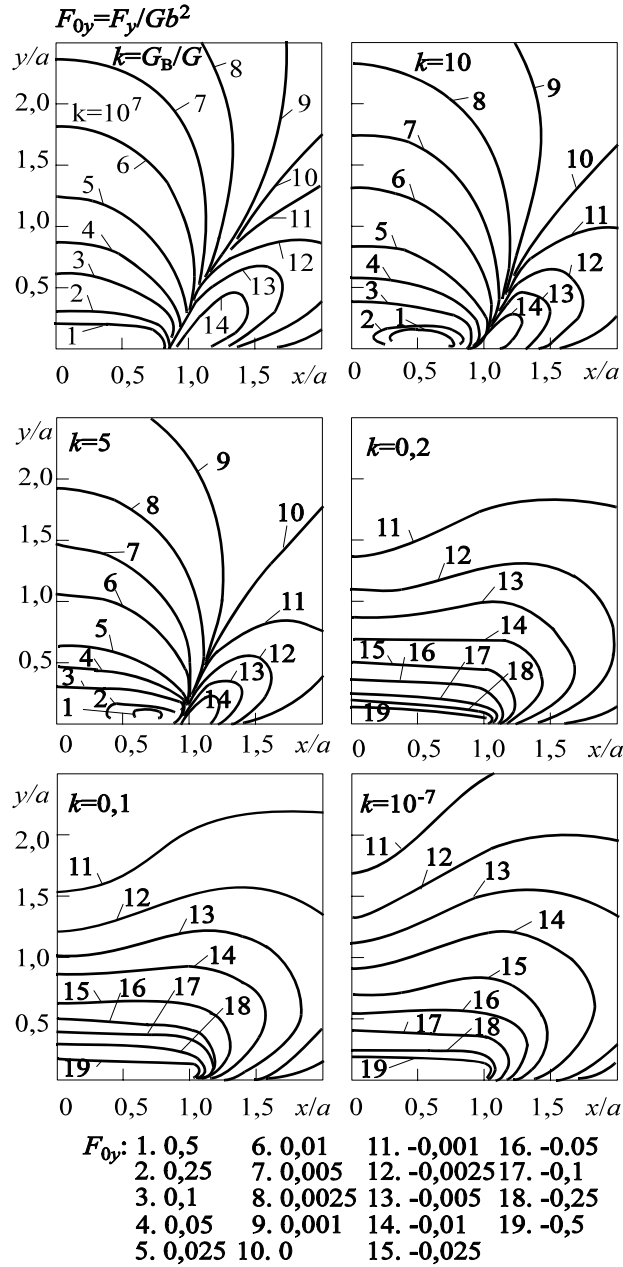


Рис. 26.2. Сила, що діє на гвинтову дислокацію в околі пружного включення

За півбезмежного дефекту

$$\{F_x, F_y\} = 2A^* \operatorname{Re} \left[ \{1, s^1\} \left( \frac{1}{2\xi_*^1} \pm \frac{1}{\xi_*^1 - \bar{\xi}_*^1} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\xi}_*^1}{\xi_*^1}} \right) \right) \right] \quad (26.19)$$

або

$$\{F_x, F_y\} = -A^* \left[ \cos \theta_1 \pm 1, \frac{a_{45}}{a_{55}} (\cos \theta_1 \pm 1) + \frac{|r^1|}{a_{55}} \left[ \sin \theta_1 \pm \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right] \right], \quad \xi_{*1}^1 = r_1 \exp(i\theta_1). \quad (26.20)$$

Якщо  $a \rightarrow \infty$ , то оскільки  $X(\bar{z}_{*1}^1) / X(z_{*1}^1) \rightarrow -1$ , з (26.12) випливає

$$F_x = 0, \quad F_y = \mp \frac{2A^*}{y_*} \quad (26.21)$$

– вираз для сили, що діє на дислокацію, біля вільної (верхній знак) та защемленої (нижній знак) межі анізотропної півплощини. Його можна отримати також з подання сили, що діє на дислокацію біля прямолінійної межі поділу матеріалів [1213, 1346].

Рівність між величиною радіальної складової  $F_r$  (формула (26.6)) для півбезмежної тріщини і силою притягання дислокації вільною поверхнею  $F_y$  (формула (26.9)) становить зміст **теореми уявних сил** [1148], що, як виявляється, виконується також і для анізотропного випадку. Порівняння формул (26.7) і (26.9) стосовно абсолютно жорсткої плівки та жорсткого защемлення межі свідчить про відсутність аналога даної теореми для дефекту цього типу.

Рис. 26.2 подає лінії рівня складової  $F_y / (Gb^2)$  сили, що діє на дислокацію біля тріщини ( $k \equiv G_B / G = 10^{-7}$ ), абсолютно жорсткої плівки ( $k = 10^7$ ) та пружного включення різної відносної жорсткості ( $k = 10; 5; 0,2; 0,5$ ).

Обчислення здійснені зі застосуванням методу колокацій до системи сингулярних інтегральних рівнянь, побудованої для одного пружного включення. Для тріщини та абсолютно жорсткої плівки відповідні лінії збігаються з побудованими на основі аналітичних розв'язків [1278].

## § 27. Емісія гвинтових дислокацій з поверхні тонкого дефекту

### 27.1. Ізотропний масив

Межа стрічкового включення, як і довільного іншого концентратора напружень, може служити джерелом емісії дислокацій, яке починає функціонувати при досягненні на ній напруженнями певних критичних рівнів [1572, 1693, 1694], або з деяких інших причин [1572, 1693, 1694, 1472, 1467, 1075, 1461, 1182, 824]. Це явище, зокрема, сприяє зменшенню коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершині тріщини і, як наслідок, збільшенню критичного зовнішнього навантаження.

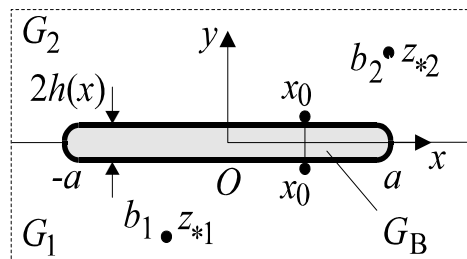


Рис. 27.1. Схема задачі

Дослідимо [937, 957] поле напружень в ізотропному масиві, що складається з двох півпросторів (їх перерізи площиною  $xOy$  позначимо  $S_k$ , модулі зсуву  $G_k$  ( $k = 1, 2$ ) під час емісії гвинтових дислокацій з поверхні міжфазного чужорідного стрічкового включення завтовшки  $2h(x)$  з модулем зсуву  $G_B$ , серединна лінія профілю якого належить відрітку  $x \in [-a; a] \sim L'$ .

Відзначимо, що внаслідок закону збереження вектора Бюргера під час викиду межею включення у навколишнє середовище одної дислокації одночасно виникає ще одна додаткова дислокація протилежного знаку з ядром у точці емісії  $x_0$  на межі фаз. Через це слід відрізати бік включення, з якої емітується дислокація. Тому вважатимемо для загальності (рис. 27.1), що у точки  $z_{*2}, z_{*1}$  верхньої та нижньої півплощин (півпросторів)  $S_2, S_1$  відповідно випущені дислокації  $b_2, b_1$  (задача 1), а у точці  $x_0$  на верхньому і нижньому берегах неоднорідності існують дислокації інтенсивності  $-b_2, -b_1$  (задача 2).

Розв'язок задачі 1 (у цьому параграфі позначимо його символом "0" над відповідними величинами) містить п. 21.1). Тому тут обмежимося обговоренням розв'язку задачі 2 (відзначимо його тильдою "~") про міжфазні дислокації.

### Спосіб 1

Перший підхід до розв'язування задачі 2 про міжфазні дислокації можна отримати граничним переходом у розв'язку задачі 1 при  $z_{*k} \rightarrow x_0$  ( $k = 1, 2$ ) та заміною  $b_k$  на  $-b_k$ . У випадку тріщини або абсолютно жорсткої плівки (АЖП) в однорідному середовищі вздовж відрізка  $[-a; a]$  з формул (21.2)–(21.4) випливає

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\pm}(z) &= G \left[ \frac{b_1 + b_2}{X(z)} + \frac{1}{z - x_0} \left( \frac{(b_2 - b_1)X_0(x_0)}{X_0(z)} \pm (b_1 + b_2) \right) \right], \\ \tilde{Q}(x) &= \frac{\tilde{G}(x)X_0(x)}{\sqrt{a}}, \quad \tilde{G}(x) = \frac{G}{X_0(x)} \left[ -i(b_1 + b_2) + (b_1 - b_2) \frac{X_0(x_0)}{x_0 - x} \right], \\ \tilde{\sigma}_{yz}^0(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}^0(z) &= -\frac{G(b_1 + b_2)}{2\pi(z - x_0)}, \quad X_0(x) = \sqrt{a^2 - z^2}, \quad X(x) = \sqrt{z^2 - a^2}, \end{aligned} \quad (27.1)$$

де верхній знак відповідає правому, нижній – лівому краю дефекту.

Тоді стосовно тріщини в однорідному середовищі уздовж відрізка  $[-a; a]$  буде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3(x) = 0; \quad \tilde{f}_6(x) &= -\frac{b_1 + b_2}{\pi X_0(z)}, \quad \tilde{t}_3(z) = 0; \quad \tilde{t}_6(z) = \frac{b_1 + b_2}{\pi} \left[ \frac{1}{X(z)} - \frac{1}{z - x_0} \right], \\ \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) &= -\frac{G(b_1 + b_2)}{2\pi X(z)}, \quad \tilde{K}_{3,1} = \mp \frac{G(b_1 + b_2)}{2\sqrt{\pi a}}, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0; \end{aligned} \quad (27.2)$$

для абсолютно жорсткої плівки –

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3(x) &= \frac{G(b_1 - b_2)X_0(x_0)}{\pi X_0(x)(x_0 - x)}, \quad \tilde{t}_3(z) = \frac{iG(b_2 - b_1)X_0(x_0)}{\pi X_0(z)(z - x_0)}, \\ \tilde{f}_6(x) = 0, \quad \tilde{t}_6(z) = 0, \quad \tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} &= \mp \frac{G(b_1 - b_2)X_0(x_0)}{2\sqrt{\pi a}(x_0 \mp a)}, \\ \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) &= -\frac{G}{2\pi(z - x_0)} \left[ \frac{(b_2 - b_1)X_0(x_0)}{X_0(z)} + b_1 + b_2 \right]. \end{aligned} \quad (27.3)$$

Для півнескінченних дефектів з використанням граничних переходів

$$\lim_{\xi_{*k}^i \rightarrow \pm 0} \sqrt{\xi_{*k}^i} = \pm \sqrt{\xi_0}, \quad \lim_{\xi_{*k}^i \rightarrow \pm 0} \sqrt{\xi_{*k}^i} = \mp \sqrt{\xi_0}, \quad \lim_{\xi_{*k}^i \rightarrow \pm 0} \xi_{*k}^i = \xi_0,$$

$$\xi = \xi^r + i\xi^i, \quad \xi_{*k} = \xi_{*k}^r + i\xi_{*k}^i, \quad \sqrt{\xi_0} = i\sqrt{|\xi_0|} \quad \text{при } \xi_0 < 0$$

отримуємо

$$\tilde{F}^\pm(z) = \overline{\tilde{F}}^\pm(z) = \pm \frac{G}{\sqrt{\xi}} \left[ \frac{b_2}{\sqrt{\xi} \mp \sqrt{\xi_0}} + \frac{b_1}{\sqrt{\xi} \pm \sqrt{\xi_0}} \right], \quad (27.4)$$

$$\tilde{Q}(z) = -\frac{iG(b_1 - b_2)\sqrt{2\xi_0}}{\xi_0 - \xi}, \quad \tilde{G}(z) = \frac{i\tilde{Q}(z)}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi_0 = x_0 - a, \quad a \rightarrow \infty.$$

Тому для півнескінченної тріщини

$$\tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{yz}(\xi) + i\tilde{\sigma}_{xz}(\xi) = 0; \quad (27.5)$$

для півнескінченної абсолютно жорсткої плівки –

$$\tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \frac{G(b_1 - b_2)}{\pi\sqrt{-2\xi_0}} \left( \sqrt{-\xi_0} = \sqrt{|\xi_0|} \right), \quad (27.6)$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}(\xi) + i\tilde{\sigma}_{xz}(\xi) = -\frac{G}{2\pi\sqrt{\xi}} \left[ \frac{b_1}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_0}} + \frac{b_2}{\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi_0}} \right].$$

Нагадаємо, що у математичному плані дія зосередженої сили  $Q_k$  еквівалентна дії гвинтової дислокації інтенсивності  $b_k = -iQ_k / G_k$ . Тому неважко записати розв'язок відповідної задачі про вплив на тіло двох зосереджених сил, зокрема, й прикладених до верхнього та нижнього берегів включення.

З формули (21.2), (21.3) для випадку тріщини скінченної ширини  $[-a; a]$  маємо

$$\tilde{f}_3(x) = 0; \quad \tilde{f}_6(x) = i \frac{Q_1 + Q_2}{\pi G X_0(z)}, \quad \tilde{t}_3(z) = 0;$$

$$\tilde{t}_6(z) = -i \frac{Q_1 + Q_2}{\pi G} \left[ \frac{1}{X(z)} - \frac{1}{z - x_0} \right], \quad \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) = \frac{i(Q_1 + Q_2)}{2\pi X(z)}, \quad (27.7)$$

$$\tilde{K}_{3,1} = \frac{\pm \operatorname{Im} Q(\pm a)}{2\pi} = \pm \frac{(Q_1 - Q_2)X_0(x_0)}{2\sqrt{\pi a}(x_0 \mp a)}, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0,$$

а для абсолютно жорсткої плівки уздовж  $[-a; a]$

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{-i(Q_1 - Q_2)X_0(x_0)}{\pi X_0(x)(x_0 - x)}, \quad \tilde{t}_3(z) = \frac{(Q_2 - Q_1)X_0(x_0)}{\pi X_0(z)(z - x_0)},$$

$$\tilde{f}_6(x) = 0, \quad \tilde{t}_6(z) = 0, \quad \tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \frac{\mp \operatorname{Re} Q(\pm a)}{2\sqrt{\pi}} = \mp \frac{Q_1 - Q_2}{2\sqrt{\pi a}}, \quad (27.8)$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) = \frac{i}{2\pi(z - x_0)} \left[ \frac{(Q_2 - Q_1)X_0(x_0)}{X_0(z)} + Q_1 + Q_2 \right].$$

Остаточним розв'язком поставленої задачі про емісію дислокацій є сума розв'язків першої і другої задач

$$\sigma_{xz}^{em} = \sigma_{xz} + \tilde{\sigma}_{xz}, \quad \sigma_{yz}^{em} = \sigma_{yz} + \tilde{\sigma}_{yz}$$

та аналогічні вирази для інших величин.

## Спосіб 2

Другий спосіб розв'язування задачі 2 полягає у зміні математичної моделі включення. Умову однаковості переміщень  $w_k = w_B^k$  ( $w'_k = w_B'^k$ ) на поверхні контакту прошарку з матрицею (у третій умові ідеального механічного контакту п. 15.1) слід замінити залежністю

$$w'_k = w_B'^k \pm b_k \delta(x - x_0) \quad (k = 1, 2), \quad (27.9)$$

де верхній знак відповідає значенню  $k=2$ , а нижній –  $k=1$ . Тоді друге з рівнянь (15.1) переписеться у вигляді

$$\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- = G_B \left[ \frac{w_B^2 - w_B^1}{h} + \frac{\sigma_{yz}^0(x+ih)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz}^0(x-ih)}{G_1} \right], \quad (27.10)$$

де на основі (27.9)

$$w_B^2 - w_B^1 = w^+ - w^- - (b_1 + b_2)U^*(x - x_0), \quad U^*(x - x_0) = \int_{-a}^x \delta(t - x_0) dt \quad (27.11)$$

і, отже,

$$\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- = G_B \left[ \frac{w^+ - w^-}{h} + \frac{\sigma_{yz}^0(x+ih)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz}^0(x-ih)}{G_1} \right] - G_B \frac{b_1 + b_2}{h(x)} U^*(x - x_0). \quad (27.12)$$

Тут відповідно до (13.25)

$$w^+ - w^- = \int_{-a}^x \left( \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} - \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} \right) dt + w_-^* \quad (a \sim a_0^-). \quad (27.13)$$

Враховуючи умови контакту (27.9), формули (15.8) та наближену залежність

$$\sigma_{yzB}^c \approx \frac{1}{2} [\sigma_{yz}^+(x) + \sigma_{yz}^-(x)] = \frac{1}{2} G_B \frac{\partial}{\partial x} (w_{B2} + w_{B1}),$$

маємо

$$G_B \frac{\partial}{\partial x} (w^+ + w^-) = 2\sigma_{xz}^c(a_0^-) - \frac{1}{h(x)} \int_{a_0^-}^x (\sigma_{yz}^+ - \sigma_{yz}^-) dt + G_B (b_2 - b_1) \delta(x - x_0). \quad (27.14)$$

Співвідношення (27.12)–(27.14) формують "основну модель" міжфазного включення, а якщо в (27.12) знехтувати підкресленими членами, то це буде відповідна їй "плівкова модель".

Оскільки у конкретному випадку одного (уздовж відрізка  $[-a; a]$ ) включення

$\int_{-a}^a (w_B^+ - w_B^-) dt = 0$ , то згідно з виразом (27.11) для переміщень в матриці повинна виконуватися умова

$$\int_{-a}^a (w^+ - w^-) dt = b_2 + b_1. \quad (27.15)$$

В окремому випадку тріщини ( $G_B = 0$ ) основна й плівкова моделі приводять до класичних умов  $\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^- = 0$ ,  $\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^- = 0$  з додатковою умовою (27.15); для жорсткого включення ( $G_B = \infty$ ) плівкова модель дає крайову умову  $w^+ = b_2 \delta(x - x_0)$ ,  $w^- = -b_1 \delta(x - x_0)$ .



### Інтегральні рівняння

Інтегральні рівняння задачі про стрічкове включення уздовж  $L' = [-a; a]$  з міжфазними дислокаціями і зовнішнім навантаженням довільного типу мають вигляд (20.28) при заміні функцій  $F_r(x)$  ( $r=3, 6$ ) на  $\tilde{F}_r(x)$ , де

$$\begin{aligned}\tilde{F}_3(x) &= F_3(x) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2)(b_2 - b_1)\delta(x - x_0), \\ \tilde{F}_6(x) &= F_6(x) + \frac{G_B(b_2 + b_1)}{2h(x)c}U(x - x_0).\end{aligned}\quad (27.16)$$

Додаткові умови (20.24) згідно з (27.15) трансформуються до залежностей

$$\int_{-a}^a f_3(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^a f_6(t) dt = -(b_1 + b_2). \quad (27.17)$$

Розглянемо граничні випадки пружних властивостей стрічки в однорідній матриці за відсутності зовнішнього навантаження ( $\sigma_{yz}^0(z) = \sigma_{xz}^0(z) = 0$ ). Інтегральні рівняння щілини тоді набувають вигляду

$$\tilde{f}_3(x) = 0, \quad \tilde{t}_6^0(x) = 0 \quad (|x| \leq a). \quad (27.18)$$

Звідси  $\tilde{f}_6(x) = \alpha/X_0(x)$ ; стала  $\alpha$ , що визначається умовою (27.17), дорівнює  $\alpha = -(b_1 + b_2)/\pi$ .

Таким чином, для розрізу

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{3,1} &= \mp \frac{G(b_1 + b_2)}{2\sqrt{\pi a}}, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0, \quad \tilde{t}_3^0(x) = 0, \quad \tilde{t}_6^0(x) = \frac{b_1 + b_2}{\pi X(z)}, \\ \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) &= -\frac{G(b_1 + b_2)}{2\pi X(z)}.\end{aligned}\quad (27.19)$$

Для абсолютно жорсткої плівки ( $G_B = \infty$ ) за плівковою моделлю – (27.3):

$$\tilde{f}_6(x) = -(b_1 + b_2)\delta(x - x_0), \quad \tilde{t}_3^0(x) = G(b_2 - b_1)\delta(x - x_0) \quad (|x| \leq a). \quad (27.20)$$

Звідси випливає

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{G(b_1 - b_2)X_0(x_0)}{\pi X_0(x)(x_0 - x)} + \frac{\alpha}{X(x)}, \quad (27.21)$$

причому на основі умови (27.17)  $\alpha = 0$ . Отже, для абсолютно жорсткої плівки

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{3,1} &= 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \mp \frac{G(b_1 - b_2)X_0(x_0)}{2\sqrt{\pi a}(x_0 \mp a)}, \quad \tilde{t}_3^0(z) = \frac{iG(b_2 - b_1)X_0(x_0)}{\pi X_0(z)(z - x_0)}, \\ \tilde{t}_6^0(z) &= -\frac{b_1 + b_2}{\pi(x_0 - z)}, \quad \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) = -\frac{G}{2\pi(z - x_0)} \left[ \frac{(b_2 - b_1)X_0(x_0)}{X_0(z)} + b_1 + b_2 \right].\end{aligned}\quad (27.22)$$

Порівняння виразів (27.2) і (27.3) з (27.21) та (27.22) відповідно свідчить, що обидва методи дають однакові значення для УКІН і поля власних напружень, хоча функції стрибка та їхні інтеграли типу Коші різняться між собою. Це обумовлене тим, що перший підхід вимагає врахування однорідного розв'язку  $\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z)$  від зовнішнього навантаження, що складається з прямуючих до межі фаз дислокацій, а другий обходиться без нього.

Напруження у включенні обчислюють за формулами (20.6), (15.8)

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x) = \mp p_k f_3(x) - ct_6^0(x) + \sigma_{yz}^{0\pm}(x), \quad \sigma_{yz}^c(x) = \frac{1}{2}(\sigma_{yz}^+ + \sigma_{yz}^-),$$

$$\sigma_{xz}^c(x) = \sigma_{xz}^c(-a) + \frac{1}{2h(x)} \int_{-a}^x f_3(x) dt.$$
(27.23)

Зокрема, для абсолютно жорсткої плівки в однорідному середовищі

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x) = \frac{G}{2\pi(x_0 - x)} \left[ b_1 + b_2 \pm (b_2 - b_1) \frac{X_0(x_0)}{X_0(x)} \right],$$

$$\sigma_{xz}^c(x) = \sigma_{xz}^c(-a) - \frac{G(b_2 - b_1)X_0(x_0)}{2\pi h(x)} \int_{-a}^x \frac{dt}{X(t)(x_0 - t)} dt.$$
(27.24)

### Узагальнення

Отримані у цьому параграфі результати можна використати також для формулювання та розв'язування низки інших задач механіки деформівного твердого тіла. По-перше, якщо на берегах включення є область гладкого проковзування (розтріскування)  $L_0^{\pm} = [p^{\pm}; q^{\pm}]$  (знак вказує на верхній "+" та нижній "-" береги стрічки), то за умовою  $\sigma_{yz}^{\pm} = 0$  на  $L_0^{\pm}$  можна обчислити невідомі густини  $b_1(x)$  і  $b_2(x)$  розподілу уздовж  $L_0^{\pm}$  дислокацій, які реалізують таке розтріскування.

Подібним чином розв'язується задача проковзування уздовж  $L_0^{\pm}$  з тертям чи пластичним зсувом матриці, коли можна вважати, що  $\sigma_{yz}^{\pm} = \tau_y$  на  $L_0^{\pm}$ . У всіх цих випадках рівняння (20.28) з правими частинами

$$F_3(x) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2)[b_2(x) - b_1(x)], \quad F_6(x) + \frac{G_B}{2c \cdot h(x)} \int_{-a}^x [b_1(x) + b_2(x)] dt$$

$$(b_1(x) = b_2(x) = 0 \text{ при } x \notin L_0^{\pm})$$
(27.25)

слід доповнити рівняннями

$$\mp p_k f_3(x) - ct_6^0(x) + \sigma_{yz}^{0\pm}(x) = \tau_y \quad (x \in L_0^{\pm})$$
(27.26)

для визначення функцій  $b_k(x)$  ( $k=1, 2$ ), де  $\tau_y = 0$  за розтріскування, а під час тертя під  $\tau_y \neq 0$  розуміють напруження тертя ковзання.

За відомого натягу включення функції  $b_k(x)$  ( $k=1, 2$ ), які моделюють величину натягу, вважають відомими і тому досить розв'язувати рівняння (20.28) з правими частинами (27.25).

### Приклади

Припустимо, що з верхнього берега стрічки відбулася емісія  $N$  дислокацій, кожна зі складовою вектора Бюргерса  $b$ , які відійшли від дефекту досить далеко, а ті, що залишилися на межі фаз рівномірно розподілені. Вважатимемо  $N$  настільки великим, що функцію  $b_2(x)$  можна вважати неперервною: тут  $b_2(x) = \frac{Nb}{2a}$ ,  $b_1(x) = 0$ . У цьому випадку для тріщини уздовж  $[-a; a]$  в однорідному середовищі

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{3,1} &= -\frac{NbG}{2\sqrt{\pi a}}, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0, \quad \tilde{t}_3^0(z) = 0, \quad \tilde{t}_6^0(z) = \frac{Nb}{\pi X(z)}, \quad \tilde{t}_3(x) = 0, \\ \tilde{f}_6(x) &= -\frac{Nb}{\pi X_0(x)}, \quad \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) = -\frac{NbG}{2\pi X(z)}. \end{aligned} \quad (27.27)$$

Ці вирази не залежать від способу розподілу дислокацій уздовж поверхні тріщини, а тільки від їхньої загальної потужності  $Nb$ .

Для абсолютно жорсткої плівки за рівномірного розподілу емітувальних центрів з урахуванням формул (2.2.5.6) [834]  $\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a \pm z}{a \mp z}} dz = a$  та (4.4) (див. теж [1423])

$$\begin{aligned} \tilde{f}_6(x) &= -\frac{Nb}{2a}, \quad \tilde{f}_3(x) = -\frac{NbGx}{2aX_0(x)}, \quad \tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \mp \frac{NbG}{4\sqrt{\pi a}}, \\ \tilde{t}_6^0(z) &= -\frac{Nb}{2\pi a} \int_{-a}^a \frac{dt}{t-z} = -\frac{Nb}{2\pi a} \ln \frac{z-a}{z+a}, \quad \tilde{t}_3^0(z) = \frac{NbG}{2a} \left[ \frac{z-X(z)}{aX(z)} \right], \\ \tilde{\sigma}_{yz}(z) + i\tilde{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{1}{2} \left[ i\tilde{t}_3^0(z) - G\tilde{t}_6^0(z) \right]. \end{aligned} \quad (27.28)$$

Тепер вважатимемо, що міжфазні дислокації розподілені неперервно з густиною

$$b_2(x_0) = \frac{Nb}{\pi X_0(x_0)} = \frac{-Nb}{i\pi X(x_0)},$$

властивою вільному розподілу стінки дислокацій між двома фіксованими точками. У цьому, як і в інших типах розподілів, для тріщини також справджуються формули (27.27), а для абсолютно жорсткої плівки –

$$\begin{aligned} \tilde{f}_6(x) &= -\frac{Nb}{\pi X_0(x)}, \quad \tilde{t}_6^0(z) = -\frac{Nb}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{dx_0}{X_0(x_0)(x_0-z)} = -\frac{Nbi}{\pi X_0(z)} = \frac{Nb}{\pi X(z)}, \\ \tilde{t}_3^0(z) &= \frac{iNbG}{\pi^2 X_0(z)} \int_{-a}^a \frac{X_0(x_0) dx_0}{X_0(x_0)(z-x_0)} = \frac{iNbG}{\pi^2 X_0(z)} \int_{-a}^a \frac{dx}{z-x} = \frac{iNbG}{\pi^2 X_0(z)} \ln \frac{z-a}{z+a}. \end{aligned} \quad (27.29)$$

## 27.2. Анізотропний масив

Подібно до того, як це було зроблено у випадку ізотропного матеріалу, граничним переходом у формулах (23.56) для анізотропного матеріалу при  $z_{*k} \rightarrow x_0$  ( $k=1, 2$ ) з урахуванням того, що значенню  $k=1$  відповідає нижня півплощина, а  $k=2$  – верхня, отримаємо

$$\tilde{Q}(z^1) = \frac{f_3^*}{\sqrt{a}} \left[ 1 \mp \frac{X(x_0)}{x_0 - z^1} \right] = \frac{f_3^*}{\sqrt{a}} \left[ 1 \mp i \frac{X_0(x_0)}{x_0 - z^1} \right], \quad f_3^* = Q + i \frac{b}{|r^1|}, \quad r^1 = i|r^1|.$$

Подальшою заміною  $b \sim b_k$  на  $b \sim -b_k$  отримаємо для дислокацій з обох боків поверхні включення

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(z^1) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ b_1 + b_2 + i(b_1 - b_2) \frac{X_0(x_0)}{x_0 - z^1} \right], \\ \tilde{F}^\pm(z) &= \frac{i}{r^1} \left[ \frac{b_1 + b_2}{X(z^1)} + \frac{1}{z^1 - x_0} \left( \frac{(b_2 - b_1) X_0(x_0)}{X_0(z^1)} \pm (b_1 + b_2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (27.30)$$

Таким чином, для тунельної щілини уздовж відрізка  $[-a; a]$  анізотропного середовища

$$\tilde{K}_{3,1} = \pm \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} Q(\pm a) = \mp \frac{b_1 + b_2}{2\sqrt{\pi a} |r^1|}, \quad \tilde{K}_{3,2} = \mp \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} Q(\pm a) = 0, \quad (27.31)$$

$$\tilde{t}_6^0(z^1) = \frac{b_1 + b_2}{\pi} \left[ \frac{1}{X(z^1)} - \frac{1}{z^1 - x_0} \right], \quad f_3^* P_{01}(0, z) = \frac{b_1 + b_2}{r^1 (x_0 - z^1)},$$

а для відповідної абсолютно жорсткої плівки згідно з тими ж формулами –

$$\tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \mp \frac{(b_1 - b_2) X_0(x_0)}{2\sqrt{\pi a} |r^1| (x_0 \mp a)}, \quad \tilde{t}_3^0(z^1) = \frac{i(b_2 - b_1) X_0(x_0)}{\pi |r^1| (z^1 - x_0) X_0(z^1)}. \quad (27.32)$$

Якщо до берегів дефекту прикладені сили  $Q_1$  і  $Q_2$ , то

$$\tilde{Q}(z^1) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ Q_1 + Q_2 + i(Q_1 - Q_2) \frac{X_0(x_0)}{x_0 - z^1} \right],$$

$$\tilde{F}^\pm(z) = i \left[ \frac{Q_1 + Q_2}{X(z^1)} + \frac{1}{z^1 - x_0} \left( \frac{(Q_2 - Q_1) X_0(x_0)}{X_0(z^1)} \pm (Q_1 + Q_2) \right) \right]$$

і у випадку щілини уздовж  $[-a; a]$  –

$$\tilde{K}_{3,1} = \mp \frac{(Q_1 - Q_2) X_0(x_0)}{2\sqrt{\pi a} (x_0 \mp a)}, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0, \quad (27.33)$$

а у випадку жорсткої плівки –

$$\tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \mp \frac{Q_1 + Q_2}{2\sqrt{\pi a}}. \quad (27.34)$$

Тобто, УКІН на абсолютно жорсткій плівці не залежать ні від точки прикладання сил, ні від механічних властивостей матриці, у тому числі, й від міри її анізотропії.

У випадку півбезмежного дефекту

$$\tilde{Q}(z) \sim \frac{(b_2 - b_1) \sqrt{2|\xi_0|}}{(\xi_0 - \xi) |r^1|}, \quad F^\pm(z) = \tilde{F}^\pm(z) \sim \pm \frac{1}{|r^1| \sqrt{\xi}} \left[ \frac{b_2}{\sqrt{\xi} \mp \sqrt{\xi_0}} + \frac{b_1}{\sqrt{\xi} \pm \sqrt{\xi_0}} \right].$$

Зокрема, для розрізу  $(-\infty; 0]$  уздовж від'ємної півосі

$$\tilde{t}_6^0(z^1) \sim -\frac{b_1 + b_2}{\pi(\xi - \xi_0)}, \quad \tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0, \quad (27.35)$$

а для подібної абсолютно жорсткої плівки –

$$\tilde{t}_6^0(z^1) \sim \frac{(b_2 - b_1) \sqrt{\xi_0}}{(\xi - \xi_0) \sqrt{\xi}}, \quad \tilde{K}_{3,1} = 0, \quad \tilde{K}_{3,2} = \pm \frac{b_2 - b_1}{\pi |r^1| \sqrt{2|\xi_0|}} \quad \left( \sqrt{\xi_0} = i\sqrt{|\xi_0|} \right). \quad (27.36)$$

За дії зосереджених сил скінченної величини  $Q_1, Q_2$  на нижній та верхній береги півбезмежного дефекту функція  $\tilde{Q}(z) \sim \frac{(Q_1 - Q_2) \sqrt{2\xi_0}}{\xi_0 - \xi}$ , що дає для розрізу

$$\tilde{K}_{3,1} = \mp \frac{Q_1 - Q_2}{\pi \sqrt{2|\xi_0|}}, \quad \tilde{K}_{3,2} = 0, \quad (27.37)$$

а для абсолютно жорсткої плівки –

$$\tilde{K}_{3,1} = 0, \tilde{K}_{3,2} = 0. \quad (27.38)$$

У випадку переходу в отриманих формулах до випадку ізотропного матеріалу з урахуванням того, що  $r^1 = i/G$ , отримуємо відповідні залежності п. 27.1.

## § 28. Нелінійна деформація тіла зі стрічковими включеннями

Розглядається [119] антиплоска деформація безмежного масиву з неогуківського матеріалу (нелінійно пружного матеріалу, що має пружний потенціал) зі стрічковим включенням малої товщини у площині  $y = 0$  (рис. 28.1). Для такого матеріалу координати  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  точок у деформованому і координати  $x, y, z$  відповідних точок у недеформованому стані зв'язані згідно з теорією узагальненого нелінійного антиплоского деформування співвідношеннями [251]

$$\tilde{x} = \lambda x, \tilde{y} = \lambda y, \tilde{z} = \lambda^{-2} z + w(x, y), \quad (28.1)$$

де  $\lambda$  – безрозмірний параметр, що характеризує додаткову однорідну деформацію розтягу-стиску, яка зберігає об'єм. Розглядається переріз  $z = 0$  і включення змодельовано стрибком напруження та похідної від переміщення (20.2) на його серединній лінії  $L'$ . Обмежимося навантажуванням однорідним полем напружень на нескінченності  $\sigma_{yz}^\infty = \tau, \sigma_{xz}^\infty = \tau_1$ .

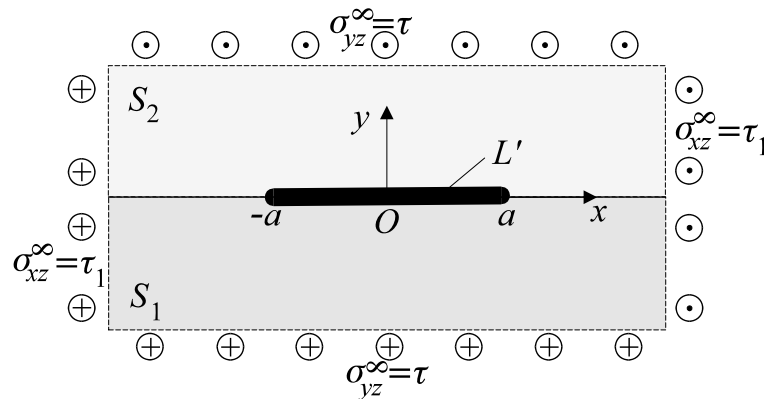


Рис. 28.1. Схема задачі

У праці [1095] розглядалася подібна задача для тріщини у еластомірі і були отримані вирази для поля напружень та переміщень через деяку функцію  $\Psi(z)$ . Якщо перейти до нової функції  $\omega(z) = i\mu_*\Psi(z)$ , то за відсутності масових сил можна вважати

$$\mathbf{t}(z) \equiv \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) = \omega'(z), \quad \frac{\partial \omega(z)}{\partial x} = \frac{\text{Im} \omega'(z)}{\mu_*}, \quad \mu_* = \lambda\mu, \quad \omega'(z) = \tau + i\tau_1 + \omega'_0(z); \quad (28.2)$$

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{\mu^2 \lambda^{-2} - \mu^2 + \omega'(z) \overline{\omega'(z)}}{\mu \lambda^2}. \quad (28.3)$$

Тут  $\omega'_0(z)$  – аналітична у комплексній площині  $z = x + iy$ . Співвідношення (28.2) еквівалентні залежностям (20.3), а тому аналогічно до того, як це зроблено у п. 20.2,

$$\omega'_0(z) = \frac{1}{2} i t_3^*(z), \quad t_3^*(z) = t_3(z) + i\mu_* f_6(t). \quad (28.4)$$

Граничні значення відповідних функцій на лінії  $L$  (осі  $x$ )

$$\mathbf{T}^{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2} f_3^*(x) + \frac{i}{2} t_3^*(x) + \tau + i\tau_1, \quad \mu_* \frac{\partial w^{\pm}(x)}{\partial x} = \mp \frac{1}{2} \mu_* f_6(x) + \frac{1}{2} t_3(x) + \tau_1. \quad (28.5)$$

Підставляючи ці вирази в умови взаємодії (1.8) у загальному варіанті  $\Psi_j(\sigma_{yz}^{\pm}, w^{\pm}) = 0$  ( $j=1,2$ ), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка. Після розв'язування цієї системи рівнянь та обчислення на основі (28.2) функції  $\omega'_0(z)$ , напружень  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$  та переміщення  $w$ , за формулою (28.3) обчислюємо  $\sigma_{zz}$ . Конкретизуючи ці умови у формі (15.1), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь, яка у частковому випадку тріщини скінченної ширини (довжини)  $L' = [-a; a]$  породжує вирази роботи [1095]

$$f_3(x) = 0, \quad t_6(x) = \frac{2\tau}{\mu_*}, \quad f_6(x) = \frac{2\tau x}{\mu_* X_0(x)}, \quad \omega'_0(z) = \tau \left[ \frac{z}{X(z)} - 1 \right], \quad (28.6)$$

$$\mathbf{T}(z) = \omega'(z) = \frac{\tau z}{X(z)} + i\tau_1, \quad w(z) - c = \frac{\tau \operatorname{Im} X(z) + \tau_1 x}{\mu_*},$$

а для абсолютно жорсткої плівки –

$$f_6(x) = 0, \quad t_3(x) = -2\tau_1, \quad f_3(x) = -\frac{2\tau_1 x}{X_0(x)}, \quad \omega'_0(z) = i\tau_1 \left[ \frac{z}{X(z)} - 1 \right],$$

$$\mathbf{T}(z) = \omega'(z) = \tau + \frac{i\tau_1 z}{X(z)}, \quad w(z) - c = \frac{\tau y + \tau_1 \operatorname{Re} X(z)}{\mu_*}, \quad (28.7)$$

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{1}{\mu \lambda^2} \left( \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \mu^2 + \left[ \tau + \frac{i\tau_1 z}{X(z)} \right] \left[ \tau - \frac{i\tau_1 \bar{z}}{X(\bar{z})} \right] \right).$$

На відміну від лінійно пружного випадку для розглянутого нелінійного матеріалу так само, як і у випадку тріщини, нормальні напруження  $\sigma_{zz}$  мають в околі торця жорсткого прошарку особливість порядку  $r^{-1}$ .

Якщо у початку системи координат знаходиться зосереджена сила  $Q$  і ядро гвинтової дислокації  $b$ , то, вважаючи

$$\tau = \tau_1 = 0, \quad f_3^*(x) = f_3^* \delta(x), \quad f_3^* = Q + i\mu_* b,$$

отримаємо  $\omega'(z) = \omega'_0(z) = -if_3^*/(2\pi z)$ , а якщо вони розташовані у довільній точці  $z_*$ , то

$$\omega'(z) = \omega'_0(z) = \frac{if_3^*}{2\pi(z_* - z)}. \quad (28.8)$$

Цей вираз є **фундаментальним розв'язком**, за допомогою якого так само як у § 20 отримані результати легко узагальнюються на системи плоских та вигнутих включень, враховується дія у матриці сил, дислокацій, відповідних диполів тощо.

**Лінеаризовані рівняння нелінійної задачі поздовжнього зсуву** [265, 263] зводяться відповідно до аналогії О.М.Гузя між лінеаризованою та лінійною задачами поздовжнього зсуву ортотропного тіла до одержаних у § 24 співвідношень теорії анізотропних матеріалів, якщо у останніх зробити заміну

$$a_{45} = 0, \quad a_{55} \sim \frac{1}{\tilde{\kappa}_{1331}}, \quad a_{44} \sim \frac{1}{\tilde{\kappa}_{2332}}, \quad (28.9)$$

причому для потенціалу Трелоара високоеластичних матеріалів  $\tilde{\kappa}_{k33k} = 2c_{10}\lambda_k^2$ , для потенціалу Бартенєва – Хазановича

$$\tilde{\kappa}_{k33k} = 2\mu\lambda_k^2 / (\lambda_k + \lambda_3), \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \quad (k=1, 2).$$

### § 29. Міцність тіла зі стохастичним розподілом тонких дефектів

Досліджуючи міцність тіла зі стохастично розподіленими тонкими неоднорідностями [996, 997], за критеріальну функцію локального руйнування біля включення  $L' = [-a; a]$  з півтовщиною  $h(x)$  оберемо густину повної енергії деформації [84]

$$W = \frac{1}{2G} (\sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2), \quad (29.1)$$

а умовою руйнування вважатимемо досягнення її мінімальним за кутом  $\theta$  значенням  $W_{\min} = r\tilde{W}_{\min}$  (фактично мінімальним за кутом  $\theta$  значенням її несингулярної частини  $\tilde{W}_{\min}$ ) певного критичного значення

$$\tilde{W} \equiv \lim_{r \rightarrow 0} rW_{\min} = W_c. \quad (29.2)$$

З урахуванням асимптотичних виразів для напружень функції  $W$  та  $\tilde{W}$  набудуть вигляду

$$\begin{aligned} W &= \frac{A}{r} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( B \sin \frac{\theta}{2} + C \cos \frac{\theta}{2} \right) + E, \quad \tilde{W} = A, \quad A = \frac{1}{4\pi G} (K_{3,1}^2 + K_{3,2}^2), \\ E &= \frac{1}{8G} \left( [Gn_6 - 2\sigma_{yz}^0]^2 + [n_3 + 2\sigma_{xz}^0]^2 \right), \quad B = \frac{1}{2G} \left( K_{3,1} [n_3 + 2\sigma_{xz}^0] + K_{3,2} [Gn_6 - 2\sigma_{yz}^0] \right), \\ C &= \frac{1}{2G} \left( K_{3,2} [n_3 + 2\sigma_{xz}^0] - K_{3,1} [Gn_6 - 2\sigma_{yz}^0] \right). \end{aligned} \quad (29.3)$$

Для пружного включення еліптичного профілю з меншою піввіссю  $h_0$  в однорідному полі напружень на нескінченності  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$  вирази для УКІН дає формула (20.41). Зокрема, для тріщини ( $G_B = 0$ )

$$A = \frac{\tau^2}{2G}, \quad E = \frac{\tau_1^2}{2G}, \quad B = -\frac{\tau\tau_1\sqrt{\pi a}}{G}, \quad C = 0; \quad (29.4)$$

для абсолютно жорсткого включення (АЖВ –  $G_B = \infty$ ) –

$$A = \frac{\tau^2 h_0^2 + \tau_1^2 a^2}{4Ga}, \quad E = \frac{\tau^2 (1 + h_0/a)^2}{2G}, \quad B = \frac{\tau\tau_1\sqrt{2a}}{2G\sqrt{r}} \left( 1 + \frac{h_0}{a} \right), \quad C = -\frac{\tau^2 h_0}{G\sqrt{2ar}} \left( 1 + \frac{h_0}{a} \right). \quad (29.5)$$

Якщо абсолютно жорстке включення (АЖВ) вироджується при  $h_0 \rightarrow 0$  у абсолютно жорстку плівку, то

$$A = \frac{\tau_1^2 a}{4G}, \quad E = \frac{\tau^2}{2G}, \quad B = \frac{\tau\tau_1\sqrt{\pi a}}{2G\sqrt{r}}, \quad C = 0.$$

З огляду на апріорні вирази для сталих  $\sigma_{xz}^c(-a)$ ,  $w_-^*$  маємо  $K_{3,1} = \tau k_{3,1}$ ,  $K_{3,2} = \tau_1 k_{3,2}$ , де  $k_{3,1}$ ,  $k_{3,2}$  не залежать від величини зовнішнього навантаження. Тоді умова руйнування (29.2) у допущенні  $\tau = \eta\tau_1$  запишеться

$$\tau_1 = 2 \sqrt{\frac{\pi G W_c}{\eta^2 k_{3,1}^2 + k_{3,2}^2}} \equiv \varphi(a, \eta, h_0), \quad \tau = \eta\tau_1. \quad (29.6)$$

Значення параметрів  $\tau_1, \eta$ , що відповідають умові (29.6), визначають граничний стан. Зокрема, згідно з (29.4), (29.5)

$$\varphi(a, \eta, h_0) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{GW_c/a}}{|\eta|} & \text{(для тріщини),} \\ 2\sqrt{GW_c/(a + \eta^2 h_0^2/a)} & \text{(для АЖВ).} \end{cases} \quad (29.7)$$

Загалом геометричні розміри  $a, h_0$ , орієнтація та розташування включень є випадковими величинами, що змінюються у певних межах за деякими статистичними законами. Вважатимемо, що дефекти у матеріалі розподілені настільки рідко, що їхньою взаємодією можна знехтувати і припустимо їхні механічні властивості, орієнтацію та параметр  $h_0$  однаковими, густину розподілу величини  $a$ , що змінюється у межах від 0 до  $d$  – заданою функцією  $f(a)$ .

Функцію розподілу ймовірностей граничного навантаження для елемента тіла з неоднорідністю знаходимо за формулою розподілу ймовірностей функції від випадкової величини [150]

$$F_1(\tau_1) = \int_{\varphi(a, \eta, h_0) < \tau_1} f(a) da, \quad \tau_1^{\min} \leq \tau_1 \leq \tau_1^{\max}. \quad (29.8)$$

Крайні значення  $\tau_1^{\min}, \tau_1^{\max}$  визначаються з того, що за умови  $\tau_1 < \tau_1^{\min}$  маємо  $F_1(\tau_1) = 0$ ; при  $\tau_1 > \tau_1^{\max}$  –  $F_1(\tau_1) = 1$ . Інтегрування у (29.8) здійснюється по області  $A$  зміни параметра  $a$ , для якої  $\varphi(a, \eta, h_0) < \tau_1$ . Для знаходження  $A$  розв'яжемо цю нерівність стосовно  $a$ .

У випадку абсолютно жорсткого включення ця нерівність еквівалентна  $\tau_1^2 a^2 - 4GW_c a + \tau_1^2 \eta^2 h_0^2 > 0$ . Якщо дискримінант  $D \equiv 16G^2 W_c^2 - 4\tau_1^4 \eta^2 h_0^2 < 0$ , то нерівність виконується для довільного  $a \in A = (0; \infty)$ . Якщо ж  $D \geq 0$ , що еквівалентне умові

$$\tau_1 \leq \sqrt{\frac{2GW_c}{|\eta|h_0}} = \tau_1^{\max}, \quad (29.9)$$

то  $a \in A = (0; a^-) \cup (a^+; \infty)$ , де

$$a^\pm = \frac{4GW_c \pm \sqrt{D}}{2\tau_1^2}. \quad (29.10)$$

Тому  $\tau_1^{\min}$  визначають з умови  $a^- \leq d$ , що дає

$$\tau_1^{\min} = \sqrt{2GW_c/d}. \quad (29.11)$$

Дослідимо область інтегрування  $\varphi(a, \eta, h_0) < \tau_1$  у виразі (29.8) як функцію від  $a^+$  та  $d$ .

Умова  $a^+ \leq d$  еквівалентна співвідношенню

$$\tau_1 \geq 2 \sqrt{\frac{GdW_c}{d^2 + \eta^2 h_0^2}} \equiv \tau_1^*.$$

Тому для абсолютно жорсткого включення



$$F_1(\tau_1) = \begin{cases} \int_0^{a_1} f(a) da & \left( \text{якщо } \tau_1^{\min} \leq \tau_1 \leq \tau_1^* \right), \\ 0 & \\ \int_0^{a_1} f(a) da + \int_{a_2}^d f(a) da & \left( \text{якщо } \tau_1^* \leq \tau_1 \leq \tau_1^{\max} \right). \end{cases} \quad (29.12)$$

У випадку тріщини аналог (29.8) можна подати у вигляді

$$F_1(\tau_1) = \int_{2\sqrt{GW_c/a} < \tau} f(a) da, \quad \tau_1^{\min} \leq \tau_1 \leq \tau_1^{\max},$$

причому  $\tau_1^{\min} = 2\sqrt{GW_c/d}$ ,  $\tau_1^{\max} = \infty$ . Тому

$$F_1(\tau_1) = \int_{4GW_c\tau^{-2}} f(a) da, \quad 2\sqrt{GW_c/d} \leq \tau < \infty. \quad (29.13)$$

Конкретизувавши функцію  $f(a)$  у вигляді [150]

$$f(a) = \frac{r+1}{d} \left(1 - \frac{a}{d}\right)^r, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq a \leq d, \quad (29.14)$$

для абсолютно жорсткого включення згідно з (29.12) матимемо

$$F_1(\tau_1) = 1 - \left(1 - \frac{a^-}{d}\right)^{r+1} + \begin{cases} 0 & \left( \text{якщо } \tau_1^{\min} \leq \tau_1 \leq \tau_1^* \right), \\ \left(1 - \frac{a^+}{d}\right)^{r+1} & \left( \text{якщо } \tau_1^* \leq \tau_1 \leq \tau_1^{\max} \right); \end{cases} \quad (29.15)$$

для тріщини згідно з (29.13) –

$$F_1(\tau_1) = \left(1 - \frac{4GW_c}{\tau^2 d}\right)^{r+1}, \quad 2\sqrt{\frac{GW_c}{d}} \leq \tau < \infty. \quad (29.16)$$

Якщо тіло містить  $n$  включень, то на основі гіпотези найслабшої ланки функція розподілу його граничного навантаження матиме вигляд [150]

$$F_n(\tau_1) = 1 - [1 - F_1(\tau_1)]^n. \quad (29.17)$$

Тоді для абсолютно жорсткого включення внаслідок (29.15)

$$F_n(\tau_1) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{a^-}{d}\right)^{n(r+1)} & \left( \text{якщо } \tau_1^{\min} \leq \tau_1 \leq \tau_1^* \right), \\ 1 - \left[ \left(1 - \frac{a^-}{d}\right)^{r+1} - \left(1 - \frac{a^+}{d}\right)^{r+1} \right]^n & \left( \text{якщо } \tau_1^* \leq \tau_1 \leq \tau_1^{\max} \right), \end{cases} \quad (29.18)$$

а для тріщини –

$$F_n(\tau_1) = 1 - \left(1 - \frac{4GW_c}{\tau^2 d}\right)^{n(r+1)}, \quad 2\sqrt{\frac{GW_c}{d}} \leq \tau < \infty. \quad (29.19)$$

Співвідношення (29.18), (29.19) дають можливість оцінити ймовірність руйнування ізотропного масиву з  $n$  рідко у ньому розсіяними дефектами типу тунельних розрізів чи абсолютно жорстких включень у випадку, коли функція густини розподілу ширини дефектів задана залежністю (29.14). Подібним способом будують відповідні залежності для тих випадків, коли стохастичний характер мають інші параметри дефектів. Врахування пружних властивостей тонких включень вимагає застосування числово-аналітичних методів.

## РОЗДІЛ VI

### ПЛОСКІ ЗАДАЧІ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛ ЗІ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

#### § 30. Інтегральні рівняння плоскої задачі для тонких включень в ізотропному середовищі

##### 30.1. Постановка плоскої задачі для тонких включень на прямій межі поділу матеріалів

Розглянемо пружну рівновагу трикомпонентної кусково-однорідної площини (рис. 30.1), що складається з двох півбезмежних областей  $S_k$  з пружними сталими  $E_k, \nu_k$  ( $k=1,2$ ) і системи  $N$  включень малої товщини  $2h(x)$  та скінченної довжини, серединні лінії яких  $L'_n = [a_n^-; a_n^+]$  лежать на осі абсцис  $L \sim x$  та утворюють лінію  $L' = \bigcup_{n=1}^N L'_n = \bigcup_{n=1}^N [a_n^-; a_n^+]$ . Пружні сталі матеріалу включень (якщо вони пружні) позначимо  $E_B, \nu_B$  (загалом, для кожного включення вони можуть бути іншими та мати різні реологічні властивості). За потреби можна розглядати й включення з іншими (не лінійно пружними) реологічними властивостями – все залежатиме від використаних пізніше умов взаємодії.

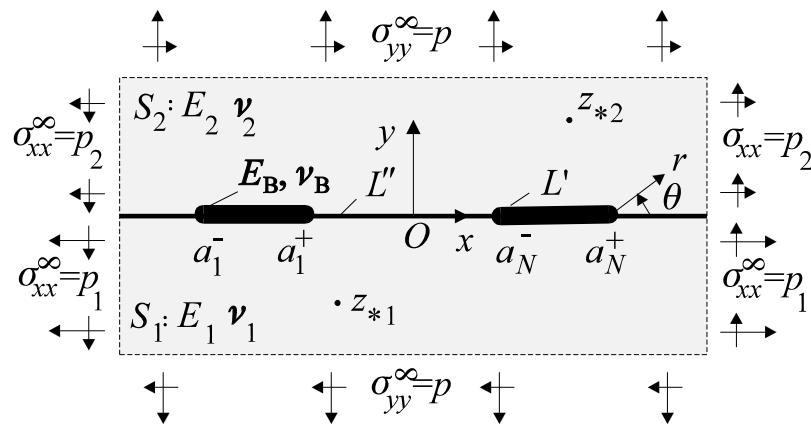


Рис. 30.1. Схема задачі

Уздовж верхньої та нижньої границь прошарків здійснюється ідеальний механічний контакт з ізотропними середовищами, які займають області  $S_k$ , а уздовж лінії  $L'' = L \setminus L'$  згадані області  $S_k$  контактують безпосередньо. Складена площина, яка займає всю комплексну площину  $z = x + iy$ , навантажена полем однорідних напружень на нескінченності ( $\sigma_{yy}^\infty = p, \sigma_{xy}^\infty = \tau, \sigma_{xx1}^\infty = p_1, \sigma_{xx2}^\infty = p_2$ ). У точках  $z_{*k} = x_{*k} + iy_{*k}$  прикладені зосереджені сили  $P_k = P_{xk} + iP_{yk}$ , зосереджені моменти  $M_k$  та інші силові чи дислокаційні чинники.

Внаслідок малої товщини прошарків області  $S_k$  з математичного погляду можна вважати півплощинами, а включення усунути, замінивши їх вплив на оточуючий матеріал деякими

стрибками векторів напружень та похідних переміщень на їхній серединній лінії  $L'$  (функціями стрибка)

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy1} - i\sigma_{xy1}) - (\sigma_{yy2} - i\sigma_{xy2}) &= f_1(x) - if_2(x) \equiv f_1^*(x), \\ (u'_{x1} + iu'_{y1}) - (u'_{x2} + iu'_{y2}) &= f_4(x) + if_5(x) \equiv f_4^*(x) \quad (x \in L). \end{aligned} \quad (30.1)$$

Причому, внаслідок ідеальності контакту півплощин уздовж  $L''$  функції стрибка дорівнюють нулю:

$$f_1^*(x) = f_4^*(x) = 0 \quad \text{при } x \in L''. \quad (30.2)$$

Тут і далі індексом "1" позначена нижня півплощина; індексом "2" – верхня; штрихом (якщо це окремо не застережено) – похідна за  $x$  або  $z$ ; індексами "+" та "-" – граничні значення функцій на верхньому і нижньому краях лінії  $L$ .

Розв'язування подібної задачі для однорідного середовища із застосуванням формули Сомільяно вже розглядалося у п. 2.3. Покажемо, що використання інших методів (теорії функцій комплексної змінної чи інтегральних перетворень) приводить до розв'язку задачі для кусково-однорідної матриці.

### 30.2. Пружні потенціали

Напруження і переміщення в кожній з розглянутих півплощин  $S_k$  можна записати за допомогою двох комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі [635, 112, 111]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yyk} - i\sigma_{xyk} &= \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi'_k(z)} + \overline{\Psi_k(z)}, \\ 2G_k(u'_{xk} + iu'_{yk}) &= \kappa_k \Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi'_k(z)} - \overline{\Psi_k(z)} \quad (z \in S_k; \quad k=1,2), \end{aligned} \quad (30.3)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \Gamma_k + \sum_{j=1,2} S_{jj}(z) + \Phi_{0k}(z), \quad \Psi_k(z) = \Gamma'_k + \sum_{j=1,2} [R_{jj}(z) + R_j(z)] + \Psi_{0k}(z), \\ \Gamma_k &= \frac{p+p_k}{4}, \quad \Gamma'_k = \frac{p-p_k}{2} + i\tau, \quad S_{kj}(z) = -\frac{\phi_k P_j}{z-z_{*j}}, \quad R_j(z) = \frac{-iM_j}{2\pi(z-z_{*j})^2}, \end{aligned} \quad (30.4)$$

$$R_{kj}(z) = \phi_k \left[ \frac{\kappa_k \overline{P_j}}{z-z_{*j}} - \frac{\overline{z_{*j} P_j}}{(z-z_{*j})^2} \right], \quad \phi_k = \frac{1}{2\pi(1+\kappa_k)}.$$

Комплексні потенціали  $\Phi_k(z)$ ,  $\Psi_k(z)$  визначені у відповідних півплощинах  $S_k$ ; функції  $\Phi_{0k}(z)$ ,  $\Psi_{0k}(z)$  – голоморфні у цих півплощинах зовні  $L'$  та прямують до нуля на нескінченності.

Сталі Мусхелішвілі  $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$  для плоскої деформації (ПД),  $\kappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$  – для узагальненого плоского напруженого стану (УПНС);  $G_k$  – модулі зсуву матеріалів півплощин  $S_k$ .

Доозначимо функцію  $\Phi_{01}(z)$  у верхній півплощині,  $\Phi_{02}(z)$  – у нижній у такий спосіб (аналітичне продовження через не завантажені ділянки) [635, 112, 111]:

$$\Phi_{0k}(z) = -\overline{\Phi_{0k}(z)} - z\overline{\Phi'_{0k}(z)} - \overline{\Psi_{0k}(z)} \quad (z \in S_l; \quad k, l=1,2; \quad l=3-k).$$

Звідси, замінюючи  $z$  на  $\bar{z}$ , отримуємо

$$\overline{\Psi_{0k}(z)} = -\overline{\Phi_{0k}(z)} - \Phi_{0k}(\bar{z}) - z\overline{\Phi'_{0k}(z)} \quad (z \in S_k; \quad k=1,2).$$

Підставляючи цей вираз у співвідношення (30.3) та враховуючи (30.4), маємо

$$\sigma_{yyk}(z) - i\sigma_{xyk}(z) = \Phi_{0k}(z) - \Phi_{0k}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{0k}(z)} + A_k(z),$$

$$2G_k[u'_{xk}(z) + u'_{yk}(z)] = \kappa_k \Phi_{0k}(z) + \Phi_{0k}(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{0k}(z)} + B_k(z) \quad (z \in S_k),$$
(30.5)

де

$$A_k(z) = A_k + A(z), \quad B_k(z) = B_k + B_k^*(z), \quad A_k = \Gamma_k + \overline{\Gamma_k} + \overline{\Gamma'_k} = p - i\tau,$$

$$B_k = \kappa_k \Gamma_k - \overline{\Gamma_k} - \overline{\Gamma'_k} \equiv \frac{\kappa_k - 3}{4} p + \frac{\kappa_k + 1}{4} p_k + i\tau, \quad B_k^* = (1 + \kappa_k) \sum_{m=1,2} S_{mm}(z) - A(z),$$
(30.6)

$$A(z) = \sum_{m=1,2} [S_{mm}(z) + \overline{S_{mm}(z)} + z\overline{S'_{mm}(z)} + \overline{R_{mm}(z)} + \overline{R_m(z)}].$$

Переходячи в (30.5) до границі при  $z \rightarrow x$  з урахуванням того, що  $\lim_{z \rightarrow x} [(z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}] = 0$ , а також того, що якщо  $z$  прямує до осі  $L$  з нижньої (відповідно верхньої) півплощини, то  $\bar{z}$  прямує до тієї ж точки на  $L$ , тільки рухаючись з верхньої (нижньої) півплощини, отримуємо

$$\sigma_{yyk}(x) - i\sigma_{xyk}(x) = \Phi_{0k}^{\pm}(x) - \Phi_{0k}^{\mp}(x) + A_k(x), \quad k = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad (x \in L);$$
(30.7)

$$2G_k(u'_{xk}(x) + iu'_{yk}(x)) = \kappa_k \Phi_{0k}^{\pm}(x) + \Phi_{0k}^{\mp}(x) + B_k(x), \quad k = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad (x \in L).$$
(30.8)

Вирази у фігурних дужках означають, що у формулах (30.7), (30.8) та подібних до них верхній знак відповідає значенню  $k = 2$ ; нижній –  $k = 1$ .

Умови (30.1), (30.2) з урахуванням (30.7), (30.8) і того, що  $A_1(x) = A_2(x)$ , записуємо у вигляді

$$[\Phi_{01}^+(x) + \Phi_{02}^+(x)] - [\Phi_{01}^-(x) + \Phi_{02}^-(x)] = -f_1^*(x) \quad (x \in L);$$
(30.9)

$$\left[ \frac{1}{2G_1} \Phi_{01}^+(x) - \frac{\kappa_2}{2G_2} \Phi_{02}^+(x) \right] - \left[ \frac{1}{2G_2} \Phi_{02}^-(x) - \frac{\kappa_1}{2G_1} \Phi_{01}^-(x) \right] = f_4^*(x) + \omega(x),$$
(30.10)

де функція

$$\omega(z) \equiv \frac{B_2(z)}{2G_2} - \frac{B_1(z)}{2G_1} = \frac{B_2}{2G_2} - \frac{B_1}{2G_1} + \frac{B_2^*(z)}{2G_2} - \frac{B_1^*(z)}{2G_1}.$$

У лівій частині рівності (30.10) стоїть функція, що прямує до нуля, якщо  $x \rightarrow \infty$ . Отже, таку властивість повинна мати також права частина, звідки з урахуванням того, що при  $x \rightarrow \infty$  функція стрибка  $f_4^*(x) \rightarrow 0$  (включення мають скінченну довжину) впливає, що  $\omega(x) \rightarrow 0$ , а отже,

$$G_1 B_2 = G_2 B_1. \quad (30.11)$$

Це свідчить про те, що пружні сталі матеріалів півплощин та зусилля на нескінченності повинні бути зв'язані умовою (30.11) і не можуть бути цілком довільними. Це традиційне для плоскої задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл обмеження – наслідок розгляду безмежного середовища та недопустимості викривлення лінії  $L$  поділу матеріалів на нескінченності.

Якщо записати цю умову у розгорнутому вигляді, розділивши дійсні та уявні частини

$$G_1 \left( \frac{\kappa_2 - 3}{4} p_2 + \frac{\kappa_2 + 1}{4} p \right) = G_2 \left( \frac{\kappa_1 - 3}{4} p_1 + \frac{\kappa_1 + 1}{4} p \right), \quad G_1 \tau = G_2 \tau,$$

то стане помітним, що при заданих на нескінченності дотичних напруженнях у кусково однорідному матеріалі ця умова виконуватися не може (рівень дотичних напружень у різних півплощинах не може бути різним з огляду на потребу виконання загальної умови рівноваги чи рівності контактних дотичних напружень на межі поділу). Однак якщо на межі поділу матеріалів існують два півбезмежні розрізи ( $a_1^- = -\infty$ ,  $a_N^+ = +\infty$ ), то внаслідок можливості взаємного зміщення берегів лінії  $L$  на нескінченності виконання цієї умови не є обов'язковим. У зв'язку з цим, оскільки на практиці мають справу лише з обмеженими тілами, тому навантажують практично довільним чином без огляду на форму області та пружні властивості матеріалів.

Умова (30.11) згідно з (30.8) означає, що на нескінченності  $u'_{x1} + iu'_{y1} = u'_{x2} + iu'_{y2}$ , тобто, деформації поздовжнього видовження поряд з лінією поділу обох півплощин на нескінченності однакові, що жорстка складова кута повертання лінії поділу на нескінченності дорівнює нулю і ця лінія поділу матеріалів після прикладання зусиль залишається на нескінченності прямою.

Отримати умову (30.11) можна також використовуючи припущення, що на нескінченності: 1. кут повертання на нескінченності дорівнює нулю

$$\omega_{xyk}^{\infty} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{xk}^{\infty}}{\partial y} - \frac{\partial u_{yk}^{\infty}}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial u_{xk}^{\infty}}{\partial y} = \frac{\partial u_{yk}^{\infty}}{\partial x};$$

2. переміщення на межі контакту однакові

$$u_{x1}^{\infty} + iu_{y1}^{\infty} = u_{x2}^{\infty} + iu_{y2}^{\infty} \rightarrow \frac{\partial u_{x1}^{\infty}}{\partial x} = \frac{\partial u_{x2}^{\infty}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{y1}^{\infty}}{\partial x} = \frac{\partial u_{y2}^{\infty}}{\partial x}.$$

Тоді із використанням закону Гука для дотичних напружень

$$\sigma_{xyk}^{\infty} = G_k \left( \frac{\partial u_{xk}^{\infty}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yk}^{\infty}}{\partial x} \right) = 2G_k \frac{\partial u_{yk}^{\infty}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_{yk}^{\infty}}{\partial x} = \frac{\sigma_{xyk}^{\infty}}{2G_k};$$

$$\frac{\partial u_{y1}^{\infty}}{\partial x} = \frac{\partial u_{y2}^{\infty}}{\partial x} \rightarrow \frac{\sigma_{xy1}^{\infty}}{2G_1} = \frac{\sigma_{xy2}^{\infty}}{2G_2} \rightarrow \frac{\tau}{2G_1} = \frac{\tau}{2G_2}.$$

Закон Гука для поздовжніх у напрямі межі поділу видовжень

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{xk}^{\infty}}{\partial x} &= \frac{1}{2G_k} \left[ \sigma_{xx}^{\infty} - \frac{\lambda_k}{2(\lambda_k + G_k)} (\sigma_{xx}^{\infty} + \sigma_{yy}^{\infty}) \right] = \\ &= \frac{1}{2G_k} \left[ \frac{\lambda_k + 2G_k}{2(\lambda_k + G_k)} p_k - \frac{\lambda_k}{2(\lambda_k + G_k)} p \right] = \frac{1}{2G_k} \left( \frac{\kappa_k + 1}{4} p_k + \frac{\kappa_k - 3}{4} p \right) \end{aligned}$$

та згадана вище рівність  $\frac{\partial u_{x1}^{\infty}}{\partial x} = \frac{\partial u_{x2}^{\infty}}{\partial x}$  дають другу залежність

$$\frac{1}{2G_1} \left( \frac{\kappa_2 + 1}{4} p_2 + \frac{\kappa_2 - 3}{4} p \right) = \frac{1}{2G_2} \left( \frac{\kappa_1 + 1}{4} p_1 + \frac{\kappa_1 - 3}{4} p \right).$$

Враховуючи (30.2), маємо

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{B_2^*(z)}{2G_2} - \frac{B_1^*(z)}{2G_1} = \\ &= \frac{G_{12}^-}{2G_1G_2} \left[ \sum_{m=1,2} \left[ \kappa^* S_{mm}(z) - \overline{S_{mm}(z)} - \overline{zS'_{mm}(z)} - \overline{R_{mm}(z)} - R_m(z) \right] \right], \end{aligned} \quad (30.12)$$

$$G_{lk}^\pm = G_l \pm G_k, \quad \kappa^* = (\kappa_1 G_2 - \kappa_2 G_1) / G_{21}^-.$$

Зазначимо, що за припущення про існування двох півбезмежних розрізів ( $a_1^- = -\infty$ ,  $a_N^+ = +\infty$ ), внаслідок можливості взаємного зміщення берегів лінії  $L$  на нескінченності умови (30.11), (30.12) враховувати не потрібно.

Розв'язок задачі спряження (30.9), що прямує до нуля на нескінченності, має вигляд

$$\Phi_{01}(z) + \Phi_{02}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1^*(t) dt}{t-z} \equiv \frac{i}{2} t_1^*(z) \quad (z \in S_k). \quad (30.13)$$

Розв'язок задачі спряження (30.10), що прямує до нуля на нескінченності, подається у формі

$$-\frac{i}{2} t_4^*(z) + \Omega(z) = \begin{cases} \frac{1}{2G_1} \Phi_{01}(z) - \frac{\kappa_2}{2G_2} \Phi_{02}(z) & (z \in S_2), \\ \frac{1}{2G_2} \Phi_{02}(z) - \frac{\kappa_1}{2G_1} \Phi_{01}(z) & (z \in S_1), \end{cases} \quad (30.14)$$

або більш стисло

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_l} \Phi_{0l}(z) - \frac{\kappa_k}{2G_k} \Phi_{0k}(z) &= -\frac{i}{2} t_4^*(z) + \Omega(z) \quad (z \in S_k; \quad k, l = 1, 2; \quad l = 3 - k), \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(t) dt}{t-z}. \end{aligned} \quad (30.15)$$

Тут і далі

$$\{t_r^*(z), t_r(z)\} = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\{f_r^*(t), f_r(t)\} dt}{t-z}.$$

Для обчислення функції  $\Omega(z)$  використаємо твердження [635, 112], що якщо  $f(z)$  голоморфна у області  $S_2$  функція, що зникає на нескінченності, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} f(z) & (z \in S_2), \\ 0 & (z \in S_1), \end{cases}$$

а якщо  $f(z)$  – голоморфна у  $S_1$  функція, що зникає на нескінченності, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} 0 & (z \in S_2), \\ -f(z) & (z \in S_1). \end{cases}$$

Стисліше ці два твердження можна сформулювати так: якщо  $f(z)$  – голоморфна у  $S_k$  функція, що зникає на нескінченності, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} 0 & (z \in S_l), \\ (-1)^k f(z) & (z \in S_k) \end{cases} \quad (k, l = 1, 2; \quad k \neq l). \quad (30.16)$$

Враховуючи те, що  $z_{*k} \in S_k$ ,  $\bar{z}_{*k} \in S_l$  ( $l \neq k$ ), на основі (30.16) матимемо, що оскільки  $S_{kk}(t)$ ,  $\overline{S_{kk}(t)}$ ,  $tS'_{kk}(t)$ ,  $\overline{tS'_{kk}(t)}$ ,  $R_{kk}(t)$ ,  $\overline{R_{kk}(t)}$ ,  $R_k(t)$  – граничні значення функцій

$$S_{kk}(z), S_{kk}^*(z) \equiv \overline{S_{kk}(\bar{z})} \equiv \frac{\phi_k \bar{P}_k}{z - \bar{z}_{*k}}, S_{kk}^{**}(z) \equiv \overline{zS'_{kk}(\bar{z})} \equiv \frac{z\phi_k \bar{P}_k}{(z - \bar{z}_{*k})^2},$$

$$R_{kk}^*(z) \equiv \overline{R_{kk}(\bar{z})} \equiv \phi_k \left[ \frac{\kappa_k P_k}{z - \bar{z}_{*k}} - \frac{z_{*k} \bar{P}_k}{(z - \bar{z}_{*k})^2} \right], R_k^*(z) \equiv \overline{R_k(\bar{z})} \equiv \frac{iM_k}{2\pi(z - \bar{z}_{*k})^2}$$

відповідно, які зникають на нескінченності та є голоморфними у  $S_l$  (перша функція) та у  $S_k$  (всі інші відзначені зірочками), то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{S_{kk}(t), \overline{S_{kk}(t)}, tS'_{kk}(t), \overline{tS'_{kk}(t)}, R_{kk}(t), \overline{R_{kk}(t)}, R_k(t)\}}{t-z} dt = \\ & = \begin{cases} \{0, (-1)^k S_{kk}^*(z), (-1)^k S_{kk}^{**}(z), (-1)^k R_{kk}^*(z), (-1)^k R_k^*(z)\} & (z \in S_k), \\ \{-(-1)^k S_{kk}(z), 0, 0, 0, 0\} & (z \in S_l). \end{cases} \end{aligned}$$

Тому

$$\Omega(z) = \frac{G_{\bar{k}l}}{2G_1 G_2} \Omega_k(z), \Omega_k(z) = \kappa^* S_{ll}(z) - \overline{S_{kk}(z)} - z \overline{S'_{kk}(z)} - \overline{R_{kk}(z)} - \overline{R_k(z)} \quad (z \in S_k). \quad (30.17)$$

На основі рівнянь (30.13) та (30.15) можна визначити функції  $\Phi_{0j}$  у кожній з півплощин, зокрема:

$$\begin{aligned} \Phi_{0l}(z) &= \frac{iG_l}{2c_{kl}} \left[ \kappa_k t_1^*(z) - 2G_k t_4^*(z) \right] + \frac{G_{lk}}{c_{kl}} \Omega_k(z), \\ \Phi_{0k}(z) &= \frac{iG_k}{2c_{kl}} \left[ t_1^*(z) + 2G_l t_4^*(z) \right] - \frac{G_{\bar{l}k}}{c_{kl}} \Omega_k(z), \\ t_r^*(z) &= 2iH(f_r^*, z), H(f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, c_{kl} = G_k + \kappa_k G_l \quad (z \in S_k). \end{aligned} \quad (30.18)$$

Граничні значення пружних потенціалів на лінії  $L$  дорівнюють

$$\begin{aligned} \Phi_{0k}^{\pm}(x) &= \frac{iG_k}{2c_{kl}} \left[ t_1^{*\pm}(x) + 2G_l t_4^{*\pm}(x) \right] - \frac{G_{\bar{l}k}}{c_{kl}} \Omega_k(x), \\ \Phi_{0l}^{\pm}(x) &= \frac{iG_l}{2c_{kl}} \left[ \kappa_k t_1^{*\pm}(x) - 2G_k t_4^{*\pm}(x) \right] + \frac{G_{\bar{l}k}}{c_{kl}} \Omega_k(xl) \quad (x \in L). \end{aligned} \quad (30.19)$$

Причому, згідно з формулами Сохоцького – Племеля [635, 112]

$$t_r^{*\pm}(x) = t_r^*(x) \pm if_r^*(x).$$

Тут індексами “ $\pm$ ” відзначені відповідні граничні значення функції  $t_r^*(z)$ ;  $t_r^*(x)$  – функція, отримана з  $t_r^*(z)$  формальною заміною  $z$  на  $x$ . Верхньому знакові “+” у формулі (30.19) відповідають  $k=2, l=1$ ; нижньому знакові “-” – індекси  $k=1, l=2$ .

Якщо матеріали півплощин однакові ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $G_1 = G_2 = G$ ), то з (30.18), (30.19) відразу отримуємо, що

$$\Phi_{0l}(z) = \frac{i}{2(1+\kappa)} \left[ \kappa t_1^*(z) - 2Gt_4^*(z) \right], \quad \Phi_{0k}(z) = \frac{i}{2(1+\kappa)} \left[ t_1^*(z) + 2Gt_4^*(z) \right] \quad (30.18^1)$$

$$(z \in S_k; k=1, 2, l=3-k);$$

$$\Phi_{0l}^\pm(z) = \frac{i}{2(1+\kappa)} \left[ \kappa t_1^{*\pm}(z) - 2Gt_4^{*\pm}(z) \right], \quad \Phi_{0k}^\pm(z) = \frac{i}{2(1+\kappa)} \left[ t_1^{*\pm}(z) + 2Gt_4^{*\pm}(z) \right], \quad (30.19^1)$$

$$(x \in L; k=1, 2; l=3-k).$$

### 30.3. Напруження і переміщення на лінії поділу матеріалів

Тепер розрахуємо напруження і похідні від переміщень на лінії  $L$ . Для цього підставимо (30.19) у залежності (30.7) та (30.8):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy1}(x) - i\sigma_{xy1}(x) &= \Phi_{01}^-(x) - \Phi_{01}^+(x) + A_1(x) \equiv \\ &\equiv \frac{iG_1}{2c_{12}} \left[ t_1^*(x) - if_1^*(x) + 2G_2t_4^*(x) - 2G_2if_4^*(x) \right] - \\ &- \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) - \frac{iG_1}{2c_{21}} \left[ \kappa_2 t_1^*(x) + i\kappa_2 f_1^*(x) - 2G_2t_4^*(x) - 2iG_2f_4^*(x) \right] - \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z) + A_1(x) = \\ &= \left[ \frac{G_1}{2c_{12}} + \frac{\kappa_2 G_1}{2c_{21}} \right] f_1^*(x) + i \left[ \frac{G_1}{2c_{12}} - \frac{\kappa_2 G_1}{2c_{21}} \right] t_1^*(x) + \left[ \frac{G_1 G_2}{c_{12}} - \frac{G_1 G_2}{c_{21}} \right] f_4^*(x) + \\ &+ i \left[ \frac{G_1 G_2}{c_{12}} + \frac{G_1 G_2}{c_{21}} \right] t_4^*(x) + A_1(x) - \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) - \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z), \\ 2G_1(u_1' + iv_1') &= \kappa_1 \Phi_{01}^-(x) + \Phi_{01}^+(x) + B_1 = \frac{i\kappa_1 G_1}{2c_{12}} \left[ t_1^*(x) - if_1^*(x) + 2G_2t_4^*(x) - 2G_2if_4^*(x) \right] - \\ &- \kappa_1 \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) + \frac{iG_1}{2c_{21}} \left[ \kappa_2 t_1^*(x) + i\kappa_2 f_1^*(x) - 2G_2t_4^*(x) - 2iG_2f_4^*(x) \right] + \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z) + B_1 = \\ &= \left[ \frac{\kappa_1 G_1}{2c_{12}} - \frac{\kappa_2 G_1}{2c_{21}} \right] f_1^*(x) + i \left[ \frac{\kappa_1 G_1}{2c_{12}} + \frac{\kappa_2 G_1}{2c_{21}} \right] t_1^*(x) + \left[ \frac{\kappa_1 G_1 G_2}{c_{12}} + \frac{G_1 G_2}{c_{21}} \right] f_4^*(x) + \\ &+ i \left[ \frac{\kappa_1 G_1 G_2}{c_{12}} - \frac{G_1 G_2}{c_{21}} \right] t_4^*(x) + B_1(x) - \kappa_1 \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) + \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z). \end{aligned}$$

Подібними є вирази для  $\sigma_{yy2} - i\sigma_{xy2}$ ,  $2G_2(u_2' + iv_2')$ , які отримують заміною індексів 1, 2 на 2, 1 відповідно.

Визначаючи ще одну компоненту  $\sigma_{xxk}$  тензора напружень, користуємося співвідношенням [635, 112]

$$\sigma_{xxk}(z) + \sigma_{yyk}(z) = 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z) \quad (z \in S_k), \quad (30.20)$$

в результаті чого

$$\begin{aligned} \sigma_{xxk}(x) &= 4 \operatorname{Re} \left\{ \Gamma_k + \Phi_{0k}^\pm \right\} - \sigma_{yyk}(x) = \\ &= 4 \operatorname{Re} \left\{ \Gamma_k + \frac{iG_k}{2c_{lk}} \left[ t_1^*(x) \pm if_1^*(x) + 2G_l t_4^*(x) \pm 2G_l if_4^*(x) \right] - \frac{G_{lk}^-}{c_{kl}} \Omega_k(x) \right\} - \sigma_{yyk}(x), \quad k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо на лінії поділу матеріалів



$$\begin{aligned}
\sigma_{yyk} - i\sigma_{xyk} &= \sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) \mp m_{kl}^+ f_1^*(x) + im_{12}^- t_1^*(x) + l_1^- f_4^*(x) + il_1^+ t^*(x), \\
\sigma_{xxk} &= \sigma_{xxk}^0(x) \mp n_{kl}^- f_1(x) + n_{kl}^+ t_2(x) \mp r_{kl}^+ f_4(x) - r_{kl}^- t_5(x), \\
u'_{xk} + iu'_{yk} &= u_{xk}^0(x) + iu_{yk}^0(x) + l_2^- f_1^*(x) + il_2^+ t^*(x) \mp m_{lk}^+ f_4^*(x) - im_{21}^- t_4^*(x).
\end{aligned} \tag{30.21}$$

Тут індексів  $k = 2$  відповідає верхній знак “-“ та  $l = 1$ ; значенню  $k = 1$  – нижній знак “+” і  $l = 2$  ;

$$\begin{aligned}
m_{kl}^\pm &= G_k \frac{c_{lk} \pm c_{kl}\kappa_l}{2c_{12}c_{21}}, \quad l_1^\pm = G_1 G_2 \left( \frac{1}{c_{12}} \pm \frac{1}{c_{21}} \right), \quad l_2^\pm = \frac{c_{21}\kappa_1 \pm c_{12}\kappa_2}{4c_{12}c_{21}}, \\
n_{kl}^\pm &= 2m_{kl}^\pm + m_{kl}^\mp = G_k \frac{3c_{lk} \pm c_{kl}\kappa_l}{2c_{12}c_{21}}, \quad r_{kl}^\pm = G_1 G_2 \frac{3c_{lk} \pm c_{kl}}{c_{12}c_{21}} \\
&\quad \left( m_{kl}^- = m_{lk}^-, \quad m_{12}^+ + m_{21}^+ = 1 \right).
\end{aligned}$$

Величини, відзначені індексом “0” зверху, характеризують відповідні величини у суцільному тілі без включень за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний (основний) розв’язок):

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) &= A_1(x) - \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) - \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z), \\
\sigma_{xxk}^0(x) &= \operatorname{Re} \left\{ 4\Gamma_k - A_1(x) - 4 \frac{G_{lk}^-}{c_{kl}} \Omega_k(x) + \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) + \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z) \right\}, \\
u_{xk}^0(x) + iu_{yk}^0(x) &= B_1(x) - \kappa_1 \frac{G_{21}^-}{c_{12}} \Omega_1(x) + \frac{G_{12}^-}{c_{21}} \Omega_2(z).
\end{aligned} \tag{30.22}$$

У випадку дії лише однорідного поля напружень на нескінченності

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) &= A_1 = p - i\tau, \\
\sigma_{xxk}^0(x) &= p_k, \\
u_{kx}^0(x) + iu_{ky}^0(x) &= \frac{B_k}{2G_k}.
\end{aligned} \tag{30.23}$$

Якщо матеріали півплощин однакові ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $G_1 = G_2 = G$ ), у всіх формулах слід зробити заміни

$$\begin{aligned}
m_{kl}^\pm \rightarrow m^\pm &= \frac{1 \pm \kappa}{2(1 + \kappa)}, \quad l_1^+ = \frac{2G}{(1 + \kappa)}, \quad l_1^- = l_2^- = 0, \quad l_2^+ = \frac{\kappa}{2G(1 + \kappa)}, \\
G_{ij}^+ &= 2G, \quad G_{ij}^- = 0, \quad n_{kl}^\pm \rightarrow n^\pm = \frac{3 \pm \kappa}{2(1 + \kappa)}, \quad r_{kl}^\pm \rightarrow r^\pm = \frac{G(3 \pm \kappa)}{(1 + \kappa)}.
\end{aligned}$$

### 30.4. Напруження і переміщення у довільній точці складеної площини

Із залежностей (30.5), (30.13) визначаємо компоненти  $\sigma_{yyk}(z)$ ,  $\sigma_{xyk}(z)$  та похідні від переміщень у довільній точці кусково-однорідної площини:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yyk}(z) - i\sigma_{xyk}(z) &= i \left\{ \frac{G_k}{2c_{kl}} \left[ t_1^*(z) + 2G_l t_4^*(z) - (z - \bar{z}) \left( \overline{t_1^{**}(z)} + 2G_l \overline{t_4^{**}(z)} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{G_k}{2c_{lk}} \left[ \kappa_l t_1^*(\bar{z}) - 2G_l t_4^*(\bar{z}) \right] \right\} + \sigma_{yy}^0(z) - i\sigma_{xy}^0(z), \\
 u'_{xk}(z) + iu'_{yk}(z) &= \frac{i}{4} \left\{ \frac{\kappa_k}{c_{kl}} \left[ t_1^*(z) + 2G_l t_4^*(z) \right] + \frac{z - \bar{z}}{c_{kl}} \left[ \overline{t_1^{**}(z)} + 2G_l \overline{t_4^{**}(z)} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{c_{lk}} \left[ \kappa_l t_1^*(\bar{z}) - 2G_l t_4^*(\bar{z}) \right] \right\} + u_{xk}^0(z) + iu_{yk}^0(z),
 \end{aligned} \tag{30.24}$$

де

$$\sigma_{yy}^0(z) - i\sigma_{xy}^0(z) = A_1 = p - i\tau, \quad u_{xk}^0(z) + iu_{yk}^0(z) = B_k / (2G_k)$$

– однорідний розв'язок.

Для обчислення переміщень використовуємо формулу

$$2G_k \left[ u_{xk}(z) + iu_{yk}(z) \right] = \kappa_k \varphi_{0k}(z) + \varphi_{0k}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_{0k}(z)} + \int B_k dz + \text{const},$$

$$\Phi_{0k}(z) = \varphi'_{0k}(z) \quad (z \in S_k; \quad k = 1, 2),$$

отриману інтегруванням залежності (30.6). Тоді

$$\begin{aligned}
 u_{xk}(z) + iu_{yk}(z) &= \frac{i}{4} \left\{ \frac{\kappa_k}{c_{kl}} \left[ m_1^*(z) + 2G_l m_4^*(z) \right] + \frac{z - \bar{z}}{c_{kl}} \left[ \overline{t_1^{**}(z)} + 2G_l \overline{t_4^{**}(z)} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{c_{lk}} \left[ \kappa_l m_1^*(\bar{z}) - 2G_l m_4^*(\bar{z}) \right] \right\} + u_{xk}^0(z) + iu_{yk}^0(z) + \text{const}, \quad m_r^{**}(z) = t_r^*(z).
 \end{aligned} \tag{30.25}$$

Вираз для напруження  $\sigma_{xxk}(z)$  одержуємо з (30.20), (30.24):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xxk}(z) &= 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z) - \sigma_{yyk}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2G_k}{c_{kl}} \left[ it_1^*(z) + 2iG_l t_4^*(z) \right] \right\} + \\
 &\quad + \operatorname{Im} \left\{ \frac{G_k}{2c_{kl}} \left[ t_1^*(z) + 2G_l t_4^*(z) - (z - \bar{z}) \left( \overline{t_1^{**}(z)} + 2G_l \overline{t_4^{**}(z)} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{G_k}{2c_{lk}} \left[ \kappa_l t_1^*(\bar{z}) - 2G_l t_4^*(\bar{z}) \right] \right\} + \sigma_{xxk}^0(z), \quad \sigma_{xxk}^0(z) = p_k \quad (z \in S_k, \quad k = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{30.26}$$

Формули для компонент тензора напружень і вектора переміщень у полярній системі координат визначаємо за допомогою співвідношень [635, 112, 111]

$$\sigma_{rrk}(z) + \sigma_{\theta\theta k}(z) = \sigma_{yyk}(z) + \sigma_{xxk}(z),$$

$$\sigma_{\theta\theta k}(z) - \sigma_{rrk}(z) + 2i\sigma_{r\theta k}(z) = \left[ \sigma_{yyk}(z) - \sigma_{xxk}(z) + 2i\sigma_{xyk}(z) \right] \exp(2i\theta), \tag{30.27}$$

$$u_{rrk}(z) + iu_{\theta\theta k}(z) = \left[ u_k(z) + iv_k(z) \right] \exp(-i\theta).$$

Вважається, що полярна вісь напрямлена вздовж осі абсцис.

Складова напружень  $\sigma_{zzk}(z)$  дорівнює нулю для плоского напруженого стану та  $\nu \left[ \sigma_{yyk}(z) + \sigma_{xxk}(z) \right]$  для плоскої деформації [635, 112].

### 30.5. Система прямолінійних включень в однорідному ізотропному середовищі

Розглянемо  $N + 1$  тонкостінне включення в однорідній ізотропній площині з пружними сталими  $E, \nu$  [949]. Середина лінія  $L'_m$   $m$ -го включення ( $m = \overline{0, N}$ ) належить осі абсцис  $L_m$  локальної системи координат  $x_m O_m y_m$ , що визначає комплексну змінну  $z_m = x_m + iy_m$ . Координати точки  $O_m$  в основній системі  $x O y \sim x_0 O_0 y_0$  визначаються значеннями  $z_0 = z_{0m}$ ; вісь  $x_m$  утворює з віссю  $x \sim x_0$  кут  $\alpha_m$  ( $z_{00} = 0, \alpha_0 = 0$ ).

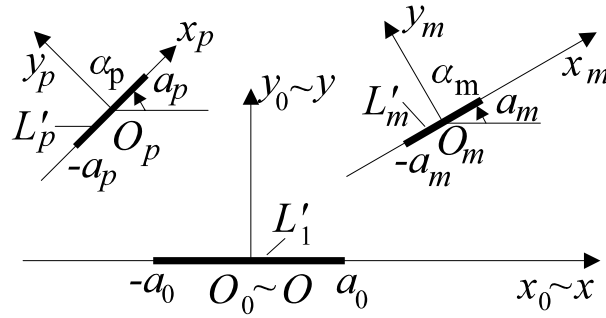


Рис. 30.2. Система включень в однорідному ізотропному середовищі

Зовнішнє навантаження довільного типу (наприклад, напруження на нескінченності, сила  $P_1$  та момент  $M_1$  у точці  $z_{*1}^0$  основної системи координат  $x_0 O_0 y_0$ ) за відсутності включень визначає в основній системі координат функції  $\sigma_{yy}^0(z), \sigma_{xy}^0(z), \sigma_{xx}^0(z), u_x^{0r}(z), u_y^{0r}(z)$ . Включення зі сталими  $E_B, \nu_B$  (для кожного з включень ці сталі можуть бути різними) спричиняють стрибки векторів напружень і похідної переміщення на  $L'_m$

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{yym}^- - i\sigma_{xym}^- \right) - \left( \sigma_{yym}^+ - i\sigma_{xym}^+ \right) &= f_{1m}(x_m) - if_{2m}(x_m) \equiv f_{1m}^*(x_m), \\ \left( u_{xm}^- + iu_{ym}^- \right) - \left( u_{xm}^+ + iu_{ym}^+ \right) &= f_{4m}(x_m) + if_{5m}(x_m) \equiv f_{4m}^*(x_m) \end{aligned} \quad (30.28)$$

$$(m = \overline{0, N}; x \in L),$$

причому

$$f_{1m}^{m*}(x_m) = f_{4m}^{m*}(x) = 0,$$

якщо  $x_m \notin L'_m$ ;  $\sigma_{yym}, \sigma_{xym}, u_{xm}, u_{ym}$  визначають компоненти тензора напружень і похідні за напрямом  $x_m$  у відповідній системі координат; індекси “+” та “-” позначають граничні значення відповідних величин при  $y_m \rightarrow 0$  з верхньої та нижньої півплощин  $m$ -ї системи координат.

Розв'язок поставленої задачі дають такі вирази для напружень і похідних компонент переміщення [949, 954]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yyp}(z_p) - i\sigma_{xyp}(z_p) &= \sum_{m=0}^N \left[ \hat{\sigma}_{yyp}^m(z_p) - i\hat{\sigma}_{xyp}^m(z_p) \right] + \sigma_{yyp}^0(z_p) - i\sigma_{xyp}^0(z_p), \\
 \sigma_{xyp}(z_p) &= \sum_{m=0}^N \hat{\sigma}_{xyp}^m(z_p) + \sigma_{xyp}^0(z_p), \\
 u'_{xp}(z_p) + iu'_{yp}(z_p) &= \sum_{m=0}^N \left[ \hat{u}'_{xp}{}^m(z_p) + i\hat{u}'_{yp}{}^m(z_p) \right] + u_{xp}^0{}'(z_p) + iu_{yp}^0{}'(z_p), \\
 \hat{\sigma}_{yyp}^m(z_p) - i\hat{\sigma}_{xyp}^m(z_p) &= -i\phi \int_{L'_m} \left\{ K_{pm}(t, z, \kappa) f_{1m}^*(t) + 2GK_{pm}(t, z, -1) f_{4m}^*(t) + \right. \\
 &\quad \left. + L_{pm}(t, z) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\overline{f_{4m}^*(t)} \right] \right\} dt, \\
 \hat{\sigma}_{xyp}^m(z_p) &= -\phi \operatorname{Im} \int_{L'_m} \left\{ M_{pm}(t, z, \kappa) f_{1m}^*(t) + 2GM_{pm}(t, z, -1) f_{4m}^*(t) + \right. \\
 &\quad \left. + L_{pm}(t, z) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\overline{f_{4m}^*(t)} \right] \right\} dt, \\
 \hat{u}'_{xp}{}^m(z_p) + i\hat{u}'_{yp}{}^m(z_p) &= -\frac{i\phi}{2G} \int_{L'_m} \left\{ \kappa K_{pm}(t, z, -1) f_{1m}^*(t) + \right. \\
 &\quad \left. + 2G\kappa K_{pm}(t, z, 1/\kappa) f_{4m}^*(t) - L_{pm}(t, z) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\overline{f_{4m}^*(t)} \right] \right\} dt,
 \end{aligned} \tag{30.29}$$

де  $\hat{\sigma}_{yyp}^m(z_p)$ ,  $\hat{\sigma}_{xyp}^m(z_p)$ ,  $\hat{\sigma}_{xyp}^m(z_p)$ ,  $\hat{u}'_{xp}{}^m(z_p)$ ,  $\hat{u}'_{yp}{}^m(z_p)$  відповідають збуренню напружень і похідних переміщень внаслідок стрибка на  $L'_m$ .

Звідси з використанням формул Сохоцького – Племеля

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yyp}^\pm(x_p) - i\sigma_{xyp}^\pm(x_p) &= F_{1p}^\pm(x_p) - i\phi \sum_{m=0}^N (1 - \delta_{pm}) \int_{L'_m} \left\{ K_{pm}(t, x, \kappa) f_{1m}^*(t) + \right. \\
 &\quad \left. + 2GK_{pm}(t, x, -1) f_{4m}^*(t) + L_{pm}(t, x) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\overline{f_{4m}^*(t)} \right] \right\} dt + \sigma_{yyp}^0(x) - i\sigma_{xyp}^0(x), \\
 u_{xp}^\pm(x) + iu_{yp}^\pm(x) &= F_{4p}^\pm(x) - \frac{i\phi}{2G} \sum_{m=0}^N (1 - \delta_{pm}) \int_{L'_m} \left\{ \kappa K_{pm}(t, x, -1) f_{1m}^*(t) + \right. \\
 &\quad \left. + 2G\kappa K_{pm}(t, x, 1/\kappa) f_{4m}^*(t) - L_{pm}(t, x) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\overline{f_{4m}^*(t)} \right] \right\} dt + u_{xp}^0{}'(x) + iu_{yp}^0{}'(x) \\
 &\quad (x \in L'_p; p = \overline{0, N}).
 \end{aligned} \tag{30.30}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 K_{pm}(t, z, a) &= e^{i\alpha_m} \left[ \frac{ae^{-2i\alpha_p}}{\bar{T}_m - \bar{Z}_p} - \frac{1}{T_m - Z_p} \right], \quad M_{pm}(t, z, a) = K_{pm}(t, z, a) + \frac{4e^{i\alpha_p}}{T_m - Z_p}, \\
 L_{pm}(t, z) &= e^{i\alpha_m} \left[ \frac{1}{\bar{T}_m - \bar{Z}_p} - \frac{(T_m - Z_p)e^{-2i\alpha_p}}{(\bar{T}_m - \bar{Z}_p)^2} \right];
 \end{aligned} \tag{30.31}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) = & \\ = 2\Gamma + \bar{\Gamma}' e^{-2i\alpha_p} + S_{11}^p(z_p) + \overline{S_{11}^p(z_p)} + z_p \overline{S_{11}^{p'}(z_p)} + R_{11}^p(z_p) + \overline{R_{11}^p(z_p)}, & \\ 2G \left[ u_{xp}^0(z_p) + iu_{yp}^0(z_p) \right] = (\kappa - 1)\Gamma - \bar{\Gamma}' e^{-2i\alpha_p} + \kappa S_{11}^p(z_p) - \overline{S_{11}^p(z_p)} - & \\ - z_p \overline{S_{11}^{p'}(z_p)} - R_{11}^p(z_p) - \overline{R_{11}^p(z_p)}; & \end{aligned} \quad (30.32)$$

$$S_{11}^p(z_p) = -\frac{\phi P_{1p}}{z_p - z_{*1}^p}, \quad R_{11}^p(z_p) = \phi \left[ \frac{\kappa \bar{P}_{1p}}{z_p - z_{*1}^p} - \frac{\bar{z}_{*1} P_{1p}}{(z_p - z_{*1}^p)^2} \right], \quad R_{11}^p(z_p) = \frac{-iM_1}{2\pi(z_p - z_{*1}^p)^2},$$

$$F_{1p}^{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2} f_{1p}^*(x) + imt_{1p}^*(x) + il_1 t_{4p}^*(x), \quad \phi = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)}, \quad m = \frac{1-\kappa}{2(1+\kappa)}, \quad l_1 = \frac{2G}{1+\kappa}, \quad (30.33)$$

$$F_{4p}^{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2} f_{4p}^*(x) + il_2 t_{1p}^*(x) - imt_{4p}^*(x), \quad l_2 = \frac{\kappa}{2G(1+\kappa)}, \quad z_{*1}^p = (z_{*1}^0 - z_{0p}) e^{-i\alpha_p},$$

$$z_m^p = (z_p - z_{0m}) e^{-i\alpha_m}, \quad Z_p = z_p e^{i\alpha_p} + z_{0p}, \quad T_m = t e^{i\alpha_m} + z_{0m}, \quad P_{1p} = P_1 e^{-i\alpha_p}.$$

### 30.6. Система прямолінійних включень в ізотропному півпросторі

Для дослідження системи прямолінійних включень у пружному півпросторі [975] звернемося до сформульованої у п. 30.5 задачі про  $N+1$  включення в ізотропному просторі. Нехай включення з нульовим номером має безмежну довжину  $L'_0 = (-\infty; +\infty)$ , а всі інші включення ( $m = \overline{1, N}$ ) розташовані у нижній півплощині [975]. Тоді на основі формули обернення сингулярних інтегральних рівнянь [636] зі співвідношення (30.30), взятого при  $p = 0$ , випливає

$$\begin{aligned} f_{40}^*(\eta) = -\frac{m}{l_1} f_{10}^*(\eta) + \frac{\phi}{il_1} \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ K_{0m}(t, \eta, -\kappa) f_{1m}^*(t) + 2GK_{0m}(t, \eta, 1) f_{4m}^*(t) - \right. & \\ - L_{0m}(t, \eta) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G \overline{f_{4m}^*(t)} \right] \Big\} dt + \frac{1}{\pi il_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sigma_{yy0}^0(t) - i\sigma_{xy0}^0(t) - \right. & \\ - \frac{1}{2} \left( \sigma_{yy0}^+(t) + \sigma_{yy0}^-(t) - i\sigma_{xy0}^+(t) - i\sigma_{xy0}^-(t) \right) \Big\} \frac{dt}{t - \eta} \quad (\eta \sim x_0 \in L_0); & \end{aligned} \quad (30.34)$$

$$\begin{aligned} f_{10}^*(\eta) = \frac{m}{l_2} f_{40}^*(\eta) + \frac{\phi}{2G il_1} \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ \kappa K_{0m}(t, \eta, 1) f_{1m}^*(t) + 2G\kappa K_{0m} \left( t, \eta, -\frac{1}{\kappa} \right) f_{4m}^*(t) + \right. & \\ + L_{0m}(t, \eta) \left[ \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G \overline{f_{4m}^*(t)} \right] \Big\} dt + \frac{1}{\pi il_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u_{x0}^0(t) + iu_{y0}^0(t) - \right. & \\ - \frac{1}{2} \left( u_{x0}^+(t) + u_{y0}^-(t) + iu_{x0}^+(t) + iu_{y0}^-(t) \right) \Big\} \frac{dt}{t - \eta} \quad (\eta \sim x_0 \in L_0). & \end{aligned} \quad (30.35)$$

Підставляючи (30.34) у (30.29) при  $p = \overline{1, N}$  матимемо

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yyp}(z_p) - i\sigma_{xyp}(z_p) &= -i\phi \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ K_{pm}^{(0)}(t, z, \kappa, 1) f_{1m}^*(t) + \right. \\
 &+ L_{pm}(t, z, -1, -1) \overline{f_{1m}^*(t)} + 2GK_{pm}^{(0)}(t, z, -1, 1) f_{4m}^*(t) + L_{pm}(t, z, -1, -1) \overline{f_{4m}^*(t)} \left. \right\} dt - \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ K_{p0}(t, z, 1) P_0(t) + L_{p0}(t, z) \overline{P_0(t)} \right\} dt + \sigma_{yyp}^0(z_p) - i\sigma_{xyp}^0(z_p), \\
 u'_{xp}(z_p) + iu'_{yp}(z_p) &= -\frac{i\phi}{2G} \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ \kappa K_{pm}^{(1)}\left(t, z, -1, -\frac{1}{\kappa}\right) f_{1m}^*(t) - \right. \\
 &- L_{pm}(t, z, \kappa, \kappa) \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\kappa K_{pm}^{(1)}\left(t, z, \frac{1}{\kappa}, -\frac{1}{\kappa}\right) f_{4m}^*(t) - \\
 &- 2GL_{pm}(t, z, \kappa, -1) \overline{f_{4m}^*(t)} \left. \right\} dt - \frac{1}{4\pi i G} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \kappa K_{p0}\left(t, z, -\frac{1}{\kappa}\right) P_0(t) - \right. \\
 &- L_{p0}(t, z) \overline{P_0(t)} \left. \right\} dt + u_{xp}^0{}'(z_p) + iu_{yp}^0{}'(z_p).
 \end{aligned} \tag{30.36}$$

Аналогічне використання (30.35) дає

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yyp}(z_p) - i\sigma_{xyp}(z_p) &= -i\phi \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ K_{pm}^{(-1)}\left(t, z, \kappa, -\frac{1}{\kappa}\right) f_{1m}^*(t) + \right. \\
 &+ L_{pm}\left(t, z, \frac{1}{\kappa}, -1\right) \overline{f_{1m}^*(t)} + 2GK_{pm}^{(-1)}\left(t, z, -1, -\frac{1}{\kappa}\right) f_{4m}^*(t) + \\
 &+ L_{pm}\left(t, z, \frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}\right) \overline{f_{4m}^*(t)} \left. \right\} dt - \frac{G}{\pi i \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ K_{p0}(t, z, -\kappa) G_0(t) + L_{p0}(t, z) \overline{G_0(t)} \right\} dt + \\
 &+ \sigma_{yyp}^0(z_p) - i\sigma_{xyp}^0(z_p), \\
 u'_{xp}(z_p) + iu'_{yp}(z_p) &= -\frac{\phi i}{2G} \sum_{m=1}^N \int_{L'_m} \left\{ \kappa K_{pm}^{(0)}\left(t, z, -1, -\kappa^{-2}\right) f_{1m}^*(t) - \right. \\
 &- L_{pm}(t, z, -1, -1) \overline{f_{1m}^*(t)} + 2G\kappa K_{pm}^{(0)}\left(t, z, \frac{1}{\kappa}, \kappa^{-2}\right) f_{4m}^*(t) - \\
 &- 2GL_{pm}\left(t, z, -1, \frac{1}{\kappa}\right) \overline{f_{4m}^*(t)} \left. \right\} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ K_{p0}(t, z, 1) G_0(t) - \right. \\
 &- \frac{1}{\kappa} L_{p0}(t, z) \overline{G_0(t)} \left. \right\} dt + u_{xp}^0{}'(z_p) + iu_{yp}^0{}'(z_p).
 \end{aligned} \tag{30.37}$$

Тут на додаток до (30.31)

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= \sigma_{yy0}^0(t) - i\sigma_{xy0}^0(t) - \sigma_{yy0}^-(t) + i\sigma_{xy0}^-(t), \\
 G_0(t) &= u_{xp}^0{}'(z_p) + iu_{yp}^0{}'(z_p) - u_{xp}^{\prime-}(z_p) - iu_{yp}^{\prime-}(z_p),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{pm}^{(c)}(t, z, a, b) &= K_{pm}(t, z, a) + a(-\kappa)^c K_{pm}^* \left( t, z, (a\kappa^{2c})^{-1} \right) + be^{2i\alpha_m} \frac{\bar{T}_m - T_m}{\bar{Z}_p - T_m} R_{pm}(t, z, 2), \\
L_{pm}(t, z, a, b) &= L_{pm}(t, z) + aM_{pm}(t, z) + bR_{pm}(t, z, 1), \\
K_{pm}^*(t, z, a) &= e^{i\alpha_m} \left[ \frac{ae^{-2i\alpha_p}}{T_m - \bar{Z}_p} - \frac{1}{\bar{T}_m - Z_n} \right], \quad M_{pm}(t, z) = e^{-i\alpha_m} \frac{\bar{T}_m - T_m}{(\bar{T}_m - Z_p)^2}, \\
R_{pm}(t, z, a) &= e^{-i\alpha_m} \left[ \frac{1 - e^{-2i\alpha_p}}{T_m - \bar{Z}_p} - a \frac{(\bar{Z}_p - Z_p) e^{-2i\alpha_p}}{(T_m - \bar{Z}_p)^2} \right]^2.
\end{aligned} \tag{30.38}$$

З урахуванням виразу  $K_{pp}(t, x, a) = \frac{a-1}{t-z}$ ,  $L_{pp}(t, x) = 0$  і формул Сохоцького – Племеля в обох випадках (30.36), (30.37) граничні значення відповідних величин на верхньому та нижньому берегах ліній  $L'_p$  дорівнюють

$$\begin{aligned}
\sigma_{yyp}^{\pm}(x_p) - i\sigma_{xyp}^{\pm}(x_p) &= \mp \frac{1}{2} f_{1p}^*(x_p) + \sigma_{yyp}(x_p) - i\sigma_{xyp}(x_p), \\
u'_{xp}{}^{\pm}(x_p) + iu'_{yp}{}^{\pm}(x_p) &= \mp \frac{1}{2} f_{4p}^*(x_p) + u'_{xp}(x_p) + iu'_{yp}(x_p) \quad (x_p \in L'_p; \quad p = \overline{1, N}),
\end{aligned}$$

де  $\sigma_{yyp}(x_p) - i\sigma_{xyp}(x_p)$ ,  $u'_{xp}(x_p) + iu'_{yp}(x_p)$  визначаються формулами (30.36), (30.37) відповідно за формальної заміни  $z_p$  на  $x_p$ .

Залежностями (30.36) (і відповідними до них (30.39)) можна користуватися, якщо на межі півпростору (півплощини) задані напруження  $\sigma_{yy0}^-(t) - i\sigma_{xy0}^-(t)$ ; виразами (30.37) та відповідними до них (30.39) – за даних на межі тіла похідних переміщення  $u'_{xp}{}^-(z_p) + iu'_{yp}{}^-(z_p)$ . Якщо ж використовуються змішані умови, то слід брати відповідні комбінації (30.36), (30.37).

### 30.7. Включення криволінійної конфігурації

Отримані у пп. 30.5, 30.6 результати природно узагальнити [949, 975] на випадок, якщо  $L'_p$  – довільні гладкі криві, задані параметрично рівнянням  $z_0 = z_p^*(x) \equiv x_p^*(x) + iy_p^*(x)$ . Внаслідок можливості розглядати таку лінію як границю сукупності стичних прямолінійних відрізків, зазначимо, що співвідношення (30.29) для необмеженої площини і (30.36), (30.37) для півплощини зберігають свою силу, якщо припустити, що

$$\begin{aligned}
T_p &= z_p^*(t), \quad \alpha_p \sim \alpha_p(t) \equiv \arctg \left( y_p^{*'}(t) / x_p^{*'}(x) \right), \\
f_{1p}^*(t) &= \sigma_{nm}^-(t) - \sigma_{nm}^+(t) + i \left[ \sigma_{n\tau}^-(t) - \sigma_{n\tau}^+(t) \right], \\
f_{4p}^*(t) &= \frac{\partial}{\partial \tau_{(p)}} \left[ u_{x0}^-(t) - u_{x0}^+(t) + iu_{y0}^-(t) - iu_{y0}^+(t) \right], \quad \frac{\partial}{\partial \tau_{(p)}} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\alpha_p(t)}, \\
u_{x0}^{\pm}(t) + iu_{y0}^{\pm}(t) &= \left[ u_{\tau}^{\pm}(t) + iu_n^{\pm}(t) \right] e^{i\alpha_p(t)};
\end{aligned} \tag{30.40}$$

$\sigma_{nn}^{\pm}(t), \sigma_{\tau n}^{\pm}(t), u_n^{\pm}(t), u_{\tau}^{\pm}(t)$  – нормальні й дотичні напруження та складові переміщення на верхньому та нижньому берегах включення у відповідній точці  $z_0 = z_p^*(t)$  лінії  $L'_p$ .

Спрямувавши вісь системи координат  $x_p O_p y_p$  уздовж дотичної до лінії  $L'_p$  у розглядуваній точці  $z_p^*(t)$  неважко отримати

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{\pm}(x) - i\sigma_{\tau n}^{\pm}(x) &= \mp \frac{1}{2} f_{1p}^*(x_p) + \sigma_{nn}(x) - i\sigma_{\tau n}(x), \\ \frac{\partial}{\partial x_{(p)}} [u_{x0}^{\pm}(x) + iu_{y0}^{\pm}(x)] &= \mp \frac{1}{2} f_{4p}^*(x_p) + \frac{\partial}{\partial x_{(p)}} [u_{x0}(x) + iu_{y0}(x)], \end{aligned} \quad (30.41)$$

причому вирази для  $\sigma_{nn}(x) - i\sigma_{\tau n}(x), \frac{\partial}{\partial x_{(p)}} [u_{x0}(x) + iu_{y0}(x)]$  збігаються відповідно з виразами для

$$\sigma_{yyp}(z_p) - i\sigma_{xyp}(z_p), u'_{xp}(z_p) + iu'_{yp}(z_p) \sim \frac{\partial}{\partial x_p} [u_{xp}(z_p) + iu_{yp}(z_p)],$$

що подані формулами (30.29) для безмежної площини чи (30.36), (30.37) для півплощини при (30.31) – (30.33), (30.40), а також  $z_0 = z_p^*(x), \alpha_p = \alpha_p(x)$  і заміною

$$\frac{\partial}{\partial x_p} [u_{xp}^0(z_p) + iu_{yp}^0(z_p)] \quad \text{на} \quad \frac{\partial}{\partial x_{(p)}} [u_{xp}^0(z_p^*(x)) + iu_{yp}^0(z_p^*(x))].$$

Поміж функцій, що фігурують у записі ядер  $K_{pm}^{(c)}(t, x, a, b), L_{pm}(t, x, a, b)$  лише  $K_{pm}(t, x, a), L_{pm}(t, x)$  можуть мати особливість, оскільки  $\text{Im}\{T_m, X_p\} < 0$  і  $T_m - \bar{X}_p \neq 0$ . Беручи до відома, що

$$\begin{aligned} K_{pm}(t, x, a) &= \frac{(a-1)\cos\theta - i(a+1)\sin\theta}{r} e^{i[\alpha_m(t) - \alpha_p(x)]}, \\ L_{pm}(t, x) &= \frac{2i\sin\theta}{r} e^{i[\alpha_p(x) - \alpha_m(t) - 2\theta]}, \end{aligned} \quad (30.42)$$

де  $r$  – відстань між точкою  $z_p^*(x)$ , що розглядається (точкою спостереження), та поточною точкою  $z_m^*(t)$ ;  $\theta$  – кут між дотичною до лінії  $L'_p$  у точці  $z_p^*(x)$  і напрямом до  $z_m^*(t)$ , а також переходячи до границі  $r \rightarrow 0$  під час  $p = m$ , маємо

$$\lim_{r \rightarrow 0} K_{pp}(t, x, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{a-1}{r} - \frac{i(a+1)}{2\rho}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} L_{pp}(t, x) = \frac{i}{\rho}. \quad (30.43)$$

Тут  $\rho$  – радіус кривини лінії  $L'_p$  у розглядуваній точці.

### 30.8. Фізична інтерпретація функцій стрибка. Зосереджені сили, дислокації

Виберемо функції стрибка у вигляді зосереджених у початку системи координат чинників, пропорційних до дельта-функції



$$\begin{aligned} f_r(x) &= f_r \delta(x), \quad f_1 = P_y, \quad f_2 = P_x, \quad f_4 = b_x, \quad f_5 = b_y, \\ f_1^* &= -iP^*, \quad f_3^* = b^*, \quad P^* = P_x + iP_y, \quad b^* = b_x + ib_y. \end{aligned} \quad (30.44)$$

Використання формули (30.24), якщо  $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$  дає змогу записати для напружень

$$\sigma_{yy}(z) - i\sigma_{xy}(z) = \frac{i}{2\pi(1+\kappa)} \left[ \left( -\frac{f_1^*}{z} - \frac{(z-\bar{z})\bar{f}_1^*}{\bar{z}^2} + \frac{\kappa f_1^*}{\bar{z}} \right) - 2G \left( \frac{f_3^*}{z} + \frac{(z-\bar{z})\bar{f}_3^*}{\bar{z}^2} + \frac{f_3^*}{\bar{z}} \right) \right]. \quad (30.45)$$

Перший доданок у круглих дужках характеризує напруження, породжені зосередженою силою  $P^* = P_x + iP_y$ , що прикладена у початку координат однорідної площини; другий – відповідає впливові крайової дислокації з вектором Бюргерса  $b^* = b_x + ib_y$ , якщо її ядро розміщене у початку системи координат. Дещо складнішим виходить вираз для сили і дислокації на межі поділу матеріалів, у півплощині тощо, однак кожен з них отримується елементарно.

Легко перенести отримані формули на той випадок, якщо зосереджені сили діють у довільній точці  $z_*$  комплексної площини, замінивши у (30.45)  $z$  на  $z - z_*$ . Аналогічні вирази можна отримати, якщо прийняти до відома формули (30.29) і вважати  $m=1$ ,  $p=0$  ( $x_0 O_0 y_0 \sim x O y$ ) та  $f_{r1}(t) = f_r \delta(t)$ , де значення  $f_r$  дані у (30.44). Це означає, що у точці  $z_{01} \sim z_*$  уздовж відрізка  $L_1'$ , що утворює кут  $\alpha_1 \sim \alpha$  з віссю  $x$  функції стрибка пропорційні до дельта-функції. Тоді

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yy}^1(z) - i\hat{\sigma}_{xy}^1(z) &= -i\phi \left\{ K_{01}(0, z, \kappa) f_1^* + 2GK_{01}(0, z, -1) f_4^* + L_{01}(0, z) \left[ \overline{f_1^*} + 2G\overline{f_4^*} \right] \right\}, \\ \hat{\sigma}_{xx}^1(z) &= -\phi \operatorname{Im} \left\{ M_{01}(0, z, \kappa) f_1^* + 2GM_{01}(0, z, -1) f_4^* + L_{01}(0, z) \left[ \overline{f_1^*} + 2G\overline{f_4^*} \right] \right\}, \\ \hat{u}_x^1(z) + i\hat{u}_y^1(z) &= \\ &= -\frac{i\phi}{2G} \left\{ \kappa K_{01}(0, z, -1) f_1^* + 2G\kappa K_{01}(0, z, 1/\kappa) f_4^* - L_{01}(0, z) \left[ \overline{f_1^*} + 2G\overline{f_4^*} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30.45^1)$$

Цей розв'язок (так само як і (30.45)) можна вважати однорідним  $\sigma_{yy}^0(z) - i\sigma_{xy}^0(z)$ ,  $\sigma_{xx}^0(z)$ ,  $u_x^0(z) + iu_y^0(z)$  розв'язком для сили та крайової дислокації у точці  $z_{01} \sim z_*$  необмеженого однорідного ізотропного середовища. Аналогічним чином з (30.36), (30.37) отримуються відповідні вирази для півпростору.

Як бачимо, застосований для розв'язування двовимірних задач теорії пружності щодо тіл з тріщинами та іншими тонкостінними дефектами метод функцій стрибка полягає у моделюванні цих неоднорідностей розподіленими вздовж їхніх осей силами та дислокаціями (крайові дислокації для плоскої задачі та гвинтові – для антиплоскої) з невідомими наперед густинами, що визначаються функціями стрибка  $f_r(x)$  ( $r = \overline{1, 6}$ ).

### 30.9. Побудова інтегральних рівнянь

#### Необмежена площина і півплощина. Прямолінійні дефекти

Підставляючи вирази (30.30) для випадку необмеженої площини чи (30.39) для півплощини в умови взаємодії (2.13) (там  $j = \overline{1...4}$ ;  $u_z \sim 0$ ;  $n_1 \sim n_x$ ,  $n_2 \sim n_y$ ,  $n_3 \sim 0$ ), отримаємо сис-

тему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка, які повинні, крім того, задовольняти додаткові умови, що за умов ідеального контакту матриці з включенням згідно з (16.16), (16.17) запишуться так:

$$\int_{L'_p} f_{1p}(t)dt = Q_{1p}, \quad \int_{L'_p} f_{2p}(t)dt = Q_{2p}, \quad \int_{L'_p} f_{4p}(t)dt = Q_{4p}, \quad \int_{L'_p} f_{5p}(t)dt = Q_{5p},$$

$$Q_{1p} = N_{xy}(a_p^+) - N_{xy}(a_p^-), \quad Q_{2p} = N_x(a_p^+) - N_x(a_p^-), \quad (30.46)$$

$$Q_{4p} = U(a_p^+) - U(a_p^-), \quad Q_{5p} = V(a_p^+) - V(a_p^-).$$

Переважно можна вважати  $Q_{4p} = Q_{5p} = 0$  (однозначність переміщень під час обходу навколо включень (зходження їхніх берегів у вістрях)). Якщо до включення зовнішні зусилля не прикладені, то також і  $Q_{1p} = Q_{2p} = 0$ .

Допускаючи, що кут малого жорсткого повороту включення  $\varepsilon_B^W$  включення ненульовий, слід відповідним чином трансформувати вирази (16.18) чи (16.19). У своєму найпростішому варіанті, якщо в умові рівності нулю моменту нехтується товщиною включення, маємо

$$\int_{L'_p} t f_{1p}(t)dt = 0. \quad (30.47)$$

У випадку, якщо перші  $n_1$  прямолінійних дефектів моделюють розрізи, береги яких завантажені розподіленими зусиллями (вектор напружень  $f_{1q}^\pm + i f_{2q}^\pm$  ( $q = \overline{0, n_1 - 1}$ )), а решта  $n_2 = N + 1 - n_1$  є абсолютно жорсткими плівками, береги яких приєднані до матриці з натягом  $g_{xr}^\pm + i g_{yr}^\pm$  ( $r = \overline{n_1, N}$ ), то умови взаємодії (2.14) зводяться до

$$\sigma_{yyq}^\pm(x_q) - i \sigma_{xyq}^\pm(x_q) = f_{1q}^\pm(x_q) - i f_{2q}^\pm(x_q) \quad (x_q \in L'_q; \quad q = \overline{0, n_1 - 1}),$$

$$u'_{xr}^\pm(x_r) + i u'_{yr}^\pm(x_r) = g_{xr}^\pm(x_r) + i g_{yr}^\pm(x_r) \quad (x_r \in L'_r; \quad r = \overline{n_1, N}). \quad (30.48)$$

Якщо  $n_1 = N + 1$ ,  $n_2 = 0$ ,  $f_{iq}^-(x_q) - i f_{iq}^+(x_q) = 0$ , то підставлення у (30.48) виразів (30.30) або (30.39) дає систему сингулярних інтегральних рівнянь для системи тріщин з вільними від навантажень берегами у необмеженому пружному середовищі чи півплощині відповідно [706].

### Необмежена площина і півплощина. Викривлені дефекти

У цьому випадку слід вирази (30.30) чи (30.39) для кожного з включень у площині чи півплощині підставляти в умови взаємодії (1.8) вигляду

$$\Psi_{jp} \left( \sigma_{nnp}^\pm(x), \sigma_{\tau np}^\pm(x), \frac{\partial}{\partial x_{(p)}} u_{\tau 0}^\pm(x), \frac{\partial}{\partial x_{(p)}} u_{n 0}^\pm(x) \right) = 0 \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (30.49)$$

### Система пружних прямолінійних включень на межі поділу матеріалів

Врахуємо, що для кожного з  $N$  включень, розташованих на прямій межі поділу матеріалів

$$u_{x1} - u_{x2} = c_{a_n^-} + \int_{a_n^-}^x f_4(t)dt, \quad u_{y1} - u_{y2} = d_{a_n^-} + \int_{a_n^-}^x f_5(t)dt \quad (x \in L'_n; \quad n = \overline{1, N}), \quad (30.50)$$

де

$$U(w) + iV(w) \equiv c_w + id_w = \left[ (u_{x1} - u_{x2}) + i(u_{y1} - u_{y2}) \right] \Big|_{x=w} \quad (w = a_n^-, a_n^+; n = \overline{1, N}).$$

Тобто величини  $c_{a_n^+}, c_{a_n^-}, d_{a_n^+}, d_{a_n^-}$  характеризують переміщення нижнього краю торця  $a_n^+, a_n^-$   $n$ -го включення стосовно верхнього краю цього ж торця у напрямках осей  $Ox$  та  $Oy$  відповідно.

Підставляючи тепер вирази (30.21) у третій варіант умов взаємодії п. 16.2, отримаємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для визначення функцій стрибка

$$\begin{aligned} t_2(x) + \lambda_{11}t_5(x) + \lambda_{12}f_1(x) + \lambda_{13}f_4(x) - \lambda_1(x) \int_{a_n^-}^x f_2(t) dt &= F_1(x), \\ t_4(x) + \lambda_{21}t_1(x) + \lambda_{22}f_2(x) + \lambda_{23}f_5(x) - \lambda_2(x) \int_{a_n^-}^x f_4(t) dt &= F_2(x), \\ t_5(x) + \lambda_{31}t_2(x) + \lambda_{32}f_4(x) + \lambda_{33}f_1(x) + \lambda_3(x) \int_{a_n^-}^x f_2(t) dt + \lambda_4(x) \int_{a_n^-}^x f_5(t) dt &= F_3(x), \\ f_4(x) &= -k_2f_1(x) \quad (x \in [a_n^-, a_n^+], n = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (30.51)$$

які задовольняють додаткові умови (30.46). Тут

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \left[ k_0 N_{a_n^-} \frac{h(a_n^-)}{h(x)} - u_x^{0r}(x) - k_1 \sigma_{yy}^0(x) \right] / \Lambda_1, \quad F_2(x) = G_B \left[ u_y^{0r}(x) - \frac{\sigma_{xy}^0(x)}{G_B} - \frac{c_{a_n^-}}{2h(x)} \right] / \Lambda_2, \\ F_3(x) &= \left[ \sigma_{yy}^0(x) + \frac{d_{a_n^-}}{2k_0 h(x)} - \nu_B N_{a_n^-} \frac{h(a_n^-)}{h(x)} \right] / l_1^+, \end{aligned}$$

$$Q_{1n} = 0, \quad Q_{2n} = 2h(N_{a_n^+} - N_{a_n^-}), \quad Q_{3n} = c_{a_n^+} - c_{a_n^-}, \quad Q_{4n} = d_{a_n^+} - d_{a_n^-}, \quad \Lambda_1 = l_2^+ + k_1 m_{12}^-,$$

$$\lambda_{11} = \frac{m_{21}^- - k_1 l_1^+}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{l_2^- - k_1 \Lambda_3}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{13} = \frac{k_1 l_1^- + \Lambda_3}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{21} = -\frac{m_{12}^- + G_B l_2^+}{\Lambda_2},$$

$$\lambda_{22} = \frac{l_2^- G_B - \Lambda_3}{\Lambda_2}, \quad \lambda_{23} = -\frac{l_1^- + G_B \Lambda_3}{\Lambda_2}, \quad \lambda_{31} = -\frac{m_{12}^-}{l_1^+}, \quad \lambda_{32} = -\frac{l_1^-}{l_1^+}, \quad \lambda_{33} = \frac{\Lambda_3}{l_1^+}, \quad (30.52)$$

$$\lambda_1 = \frac{k_0}{2\Lambda_1 h(x)}, \quad \lambda_2 = -\frac{G_B}{2\Lambda_2 h(x)}, \quad \lambda_3 = \frac{\nu_B}{2l_1^+ h(x)}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2k_0 l_1^+ h(x)},$$

$$\Lambda_2 = m_{12}^- G_B - l_1^+, \quad \Lambda_3 = m_{12}^+ - \frac{1}{2}, \quad k_0 = \frac{1 + \kappa_B}{8G_B}, \quad k_1 = \frac{3 - \kappa_B}{8G_B}, \quad k_2 = \frac{1 - \kappa_B}{(1 + \kappa_B)G_B}.$$

Якщо вважати  $f_1(x) = 0$  та не брати до відома четверте рівняння у (30.51) (умови взаємодії (16.33)), то отримається система трьох сингулярних інтегральних рівнянь для **абсолютно гнучких пружних включень** (АГПВ) (11) [239]. У випадку геометричної та силової симетрії задачі, якщо відсутній згин ( $f_1(x) \equiv 0$ ), такі співвідношення повністю відповідатимуть і найзагальнішому випадкові.

Ще простіша модель [978, 960, 236] враховує лише стрибок дотичних напружень ( $f_2 \neq 0$ ,  $f_1 = f_4 = f_5 = 0$ ). Вона наближено описує поведінку **абсолютно гнучких, мало податних на розтяг включень** (АГМППВ) і зводиться до розв'язування одного сингулярного інтегрального рівняння

$$t_1(x) + s_{1n}(x) = F(x) \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}). \quad (30.51^1)$$

У системі сингулярних інтегральних рівнянь (30.51), (30.46) входять наперед невідомі зусилля  $N_x(w)$ ,  $N_{xy}(w)$  та відносні переміщення  $U(w)$ ,  $V(w)$  на торцях включення (торцьові сталі). У більшості випадків їхнім впливом нехтували. Для тріщини це цілком справедливо; для абсолютно жорсткого включення їх теж можна вважати нульовими, хоча це і не так: зусилля на торцях ненульові, але вони не впливають на деформування абсолютно жорсткого включення. А ось для включень з проміжними властивостями цього робити не бажано, особливо якщо сталі матеріалів матриці та включення близькі між собою.

Найпростіший спосіб їхнього урахування полягає у припущенні, що нормальні напруження на торцях включення  $N_w, N_w$  і  $c_w = U(w)$ ,  $d_w = V(w)$  визначаються априорними формулами [239]

$$\begin{aligned} N_x(w) &= 2h(w)N_w, \quad N_w = \frac{1}{2} \left[ \eta_1 \sigma_{xx1}^0(x) + \eta_2 \sigma_{xx2}^0(x) \right]_{x=w}, \quad \eta_k = \sqrt{\min(1, G_B/G_k)}, \\ N_{xy}(w) &= h(x)(\eta_1 + \eta_2) \sigma_{xy}^0(x) \Big|_{x=w}, \\ U(w) = c_w &= -h(x) \left[ 2(1 + \nu_B) \sigma_{xy}^0(w) - (E_1 - E_2) u_y^{0'}(w) \right] \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{\max(E_B, E_1)} + \frac{1}{\max(E_B, E_2)} \right]_{x=w}, \quad (30.53) \\ V(w) = d_w &= -\frac{(1 + \nu_B)h(x)}{4E_B} \left[ \frac{(1 + \kappa_B) \sigma_{yy}^0(x) - (3 - \kappa_B) \sigma_{xx1}^0(x)}{\max(1, E_1/E_B)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + \kappa_B) \sigma_{yy}^0(x) - (3 - \kappa_B) \sigma_{xx2}^0(x)}{\max(1, E_2/E_B)} \right]_{x=w} \quad (w = a_n^\pm; n = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Безумовно, формули (30.53) визначають напруження і переміщення на торцях включення наближено, однак, в окремих випадках для досить тонких включень вони дають точні значення. Стосовно  $N_w$  це спостерігається для включень з абсолютно податного матеріалу і матеріалу з пружними властивостями матриці. Стосовно абсолютно жорсткого включення величина  $N_w$  не відіграє жодного значення. Для  $U(w) = c_w$ ,  $V(w) = d_w$  формула (30.53) дає точні значення для нерозтягливих і абсолютно жорстких включень, а також прошарків з матеріалу матриці. Слід тому сподіватися, що й у випадку податного матеріалу включення, рівно ж як і для всіх проміжних значень пружних характеристик, похибка буде невеликою. Можна запропонувати й інші формули для визначення  $N_w$ ,  $c_w$ ,  $d_w$ , які дають в граничних випадках істинні значення відповідних величин (30.53), однак, обчислення, здійснені для деяких інших різновидів цих формул [978, 960, 237, 973], свідчать про незначну кількісну зміну результатів і цілковите збереження їхньої якісної поведінки.

Для визначення торцьових сталей можна також скористатися способом, використаним під час розв'язування задач теплопровідності (п. 18.4) і термопружності (п. 39.3), заснованим у даному випадку на використанні формул (30.21). Однак, він дає задовільні результати лише

для дуже тонких включень і загалом не дає відчутної переваги порівняно з апріорними виразами, хоча з теоретичного погляду він цілком обґрунтований.

Інтегральні рівняння (30.51) описують поведження включень з довільними пружними властивостями. У частковому випадку абсолютно жорстких включень, якщо  $E_B \rightarrow \infty$ , з системи (30.53) випливає, що  $f_4^*(x) = 0$  та інтегральне рівняння для визначення  $f_1^*(x)$  для абсолютно жорстких включень на межі поділу двох пружних середовищ

$$t_1^*(x) - i\beta_1 f_1^*(x) = F_1^*(x) \equiv \frac{i}{l_2^+} [u_x^{0r}(x) + u_y^{0r}(x)], \quad \beta_1 = \frac{l_2^-}{l_2^+} \quad (x \in L'). \quad (30.54)$$

Якщо  $E_B \rightarrow 0$ , то отримуємо  $f_1^*(x) = 0$  та інтегральне рівняння

$$t_4^*(x) - i\beta_4 f_4^*(x) = F_4^*(x) \equiv \frac{i}{l_1^+} [\sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x)], \quad \beta_4 = \frac{l_1^-}{l_1^+} \quad (x \in L'), \quad (30.55)$$

що описує поведження двох зчеплених півплощин з різних матеріалів та системою щілин на лінії поділу фаз.

Рівняння (30.54), (30.55) мають однакову структуру

$$t_j^*(x) - i\beta_j f_j^*(x) = F_j^*(x) \quad (x \in L'; j = 1, 4) \quad (30.56)$$

і розв'язуються у замкненому вигляді [635, 112]

$$f_j^*(x) = \frac{1}{\beta_j^2 - 1} \left[ iF_j^*(x) + \frac{X_0^+(x)}{\pi} \int_L \frac{F_j^*(t) dt}{X_0^+(t)(t-x)} \right] + X_0^+(x) Q_{n-1}(x),$$

$$X_0(z) = \prod_{n=1}^N (z - a_n^-)^\gamma (z - a_n^+)^{-1-\gamma} = X_0^*(z) \prod_{n=1}^N \left[ \frac{(z - a_n^-)}{(z - a_n^+)} \right]^{-i\beta}, \quad (30.57)$$

$$X_0^*(z) = \prod_{n=1}^N \left[ (z - a_n^-)(z - a_n^+) \right]^{-1/2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} - i\beta, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 + \beta_j}{1 - \beta_j} \right| \quad (j = 1, 4);$$

$Q_{n-1}(x)$  – поліном степеню  $n-1$ , комплексні коефіцієнти якого визначаються з умов (30.46).

З системи сингулярних інтегральних рівнянь для абсолютно гнучких пружних включень у згаданих граничних випадках випливають аналогічне рівняння для **абсолютно гнучкого нерозтяжливого включення** (АГНВ) (див. (17) [239]) стосовно  $f_2(x)$ ,  $f_4(x)$  та рівняння (30.55) для тріщин.

З рівняння (30.51<sup>1</sup>) для абсолютно гнучких, мало податних на розтяг включень випливають граничні випадки абсолютно гнучкого нерозтяжливого включення, включення з матеріалу однієї з прилеглих півплощин та тріщини з берегами, що контактують [978, 960, 236].

### Одне пружне включення на межі поділу матеріалів

Якщо  $L' = [-a; a]$ , то до визначення особливості розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь можна застосувати результати п. 3.1 і відповідно до (3.13), (30.24), (30.26) отримати

$$\Phi(z) = \begin{cases} -\omega_k \sum_{n=1}^2 \gamma_{kk}^n H(\phi_n, z) \quad (z \in S_k), \\ -\omega_j \sum_{n=1}^2 \gamma_{kj}^n H(\phi_n, z) \quad (z \in S_j), \end{cases} \quad \omega_k = \frac{2G_1 G_2}{c_{kj}} \quad (k = 1, 2; j = 3 - k); \quad (30.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yyk}(z) - i\sigma_{xyk}(z) &= \sigma_{yyk}^0(z) - i\sigma_{xyk}^0(z) + \omega_j \sum_{n=1}^2 \gamma_{kj}^n H(\phi_n, z) - \omega_k \sum_{n=1}^2 \gamma_{kk}^n (H(\phi_n, z) + \\ &+ (z - \bar{z}) \bar{H}'(\phi_n, \bar{z})), \quad \sigma_{xxk}(z) = \sigma_{xxk}^0(z) + \sigma_{yyk}^0(z) - 4\omega_k \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 \gamma_{kk}^n (H(\phi_n, z), \end{aligned} \quad (30.59)$$

$$\gamma_{kk}^n = \frac{d_{1n}}{2G_j} + d_{2n}, \quad \gamma_{kj}^n = \frac{\kappa_j d_{1n}}{2G_j} - d_{2n} \quad (k=1, 2; j=3-k).$$

Беручи до відома співвідношення

$$\begin{aligned} H\left((a-x)^\alpha (a+x)^\beta \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x/a), z\right) &= \frac{i}{4\operatorname{ch}(\pi\mu_n)} \left\{ 2(z-a)^\alpha (z+a)^\beta \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(z/a) - \right. \\ &\left. - \frac{(\pm 1)^{n+1} \Gamma(m+0, 5 \pm i\mu_n)}{am!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)! \Gamma(k+1, 5 \pm i\mu_n)} \left(\frac{\pm z - a}{2a}\right)^k \right\}, \end{aligned} \quad (30.60)$$

неважко з урахуванням (3.17) отримати

$$\begin{aligned} H(\phi_n, z) &= \frac{ia}{2\operatorname{ch}(\pi\mu_n)} (z-a)^\alpha (z+a)^\beta \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(z/a) - \\ &- \frac{i}{4\operatorname{ch}(\pi\mu_n)} \sum_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^{m+1} A_m^n \frac{\Gamma(m+0, 5 \pm i\mu_n)}{m!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)! \Gamma(k+1, 5 \pm i\mu_n)} \left(\frac{\pm z - a}{2a}\right)^k. \end{aligned} \quad (30.61)$$

Таким чином, практичне визначення компонент тензора напружень і вектора перемішень у довільній точці середовища легко здійснюється на основі співвідношень (30.25), (30.59), (30.61) як тільки будуть відомі коефіцієнти  $A_m^n$  розвинень (3.17).

Загалом отримані співвідношення показують, що на кінцях міжфазного включення і на його продовженні спостерігається осциляція напружень. Використання [978, 960, 236] найпростішої моделі абсолютно гнучких, мало податних на розтяг включень, якій відповідає рівняння (30.51)<sup>1</sup>, не дає осциляції розв'язку і для включень на межі поділу матеріалів. Звідси випливає висновок про те, що фізично нереальна осциляція розв'язку для тонких міжфазних дефектів є наслідком недосконалості використаних моделей, ідеалізації явищ. Зокрема у кінчику міжфазної тріщини слід враховувати певну взаємодію берегів (що й робиться тепер у працях М.Комніоу, В.В.Лободи та багатьох інших авторів); у вістрі абсолютно жорсткого включення все ж треба дозволити певне згинання.

### Пружні прямолінійні включення в однорідній матриці

За збігу пружних властивостей матеріалів півплощин ( $E_1 = E_2 = E, \nu_1 = \nu_2 = \nu, G_1 = G_2 = G$ ) маємо

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 0 \quad (30.62)$$

і система рівнянь (30.51) істотно спрощується:

$$\begin{aligned}
t_2(x) + \lambda_{11} t_5(x) - \lambda_1 \int_{a_n^-}^x f_2(t) dt = F_1(x), \quad t_4(x) + \lambda_{21} t_1(x) - \lambda_2 \int_{a_n^-}^x f_4(t) dt = F_2(x), \\
t_5(x) + \lambda_{31} t_2(x) + \lambda_3 \int_{a_n^-}^x f_2(t) dt + \lambda_4 \int_{a_n^-}^x f_5(t) dt = F_3(x), \quad f_4(x) = -k_2 f_1(x) \\
(x \in [a_n^-, a_n^+], n = \overline{1, N}).
\end{aligned} \tag{30.63}$$

Видно, що система сингулярних інтегральних рівнянь (30.63) розщеплена на дві групи: перше і третє рівняння стосовно  $f_2(x)$ ,  $f_5(x)$ , які стосуються розтягу-стиску включення та друге і четверте рівняння стосовно  $f_1(x)$ ,  $f_4(x)$  характеризують згин. За силової та геометричної симетрії задачі згин відсутній і  $f_1(x) = f_4(x) = 0$ ; функції  $f_2(x)$ ,  $f_5(x)$  – непарні.

Торцеві сталі визначаються умовами

$$\begin{aligned}
N_w = \eta \sigma_{xx}^0(x) \Big|_{x=w}, \quad \eta = \sqrt{\min(G_B, G)/G}, \\
c_w = -2h(x) \left[ (1 + \nu_B) \sigma_{xy}^0(w) - E u_y^{0'}(w) \right] \Bigg|_{x=w}^{\left[ \frac{1}{\max(E_B, E)} \right]}, \\
d_w = -\frac{(1 + \nu_B) h(x)}{2} \left[ \frac{(1 + \kappa_B) \sigma_{yy}^0(x) - (3 - \kappa_B) \sigma_{xx}^0(x)}{\max(E_B, E)} \right] \Bigg|_{x=w}^{\left( w = a_n^-, a_n^+; n = \overline{1, N} \right)}.
\end{aligned} \tag{30.53^1}$$

Якщо вважати  $f_1(x) = 0$  та не брати до відома четверте рівняння у (30.63) (умови взаємодії (16.33)), то матимемо систему трьох сингулярних інтегральних рівнянь для абсолютно гнучких пружних включень (19) [239]. У випадку силової та геометричної симетрії задачі ці рівняння і (30.63) є ідентичними.

У граничних випадках пружних властивостей включення з (30.63) маємо

$$t_j^*(x) = F_j^*(x), \quad f_k^*(x) = 0 \quad (x \in L'; k, j = 1, 4; k \neq j) \tag{30.64}$$

– рівняння для системи співвісних тріщин ( $j = 4$ ) в однорідній площині, коли  $E_B = 0$  та такої ж системи абсолютно жорстких прошарків ( $j = 1$ ), якщо  $E_B = \infty$ . Їхній розв'язок дають вирази

$$f_j^*(x) = -\frac{X_0^{**}(x)}{\pi} \int_{L'} \frac{F_j^*(t) dt}{X_0^{**}(t)(t-x)} + X_0^{**}(x) Q_{n-1}(x), \quad t_j^*(x) = F_j^*(x), \tag{30.65}$$

$$f_k^*(x) = 0 \quad (x \in L'; k, j = 1, 4; k \neq j).$$

Зокрема, якщо наявний лише один тонкий дефект уздовж  $L' = [-a; a]$

$$f_j^*(x) = -\frac{1}{\pi X^+(x)} \int_{L'} \frac{F_j^*(t) X^+(t) dt}{t-x} + \frac{c}{X^+(x)}, \quad X(z) = \sqrt{a^2 - z^2}, \tag{30.66}$$

$$t_j^*(x) = F_j^*(x), \quad f_k^*(x) = 0 \quad (x \in L'; k, j = 1, 4; k \neq j).$$

Стала  $c$  дорівнює нулю для тріщини ( $j = 4$ ) та абсолютно жорсткого включення ( $j = 1$ ), якщо воно може вільно повертатися (до нього безпосередньо не прикладені зовнішні зусилля).

Якщо властивості матеріалів включень збігаються з властивостями матриці, то внаслідок співвідношень (30.53) у випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності всі функції стрибка нульові –  $f_r(x) = 0$  ( $r = 1, 2, 4, 5$ ). Якщо ж діють зосереджені чинники, то, як свідчать розрахунки, вони ненульові, проте досить малі.

В усіх інших випадках точний розв'язок рівнянь побудувати не вдається і слід застосовувати наближені методи. Аналіз характеристичної частини цих рівнянь вказує, що функції стрибка  $f_r(x)$  можуть мати кореневу особливість. Тому їх можна шукати у вигляді рядів

$$f_r(x) = \frac{a_n}{\sqrt{(a_n^+ - x)(a_n^- + x)}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^r T_m \left[ \frac{(x - b_n)}{a_n} \right] \left( x \in [a_n^-, a_n^+] \right), \quad (30.67)$$

$$a_n = (a_n^+ - a_n^-) / 2, \quad b_n = (a_n^+ + a_n^-) / 2.$$

### Одне прямолінійне включення в однорідній матриці

Якщо  $N = 1$ ,  $a_1^- = -a$ ,  $a_1^+ = a$ ,  $L' = [-a; a]$ , то розв'язок (30.67) системи сингулярних інтегральних рівнянь (30.63) зводиться до (20.29). Тому з урахуванням п. 30.4 і формули (20.30) напруження і переміщення у кожній точці площини можна подати у вигляді рядів. Наприклад [1000]

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(z) - i\sigma_{xy}(z) = & \sigma_{yy}^0(z) - i\sigma_{xy}^0(z) + \frac{i}{2(1+\kappa)} \left\{ 2Gt_4^*(z) + t_1^*(z) + 2Gt_4^*(\bar{z}) - \kappa t_1^*(\bar{z}) - \right. \\ & \left. -(z - \bar{z}) \left[ 2G\overline{t_4^{*'}}(z) + \overline{t_1^{*'}}(z) \right] \right\} = \frac{-ia}{2(1+\kappa)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2GA_n^{4*} + A_n^{*1}) \rho^{-n} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2GA_n^{4*} - \kappa A_n^{*1}) \bar{\rho}^{-n} + \frac{z - \bar{z}}{z^2 - a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2G\overline{A_n^{4*}} + \overline{A_n^{*1}}) \left( n + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} \right) e^{-n} \right\}, \quad (30.68) \\ & A_n^{1*} = A_n^1 - iA_n^2, \quad A_n^{4*} = A_n^4 + iA_n^5, \quad \rho = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} = \frac{a}{z - \sqrt{z^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Тобто, коефіцієнти розвинення (20.29), які визначаються методами ортогональних многочленів чи колокацій (розд. II), цілком визначають усі характеристики напружено-деформованого стану.

У випадку включення еліптичного профілю (вираз (5.44) за  $\beta = 1$ ) побудована системи лінійних алгебричних рівнянь при  $Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_5 = 0$  дає замкнутий розв'язок [956]

$$\begin{aligned} A_1^1 = A_1^2 = A_1^4 = A_1^5 = 0, \quad A_n^2 = \frac{\lambda_{11} f_\alpha^3 + (\lambda'_{4n} - 1) f_\alpha^1}{r_n}, \quad A_n^5 = \frac{2f_\alpha^1 - \pi(1 + \lambda'_{1n}) A_n^2}{\pi \lambda_{11}}, \\ A_n^1 = \frac{2f_\alpha^2}{\pi(\lambda_{21} - k_2)(1 + \lambda'_{0n})}, \quad A_n^4 = -k_2 A_n^1, \quad \lambda'_{jn} = \frac{\lambda'_j}{n}, \quad \lambda'_j = \lambda_j a, \quad \alpha = n - 1, \quad n \geq 1, \quad (30.69) \\ \lambda_0 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_2 - \lambda_{21}}, \quad r_n = \frac{\pi}{2} \left( \lambda_{31} \lambda_1 - 1 + \frac{\lambda'_4 - \lambda'_1 - \lambda_{11} \lambda'_3}{n} + \frac{\lambda'_1 \lambda'_4}{n^2} \right), \\ f_k^r = \int_{-1}^1 F_r(at) \sqrt{1 - t^2} U_k(t) dt. \end{aligned}$$



Якщо функції  $F_r(x) = F_r = \text{const}$ , що виконується за дії однорідного поля напружень на нескінченності, то  $f_\alpha^r = \frac{\pi}{2} F_r \delta_{\alpha,0}$  і внаслідок цього

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \pi \frac{\lambda_{11} F_3 + (\lambda_4' - 1) F_1}{2r_1}, \quad A_1^5 = \frac{F_1 - (1 + \lambda_1') A_1^2}{\lambda_{11}}, \\ A_1^1 &= \frac{F_2}{(\lambda_{21} - k_2)(1 + \lambda_0')}, \quad A_1^4 = -k_2 A_1^1, \end{aligned} \quad (30.70)$$

де

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{k_0 N_{-a} - u_x^{0r} - k_1 \sigma_{yy}^0}{\Lambda_1}, \quad F_2 = \frac{G_B}{\Lambda_2} \left[ u_y^{0r} - \frac{\sigma_{xy}^0}{G_B} - c_* \right], \quad F_3 = \frac{1}{l_1^+} \left[ \sigma_{yy}^0 + d_* - \nu_B N_{-a} \right], \\ \sigma_{yy}^0 &= p, \quad \sigma_{xx}^0 = p_1, \quad \sigma_{xy}^0 = \tau, \quad u_x^0 + i u_y^0 = \frac{\kappa \Gamma - \Gamma'}{2G} z - \frac{\bar{\Gamma}'}{2G} \bar{z}, \quad \Gamma_1 = \frac{p + p_1}{4}, \quad \Gamma_1' = \frac{p - p_1}{2} + i\tau, \\ \lambda_j' &= a \lambda_j, \quad \Lambda_1 = l_2^+ + k_1 m^-, \quad \Lambda_2 = m^- G_B - l_1^+, \quad r_1 = \frac{\pi}{2} (\lambda_{31} \lambda_1 - 1 + \lambda_4' - \lambda_1' - \lambda_{11} \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_4') \\ \lambda_{11} &= \frac{m^- - k_1 l_1^+}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{21} = -\frac{m^- + G_B l_2^+}{\Lambda_2}, \quad \lambda_{31} = -\frac{m^-}{l_1^+}, \quad \lambda_0 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_2 - \lambda_{21}}, \\ \lambda_1 &= \frac{k_0}{2\Lambda_1 h_0}, \quad \lambda_2 = -\frac{G_B}{2\Lambda_2 h_0}, \quad \lambda_3 = \frac{\nu_B}{2l_1^+ h_0}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2k_0 l_1^+ h_0}, \\ m^- &= \frac{1 - \kappa}{2(1 + \kappa)}, \quad l_1^+ = \frac{2G}{(1 + \kappa)}, \quad l_2^+ = \frac{\kappa}{2G(1 + \kappa)}, \quad k_0 = \frac{1 + \kappa_B}{8G_B}, \quad k_1 = \frac{3 - \kappa_B}{8G_B}, \\ k_2 &= \frac{1 - \kappa_B}{G_B(1 + \kappa_B)}, \quad c_* \equiv \frac{c_{-a}}{2h(-a)} = -\frac{2}{\max(E, E_B)} \left[ (1 + \nu_B) \sigma_{xy}^0 - E u_y^{0r} \right], \\ d_* &\equiv \frac{d_{-a}}{2k_0 h(-a)} = -\frac{1 + \nu_B}{4 \max(E, E_B)} \left[ (1 + \kappa_B) \sigma_{yy}^0 - (3 - \kappa_B) \sigma_{xx}^0 \right]. \end{aligned} \quad (30.71)$$

Усі інші коефіцієнти розвинень (20.29) дорівнюють нулю  $A_i^r = 0$ ,  $i \geq 2$ .

З формул (30.69), (30.70) при  $E_B = 0; \infty$  випливають залежності для тріщини та абсолютно жорсткого включення відповідно.

**Зауваження.** Оскільки під час постановки задачі збурене поле з поверхонь контакту з включенням зносилося на його серединну поверхню, то обчислюючи функції  $t_r(z)$ ,  $\int t_r(z) dz$ , замість  $z = x + iy$  можна брати  $z_1 = z - i \text{sign}(y) h(x)$ . Таким чином, якщо точка  $z$  лежить на межі включення, то  $z_1 = x$ . Обчислення свідчать, що такий спосіб дає можливість дещо підвищити точність розв'язування поставленої задачі. ■

## § 31. Асимптотичні залежності

### 31.1. Міжфазний дефект

#### Загальний випадок

Основним напрямом досліджень під час оцінювання міцності тіл з тонкими неоднорідностями є вивчення поля напружень і переміщень в околі вершин цих дефектів, оскільки саме вони визначають початок процесів пластичного деформування та руйнування зв'язків між структурними елементами матеріалу і конструкції. Подібно до тріщин розподіл напружень і переміщень має певну функціональну залежність у локальних координатах з початком у вершині неоднорідності. У публікаціях [454, 536, 1692, 1624] з експериментальних досліджень руйнування зразків з дефектами типу тріщин відзначають необхідність врахування другого і наступних членів у асимптотичних розвиненнях напружень. Детальне порівняння одночленних, двочленних розвинень і точних розв'язків [1000] засвідчило, що у випадку однорідного середовища з тріщиною двочленні розвинення вже досить добре описують кількісну картину. Проте розподіл максимальних і мінімальних значень навіть вони характеризують не досить точно і за ними неможливо визначити найвірогідніший напрям просування тріщини.

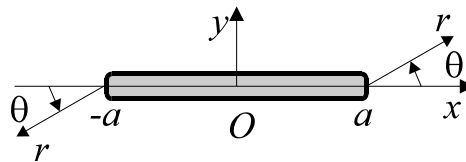


Рис. 31.1. Локальна полярна система координат біля вістря включення

Введемо полярні системи координат  $(r, \theta)$  з початком біля правого чи лівого кінця прошарку  $L' = [-a; a]$  відповідно (рис. 31.1) і розглянемо компоненту

$$\varphi^n(x) = \varphi_N^n(x) = \sum_{m=0}^N A_m^n \hat{P}_m^{(\alpha, \beta)}(x/a) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.14)$$

розв'язку

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^M d_{nm} \phi_m(x), \quad \phi_n(x) = w_n(x) \varphi^n(x) \quad (n = \overline{1, M})$$

з особливістю  $w_n(x)$  ( $n = \overline{1, M}$ ) системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду

$$\mathbf{A} \mathbf{f}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \frac{\mathbf{B}}{\xi - x} + \mathbf{K}(\xi, x) \right\} \mathbf{f}(\xi) d\xi = \mathbf{F}(x) \quad (x \in L'), \quad \int_{L'} \mathbf{f}(\xi) d\xi = \mathbf{Q};$$

$$\det(\mathbf{A} + i\mathbf{B}) \neq 0; \quad \mathbf{A} = \|a_{nm}\|, \quad \mathbf{B} = \|b_{nm}\|, \quad \mathbf{K}(\xi, x) = \|K_{nm}(\xi, x)\| \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{f}(\xi) = \|f_n(x)\|, \quad \mathbf{F}(\xi) = \|F_n(x)\|, \quad \mathbf{Q} = \|Q_n\| \in \mathbb{C} \quad (n, m = \overline{1, M}).$$

Питання особливості розв'язку такої системи сингулярних інтегральних рівнянь було детально розглянуте у п. 3.1, 3.2. З урахуванням подання (30.18) для комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі та компонент тензора напружень (30.24), (30.26) щодо плоскої задачі теорії пружності для міжфазного включення через функції

$$t_r^*(z) \equiv 2iH(f_r^*, z), \quad H(f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

у п. 30.9 (підпункти “Система пружних включень на межі поділу матеріалів” та “Одне пружне включення на межі поділу матеріалів”) побудовано інтегральні рівняння та вирази для структури відповідних пружних потенціалів (30.58), напружень (30.59) та базової функції  $H(\phi_n, z)$  (30.61).

Використавши полярну систему координат  $(r, \theta)$ , на основі попереднього виразу та залежності (30.61) знайдемо на основі (30.61)

$$H(\phi_n, z) = \pm \frac{i \exp(\pm \mu_n \theta \mp i \varepsilon_n)}{2 \operatorname{ch}(\pi \mu_n)} \varphi^n (\pm 1 \pm 2\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(0,5 \pm i \mu_n)}{k! \Gamma(0,5 - k \pm i \mu_n)} \zeta^{-1/2+k} \mp$$

$$\pm \frac{i}{4 \operatorname{ch}(\pi \mu_n)} \sum_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^m A_m^n \frac{\Gamma(m+0,5 \pm i \mu_n)}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)! \Gamma(k+1,5 \pm i \mu_n)} \zeta^k, \quad (31.1)$$

$$\zeta = \frac{r}{2a} e^{i\theta}, \quad \varepsilon_n = \mu_n \ln \frac{r}{2a} \quad (n=1, 2).$$

Вирази для  $H(f_n, z)$ ,  $\bar{H}(f_n, \bar{z})$ ,  $(z - \bar{z})\bar{H}'(f_n, \bar{z})$  знаходимо аналогічно. Застосовуючи принцип мікроскопу ( $r \ll a$ ) [1079], утримуючи необхідну кількість членів розвинень виду (31.1) та підставляючи їх у (30.59), отримуємо асимптотичне розвинення для напружень в околі кінців дефекту бажаної міри точності. Наприклад, утримавши в (31.1) члени  $(r/2a)^{-1/2}$ ,  $(r/2a)^0$ , маємо

$$\|\sigma_{yyk}, \sigma_{xxk}, \sigma_{xyk}, \sigma_{rrk}, \sigma_{\theta\theta k}, \sigma_{r\theta k}\|^\Gamma = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \sum_{m=1}^2 \left( L_{1km}^\pm \cdot K_{1,3-m}^\pm + \right. \\ \left. + L_{2km}^\pm \cdot K_{2,3-m}^\pm \right) + N_k(\pm a) + O(r^{2/3}), \quad z = \pm r e^{i\theta} \pm a \in S_k; \quad (31.2)$$

$$L_{1km}^\pm = \beta_{kk}^m e^{\pm \mu_m \theta} \begin{vmatrix} 3c_{1m}^\pm - c_{5m}^\pm \mp 4\mu_m c_{3m}^\pm \sin \theta \\ 5c_{1m}^\pm + c_{5m}^\pm \pm 4\mu_m c_{3m}^\pm \sin \theta \\ s_{1m}^\pm + s_{5m}^\pm \pm 4\mu_m s_{3m}^\pm \sin \theta \\ 5c_{1m}^\pm + c_{3m}^\pm \pm 4\mu_m c_{1m}^\pm \sin \theta \\ 3c_{1m}^\pm - c_{3m}^\pm \mp 4\mu_m c_{1m}^\pm \sin \theta \\ s_{1m}^\pm - s_{3m}^\pm \mp 4\mu_m s_{1m}^\pm \sin \theta \end{vmatrix} + \beta_{kj}^m e^{\mp \mu_m \theta} \begin{vmatrix} -2c_{1m}^\mp \\ 2c_{1m}^\mp \\ 2s_{1m}^\mp \\ 2c_{3m}^\pm \\ -2c_{3m}^\pm \\ -2s_{3m}^\pm \end{vmatrix},$$

$$L_{2km}^\pm = \beta_{kk}^m e^{\pm \mu_m \theta} \begin{vmatrix} -3s_{1m}^\pm + s_{5m}^\pm \pm 4\mu_m s_{3m}^\pm \sin \theta \\ -5s_{1m}^\pm - s_{5m}^\pm \mp 4\mu_m s_{3m}^\pm \sin \theta \\ c_{1m}^\pm + c_{5m}^\pm \pm 4\mu_m c_{3m}^\pm \sin \theta \\ -5s_{1m}^\pm + s_{3m}^\pm \pm 4\mu_m s_{1m}^\pm \sin \theta \\ -3s_{1m}^\pm - s_{3m}^\pm \mp 4\mu_m s_{1m}^\pm \sin \theta \\ c_{1m}^\pm + c_{3m}^\pm \pm 4\mu_m c_{1m}^\pm \sin \theta \end{vmatrix} + \beta_{kj}^m e^{\mp \mu_m \theta} \begin{vmatrix} -2s_{1m}^\mp \\ 2s_{1m}^\mp \\ -2c_{1m}^\mp \\ -2s_{3m}^\pm \\ 2s_{3m}^\pm \\ -2c_{3m}^\pm \end{vmatrix}; \quad (31.3)$$

$$N_k(\pm a) = \begin{pmatrix} \sigma_{yyk}^0(\pm a) + \sum_{m=1}^2 \eta_{kk}^m \operatorname{Im} n_m^\pm \\ \sigma_{xxk}^0(\pm a) + \sum_{m=1}^2 (\eta_{kk}^m - 2\mu_{kk}^m) \operatorname{Im} n_m^\pm \\ \sigma_{xyk}^0(\pm a) + \sum_{m=1}^2 \eta_{kk}^m \operatorname{Re} n_m^\pm \\ \sigma_{rrk}^0(\pm a) + \sin 2\theta \sum_{m=1}^2 \eta_{kk}^m \operatorname{Re} n_m^\pm - \sum_{m=1}^2 (2\omega_k \gamma_{kk}^m + \mu_{kk}^m \cos 2\theta) \operatorname{Im} n_m^\pm \\ \sigma_{\theta\theta k}^0(\pm a) - \sin 2\theta \sum_{m=1}^2 \eta_{kk}^m \operatorname{Re} n_m^\pm - \sum_{m=1}^2 (2\omega_k \gamma_{kk}^m - \mu_{kk}^m \cos 2\theta) \operatorname{Im} n_m^\pm \\ \sigma_{r\theta k}^0(\pm a) + \sin 2\theta \sum_{m=1}^2 \mu_{kk}^m \operatorname{Im} n_m^\pm + \cos 2\theta \sum_{m=1}^2 \eta_{kk}^m \operatorname{Re} n_m^\pm \end{pmatrix}. \quad (31.4)$$

Тут в околі правого кінця  $\pi(k-2) \leq \theta \leq \pi(k-1)$  (знак плюс); лівого кінця  $\pi(1-k) \leq \theta \leq \pi(2-k)$  (знак мінус);

$$c_{nm}^\pm = \cos\left(\frac{n\theta}{2} + \varepsilon_m\right), \quad s_{nm}^\pm = \sin\left(\frac{n\theta}{2} + \varepsilon_m\right), \quad \gamma_{kk}^m = \frac{d_{1n}}{2G_j} + d_{2n}, \quad \gamma_{kj}^m = \frac{\kappa_j d_{1n}}{2G_j} - d_{2n},$$

$$\beta_{kk}^m = -\frac{\omega_k \gamma_{kk}^m}{\eta_{kk}^m}, \quad \beta_{kj}^m = \beta_{kk}^m - 1, \quad \eta_{kk}^m = \omega_j \gamma_{kj}^m - \omega_k \gamma_{kk}^m, \quad \mu_{kk}^m = \omega_j \gamma_{kj}^m + \omega_k \gamma_{kk}^m, \quad (31.5)$$

$$n_n^\pm = \pm \frac{i}{4\operatorname{ch}(\pi\mu_n)} \sum_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^m A_m^n \frac{\Gamma(n+0,5 \pm i\mu_n)}{(m-1)! \Gamma(1,5 \pm i\mu_n)},$$

$$K_{1,3-n}^\pm - iK_{2,3-n}^\pm = \pm \frac{i\sqrt{\pi a}}{2\operatorname{ch}(\pi\mu_n)} \eta_{kk}^n \varphi^n(\pm a) \quad (n=1, 2).$$

**Узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН)**  $K_{1,3-n}^\pm, K_{2,3-n}^\pm$  ( $n=1, 2$ ) повністю описують головну частину асимптотичного розподілу напружень і переміщень біля кінців довільної тонкої міжфазної неоднорідності. Відзначимо, що

$$K_{1,3-n}^\pm - iK_{2,3-n}^\pm = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot e^{i\varepsilon_n} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}). \quad (31.6)$$

Поява комплексної особливості у розв'язку задачі про дефект на межі поділу матеріалів (так само, як і для міжфазної тріщини) свідчить про некоректність математичної постановки задачі, бо фактично передбачає фізично неможливе заходження верхнього берега неоднорідності біля її кінця за нижній. У [1079] побудована необхідна умова коректності розглядуваної крайової задачі, що накладає обмеження на значення фізичних параметрів, які входять у  $\mu_n$ :

$$\frac{\Delta}{2a} \cong \exp(-1/|\mu_n|) \ll \frac{r}{2a} \ll 1. \quad (31.7)$$

Вона дає можливість оцінити розмір  $\Delta$  області, у якій асимптотичне наближення строгого сингулярного розв'язку не має сенсу. У працях [635, 1079, 111] зазначено, що у випадку міжфазної тріщини  $\Delta/2a = 0,0007$ . Для абсолютно жорсткої плівки отримуємо таке ж значення. Проміжний випадок пружного включення вимагає для отримання числових значень конкре-

тизації математичної моделі включення і відповідну цій моделі систему сингулярних інтегральних рівнянь типу (4.1) для обчислення параметрів  $\mu_n$ ,  $g_n$  (3.10), (3.11), (3.15), необхідних для (3.1.7).

Звернемося до питання сталих  $n_m^\pm$ , що визначають другі члени (3.1.4) асимптотичних розвинень (3.1.2). Зважимо на те, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a (a-x)^\alpha (a+x)^\beta \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{dx}{x-y} &= i\text{th}(\pi\mu_n)(a-y)^\alpha (a+y)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{a}\right) + \\ &+ \frac{(\pm 1)^{m+1}}{2\text{ach}(\pi\mu_n)} \frac{\Gamma(m+0,5 \pm i\mu_n)}{m!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)!\Gamma(k+1,5 \pm i\mu)} \left(\frac{\pm y-a}{2a}\right)^k, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi^n(\xi) d\xi}{\xi-x} &= i\text{th}(\pi\mu_n)\varphi^n(x) + \frac{i}{2\text{ch}(\pi\mu_n)} \sum_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^{m+1} A_m^n \frac{\Gamma(m+0,5 \pm i\mu_n)}{m!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k)!}{k!(m-k-1)!\Gamma(k+1,5 \pm i\mu_n)} \left(\frac{\pm x-a}{2a}\right)^k. \end{aligned} \quad (31.8)$$

Переходячи у цьому виразі до границі  $x \rightarrow \pm a \mp 0$ , маємо

$$n_n^\pm = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm a \mp 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi^n(\xi) d\xi}{\xi-x} - i\text{th}(\pi\mu_n)\varphi^n(x) \right\} \quad (n=1,2), \quad (31.9)$$

а якщо отримана система сингулярних інтегральних рівнянь має вигляд (3.1) з нульовими значеннями матриць  $\mathbf{C} = 0$ ,  $\mathbf{K}(\xi, x) = \|0\|$ , то з використанням (3.4), (3.10), (3.11) або (3.6), (3.10), (3.15) отримуємо

$$n_n^\pm = -\frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow \pm a \mp 0} F_n(x). \quad (31.10)$$

Розглянемо детальніше деякі часткові випадки.

### Тріщина

Нехай дефект – міжфазний абсолютно податний прошарок (тріщина, математичний розріз). У цьому випадку система сингулярних інтегральних рівнянь (30.54) при  $E_B = 0$  зводиться до (3.1), (3.2) при

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{diag}(1, \rho_2), \quad \mathbf{B} = -i\text{diag}(0, -1), \quad \mathbf{C} = \mathbf{K}(\xi, x) = \|0\|, \quad \mathbf{Q} = \|0, c_2\|^T; \\ \mathbf{f}(x) &= \|f_4(x), f_5(x)\|, \quad \mathbf{F}(x) = \left\| 0, -\frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \left( \sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) \right) \right\|^T. \end{aligned} \quad (31.11)$$

тоді  $\mu_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_2$ ,  $\rho_n = \frac{\kappa_n \omega_1}{\kappa_2 \omega_2} = \frac{\kappa_n (G_2 + \kappa_2 G_1)}{\kappa_2 (G_1 + \kappa_1 G_2)}$  ( $n=1,2$ ),  $K_{1,2} = K_{2,2} = 0$ ,  $n_1^\pm = 0$ , ( $\rho_2$  – стала

Дандурса [307]), а два КІН  $K_{1,1} - iK_{2,1} \sim K_1 - iK_2$ , де  $K_1, K_2$  – загальноприйняті позначення для коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) біля тріщини на межі поділу [454, 1687, 536, 1692, 1555]. Причиною некоректності постановки задачі про міжфазну тріщину є неможливість задовольнити крайові умови відсутності навантажень поблизу вістря тріщини. Беручи до відома умову коректності (31.7), маємо  $\varepsilon_2 \cong 0$ ,  $\exp(\pm i\varepsilon_n) \cong 1$ : головна частина (31.3) аси-

асимптотичного розвинення (31.2) збігається з розподілом (3.124) [1079], якщо виправити там помилку друку. Сталі  $n_2^\pm$  (31.4) мають тоді просту механічну інтерпретацію

$$n_2^\pm = \frac{\sigma_{xy}^0(\pm a) + i\sigma_{yy}^0(\pm a)}{\omega_1 + \omega_2} \left( 2n_2^\pm \sim \pm q_4^{*\pm} \right) \quad (31.12)$$

за довільного зовнішнього навантаження. Система сингулярних інтегральних рівнянь (3.1) з урахуванням (31.11) має замкнутий розв'язок, існування якого дає можливість знайти точні аналітичні вирази для УКІН  $K_{1,1}$ ,  $K_{2,1}$ :

$$K_{1,1}^\pm - iK_{2,1}^\pm = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\pi a \omega_1 \omega_2}} \int_{-a}^a \left( \frac{a \pm \xi}{a \mp \xi} \right)^\gamma \left( \sigma_{yy}^0(\xi) - i\sigma_{xy}^0(\xi) \right) d\xi \mp \frac{i\sqrt{\pi}}{2} (\omega_1 + \omega_2) c_2, \quad (31.13)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \mp i\mu_2.$$

Порівняння одночленної та двоچленної асимптотик окружного напруження  $\sigma_{\theta\theta k}$  ( $k=1,2$ ) з точним розв'язком (32.2) (див. теж [1555]) для випадку двовісного розтягу-стиску свідчить, що якщо одночленна асимптотика є настільки неточною, що часом навіть якісно не враховує двовісності навантаження, то двочленна відрізняється від точного розв'язку при  $r=0,03a$  вже не більше ніж на 1%.

### Абсолютно жорстке включення (АЖВ)

У цьому випадку система сингулярних інтегральних рівнянь (30.55) при  $E_B = \infty$  зводиться до (3.1), (3.2) при

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\rho_1, 1), \quad \mathbf{B} = -i \text{diag}(-1, 0), \quad \mathbf{C} = \mathbf{K}(\xi, x) = \|0\|, \quad \mathbf{Q} = \|c_1, 0\|^T; \quad (31.14)$$

$$\mathbf{f} = \|f_1(x), f_2(x)\|, \quad \mathbf{F}(x) = \left\| -\frac{8G_1G_2}{\kappa_1\omega_1 + \kappa_2\omega_2} \left( u_x^{0'}(x) + iu_y^{0'}(x) + i\varepsilon_B \right), 0 \right\|^T,$$

де  $\varepsilon_B$  – кут повертання прошарку як жорсткого цілого.

Система сингулярних інтегральних рівнянь (3.1) у цьому випадку теж розпадається на сукупність рівнянь і тому  $\mu_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_1$ ,  $K_{1,1} = K_{2,1} = 0$ ,  $n_2^\pm = 0$ , а два КІН  $K_{m,2}$  ( $m=1,2$ ) мають для абсолютно жорсткого включення подібний механічний зміст, що й відповідні УКІН  $K_{m,1}$  для тріщини. Причиною некоректності у постановці задачі про міжфазне абсолютно жорстке включення, про яку свідчить осциляційний характер напружень і переміщень, є неможливість задовольнити крайові умови відсутності переміщень поблизу кінців жорсткого прошарку. Розглядаючи відповідну цьому випадку систему сингулярних інтегральних рівнянь (3.1), (31.14), легко знайти механічну інтерпретацію сталої

$$n_1^\pm = \frac{4G_1G_2}{\kappa_1\omega_1 + \kappa_2\omega_2} \left( -u_y^{0'}(\pm a) - \varepsilon_B + iu_x^{0'}(\pm a) \right) \left( 2n_1^\pm \sim \pm q_1^{*\pm} \right). \quad (31.15)$$

Існування розв'язку (3.1), (31.14) у явному вигляді дає можливість знайти точні аналітичні вирази УКІН  $K_{m,2}$  для міжфазного абсолютно жорсткого включення за довільного навантаження

$$K_{1,2}^{\pm} - iK_{2,2}^{\pm} = \frac{(1 - \kappa_1 \kappa_2) \omega_1 \omega_2}{2\pi \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \omega_1 \omega_2} \int_{-a}^a \left( \frac{a \pm \xi}{a \mp \xi} \right)^{\gamma} \left( u_x^{0'}(\xi) + i u_y^{0'}(\xi) + i \varepsilon_B \right) d\xi \mp \mp i \sqrt{a} \frac{(1 - \kappa_1 \kappa_2) \omega_1 \omega_2}{8G_1 G_2} c_1, \quad \gamma = \frac{1}{2} \mp i \mu_1. \quad (31.16)$$

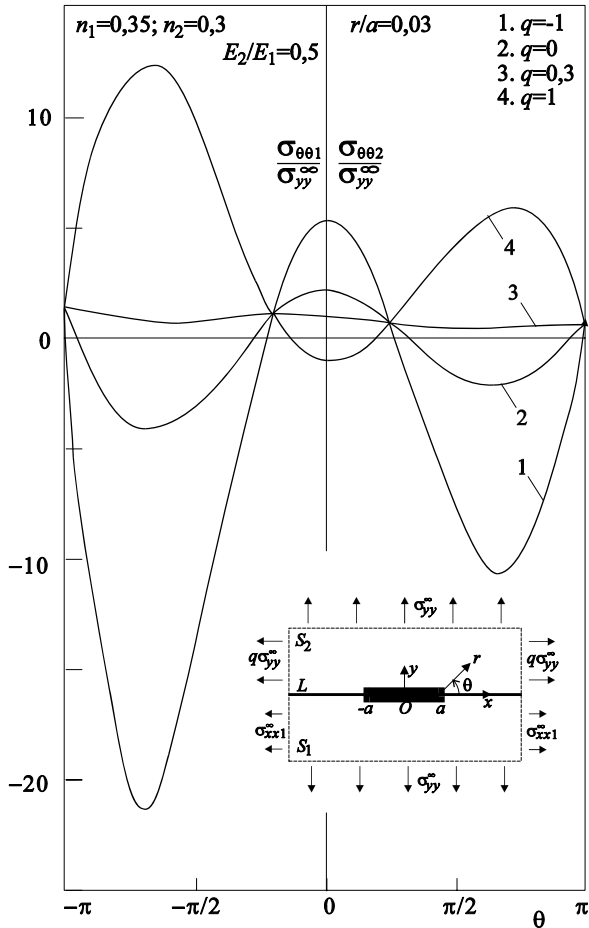


Рис. 31.2

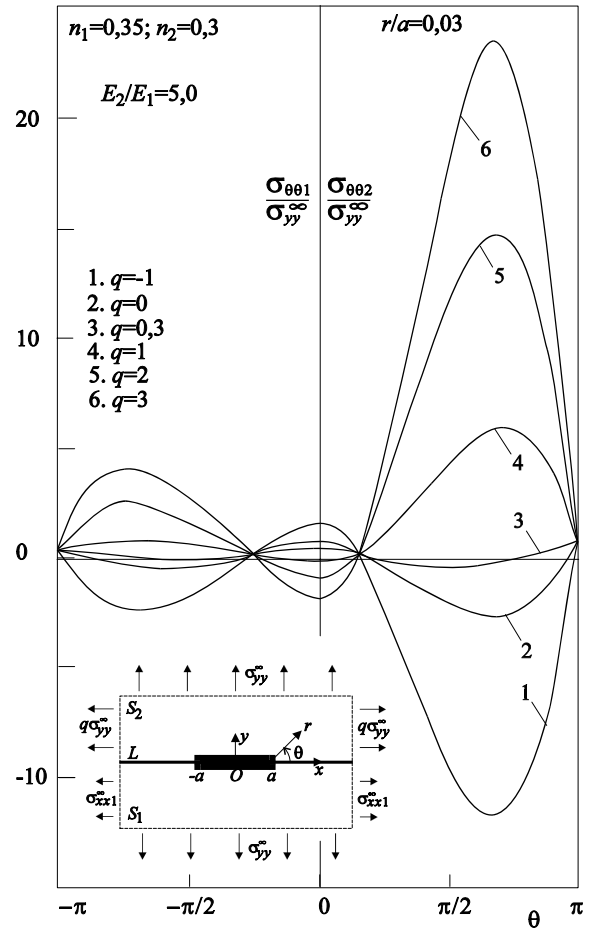


Рис. 31.3

Для прикладу був досліджений розподіл напружень для випадку двовісного розтягу-стиску. На рис. 31.2, 31.3 зображено розподіл числових значень двочленних асимптотик окружного напруження  $\sigma_{\theta\theta k}$  на колі  $r/a = 0,03$  за значень  $\nu_1 = 0,35$ ;  $\nu_2 = 0,3$  та  $E_2/E_1 = 0,5$  (рис. 31.2) і  $E_2/E_1 = 5,0$  (рис. 31.3) залежно від параметра двовісності навантаження  $q$ . Лінія 1 відповідає значенню  $q = -1$ ; 2 -  $q = 0$ ; 3 -  $q = 0,3$ ; 4 -  $q = 1$ ; 5 -  $q = 2$ ; 6 -  $q = 3$ .

Відзначимо цілковиту відсутність концентрації напружень для випадку  $q = (3 - \kappa_2)/(1 + \kappa_2)$ . Це означає, що за такого навантажування середовище нечутливе до присутності абсолютно жорсткого включення на межі поділу матеріалів (деформація видовження середовища у напрямі осі включення дорівнює нулю).

### 31.2. Однорідне середовище

Частковий випадок однорідного середовища з тонким пружним включенням можна отримати, вважаючи у (31.1)–(31.6)  $G_1 = G_2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ . Система сингулярних інтегральних рів-

нянь (30.63) є системою першого роду,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  і, отже, розв'язок задачі в околі торців включення не осцилює. Вважаючи, що функції стрибка мають біля вістря тріщини кореневу особливість, прямуючи до нескінченності як  $r^{-1/2}$ , де  $r$  – відстань від  $z$  до вістря дефекту (аналіз задач теорії тріщин підтверджує таке припущення);  $s_m$  – дугова відстань від точки  $t$  на дузі  $L'_m$  до її кінця  $a_m^\pm$  відповідно, тобто, в разі прямування до лівого краю  $s_m = t + a_m^-$ , у випадку прямування до правого краю  $s_m = a_m^+ - t$ . Тут вжитий термін дуга  $L'_m$ , а не відрізок, оскільки отримані результати властиві також тріщинам, розташованим уздовж довільної дуги Ляпунова. Тоді

$$t_k^*(z) = \mp \left[ p_k^{*\pm} z_1^{-1/2} - \underline{q_k^{*\pm}} + O(r^{1/2}) \right], \quad t_k^{*r}(z) = \frac{1}{2} p_k^{*\pm} z_1^{-3/2} + O(r^{-1/2}),$$

$$\int t_k^*(z) dz = \left[ -2 p_k^{*\pm} z_1^{1/2} \pm \underline{q_k^{*\pm}} z + O(r^{3/2}) \right].$$

Тут

$$\sqrt{z^2 - a^2} = \frac{\pm 2\sqrt{2z_1/a}}{1 - z_1/(4a) + O(z_1^2)}, \quad p_k^{*\pm} = \lim_{s_m \rightarrow 0} \left[ \sqrt{s_m} f_k^*(t) \right], \quad q_k^{*\pm} = \pm \lim_{s_m \rightarrow 0} \lim_{t \in L'} t_k^*(t)$$

$$(k = 1, 3; \quad m = \overline{1, N}).$$

З урахуванням залежності  $(z - \bar{z}) = \pm 2ir \sin \theta$  отримуємо вирази для потенціалів Коло-сова – Мухелішвілі

$$\Phi_{0k}(z) = \frac{\mp i}{2(1+\kappa)} \left\{ \frac{2Gp_3^{*\pm} + p_1^{*\pm}}{\sqrt{z_1}} - (2Gq_3^{*\pm} + q_1^{*\pm}) \right\} + O(r^{1/2}),$$

$$\varphi_{0k}(z) = \frac{-i}{2(1+\kappa)} \left\{ 2\sqrt{z_1} (2Gp_3^{*\pm} + p_1^{*\pm}) - (z_1 + a)(2Gq_3^{*\pm} + q_1^{*\pm}) \right\} + O(1),$$

$$(z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{0k}(z)} = \pm \frac{r \sin \theta (2Gp_3^{*\pm} + p_1^{*\pm})}{2(1+\kappa) z_1^{3/2}} + O(r^{1/2}),$$

$$\Phi_{0l}(z) = \frac{\mp i}{2(1+\kappa)} \left\{ \frac{2Gp_3^{*\pm} - \kappa p_1^{*\pm}}{\sqrt{z_1}} - (2Gq_3^{*\pm} - \kappa q_1^{*\pm}) \right\} + O(r^{1/2}),$$

$$\varphi_{0l}(z) = \frac{i}{2(1+\kappa)} \left\{ 2\sqrt{z_1} (2Gp_3^{*\pm} - \kappa p_1^{*\pm}) - (z_1 + a)(2Gq_3^{*\pm} - \kappa q_1^{*\pm}) \right\} + O(1),$$

$$(z - \bar{z}) \overline{\Phi_{0l}(z)} = \frac{i(z_1 - \bar{z}_1)}{2(1+\kappa)} \left\{ \frac{2Gp_3^{*\pm} + p_1^{*\pm}}{\sqrt{\bar{z}_1}} - (2Gq_3^{*\pm} + q_1^{*\pm}) \right\} + O(1),$$

$$\sqrt{z_1} = \exp(i\theta/2)\sqrt{r}, \quad 1/\sqrt{z_1} = \exp(-i\theta/2)/\sqrt{r}, \quad 1/\sqrt{\bar{z}_1} = \exp(i\theta/2)/\sqrt{r},$$

$$z_1^{-3/2} = \exp(-3i\theta/2)r^{-3/2}, \quad \exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (z \in S_k; \quad k, l = 1, 2; \quad l \neq k).$$

Завдяки цьому асимптотичні вирази (31.2) зводяться до



$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xx} - \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \frac{K_{1,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \end{pmatrix} + \frac{K_{2,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ -7 \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{\kappa_* K_{1,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} (2\kappa - 3) \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -(2\kappa + 5) \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ -(2\kappa + 1) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \end{pmatrix} + \frac{\kappa_* K_{2,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} (2\kappa + 3) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ -(2\kappa - 5) \sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ (2\kappa - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \end{pmatrix} + \quad (31.17) \\
& + \frac{1}{1 + \kappa} \begin{pmatrix} -4Gn_5^\pm + n_2^\pm (1 - \kappa) \\ -4Gn_5^\pm + n_2^\pm (3 + \kappa) \\ -4Gn_4^\pm - n_1^\pm (1 - \kappa) \end{pmatrix} + O(r^{1/2}); \\
& 4\sqrt{2\pi}G \begin{pmatrix} u_x - u_x^0 \\ u_y - u_y^0 \end{pmatrix} = \pm K_{1,1} \sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ (2\kappa + 1) \sin \theta_1 - \sin \theta_3 \end{pmatrix} \pm K_{2,1} \sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa + 3) \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \\ -(2\kappa - 3) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \end{pmatrix} \pm \\
& \pm \kappa_* K_{1,2} \sqrt{r} \begin{pmatrix} -(4\kappa + 1) \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} \pm \kappa_* K_{2,2} \sqrt{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 - \sin \theta_3 \\ (4\kappa - 1) \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \end{pmatrix} \pm \\
& \pm \frac{4\sqrt{2\pi}}{1 + \kappa} \begin{pmatrix} (a + r \cos \theta) [ \kappa n_2^\pm + G(1 - \kappa) n_5^\pm ] - r \sin \theta [ n_1^\pm + G(3 + \kappa) n_4^\pm ] \\ (a + r \cos \theta) [ \kappa n_1^\pm + G(1 - \kappa) n_4^\pm ] - r \sin \theta [ n_2^\pm - G(1 - \kappa) n_5^\pm ] \end{pmatrix} + O(r^{3/2}). \quad (31.18)
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
& \kappa_* = \frac{2}{\kappa - 1}, \quad \theta_p = \frac{p\theta}{2}, \quad n_1^{*\pm} \equiv n_1^\pm - in_2^\pm, \quad n_4^{*\pm} \equiv n_4^\pm + in_5^\pm, \quad n_k^{*\pm} \sim \pm \frac{1}{2} q_k^{*\pm} = \frac{1}{2} \lim_{s_m \rightarrow 0} t_k^*(t), \\
& p_r^\pm = \sqrt{a/2} \varphi^r (\pm a) = \lim_{s_m \rightarrow 0} [\sqrt{s_m} f_r(t)], \quad p_r^{*\pm} = \sqrt{a/2} \varphi^{*r} (\pm a) = \lim_{s_m \rightarrow 0} [\sqrt{s_m} f_r^*(t)], \quad (31.19) \\
& K_{2,1} + iK_{1,1} = \pm \frac{2\sqrt{2\pi}G}{\kappa + 1} p_3^{*\pm} = \pm \frac{2\sqrt{2\pi}G}{\kappa + 1} (p_3^\pm + ip_4^\pm), \\
& K_{2,2} + iK_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa_* (\kappa + 1)} p_1^{*\pm} = \mp \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa_* (\kappa + 1)} (p_1^\pm - ip_2^\pm).
\end{aligned}$$

Згідно з (31.19) УКІН є множниками біля кореневої особливості, яку мають напруження в околі вістря тонкого дефекту в однорідному середовищі, і вимірюються у МПа·м<sup>1/2</sup> або у Мн·м<sup>-3/2</sup>. Якщо розглянути характер зміни напружень на продовженні осі включення з наближенням до його вістря зовні включення ( $\theta = 0$ ) та уздовж його поверхні ( $\theta = \pi$ ), то згідно з формулою (31.17)

$$\begin{aligned}
K_{1,1} + K_{1,2} - i(K_{2,1} + K_{2,2}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{(\theta=0)} \left[ \sqrt{2\pi r} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}) \right], \\
K_{1,1} - \frac{\kappa+3}{\kappa-1} K_{1,2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{(\theta=0)} \left[ \sqrt{2\pi r} \sigma_{xx} \right], \\
\frac{\kappa+1}{\kappa-1} (K_{2,2} + iK_{1,2}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{(\theta=\pi)} \left[ \sqrt{2\pi r} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}) \right], \\
2K_{2,1} + \frac{\kappa-3}{\kappa-1} K_{2,2} &= - \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{(\theta=\pi)} \left[ \sqrt{2\pi r} \sigma_{xx} \right].
\end{aligned} \tag{31.20}$$

Запроваджені чотири УКІН досить повно характеризують міру інтенсивності рівня напруженого та деформованого стану в околі вістря неоднорідності. З наближенням до кінця включення компоненти тензора напружень мають кореневу особливість  $r^{-1/2}$ , переміщення зменшуються як  $r^{1/2}$ . Відповідно до сукупності виразів (31.20) чотири УКІН можна знайти, якщо, зокрема, знати асимптотику зміни певних компонент тензора напружень під час наближення до вістря включення уздовж його поверхні та з боку його продовження.

У випадку однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^{\infty} = p$ ,  $\sigma_{xx}^{\infty} = p_1$ ,  $\sigma_{xy}^{\infty} = \tau$  з попередніх залежностей отримуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^0 &= p, \quad \sigma_{xx}^0 = p_1, \quad \sigma_{xy}^0 = \tau, \quad 2G(u_x^0 + iu_y^0) = (\kappa\Gamma - \bar{\Gamma})z - \bar{\Gamma}'\bar{z}, \\
\Gamma &= \frac{p + p_1}{4}, \quad \Gamma' = \frac{p - p_1}{2} - i\tau, \\
2G[u_x^{0r}(z) + iu_y^{0r}(z)] &= p_* + i\tau, \quad p_* = \frac{1}{4}[p(\kappa-3) + p_1(\kappa+1)], \\
8Gu_x^0 &= \pm(a + r \cos \theta)[(\kappa-3)p + (\kappa+1)p_1] + 4r \sin \theta \tau, \\
8Gu_y^0 &= \pm r \sin \theta[(\kappa-3)p_1 + (\kappa+1)p] + 4(a + r \cos \theta) \tau.
\end{aligned} \tag{31.21}$$

Переходячи до полярної системи координат, де [635, 112, 111]

$$\begin{aligned}
u_r + iu_{\varphi} &= (u_x + iu_y)e^{-2i\varphi}, \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}, \\
\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\varphi} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy})e^{2i\varphi}
\end{aligned} \tag{31.22}$$

з урахуванням того, що біля торця  $+a$  кут  $\varphi = \theta$ , а біля торця  $-a$  маємо  $\varphi = \pi + \theta$ , напруження і переміщення у полярній системі координат дорівнюватимуть

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta + 2\sigma_{xy}\sin 2\theta], \quad u_r = \pm(u_x \cos \theta + u_y \sin \theta), \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta - 2\sigma_{xy}\sin 2\theta], \quad u_{\theta} = \pm(u_y \cos \theta - u_x \sin \theta), \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2}[(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin 2\theta + 2\sigma_{xy}\cos 2\theta].
\end{aligned} \tag{31.23}$$

Тому

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^0 \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}^0 \\ \sigma_{r\theta} - \sigma_{r\theta}^0 \end{pmatrix} = \frac{K_{1,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \frac{K_{2,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -5 \sin \theta_1 + 3 \sin \theta_3 \\ -3 \sin \theta_1 - 3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 + 3 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{\kappa_* K_{1,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -5 \cos \theta_1 - (2\kappa + 1) \cos \theta_3 \\ -3 \cos \theta_1 + (2\kappa + 1) \cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 + (2\kappa + 1) \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \frac{\kappa_* K_{2,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5 \sin \theta_1 + (2\kappa - 1) \sin \theta_3 \\ 3 \sin \theta_1 - (2\kappa - 1) \sin \theta_3 \\ -\cos \theta_1 + (2\kappa - 1) \cos \theta_3 \end{pmatrix} \pm \\
& \pm \frac{1}{2(1+\kappa)} \begin{pmatrix} -4Gn_5^\pm + [2 + (1+\kappa) \cos 2\theta] n_2^\pm - [4Gn_4^\pm + (1-\kappa) n_1^\pm] \sin 2\theta \\ -4Gn_5^\pm + [2 - (1+\kappa) \cos 2\theta] n_2^\pm + [4Gn_4^\pm + (1-\kappa) n_1^\pm] \sin 2\theta \\ -[4Gn_4^\pm + (1-\kappa) n_1^\pm] \cos 2\theta - (1+\kappa) n_2^\pm \sin 2\theta \end{pmatrix} + O(r^{1/2}); \quad (31.24) \\
& 4\sqrt{2\pi}G \begin{pmatrix} u_r - u_r^0 \\ u_\theta - u_\theta^0 \end{pmatrix} = K_{1,1}\sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ -(2\kappa + 1) \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} + K_{2,1}\sqrt{r} \begin{pmatrix} -(2\kappa - 1) \sin \theta_1 + 3 \sin \theta_3 \\ -(2\kappa + 1) \cos \theta_1 + 3 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\
& + \kappa_* K_{1,2}\sqrt{r} \begin{pmatrix} -(2\kappa - 1) \cos \theta_1 - (2\kappa + 1) \cos \theta_3 \\ (2\kappa + 1) \sin \theta_1 + (2\kappa + 1) \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \\
& + \kappa_* K_{2,2}\sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa - 1) \sin \theta_1 + (2\kappa - 1) \sin \theta_3 \\ (2\kappa + 1) \cos \theta_1 + (2\kappa - 1) \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{4\sqrt{2\pi}}{1+\kappa} \begin{pmatrix} n_1^\pm \sin \theta [(\kappa - 1)r \cos \theta + \kappa a] + n_2^\pm [ \kappa a \cos \theta + r(\kappa \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) ] + \\ n_1^\pm [(a + r \cos \theta)\kappa \cos \theta + r \sin \theta] - n_2^\pm \sin \theta [\kappa a + (1+\kappa)r \cos \theta] + \\ n_4^\pm \sin \theta [a(\kappa - 1) - 4r \cos \theta] + n_5^\pm G(1-\kappa)(a \cos \theta + r) \\ n_4^\pm G [(\kappa - 1) \cos \theta (a + r \cos \theta) + (3+\kappa)r \sin^2 \theta] - n_5^\pm G(1-\kappa)a \sin \theta \end{pmatrix} + O(r^{3/2}). \quad (31.25)
\end{aligned}$$

У випадку дії однорідного поля напружень  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ,  $\sigma_{xx}^\infty = p_1$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$  на нескінченності

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^0 = p - (p - p_1) \cos^2 \theta + \tau \sin 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = p - (p - p_1) \sin^2 \theta - \tau \sin 2\theta, \\
& \sigma_{r\theta}^0 = \frac{1}{2}(p - p_1) \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta, \quad 8Gu_r^0 = [(\kappa - 3)p + (\kappa + 1)p_1] a \cos \theta + \\
& \quad + r[(\kappa - 1)(p + p_1) - 2(p - p_1) \cos 2\theta] + 4\tau[a \sin \theta + r \sin 2\theta], \\
& 8Gu_\theta^0 = -[(\kappa - 3)p + (\kappa + 1)p_1] a \sin \theta + 2(p - p_1)r \sin 2\theta + 4\tau[a \cos \theta + r \cos 2\theta].
\end{aligned} \quad (31.26)$$

Якщо стрибок напружень відсутній, то  $f_1^*(x) = t_1^*(x) = 0$  і тоді

$$K_{1,2} = K_{2,2} = n_1^\pm = n_2^\pm = 0, \quad n_4^\pm = \frac{1+\kappa}{16G} \sigma_{xy}^0(\pm a), \quad n_5^\pm = \frac{1+\kappa}{16G} \sigma_{yy}^0(\pm a). \quad (31.27)$$

Разом з тим УКІН  $K_{1,1} - iK_{2,1} \sim K_1 - iK_2$  збігаються з класичними КІН теорії тріщин  $K_1, K_2$ .

За відсутності стрибка переміщень  $f_4^*(x) = t_4^*(x) = 0$  і тоді

$$K_{1,1} = K_{2,1} = n_3^\pm = n_4^\pm = 0, \quad n_1^\pm = -\frac{G(1+\kappa)}{\kappa} [u_y^{0r}(\pm a) + \varepsilon_B], \quad n_2^\pm = -\frac{G(1+\kappa)}{\kappa} u_x^{0r}(\pm a). \quad (31.28)$$

Перші члени асимптотичних виразів (31.17) тоді збігаються з виразами для КІН  $k_1, k_2$  Дж. Сі [1642], якщо взяти до відома, що  $K_{1,2} - iK_{2,2} \sim -\kappa\sqrt{\pi a}(k_1 - ik_2)/\kappa_*$  та виправити помилку друку. Формули Ердогана і Гупти [1275] для абсолютно жорсткого включення хибні. Внаслідок (31.20)  $K_{1,2}, K_{2,2}$  мають для абсолютно жорсткого включення подібний фізичний сенс, що відповідні УКІН для тріщин – різниця полягає тільки у інших функціях кутового розподілу.

Щодо кількості УКІН [958] для пружного включення, то слід зазначити, що функції стрибка  $f_r$  ( $r = 1, 2, 4, 5$ ) (якщо не зважати на фізичну природу включень) можуть бути цілком довільними і незалежними. Вони визначаються не лише зовнішнім навантаженням та геометрією задачі, але й механічними властивостями матеріалів і моделлю самого включення. Тому за довільного фіксованого навантаження у принципі завжди можна знайти таке включення (не обов'язково пружне), що спричинить задані стрибки напружень і переміщень. Звичайно, вибір тої чи іншої моделі включення обумовлює визначальну систему сингулярних інтегральних рівнянь, наприклад (30.51), яка зв'язує функції стрибка за допомогою двох пружних сталих включення та силових функцій  $F_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), які, у свою чергу, визначаються однією зі взаємопов'язаних пар функцій  $\sigma_{xy}^0(x), \sigma_{yy}^0(x)$  або  $u_y^{0'}(x), u_x^{0'}(x)$ . Таким чином, саме інтегральні рівняння конкретизують зв'язок між парами УКІН, наприклад  $K_{1,1}, K_{2,1}$  та  $K_{1,2}, K_{2,2}$ , пружними сталими матеріалів та зовнішнім навантаженням. Цей зв'язок, зазвичай, доволі складний і його не завжди можна виявити, хоча в окремих випадках (тріщини, абсолютно жорсткі включення) простота моделі дає можливість це зробити.

У випадку дослідження пружного гострокутного включення [699] біля кожної вершини теж було розглянуто лише по два КІН  $K_1, K_2$ , однак це можна пояснити тим, що на кінцях досліджуваних у цитованій праці включень, як можна показати, реалізуються досить прості (типу вінклерових) умови взаємодії

$$2G_B(u'_{x1} - u'_{x2} + iu'_{y1} - iu'_{y2}) = -(\sigma_{yy1} - \sigma_{yy2} - i\sigma_{xy1} + i\sigma_{xy2}).$$

Тому заміною

$$K_{k,1} = \kappa_* K_{k,2} + \kappa_k^* \sqrt{\pi} K_k, \quad K_{k,2} = \frac{\sqrt{\pi}(1 - \kappa_k^*)}{\kappa_*(1 + \kappa)}, \quad \kappa_k^* = \frac{K_{k,1} + \kappa_* K_{k,2}}{K_{k,1} + \kappa \kappa_* K_{k,2}}$$

та вимогою виконання умови  $K_{1,1}/K_{1,2} = K_{2,1}/K_{2,2} = \kappa_* G/G_B$  з перших членів асимптотичних залежностей (31.17), (31.18) впливають залежності цитованої праці. Через це у загальному випадку довільного тонкого дефекту у плоскій задачі теорії пружності слід розглядати чотири УКІН, що повністю визначаються зовнішнім навантаженням, геометрією задачі, механічними параметрами складових елементів та математичною моделлю включення (відповідно в антиплоскій задачі та задачі двовимірної теплопровідності – два).

Використання простіших моделей абсолютно гнучкого пружного включення [239] (три функції стрибка) та абсолютно гнучкого мало податного на розтяг включення [978, 960, 236] (одна функція стрибка) обумовлює існування відповідно трьох [239] та одного [960] незалежних УКІН. У [960] розглядаються чотири УКІН, але всі вони між собою пропорційні.

### 31.3. Концентрація напружень біля вістря жорсткого включення, перпендикулярного до прямої лінії поділу матеріалів

Розглянемо [316] жорстке лінійне включення скінченної довжини уздовж відрізка  $L' = [-ib, -ia]$ , ортогональне до прямої лінії  $x = 0$  поділу матеріалів двох півплощин  $S_k$

( $k = 1, 2$ ;  $S_1 \sim \operatorname{Re} z < 0$ ;  $S_2 \sim \operatorname{Re} z > 0$ ) з різними модулями зсуву  $G_k$  та коефіцієнтами Пуассона  $\nu_k$  (рис. 31.4).

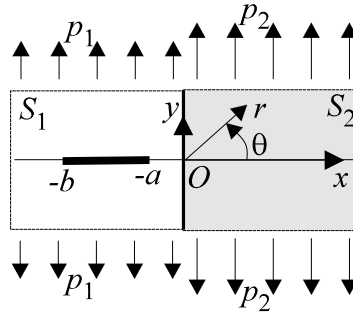


Рис. 31.4. Жорстке включення, перпендикулярне до межі фаз

На безмежності діє однорідне поле напружень  $\sigma_{yyk}^{\infty} = p_k$ , причому

$$p_1(1 + \kappa_1)G_2 = p_2(1 + \kappa_2)G_1.$$

Оберемо полярну систему координат  $(r, \theta)$  на продовженні осі включення у точці її перетину з межею поділу матеріалів півплощин і включення змодельємо стрибком дотичних напружень на його осьовій лінії

$$\sigma_{r\theta}(r, \pi) = -\frac{1}{2}\sigma(r) \quad (0 < a \leq r \leq b). \quad (31.29)$$

Сингулярне інтегральне рівняння збуреної частини задачі, отримане за допомогою інтегрального перетворення Мелліна, має вигляд [311]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[ (r_0 - r)^{-1} + K(r, r_0) \right] \sigma(r_0) dr_0 &= F(r) \quad (a \leq r \leq b), \\ K(r, r_0) &= \frac{1}{2\kappa_1} \left[ \frac{m\kappa_1 - \kappa_2}{m + \kappa_2} + \frac{(4 - \kappa_1^2)(1 - m)}{1 + m\kappa_1} \right] \frac{1}{r_0 + r} + \\ &+ \frac{1 - m}{1 + m\kappa_1} \left[ \frac{8r^2}{(r_0 + r)^3} - \frac{12r}{(r_0 + r)^2} \right], \quad F(r) = -\frac{2G_1(1 + \kappa_1)}{\kappa_1} \frac{\partial u_{r1}^0(r, \pi)}{\partial r}, \quad m = \frac{G_1}{G_2}. \end{aligned} \quad (31.30)$$

Тут  $u_{r1}^0(r, \pi)$  – переміщення на лінії  $\theta = \pi$  за відсутності включення.

Однозначність розв'язуваності інтегрального рівняння (31.30) у класі функцій з інтегрованою особливістю у точках  $r = a, b$  забезпечує умова

$$\int_a^b \sigma(r_0) dr_0 = 0. \quad (31.31)$$

Нормуючи (31.30), (31.31) заміною

$$r = a_0x + b_0, \quad r_0 = a_0t + b_0, \quad a_0 = (a + b)/2, \quad b_0 = (a - b)/2$$

та вважаючи, що  $a \rightarrow 0$ , отримаємо інтегральне рівняння з додатковою умовою

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{t - x} + k(x, t) \right] f(t) dt = \Phi(x) \quad (|x| \leq 1); \quad (31.32)$$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0, \quad (31.33)$$

де

$$k(x, t) = \sum_{k=0}^2 c_k (1+x)^k \frac{d^k (t+x+1)^{-1}}{dx^k}, \quad c_0 = \frac{1}{2\kappa_1} \left[ \frac{m\kappa_1 - \kappa_2}{m + \kappa_2} + \frac{(4 - \kappa_1^2)(1-m)}{1 + m\kappa_1} \right], \quad (31.34)$$

$$c_1 = 3c_2 = \frac{6(1-m)}{\kappa_1(1+m\kappa_1)}, \quad f(t) = \sigma(a_0 t + b_0), \quad \Phi(x) = F(a_0 x + b_0).$$

Розв'язок рівняння (31.32) за умови (31.33) згідно з (3.9) шукаємо у вигляді

$$f(t) = w(t)\varphi(t), \quad w(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \quad (\alpha = -0,5, \quad -1 < \beta < 0), \quad (31.35)$$

де  $\varphi(t)$  – обмежена вимірювана функція. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x} &= -\frac{\varphi(-1) \operatorname{ctg} \left[ \pi\beta(1+x)^\beta \right] + \Phi_0(x)}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t)(1+x)^k \frac{d^k (t+x+1)^{-1}}{dx^k} dt &= \frac{\varphi(-1)\beta(\beta-1)(\beta-k+1)(1+x)^\beta}{\sqrt{2} \sin \pi\beta} + \\ &+ (1+x)^k \frac{d^k \Phi_1(x)}{dx^k} \quad (|x| \leq 1; \quad k = 0, 1, 2); \end{aligned} \quad (31.36)$$

$\Phi_0(x) \in H_{p_1} \left( [(-1; 1)]; \mathbb{R}^1 \right)$ ,  $\Phi_1(x) \in H_{p_2} \left( [(-1; 1)]; \mathbb{R}^1 \right)$  ( $p_1, p_2$  – показники Гельдера), з інтегрального рівняння (31.32) випливає

$$\begin{aligned} -\varphi(-1) \operatorname{ctg} \pi\beta(1+x)^\beta + \Phi_0(x) - \frac{c_0 \varphi(-1)(1+x)^\beta}{\sin \pi\beta} + \Phi_1(x) - \frac{c_1 \varphi(-1)\beta(1+x)^\beta}{\sin \pi\beta} + \\ + (1+x) \frac{d\Phi_1(x)}{dx} - \frac{c_2 \varphi(-1)\beta(\beta-1)(1+x)^\beta}{\sin \pi\beta} + (1+x)^2 \frac{d^2 \Phi_1(x)}{dx^2} = \Phi(x) \quad (|x| < 1). \end{aligned} \quad (31.37)$$

Оскільки  $\varphi(-1) \neq 0$  і для  $-1 < \beta < 0$  виконуються граничні рівності

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^\beta \left\{ \Phi(x), \Phi_0(x), (1+x)^k \frac{d^k \Phi_1(x)}{dx^k} \right\} = 0 \quad (k = 0, 1, 2),$$

співвідношення (31.37) для значень  $c_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) з формули (31.34) приводить до такого характеристичного рівняння стосовно  $\beta$ :

$$\begin{aligned} 2d_1 \cos \pi(\beta+1) - d_2(\beta+1)^2 - d_3 = 0, \quad d_1 = \kappa_1(m + \kappa_1)(1 + m\kappa_1), \\ d_2 = 4(m + \kappa_2)(1-m), \quad d_3 = \kappa_1^2(1-m)(m + \kappa_2) - (m\kappa_1 - \kappa_2)(1 + m\kappa_1). \end{aligned} \quad (31.38)$$

Розв'язок рівняння (31.32), (31.33) шукаємо методом механічних квадратур на основі квадратурної формули Гаусса–Якобі [1276], який дає систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N W_j \left[ \frac{1}{t_j - x_j} + k(x_i, t_j) \right] \varphi(t_j) = \Phi(x_i) \quad (i = 1 \dots N-1), \quad \sum_{j=1}^N W_j \varphi(t_j) = 0, \quad (31.39)$$

де

$$W_j = - \frac{(2n + \alpha + \beta + 2) \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) 2^{\alpha + \beta}}{(n + 1)! (n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t_j) P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_j)},$$

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(t_j) = 0 \quad (j = 1 \dots N), \quad P_{N-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x_i) = 0 \quad (i = \overline{1, N-1});$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$  – поліноми Якобі;  $\Gamma(x)$  – гамма-функція Ойлера (Ейлера);  $N$  – порядок апроксимації.

Визначимо КІН для випадку  $a \rightarrow 0$  у вигляді

$$k(b) = \lim_{r \rightarrow b} \sqrt{2(r-b)} \sigma_{\theta\theta 1}(r, \pi), \quad k(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r}^{-\beta} \sigma_{\theta\theta 2}(r, 0), \quad (31.40)$$

де нормальні напруження дорівнюють [311]

$$\sigma_{\theta\theta 1}(r, \pi) = \frac{\kappa_1 - 1}{2\pi(1 + \kappa_1)} \int_0^b \frac{\sigma(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa_1)} \int_0^b \sigma(r_0) \left( \left[ \frac{m\kappa_1 - \kappa_2}{m + \kappa_2} + \frac{3(\alpha + \kappa_1)(1 - m)}{1 + m\kappa_1} \right] \frac{1}{r_0 - r} + \frac{1 - m}{1 + m\kappa_1} \left[ \frac{8r^2}{(r_0 + r)^3} - \frac{2(7 + \kappa_1)r}{(r_0 + r)^2} \right] \right) dr_0, \quad (31.41)$$

$$\sigma_{\theta\theta 2}(r, 0) = \frac{m}{\pi} \int_0^b \sigma(r_0) \left[ \frac{2 + \kappa_1}{1 + m\kappa_1} - \frac{3}{m + \kappa_2} \right] \frac{1}{2(r_0 + r)} + \left[ \frac{1}{m + \kappa_2} - \frac{1}{1 + m\kappa_1} \right] \frac{r}{(r_0 + r)^2} dr_0.$$

Використовуючи (31.36), з (31.40), (31.41) маємо

$$k(b) = \frac{\kappa_1 - 1}{2(1 + \kappa_1)} \lim_{r \rightarrow b} \left[ \sqrt{2(r-b)} \sigma(r) \right], \quad k(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ G^* \sqrt{2r}^{-\beta} \sigma(r) \right], \quad (31.42)$$

$$G^* = - \frac{m(1 + m\kappa_1)(3 + 2\beta) - (m + \kappa_2)(2 + \kappa_1 + 2\beta)}{2(1 + m\kappa_1)(m + \kappa_2) \sin[\pi(\beta + 1)]}$$

і після підставлення у (31.42) виразу для функції  $\sigma(r)$  з урахуванням (31.34), (31.35) маємо остаточно

$$k(b) = \frac{\kappa_1 - 1}{2(1 + \kappa_1)} 2^\beta \sqrt{b} \varphi(1), \quad k(a) = G^* (b/2)^{-\beta} \varphi(-1). \quad (31.43)$$

Таблиця 31.1

$m$	$\beta$	$k^0(a)$	$k^0(b)$
0,001	-0,289167 / -0,242160	-0,000535 / -0,000642	0,058113 / -0,051889
0,01	-0,292210 / -0,246706	-0,005199 / -0,006177	0,058248 / -0,052028
0,045	-0,303789 / -0,263695	-0,021047 / -0,024010	0,058773 / -0,052558
0,1	-0,321158 / -0,288302	-0,039891 / -0,043180	0,059523 / -0,053229
0,98	-0,497429 / -0,497291	-0,067268 / -0,060371	0,059729 / -0,066556
1,02	-0,502532 / -0,502662	0,000167 / 0,000158	-0,000169 / -0,000159
10,0	-0,786738 / -0,786881	-0,001915 / -0,001138	-0,018174 / -0,016197
23,08	-0,855544 / -0,855184	-0,003832 / -0,002891	-0,021872 / -0,019457
100,0	-0,929365 / -0,929040	-0,003323 / -0,002673	-0,025262 / -0,022460
1000,0	-0,977550 / -0,977427	-0,001260 / -0,001044	-0,026849 / -0,023894

У табл. 31.1 подані значення  $\beta$  мінімального дійсного кореня трансцендентного рівняння (31.38) та безрозмірних КІН (31.43)  $k^0(a) = k(a)b^\beta/p_1$ ,  $k^0(b) = k(b)/(\sqrt{b}p_1)$  для де-

яких значень відносного модуля зсуву матеріалів півплощин  $m$ , однакових коефіцієнтів Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ , кількості вузлів колокації  $N = 40$  у випадку плоскої деформації та (через дріб) – плоского напруженого стану.

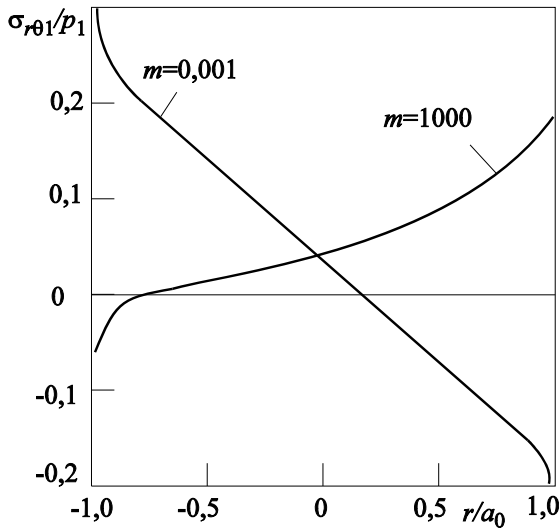


Рис. 31.5

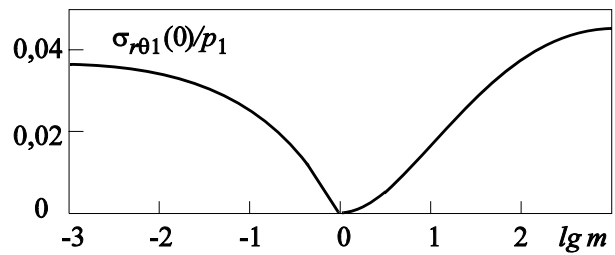


Рис. 31.6

На основі виразу (31.29) та інтерполяційної формули [1435] визначені дотичне напруження  $\sigma_{r\theta}$  на поверхні включення для  $m \equiv G_1/G_2 = 1000; 0,001$  (рис. 31.5) та залежність нормованого напруження  $\sigma_{r\theta}$  від  $m$  у точці  $x = -0$  (рис. 31.6).

### § 32. Одне включення в однорідній і кусково-однорідній ізотропній матриці та періодичні задачі для одного включення. Взаємодія дефектів

Загальні співвідношення для цього випадку подані у п. 30.9. Тепер конкретизуємо отримані вирази стосовно окремих часткових випадків навантаження.

#### 32.1. Однорідне поле напружень на нескінченності

У цьому випадку справедливі вирази (31.21), (31.26). Суперпозиція отриманих розв'язків при

$$\sigma_{yy}^{\infty} = p = \sigma \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{xx}^{\infty} = p_1 = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{xy}^{\infty} = \tau = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (32.1)$$

дає можливість вивчати навантаження одновісним полем напружень  $\sigma$  під кутом  $\alpha$  до осі включення.

#### Тріщина

Для тріщини уздовж відрізка  $[-a; a]$  [1000]



$$\begin{aligned}
f_1(x) = f_2(x) = t_1(z) = t_2(z) = K_{1,2} = K_{2,2} = n_1^\pm = n_2^\pm = 0, \quad A_n^4 + iA_n^5 = \frac{1+\kappa}{2G}(\tau + ip)\delta_{1,n}, \\
f_4(x) + if_5(x) = \frac{(1+\kappa)(\tau + ip)x}{2GX_0(x)}, \quad K_{1,1} = p\sqrt{\pi a}, \quad K_{2,1} = \tau\sqrt{\pi a}, \quad n_4^\pm + in_5^\pm = \frac{1+\kappa}{4G}(\tau + ip), \\
t_4^*(z) = \frac{(1+\kappa)(\tau + ip)}{2G} \left(1 - \frac{z}{X(z)}\right), \quad t_4'^*(z) = \frac{(1+\kappa)(\tau + ip)}{2G} \frac{a^2}{(z^2 - a^2)X(z)}, \\
\sigma_{yy}(z) - i\sigma_{xy}(z) = \left\{ (p - i\tau) \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} \right] - (p + i\tau) a^2 \frac{z - \bar{z}}{(\bar{z}^2 - a^2)^{3/2}} \right\}, \\
\begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_{1,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \end{pmatrix} + \frac{K_{2,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ -7 \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 - p \\ 0 \end{pmatrix} + O(r^{1/2}); \\
4\sqrt{2\pi}G \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \pm K_{1,1}\sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ (2\kappa + 1) \sin \theta_1 - \sin \theta_3 \end{pmatrix} \pm K_{2,1}\sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa + 3) \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \\ -(2\kappa - 3) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \end{pmatrix} \pm \\
\pm \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \begin{pmatrix} -2\tau(1+\kappa)r \sin \theta - (p - p_1)(1+\kappa)(a + r \cos \theta) \\ 2\tau(1+\kappa)(a + r \cos \theta) + (p - p_1)(3 - \kappa)r \sin \theta \end{pmatrix} + O(r^{3/2}); \\
\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_{1,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \frac{K_{2,1}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -5 \sin \theta_1 + 3 \sin \theta_3 \\ -3 \sin \theta_1 - 3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 + 3 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\
+ \begin{pmatrix} (p_1 - p) \cos^2 \alpha \\ (p_1 - p) \sin^2 \alpha \\ 0,5(p - p_1) \sin 2\alpha \end{pmatrix} + O(r^{1/2}), \\
4\sqrt{2\pi}G \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = K_{1,1}\sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ -(2\kappa + 1) \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} + K_{2,1}\sqrt{r} \begin{pmatrix} -(2\kappa - 1) \sin \theta_1 + 3 \sin \theta_3 \\ -(2\kappa + 1) \cos \theta_1 + 3 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\
+ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \begin{pmatrix} (p - p_1) \left[ (3 - \kappa - 4 \cos^2 \theta) r - a(1 + \kappa) \cos \theta \right] + 2\tau(1 + \kappa) a \sin \theta \\ (p - p_1) \left[ 2r \sin 2\theta + (1 + \kappa) a \sin \theta \right] + 2\tau(1 + \kappa) (a \cos \theta + r) \end{pmatrix} + O(r^{3/2}). \quad (32.4)
\end{aligned}$$

Якщо  $\tau = 0$ , то формули (32.3) дають співвідношення (15) [536] у припущенні, що  $p_1 = \alpha p$ . Вирази (32.4) приводять до формул праці [279], якщо врахувати помилку друку, яка змінила знак  $\sigma_{r\theta}$ . Характерно, що дотичні напруження на нескінченності не фігурують у других членах асимптотичних розвинень напружень, але присутні у других членах подання переміщень.

### Абсолютно жорстке включення

Для абсолютно жорсткого включення

$$f_4(x) = 0, f_5(x) = 0, t_4(z) = 0, t_5(z) = 0, K_{1,1} = 0, K_{2,1} = 0, n_4^\pm = 0, n_5^\pm = 0,$$

$$A_n^1 - iA_n^2 = \frac{2G(1+\kappa)}{\kappa} (u_y^{0r} - iu_x^{0r}) \delta_{1,n}, f_1(x) - if_2(x) = \frac{2G(1+\kappa)(u_y^{0r} - iu_x^{0r})x}{\kappa X_0(x)}, \quad (32.5)$$

$$K_{1,2} = \frac{\sqrt{\pi a}(1-\kappa)}{2\kappa} p_*, K_{2,2} = -\frac{\sqrt{\pi a}(1-\kappa)}{2\kappa} \tau, n_1^\pm + in_2^\pm = -\frac{1+\kappa}{2\kappa} (\tau + ip_*),$$

$$p_* = \frac{1}{4} [p(\kappa-3) + p_1(\kappa+1)];$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{\kappa_* K_{1,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} (2\kappa-3)\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \\ -(2\kappa+5)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \\ -(2\kappa+1)\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \end{pmatrix} + \frac{\kappa_* K_{2,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} (2\kappa+3)\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \\ -(2\kappa-5)\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ (2\kappa-1)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} (\kappa+1)p_* \\ (3-\kappa)p_* \\ (\kappa+1)\tau \end{pmatrix} + O(r^{1/2}), \quad (32.6)$$

$$4\sqrt{2\pi}G \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \pm \kappa_* K_{1,2} \sqrt{r} \begin{pmatrix} -(4\kappa+1)\cos\theta_1 + \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_3 \end{pmatrix} \pm$$

$$\pm \kappa_* K_{2,2} \sqrt{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 - \sin\theta_3 \\ (4\kappa-1)\cos\theta_1 + \cos\theta_3 \end{pmatrix} \pm \frac{2\sqrt{2\pi r} \sin\theta}{\kappa} \begin{pmatrix} (\kappa+1)\tau \\ (\kappa-1)p_* \end{pmatrix} + O(r^{3/2});$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{\kappa_* K_{1,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -5\cos\theta_1 - (2\kappa+1)\cos\theta_3 \\ -3\cos\theta_1 + (2\kappa+1)\cos\theta_3 \\ -\sin\theta_1 + (2\kappa+1)\sin\theta_3 \end{pmatrix} + \frac{\kappa_* K_{2,2}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 5\sin\theta_1 + (2\kappa-1)\sin\theta_3 \\ 3\sin\theta_1 - (2\kappa-1)\sin\theta_3 \\ -\cos\theta_1 + (2\kappa-1)\cos\theta_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} [2 - (\kappa-1)\cos 2\theta] p_* + (1+\kappa)\sin 2\theta \tau \\ [2 + (\kappa-1)\cos 2\theta] p_* - (1+\kappa)\sin 2\theta \tau \\ (\kappa-1)\sin 2\theta p_* + (1+\kappa)\cos 2\theta \tau \end{pmatrix} + O(r^{1/2}),$$

$$4\sqrt{2\pi}G \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \kappa_* K_{1,2} \sqrt{r} \begin{pmatrix} -(2\kappa-1)\cos\theta_1 - (2\kappa+1)\cos\theta_3 \\ (2\kappa+1)\sin\theta_1 + (2\kappa+1)\sin\theta_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \kappa_* K_{2,2} \sqrt{r} \begin{pmatrix} (2\kappa-1)\sin\theta_1 + (2\kappa-1)\sin\theta_3 \\ (2\kappa+1)\cos\theta_1 + (2\kappa-1)\cos\theta_3 \end{pmatrix} + \quad (32.7)$$

$$+ \frac{2\sqrt{2\pi r} \sin\theta}{\kappa} \begin{pmatrix} (\kappa+1)\cos\theta \tau + (\kappa-1)\sin\theta p_* \\ (\kappa-1)\cos\theta p_* - (\kappa+1)\sin\theta \tau \end{pmatrix} + O(r^{3/2}), \quad \kappa_* = \frac{2}{\kappa-1}, \quad \theta_p = \frac{p\theta}{2}.$$

### Пружне еліптичне включення

У цьому випадку [1000] слід використовувати формули (30.70) та вираз для функції стрибка

$$f_r(x) = xA_1^r / X_0(x), \quad (32.8)$$

де

$$A_1^1 = \frac{F_2}{(\lambda_{21} - k_2)(1 + \lambda_0^{0'})}, \quad A_1^2 = \frac{\lambda_{11} F_3 + (\lambda_4^{0'} - 1) F_1}{r_4}, \quad A_1^5 = \frac{F_1 - (1 + \lambda_1^{0'}) A_1^2}{\lambda_{11}}, \quad A_1^4 = -k_2 A_1^1.$$

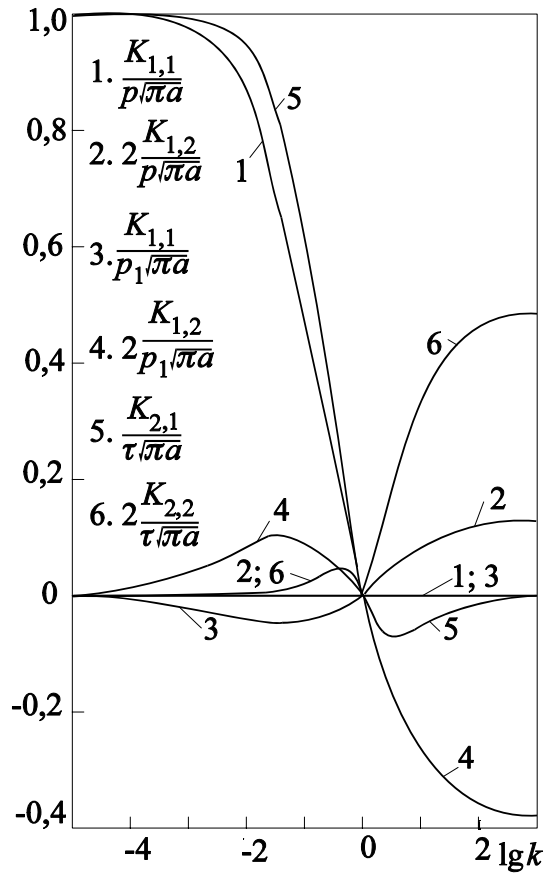


Рис. 32.1

### 32.2. Числовий аналіз узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень для одного пружного включення

Числовий аналіз здійснювався з використанням методів ортогональних многочленів та колокацій. Отримано, що в усіх способах навантажування зі зменшенням відносної довжини  $A = a/h_0$  включення змінної товщини  $h(x)$  (5.44) УКІН зменшуються і за фіксованого значення відносної жорсткості включення  $k = E_B/E$  (відмінного від нуля та нескінченності) при  $A \rightarrow \infty$  стають нульовими.

#### Вплив форми

У працях [958, 956] розрахунки здійснені для однорідного поля напружень на нескінченності окремо для: 1) розтягу перпендикулярно до осі включення  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ; 2) розтягу уздовж осі включення  $\sigma_{xx}^\infty = p_1$ ; 3) поперечного зсуву  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$ . Одновісний розтяг під кутом  $\alpha$  є згідно з (32.1) суперпозицією відповідних навантажень.

Покладалася відносна довжина  $A = 10$  та різні значення відносної жорсткості включення  $k$  ( $\nu_B = \nu$ , плоский напружений стан) та параметра форми  $\beta$ . Рис. 32.1 [958] містить гра-

графіки залежності УКІН від параметра  $k$  для прямокутного включення ( $\beta = \infty$ ). Криві 1...6 відповідають значенням

1.  $K_{1,1}/(p\sqrt{\pi a})$ ; 2.  $K_{1,2}/(p\sqrt{\pi a})$ ; 3.  $K_{1,1}/(p_1\sqrt{\pi a})$ ;
4.  $2K_{1,2}/(p_1\sqrt{\pi a})$ ; 5.  $K_{2,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$ ; 6.  $2K_{2,2}/(\tau\sqrt{\pi a})$ .

При  $k \geq 1000$  і  $k \leq 0,001$  (як і у всіх інших способах навантажування) вони відрізняються від точних для абсолютно жорсткого включення і тріщини відповідно не більше як на 1% і не залежать від форми включення. Ця незалежність від профілю за поздовжнього зсуву теж властива тріщині та абсолютно жорсткій плівці (але не абсолютно жорсткому включенню). Тому можна стверджувати, що використана у плоскій задачі модель включення є того самого порядку міри адекватності, що й плівкова модель антиплоскої задачі.

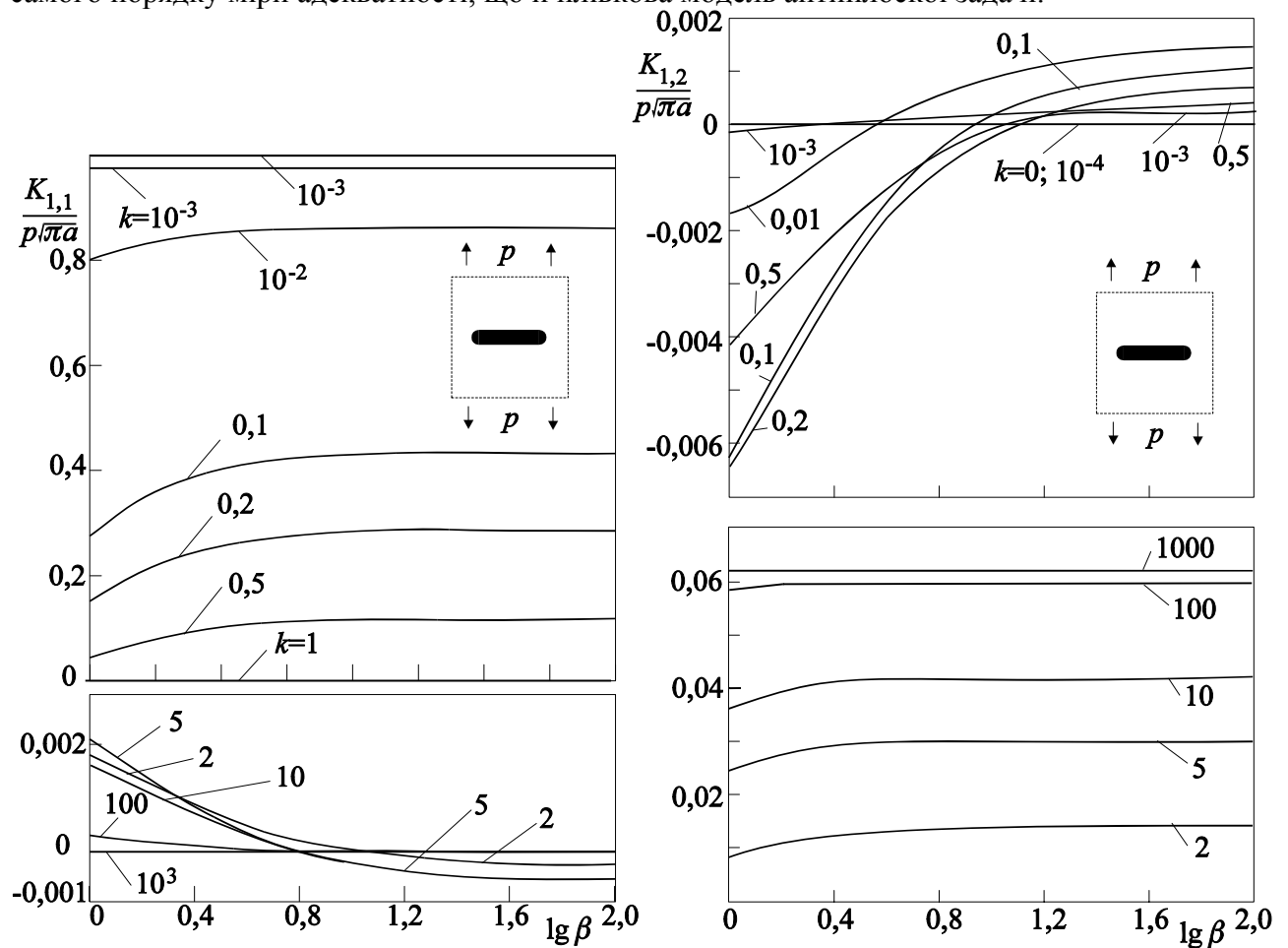


Рис. 32.2

Для дослідження впливу профілю включення обчислення здійснені з точністю не меншою від 1%. Слід зазначити, що за першого й другого способів навантаження  $K_{2,1} = K_{2,2} = 0$ , а у третьому –  $K_{1,1} = K_{1,2} = 0$ . На рис. 32.2 – 32.4 [956] подана залежність ненульових УКІН  $K_{j,i}/(p\sqrt{\pi a})$  ( $i, j = 1, 2$ ) від параметра форми  $\beta$  для окремих значень  $k$ .

Загалом аналіз зміни УКІН за квазістатичного навантажування на нескінченності показав, що загальною тенденцією є збільшення абсолютного значення УКІН зі збільшенням  $\beta$  від  $\beta = 1$  (еліптичний профіль) до  $\beta = \infty$  (прямокутний профіль). Результати для прямокутного включення відрізняються від відповідних даних, отриманих при  $\beta = 100$ , не більше як на 6%, а при  $\beta = 10$  – не більше як на 60%. Причому, ця різниця максимальна для тих УКІН,

які досить малі; для УКІН, що близькі до своїх максимальних (за зміни  $k$ ) значень, вона не перевищує відповідно 1% і 4%. Закругленість кінця включення істотно зменшує концентрацію напружень для всіх значень їх відносної жорсткості за винятком  $k = 0; 1; \infty$  (і, зрозуміло, близьких до них), коли зміна форми не впливає на УКІН. УКІН, обчислені для  $k = 10^{-3}$  та  $k = 10^3$  відрізняються від КІН для тріщини та абсолютно жорсткого включення не більше, як на 1% (в межах точності здійснених обчислень).

Попри те, що форма включення змінюється від еліптичної до прямокутної, моделювання згідно з методом функцій стрибка прошарку лінією стрибка неявно стверджує його гострокутність. Такий підхід породжує особливість поля напружень біля кінця включення і вимагає введення поняття УКІН. Параметр форми  $\beta$  фактично є мірою загостреності кінця включення і тому найтупіше, здавалося б, включення прямокутного профілю спричиняє найвищу концентрацію напружень і з цього погляду його слід вважати найбільш загостреним (дві вершини торця зведені в одну точку). Еліптичний профіль характеризується найменшими значеннями УКІН для кожного значення відносної жорсткості включення.

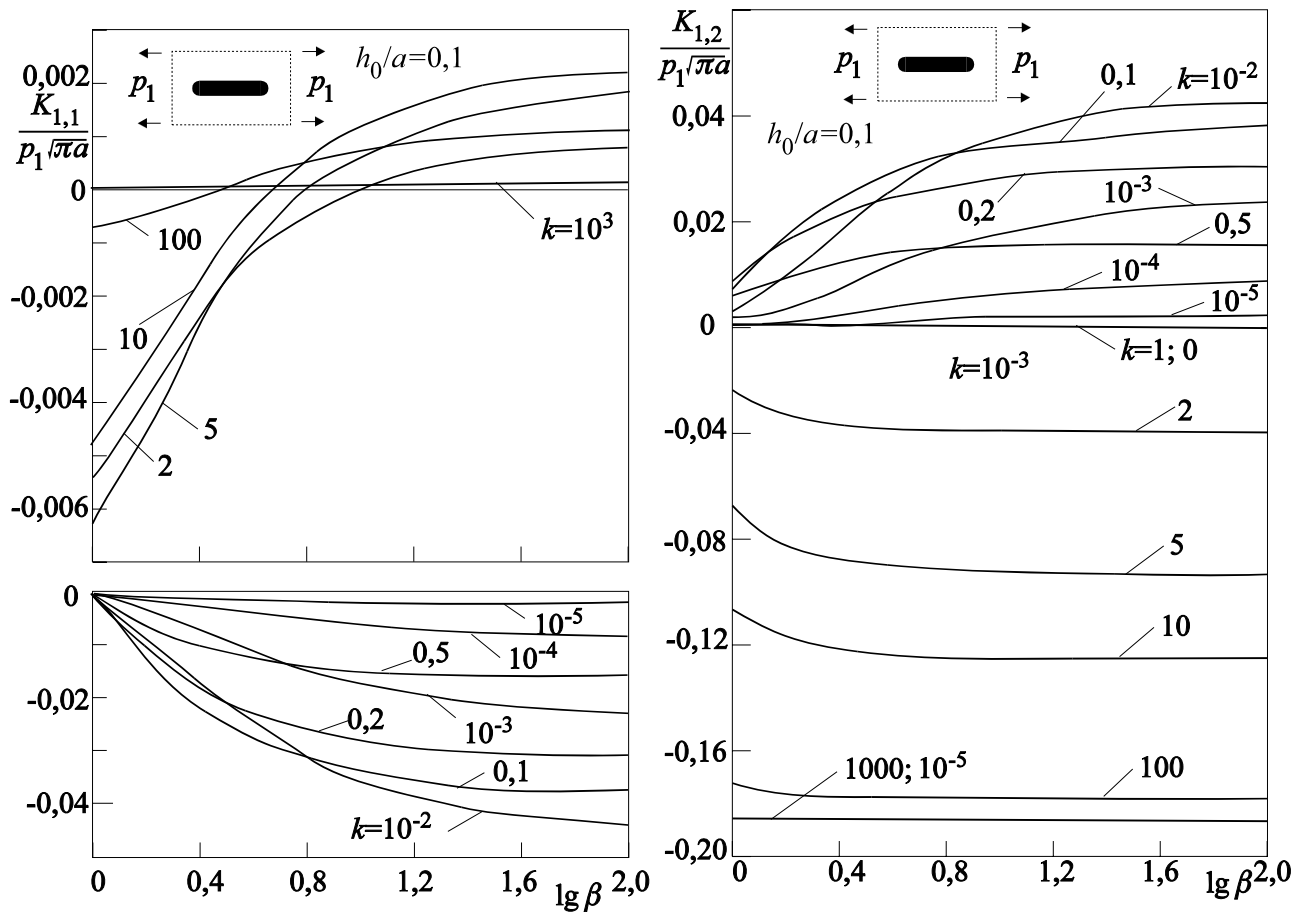


Рис. 32.3

### Абсолютно гнучке малоподатне на розтяг включення

Застосування основної моделі пружного включення у випадку включення на межі поділу матеріалів передбачає існування у кінцях неоднорідності механічно нереальних осцилюючих особливостей. Найпростіша модель абсолютно гнучкого малоподатного на розтяг включення, яка вимагає існування лише стрибка на включенні дотичних напружень  $f_2(x) = \sigma_{xy1} - \sigma_{xy2}$ , породжує одне сингулярне інтегральне рівняння типу Прандтля [978]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_2(t) dt}{t-x} = n \int_{-a}^x f_2(t) dt + B \quad (|x| \leq a),$$

де

$$B = Nb + \gamma, \quad b = \frac{k_0}{B'}, \quad B' = l_2^+ + k_1 m_{12}^-, \quad \gamma = -b \left( \frac{k_1}{k_0} p + \frac{\kappa_1 \Gamma_1 - \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}'_1}{2G_1 k_0} \right), \quad n = \frac{b}{2h};$$

$N$  – нормальне напруження на торці включення.

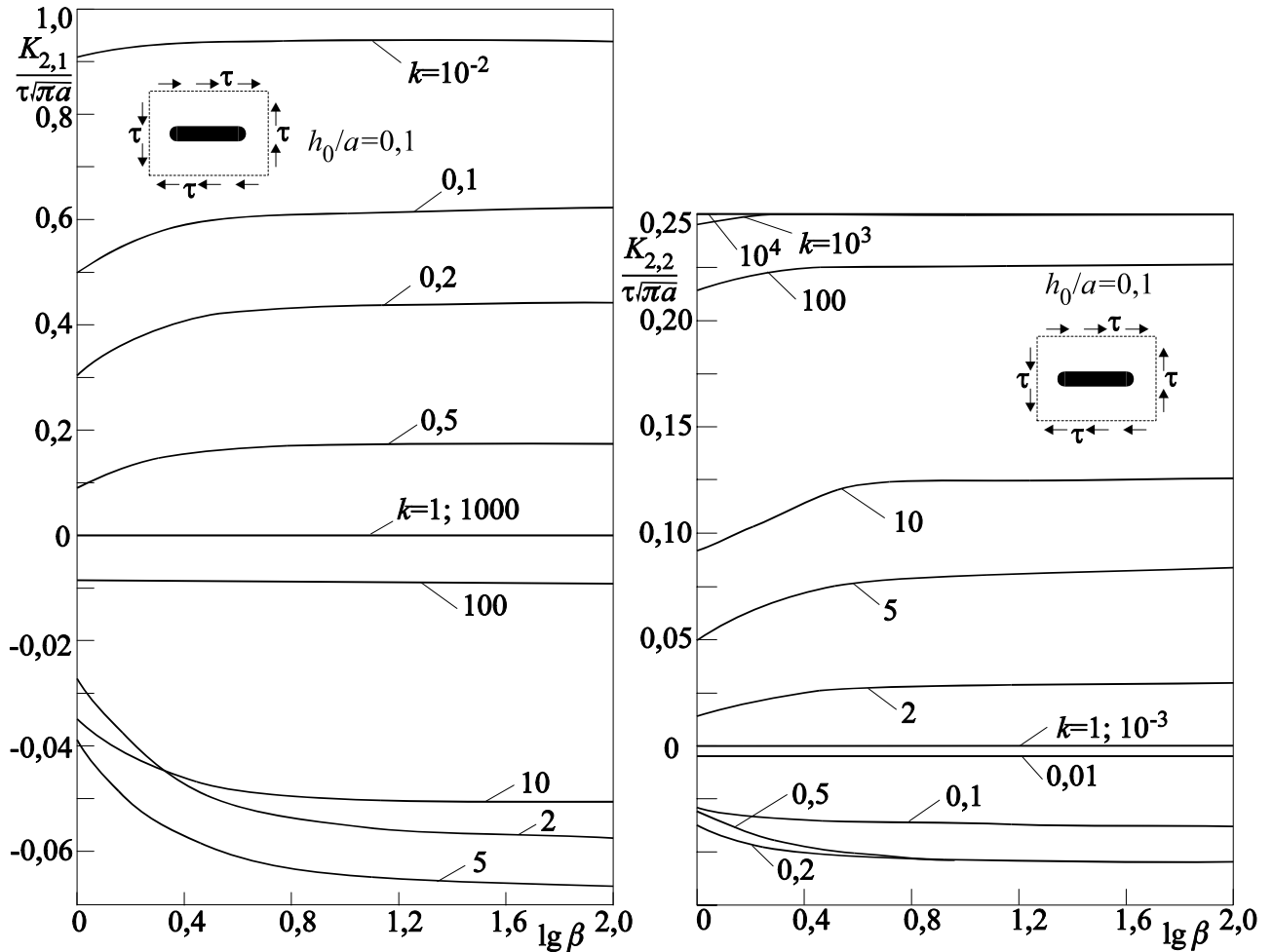


Рис. 32.4

На рис. 32.5, 32.6 подані результати обчислення нормованої функції стрибка  $f_2(x)/p$  (рис. 32.5) та нормованих напружень

$$\sigma_{yyi}^0 = \sigma_{yyi}/p, \quad \sigma_{xxi}^0 = \sigma_{xxi}/p, \quad \sigma_{xyi}^0 = \sigma_{xyi}/p \quad (p_1 = 0, \text{ суцільні лінії});$$

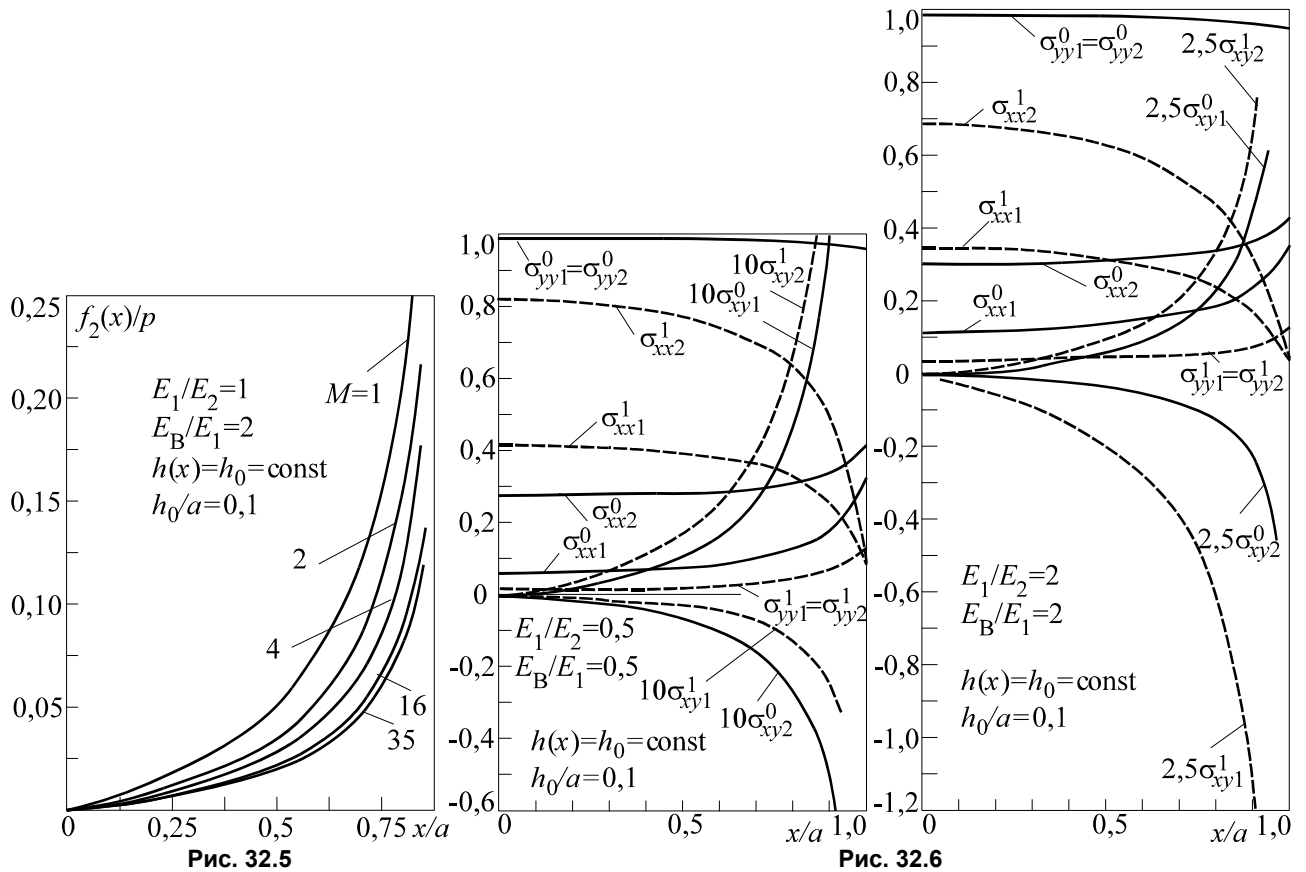
$$\sigma_{yyi}^1 = \sigma_{yyi}/p_1, \quad \sigma_{xxi}^1 = \sigma_{xxi}/p_1, \quad \sigma_{xyi}^1 = \sigma_{xyi}/p_1 \quad (p = 0, \text{ штрихові лінії})$$

на верхній ( $i = 2$ ) та нижній ( $i = 1$ ) поверхнях включення (рис. 32.6) у випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = p, \sigma_{xx1}^\infty = p_1, \sigma_{xx2}^\infty = p_2, \sigma_{xy}^\infty = 0$  (пружні сталі та напруження на нескінченності зв'язані залежністю (30.11) на кусково-однорідну тонку пластину для вказаних на рисунках значень відношень пружних властивостей матеріалів та геометрії задачі.

З огляду на силову симетрію задачі для обчислень застосовувалося подання функції стрибка у вигляді притятого степеневому ряду за парними степенями з виділеною кореневою особливістю

$$f_2(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{m=0,2}^{2M} a_m \left(\frac{x}{a}\right)^m.$$

Різні лінії на рис. 32.5 характеризують функцію стрибка для різної кількості врахованих у цьому ряді членів розвинення  $M = 1, 2, 4, 16, 35$ . Порівняно з методом ортогональних многочленів швидкість збіжності тут набагато менша, хоча й задовільна.



На основі рис. 32.6 можна стверджувати, що жорсткість матеріалу включення істотно впливає на розподіл дотичних напружень і меншою мірою – на зміну нормальних напружень.

Можна отримати замкнуті аналітичні розв'язки побудованого тут рівняння для граничних випадків абсолютно жорсткого включення ( $k = \infty$ ) та тріщини, однак, оскільки введена лише одна функція стрибка, то розходження берегів тріщини не допускається, і у цьому випадку отримується розв'язок задачі для тріщини з берегами, що контактують між собою.

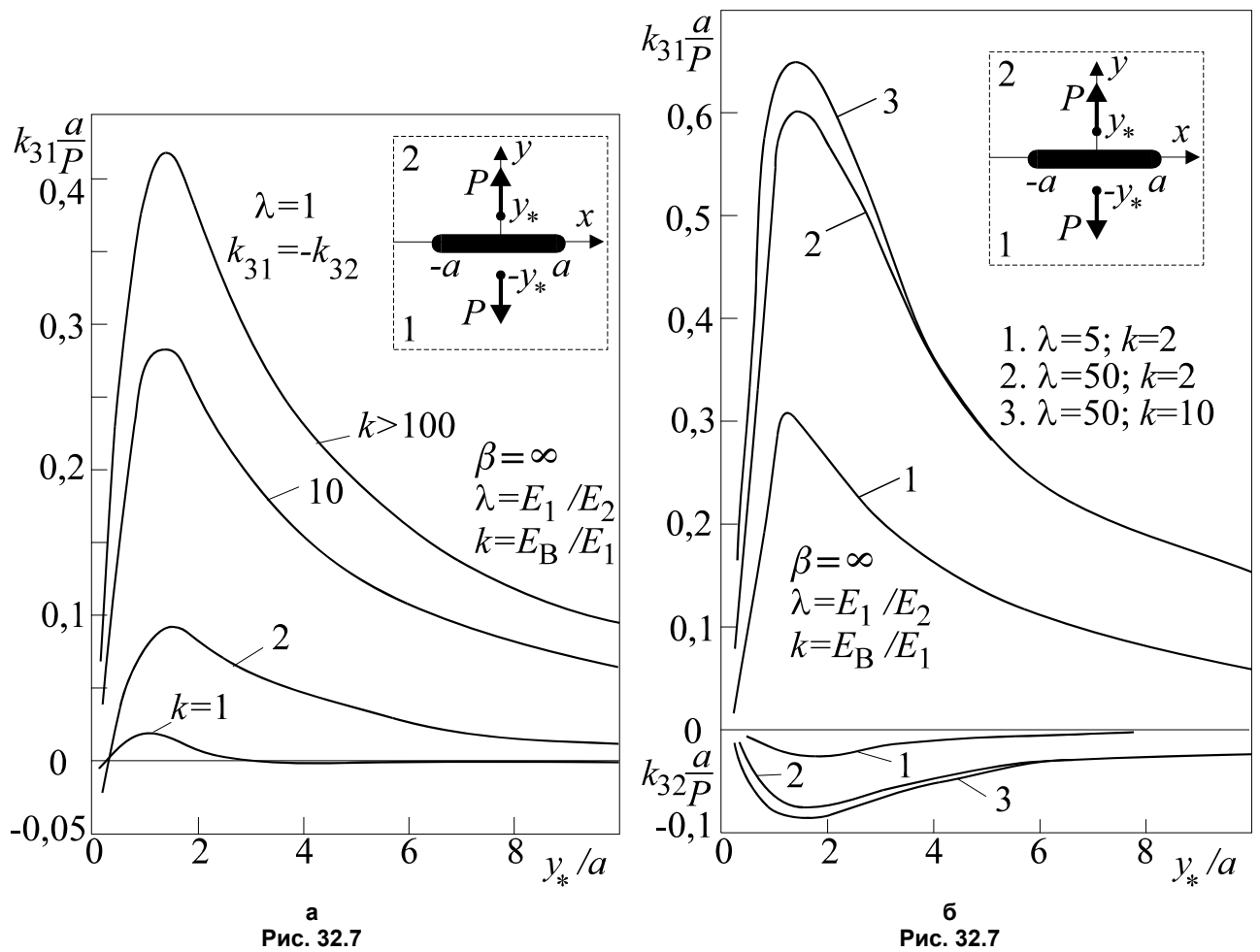
Поняття узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень можна вводити різним чином. Зокрема, у перших працях автора [978, 960], де використовувалася модель абсолютно гнучкого малоподатного на розтяг включення, фігурувала лише одна функція стрибка, а разом з нею й один коефіцієнт інтенсивності напружень, який вводився у розгляд залежністю

$$k_3^\pm \equiv k_{3j}^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a} \sqrt{1 \mp \frac{x}{a}} \sigma_{xy} = m_{jk}^+ K \sim -\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} K_{1,2}, \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

( $j = 1, 2; k = 3 - j$ ).

Відповідно до цієї моделі усі інші функції стрибка неявно дорівнювали нулю. Характерною особливістю цієї моделі є те, що навіть для включення (у тому числі абсолютно нерозтягнутого чи тріщини зі зчепленими берегами) на межі поділу матеріалів осциляція розв'язку поблизу вістря неоднорідності відсутня. Можливість отримання класичного розв'язку для тріщини у граничному випадку  $E_B \rightarrow 0$  за такого підходу відсутня.

Рис. 32.7 [960] відображає обчислену за допомогою методу ортогональних многочленів залежність нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень  $k_{3j}^+ \sim k_{3j}$  ( $j=1,2$ ), що для однорідної матриці пропорційні УКІН  $K_{1,2}$ , обчислені у випадку дії сил  $P_2 = iP$ ,  $P_1 = -iP$ , прикладених відповідно у точках  $z_{*2} = iy_*$ ,  $z_{*1} = -iy_*$  у випадку дії одного включення сталої товщини  $h/a = 0,1$  завдовжки  $2a$  у кусково-однорідній пластині, якщо коефіцієнти Пуассона усіх складових однакові ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu_B = 1/3$ ) за різних значень відносної жорсткості півплощин  $\lambda = E_1/E_2$  та відносної жорсткості включення  $k = E_B/E_1$ . Рис. 32.7 а стосується однорідної матриці ( $\lambda = 1$ ), якщо  $k_{31} = -k_{32}$ , а рис. 32.7 б – півплощин різної жорсткості, якщо зв'язок між  $k_{31}, k_{32}$  відповідно до попереднього виразу дещо складніший. Помітне зростання на початковій стадії абсолютного значення КІН  $k_{31}, k_{32}$  під час віддалення сил від поверхні включення.





### Абсолютно гнучке пружне включення

У праці [239] у розгляд введено три функції стрибка (у прийнятих тут позначеннях – це  $f_2(x), f_4(x), f_5(x)$ ). Тобто вважається, що стрибок нормальних напружень на поверхні включення  $f_1(x) = 0$ . Це рівнозначне припущенню про те, що включення не чинить опору згиніві – воно є абсолютно гнучким. Слід мати на увазі, що за силової та геометричної симетрії задачі включення не вигинається і ця модель є цілком адекватною найзагальнішій. Поряд із згаданими вище КІН  $k_{3j}^{\pm}$ , пов'язаними з границею дотичних напружень під час наближення до вістря включення уздовж його верхнього ( $j = 2$ ) чи нижнього ( $j = 1$ ) берега включення і функцією стрибка  $f_2(x)$ , у розгляд було введено ще два типи КІН, пов'язані з границею нормальних напружень під час прямування до вістря включення з його зовнішнього боку:

$$\{k_1 \sim k_{2j}^{\pm}, k_1 \sim k_{2j}^{\pm}\} = \lim_{x \rightarrow \pm a(\theta=0)} \sqrt{\pm \frac{x}{a} - 1} \{\sigma_{yyj}, \sigma_{xxj}\} \quad (j = 1, 2).$$

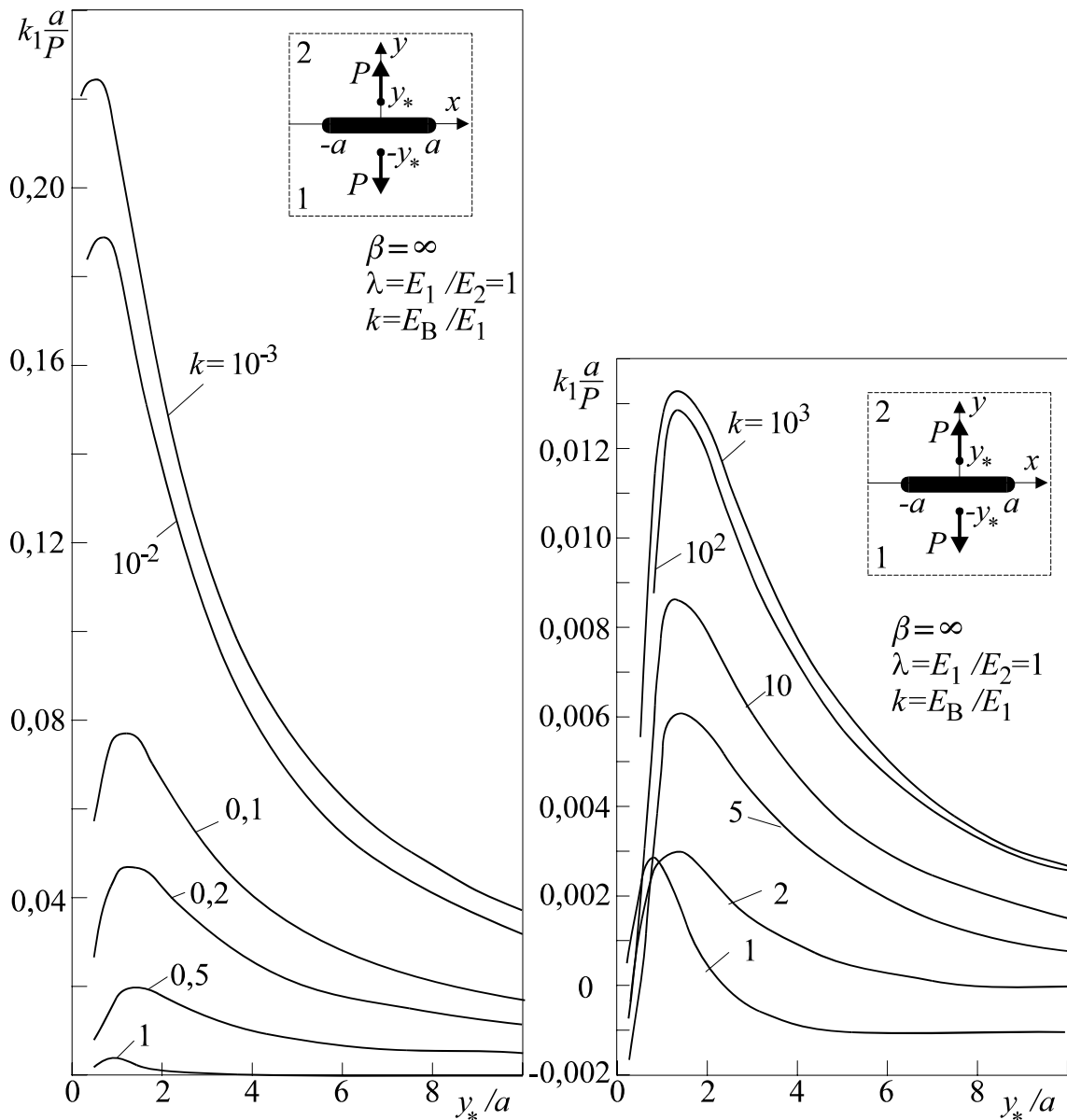


Рис. 32.8

Зіставлення цього виразу з (31.20) дає таку лінійну залежність між цими КІН та УКІН

$$k_1 \sim k_{1j}^{\pm} = \frac{K_{1,1} + K_{1,2}}{\sqrt{2\pi a}}, k_2 \sim k_{2j}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \left[ K_{1,1} - \frac{k+3}{k-1} K_{1,2} \right].$$

Використання згаданої вище моделі [239] вже дає можливість отримати класичний розв'язок для тріщини у граничному випадку  $E_B \rightarrow 0$ . Причому, якщо дефект лежить на межі поділу різних матеріалів, то за такого підходу напруження матимуть характерну механічно некоректну осциляцію.

Рис. 32.8 відображає отриману методом ортогональних многочленів залежність пов'язаного з асимптотикою нормальних напружень  $\sigma_{yy}$  на продовженні осі дефекту КІН  $k_1$  від відносної відстані  $y^*/a$  двох зосереджених сил величини  $P$ , що діють у протилежних напрямках перпендикулярно до осі включення сталої товщини  $h/a = 0,1$  завдовжки  $2a$  в однорідній тонкій пластині (плоский напружений стан) для низки значень відносної жорсткості включення  $k = E_B/E_1$ , якщо коефіцієнти Пуассона усіх складових однакові  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_B = 1/3$ . Цьому КІН, так само, як і КІН  $k_{31}, k_{32}$ , властиве зростання на початковій стадії абсолютного значення під час віддалення сил від поверхні включення і наступне природне зменшення до нуля.

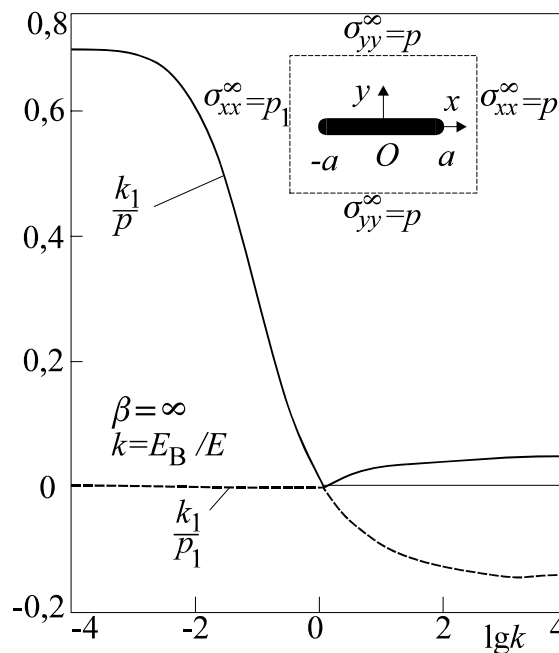


Рис. 32.9

У зв'язку із обговоренням залежності КІН  $k_1$  від параметрів задачі теорії тонких включень також подана на рис. 32.9 залежність від відносної жорсткості включення  $k$  у випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності.

В усіх випадках (дії сил і напружень на нескінченності) обчислення були здійснені з точністю до одного процента і у випадках  $k = 1000; 0,001$  отримані результати з точністю до 1% збігаються з аналітичними результатами розрахунку для абсолютно жорсткої плівки та тріщини відповідно. Таким чином, обчислення підтвердили надійність моделі [239] у випадку симетрії задачі. Однак використання КІН  $k_{1j}, k_{2j}, k_{3j}$  не є доцільним, оскільки не дає можливості виділити вплив різних функцій стрибка. З цього погляду у теорії тонкостінних включень слід надавати перевагу узагальненим КІН  $K_{i,j}$ .

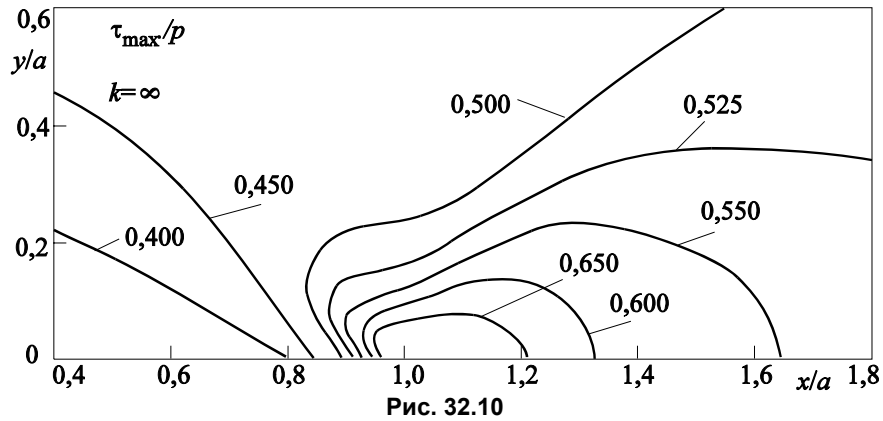


Рис. 32.10

Детальніше про зосереджені сили та крайові дислокації див. нижче у п. 32.3.

### Включення еліптичного профілю

Формально еліптичний профіль  $h(x) = h_0 \left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}$  ( $\beta = 1$ ) тонкого включення дає найменшу концентрацію напружень та відому з літератури сталість поля напружень всередині включення еліптичної форми за однорідного поля напружень на нескінченності. Для прикладу [1000] було здійснено обчислення у випадку  $h_0/a = 0,1$ ,  $\nu_B = \nu = 1/3$  для плоского напруженого стану за різних значень відносної жорсткості включення  $k = E_B/E$  за одновісного розтягу в напрямі, перпендикулярному до осі включення  $\sigma_{yy}^\infty = p$ . Обчислення здійснені з точністю не меншою від 1%.

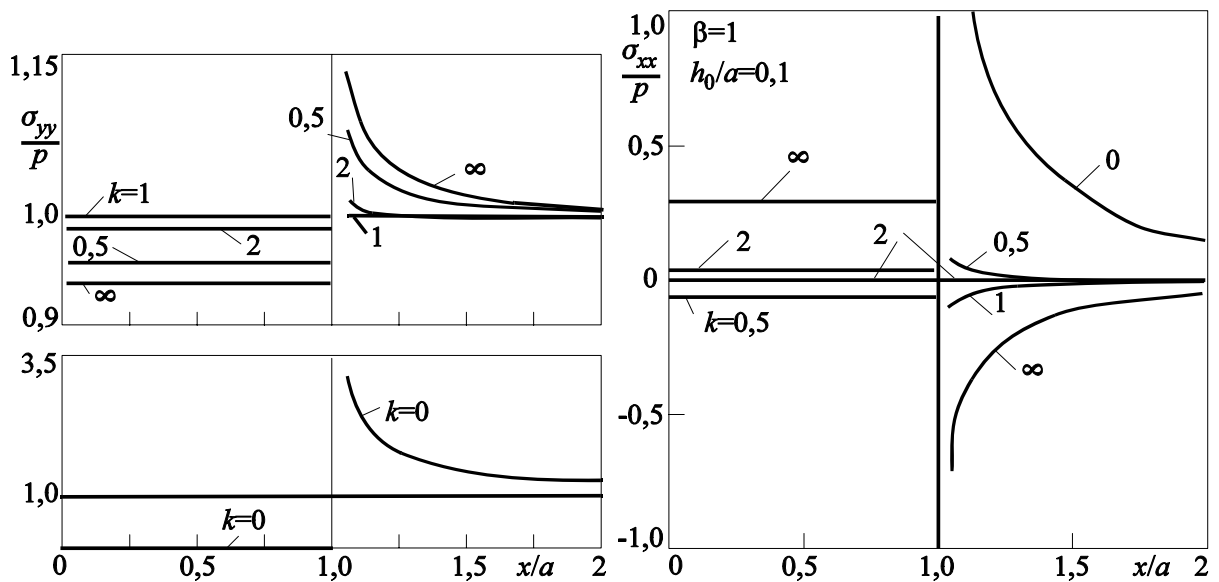


Рис. 32.11

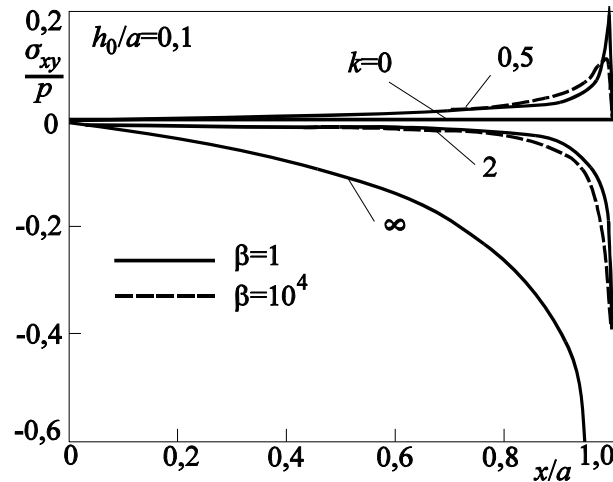


Рис. 32.12

Рис. 32.10 характеризує розподіл максимальних дотичних напружень

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

в області, що прилягає до абсолютно жорсткого включення. На основі цього розподілу можна прогнозувати розвиток смуг ковзання в околі тонкого пружного включення.

На рис. 32.11 зображений розподіл нормованих нормальних напружень  $\sigma_{yy}/p$ ,  $\sigma_{xx}/p$  уздовж лінії поділу матеріалів і на її продовженні для різних значень відносної жорсткості включення. Помітна практично цілковита їхня сталість на межі з включенням та їхня сингулярність на лінії продовження.

А ось дотичні напруження  $\sigma_{xy}$  (рис. 32.12) сингулярні всюди. Внаслідок цього і їхнього стрибка й формується незмінність напружень всередині включення. Для порівняння поряд із суцільними лініями, які відповідають еліптичному профілю включення, штриховими зображені нормовані значення дотичних напружень на лінії контакту матриці з включенням практично сталої товщини ( $\beta = 10^4$ ).

### Асимптотичні формули

На рис. 32.13 зображений розподіл максимальних дотичних напружень  $\sigma_{xy}^{\max}$  уздовж концентричних кіл з центрами у правому торці абсолютно жорсткого включення. Суцільна лінія відповідає повному розв'язкові задачі; штрихова – двочленній асимптотиці; пунктирна – одночленній, яка описується лише сингулярною частиною. Помітно, що врахування другого члена загалом підвищує точність обчислень, однак, і це не може гарантувати достатньо точного значення полярного кута, за якого досягаються екстремальні значення  $\sigma_{xy}^{\max}$ . Тому майже повсякчасне використання у теорії тріщин одночленних асимптотичних розв'язків, що характеризуються КІН, до визначення початкового кута виглядає досить проблематичним.

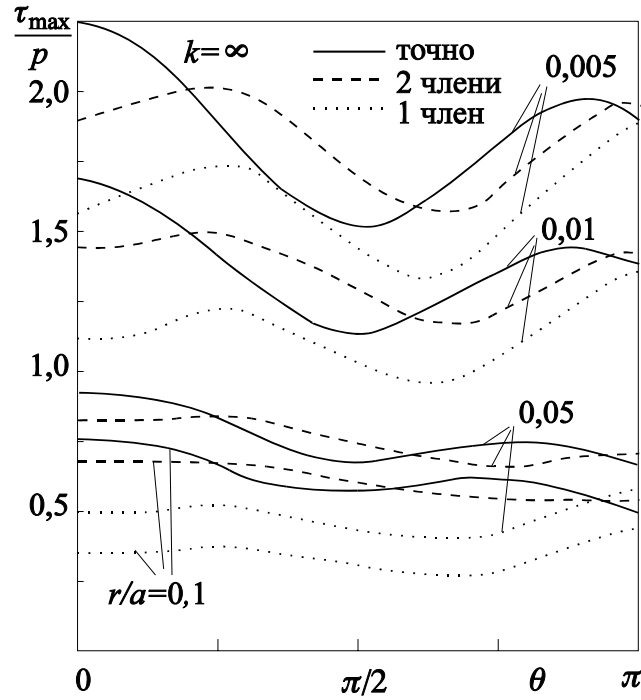


Рис. 32.13

### 32.3. Зосереджені сили і крайові дислокації [978, 960, 239, 954]

#### Скінченна тріщина та абсолютно жорстке включення

Якщо зовнішнє навантаження здійснюється зосередженою силою  $P = P_x + iP_y = if_1^*$  та крайовою дислокацією  $b = b_x + ib_y = f_4^*$ , прикладеними у точці  $z_* = x_* + iy_*$  необмеженого простору, то скориставшись відповідним однорідним розв'язком (30.45<sup>1</sup>) при  $\alpha = 0$ , у граничних випадках тріщини та абсолютно жорсткого включення з інтегральних рівнянь (30.64) та їх розв'язку (30.66) для одного дефекту випливають такі аналітичні вирази.

Для **скінченної тріщини**:

$$t_4^*(z) = c_0 \left[ f_1^* K_1(z, z_*, \kappa) + 2Gf_4^* K_1(z, z_*, -1) + (\bar{f}_1^* + 2G\bar{f}_4^*) L_1(z, z_*) \right],$$

$$t_4^*(x) = c_0 \left[ f_1^* K_0(z, z_*, \kappa) + 2Gf_4^* K_0(z, z_*, -1) + (\bar{f}_1^* + 2G\bar{f}_4^*) L_0(z, z_*) \right],$$

$$K_{1,1} - iK_{2,1} = i\phi\sqrt{\pi/a} \left[ f_1^* K_2(\pm a, z_*, \kappa) + 2Gf_4^* K_2(\pm a, z_*, -1) + (\bar{f}_1^* + 2G\bar{f}_4^*) L_2(z, z_*) \right],$$

$$f_1^*(x) = t_1^*(x) = K_{1,2} = K_{2,2} = 0, \quad L_2(z, z_*) = e^{-i\alpha_1} \frac{(\bar{z}_* - z)(a^2 - z\bar{z}_*)}{\sqrt{a}\sqrt{\bar{z}_*^2 - a^2}(z - \bar{z}_*)^2},$$

$$c_0 = \frac{i\phi}{l_1^+}, \quad \phi = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)}, \quad K_2(z, z_*, \kappa) = \frac{e^{i\alpha_1}}{\sqrt{a}} \left[ \kappa - 1 - \frac{\kappa\sqrt{\bar{z}_*^2 - a^2}}{\bar{z}_* - z} + \frac{\sqrt{\bar{z}_*^2 - a^2}}{z_* - z} \right],$$

$$\begin{aligned}
K_1(z, z_*, \kappa) &= -i\sqrt{a} \frac{K_2(z, z_*, \kappa)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - ie^{i\alpha_1} \left[ \frac{\kappa}{\bar{z}_* - z} - \frac{1}{z_* - z} \right], \quad K_0(z, z_*, \kappa) = -\sqrt{a} \frac{K_2(z, z_*, \kappa)}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \\
K_0(z, z_*, \kappa) &= -\sqrt{a} \frac{K_2(z, z_*, \kappa)}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad L_1(z, z_*) = -i\sqrt{a} \frac{L_2(z, z_*)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - ie^{-i\alpha_1} \frac{\bar{z}_* - z_*}{(z - \bar{z}_*)^2}, \\
L_0(z, z_*) &= e^{-i\alpha_1} \frac{(\bar{z}_* - z_*)(\bar{z}_* z - a^2)}{\sqrt{\bar{z}_*^2 - a^2} \sqrt{z^2 - a^2} (z - \bar{z}_*)^2}.
\end{aligned} \tag{32.9}$$

Для **скінченного абсолютно жорсткого включення**

$$\begin{aligned}
t_1^*(z) &= c_1 \left[ \kappa f_1^* K_1(z, z_*, \kappa) + 2G\kappa f_4^* K_1(z, z_*, 1/\kappa) - (f_1^* + 2G\bar{f}_4^*) L_1(z, z_*) \right], \\
f_1^*(z) &= c_1 \left[ \kappa f_1^* K_0(z, z_*, \kappa) + 2G\kappa f_4^* K_0(z, z_*, 1/\kappa) - (f_1^* + 2G\bar{f}_4^*) L_0(z, z_*) \right], \\
K_{1,2} - iK_{2,2} &= c_2 \sqrt{\pi} \left[ \kappa f_1^* K_2(z, z_*, -1) + 2G\kappa f_4^* K_2(z, z_*, 1/\kappa) - (f_1^* + 2G\bar{f}_4^*) L_2(z, z_*) \right], \\
f_4^*(x) = t_4^*(x) &= K_{1,1} = K_{2,1} = 0, \quad c_1 = \frac{i\phi}{2Gl_2^+}, \quad c_2 = \frac{\phi(1-\kappa)\sqrt{\pi/a}}{2\kappa}.
\end{aligned} \tag{32.10}$$

Вирази для КІН тріщини при  $f_4^* = 0$  (діє лише зосереджена сила) збігаються з відомими [1079]. Формули (21) [1352] для КІН містять помилки.

Виходячи з рівнянь для абсолютно гнучкого пружного включення [239] (див. коментар після формули (30.52)) та для абсолютно гнучкого мало податного на розтяг включення (30.51<sup>1</sup>) [978, 960], можна отримати подібні вирази для абсолютно гнучкого нерозтягливого включення.

### Півнескінченні тріщина й абсолютно жорстке включення

Замкнуті співвідношення для півнескінченної тріщини та абсолютно жорсткого включення одержимо з (32.9)–(32.10) аналогічно до п. 21.1, помістивши у правий торець прошарку локальну систему координат  $\xi = z - a$ ,  $\xi_* = z_* - a$  (див. рис. 26.1) та перейшовши до границі  $a \rightarrow \infty$ . Тоді формули (32.9), (32.10) залишаються правильними, тільки слід замінити вирази для функцій  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  на

$$\begin{aligned}
K_0(\xi, \xi_*, \kappa) &= e^{i\alpha_1} \left[ \frac{\kappa \sqrt{\xi_*}}{\sqrt{\xi} (\bar{\xi}_* - \xi)} - \frac{\sqrt{\xi_*}}{\sqrt{\xi} (\xi_* - \xi)} \right], \\
K_1(\xi, \xi_*, \kappa) &= \frac{ie^{i\alpha_1}}{\sqrt{\xi}} \left[ \frac{\kappa \sqrt{\xi_*}}{\bar{\xi}_* - \xi} - \frac{\sqrt{\xi_*}}{\xi_* - \xi} \right] - ie^{i\alpha_1} \left[ \frac{\kappa}{\bar{\xi}_* - \xi} - \frac{1}{\xi_* - \xi} \right], \\
L_0(\xi, \xi_*) &= e^{-i\alpha_1} \frac{(\bar{\xi}_* - \xi_*)(\bar{\xi}_* + \xi)}{2\sqrt{\xi \bar{\xi}_*} (\xi - \bar{\xi}_*)^2}, \quad L_1(\xi, \xi_*) = ie^{i\alpha_1} \frac{\bar{\xi}_* - \xi_*}{2\sqrt{\xi \bar{\xi}_*} (\sqrt{\xi} + \sqrt{\bar{\xi}_*})^2}, \\
K_2(\xi, \xi_*, \kappa) &= -e^{i\alpha_1} \left[ \frac{\kappa \sqrt{2\xi_*}}{\bar{\xi}_* - \xi} - \frac{\sqrt{2\xi_*}}{\xi_* - \xi} \right], \quad L_2(z, z_*) = e^{-i\alpha_1} \frac{(\xi_* - \bar{\xi}_*)(\xi + \bar{\xi}_*)}{\sqrt{2\xi_*} (\xi - \bar{\xi}_*)^2}.
\end{aligned} \tag{32.11}$$

Тоді для півнескінченної тріщини отримається вираз (23) [1352] (при цьому слід зробити заміну  $if_1^*/\sqrt{2}$  на  $F$ ,  $Gf_4^*/\sqrt{2}$  – на  $G$  і результат поділити на  $\sqrt{2}$ ):

$$K_{1,2} = K_{2,2} = 0, \quad K_1 - iK_2 \sim K_{1,1} - iK_{2,1} = i\phi\sqrt{2\pi} \left\{ f_1^* e^{i\alpha_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi_*^*}} - \frac{\kappa}{\sqrt{\bar{\xi}_*^*}} \right] + \right. \\ \left. + 2Gf_4^* e^{i\alpha_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi_*^*}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\xi}_*^*}} \right] + \frac{1}{2} \left( \overline{f_1^*} + 2G\overline{f_4^*} \right) e^{-i\alpha_1} \frac{\xi_*^* - \bar{\xi}_*^*}{\bar{\xi}_*^* \sqrt{\xi_*^*}} \right\}. \quad (32.12)$$

Для півнескінченного абсолютно жорсткого включення –

$$K_{1,1} = K_{2,1} = 0, \quad K_{1,2} - iK_{2,2} = \frac{\phi(1-\kappa)\sqrt{2\pi}}{2\kappa} \left\{ \kappa f_1^* e^{i\alpha_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi_*^*}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\xi}_*^*}} \right] + \right. \\ \left. + 2Gf_4^* e^{i\alpha_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi_*^*}} - \frac{1}{\kappa\sqrt{\bar{\xi}_*^*}} \right] - \frac{1}{2} \left( \overline{f_1^*} + 2G\overline{f_4^*} \right) e^{-i\alpha_1} \frac{\xi_*^* - \bar{\xi}_*^*}{\bar{\xi}_*^* \sqrt{\xi_*^*}} \right\}. \quad (32.13)$$

### Числовий аналіз для пружного включення

На основі методів ортогональних многочленів [960, 239] і колокацій [954] розв'язані відповідні інтегральні рівняння з урахуванням виразів (30.45<sup>2</sup>) для сил та крайових дислокацій. Досліджений вплив відносної відстані точки прикладання сили і дислокації  $D = y_*/a$  ( $x_* = 0$ ), відносної жорсткості включення  $k = E_B/E$  ( $\nu_B = \nu$ ) та параметра форми  $\beta$  включення змінної товщини  $h(x)$  (5.44) на УКІН для параметра відносної довжини включення  $A = a/h_0 = 10$ .

Підтверджені ті ж якісні тенденції, що й у випадку антиплоскої деформації. Отримані результати для  $k = 0,0001$  та  $k = 1000$  відрізняються від поданих аналітичними залежностями (32.9) для тріщини і (32.10) для абсолютно жорсткого включення не більше, як на 1%, і не залежать від  $\beta$ . В цілому ж зі збільшенням  $k$  вплив  $\beta$  збільшується і для кожного фіксованого  $k$  збільшення  $\beta$  спричиняє збільшення абсолютного значення УКІН так, що максимум досягається для дефекту прямокутного профілю. З віддаленням сили чи дислокації від включення УКІН, як правило, зменшує свою абсолютну величину, хоча в окремих випадках безпосереднє наближення збурювального чинника до поверхні включення (особливо жорсткішого від матриці) теж дещо знижує концентрацію напружень біля краю прошарку у порівнянні з деяким її максимальним значенням.

### Про уточнення рівнянь моделі

Задовольняння умов взаємодії на реальних поверхнях  $x \pm ih(x)$  контакту тонкого включення з матрицею приводить до появи у правих частинах сингулярних інтегральних рівнянь функцій  $\sigma_{yy}^0(x \pm ih)$ ,  $\sigma_{xx}^0(x \pm ih)$ ,  $\sigma_{xy}^0(x \pm ih)$ ,  $\sigma_x^0(x \pm ih)$ ,  $\sigma_y^0(x \pm ih)$ , які визначають напружено-деформований стан на відповідній лінії тіла без прошарку. У антиплоскій задачі такий підхід (перший), особливо за дії зосереджених чинників, є точнішим у порівнянні з повним знесенням (другий підхід) крайових умов на лінію стрибка, яке полягає у заміні цих функцій на  $\sigma_{yy}^0(x)$ ,  $\sigma_{xx}^0(x)$ ,  $\sigma_{xy}^0(x)$ ,  $\sigma_x^0(x)$ ,  $\sigma_y^0(x)$  відповідно. Деякі результати обчислення УКІН [120] для включення прямокутного профілю ( $\beta = 10^{10}$ ) за обома підходами у

випадку дії двох протилежно спрямованих уздовж серединного перпендикуляру від включення зосереджених сил величини  $P$  у точках з  $z_* = \pm iy_*$  ( $D = y_*/a = 2; 1$ ) містить табл. 32.1. Застосовувався метод колокацій з 50 вузлами за урахування симетрії розв'язку; вважалося  $A \equiv a/h_0 = 10$ .

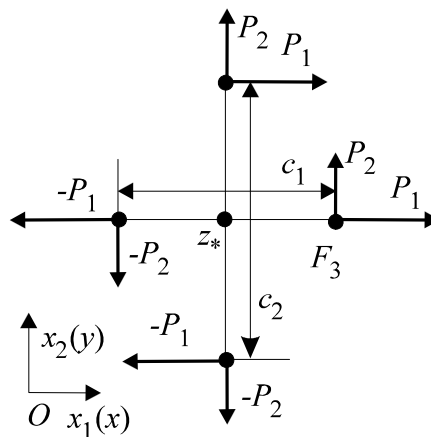
**Таблиця 32.1. Вплив процедури знесення на підвищення точності розрахунків**

$D$	$k$	Перший підхід (без знесення)		Другий підхід (зі знесенням)	
		$\sqrt{\pi a} K_{1,1}/P$	$\sqrt{\pi a} K_{1,2}/P$	$\sqrt{\pi a} K_{1,1}/P$	$\sqrt{\pi a} K_{1,2}/P$
2	$10^{-6}$	$2,184 \cdot 10^{-1}$	$-1,291 \cdot 10^{-5}$	$2,183 \cdot 10^{-1}$	$-1,321 \cdot 10^{-5}$
	0,2	$5,890 \cdot 10^{-2}$	$-3,644 \cdot 10^{-4}$	$5,891 \cdot 10^{-2}$	$-3,540 \cdot 10^{-4}$
	1,0	$1,595 \cdot 10^{-3}$	$4,232 \cdot 10^{-4}$	$1,611 \cdot 10^{-3}$	$4,388 \cdot 10^{-4}$
	5,0	$3,102 \cdot 10^{-4}$	$9,081 \cdot 10^{-3}$	$3,186 \cdot 10^{-4}$	$9,097 \cdot 10^{-3}$
	$10^7$	$1,907 \cdot 10^{-9}$	$1,897 \cdot 10^{-2}$	$-1,883 \cdot 10^{-9}$	$1,898 \cdot 10^{-2}$
1	$10^{-6}$	$2,996 \cdot 10^{-1}$	$7,657 \cdot 10^{-5}$	$3,000 \cdot 10^{-1}$	$7,673 \cdot 10^{-5}$
	0,2	$6,600 \cdot 10^{-2}$	$7,496 \cdot 10^{-4}$	$6,645 \cdot 10^{-2}$	$7,800 \cdot 10^{-4}$
	1,0	$4,178 \cdot 10^{-3}$	$7,097 \cdot 10^{-4}$	$4,417 \cdot 10^{-3}$	$7,778 \cdot 10^{-4}$
	5,0	$1,158 \cdot 10^{-3}$	$7,462 \cdot 10^{-3}$	$1,260 \cdot 10^{-3}$	$7,586 \cdot 10^{-3}$
	$10^7$	$6,741 \cdot 10^{-10}$	$1,859 \cdot 10^{-2}$	$9,471 \cdot 10^{-10}$	$1,879 \cdot 10^{-2}$

Помітно, що запропоноване уточнення рівнянь спричиняє не дуже вагоме покращення результатів і його, на противагу до випадку поздовжнього зсуву, можна у плоскій задачі не вживати.

### 32.4. Силкові та дислокаційні диполі

Розрахункові формули для силового (рис. 34.14) та дислокаційного диполів (рис. 32.14) можна отримати на основі виразів (30.45<sup>1</sup>), (32.9)–(32.13) для сил і дислокацій з урахуванням залежностей (21.9), (21.10). Аналіз отриманих результатів дає можливість стверджувати, що для диполів спостерігається швидша (ніж у випадку сил і дислокацій) зміна концентрації напружень з переміщенням точки їхнього прикладання.



**Рис. 32.14. Силкові диполі**



### 32.5. Порівняння моделей згину тонких пружних включень

Використання поряд з пружним повертанням торця включення  $c = U(w)/2h(w)$  ( $U(w) \sim c_w$ ) додаткового параметра  $\varepsilon_B^w \sim \varepsilon^-$ , що характеризує жорстке повертання орієнтованого уздовж  $L' = [-a; a]$  включення, зставляє врахувати умову (30.47) рівності нулю головного моменту  $M(a)$  сил, що діють на прошарок з боку матриці у правому її торці. Цей параметр входить лише у рівняння, що визначають функції стрибка  $f_1, f_4$ . Тому у [973] досліджена можливість застосування трьох моделей: 1) основна модель (третій варіант п. 16.2); 2) модель гнучкого включення (варіант 1г п. 16.2); 3) модель згину за Кірхгофом (п. 16.3).

Перша модель зводиться до рівнянь (30.63) с доданком  $\varepsilon^- G_B/\Lambda_2$  у лівій частині другого рівняння:

$$t_4(x) + \lambda_{21} t_1(x) - \lambda_2' \int_{-a}^x f_4(t) dt + \varepsilon^- \frac{G_B}{\Lambda_2} = F_2(x) \quad (32.14)$$

з апіорним (30.53<sup>1</sup>) визначенням сталої

$$c = \frac{Eu_y^{0'}(-a) - 2(1 + \nu_B) \sigma_{xy}^0(-a)}{\max(E_B, E)}, \quad (32.15)$$

яка необхідна для гарантування задовільних результатів для однорідного  $E_B = E$ ,  $\nu_B = \nu$  і близьких до нього випадків. Якщо  $c = 0$ , то однорідний випадок не буде отриманий навіть для однорідного поля напружень на нескінченності. У випадку тріщини отримані рівняння зводяться до класичних результатів. Для абсолютно жорсткого включення маємо  $f_4(x) = 0$  та рівняння

$$t_1(x) = \frac{\varepsilon^- + c - u_y^{0'}(x)}{l_1^+}. \quad (32.16)$$

Для абсолютно жорсткого включення природно вважати  $c = 0$ . Тому якщо  $u_y^{0'}(x) = \text{const}$  (чистий зсув), то умова  $M(a) = 0$ , яка еквівалентна

$$M(a) \equiv M(-a) - \frac{\pi}{2} a^2 A_1^1 = 0, \quad (32.17)$$

дасть  $\varepsilon^- = u_y^{0'}$  і  $f_1(x) = 0$ : повертаючись, включення адаптується до такого навантаження, зменшуючи таким способом концентрацію напружень. Якщо вважати  $c = \varepsilon^- = 0$ , то це дає рівняння нерухомого абсолютно жорсткого включення.

Для гнучкого включення умова взаємодії (16.25) дає рівняння

$$t_4(x) - \lambda_2^{*'} \int_{-a}^x f_4(t) dt + \varepsilon^- \frac{G_B}{l_1^+} = F_2^*(x), \quad f_1(x) = 0, \quad (32.18)$$

$$\lambda_2^{*'} = \frac{G_B}{2hl_1^+}, \quad F_2^*(x) = \frac{\sigma_{xy}^0(x) + G_B c}{l_1^+}.$$

Якщо вважати  $c = 0$ , то й тут не буде отриманий однорідний випадок, однак, у цьому буде певний сенс, оскільки за цією моделлю включення не сприймає зсуву, а лише розтягується та згинається. Формула (32.15) теж для цієї моделі не підходить і доцільніше вживати вираз

$$c = -\frac{2(1+\nu_B)\sigma_{xy}^0(-a)}{\max(E_B, E)}. \quad (32.19)$$

Тому модель гнучкого включення на більш-менш повну адекватність претендувати не може, але при  $E_B = 0$  і вона дає співвідношення для тріщини, а при  $E_B \rightarrow \infty$  та умовах  $c = 0$  чи (32.19) з неї отримуємо також  $f_4(x) = 0$ .

Для моделі Кірхгофа використання умови взаємодії (16.38) та трьох перших з (16.21) (у даному випадку лише другого) дає рівняння (32.14) та

$$I_2^+ t_1(x) - m_{21}^- t_3(x) - \frac{k_4}{h^3} \left\{ \int_{-a}^x \left[ \int_{-a}^t \xi f_1(\xi) d\xi \right] - M(-a)(x+a) \right\} - \varepsilon^- = F_4(x), \quad (32.20)$$

причому  $F_4(x) = u_y^{0r}(x)$ ;  $M(-a) = 0$ ;  $k_4 = 1,5/E_B$  – для моделі включення у вигляді стрижня (плоский напружений стан) та  $k_4 = 1,5(1-\nu_B^2)/E_B$  – для моделі включення у вигляді пластини Кірхгофа (плоска деформація). Однорідний випадок, коли включення виготовлене з матеріалу матриці не концентрує напружень, ця модель відобразити не може, оскільки включення за Кірхгофом повинно згинатися, не сприймаючи деформації зсуву. У граничних випадках  $E_B = 0$  з (32.14), (32.20) теж впливають рівняння теорії тріщин; при  $E_B \rightarrow \infty$  та  $c = 0$  чи (32.15), або (32.19) маємо, як і в першій моделі, рівняння (32.16).

Зазначимо, що у всіх попередніх побудовах вважалося, що  $M(-a) = 0$ , однак у всіх побудовах цей момент записувався, оскільки можна також вважати  $M(-a)$  ненульовим зовнішнім моментом зусиль, прикладеним до лівого торця включення. Для моделі вільного незакріпленого включення, що визначається умовами (32.17) та умовою  $M(-a) = 0$ , можна визначити кути повертання  $\varepsilon^\pm$  осі включення у точках  $\pm a$ , причому,  $\varepsilon^-$  визначається побудованою системою сингулярних інтегральних рівнянь, а  $\varepsilon^+$  – з інших міркувань. Наприклад, під час використання моделі Кірхгофа

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^- - \frac{\pi}{4D} a^3 A_2^1. \quad (32.21)$$

Можна розглянути і обернену задачу: за даних  $\varepsilon^\pm = \varepsilon_0^\pm$  шукати моменти  $M(\pm a)$  на торцях включення. Тоді двома додатковими умовами для визначення  $\varepsilon^-, M^-$  під час використання моделі Кірхгофа будуть

$$\varepsilon^- = \varepsilon_0^-, \quad \frac{\pi}{4} a^3 (2A_1^1 - A_2^1) - 2aM(-a) = \varepsilon_0^+. \quad (32.22)$$

Можливий і третій варіант: один торець навантажений моментом  $M_0$  (зокрема, вільний, якщо вважати  $M_0 = 0$ ), у другому вісь – включення певним чином орієнтована. Наприклад,  $\varepsilon^- = \varepsilon_0^-$ ,  $M(a) = M_0$ . Тоді додаткові умови для визначення сталих  $\varepsilon^-, M(-a)$  набудуть вигляду

$$M(-a) - \frac{\pi}{2} a^2 A_1^1 = M(a), \quad \varepsilon^- = \varepsilon_0^-. \quad (32.23)$$

Відзначимо, що модель гнучкого включення не дає можливості визначити  $\varepsilon^-$ , оскільки згідно з умовою  $A_1^1 = 0$  (нульовий головний вектор зусиль) умова (32.17) переписеться у вигляді  $M(a) = M(-a)$ . Таким чином, умова нульовості головного моменту зусиль, що діють на включення з боку матриці, тотожно задовольняється. Тому для гнучких прошарків можна

використовувати гіпотезу плоских перерізів, вважаючи  $c = 0$ , а  $\varepsilon^-$  визначати апіорним виразом, подібним до того, який раніше використовувався для  $c$ .

Методом колокацій при 50 вузлах колокацій обчислені безрозмірні УКІН  $K_{2,1}^0 = K_{2,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$ ,  $K_{2,2}^0 = K_{2,2}/(\tau\sqrt{\pi a})$ , момент  $M^0 = M(a)/(\tau a^2)$ , кут повертання  $\varepsilon_0 = \varepsilon^- E_B/\tau$  під час дії дотичних напружень на нескінченності  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$  для включення прямокутного профілю ( $\beta = \infty$ ), коли  $A \equiv a/h_0 = 10$ ,  $\nu_B = \nu = 1/3$  у припущеннях плоского напруженого стану та пластинковою моделлю Кірхгофа  $k_4 = 1,5(1 - \nu_B^2)/E_B$ . Вважалося додатково, що  $M(\pm a) = 0$  або  $\varepsilon^- = M(-a) = 0$ ;  $c$  обчислювалося або за апіорними формулами, або вважалося нульовим  $c = 0$ .

Табл. 32.2 містить значення безрозмірних УКІН та інших величин для першої та другої моделі для окремих значень відносної жорсткості включення  $k = E_B/E$ . Другий, третій і четвертий стовпчики отримані у припущенні  $\varepsilon^- = M(-a) = 0$ . Якщо припустити  $M(\pm a) = 0$ , то розрахунки дають  $K_{2,1} = K_{2,2} = 0$  і ненульовий кут  $\varepsilon_0$ , що міститься у п'ятому стовпчику. Обчислення свідчать, що  $\varepsilon^- \rightarrow \tau/2G$  при  $E_B \rightarrow \infty$ . Останній стовпчик стосується  $K_{2,1}^0$  для гнучкого включення ( $K_{2,2}^0 = 0$ ). Видно, що проста модель гнучкого включення досить добре характеризує УКІН  $K_{2,1}^0$  при  $k > 1$ .

Таблиця 32.2. Порівняння безрозмірних УКІН, моментів та кутів повертання включення для різних моделей включення

$k$	Модель 1				Модель 2
	$K_{2,2}^0$	$K_{2,1}^0$	$M^0$	$\varepsilon_0$	$K_{2,1}^0$
$10^{-7}$	$-2,5000 \cdot 10^{-8}$	1,00000	$-2,3562 \cdot 10^{-7}$	-2,6667	1,00000
$10^{-5}$	$-2,4999 \cdot 10^{-6}$	0,99994	$-2,3560 \cdot 10^{-5}$	-2,6666	0,99994
$10^{-4}$	$-2,4986 \cdot 10^{-5}$	0,99942	$-2,3545 \cdot 10^{-4}$	-2,6664	0,99942
$10^{-3}$	$-2,4856 \cdot 10^{-4}$	0,99425	$-2,3389 \cdot 10^{-3}$	-2,6640	0,99425
$10^{-2}$	$-2,3636 \cdot 10^{-3}$	0,94543	$-2,1930 \cdot 10^{-2}$	-2,6400	0,94547
0,1	$-1,5768 \cdot 10^{-2}$	0,63071	$-1,2955 \cdot 10^{-1}$	-2,4000	0,63303
0,2	$-2,2370 \cdot 10^{-2}$	0,44740	$-1,6559 \cdot 10^{-1}$	-2,1333	0,45313
0,5	$-2,2857 \cdot 10^{-2}$	0,18286	$-1,3911 \cdot 10^{-1}$	-1,3333	0,19532
1	0	0	0	0	0
2	$2,8588 \cdot 10^{-2}$	$-5,7175 \cdot 10^{-2}$	$1,5340 \cdot 10^{-1}$	1,3333	0
5	$8,2386 \cdot 10^{-2}$	$-6,5908 \cdot 10^{-2}$	$5,2741 \cdot 10^{-1}$	5,3333	0
10	0,12583	$-5,0332 \cdot 10^{-2}$	$9,3144 \cdot 10^{-1}$	$1,2000 \cdot 10^1$	0
$10^2$	0,22642	$-9,0566 \cdot 10^{-3}$	$2,0692 \cdot 10^{-1}$	$1,3200 \cdot 10^1$	0
$10^3$	0,24739	$-9,8956 \cdot 10^{-4}$	2,3242	$1,3320 \cdot 10^2$	0
$10^4$	0,24973	$-9,9894 \cdot 10^{-5}$	2,3530	$1,3335 \cdot 10^4$	0
$10^5$	0,24997	$-9,9989 \cdot 10^{-6}$	2,3559	$1,3333 \cdot 10^5$	0
$10^7$	0,25000	$-1,0000 \cdot 10^{-7}$	2,3562	$1,3333 \cdot 10^7$	0

Табл.32.3 (безрозмірні УКІН та  $\varepsilon_0$ , обчислені при  $c = 0$ , а також значенні  $c$ , визначеному за формулою (32.15) з урахуванням розвинення функцій стрибка у ряди за поліномами Чебишева непарного порядку) стосується третьої моделі (Кірхгофа). Використання формули (32.15) дає дещо кращі результати порівняно з використанням значення  $c = 0$ , однак, ця відмінність за абсолютним значенням не дуже істотна. Отримані монотонна зміна  $K_{2,1}$  та близька до очікуваної залежність  $K_{2,2}$ .

**Таблиця 32.3. Вплив способу обчислення сталої  $c$  на значення УКІН та кути повертання включення (функції стрибка апріорі непарні)**

$k$	Стала $c = 0$			Стала $c$ за формулою (32.15)		
	$K_{2,2}^0$	$K_{2,1}^0$	$\varepsilon_0$	$K_{2,2}^0$	$K_{2,1}^0$	$\varepsilon_0$
$10^{-7}$	$-1,0165 \cdot 10^{-12}$	1,00000	2,0000	$1,0254 \cdot 10^{-12}$	1,00000	2,0000
$10^{-5}$	$4,4813 \cdot 10^{-10}$	0,99994	2,0000	$1,0254 \cdot 10^{-10}$	0,99994	2,0000
$10^{-4}$	$1,6711 \cdot 10^{-9}$	0,99952	1,9999	$1,6491 \cdot 10^{-9}$	0,99946	1,9999
$10^{-3}$	$4,1910 \cdot 10^{-7}$	0,99526	1,9998	$4,1885 \cdot 10^{-7}$	0,99476	1,9995
$10^{-2}$	$1,4488 \cdot 10^{-5}$	0,95512	1,9969	$1,4418 \cdot 10^{-5}$	0,95034	1,9936
0,1	$3,4348 \cdot 10^{-4}$	0,70670	1,9592	$3,2631 \cdot 10^{-4}$	0,67136	1,9279
0,2	$7,6426 \cdot 10^{-4}$	0,57280	1,9222	$6,8783 \cdot 10^{-4}$	0,51552	1,8633
0,5	$1,9028 \cdot 10^{-3}$	0,40041	1,8364	$1,4271 \cdot 10^{-3}$	0,30030	1,7106
1	$3,3278 \cdot 10^{-3}$	0,29305	1,7367	$1,6639 \cdot 10^{-3}$	0,14653	1,5350
2	$5,0093 \cdot 10^{-3}$	0,20865	1,6148	$2,5053 \cdot 10^{-3}$	0,10433	1,4741
5	$6,5145 \cdot 10^{-3}$	0,12887	1,4666	$3,2581 \cdot 10^{-3}$	$6,4434 \cdot 10^{-2}$	1,3999
10	$6,4732 \cdot 10^{-3}$	$8,8752 \cdot 10^{-2}$	1,3952	$3,2382 \cdot 10^{-3}$	$4,4376 \cdot 10^{-2}$	1,3643
$10^2$	$2,9009 \cdot 10^{-3}$	$2,5501 \cdot 10^{-2}$	1,3353	$1,4511 \cdot 10^{-3}$	$1,2744 \cdot 10^{-2}$	1,3346
$10^3$	$6,0344 \cdot 10^{-4}$	$5,0579 \cdot 10^{-3}$	1,3335	$2,9907 \cdot 10^{-4}$	$2,5350 \cdot 10^{-3}$	1,3334
$10^4$	$6,7271 \cdot 10^{-5}$	$6,1147 \cdot 10^{-4}$	1,3333	$3,0155 \cdot 10^{-5}$	$3,1635 \cdot 10^{-4}$	1,3333
$10^5$	$2,7469 \cdot 10^{-6}$	$8,5369 \cdot 10^{-5}$	1,3333	$-1,8656 \cdot 10^{-6}$	$4,3496 \cdot 10^{-5}$	1,3333
$10^7$	$-6,9375 \cdot 10^{-6}$	$5,6450 \cdot 10^{-6}$	1,3333	$-6,9375 \cdot 10^{-6}$	$5,6450 \cdot 10^{-6}$	1,3333

Якщо не вважати апріорі невідомі функції стрибка непарними і записувати їх розвинення у ряд многочленів Чебишева усіх, а не лише непарних порядків, як при побудові табл. 32.3, то за тієї ж кількості вузлів колокації  $M = 50$  будуть отримані результати (табл. 32.4), які принципово не різняться від поданих у табл. 32.3.

Під час розгляду вільного включення умова взаємодії (16.33), а отже, й породжене нею четверте рівняння у (30.63)  $f_4(x) = -k_2 f_1(x)$ , не є достатньо коректними, бо за однорідного поля напружень на нескінченності вони завжди приводять до таких значень  $\varepsilon^-$ , щоб відповідні функції стрибка дорівнювали нулю. Для жорсткого включення це ще можна пояснити, однак, щодо тріщини, то настільки велике повертання у принципі неможливе. Щоправда, інший спосіб навантаження не викликає такого ефекту, проте, у даному випадку вільного включення перевагу слід надавати моделі Кірхгофа, позбавленій такого недоліку. Зазначимо також, що зменшення відносної товщини включення зближує результати розрахунків за першою та третьою з обговорюваних моделей.

**Таблиця 32.4. Вплив способу обчислення сталої  $c$  на значення УКІН (функції стрибка довільного типу)**

$k$	Стала $c = 0$		Стала $c$ за формулою (32.15)	
	$K_{2,2}^0$	$K_{2,1}^0$	$K_{2,2}^0$	$K_{2,1}^0$
$10^{-7}$	$-3,8936 \cdot 10^{-13}$	1,00000	$-3,9472 \cdot 10^{-13}$	1,00000
$10^{-5}$	$7,6548 \cdot 10^{-11}$	0,99994	$7,6536 \cdot 10^{-11}$	0,99994
$10^{-4}$	$7,6182 \cdot 10^{-9}$	0,99952	$7,5922 \cdot 10^{-9}$	0,99947
$10^{-3}$	$3,6750 \cdot 10^{-6}$	0,99526	$3,6593 \cdot 10^{-6}$	0,99476
$10^{-2}$	$1,3935 \cdot 10^{-5}$	0,95511	$1,3865 \cdot 10^{-5}$	0,95034
0,1	$3,3995 \cdot 10^{-4}$	0,70667	$3,2296 \cdot 10^{-4}$	0,67134
0,2	$7,5861 \cdot 10^{-4}$	0,57276	$6,8274 \cdot 10^{-4}$	0,51548
0,5	$1,8931 \cdot 10^{-3}$	0,40034	$1,4198 \cdot 10^{-3}$	0,30025
1	$3,3135 \cdot 10^{-3}$	0,29293	$1,6568 \cdot 10^{-3}$	0,14647
2	$4,9890 \cdot 10^{-3}$	0,20849	$2,4940 \cdot 10^{-3}$	0,10425
5	$6,4812 \cdot 10^{-3}$	0,12862	$3,2401 \cdot 10^{-3}$	$6,4308 \cdot 10^{-2}$
10	$6,4257 \cdot 10^{-3}$	$8,8403 \cdot 10^{-2}$	$3,2124 \cdot 10^{-3}$	$4,4203 \cdot 10^{-2}$
$10^2$	$2,7685 \cdot 10^{-3}$	$2,4455 \cdot 10^{-2}$	$1,3831 \cdot 10^{-3}$	$1,2216 \cdot 10^{-2}$
$10^3$	$5,0135 \cdot 10^{-4}$	$4,2467 \cdot 10^{-3}$	$52,4934 \cdot 10^{-4}$	$2,1331 \cdot 10^{-3}$
$10^4$	$5,0596 \cdot 10^{-5}$	$4,7378 \cdot 10^{-4}$	$2,3195 \cdot 10^{-5}$	$2,3970 \cdot 10^{-4}$
$10^5$	$9,7444 \cdot 10^{-8}$	$4,8026 \cdot 10^{-5}$	$-2,4106 \cdot 10^{-6}$	$2,5168 \cdot 10^{-5}$
$10^7$	$-5,9508 \cdot 10^{-6}$	$4,5416 \cdot 10^{-6}$	$-5,9508 \cdot 10^{-6}$	$4,5416 \cdot 10^{-6}$

**Таблиця 32.5. Швидкість збіжності методу колокацій для моделі Кірхгофа**

$M$	Метод колокацій (нульовий момент)			Метод ортогональних многочленів (нульовий кут повороту)			Метод колокацій (нульовий кут повороту)		
	$100K_{2,1}^0$	$10K_{2,2}^0$	$\varepsilon_0$	$10K_{2,1}^0$	$10K_{2,2}^0$	$M^0$	$10K_{2,1}^0$	$10K_{2,2}^0$	$M^0$
1	0,010462	0,26368	1,3629	-0,44119	0,55149	0,51977	-0,56896	0,71120	0,52546
2	0,068811	0,42135	1,3878	-0,57866	0,72332	0,52701	-0,63342	0,79177	0,52724
3	0,15742	0,51315	1,3974	-0,62262	0,77828	0,52737	-0,64756	0,80944	0,52737
4	0,22110	0,56326	1,3992	-0,63927	0,79908	0,52740	-0,65268	0,81585	0,52740
5	0,25777	0,59124	1,3997	-0,64687	0,80859	0,52741	-0,65510	0,81887	0,52740
6	0,27911	0,60769	1,3998	-0,65090	0,81363	0,52741	-0,65642	0,82054	0,52740
7	0,29223	0,61791	1,3999	-0,65328	0,81660	0,52741	-0,65724	0,82155	0,52740
8	0,30082	0,62464	1,3999	-0,65480	0,81849	0,52741	-0,65777	0,82222	0,52741
9	0,30667	0,62924	1,3999	-0,65582	0,31978	0,52741	-0,65814	0,82268	0,52741
10	0,31082	0,63256	1,3999	-0,65655	0,82068	0,52741	-0,65841	0,82300	0,52740
13	0,31814	0,63830	1,3999	-0,65779	0,82224	0,52741	-0,65887	0,82359	0,52741
15	0,32072	0,64036	1,3999	-0,65824	0,82280	0,52741	-0,65903	0,82380	0,52741
18	0,32302	0,64226	1,3999	-0,65864	0,82331	0,52741	-0,65919	0,82399	0,52741
20	0,32404	0,64309	1,3999	-0,65882	0,82352	0,52741	-0,65927	0,82407	0,52740
23	0,32488	0,64392	1,3999	-0,65900	0,82375	0,52741	-0,65933	0,82417	0,52741
25	0,32581	0,64434	1,3999	-0,65909	0,82386	0,52741	-0,65934	0,82421	0,52740

Табл. 32.5 містить дані, що характеризують швидкість збіжності методу колокацій для моделі Кірхгофа за кількості вузлів  $2M$ , коли апіорі функції стрибка вважаються непарними, а відносна жорсткість включення дорівнює  $k = 5$ . У табл. 32.6 зіставлені швидкості збіжності методів ортогональних многочленів та методу колокацій, застосованих до однієї і тієї ж задачі дії однорідного поля дотичних напружень на матрицю з включенням за тієї ж відносної жорсткості та визначення сталої  $c$  формулою (32.15). Обидва методи брали до відома непарність силової функції (правої частини рівняння). Метод ортогональних многочленів враховував  $M$  перших членів ряду непарної функції стрибка, метод колокацій –  $2M$  вузлів. Розв'язок систем однакового порядку дає в обох випадках приблизно однакові результати, тому метод колокацій за тієї ж точності внаслідок простоти своєї реалізації є більш привабливим.

### 32.7. Рідинне включення

У межах формулювань плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) розв'яжемо задачу визначення концентрації напружень в кусково-однорідному масиві з розрізом, який заповнений стисливою рідиною або ідеальним газом [315]. Тіло навантажене однорідним полем напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^{\infty} = p$ ,  $\sigma_{xxk}^{\infty} = p_k$ ,  $\sigma_{xy}^{\infty} = \tau$ . Моделлю цієї задачі, яка може слугувати вивченню напружень біля нафтового чи газового шару у пружному масиві земної кори, служать два пружні півпростори з різними пружними властивостями, коли на межі поділу матеріалів локалізована вздовж лінії  $L' = [-a; a]$  тонка порожнина, заповнена рідиною чи газом з модулем пружності  $B$ . Подібна задача про вплив ідеально пластичного нестисливого заповнювача тріщини на поле напружень вивчалось у праці Г.П.Черепанова [1079].

Вважаємо, що товщина  $2h(x)$  включення є малою порівняно з його довжиною  $2a$  і, крім цього,  $dh(x)/dx \ll 1$ . Підставляючи в умови взаємодії (16.43) граничні значення напружень у матриці (30.27), отримуємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$l_1^- f_4(x) - \frac{l_1^+}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_5(t) dt}{t-x} + \frac{B}{F_0} \frac{\int_{-a}^a \int_{-a}^x f_5(t) dt dx}{1 - \frac{1}{F_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^x f_5(t) dt dx} = -p_0 - \sigma_{yy}^0(x), \quad (32.24)$$

$$l_1^- f_5(x) + \frac{l_1^+}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_4(t) dt}{t-x} = \sigma_{xy}^0(x), \quad f_1(x) = f_2(x) = 0 \quad (|x| \leq a).$$

Шукані функції повинні задовольняти додаткові умови

$$\int_{-a}^a f_r(t) dt = 0 \quad (r = 4, 5). \quad (32.25)$$

При  $B/F_0 \rightarrow 0$  із рівнянь (32.24) впливає система сингулярних інтегральних рівнянь (30.54) тріщини на межі поділу середовищ.

За збігу механічних властивостей матеріалів півпросторів ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ) рівняння (32.24) істотно спрощуються, бо  $l_1^- = 0$ ,  $l_1^+ = E/\left[4(1-\nu^2)\right]$ . Тоді друге з них разом з умовою (32.25) розв'язується у замкнутому вигляді:

$$f_5(x) = -\frac{1}{\pi l_1^+ \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \sigma_{xy}^0(t) dt}{t-x} = \frac{\tau x}{l_1^+ \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (32.26)$$

Розв'язок першого рівняння з умовою (32.25) шукаємо у формі ряду (20.29). Застосування процедури методу ортогональних многочленів дає систему лінійних алгебричних рівнянь

$$A_0^5 = 0, \quad A_{n+1}^5 + \frac{\frac{\pi a^2 B}{2 l_1^+ F_0} A_1^5 \delta_{0n}}{1 + \frac{\pi a^2}{2 F_0} A_1^5} = \frac{f_n}{l_1^+ a^2}, \quad f_n = \int_{-a}^a [p_0 + \sigma_{yy}^0(x/a)] U_n(x/a) \sqrt{a^2 - x^2} dx. \quad (32.27)$$

Оскільки  $\sigma_{yy}^0(x) = p$ , то всі коефіцієнти  $A_n^5$  окрім  $A_1^5$  дорівнюють нулю. Коефіцієнт  $A_1^5$  знаходимо з квадратного рівняння

$$\alpha^2 + B_1 \alpha - C_1 = 0, \quad \alpha = \frac{l_1^+ A_1^5}{p}, \quad B_1 = \frac{2 l_1^+ F_0}{\pi a^2 p} + \frac{B}{p} - 1 - \frac{p_0}{p}, \quad C_1 = \frac{2 l_1^+ F_0 (1 + p_0/p)}{\pi a^2 p}. \quad (32.28)$$

Фізично реальним (стрибок переміщень має бути додатним) розв'язком рівняння (32.28) є

$$\alpha = -B_1/2 + \sqrt{B_1^2/4 + C_1}. \quad (32.29)$$

Тому коефіцієнти інтенсивності напружень дорівнюють

$$K_1 \sim K_{1,1} = l_1^+ \sqrt{\pi a} A_1^5 = p \sqrt{\pi a} \alpha, \quad K_2 \sim K_{2,1} = \tau \sqrt{\pi a}. \quad (32.30)$$

Отже, присутність рідини у щілині не впливає на КІН  $K_2$  біля її вершини, а величина параметра  $\alpha$ , який залежить від механічних властивостей масиву (матриці) та заповнення порожнини, коригує класичний КІН  $K_1^0 \equiv p \sqrt{\pi a}$  для незаповненої рідиною щілини.

Використання спрощеної умови взаємодії (16.44) дає

$$\alpha = \frac{(1 + p_0/p)}{1 + \pi a^2 B / (2 l_1^+ F_0)}. \quad (32.31)$$

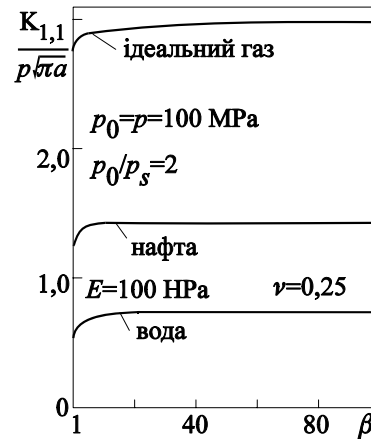


Рис. 32.15

Числовий аналіз задачі виконаний для плоскої деформації однорідної ізотропної площини з включенням за дії розтягу інтенсивності  $p$  (рис. 32.15). Вважалось, що  $E = 100$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $p_0/p = 2$ . Заповнювачем були вода ( $\beta_B = 0,459$  ГПа<sup>-1</sup>), нафта ( $\beta_B = 1,53$  ГПа<sup>-1</sup>), ідеальний газ за початкового тиску  $p_0 = 100$  МПа. Виявлено, що на відміну від пружних стисливих включень зміна форми від еліптичної до прямокутної впливає на УКІН дуже мало

(різниця не перевищує 1%). Результати обчислень за формулами (32.29) та (32.31) теж різняться між собою не більше, як на 1%.

### 32.8. Включення уздовж дуги кола

Вважається (рис. 32.16), що на лінії  $L$  кола радіусом  $R$  розмежування матеріалів диску  $S_2 \sim S^+$  та необмеженої пластинки  $S_1 \sim S^-$  з пружними характеристиками  $E_k, \nu_k$  ( $k=1,2$ ) уздовж дуги  $L' = \bigcup_{p=1}^N L'_p$  ( $L'_p$  є дугою  $\alpha \in [\alpha_p^-; \alpha_p^+]$ ) розміщені включення з пружними властивостями  $E_B, \nu_B$  завтовшки  $2h$  (для кожного включення пружні сталі й товщина можуть бути різними) [249].

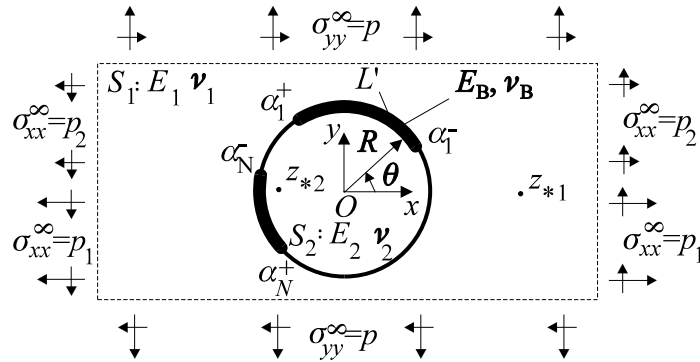


Рис. 32.16. Схема задачі про тонке включення по дузі кола

Початок  $O$  декартової  $(x, y)$  та полярної  $(r, \theta)$  систем координат перебуває у центрі кола. Зовнішнє навантаження здійснюють напруження на нескінченності  $\sigma_{yy}^{\infty} = p$ ,  $\sigma_{xx}^{\infty} = p_1$ ,  $\sigma_{xy}^{\infty} = \tau$  зосереджені сили  $P_k$  та моменти  $M_k$  у точках  $z_{*k} \in S_k$ .

Для розв'язування цієї задачі можна застосувати методи теорії функцій комплексної змінної (п. 15.6) або підхід п. 30.8. Якщо врахувати, що  $\mathbf{n} \sim -\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\tau} \sim r\boldsymbol{\theta}$ ,  $\alpha \sim \theta + \frac{\pi}{2}$ ,  $\sigma_{rr} \sim \sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{r\theta} \sim -\sigma_{n\tau}$ ,  $u_r \sim -u_n$ ,  $u_{\theta} \sim u_{\tau}$ ,  $\mathbf{t} = \text{Re}^{i\theta}$ ,  $t = R\theta$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial}{it\partial\theta}$ ,  $u_x + iu_y = (u_r + iu_{\theta})e^{i\theta}$ , то умови неідеального контакту запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^-(t) - \sigma_{rr}^+(t) + i(\sigma_{r\theta}^-(t) - \sigma_{r\theta}^+(t)) &\equiv [\sigma_{rr}(t) + i\sigma_{r\theta}(t)]_L = f_{1p}^*(t), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^-(t) - u_r^+(t) + iu_{\theta}^-(t) - iu_{\theta}^+(t)) &= iDf_{4p}^*(t) + R\varphi_{4p}^*(t)/(it) \quad (t \in L'), \end{aligned} \tag{32.32}$$

де

$$\begin{aligned} [u_x + iu_y]_L &= \varphi_{4p}^*(t), \quad \varphi_{mp}^*(t) = \int f_{mp}^*(t)dt, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} [u_x + iu_y]_L = itf_{4p}^*(t) = \frac{\partial \varphi_{4p}^*(t)}{\partial \theta}, \\ f_{4p}^*(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left\{ [u_x + iu_y]_{L'} \right\} e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Це дає вирази для напружень і переміщень



$$\begin{aligned}
\sigma_{rrk}(t) + i\sigma_{r\theta k}(t) &= \mp m_{kl}^+ f_1^*(t) + im_{12}^- t_1^*(t) + l_1^- f_4^*(t) + il_1^+ t_4^*(t) + A(t), \quad k = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}, \\
\sigma_{\theta\theta k}(t) &= \sigma_{\theta\theta k}^0(x) \mp n_{kl}^- f_1(t) + n_{kl}^+ t_2(t) \mp r_{kl}^+ f_4(t) - r_{kl}^- t_5(t), \quad l = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \\
u_{rk}(t) + iu_{\theta k}(t) &= \frac{R}{t} \left\{ l_2^- \varphi_1^*(t) + il_2^+ \Phi_1^*(t) \pm m_{lk}^+ \varphi_4^*(t) - im_{21}^- \Phi_4^*(t) \right\} + B(t), \\
\frac{\partial}{R\partial\theta} \{u_{rk}(t) + iu_{\theta k}(t)\} &= i \left\{ l_2^- f_1^*(t) + il_2^+ t_1^*(t) \mp m_{lk}^+ f_4^*(t) - im_{21}^- t_4^*(t) \right\} - \\
&\quad - \frac{i}{t} \left\{ l_2^- \varphi_1^*(t) + il_2^+ \Phi_1^*(t) \mp m_{lk}^+ \varphi_4^*(t) - im_{21}^- \Phi_4^*(t) \right\} + D(t), \\
A(t) = \sigma_{rr}^0(t) + i\sigma_{r\theta}^0(t), \quad B(t) = u_{rk}^0(t) + iu_{\theta k}^0(t), \quad D(t) &= \frac{\partial}{R\partial\theta} \left[ u_{rk}^0(t) + iu_{\theta k}^0(t) \right], \quad (32.33)
\end{aligned}$$

$$\{t(\mathbf{t}), \Phi(\mathbf{t})\} = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\{f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\} d\mathbf{x}}{\mathbf{t} - \mathbf{x}} \quad (t \in L').$$

Відокремлюючи у (32.33) дійсну та уявну частини за допомогою функції  $t = -R \frac{x+i\gamma}{x-i\gamma} e^{i\beta}$ , яка відображує лінію  $L'$  на сукупність відрізків  $L^* = \bigcup_{k=1}^N [a_k^-, a_k^+]$  осі ординат, де  $\gamma = \text{ctg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}$ ; кути  $\alpha$  та  $\varepsilon$  – довільні, що задовольняють умови  $\alpha_N^+ < \alpha + \pi < \alpha_1^-$ ,  $\varepsilon \leq (\alpha_N^+ - \alpha_1^-)/2$ , а також використовуючи умови взаємодії для криволінійного включення (п. 16.2, варіант 3), отримують систему сингулярних інтегральних рівнянь [249]

$$\begin{aligned}
&\sum_r \left\{ a_{ir}(x) f_r'(x) + b_{ir}(x) \frac{1}{\pi} \int_{L^*} \frac{f_r'(\xi) d\xi}{\xi - x} + \int_{a_p^-}^x \lambda_{ir}(y) \int_{L^*} \frac{f_r'(\xi) d\xi}{\xi - y} dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_{a_p^-}^x K_{ir}(x, y) f_r'(y) dy + \sum_{k=1}^N d_{ir}(x) [f_r(\xi)]_{a_k^-}^{a_k^+} \right\} = F_i(x) \quad (i, r = 1, 2, 4, 5), \quad (32.34)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} b_{11}(x) &= -b_{14}(x) = \lambda_{11} RR_2(x), & -\lambda_{11} b_{12}(x) &= b_{15}(x) = \lambda_{11} RR_1(x), \\
\lambda_{21} b_{21}(x) &= b_{24}(x) = \lambda_{21} RR_1(x), & \lambda_{21} b_{22}(x) &= b_{25}(x) = \lambda_{21} RR_2(x), \\
\lambda_{41} b_{41}(x) &= b_{44}(x) = \lambda_{41} RR_2(x), & \lambda_{41} b_{25}(x) &= b_{45}(x) = -\lambda_{41} RR_1(x), \\
b_{5j}(x) &= 0, & \lambda_{2j}(y) = \lambda_{5j}(y) &= K_{5j}(x, y) = d_{5j}(x) = 0 \quad (j = 1, 2, 4, 5); \\
\lambda_{14} a_{11}(x) &= \lambda_{12} a_{14}(x) = \lambda_{12} \lambda_{14} RR_1(x), & \lambda_{14} a_{12}(x) &= \lambda_{12} a_{15}(x) = \lambda_{12} \lambda_{14} RR_2(x), \\
\lambda_{24} a_{21}(x) &= \lambda_{22} a_{24}(x) = \lambda_{22} \lambda_{24} RR_2(x), & \lambda_{24} a_{22}(x) &= \lambda_{22} a_{25}(x) = -\lambda_{24} \lambda_{22} RR_1(x), \\
\lambda_{44} a_{41}(x) &= \lambda_{42} a_{44}(x) = \lambda_{44} \lambda_{42} RR_1(x), & \lambda_{44} a_{42}(x) &= \lambda_{42} a_{45}(x) = \lambda_{42} \lambda_{44} RR_2(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{51}(x) &= k_2 a_{54}(x) = k_2 R R_1(x), & a_{52}(x) &= k_2 a_{55}(x) = k_2 R R_2(x); \\
\gamma_{15} \lambda_{11}(y) &= \gamma_{14} \lambda_{14}(y) = \gamma_{15} \gamma_{14} R_5(y), & \gamma_{15} \lambda_{12}(y) &= \gamma_{14} \lambda_{15}(y) = \gamma_{14} \gamma_{15} R_4(y), \\
\gamma_{42} \lambda_{41}(y) &= \gamma_{14} \lambda_{44}(y) = \gamma_{45} \gamma_{42} R_4(y), & \gamma_{42} \lambda_{42}(y) &= \gamma_{41} \lambda_{45}(y) = \gamma_{41} \gamma_{42} R_5(y), \\
K_{11}(x, y) &= -\lambda_1 R_4(y), & K_{12}(x, y) &= \lambda_1 R_5(y), & K_{14}(x, y) &= K_{15}(x, y) = 0, \\
K_{21}(x, y) &= \lambda_2 R_5(x), & K_{22}(x, y) &= \lambda_2 R_4(x), & K_{24}(x, y) &= K_{25}(x, y) = 0, \\
K_{41}(x, y) &= -\lambda_5 R_4(y), & K_{42}(x, y) &= \lambda_5 R_5(y), & K_{44}(x, y) &= -\lambda_4 R_4(x), \\
K_{45}(x, y) &= \lambda_4 R_5(x), & d_{11}(x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x}{2\gamma} - \gamma_{24} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} - \frac{\varphi_k}{2} \right) \right], & [f_r(\xi)]_{a_k^-}^{a_k^+} &= \int_{a_k^-}^{a_k^+} f_r(\xi) dt, \\
d_{21}(x) &= -d_{22}(x) = -\frac{x}{2\pi\gamma}, & d_{24}(x) &= \left[ \frac{\lambda_{21}}{2\pi} + \lambda_2 R_4(x) \right], & d_{25}(x) &= \left[ \lambda_2 R_4(x) - \frac{\lambda_{21} x}{2\pi\gamma} \right], \\
d_{41}(x) &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{x}{2\gamma} - \gamma_{44} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} - \frac{\varphi_k}{2} \right) \right], & d_{42}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \gamma_{44} \ln \frac{x^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right], \\
d_{44}(x) &= -\frac{1}{\pi} \left[ \gamma_{45} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} - \frac{\varphi_k}{2} \right) - \frac{\lambda_{21} x}{2\gamma} \right] - \lambda_4 R_4(x), & d_{12}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \gamma_{14} \ln \frac{x^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right], \\
F_1(x) &= \frac{1}{\Lambda_1} \left[ 2k_0 \int_{a_p^-}^x \operatorname{Im} \{ A(x) \} \frac{2\gamma dx}{x^2 + \gamma^2} + k_0 R N_{\alpha_p^-} - k_1 R \operatorname{Re} \{ A(x) \} - \operatorname{Re} \{ B(x) \} - R \operatorname{Im} \{ D(x) \} \right], \\
d_{45}(x) &= \lambda_4 R_5(x) - \frac{1}{2\pi} \left[ \lambda_{41} + \gamma_{15} \ln \frac{x^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right], & F_5(x) &= 0, \\
F_2(x) &= R G_B \operatorname{Re} [ D(x) ] - G_B \operatorname{Im} [ D(x) ] + R \operatorname{Im} [ A(x) ], & \gamma_{11} &= \frac{2k_0 \Lambda_3}{\Lambda_1}, & \gamma_{12} &= \frac{2k_0 l_1^-}{\Lambda_1}, \\
\gamma_{14} &= -\frac{2k_0 m_{12}^-}{\Lambda_1}, & \gamma_{45} &= -\frac{2k_1 l_1^+}{k_0 m_{12}^-}, & \gamma_{15} &= -\frac{2k_1 l_1^+}{\Lambda_1}, & \gamma_{41} &= -\frac{2k_1 \Lambda_3}{k_0 m_{12}^-}, & \gamma_{42} &= \frac{2k_1 l_1^-}{k_0 m_{12}^-}, \\
\gamma_{44} &= -\frac{2k_1}{k_0}, & R_1(x) &= \frac{x}{R}, & R_2(x) &= \frac{\gamma^2 - x^2}{2\gamma R}, & R_3(x) &= \frac{\gamma^2 - x^2}{\gamma^2 + x^2}, & R_4(x) &= \frac{2\gamma x}{\gamma^2 + x^2}, \\
\Lambda_1 &= l_2^+ + k_1 m_{12}^-, & \Lambda_2 &= -m_{12}^- - G_B l_2^+, & \Lambda_3 &= m_{12}^+ - \frac{1}{2}, & \lambda_{11} &= \frac{m_{21}^- - k_1 l_1^+}{\Lambda_1}, \\
\lambda_{12} &= \frac{l_2^- - k_1 \Lambda_3}{\Lambda_1}, & \lambda_{13} &= \frac{k_1 l_1^- + \Lambda_3}{\Lambda_1}, & \lambda_{21} &= \frac{G_B m_{21}^- - l_1^+}{\Lambda_2}, & \lambda_{22} &= \frac{G_B l_2^- - \Lambda_3}{\Lambda_2}, \\
\lambda_{23} &= \frac{l_1^- + G_B \Lambda_3}{\Lambda_2}, & \lambda_{41} &= \frac{l_1^+}{m_{12}^-}, & \lambda_{42} &= -\frac{\Lambda_3}{m_{12}^-}, & \lambda_{44} &= \frac{l_1^-}{m_{12}^-}, & \lambda_1 &= \frac{k_0 R}{2\Lambda_1 h(x)}, \\
\lambda_2 &= \frac{G_B R}{2\Lambda_1 h(x)}, & \lambda_3 &= \frac{R}{2k_0 m_{12}^- h(x)}, & \lambda_4 &= \frac{k_1 R}{2k_0 m_{12}^- h(x)}.
\end{aligned}$$

Функції стрибка задовольняють додаткові умови

$$\int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} [\sigma_{r\theta 2}(\theta) - \sigma_{r\theta 1}(\theta)] d\theta + \frac{2h}{R} \int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} [\sigma_{r\theta 2}(\theta) + \sigma_{r\theta 1}(\theta)] d\theta = \frac{2h}{R} \left( N_{\alpha_p^+} - N_{\alpha_p^-} \right) = \text{const},$$

$$\frac{R}{2h} \int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} [\sigma_{rr 2}(\theta) - \sigma_{rr 1}(\theta)] d\theta - \frac{1}{2} \int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} [\sigma_{rr 2}(\theta) + \sigma_{rr 1}(\theta)] d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} [\sigma_{\theta\theta 2}(\theta) + \sigma_{\theta\theta 1}(\theta)] d\theta = \tau_{\alpha_p^+} - \tau_{\alpha_p^-},$$

(32.35)

$$\int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_{r 2}(\theta) - u_{r 1}(\theta)] d\theta = \tau_{\alpha_p^+} - \tau_{\alpha_p^-}, \quad \int_{\alpha_p^-}^{\alpha_p^+} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_{\theta 2}(\theta) - u_{\theta 1}(\theta)] d\theta = c_{\alpha_p^+} - c_{\alpha_p^-};$$

$N_w, \tau_w, \alpha_w, c_w$  – торцеві сталі.

Для тріщини ( $E_B = 0$ ) система сингулярних інтегральних рівнянь (32.34) дає

$$f_1(x) = f_2(x) = 0, \quad t_4^*(\zeta) - i \frac{l_1^-}{l_1^+} f_4^*(\zeta) = i \frac{A(\zeta)}{l_1^+} = i \frac{\sigma_{rr}^0(\zeta) + i \sigma_{r\theta}^0(\zeta)}{l_1^+} \quad (t \in L').$$

(32.36)

У випадку абсолютно жорсткої плівки ( $E_B = \infty$ ) отримуємо

$$f_4(x) = f_5(x) = 0, \quad t_1^*(\zeta) - i \frac{l_2^-}{l_2^+} f_1^*(\zeta) = \frac{D(\zeta) - i B(\zeta)/R}{l_2^+} \quad (t \in L').$$

(32.37)

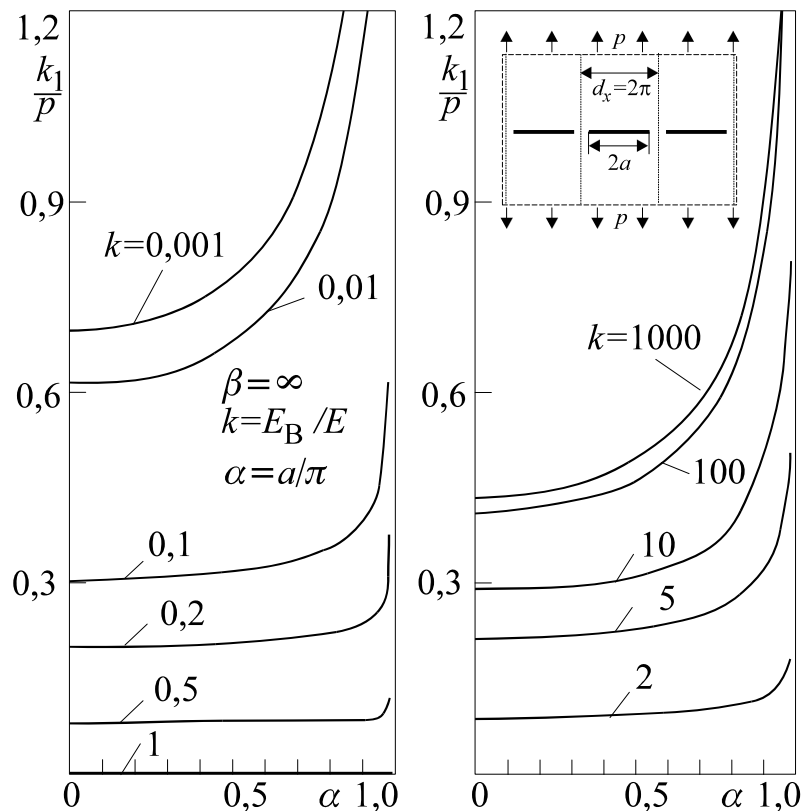


Рис. 32.17

Якщо  $R \rightarrow \infty$  так, що  $R(\alpha_p^- - \alpha_p^+) = \text{const}$ , система сингулярних інтегральних рівнянь (32.34) зводиться до рівняння для міжфазного прямолінійного включення (30.51).

Конкретні обчислення для пружного включення на основі методів лінійного розвинення потенціалів та методу механічних квадратур для розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь отримані В.К.Опанасовичем та І.І.Бернардом [99].

### 32.9. Взаємодія включень

#### Періодична система співвісних включень

За розташування включень завдовжки  $2a$  з періодом  $d^1 = 2\pi$  уздовж осі  $x$  (межі поділу матеріалів) система сингулярних інтегральних рівнянь та інші співвідношення будуються на основі застосування до залежностей пп. 30.2–30.7, 30.9 перетворення (8.1) або безпосередньої побудови розв'язку [237, 236]. Отримана у [237] система сингулярних інтегральних рівнянь аналогічна (30.51), лише ядра Коші замінені на ядра Гільберта та у правих частинах враховане періодичне повторювання зосереджених чинників. У граничному випадку абсолютно жорсткого включення та тріщини вона зводиться до рівнянь (30.54), (30.55), де тепер

$$t_r^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{L'} f_r^*(x) \text{ctg} \left( \frac{t-x}{2} \right) dt.$$

Для сукупності абсолютно гнучких нерозтягливих включень слід вважати  $f_1(x) = f_5(x) = 0$  і розв'язувати рівняння

$$t_2^*(x) - i\beta_2 f_2^*(x) = F_2^*(x), \quad f_2^*(x) = f_2(x) + i\Lambda_4 f_4(x),$$

$$\beta_2 = -\frac{l_2^- \Lambda_4}{m_{12}^-}, \quad F_2^*(x) = \frac{\Lambda_4 u_y^{0r}(x)}{m_{12}^-} + i \frac{u_x^{0r}(x)}{l_2^+}, \quad \Lambda_4 = \sqrt{-\frac{\lambda_3 m_{12}^-}{l_2^- l_2^+}} \quad (x \in L'). \quad (32.38)$$

У випадку періодичної задачі з періодом  $d_x = 2\pi$  числовий аналіз побудованої системи сингулярних інтегральних рівнянь [237] і обчислення КІН

$$k_1 \sim k_{1j}^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a(\theta=0)} \sqrt{\pm \frac{x}{a} - 1} \sigma_{yyj}(x) = \frac{K_{1,1} + K_{1,2}}{\sqrt{2\pi a}} \quad (j = 1, 2)$$

для плоского напруженого стану однорідної матриці для включення завдовжки  $2a$  прямокутного профілю ( $\beta = \infty$ ,  $A \equiv a/h_0 = 10$ ,  $\nu_B = \nu = 1/3$ ) здійснений у випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = p$  (рис. 32.17) та дії періодично повторюваної пари сил  $\pm iP$  у точках  $iy_* = \pm ia + 2\pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (рис. 32.18).

Для досягнення точності обчислень порядку 1% з використанням методу ортогональних многочленів залежно від відносної довжини включення  $\alpha = a/\pi$  довжини необхідно було враховувати від 15 до 50 членів ряду многочленів Чебишева першого роду з виділеною кореневою особливістю. Обчислення засвідчили, що для відносної жорсткості  $k \equiv E_B/E = 0,001$ ; 1000 відрізняються від аналітичного розв'язку для тріщин та абсолютно жорсткого включення не більше, як на 2%. Якщо  $\alpha \equiv a/\pi \rightarrow 0$ , то КІН прямує до значень, властивих поодинокому включенню; при  $\alpha \rightarrow 1$  КІН необмежено зростає, причому за першого способу навантажування це зростання монотонне, а за дії сил при малих довжинах  $a$  можливе спочатку зменшення УКІН, а вже потім його різке збільшення. Якщо  $\alpha \rightarrow 1$ , то КІН прямує до нескінченності.

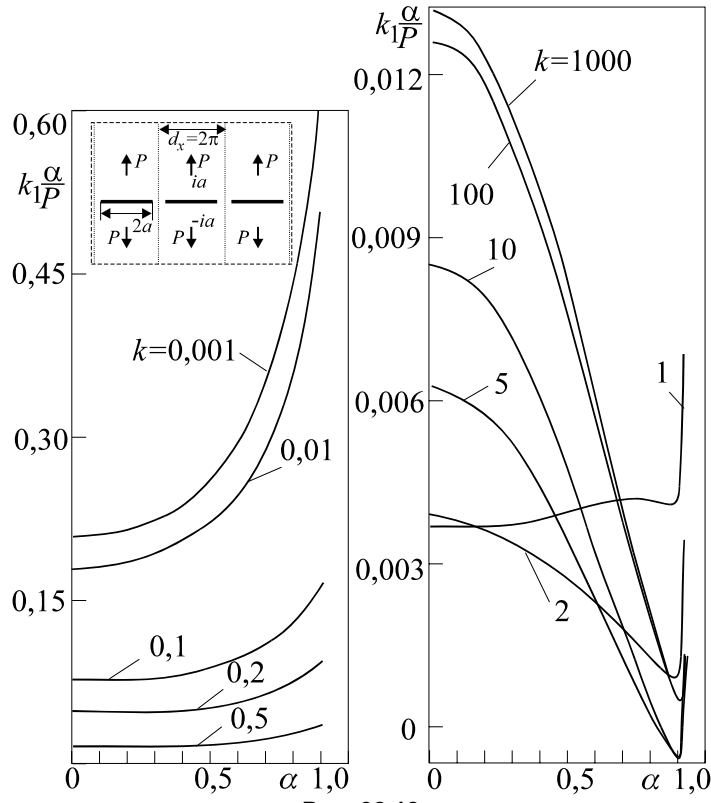


Рис. 32.18

Якщо відповідно до моделі абсолютно гнучкого включення вважати, що ненульовою є лише функція стрибка  $f_2(x)$  [236] (див. п. 32.2, абсолютно гнучке включення), то отримана система сингулярних інтегральних рівнянь для включень на межі поділу матеріалів зводиться до одного рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L'} f_2(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) dt - q \int_{a_p}^x f_2(t) dt = F_2(x) \quad (x \in L'_p = [a_p^-, a_p^+]). \quad (32.39)$$

Помітно, що функція стрибка у цьому випадку має кореневу, однак не осцилюючу особливість навіть для міжфазного включення на межі поділу матеріалів різних півплощин. На рис. 32.19 і 32.20 відображене дослідження КІН

$$k_{3j}^+ = \lim_{x \rightarrow a(\theta = \pm\pi)} \sqrt{1 - \frac{x}{a} \sigma_{xy}} \quad (j = 1, 2)$$

для плоского напруженого стану для періодичної задачі з періодом  $d_x = 2\pi$  щодо включення завдовжки  $2a$  прямокутного профілю ( $\beta = \infty, h_0/a = 0,1$ ) на межі поділу двох півплощин відносної жорсткості  $\lambda = E_1/E_2$  (вважається, що  $\nu_B = \nu_1 = \nu_2 = 1/3$ ) здійснений у випадку дії однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = p$  та дії періодично повторюваної пари сил  $\pm iP$  у точках  $y_* = \pm id + 2\pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Для досягнення точності обчислень порядку 1% з використанням методу ортогональних многочленів залежно від відносної довжини включення  $\alpha = \alpha/\pi$  довжини необхідно було враховувати від 15 до 50 членів ряду многочленів Чебишева першого роду з виділеною кореневою особливістю. Розв'язок цього рівняння будувався також з використанням розкладів у степеневі ряди, однак, збіжність результатів для періодичної задачі виявилася набагато повільнішою і отримання високої точності у такий спосіб виявилось за доволі обмежених на час здійснення обчислень обчислювальних ресурсів неможливим.

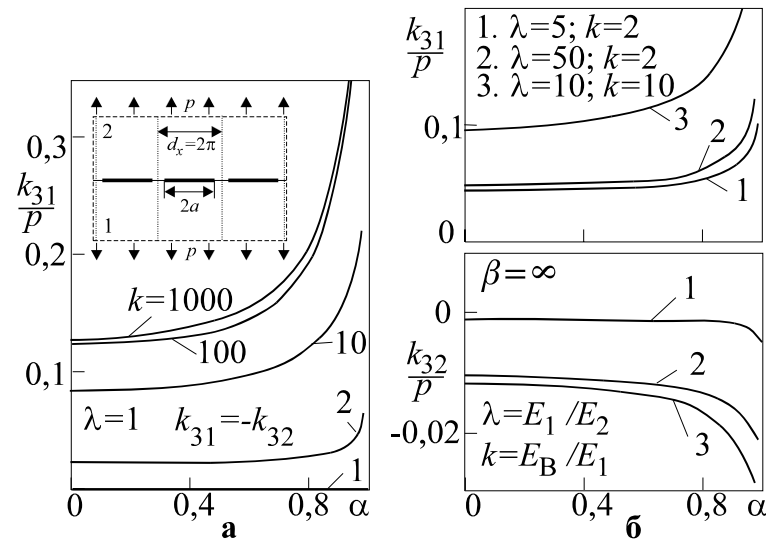


Рис. 32.19

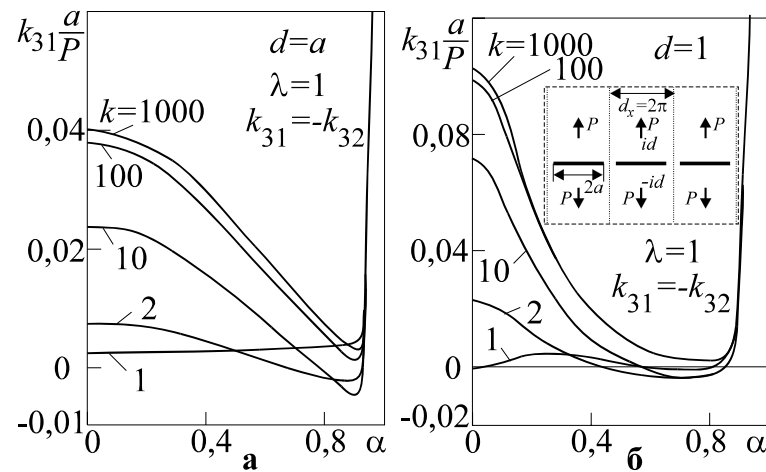


Рис. 32.20

На рис. 32.19 відображена залежність нормованих КІН  $k_{31}, k_{32}$  в однорідній матриці (рис. 32.19 а), коли  $\lambda = 1, k_{31} = -k_{32}$ , та кусково-однорідній матриці (рис. 32.19 б) за дії однорідного поля напружень на нескінченності для деяких значень відносної жорсткості включень та півплощин (лінії 1 відповідають  $\lambda = 5, k = 2$ ; лінії 2 –  $\lambda = 50, k = 2$ ; лінії 3 –  $\lambda = 10, k = 10$ ). Якщо усі матеріали (півплощин та включень) однакові, то ці КІН дорівнюють нулю. Зі зменшенням відстані між включеннями абсолютне значення КІН монотонно зменшується, причому у граничному випадку отримуються відповідні результати для одного ізольованого включення, механічні властивості якого характеризує відповідна модель абсолютно гнучкого включення.

Рис. 32.20 характеризує залежність нормованого КІН  $k_{31}$  ( $k_{31} = -k_{32}$ ) поблизу включення відносної жорсткості  $k = 1; 2; 10; 100; 1000$  в однорідній матриці ( $\lambda = 1$ ) за дії зосереджених сил та фактично поля напружень на нескінченності у двох випадках, якщо відстань  $d$  сил від включень дорівнює їх півдовжині  $a$  (рис. 32.20 а) і якщо ця відстань фіксована  $d = 1$  (рис. 32.20 б). У першому випадку при  $a \rightarrow 0$  отримують результати для одного включення, якщо на відстані  $a$  від нього діють відповідні сили. У другому – теж для одного включення, але у випадку, якщо на нескінченності діють рівномірно розподілені напруження  $\sigma_{yy}^\infty = p = P/(2\pi)$ . В обох випадках зближення відносно жорстких включень спочатку зменшує КІН, а потім різко їх збільшує до нескінченно великих значень.

### Періодична система компланарних включень

Подібним чином можна побудувати розв'язок задачі про систему включень завдовжки  $2a$ , розташованих з періодом  $d^1 = id_y = 2\pi i$  в однорідній матриці [578]

$$\begin{aligned} \lambda_{r1}\mathbf{K}_1 f_2(t) + \lambda_{r2}\mathbf{K}_1 f_5(t) + \lambda_{r3}\mathbf{K}_2 f_2(t) + \lambda_{r4}\mathbf{K}_2 f_5(t) + \lambda_r s_2(t) + \delta_{r3}\lambda_4 s_5(t) &= F_r(x), \\ \lambda_{21}\mathbf{K}_1 f_1(t) + \lambda_{22}\mathbf{K}_1 f_4(t) + \lambda_{23}\mathbf{K}_2 f_1(t) + \lambda_{24}\mathbf{K}_2 f_4(t) + \lambda_2 s_4(t) &= F_2(x), \\ f_4(x) &= -k_2 f_1(x) \quad (r=1, 3; x \in [-a, a]), \end{aligned} \quad (32.40)$$

$$\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \operatorname{cth} \frac{t-x}{2}, \operatorname{cth} \frac{t-x}{2} - \frac{t-x}{2} \operatorname{sh} \frac{-2t-x}{2} \right\} f(t) dt,$$

де функції  $F_m(x)$  ( $m=1\dots 4$ ) визначені співвідношеннями (30.52).

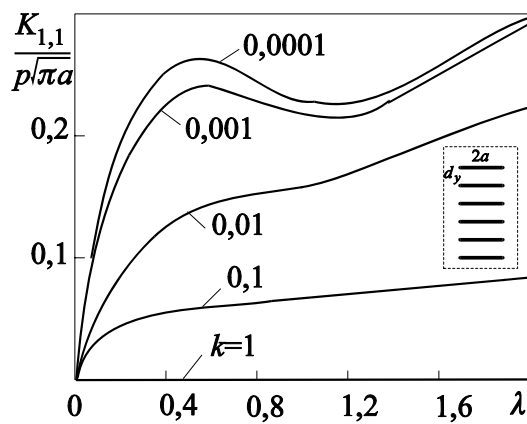


Рис. 32.21

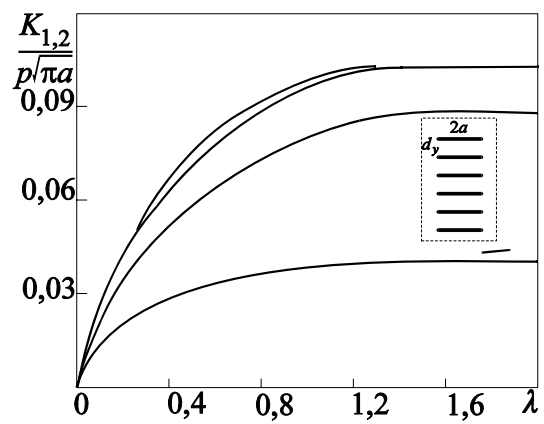


Рис. 32.22

У граничних випадках абсолютно жорсткої плівки й тріщини

$$f_4^*(t) = 0, \quad \mathbf{K}_1 f_1^*(t) + \mathbf{K}_2 \overline{f_1(t)} / \kappa = i \frac{u_x^{0r} + u_y^{0r}}{l_2^+} \quad (\text{АЖП}); \quad (32.41)$$

$$f_1^*(t) = 0, \quad \mathbf{K}_1 f_4^*(t) - \mathbf{K}_2 \overline{f_4(t)} = i \frac{\sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0}{l_1^+} \quad (\text{тріщина}). \quad (32.42)$$

Система сингулярних інтегральних рівнянь (32.40) розв'язувалася числово-аналітичним методом за допомогою апроксимації другого доданку ядра  $\mathbf{K}_2$  чотирма першими членами степеневому ряду та наступним після цього застосуванням методу ортогональних многочленів. Внаслідок цього

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{K(t-x) T_n \operatorname{th} \left( \frac{x}{2} - \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right)}{\operatorname{ch}(t/2) \sqrt{2\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} t}} dt = \\ &= - \left( 2\pi \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \right)^{-1} \int_{-a}^a \frac{(1 - \alpha^2 \eta^2) T_n(\eta)}{(\eta - \zeta)^2 \sqrt{1 - \eta^2}} \left[ \frac{\alpha^2}{3} (\eta^3 - \xi^3) + \frac{\alpha^4}{5} (\eta^5 - \xi^5) + \frac{\alpha^6}{7} (\eta^7 - \xi^7) + \dots \right] d\eta, \end{aligned}$$

причому

$$\eta = \operatorname{th} \frac{t}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2}, \quad \xi = \operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2}, \quad \alpha = \operatorname{th} \frac{a}{2}.$$

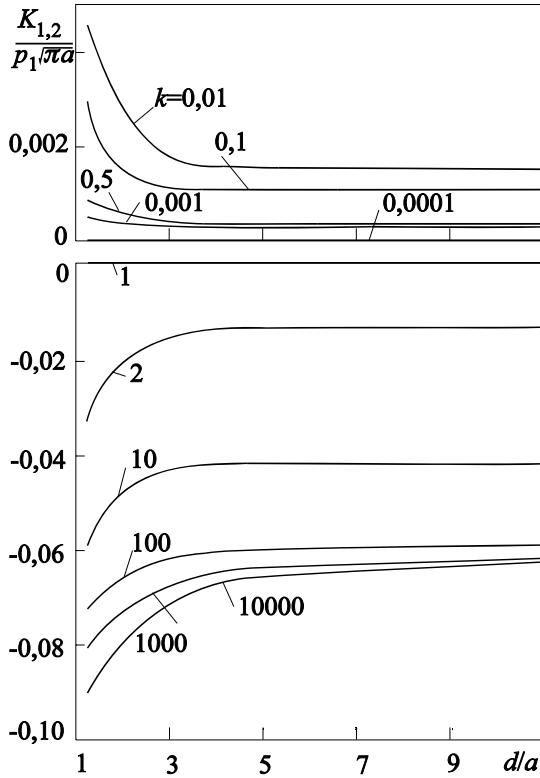


Рис. 32.23

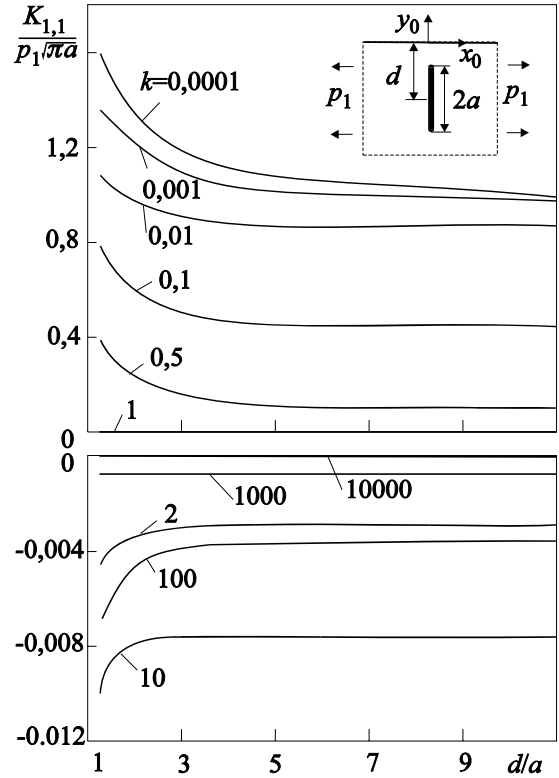


Рис. 32.24

Відносна похибка такої апроксимації підінтегральної функції не перевищує 12% , але сам інтеграл при цьому визначається точніше.

Обчислення були здійснені для плоского напруженого стану пластинки, що розтягується однорідним полем напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^{\infty} = p$  для  $\nu_B = \nu = 1/3$ ,  $A \equiv a/h_0 = 10$ ,  $\beta = \infty$  (прямокутне включення) та різних значень відносної жорсткості включення  $k = E_B/E$ . На рис. 32.21, 32.22 зображена залежність віднесених до  $p\sqrt{\pi a}$  значень УКІН  $K_{1,1}$ ,  $K_{1,2}$  від відносної довжини включень  $\lambda = 2a/d_y$ . При  $k = 0,0001$  УКІН  $K_{1,1}$  відрізняється від наближених значень для КІН  $K_1$  для системи компланарних тріщин [706] не більше, як на 10%.

Компланарне розташування включень спричиняє зменшення УКІН під час зближення неоднорідностей (ефект екранування). Якщо  $\lambda \rightarrow 0$ , то УКІН прямують до значень, властивих поодинокому включенню.

### Взаємодія включення з краєм півплощини

На рис. 32.23, 32.24 [975] зображені результати обчислення нормованих значень УКІН  $K_{1,i}^0 = K_{1,i} / (p_1 \sqrt{\pi a})$  ( $i = 1, 2$ ) для ближчого до краю області торця включення прямокутного профілю з  $A = a/h_0 = 10$ ,  $\nu_B = \nu$ , що перпендикулярне до вільної поверхні півплощини, яка розтягується напруженнями  $\sigma_{xx}^{\infty} = p_1$ . Внаслідок симетрії задачі УКІН  $K_{2,i} = 0$ . Спостерігається істотне збільшення УКІН та впливу відносної жорсткості  $k = E_B/E$  зі зменшенням відносної глибини залягання  $D = d/a$ . При  $k = 10^4$  і  $k = 10^{-4}$  з точністю не меншою від 1% отримані результати збігаються з відповідними даними для абсолютно жорсткого включення



і тріщини. Якщо  $D > 10$ , то отримані значення відрізняються вже не більше, як на 5% від відповідних значень, визначених для включення у необмеженій пластині.

Вплив кута  $\alpha$  орієнтації пружного включення у задачі плоского напруженого стану досліджений у [214]. Для фіксованої глибини центру включення ( $D = 2$ ,  $a/h_0 = 10$ ,  $\nu_B = \nu = 0,3$ ) для різних значень параметра відносної жорсткості  $k \equiv E_B/E$  було обчислено два нормовані КІН, які визначають рівень нормальних та дотичних напружень на продовженні осі включення під час наближення до ближчого до вільного краю півплощини торця включення завдовжки  $2a$ :

$$\{k_1^0, k_2^0\} = \lim_{x_1 \rightarrow a^- (\theta=0)} \frac{\sqrt{2(a^- - x_1)}}{p_1 \sqrt{a}} \{\sigma_{y_1 y_1}, \sigma_{x_1 y_1}\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2r}}{p_1 \sqrt{a}} \{\sigma_{y_1 y_1}, \sigma_{x_1 y_1}\}.$$

Якщо зіставити цей вираз із залежністю (31.20), то залежність цих КІН із використаними у цій книзі УКІН є така:

$$\{k_1^0, k_2^0\} = \frac{\{K_{1,1} + K_{1,2}, K_{2,1} + K_{2,2}\}}{p_1 \sqrt{\pi a}}.$$

Для забезпечення гарантованої точності обчислень до 5% у застосуванні методу ортогональних многочленів враховувалося від 15 до 30 членів розкладу у ряд поліномів Чебишева з виділеною кореневою особливістю. Торцьові сталі обчислювалися за апріорними формулами. Результати обчислень відображені на рис. 32.25. Суцільні лінії 1, 2, 3 відповідають значенням  $k_1^0$  для відносних жорсткостей  $k = 0,01; 0,1; 10$ ; штрихові лінії – відповідно значенням  $k_2^0$ . Вже для  $k = 0,01$  різниця з числовим розв'язком аналогічної задачі для тріщини [1271] не перевищує 3%.

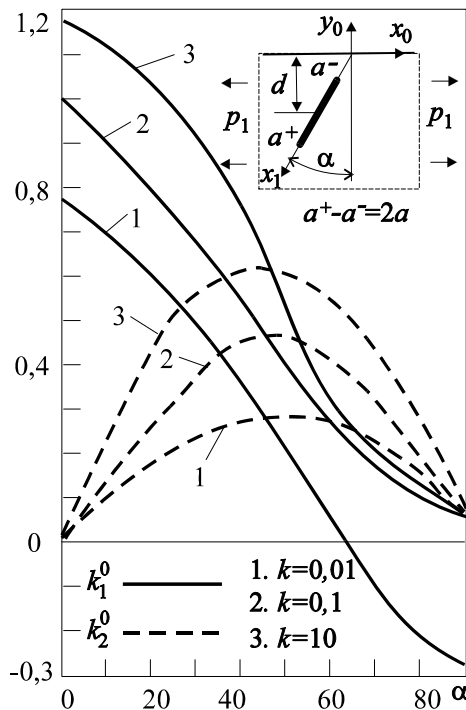


Рис. 32.25

**Граничне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень  
для двох вертикально зсунутих ідентичних тріщин у площині [943]**

Дослідимо розв’язок задачі про напружений стан ізотропної пластини з двома вертикально зсунутими на величину  $d$  тріщинами завдовжки  $2l$  (рис. 32.26). Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, пластинка на нескінченності розтягується перпендикулярно до осей тріщин рівномірно розподіленими напруженнями інтенсивності  $\sigma_{yy}^\infty = p$ . З’ясуємо вплив зближення тріщин на зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

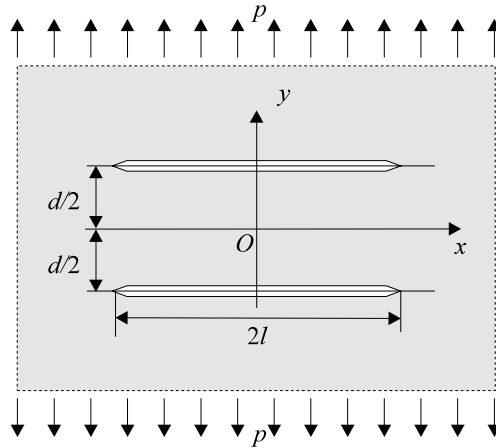


Рис. 32.26. Схема задачі про взаємодію двох тріщин

У працях [706, 860] розв’язування цієї задачі зведене до сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою [706] (таке саме рівняння отримується на основі (20.23))

$$\int_{-1}^1 \left[ \varphi(\tau) K(\tau, \varepsilon) + \overline{\varphi(\tau)} L(\tau, \varepsilon) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\pi \left( |\varepsilon| < 1, \quad \tau = \frac{t}{l}, \quad \varepsilon = \frac{x}{l} \right), \tag{32.43}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0,$$

де

$$\varphi(\tau) = \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{p} g'(l\tau), \quad K(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\tau-\varepsilon} + \frac{\lambda^2(\tau+\varepsilon)}{\lambda^2(\tau+\varepsilon)^2 + 4}, \quad \lambda = \frac{2l}{d},$$

$$L(\tau, \varepsilon) = L_1(\tau, \varepsilon) + iL_2(\tau, \varepsilon), \quad L_1(\tau, \varepsilon) = \frac{8\lambda^2(\tau+\varepsilon)}{[\lambda^2(\tau+\varepsilon)^2 + 4]^2}, \tag{32.44}$$

$$L_2(\tau, \varepsilon) = \frac{2\lambda[\lambda^2(\tau+\varepsilon)^2 - 4]}{[\lambda^2(\tau+\varepsilon)^2 + 4]^2}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$g(x)$  – невідома функція, яка пропорційна до стрибка переміщень точок берегів тріщин.

Застосування до розв’язування рівняння (32.43) схеми методу механічних квадратур дає систему  $M$  лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{m=1}^M \left[ \varphi(t_m) K(t_m, x_r) + \overline{\varphi(t_m)} L(t_m, x_r) \right] = -M \quad (r = \overline{1, M-1}), \quad \sum_{m=1}^M \varphi(t_m) = 0, \tag{32.45}$$

де координати вузлів  $t_m$  і  $x_r$  задають співвідношеннями  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ,  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$ ; функція  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ .

У цьому випадку КІН обчислюють за формулами [706, 860, 589]:

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \mp p \sqrt{l} (\varphi_1(\pm 1) + i\varphi_2(\pm 1)), \quad (32.46)$$

де

$$\varphi(\pm 1) = \mp \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+\frac{M}{2}(1\mp 1)} \varphi(t_m) \operatorname{tg}^{\mp 1} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

У працях [706, 860, 589] зазначено, що за зменшення відстані між тріщинами до нуля КІН прямують до вироджених значень. Дослідимо докладніше цей граничний перехід.

Переходячи у системі рівнянь (32.45) до границі при  $d \rightarrow 0$  (ця ситуація відповідає явищу злиття двох тріщин), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \varphi(t_m) \frac{t_m}{t_m^2 - x_r^2} \right] &= -1 \quad (r = \overline{1, M-1}), \\ \sum_{m=1}^M \varphi(t_m) &= 0. \end{aligned} \quad (32.47)$$

Оскільки  $x_r = -x_{M-r}$ , то визначник СЛАР (32.47) дорівнює нулю і КІН прямують до вироджених значень. Щоб позбутися такого явища, видозмінимо СЛАР (32.45), беручи до відома те, що у функції  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$  дійсна частина є непарною, а уявна – парною. Тоді система рівнянь (32.45) зредукується до

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{[M/2]} \varphi_1(t_m) K_{11}(t_m, x_r) + \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) K_{12}(t_m, x_r) &= -M \quad (r = \overline{1, [M/2]}), \\ \sum_{m=1}^{[M/2]} \varphi_1(t_m) K_{21}(t_m, x_r) + \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) K_{22}(t_m, x_r) &= 0 \quad (r = \overline{1, N-1}), \\ \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) &= 0, \end{aligned} \quad (32.48)$$

де

$$K_{jj}(t, x) = K(t, x) - L_1(-t, x) + (-1)^j [K(-t, x) - L_1(t, x)] \quad (j = 1, 2),$$

$$K_{ij}(t, x) = L_2(t, x) + (-1)^j L_2(-t, x) \quad (i, j = 1, 2; i \neq j),$$

$$N = \left[ \frac{M}{2} \right] + \begin{cases} 0, & \text{якщо } M \text{ – парне,} \\ 1, & \text{якщо } M \text{ – непарне;} \end{cases} \quad [a] \text{ – ціла частина числа } a.$$

КІН знаходимо за формулами (32.46), враховуючи, що у цьому випадку вирази для  $\varphi_j(1)$  мають вигляд

$$\varphi_1(1) = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{[M/2]} (-1)^{m+1} \varphi_1(t_m) \begin{cases} \sin^{-1}(\pi(2m-1)/(2M)) \text{ якщо } M - \text{ парне,} \\ \text{ctg}(\pi(2m-1)/(2M)) \text{ якщо } M - \text{ непарне;} \end{cases}$$

$$\varphi_2(1) = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \varphi_2(t_m) \begin{cases} \text{ctg}(\pi(2m-1)/(2M)) \text{ якщо } M - \text{ парне,} \\ \delta_{m,N} \sin^{-1}(\pi(2m-1)/(2M)) \text{ якщо } M - \text{ непарне;} \end{cases} \quad (32.49)$$

$$\delta_{m,N} = \begin{cases} 1 \text{ якщо } m \neq N, \\ 1/2 \text{ якщо } m = N. \end{cases}$$

На рис. 32.27, 24.28 відображені результати числового аналізу впливу взаємного зближення тріщин (зменшення параметра  $q$ ) на зміну безрозмірних КІН  $K_i^* = K_i^+ / (p\sqrt{l})$ ,  $i = 1, 2$  за різних способів їх обчислення. Лінії 1, 2 побудовані з використанням розв'язку системи рівнянь (32.48). Лінії 3, 4 отримані з використанням традиційної схеми (32.45)–(32.47) при  $M=200$ .

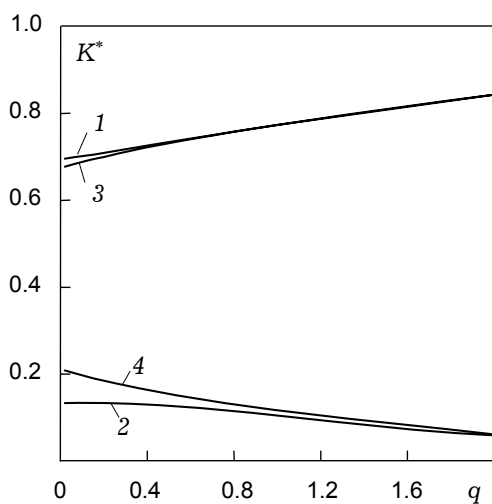


Рис. 32.27. Залежність зведених КІН від відносної відстані  $q$  між тріщинами і сталому навантаженні  $p$  при  $M=200$

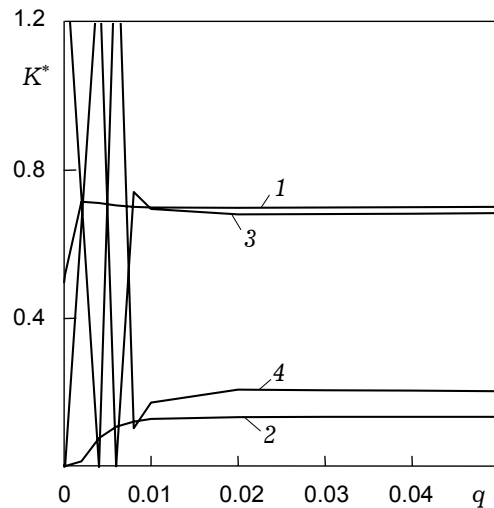


Рис. 32.28. Залежність зведених КІН від відносної відстані між тріщинами для малих значень  $q$  при  $M=200$

Стосовно КІН доходимо таких висновків.

1. Для досягнення бажаного рівня точності в обох випадках при  $q \rightarrow 0$  треба збільшувати кількість  $M$ , врахованих у рядах членів.

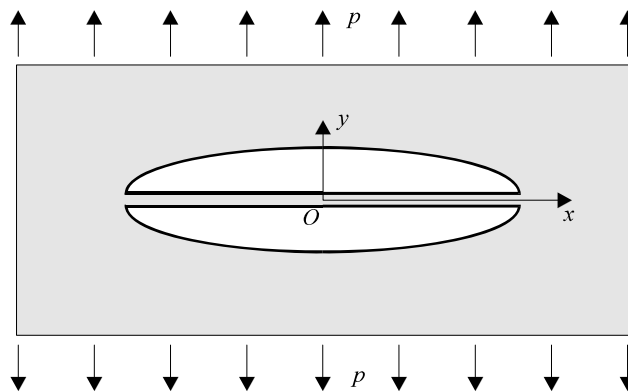


Рис. 32.29. Явище формування “півтріщин” під час зближення тріщин

2. Доки завдяки розрядній сітці комп'ютера вдається уникнути нагромадження похибок округлення, при  $d > r$ , за досить великим значенням  $M$ , обидва методи дають результати, які узгоджуються з асимптотичним розподілом [706, 860, 589] і  $K_1 \rightarrow p\sqrt{l/2}$  ( $K_1^* \rightarrow \sqrt{l/2} \approx \approx 0,707$ ,  $K_2^* \rightarrow 0$ ), тобто так само, як і випадку антиплоскої деформації (п. 24.5), домінує явище звичайного зближення тріщин, що є слушним, поки тріщини вже дуже близькі, але їхні зони інтенсивності все ще розділені чи ще не сильно перекриваються. З подальшим дуже великим зближенням тріщин їхні зони інтенсивності повинні зливатися і формувати спільну зону інтенсивності напружень.

3. Яким би великим не було значення  $M$ , застосовуючи традиційний метод з прямуванням  $q$  до нуля за умови  $d < r$  завжди одержуємо  $K_i^* \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Запропонована тут схема (32.48) дає граничні значення  $K_1^* \rightarrow 0,5$ ,  $K_2^* \rightarrow 0$ , властиві для «півтріщин». Тобто, вдається вилонити ефект злиття двох «половинних» тріщин (рис. 32.29). Окрім того, асимптотичний розподіл напружень поблизу вершин двох тріщин при  $r > d \rightarrow 0$  прямує до відповідного розподілу напружень поодинокій тріщини. Це, як і для згадуваної антиплоскої задачі, можна пояснити об'єднанням зон інтенсивності кожної з тріщин у спільну зону. Поки це об'єднання не відбулося сталосся (у процесі зливання зон інтенсивності – для більших  $q$ ) відбувається поступове зменшення  $K_1^*$  від 0,707 до 0,5.

4. У випадку зближення аналогічної системи з трьох чи більшої кількості ідентичних тріщин крайні тріщини повинні формувати «півтріщини», а внутрішні – давати нульові КІН.

## § 33. До обґрунтування застосовності методу функцій стрибка

### 33.1. МСЕ-аналіз задачі тонкостінних включень

Використання методу функцій стрибка або інших підходів до розв'язування задач теорії пружності для середовищ із тонкими включеннями, які використовують принцип спряження континуумів різної вимірності [1077] і здійснюють заміну реального включення деякою лінією (поверхнею), наділеною у певному сенсі властивостями включення, приводить до появи сингулярності у виразах для компонент тензорів напружень і деформацій біля краю неоднорідності.

Такі способи дають необмежені напруження навіть за умови, що край включення заокруглений, тобто тоді, коли вони повинні були би бути обов'язково скінченними, хоча й великими.

Для перевірки адекватності методу функцій стрибка і опрацьованої на його основі теорії тонкостінних включень було застосовано метод скінченних елементів [998]. Було розглянуто квадратну пластинку зі стороною у 5 разів довшою від довжини  $2a$  включення прямокутного профілю (товщина  $2h = \text{const}$ ). Вибіралося класичні трикутні елементи з лінійною апроксимацією переміщень. Внаслідок зміщення частини вузлів відносна товщина включення  $h/a$  змінювалася від 0,1 до 0,025. Окрему числову схему для аналізу абсолютно жорсткого включення (АЖВ) було побудовано на основі припущення про однаковість модулів пружності включення та матриці ( $E_B = E$ ), проте рівність нулю переміщень у тих вузлах сітки, що належать поздовжній осі включення.

Деякі результати обчислень відображені на рис. 33.1, 33.2. На рис. 33.1 порівнюються розраховані за допомогою методу функцій стрибка нормальні напруження  $\sigma_{yy}$  на лінії злуки включення прямокутного профілю різної відносної жорсткості  $k = E_B/E$  (розтяг на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ; плоский напружений стан;  $\nu_B = \nu = 1/3$ ,  $h_0/a = 0,1$ ) – суцільні лінії з МСЕ-

розв'язком відповідної задачі – затемнені трикутники. Результати, отримані обома методами (функцій стрибка та МСЕ), практично збігаються для значень  $k < 1$  і відрізняються не більше, як на 5 % для  $k > 1$  (у діапазоні  $x/a \leq 0,8$ ). В останньому випадку МСЕ-розв'язку властивий V-подібний осциляційний вигин, що зміщується до торця зі зменшенням відношення  $h/a$ . Забіленими кружечками позначені результати, отримані для згаданої вище МСЕ-моделі абсолютно жорсткого включення. Вони також доволі добре наближують аналітичні результати – навіть краще від звичайного застосування МСЕ до високомодульного включення.

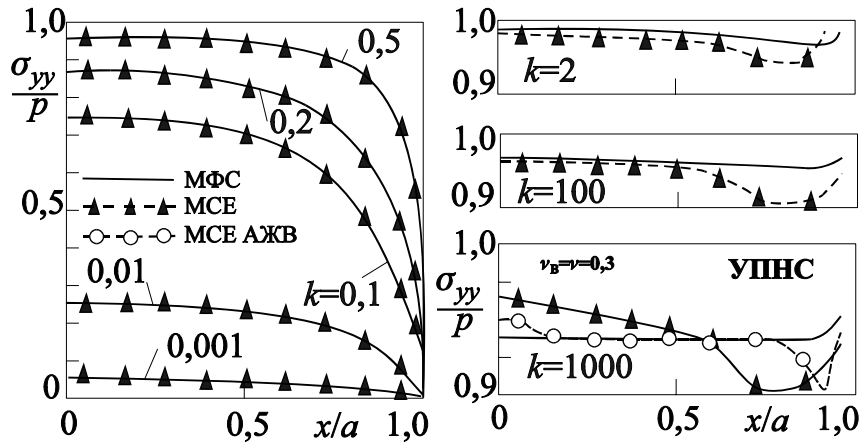


Рис. 33.1. Зіставлення результатів розрахунку нормальних напружень  $\sigma_{yy}$ , отриманих методами функцій стрибків та МСЕ

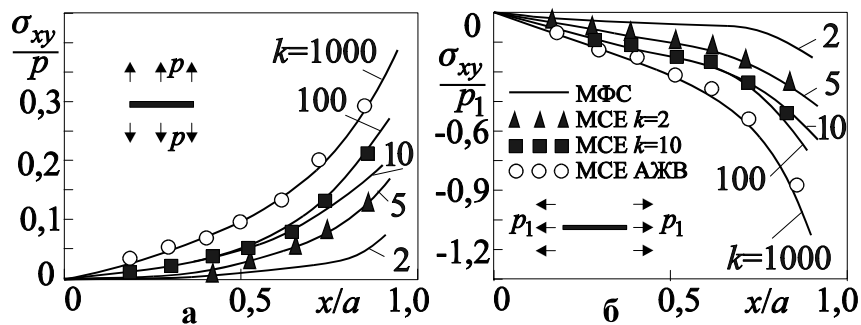


Рис. 33.2. Зіставлення результатів розрахунку дотичних напружень  $\sigma_{xy}$ , отриманих методами функцій стрибків та МСЕ

На рис. 32.2 відображена залежність дотичних напружень  $\sigma_{xy}$  на верхній поверхні відносно жорсткого включення за дії напружень розтягу  $p$  перпендикулярно до осі включення (рис. 32.2 а) та напружень розтягу  $p_1$  вздовж цієї осі. Суцільними лініями позначено аналітичні результати, отримані методом функцій стрибка; затемненими трикутниками – МСЕ-розв'язок у випадку відносної жорсткості включення  $k = 2$ ; затемненими квадратами – МСЕ-розв'язок у випадку відносної жорсткості включення  $k = 10$  і забіленими кружечками затемненими трикутниками – МСЕ-розв'язок для моделі абсолютно жорсткого включення. Отримані відмінності перебували в межах 5 %. Для відносно податних включень  $k < 1$  за поздовжнього розтягу відмінність значно більша, навіть до 50 %, що пояснюється значним впливом у цьому випадку напружень на торцях включення і необхідністю обережно за таких обставин використовувати апріорні припущення.

### 33.2. Інтерпретація КІН та ККН [113]

#### Основні співвідношення

У праці [911] під час аналізу задач теорії пружності для ізотропних середовищ з включеннями у вигляді еліптичних циліндрів з податного матеріалу ( $\mu_0 \ll \mu$ ) за дії поля напружень на безмежності виявлений зв'язок між трьома КІН  $K_i$ , що впливають із розв'язку сингулярної задачі, і коефіцієнтами концентрації напружень (ККН)  $k_{ij}(\rho)$ . Тут  $K_i$  ( $i=1,2,3$ ) мають механічний зміст класичних КІН теорії тріщин;  $k_{ij}$  – коефіцієнти концентрації компоненти  $\sigma_{ij}$  тензора напружень  $k_{yy} = \sigma_{yy}/\sigma_{yy}^0$ ,  $k_{xy} = \sigma_{xy}/\sigma_{xy}^0$ ,  $k_{yz} = \sigma_{yz}/\sigma_{yz}^0$ , які характеризує розв'язок задачі з урахуванням реальної форми неоднорідності (I.3), (VI.2) [911], (4.2), (4.59) [710] у її близькій до еліптичної кінцевій частині

$$k_{yy} = 1 + \frac{2K_1}{\sqrt{\pi\rho\sigma_{yy}^0}}, \quad k_{xy} = 1 + \frac{K_2}{\sqrt{\pi\rho\sigma_{xy}^0}}, \quad k_{yz} = 1 + \frac{K_3}{\sqrt{\pi\rho\sigma_{yz}^0}}; \quad (33.1)$$

$\rho = a/A^2$  – кривина контуру включення у його вершині;  $A = a/h_0$  – відношення більшої півосі  $a$  до меншої  $h_0$ , що скерована вздовж осі  $y$ ;  $\sigma_{yy}^0$ ,  $\sigma_{xy}^0$ ,  $\sigma_{yz}^0$  – напруження у відповідній точці однорідного тіла за відсутності включення та дії того ж навантаження. За великої кривини контуру вершини включення одиницю у лівих частинах формули (33.1) можна відкинути. Важливість виразів типу (33.1) полягає не лише у тому, що можна у випадку дефектів з малими радіусами кривини вістря здійснювати перехід від ККН до КІН, але й навпаки – на основі КІН розраховувати ККН, обчислювати рівень напружень біля дефекту на основі класичних теорій міцності [725, 1030, 528] міцність і довговічність елементів конструкцій.

Перший вираз у (33.1) стосовно  $k_{yy}$  був отриманий у праці В.В.Панасюка, О.Є.Андрейківа, М.М.Стадника [649], де відзначено, що  $K_1 \sim K_1^{\text{ПАС}}$  – КІН для півбезмежної тріщини за еквівалентного навантаження. Тут і у подібних виразах цього параграфу літери у верхньому індексі означають перші літери прізвищ авторів відповідних праць та деяку іншу інформацію. За фізичним змістом

$$K_1 = K_1^{\text{ПАС}} \equiv \sqrt{\pi a} \sigma_{yy}^0 \frac{1-k}{1+2kA} \sim K_{1,1}, \quad k = \frac{G_B}{G}. \quad (33.2)$$

Аналогічні до (33.1) вирази біля заокругленої вершини пружного дефекту з урахуванням членів  $(\rho + 2z)^{\pm 1/2} - 1$  і використанням поняття КІН  $K_j^{\text{Ж}}$ ,  $K_j^{\text{М}}$  ( $j=1,3$ ) так званої "жорсткої" і "м'якої" частини асимптотичного розвинення побудовані у праці Л.Т.Бережницького, П.С.Качура та Л.П.Музурака [92] разом з

$$k_{xx} = \frac{(\kappa+1)K_{1,2}}{(\kappa-1)\sigma_{xx}^0\sqrt{\pi\rho}} + 1, \quad k_{yz} = \frac{K_{3,1}}{\sigma_{yz}^0\sqrt{\pi\rho}} + 1, \quad k_{xz} = \frac{K_{3,2}}{\sigma_{xz}^0\sqrt{\pi\rho}} + 1, \quad (33.3)$$

причому

$$K_1 = K_1^{\text{БКМ}} \equiv K_{1,1} + \frac{\kappa-3}{2(\kappa-1)}K_{1,2}, \quad K_2 = K_2^{\text{БКМ}} \equiv \frac{\kappa+1}{\kappa-1}K_{1,2}, \quad K_3 = K_3^{\text{БКМ}} \equiv K_{3,1}, \quad (33.4)$$

$$K_{j,1} = \sqrt{\pi}K_j^{\text{М}}, \quad K_{1,2} = \sqrt{\pi}\frac{\kappa-1}{2\kappa}K_1^{\text{Ж}}, \quad K_{2,2} = \sqrt{\pi}\frac{\kappa-1}{2\kappa}K_2^{\text{Ж}}, \quad K_{3,2} = \sqrt{\pi}K_3^{\text{Ж}}.$$

Крива  $\kappa = \rho/2$  розбиває область застосовності асимптотичних формул на безпосередньо прилеглу до вістря зону інтенсивності напружень та дещо віддалену (але все ж близьку до

вістря) зону концентрації напружень. Вирази для  $K_j^M$ ,  $K_j^K$  дають формули (6.6), (6.7), (6.15) статті [[92]. Загалом формули праці [92] побудовані без урахування головної частини асимптотичних розвинень, а тому їхнє уточнення за допомогою додавання до правих частин виразів по одиниці дає залежності (33.1), (33.3).

Подібна до (33.1) залежність для включення овального профілю за вінклеровою моделлю записана у публікації В.В.Панасюка, М.М.Стадника, І.Я.Горбачевського [709]

$$K_1 = K_1^{\text{ПСГ}}, \quad K_2 = \frac{2K_2^{\text{ПСГ}}}{3\sqrt{3}}, \quad (33.5)$$

де  $K_i^{\text{ПСГ}}$  ( $i=1,2$ ) мають зміст КІН біля вістря тріщини, до берегів якої прикладене навантаження, що компенсує однорідне поле та поле напружень від самого включення. Тому

$$K_1^{\text{ПСГ}} \sim K_{1,1}, \quad K_2^{\text{ПСГ}} \sim K_{2,1}. \quad (33.6)$$

Явний вигляд КІН  $K_i^{\text{ПСГ}}$  дають формули (29), (30) праці [709].

Виходячи з розв'язку задачі теорії пружності в околі порожнини та враховуючи додатково поле напружень, що виникає всередині включення та передається через спільну поверхню до матриці, у роботі М.М.Стадника [908] визначена концентрація напружень біля краю включення, яка стосовно витягнутого вздовж осі з циліндра (плоска деформація, система координат  $xuz$ ) дорівнює

$$k_{yy} = \frac{2K_1^C}{\sqrt{\pi\rho}} + 1 + \frac{\sigma_{xx}^B}{\sigma_{yy}^0}, \quad k_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^B}{\sigma_{xy}^0}, \quad k_{yz} = \frac{K_3^C}{\sqrt{\pi\rho}} + 1, \quad (33.7)$$

де індексом "В" відзначений розв'язок, що стосується включення. Існує така залежність між КІН  $K_i^C$  та УКІН методу функцій стрибка:

$$K_1^C = K_{1,1} + K_{1,2}, \quad K_2^C = K_{2,1} + K_{2,2}, \quad K_3^C = K_{3,1} \quad (\text{не враховано } K_{3,2}). \quad (33.8)$$

У вищеподаних виразах для  $K_1^C$ ,  $K_2^C$  вдалося виділити по дві складові  $K_{i,j}^C = K_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2$ ), причому для УКІН  $K_{1,1}$ ,  $K_{1,2}$  включення еліптичного профілю побудовані прості вирази (27) [908].

Використання вінклерової моделі дало можливість В.В.Панасюку, О.Є.Андрейківу, М.М.Стаднику у праці [649] отримати явний вигляд КІН для включення еліптичного профілю

$$k_{yy} = 1 + \frac{2A(1-k)}{1+2kA}, \quad k = \frac{E_B}{E}. \quad (33.9)$$

### Аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень

Для опису механічних властивостей неоднорідності у [911, 710] використана вінклерова модель включення і отримані формули для КІН у вершині еліптичного включення стосовно випадку плоскої деформації та дії однорідного поля напружень на безмежності  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ,  $\sigma_{xx}^\infty = p_1$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$  (I.11) у роботі М.М.Стадника, І.Я.Горбачевського [911] побудовані залежності

$$K_1^{\text{СГ}} = \frac{p\sqrt{\pi a}(1-k)}{1+2Ak(1-\nu^2)}, \quad K_2^{\text{СГ}} = \frac{\tau\sqrt{\pi a}(1-k)}{1+Ak(1-\nu)}, \quad k = \frac{G_B}{G}. \quad (33.10)$$



Для переходу до плоского напруженого стану слід здійснити заміну  $E/(1-\nu^2) \rightarrow E$ ;  $\nu \rightarrow \nu/(1+\nu)$ .

У випадку поздовжнього зсуву включення еліптичного профілю за вінклеровою моделлю (V.9) тих же авторів [911] і  $\sigma_{yz}^\infty = \tau$  було отримано

$$K_3^{CG} = \frac{\tau\sqrt{\pi a}(1-k)}{1+Ak}, \quad k = \frac{G_B}{G}. \quad (33.11)$$

Г.П.Черепанов [1078] під час аналізу точного розв'язку Гардімана [1335] для включення еліптичного профілю виділив проміжну асимптотику розв'язку, яка слухна на відстанях від кінця включення, великих у порівнянні з радіусом  $\rho$  кривини кінця, але малих порівняно з довжиною включення, та описав напружений стан поблизу вістря еліптичного включення за допомогою двох КІН (10.18) [1078]

$$K_1^C - iK_2^C = \frac{4(p-i\tau)\sqrt{\pi a}}{kA(1+\kappa)+4}, \quad (33.12)$$

що переносять класичні уявлення про КІН для тріщини на випадок тонких податних включень.

Використання наближеного розв'язку задачі на основі гіпотези пружної основи (вінклерова модель) привело до виразу (10.21) Г.П.Черепанова

$$K_1^{CB} = p\sqrt{\pi a} \frac{1-A(1+\kappa)E_0}{8G}, \quad K_2^{CB} = 0. \quad (33.13)$$

Табл. 33.1 – 33.3 містять деякі результати обчислення нормованих КІН

$$K_{1,j}^{0q} = K_{1,j}^q / (p\sqrt{\pi a}), \quad K_{2,j}^{0q} = K_{2,j}^q / (\tau\sqrt{\pi a}), \quad K_{3,j}^{0q} = K_{3,j}^q / (\tau\sqrt{\pi a})$$

для включення еліптичного профілю у випадку плоского напруженого стану при  $\nu = 1/3$  (плоскої деформації при  $\nu = 1/4$ ) (табл. 33.1, 33.2) і поздовжнього зсуву (табл. 33.3) для значень параметру  $A = 10$ , а також різної відносної жорсткості  $k$  включення. Зірочкою “\*” відзначені результати, отримані за допустимими межами вихідних параметрів [1078].

УКІН  $K_{i,1}$  ( $i = 1, 2$ ) обчислювалися за основною моделлю пружного включення (п. 16.2), а також (табл. 33.2) на основі двох варіантів моделі Кірхгофа (п. 16.3): 1) стала  $c$ , яка визначає кут повороту торця включення під час його деформування, нульова; 2) стала  $c$  визначається формулою (32.15). Під час обчислення враховувалося 20 членів розвинення шуканих функцій у ряди поліномів Чебишева з виділеною кореневою особливістю.

Загалом усі використані підходи для податних включень (за винятком  $K_1^{CB}$ ) дають досить близькі результати, що свідчить, головне, про можливість використання сингулярних розв'язків для характеристики поля напружень і деформацій біля вершин тонкостінних дефектів, а також про доволі високу ефективність моделі вінклерового включення для податних прошарків. Слід зазначити, що збільшення податності включення зближує результати всіх підходів і моделей, які тут обговорюються. З другого боку, чим менша відносна товщина включення (це еквівалентне зближенню пружних властивостей включення і матриці, а отже й збільшенню стосовно властивостей порожнини жорсткості включення), тим меншою, як свідчать розрахунки, є міра збігу результатів різних підходів. Загалом  $K_{1,i} = K_{1,i}^C$  ( $i = 1, 2$ ) за довільних  $k \leq 1$ .

Для жорстких включень ( $k > 1$ ) відмінність є більшою. Лише УКІН  $K_{1,1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ ; інші КІН є ненульовими. Найближчими між собою у найширшому спектрі зміни пружних власти-

востей податного включення є результати визначення УКІН  $K_{i,1}$  на основі методу функцій стрибка та КІН  $K_{i,1}^C$  за підходом [908] і  $K_{i,1}^{ПСГ}$ ,  $K_{i,1}^{СГ}$  за вінклеровою моделлю [709, 911].

**Таблиця 33.1. Значення величини  $K_{1,j}^{0q} = K_{1,j}^q / (p\sqrt{\pi a})$**

$k = E_B / E$	$K_{1,1}^0$	$K_1^{0Ч}$	$K_1^{0ЧВ}$	$K_1^{0СГ}$	$K_1^{0ПАС}$	$K_1^{0СГ}$	$K_{1,1}^{0C}$
0	1	1	1	1	1	1	1
0,0001	0,9977	0,9993	0,9990	0,9980	0,9979	0,9977	0,9977
0,001	0,9775	0,9926	0,9900	0,9806	0,9794	0,9773	0,9775
0,01	0,8113	0,9302	0,9000	0,8337	0,8250	0,8098	0,8113
0,1	0,2814	0,5714	0*	0,3130	0,3000	0,2791	0,2814
0,2	0,1484	0,4000	-1*	0,1684	0,1600	0,1468	0,1484
0,5	0,0419	0,2105	-4*	0,0482	0,0454	0,0412	0,0419
1	0	0,1176*	-9*	0	0	0	0
2	0,0018	0,0625*	-19*	-0,0260	-0,0244	-0,0220	-0,0228
5	0,0021	0,0260*	-49*	-0,0422	-0,0396	-0,0356	-0,0377
10	0,0016	0,0131*	-99*	-0,0477	-0,0448	-0,04447	-0,0433
100	0,0003	0,0013*	-999*	-0,0528	-0,0495	-0,0445	-0,0492
1000	$3 \cdot 10^{-5}$	0,0001*	-9999*	-0,0533	-0,0499	-0,0449	-0,0499
10000	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$ *	-99999*	-0,0533	-0,0500	-0,0449	-0,0500
$\infty$	0	0*	$\infty$ *	-0,0533	-0,0500	-0,0499	-0,0500

**Таблиця 33.2. Значення величини  $K_{2,j}^{0q} = K_{2,j}^q / (\tau\sqrt{\pi a})$**

$k = E_B / E$	$K_{2,1}^0$			$K_2^{0Ч}$	$K_2^{0СГ}$	$K_{2,1}^{0ПСГ}$	$K_{2,1}^{0C}$
	Основна модель	Модель Кірхгофа					
		$c=0$	$c$ за (32.15)				
0	1	1	1	1	1	1	1
0,0001	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9992	0,9991	0,9995
0,001	0,9916	0,9926	0,9921	0,9926	0,9916	0,9913	0,9950
0,01	0,9209	0,9301	0,9255	0,9302	0,9209	0,9188	0,9518
0,1	0,5128	0,6945	0,6590	0,5710	0,5143	0,5070	0,6410
0,2	0,3175	0,4165	0,3682	0,4000	0,3200	0,3138	0,4414
0,5	0,1026	0,2125	0,1597	0,2105	0,1053	0,1026	0,1632
1	0	0,1153	0,0573	0,1176*	0	0	0
2	-0,0278	0,0756	0,0391	0,0625*	-0,0625	-0,0606	-0,1015
5	-0,0392	0,0378	0,0227	0,0260*	-0,1039	-0,1006	-0,1572
10	-0,0357	0,0287	0,0152	0,0131*	-0,1184	-0,1146	-0,1633
100	-0,0086	0,0106	0,0017	0,0013*	-0,1318	-0,1276	-0,1341
1000	-0,0010	0,0048	0,0003	0,0001*	-0,1332	-0,1289	-0,1334
10000	-0,0001	0,0005	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$ *	-0,1333	-0,1290	-0,1333
$\infty$	0	0	0	0*	-0,1333	-0,1290	-0,1333

Для податних ( $k \leq 1$ ) значення  $K_2^Ч$  (табл. 33.2), які визначаються на основі пружної моделі Г.П.Черепанова (10.18) [1078], практично повністю (особливо при  $A \geq 100$ ) збігають-

ся з величиною  $K_{1,1}$  моделі Кірхгофа (п. 16.3) при  $c = 0$ , а КІН  $K_2^{CG}$  вінклерової моделі близький до значення УКІН  $K_{2,1}$  за основною пружною моделлю (ом) (п. 16.2, див. теж [973]).

Згідно з табл. 33.3 метод функцій стрибка (модель Іом п. 20.10) дає  $K_{3,1} = K_3^{CG}$  з точністю до п'яти значущих цифр у всьому спектрі зміни параметра  $k$ . При  $k \leq 1$  такі ж результати дає плівкова модель Іпм (п.20.10). Тому метод функцій стрибка, що враховує додатково ще один КІН  $K_{3,2}$ , який у [911, 1078] до відома не беруть (вважають нульовим), є загальнішим.

Таблиця 33.3. Значення величини  $K_{3,j}^{0q} = K_{3,j}^q / (\tau\sqrt{\pi a})$

$k = E_B / E$	$K_1^{0CG}$	$K_{3,1}^0$ за моделлю			
		1 пм	2 пм	3 пм	1 ом
0	1	1	1	1	1
0,001	0,98911	0,98911	0,95879	0,99010	0,98911
0,01	0,90000	0,90000	0,81818	0,90909	0,90000
0,1	0,45000	0,45000	0,34189	0,50000	0,45000
0,2	0,26667	0,26667	0,18426	0,33333	0,26667
0,5	0,08333	0,08333	0,04881	0,16667	0,08333
1	0	0	0	0,09091	0
2	-0,04762	0	0	0,04762	-0,04762
5	-0,07843	0	0	0,01961	-0,07843
10	-0,08911	0	0	0,00990	-0,08911
100	-0,09890	0	0	0,00100	-0,09890
1000	-0,09989	0	0	0,00010	-0,09989
$\infty$	-0,10000	0	0	0	-0,10000

Таким чином, використання методу функцій стрибка та отриманого на його основі сингулярного розв'язку до вивчення концентрації напружень на тонких дефектах цілком виправдане.

### Аналіз коефіцієнтів концентрації напружень

Табл. 33.4 містить результати розрахунку ККН  $k_{yy}$  за різними формулами для включення еліптичного профілю ( $A = 10$ ) за дії однорідного поля напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = \sigma_{yy}^0 = p$  в умовах плоского напруженого стану і  $\nu_B = \nu = 1/3$  (плоскої деформації, коли  $\nu_B = \nu = 1/4$ ).

Обчислені за формулами (33.7) та (33.1) (на основі КІН праць [908, 92] відповідно) значення ККН збігаються з точними даними, одержаними на основі розв'язку Гардімана (стовпчик 2). Різниця в означенні КІН  $K_1^C$  та  $K_1^{БКМ}$  компенсується врахуванням у (33.7) осевих напружень у включенні  $\sigma_{xx}^B$ . Нехтування у (33.7) цим доданком (стовпчик 3) дає досить хороші результати для податного включення та істотної відносної похибки (яка не зменшується зі зменшенням  $A$ ) для досить жорстких.

Розрахунок за прямою формулою (33.9) (стовпчик 4) дає задовільні результати, якщо  $k < 2$ . Використання залежностей (33.1) і  $K_1^{ПАС}$  (33.2) (стовпчик 5) дає у тому ж діапазоні  $k < 2$  дещо менше відхилення від точних значень. У стовпчику 6 міститься розрахунок ККН за (33.1) на основі КІН (33.5)  $K_1^{ПСГ}$  роботи [709]. Обчислення ККН за формулою (33.1) з використанням КІН  $K_1^Ч$  на основі розв'язку Гардімана (33.12) і з використанням вінклерової моделі (33.13) (стовпчики 7, 8 відповідно) дало задовільні результати лише для дуже подат-

них включень ( $k \ll 1$ ). Тому використання КН у формі (33.12), а особливо (33.13) недоцільне. Використання вінклерової моделі пружного включення (стовпчики 4 – 6, 8) дає тим кращі результати, чим більша його податність.

У стовпчику 9 поміщені значення ККН, розраховані за формулою (33.1) з використанням УКН, одержаних на основі запропонованого методу функцій стрибка. Для податних включень ( $k < 1$ ) результати добре узгоджуються з точними; для жорстких – ні, але зі збільшенням відносної довжини включення  $A$  – точність помітно покращується. Скажімо, для абсолютно жорсткого включення з  $A=100$  ККН  $k_{yy} = -5,25$  (точно –  $-6,19$ ); з  $A=1000$  – ККН  $k_{yy} = -61,5$  (точно  $-62,4$ ).

Таблиця 33.4. ККН  $k_{yy}$  для  $A=10$ 

$k = \frac{E_B}{E}$	Точно, (33.7), (33.1) $K_1^{БКМ}$	(33.7) без $\sigma_{xx}^B$	(33.9)	(33.1) $K_1^{ПАС}$	(33.1) $K_1^{ПСГ}$	(33.1) $K_1^Ч$	(33.1) $K_1^{ЧВ}$	(33.1) $K_{1,1}$
0	21,000	21,000	21,000	21,000	21,000	21,000	21,000	21,000
0,0001	20,954	20,954	20,958	20,954	20,954	20,985	20,980	20,954
0,001	20,552	20,545	20,588	20,549	20,545	20,851	20,800	20,552
0,01	17,245	17,190	17,500	17,227	17,196	19,605	19,000	17,226
0,1	6,6897	6,5034	7,0000	6,6276	6,5814	12,429	1,0000	6,6901
0,2	4,0330	3,8403	4,2000	3,9688	3,9358	9,0000	-19,000	4,0322
0,5	1,8818	1,7531	1,9091	1,8389	1,8247	5,2105	-79,000	1,8809
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3,3529	-179,00	1,0000
2	0,4711	0,6908	0,5122	0,5443	0,5604	2,2500	-379,00	0,9532
5	0,0336	0,6700	0,2079	0,2457	0,2873	1,5195	-979,00	0,8044
10	-0,1913	0,7834	0,1045	0,1336	0,1946	1,2632	-1979,0	0,6694
100	-0,5123	1,0703	0,0105	0,0152	0,1105	1,0266	-19979	0,4192
1000	-0,5573	1,1192	0,0010	0,0016	0,1021	1,0027	-199980	0,3796
10000	-0,5620	1,1244	0,0001	0,0002	0,1012	1,0003	$-2 \cdot 10^6$	0,3750
$\infty$	-0,5625	1,1250	0	0	0,1011	1,0000	$-\infty$	0,3750

Таблиця 33.5. ККН  $k_{yy}$  для  $A=100$ 

$k = \frac{E_B}{E}$	Точно, (33.7), (33.1) $K_1^{БКМ}$	(33.7) без $\sigma_{xx}^B$	(33.9)	(33.1) $K_1^{ПАС}$	(33.1) $K_1^{ПСГ}$	(33.1) $K_1^Ч$	(33.1) $K_1^{ЧВ}$	(33.1) $K_{1,1}$
0	201,00	201,00	201,00	201,00	201,00	201,00	201,00	201,00
0,0001	196,59	196,58	197,06	196,59	196,58	199,51	199,00	196,58
0,001	164,19	164,13	167,50	164,17	164,14	187,05	181,00	164,18
0,01	62,093	61,866	67,000	62,017	61,970	115,29	1,0000	62,020
0,1	8,7722	8,4878	9,5714	8,6774	8,6677	24,529	-1799,0	8,7748
0,2	4,5733	4,3154	4,9024	4,4873	4,4820	13,500	-3799,0	4,5660
0,5	1,9381	1,7756	1,9901	1,8839	1,8820	6,1948	-9799,0	1,9381
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3,6316	-19799	1,0000
2	0,4475	0,7661	0,5012	0,5537	0,5560	2,3245	-39799	0,9452
5	-0,1237	1,0899	0,2008	0,2808	0,2887	1,5319	-99799	0,6718
10	-0,6580	1,8673	0,1004	0,1837	0,1994	1,2663	-199800	0,2332
100	-3,8744	7,8956	0,0100	0,0489	0,1191	1,0267	$-2 \cdot 10^6$	-2,9208
1000	-5,8460	11,712	0,0010	0,0068	0,1110	1,0027	$-2 \cdot 10^7$	-4,8516
10000	-6,1516	12,305	0,0001	0,0007	0,1102	1,0003	$-2 \cdot 10^8$	-5,2500
$\infty$	-6,1875	12,375	0	0	0,1101	1,0000	$-\infty$	-5,2500

З огляду на те, що у методі функцій стрибка товщина включення фігурує великою мірою формально (лише як параметр моделі), то отримане узгодження з точними результатами для включення еліптичного профілю свідчить про високу міру адекватності запропонованого підходу і через це можна сподіватися хорошої відповідності й у випадку тонких включень іншої форми.

Тому для тонких включень довільного профілю ККН можна обчислювати на основі УКІН, розрахованих методом функцій стрибка за формулою (33.1) і навпаки, за відомими ККН можна оцінювати УКІН.

Табл. 33.5, 33.6 містять аналогічні результати, отримані для  $A = 100; 1000$ .

Таблиця 33.6. ККН  $k_{yy}$  для  $A = 1000$

$k = \frac{E_B}{E}$	Точно, (33.7), (33.1) $K_1^{БКМ}$	(33.7) без $\sigma_{xx}^B$	(33.9)	(33.1) $K_1^{ПАС}$	(33.1) $K_1^{ПСГ}$	(33.1) $K_1^Ч$	(33.1) $K_1^{ЧВ}$	(33.1) $K_{1,1}$
0	2001,0	2001,0	2001,0	2001,0	2001,0	2001,0	2001,0	2001,0
0,0001	1633,6	1633,5	1667,5	1633,6	1633,5	1861,5	1801,0	1633,6
0,001	615,94	615,71	667,00	615,86	615,82	1143,9	0,9999	615,88
0,01	85,379	85,063	95,286	85,273	85,264	236,29	-17999	85,200
0,1	9,0660	8,7676	9,9552	8,9665	8,9655	27,316	-198000	9,0590
0,2	4,6372	4,3714	4,9900	4,5486	4,5481	14,245	-398000	4,6290
0,5	1,9438	1,7776	1,9990	1,8884	1,8882	6,3191	-998000	1,9430
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3,6631	$-2 \cdot 10^6$	1,0000
2	0,4447	0,7766	0,5001	0,5554	0,5556	2,3324	$-4 \cdot 10^6$	0,9442
5	0,1521	1,1683	0,2001	0,2880	0,2889	1,5332	$-1 \cdot 10^7$	0,6470
10	0,7836	2,1616	0,1000	0,1981	0,2000	1,2666	$-2 \cdot 10^7$	0,1152
100	-9,2288	18,767	0,0100	0,1032	0,1199	1,0267	$-2 \cdot 10^8$	-8,2466
1000	-39,882	79,887	0,0010	0,0409	0,1119	1,0027	$-2 \cdot 10^9$	-38,920
10000	-59,101	118,22	0,0001	0,0060	0,1111	1,0003	$-2 \cdot 10^{10}$	-61,460
$\infty$	-62,438	124,87	0	0	0,1110	1,0000	$-\infty$	-61,500

## § 34. Тонкі включення у ізотропних шаруватих середовищах

### 34.1. Основні співвідношення

Застосуємо до розв'язування плоскої задачі для тонких включень у шаруватих кусково-однорідних середовищах метод інтегральних перетворень Фур'є. Відповідно до виразів (13.77) – (13.86) у випадку плоскої задачі інтегральне перетворення Фур'є дає зв'язок між функцією напружень Ейрі  $\Phi(x, y)$ , що задовольняє бігармонічне рівняння  $\Delta\Delta\Phi(x, y) = 0$ , та її трансформантою  $\Phi^F(\xi, y)$  за змінною  $x$  у вигляді

$$\Phi^F(\xi, y) \equiv F(\Phi, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \xi) e^{i\xi x} dx, \quad \Phi(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (34.1)$$

З урахуванням обмежень, накладених на функцію  $\Phi$  (коли  $x \rightarrow \infty$ , то  $\Phi(x, y)$ ,  $\partial\Phi/\partial z \rightarrow 0$ ), фур'є-перетворення напружень і похідних переміщень мають вигляд

$$\left\{ \sigma_{xx}^F(\xi, y), \sigma_{yy}^F(\xi, y), \sigma_{xy}^F(\xi, y) \right\} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\xi^2, i\xi \frac{\partial}{\partial y} \right\} \Phi^F(\xi, y),$$

$$\left\{ u_x'^F(\xi, y), u_y'^F(\xi, y) \right\} = \left\{ k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2 \xi^2, \frac{i}{\xi} \left( k_3 \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} - k_1 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \right\} \Phi^F(\xi, y),$$
(34.2)

а розв'язок бігармонічного рівняння –

$$\Phi^F(\xi, y) = [A_1(\xi) + \xi y A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [A_2(\xi) + \xi y A_4(\xi)] e^{|\xi|y},$$
(34.3)

де  $A_i(\xi), B_i(\xi)$  – довільні комплексні функції, причому

$$A_i(\xi) = \begin{cases} A_i(\xi) & (\xi \geq 0), \\ A_j(\xi) & (\xi < 0); \end{cases} \quad B_i(\xi) = \begin{cases} B_i(\xi) & (\xi \geq 0), \\ B_j(\xi) & (\xi < 0) \end{cases} \quad (i, j = 1 \dots 4; i \neq j, |i - j| = 1).$$
(34.4)

Тут враховано, що для кожного фіксованого значення  $y$  функція  $\Phi^F(\xi, y)$  обмежена за довільних значень  $\xi$ .

### 34.2. Стрибок напружень і переміщень на відрізку в однорідній площині

Розглянемо необмежену площину  $xOy$ , яка відповідає необмеженому середовищу зі сталими  $E, \nu$  та вважатимемо, що уздовж відрізка  $L'$  осі  $x$  (рис. 34.1) задані стрибки вектора напружень та похідних вектора переміщень

$$\begin{aligned} [\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}]^- - [\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}]^+ &= f_1^*(x), \\ [u_x' + iu_y']^- - [u_x' + iu_y']^+ &= f_4^*(x), \\ f_1^*(x) &\equiv f_1(x) - if_2(x), \\ f_4^*(x) &\equiv f_4(x) + if_5(x) \quad (x \in L'). \end{aligned}$$
(34.5)

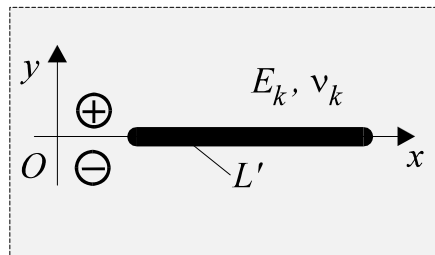


Рис. 34.1. Одне включення в однорідному середовищі

Поza відрізком  $L'$  функції стрибка дорівнюють нулю:  $f_1^*(x) = f_4^*(x) = 0 \quad (x \notin L')$ . Індeксами “+” та “-” у (34.5) відзначені граничні значення відповідних величин, якщо  $y \rightarrow 0$  з верхньої та нижньої півплощин відповідно.

Фур'є-перетворення умов (34.5) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{F-} - \sigma_{yy}^{F+} &= f_1^F(\xi), \quad \sigma_{xy}^{F-} - \sigma_{xy}^{F+} = f_2^F(\xi), \quad u_x'^{F-} - u_x'^{F+} = f_4^F(\xi), \\ u_y'^{F-} - u_y'^{F+} &= f_5^F(\xi), \quad f_r^F(\xi) \equiv \int_{L'} f_r(t) e^{i\xi t} dt \quad (r = 1, 2, 4, 5). \end{aligned}$$
(34.6)

Якщо подати фур'є-трансформанту  $\Phi^F$  функції Ейрі  $\Phi$  у верхній півплощині у вигляді (34.3), то з огляду на її обмеженість у разі  $y \rightarrow \infty$  отримуємо, що якщо  $y > 0$  слід вважати  $A_2(\xi) = A_4(\xi) = 0$ . Подібним чином отримують, що якщо  $y < 0$ , треба вважати  $A_1(\xi) = A_3(\xi) = 0$ . Отже, для випадку необмеженого середовища вираз (34.3) слід трансформувати до залежності

$$\Phi^F(\xi, y) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] [A_1(\xi) + \xi y A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] [A_2(\xi) + \xi y A_4(\xi)] e^{|\xi|y} \right\}. \quad (34.7)$$

З урахуванням (34.7) і (34.2) фур'є-перетворення напружень і похідних переміщень дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^F(\xi, y) &= -\frac{\xi^2}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] [A_1(\xi) + \xi y A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] [A_2(\xi) + \xi y A_4(\xi)] e^{|\xi|y} \right\}, \\ \sigma_{xy}^F(\xi, y) &= \frac{i\xi^2}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] [-\text{sign}(\xi) A_1(\xi) + (1 - |\xi|y) A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] [\text{sign}(\xi) A_2(\xi) + (1 + |\xi|y) A_4(\xi)] e^{|\xi|y} \right\}, \\ \sigma_{xx}^F(\xi, y) &= \frac{\xi^2}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] [A_1(\xi) + (\xi y - 2\text{sign}(\xi)) A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] [A_2(\xi) + (\xi y + 2\text{sign}(\xi)) A_4(\xi)] e^{|\xi|y} \right\}, \\ u_x'^F(\xi, y) &= \frac{\xi^2}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] [k_4 A_1(\xi) + (k_4 \xi y - 2k_1 \text{sign}(\xi)) A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] [k_4 A_2(\xi) + (k_4 \xi y + 2k_1 \text{sign}(\xi)) A_4(\xi)] e^{|\xi|y} \right\}, \\ u_y'^F(\xi, y) &= \frac{i\xi^2}{2} \left\{ [1 + \text{sign}(y)] [-k_4 \text{sign}(\xi) A_1(\xi) - (k_5 + k_4 |\xi|y) A_3(\xi)] e^{-|\xi|y} + [1 - \text{sign}(y)] [k_4 \text{sign}(\xi) A_2(\xi) - (k_5 - k_4 |\xi|y) A_4(\xi)] e^{|\xi|y} \right\}, \end{aligned} \quad (34.8)$$

$$k_4 = k_1 + k_2 = \frac{1}{2G}, \quad k_5 = 3k_1 - k_3 = \frac{\kappa - 1}{4G}.$$

На лінії  $y = 0$  їхні граничні значення з боку верхньої півплощини (знак “+”) та нижньої півплощини (знак “-”) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{F+} &= -\xi^2 A_1(\xi), & \sigma_{yy}^{F-} &= -\xi^2 A_2(\xi), \\ \sigma_{xy}^{F+} &= i\xi^2 [-\text{sign}(\xi) A_1(\xi) + A_3(\xi)], & \sigma_{xy}^{F-} &= i\xi^2 [\text{sign}(\xi) A_2(\xi) + A_4(\xi)], \\ u_x'^{F+} &= \xi^2 [k_4 A_1(\xi) - 2k_1 \text{sign}(\xi) A_3(\xi)], & u_x'^{F-} &= \xi^2 [k_4 A_2(\xi) + 2k_1 \text{sign}(\xi) A_4(\xi)], \\ u_y'^{F+} &= i\xi^2 [-k_4 \text{sign}(\xi) A_1(\xi) - k_5 A_3(\xi)], & u_y'^{F-} &= i\xi^2 [k_4 \text{sign}(\xi) A_2(\xi) - k_5 A_4(\xi)]. \end{aligned} \quad (34.9)$$

Підставляючи ці вирази у (34.6), отримуємо систему чотирьох лінійних алгебричних рівнянь стосовно функцій  $A_k(\xi)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

$$\begin{aligned}
A_1(\xi) - A_2(\xi) &= f_1^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_1(\xi), \\
[A_1(\xi) + A_2(\xi)] - [A_3(\xi) - A_4(\xi)] \operatorname{sign}(\xi) &= -i \operatorname{sign}(\xi) f_2^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_2(\xi), \\
-k_4[A_1(\xi) - A_2(\xi)] + 2k_1 \operatorname{sign}(\xi)[A_3(\xi) + A_4(\xi)] &= f_4^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_4(\xi), \\
k_4[A_1(\xi) + A_2(\xi)] + k_5 \operatorname{sign}(\xi)[A_3(\xi) - A_4(\xi)] &= -i \operatorname{sign}(\xi) f_5^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_5(\xi).
\end{aligned} \tag{34.10}$$

або

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^4 c_{kr}(\xi) A_k(\xi) &= \varphi_r(\xi) \equiv \int_{L'} F_{kr}(\xi, t) f_r(t) dt = 0 \quad (r=1, 2, 4, 5), \\
c_{11}(\xi) &= -c_{21}(\xi) = c_{12}(\xi) = c_{22}(\xi) = 1, \quad c_{42}(\xi) = -c_{32}(\xi) = \operatorname{sign}(\xi), \\
c_{31} &= c_{41} = 0, \quad c_{24}(\xi) = -c_{14}(\xi) = c_{15}(\xi) = c_{25}(\xi) = k_4, \\
c_{34}(\xi) &= c_{44}(\xi) = 2k_1 \operatorname{sign}(\xi), \quad c_{35}(\xi) = -c_{45}(\xi) = k_5 \operatorname{sign}(\xi).
\end{aligned} \tag{34.11}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд

$$A_q(\xi) = \sum_r a_{qr}(\xi) f_r^F(\xi) \quad (q=1\dots 4), \tag{34.12}$$

де

$$\|a_{qr}\| = \frac{1}{4\xi^2} \begin{vmatrix} 2 & -i \operatorname{sign}(\xi) k_5/k_1 & 0 & -i \operatorname{sign}(\xi)/k_1 \\ -2 & -i \operatorname{sign}(\xi) k_5/k_1 & 0 & -i \operatorname{sign}(\xi)/k_1 \\ \operatorname{sign}(\xi) k_4/k_1 & i k_4/k_1 & \operatorname{sign}(\xi)/k_1 & -i \\ \operatorname{sign}(\xi) k_4/k_1 & -i k_4/k_1 & \operatorname{sign}(\xi)/k_1 & i \end{vmatrix}. \tag{34.13}$$

Підставляючи ці вирази у формули (34.8) та здійснюючи обернене перетворення Фур'є з урахуванням залежностей (13.90), (13.94), отримаємо вирази для компонент тензора напружень і похідних переміщень у довільній точці площини

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ -\frac{1}{2} r_2(t-z) + \frac{1}{2(\kappa+1)} r_4(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)} r_1(t-z) + \frac{1}{2(\kappa+1)} r_3(t-z) \right] f_2(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad + \frac{G}{\kappa+1} r_4(t-z) \right] f_4(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{2G}{\kappa+1} r_1(t-z) - \frac{G}{\kappa+1} r_3(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
\sigma_{xy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)} r_1(t-z) + \frac{1}{2(\kappa+1)} r_3(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{1}{2} r_2(t-z) - \frac{1}{2(\kappa+1)} r_4(t-z) \right] f_2(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{2G}{\kappa+1} r_1(t-z) + \frac{G}{\kappa+1} r_3(t-z) \right] f_4(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad + \frac{G}{\kappa+1} r_4(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ \frac{\kappa-3}{2(\kappa+1)} r_2(t-z) - \frac{1}{2(\kappa+1)} r_4(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ \frac{\kappa+3}{2(\kappa+1)} r_1(t-z) - \frac{1}{2(\kappa+1)} r_3(t-z) \right] f_2(t) - \\
&\quad - \left[ \frac{4G}{\kappa+1} r_2(t-z) + \frac{G}{\kappa+1} r_4(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{2G}{\kappa+1} r_1(t-z) + \frac{G}{\kappa+1} r_3(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ -\frac{1}{G(\kappa+1)} r_4(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ \frac{2\kappa}{G(\kappa+1)} r_1(t-z) - \frac{1}{G(\kappa+1)} r_3(t-z) \right] f_2(t) - \\
&\quad - \left[ 2r_2(t-z) + \frac{2}{\kappa+1} r_4(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} r_1(t-z) + \frac{2}{\kappa+1} r_3(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ \frac{2\kappa}{G(\kappa+1)} r_1(t-z) + \frac{1}{G(\kappa+1)} r_3(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ -\frac{1}{G(\kappa+1)} r_4(t-z) \right] f_2(t) + \\
&\quad + \left[ \frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} r_1(t-z) + \frac{2}{\kappa+1} r_3(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ -2r_2(t-z) + \frac{2}{\kappa+1} r_4(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
r_1(t-z) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{t-z} \right] = \frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2}, \quad r_4(t-z) = \operatorname{Im} \left[ \frac{z-\bar{z}}{(t-\bar{z})^2} \right] = \frac{2y[(t-x)^2 - y^2]}{[(t-x)^2 + y^2]^2}, \\
r_2(t-z) &= \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{t-z} \right] = \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}, \quad r_3(t-z) = \operatorname{Re} \left[ \frac{z-\bar{z}}{(t-\bar{z})^2} \right] = \frac{4y^2(t-x)}{[(t-x)^2 + y^2]^2}
\end{aligned} \tag{34.14}$$

або

$$\begin{aligned}
\sigma_{pq}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{pqmr} r_m(t-z) f_r(t) dt, \\
\frac{\partial u_q(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{qmr} r_m(t-z) f_r(t) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{yy12} = a_{xy22} = a_{x32} = a_{y42} &= -\frac{1}{2}, \quad a_{yy21} = -a_{xy11} = a_{x41} = -a_{y31} = \frac{1-\kappa}{2(\kappa+1)}, \\
a_{yy15} = a_{yy24} = a_{xy14} = -a_{xy25} &= -a_{xx15} = -a_{xx24} = -a_{x35} = a_{x44} = a_{y34} = a_{y45} = \\
&= \frac{1}{2(\kappa+1)}, \quad a_{yy41} = a_{xy31} = a_{xx41} = -\frac{2G}{\kappa+1}, \quad a_{xx12} = -\frac{3-\kappa}{2(\kappa+1)}, \quad a_{xx21} = \frac{3+\kappa}{2(\kappa+1)}, \quad (34.15) \\
a_{xx32} &= -\frac{4G}{\kappa+1}, \quad a_{yy35} = -a_{yy44} = a_{xy34} = a_{xy45} = -a_{xx35} = a_{xx44} = \frac{G}{\kappa+1}, \\
a_{x21} = a_{y11} &= \frac{\kappa}{2G(\kappa+1)}, \quad a_{x15} = a_{x24} = -a_{y14} = a_{y25} = -\frac{1}{4G(\kappa+1)} \quad (p, q \sim x, y).
\end{aligned}$$

Інші коефіцієнти  $a_{pqmr}$ ,  $a_{qmr}$  дорівнюють нулю.

За формулами Сохоцького – Племеля [635, 112] запишемо граничні значення компонент вектора напружень і похідних вектора переміщень на лінії  $y = 0$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^{\pm}(x) + i\sigma_{xy}^{\pm}(x) &= \mp \frac{1}{2} f_1^*(x) + \frac{i(1-\kappa)}{2(1+\kappa)} t_1^*(x) + \frac{2Gi}{1+\kappa} t_4^*(x), \\
\sigma_{xx}^{\pm}(x) &= \mp \frac{3-\kappa}{2(1+\kappa)} f_1(x) + \frac{3+\kappa}{2(1+\kappa)} t_2(x) \mp \frac{4}{1+\kappa} f_4(x) - \frac{2}{1+\kappa} t_5(x), \\
u_x^{\pm}(x) + iu_y^{\pm}(x) &= \mp \frac{1}{2} f_4^*(x) + \frac{i\kappa}{2G(1+\kappa)} t_1^*(x) - \frac{i(1-\kappa)}{2(1+\kappa)} t_4^*(x), \\
\{t_r(x), t_r^*(x)\} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\{f_r(t), f_r^*(t)\}}{t-x} dt.
\end{aligned} \quad (34.16)$$

### 34.3. Стрибок напружень і переміщень на прямій лінії поділу двох матеріалів

Нехай півплощині  $S_0$  ( $y > 0$ ) відповідає пружне середовище зі сталими  $E_0, \nu_0$ , а півплощині  $S_{-1}$  ( $y < 0$ ) – середовище зі сталими  $E_{-1}, \nu_{-1}$ . Уздовж відрізка  $L'$  осі  $x$  (рис. 34.2) задані функції стрибка  $f_1^*(t)$ ,  $f_4^*(t)$  (34.5), які, якщо  $x \notin L'$ , дорівнюють нулю.

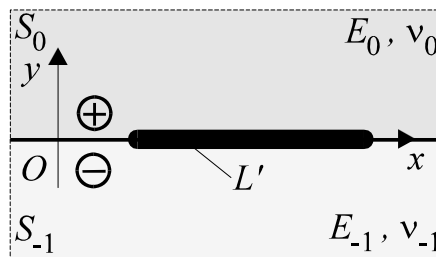


Рис. 34.2. Включення на межі поділу середовищ

Подібно до того, як це зроблено у п. 34.2, з урахуванням того, що півплощини (півпростори) мають різні пружні сталі, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення функцій  $A_i(\xi)$

$$\begin{aligned}
A_1(\xi) - A_2(\xi) &= f_1^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_1(\xi), \\
[A_1(\xi) + A_2(\xi)] - [A_3(\xi) - A_4(\xi)] \operatorname{sign}(\xi) &= -i \operatorname{sign}(\xi) f_2^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_2(\xi), \\
-k_4^0 A_1(\xi) + k_4^{-1} A_2(\xi) + 2 \operatorname{sign}(\xi) [k_1^0 A_3(\xi) + k_1^{-1} A_4(\xi)] &= f_4^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_4(\xi), \\
k_4^0 A_1(\xi) + k_4^{-1} A_2(\xi) + \operatorname{sign}(\xi) [k_5^0 A_3(\xi) - k_5^{-1} A_4(\xi)] &= -i \operatorname{sign}(\xi) f_5^F(\xi)/\xi^2 \equiv \varphi_5(\xi),
\end{aligned} \tag{34.17}$$

або

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^4 c_{kr}(\xi) A_k(\xi) &= \varphi_r(\xi) \equiv \int_{L'} F_{kr}(\xi, t) f_r(t) dt = 0 \quad (r=1, 2, 4, 5), \\
c_{11}(\xi) &= -c_{21}(\xi) = c_{12}(\xi) = c_{22}(\xi) = 1, \quad c_{42}(\xi) = -c_{32}(\xi) = \operatorname{sign}(\xi), \\
c_{31} &= c_{41} = 0, \quad c_{14}(\xi) = -c_{15}(\xi) = -k_4^0, \quad c_{24}(\xi) = c_{25}(\xi) = k_4^{-1}, \quad c_{34}(\xi) = 2 \operatorname{sign}(\xi) k_1^0, \\
c_{44}(\xi) &= 2 \operatorname{sign}(\xi) k_1^{-1}, \quad c_{35}(\xi) = \operatorname{sign}(\xi) k_5^0, \quad c_{45}(\xi) = \operatorname{sign}(\xi) k_5^{-1},
\end{aligned} \tag{34.18}$$

де верхні індекси у коефіцієнтів  $k_4, k_5$  стосуються матеріалу відповідної півплощини. Розв'язок системи (34.17) має вигляд (34.12), де

$$\begin{aligned}
\|a_{qr}\| &= \frac{1}{\xi^2} \begin{vmatrix} m_{0,-1}^+ & -i \operatorname{sign}(\xi) m_{0,-1}^- & l_{0,-1}^- & -i \operatorname{sign}(\xi) l_{0,-1}^+ \\ -m_{-1,0}^+ & -i \operatorname{sign}(\xi) m_{-1,0}^- & -l_{-1,0}^- & -i \operatorname{sign}(\xi) l_{-1,0}^+ \\ \operatorname{sign}(\xi) G_0/c_{0,-1} & i G_0/c_{0,-1} & 2 G_0 G_{-1} \operatorname{sign}(\xi)/c_{0,-1} & -i G_0/c_{0,-1} \\ \operatorname{sign}(\xi) G_{-1}/c_{-1,0} & -i G_{-1}/c_{-1,0} & 2 G_0 G_{-1} \operatorname{sign}(\xi)/c_{-1,0} & i G_{-1}/c_{-1,0} \end{vmatrix}, \\
l_{kl}^\pm &= G_k G_l \left( \frac{1}{c_{kl}} \pm \frac{1}{c_{lk}} \right), \quad m_{kl}^\pm = G_k \frac{c_{lk} \pm c_{kl} \kappa_l}{2 c_{kl} c_{lk}}, \quad c_{kl} = G_k + \kappa_k G_l, \\
l_{kl}^+ &= l_{lk}^+ = l_1^+, \quad l_{kl}^- = -l_{lk}^-, \quad m_{kl}^+ + m_{lk}^+ = 1, \quad m_{kl}^- = m_{lk}^-.
\end{aligned} \tag{34.19}$$

Підставляючи функції  $A_k(\xi)$  у формули (34.7), (34.2) та здійснюючи обернене перетворення Фур'є з урахуванням залежностей (13.90), (13.94), отримаємо вирази для компонент тензора напружень і похідних переміщень у довільній точці півплощини ( $z \in S_k$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ -m_{kl}^+ r_2(t-z) + \frac{G_k}{2 c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ m_{kl}^- r_1(t-z) + \frac{G_k}{2 c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_2(t) + \\
&\quad + \left[ -l_{kl}^- r_2(t-z) + \frac{G_k G_l}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ -l_{kl}^+ r_1(t-z) - \frac{G_k G_l}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ -m_{kl}^- r_1(t-z) + \frac{G_k}{2c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ -m_{kl}^+ r_2(t-z) - \frac{G_k}{2c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_2(t) + \\
&\quad + \left[ -l_{kl}^+ r_1(t-z) + \frac{G_k G_l}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ l_{kl}^- r_2(t-z) + \frac{G_k G_l}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ n_{kl}^- r_2(t-z) - \frac{G_k}{2c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ n_{kl}^+ r_1(t-z) - \frac{G_k}{2c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_2(t) + \\
&\quad + \left[ -r_{kl}^+ r_2(t-z) - \frac{G_k G_l}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ -r_{kl}^- r_1(t-z) + \frac{G_k G_l}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} &= \int_{L'} \left\{ \left[ -4L_{kl}^- r_2(t-z) - \frac{1}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ 4L_{kl}^+ r_1(t-z) - \frac{1}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_2(t) + \\
&\quad + \left[ -4m_{lk}^+ r_2(t-z) - \frac{2G_l}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ 4m_{lk}^- r_1(t-z) + \frac{2G_l}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt, \\
\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'} \left\{ \left[ 4L_{kl}^+ r_1(t-z) + \frac{1}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_1(t) + \right. \\
&\quad + \left[ 4L_{kl}^- r_2(t-z) - \frac{1}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_2(t) + \\
&\quad + \left[ -4m_{lk}^- r_1(t-z) + \frac{2G_l}{c_{kl}} r_3(t-z) \right] f_4(t) + \\
&\quad \left. + \left[ -4m_{lk}^+ r_2(t-z) + \frac{2G_l}{c_{kl}} r_4(t-z) \right] f_5(t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

$$L_{kl}^{\pm} = \frac{\kappa_k c_{lk} \pm \kappa_l c_{kl}}{4c_{kl}c_{lk}}, \quad n_{kl}^{\pm} = G_k \frac{3c_{lk} \pm c_{kl}\kappa_l}{2c_{kl}c_{lk}}, \quad r_{kl}^{\pm} = G_k G_l \frac{3c_{lk} \pm c_{kl}}{c_{kl}c_{lk}},$$

$$\left( L_{kl}^{\pm} = L_{lk}^{\pm} = l_2^{\pm}, \quad L_{kl}^{-} = -L_{lk}^{-} \right).$$
(34.20)

Тобто, структура формул (34.15) зберігається, змінюється лише вираз коефіцієнтів: замість  $a_{pqmr}$ ,  $a_{qmr}$  слід взяти  $a_{pqmr}^{kl}$ ,  $a_{qmr}^{kl}$  відповідно:

$$a_{yy12}^{kl} = a_{xy22}^{kl} = -m_{kl}^{+}, \quad a_{yy21}^{kl} = -a_{xy11}^{kl} = m_{kl}^{-}, \quad a_{yy32}^{kl} = -a_{xy42}^{kl} = -l_{kl}^{-},$$

$$a_{yy15}^{kl} = a_{yy24}^{kl} = a_{xy14}^{kl} = -a_{xy25}^{kl} = -a_{xx15}^{kl} = -a_{xx24}^{kl} = G_k / (2c_{kl}), \quad a_{yy41}^{kl} = a_{xy31}^{kl} = -l_{kl}^{+},$$

$$a_{xx41}^{kl} = -r_{kl}^{-}, \quad a_{xx12}^{kl} = -n_{kl}^{-}, \quad a_{xx21}^{kl} = n_{kl}^{+}, \quad a_{xx32}^{kl} = -r_{kl}^{+},$$

$$a_{yy35}^{kl} = -a_{yy44}^{kl} = a_{xy34}^{kl} = a_{xy45}^{kl} = -a_{xx35}^{kl} = a_{xx44}^{kl} = G_k G_l / c_{kl};$$

$$a_{x12}^{kl} = -a_{y22}^{kl} = -L_{kl}^{-}, \quad a_{x21}^{kl} = a_{y11}^{kl} = L_{kl}^{+}, \quad a_{x32}^{kl} = a_{y42}^{kl} = -m_{kl}^{+},$$

$$a_{x41}^{kl} = -a_{y31}^{kl} = m_{kl}^{-}, \quad a_{x15}^{kl} = a_{x24}^{kl} = -a_{y14}^{kl} = a_{y25}^{kl} = -1 / (4c_{kl}),$$

$$a_{x35}^{kl} = -a_{x44}^{kl} = -a_{y34}^{kl} = -a_{y45}^{kl} = -G_l / (2c_{kl}).$$
(34.21)

Інші коефіцієнти  $a_{pqmr}^{kl}$ ,  $a_{qmr}^{kl}$  дорівнюють нулю. У випадку однорідної пластини нульовими виявляються теж  $a_{yy32}^{kl}$ ,  $a_{xy42}^{kl}$ ,  $a_{x12}^{kl}$ ,  $a_{y22}^{kl}$ .

Оскільки

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \{r_1(t-z), r_2(t-z), r_3(t-z), r_4(t-z)\} dx =$$

$$= \{-r_2(t-z), r_1(t-z), 2r_2(t-z) + r_4(t-z), 2r_1(t-z) - r_3(t-z)\},$$
(34.22)

з урахуванням формул (13.79) отримаємо

$$a_{xmr}^{kl} = k_1^k a_{xxmr}^{kl} - k_2^k a_{yyymr}^{kl},$$

$$a_{ymr}^{kl} = k_3^k a_{xyymr}^{kl} - k_1^k \times \begin{cases} \left[ (-1)^s a_{xxms}^{kl} + 2a_{xxms+3}^{kl} \right] & (r, s = 1, 2; s \neq r), \\ (-1)^s a_{xxms}^{kl} & (r, s = 4, 5; s \neq r). \end{cases}$$
(34.23)

Використання (34.23) та (34.15), (34.21) теж дає можливість отримати (34.21).

Використання формули Сохоцького – Племеля [635, 112] дає змогу одержати граничні значення компонент вектора напружень і похідних вектора переміщень на лінії  $y = 0$ :

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) - i\sigma_{xy}^{\pm}(x) = \mp m_{kl}^{+} f_1^*(t) + im_{kl}^{-} t_1^*(t) \pm l_{kl}^{-} f_4^*(x) + il_{kl}^{+} t_3^*(t),$$

$$\sigma_{xx}^{\pm}(x) = \mp n_{kl}^{-} f_1(x) + n_{kl}^{+} t_2(x) \mp r_{kl}^{+} f_4(x) - r_{kl}^{-} t_5(x), \quad k = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad l = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$u_x^{\pm}(x) + iu_y^{\pm}(x) = \mp m_{lk}^{+} f_4^*(x) - im_{lk}^{-} t_4^*(x) \pm L_{kl}^{-} f_1^*(x) + iL_{lk}^{+} t_1^*(x).$$
(34.24)

У частковому випадку, коли матеріали півплощин (півпросторів) однакові ( $E_0 = E_{-1} = E$ ,  $\nu_0 = \nu_{-1} = \nu$ ), формули (34.20), (34.24) зводяться до виразів (34.14) та (34.16) відповідно.

### 34.4. Пакет шарів з внутрішніми тонкими включеннями

#### Загальні засади

Розглянемо пакет з  $L+M+1$  смуг  $S_j$  ( $j = \overline{-M, L}$ ) заввишки  $H_j$  та з пружними сталими  $E_j, \nu_j$  відповідно (рис. 34.3). Всередині смуг  $S_j$  вздовж відрізків  $L'_j$  осей  $s_j \sim L_j$  розташовані тонкі включення. У смугах можуть бути також інші включення або може їх не бути зовсім.

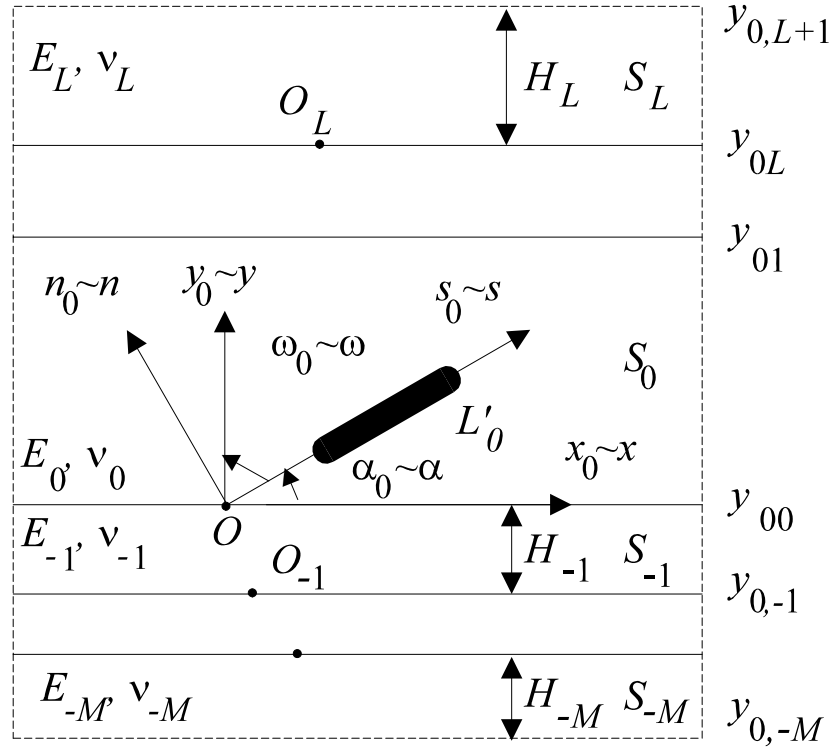


Рис. 34.3. Схема багат шарового середовища з тонкими включеннями

У точці  $O_j$  перетину осі  $s_j \sim L_j$  з межею смуги помістимо початок двох локальних декартових систем координат  $x_j O_j y_j$  та  $s_j O_j n_j$ , зв'язаних між собою залежністю

$$s_j + in_j = -z_j e^{i\omega_j} = z_j e^{-i\alpha_j}, \quad z_j \equiv x_j + iy_j, \quad \alpha_j + \omega_j = \frac{\pi}{2}. \quad (34.25)$$

Для спрощення запису вважатимемо

$$x_0 \sim x, \quad y_0 \sim y, \quad s_0 \sim s, \quad n_0 \sim n, \quad \alpha_0 \sim \alpha, \quad \omega_0 \sim \omega, \quad O_0 \sim O.$$

Координати точок  $O_j$  в системі  $xOy$  позначимо  $z_{0j}$ , внаслідок чого  $z \sim z_0 = z_j + z_{0j}$ .

Крайні смуги  $S_l$  та  $S_{-M}$  можуть мати скінчену або безмежно велику висоту, тобто, бути кожна зокрема або й обидві одночасно півплощинами.

На лініях  $y = y_{0j}$  розмежування матеріалів смуг  $S_j$  та  $S_{j-1}$  виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yq}^j = \sigma_{yq}^{j-1}, \quad u_q^j = u_q^{j-1} \quad (y = y_{0j}, \quad -\infty < x < \infty; \quad q \sim x, y; \quad j = \overline{-M+1, L}). \quad (34.26)$$

Верхній індекс відзначає номер смуги, де визначена відповідна компонента вектора напруження чи переміщення.

На межах пакету  $y = y_{0, L+1}$ ,  $-\infty < x < \infty$  та  $y = y_{0, -M}$ ,  $-\infty < x < \infty$  задається одна з чотирьох груп класичних крайових умов:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sigma_{yy} = f_y^{0\pm}(x), \quad \sigma_{xy} = f_x^{0\pm}(x); \quad 2. \quad u'_x = g_x^{0\pm}(x), \quad u'_y = g_y^{0\pm}(x); \\ 3. \quad & \sigma_{yy} = f_y^{0\pm}(x), \quad u'_x = g_x^{0\pm}(x); \quad 4. \quad \sigma_{xy} = f_x^{0\pm}(x), \quad u'_y = g_y^{0\pm}(x). \end{aligned} \quad (34.27)$$

Індекс “+” стосується верхньої, індекс “-” – нижньої меж. Можна задати теж силові чи дислокаційні навантаження довільного типу всередині кожної зі смуг.

Вважаємо, що товщина стрічкового включення настільки мала, що його можна вилучити з розгляду, замінивши вплив на тіло певними стрибками на  $L'_j$  вектора напружень та похідної вектора переміщення:

$$\begin{aligned} \left[ \sigma_{n_j n_j}^j - i \sigma_{n_j s_j}^j \right]^- - \left[ \sigma_{n_j n_j}^j - i \sigma_{n_j s_j}^j \right]^+ &= f_1^{*j}(s_j) \equiv f_1^j(s_j) - i f_2^j(s_j), \\ \frac{\partial}{\partial s_j} \left[ u_{s_j}^j + i u_{n_j}^j \right]^- - \frac{\partial}{\partial s_j} \left[ u_{s_j}^j + i u_{n_j}^j \right]^+ &= f_4^{*j}(s_j) \equiv f_4^j(s_j) + i f_5^j(s_j) \quad (s_j \in L_j), \end{aligned} \quad (34.28)$$

причому  $f_r^j(s_j) = 0$ , якщо  $s_j \notin L'_j$ . Вважається також, що відповідно до методу функцій стрибка відомі чотири функції  $\psi_k^j$  ( $k = \overline{1, 4}$ ), які зв'язують між собою напруження та переміщення у протилежних точках матриці, які прилягають до берегів прошарку:

$$\psi_r^j \left( \sigma_{q_j n_j}^{j\pm}, \quad \partial u_{q_j}^{j\pm} / \partial s_j \right) = 0 \quad (s_j \in L'_j; \quad q_j \sim s_j, n_j). \quad (34.29)$$

Функцію напружень  $\Phi^j$  всередині  $j$ -смуги подамо у вигляді суперпозиції однорідного  $\Phi^{0j}$  (породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень) та збуреного  $\hat{\Phi}^j$  розв'язків:

$$\Phi^j(z) = \Phi^{0j}(z) + \hat{\Phi}^j(z) \quad (z \in S_j). \quad (34.30)$$

У свою чергу, збурений розв'язок  $\hat{\Phi}^j$  вважатимемо сумою повного розв'язку  $\hat{\Phi}^{0j}$  для безмежної площини з такими ж механічними властивостями і тими ж включеннями, які належать  $S_j$  (якщо у  $S_j$  включення немає, то  $\hat{\Phi}^{0j} = 0$ ), й збуреного коригувального  $\hat{\Phi}^{1j}$ , який повинен враховувати скінченність висоти  $H_j$  розглядуваної смуги та вплив сусідніх смуг і не породжувати стрибків напружень і переміщень

$$\hat{\Phi}^j(z) = \hat{\Phi}^{0j}(z) + \hat{\Phi}^{1j}(z) \quad (z \in S_j). \quad (34.31)$$

Отже, остаточно структура розв'язку має вигляд

$$\Phi^j(z) = \Phi^{0j}(z) + \hat{\Phi}^{0j}(z) + \hat{\Phi}^{1j}(z) \quad (z \in S_j). \quad (34.32)$$

Такими ж індексами відзначатимемо відповідні компоненти тензорів напружень та похідні переміщень.

Побудова однорідного розв'язку  $\Phi^{0j}$ , який за потреби теж можна розглядати як суму основного однорідного  $\Phi^{00j}$  та однорідного коригувального  $\Phi^{01j}$ , відносно проста і на цьому зараз зупинятися не будемо. Значимо, що він задовольняє крайові умови (34.27) на межі пакету, умови ідеального механічного контакту (34.26) на лініях поділу матеріалів, а за переходу через вісь включень спричиняє стрибка напружень чи переміщень.

Тому збурений розв'язок відповідно до (34.26) – (34.28) повинен задовольняти нульові крайові умови на межі пакету (одну з чотирьох на кожній межі)

$$\begin{aligned}
1. \hat{\sigma}_{yy}^L &\equiv \hat{\sigma}_{yy}^{0L} + \hat{\sigma}_{yy}^{1L} = 0, & \hat{\sigma}_{xy}^L &\equiv \hat{\sigma}_{xy}^{0L} + \hat{\sigma}_{xy}^{1L} = 0; \\
2. \hat{u}_x^{\prime L} &\equiv \hat{u}_x^{\prime 0L} + \hat{u}_x^{\prime 1L} = 0, & \hat{u}_y^{\prime L} &\equiv \hat{u}_y^{\prime 0L} + \hat{u}_y^{\prime 1L} = 0; \\
3. \hat{\sigma}_{yy}^L &\equiv \hat{\sigma}_{yy}^{0L} + \hat{\sigma}_{yy}^{1L} = 0, & \hat{u}_x^{\prime L} &\equiv \hat{u}_x^{\prime 0L} + \hat{u}_x^{\prime 1L} = 0; \\
4. \hat{\sigma}_{xy}^L &\equiv \hat{\sigma}_{xy}^{0L} + \hat{\sigma}_{xy}^{1L} = 0, & \hat{u}_y^{\prime L} &\equiv \hat{u}_y^{\prime 0L} + \hat{u}_y^{\prime 1L} = 0 \quad \left(-\infty < x < \infty; y = y_{0,L+1}\right);
\end{aligned} \tag{34.33}$$

$$\begin{aligned}
1. \hat{\sigma}_{yy}^{-M} &\equiv \hat{\sigma}_{yy}^{0,-M} + \hat{\sigma}_{yy}^{1,-M} = 0, & \hat{\sigma}_{xy}^{-M} &\equiv \hat{\sigma}_{xy}^{0,-M} + \hat{\sigma}_{xy}^{1,-M} = 0; \\
2. \hat{u}_x^{\prime -M} &\equiv \hat{u}_x^{\prime 0,-M} + \hat{u}_x^{\prime 1,-M} = 0, & \hat{u}_y^{\prime -M} &\equiv \hat{u}_y^{\prime 0,-M} + \hat{u}_y^{\prime 1,-M} = 0; \\
3. \hat{\sigma}_{yy}^{-M} &\equiv \hat{\sigma}_{yy}^{0,-M} + \hat{\sigma}_{yy}^{1,-M} = 0, & \hat{u}_x^{\prime -M} &\equiv \hat{u}_x^{\prime 0,-M} + \hat{u}_x^{\prime 1,-M} = 0; \\
4. \hat{\sigma}_{xy}^{-M} &\equiv \hat{\sigma}_{xy}^{0,-M} + \hat{\sigma}_{xy}^{1,-M} = 0, & \hat{u}_y^{\prime -M} &\equiv \hat{u}_y^{\prime 0,-M} + \hat{u}_y^{\prime 1,-M} = 0 \\
&&& \left(-\infty < x < \infty; y = y_{0,-M}\right);
\end{aligned} \tag{34.34}$$

умови ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{qy}^j &\equiv \hat{\sigma}_{qy}^{0j} + \hat{\sigma}_{qy}^{1j} = \hat{\sigma}_{qy}^{j-1} \equiv \hat{\sigma}_{qy}^{0,j-1} + \hat{\sigma}_{qy}^{1,j-1}, \\
\hat{u}_q^{\prime j} &\equiv \hat{u}_q^{\prime 0j} + \hat{u}_q^{\prime 1j} = \hat{u}_q^{\prime j-1} \equiv \hat{u}_q^{\prime 0,j-1} + \hat{u}_q^{\prime 1,j-1} \\
&\left(q \sim x, y; y = y_{0j}, -\infty < x < \infty; j = -M+1 \dots L\right)
\end{aligned} \tag{34.35}$$

та породжувати на  $L'_j$  стрибки напружень і похідних переміщень

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\sigma}_{n_j n_j}^j - i\hat{\sigma}_{n_j s_j}^j\right]^- - \left[\hat{\sigma}_{n_j n_j}^j - i\hat{\sigma}_{n_j s_j}^j\right]^+ &= f_1^{*j}(s_j), \\
\frac{\partial}{\partial s_j} \left[\hat{u}_{s_j}^j + i\hat{u}_{n_j}^j\right]^- - \frac{\partial}{\partial s_j} \left[\hat{u}_{s_j}^j + i\hat{u}_{n_j}^j\right]^+ &= f_4^{*j}(s_j),
\end{aligned} \tag{34.36}$$

причому  $f_r^j(s_j) = 0$ , якщо  $s_j \notin L'_j$ .

На основі результатів п. 34.2 розв'язок для безмежної площини, якщо всередині площини уздовж відрізка  $L'_j$  заданий стрибок напружень і похідної переміщень (див. (34.14))

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{n_j n_j}^{0j}(s_j, n_j) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \left\{ \left[ -\frac{1}{2} r_2(t - \zeta_j) + \frac{1}{2(1 + \kappa_j)} r_4(t - \zeta_j) \right] f_1^j(t) + \right. \\
&+ \left[ -\frac{\kappa_j - 1}{2(\kappa_j + 1)} r_1(t - \zeta_j) + \frac{1}{2(1 + \kappa_j)} r_3(t - \zeta_j) \right] f_2^j(t) + \\
&+ \left[ \frac{G_j}{1 + \kappa_j} r_4(t - \zeta_j) \right] f_4^j(t) + \\
&\left. + \left[ -\frac{2G_j}{1 + \kappa_j} r_1(t - \zeta_j) - \frac{G_j}{1 + \kappa_j} r_3(t - \zeta_j) \right] f_5^j(t) \right\} dt,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{s_j, n_j}^{0j}(s_j, n_j) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \left\{ \left[ \frac{\kappa_j - 1}{2(\kappa_j + 1)} r_1(t - \zeta_j) + \frac{1}{2(1 + \kappa_j)} r_3(t - \zeta_j) \right] f_1^j(t) + \right. \\ &+ \left[ -\frac{1}{2} r_2(t - \zeta_j) - \frac{1}{2(1 + \kappa_j)} r_4(t - \zeta_j) \right] f_2^j(t) + \\ &+ \left[ -\frac{2G_j}{1 + \kappa_j} r_1(t - \zeta_j) + \frac{G_j}{1 + \kappa_j} r_3(t - \zeta_j) \right] f_4^j(t) + \\ &+ \left[ \frac{G_j}{1 + \kappa_j} r_4(t - \zeta_j) \right] f_5^j(t) \left. \right\} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{s_j s_j}^{0j}(s_j, n_j) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \left\{ \left[ \frac{\kappa_j - 3}{2(\kappa_j + 1)} r_2(t - \zeta_j) - \frac{1}{2(1 + \kappa_j)} r_4(t - \zeta_j) \right] f_1^j(t) + \right. \\ &+ \left[ \frac{\kappa_j + 3}{2(\kappa_j + 1)} r_1(t - \zeta_j) - \frac{1}{2(1 + \kappa_j)} r_3(t - \zeta_j) \right] f_2^j(t) + \\ &+ \left[ -\frac{4G_j}{1 + \kappa_j} r_2(t - \zeta_j) - \frac{G_j}{1 + \kappa_j} r_4(t - \zeta_j) \right] f_4^j(t) + \\ &+ \left[ -\frac{2G_j}{1 + \kappa_j} r_1(t - \zeta_j) + \frac{G_j}{1 + \kappa_j} r_3(t - \zeta_j) \right] f_5^j(t) \left. \right\} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_{s_j}^{0j}(s_j, n_j)}{\partial s_j} &= \frac{1}{4\pi} \int_{L'_j} \left\{ \left[ -\frac{1}{G_j(1 + \kappa_j)} r_4(t - \zeta_j) \right] f_1^j(t) + \right. \\ &+ \left[ \frac{2\kappa_j}{G_j(\kappa_j + 1)} r_1(t - \zeta_j) - \frac{1}{G(1 + \kappa_j)} r_3(t - \zeta_j) \right] f_2^j(t) + \\ &+ \left[ -2r_2(t - \zeta_j) - \frac{2}{1 + \kappa_j} r_4(t - \zeta_j) \right] f_4^j(t) + \\ &+ \left[ \frac{2(\kappa_j - 1)}{\kappa_j + 1} r_1(t - \zeta_j) + \frac{2}{1 + \kappa_j} r_3(t - \zeta_j) \right] f_5^j(t) \left. \right\} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}_{n_j}^{0j}(s_j, n_j)}{\partial s_j} = & \frac{1}{4\pi} \int_{L'_j} \left\{ \left[ \frac{2\kappa_j}{G_j(\kappa_j+1)} r_1(t-\zeta_j) + \frac{1}{G_j(1+\kappa_j)} r_3(t-\zeta_j) \right] f_1^j(t) + \right. \\
& + \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{G_j(1+\kappa_j)} r_4(t-\zeta_j) \end{array} \right] f_2^j(t) + \\
& + \left[ \frac{2(\kappa_j-1)}{\kappa_j+1} r_1(t-\zeta_j) + \frac{2}{1+\kappa_j} r_3(t-\zeta_j) \right] f_4^j(t) + \\
& \left. + \left[ -2r_2(t-\zeta_j) + \frac{2}{1+\kappa_j} r_4(t-\zeta_j) \right] f_5^j(t) \right\} dt, \quad \zeta_j = s_j + in_j.
\end{aligned} \tag{34.37}$$

Коротше ці залежності можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{p_j q_j}^{0j}(s_j, n_j) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{p_j q_j m r} r_m(t-\zeta_j) f_r^j(t) dt, \\
\frac{\partial \hat{u}_{q_j j}^{0j}(s_j, n_j)}{\partial s_j} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{q_j m r} r_m(t-\zeta_j) f_r^j(t) dt \quad (p_j, q_j \sim s_j, n_j; \zeta_j = s_j + in_j)
\end{aligned} \tag{34.38}$$

Оскільки виконується така залежність між компонентами тензорів напружень у повернутих локальних системах координат:

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_j y_j} &= \sigma_{s_j s_j} \sin^2 \alpha_j + \sigma_{n_j n_j} \cos^2 \alpha_j + \sigma_{s_j n_j} \sin 2\alpha_j, \\
\sigma_{x_j x_j} &= \sigma_{s_j s_j} \cos^2 \alpha_j + \sigma_{n_j n_j} \sin^2 \alpha_j - \sigma_{s_j n_j} \sin 2\alpha_j, \\
\sigma_{x_j y_j} &= \frac{1}{2} (\sigma_{s_j s_j} - \sigma_{n_j n_j}) \sin 2\alpha_j + \sigma_{s_j n_j} \cos 2\alpha_j,
\end{aligned} \tag{34.39}$$

то з урахуванням (34.37) та заміни (34.25) матимемо

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{p_j q_j}^{0j}(x_j, y_j) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{p_j q_j m r}^* r_m(t - z_j e^{-i\alpha_j}) f_r^j(t) dt, \\
\frac{\partial \hat{u}_{q_j j}^{0j}(x_j, y_j)}{\partial x_j} &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_j} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{q_j m r}^* r_m(t - z_j e^{-i\alpha_j}) f_r^j(t) dt \quad (p, q \sim x, y),
\end{aligned} \tag{34.40}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{x_j x_j m r}^* &= a_{x_j x_j m r} \cos^2 \alpha_j + a_{y_j y_j m r} \sin^2 \alpha_j - a_{x_j y_j m r} \sin 2\alpha_j, \\
a_{y_j y_j m r}^* &= a_{x_j x_j m r} \sin^2 \alpha_j + a_{y_j y_j m r} \cos^2 \alpha_j + a_{x_j y_j m r} \sin 2\alpha_j, \\
a_{x_j y_j m r}^* &= \frac{1}{2} (a_{x_j x_j m r} - a_{y_j y_j m r}) \sin 2\alpha_j + a_{x_j y_j m r} \cos 2\alpha_j.
\end{aligned} \tag{34.41}$$

Зокрема,

$$\begin{aligned}
a_{y_j y_j 11}^* &= a_{x_j y_j 21}^* = \frac{\kappa_j - 1}{2(\kappa_j + 1)} \sin 2\alpha_j, & a_{y_j y_j 21}^* &= -\frac{(\kappa_j + 1) \cos 2\alpha_j + 4 \sin^2 \alpha_j}{2(\kappa_j + 1)}, \\
a_{y_j y_j 31}^* &= -a_{y_j y_j 42}^* = -a_{x_j y_j 41}^* = -a_{x_j y_j 32}^* = \frac{\sin 2\alpha_j}{2(\kappa_j + 1)}, \\
a_{y_j y_j 41}^* &= a_{y_j y_j 32}^* = a_{x_j y_j 31}^* = -a_{x_j y_j 42}^* = \frac{\cos 2\alpha_j}{2(\kappa_j + 1)}, \\
a_{y_j y_j 12}^* &= \frac{(1 - \kappa_j) \cos 2\alpha_j + 4 \sin^2 \alpha_j}{2(\kappa_j + 1)}, & a_{y_j y_j 24}^* &= -a_{x_j y_j 12}^* = -\frac{(\kappa_j + 1) \sin 2\alpha_j}{2(\kappa_j + 1)}, \\
a_{y_j y_j 14}^* &= a_{x_j y_j 24}^* = -\frac{2G_j \sin 2\alpha_j}{\kappa_j + 1}, & a_{y_j y_j 24}^* &= -\frac{4G_j \sin^2 \alpha_j}{\kappa_j + 1}, & a_{y_j y_j 25}^* &= a_{x_j y_j 15}^* \\
&= a_{x_j y_j 25}^* = 0, & a_{y_j y_j 34}^* &= a_{y_j y_j 45}^* = -a_{x_j y_j 44}^* = a_{x_j y_j 35}^* = \frac{G_j \sin 2\alpha_j}{\kappa_j + 1}, & & (34.42) \\
a_{y_j y_j 44}^* &= -a_{y_j y_j 35}^* = a_{x_j y_j 34}^* = a_{x_j y_j 45}^* = \frac{G_j \cos 2\alpha_j}{\kappa_j + 1}, & a_{y_j y_j 15}^* &= -\frac{2G_j}{\kappa_j + 1}, \\
a_{x_j y_j 11}^* &= \frac{(\kappa_j - 1) \cos 2\alpha_j}{2(\kappa_j + 1)}, & a_{x_j y_j 11}^* &= -\frac{\cos 2\alpha_j}{2}, & a_{x_j y_j 14}^* &= -\frac{2G_j \cos 2\alpha_j}{\kappa_j + 1}.
\end{aligned}$$

Множники  $a_{qmr}^*$  у повернутій системі на основі виразу (34.23) обчислюють за коефіцієнтами  $a_{pqmr}^*$ :

$$\begin{aligned}
a_{x_j mr}^* &= k_1^j a_{x_j x_j mr}^* - k_2^j a_{y_j y_j mr}^*, \\
a_{y_j mr}^* &= k_3^j a_{x_j y_j mr}^* - k_1^j \times \begin{cases} \left[ (-1)^s a_{x_j x_j ms}^* + 2a_{x_j x_j ms+3}^* \right] & (r, s = 1, 2; s \neq r), \\ (-1)^s a_{x_j x_j ms}^* & (r, s = 4, 5; s \neq r). \end{cases} & (34.43)
\end{aligned}$$

Зводячи вирази (34.40) до основної системи координат  $xOy$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{pq}^{0j}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{p_j q_j mr}^* r_m \left[ t - (z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} \right] f_r^j(t) dt, \\
\frac{\partial \hat{u}_q^{0j}(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{q_j mr}^* r_m \left[ t - (z - z_{0j}) e^{-i\alpha_j} \right] f_r^j(t) dt \quad (p, q \sim x, y). & (34.44)
\end{aligned}$$

Для коригувальної функції  $\hat{\Phi}^{1j}$  згідно з (34.1) та (34.3)

$$\hat{\Phi}^{1j}(x_j, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}^{1jF}(\xi, y_j) e^{-i\xi x_j} d\xi, & (34.45)$$

де

$$\hat{\Phi}^{1jF}(\xi, y_j) = \left[ A_1^j(\xi) + \xi y A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi| y_j} + \left[ A_2^j(\xi) + \xi y A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi| y_j}. & (34.46)$$

Причому, якщо висота  $H_j$  якоїсь зі смуг безмежна, то дві з відповідних функцій  $A_i^j(\xi)$  нульові: для півплощини  $S_L$  маємо  $A_2^L(\xi) = A_4^L(\xi) = 0$ ; для півплощини  $S_{-M}$  виконується рівність  $A_1^{-M}(\xi) = A_3^{-M}(\xi) = 0$ .

На основі формул (34.45), (34.46), (2.2) та (13.79)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{yy}^{1jF}(\xi, y) &= -\xi^2 \left\{ \left[ A_1^j(\xi) + \xi y A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \left[ A_2^j(\xi) + \xi y A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{xy}^{1jF}(\xi, y) &= i\xi^2 \left\{ \left[ -\text{sign}(\xi) A_1^j(\xi) + (1 - |\xi|y) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \text{sign}(\xi) A_2^j(\xi) + (1 + |\xi|y) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{xx}^{1jF}(\xi, y) &= \xi^2 \left\{ \left[ A_1^j(\xi) + (\xi y - 2\text{sign}(\xi)) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ A_2^j(\xi) + (\xi y + 2\text{sign}(\xi)) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\}, \\ \hat{u}_x^{1jF}(\xi, y) &= \xi^2 \left\{ \left[ k_4^j A_1^j(\xi) + (k_4^j \xi y - 2\text{sign}(\xi)) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ k_4^j A_2^j(\xi) + (k_4^j \xi y + 2\text{sign}(\xi)) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\}, \\ \hat{u}_y^{1jF}(\xi, y) &= i\xi^2 \left\{ \left[ -k_4^j \text{sign}(\xi) A_1^j(\xi) - (k_5^j + k_4^j |\xi|y) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ k_4^j \text{sign}(\xi) A_2^j(\xi) + (-k_5^j + k_4^j |\xi|y) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\}.\end{aligned}\quad (34.47)$$

Після здійснення оберненого перетворення Фур'є маємо загальні вирази для збурених складових потенціалів, напружень і переміщень

$$\hat{\Phi}^{1j}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ A_1^j(\xi) + \xi y A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \left[ A_2^j(\xi) + \xi y A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi; \quad (34.48)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{yy}^{1j}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ A_1^j(\xi) + \xi y A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ A_2^j(\xi) + \xi y A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xy}^{1j}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi^2 \left\{ \left[ -\text{sign}(\xi) A_1^j(\xi) + (1 - |\xi|y) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \text{sign}(\xi) A_2^j(\xi) + (1 + |\xi|y) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi,\end{aligned}\quad (34.49)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xx}^{1j}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ A_1^j(\xi) + (\xi y - 2\text{sign}(\xi)) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ A_2^j(\xi) + (\xi y + 2\text{sign}(\xi)) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi;\end{aligned}$$

$$\hat{u}_x^{1j'}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ k_4^j A_1^j(\xi) + \left( k_4^j \xi y - 2\text{sign}(\xi) \right) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ \left. + \left[ k_4^j A_2^j(\xi) + \left( k_4^j \xi y + 2\text{sign}(\xi) \right) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi, \quad (34.50)$$

$$\hat{u}_y^{1j'}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi^2 \left\{ \left[ -k_4^j \text{sign}(\xi) A_1^j(\xi) - \left( k_5^j + k_4^j |\xi| y \right) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ \left. + \left[ k_4^j \text{sign}(\xi) A_2^j(\xi) + \left( -k_5^j + k_4^j |\xi| y \right) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi.$$

Використання формул (34.44), (34.48) – (34.50) у виразах (34.31) дає можливість внаслідок задоволення крайових умов (34.33), (34.34) і умов ідеального контакту (34.35) одержати систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_j \sum_r \left[ c_{kr}^j(\xi) A_r^j(\xi) - \int_{L_j'} F_{kr}^j(\xi, t) f_r^j(t) dt \right] = 0 \quad (j, k = \overline{-M, L}; r = 1, 2, 4, 5) \quad (34.51)$$

стосовно функцій  $A_1^j(\xi)$ ,  $A_2^j(\xi)$ .

Функції  $c_{kr}^j(\xi)$ ,  $F_{kr}^j(\xi, t)$  залежать від пружних сталих і геометрії пакету. Умова (34.36) задовольняється за рахунок складової  $\hat{\Phi}^{0j}$ . Якщо у суміжних смугах  $S_j$  та  $S_{j-1}$  немає включень, то основні збурені розв'язки у них дорівнюють нулю  $\hat{\Phi}^{0j} = \hat{\Phi}^{0, j-1} = 0$  і тоді умови ідеального механічного контакту (34.35) зводяться до умов

$$\hat{\sigma}_{qy}^{1j} = \hat{\sigma}_{qy}^{1, j-1}, \quad \hat{u}_q^{1j} = \hat{u}_q^{1, j-1} \quad (q \sim x, y; y = y_{0j}, -\infty < x < \infty). \quad (34.52)$$

З урахуванням виразів (34.49), (34.50) співвідношення (34.52) зведуться до

$$\left[ A_1^j(\xi) + \xi y_{0j} A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y_{0j}} + \left[ A_2^j(\xi) + \xi y_{0j} A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y_{0j}} = \\ = \left[ A_1^{j-1}(\xi) + \xi y_{0j} A_3^{j-1}(\xi) \right] e^{-|\xi|y_{0j}} + \left[ A_2^{j-1}(\xi) + \xi y_{0j} A_4^{j-1}(\xi) \right] e^{|\xi|y_{0j}}, \\ \left[ -\text{sign}(\xi) A_1^j(\xi) + (1 - |\xi| y_{0j}) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y_{0j}} + \left[ \text{sign}(\xi) A_2^j(\xi) + \right. \\ \left. + (1 + |\xi| y_{0j}) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y_{0j}} = \left[ -\text{sign}(\xi) A_1^{j-1}(\xi) + (1 - |\xi| y_{0j}) A_3^{j-1}(\xi) \right] e^{-|\xi|y_{0j}} + \\ + \left[ \text{sign}(\xi) A_2^{j-1}(\xi) + (1 + |\xi| y_{0j}) A_4^{j-1}(\xi) \right] e^{|\xi|y_{0j}}, \\ \left[ k_4^j A_1^j(\xi) + \left( k_4^j \xi y_{0j} - 2\text{sign}(\xi) \right) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi|y_{0j}} + \left[ k_4^j A_2^j(\xi) + \left( k_4^j \xi y_{0j} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\text{sign}(\xi) \right) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi|y_{0j}} = \left[ k_4^{j-1} A_1^{j-1}(\xi) + \left( k_4^{j-1} \xi y_{0j} - 2\text{sign}(\xi) \right) A_3^{j-1}(\xi) \right] \times \\ \times e^{-|\xi|y_{0j}} + \left[ k_4^{j-1} A_2^{j-1}(\xi) + \left( k_4^{j-1} \xi y_{0j} + 2\text{sign}(\xi) \right) A_4^{j-1}(\xi) \right] e^{|\xi|y_{0j}},$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -k_4^j \operatorname{sign}(\xi) A_1^j(\xi) - (k_5^j + k_4^j |\xi| y_{0j}) A_3^j(\xi) \right] e^{-|\xi| y_{0j}} + \\
& + \left[ k_4^j \operatorname{sign}(\xi) A_2^j(\xi) + (-k_5^j + k_4^j |\xi| y_{0j}) A_4^j(\xi) \right] e^{|\xi| y_{0j}} = \\
& = \left[ -k_4^{j-1} \operatorname{sign}(\xi) A_1^{j-1}(\xi) - (k_5^{j-1} + k_4^{j-1} |\xi| y_{0j}) A_3^{j-1}(\xi) \right] e^{-|\xi| y_{0j}} + \\
& + \left[ k_4^{j-1} \operatorname{sign}(\xi) A_2^{j-1}(\xi) + (-k_5^{j-1} + k_4^{j-1} |\xi| y_{0j}) A_4^{j-1}(\xi) \right] e^{|\xi| y_{0j}}.
\end{aligned} \tag{34.53}$$

Якщо матеріали суміжних смуг однакові ( $E_j = E_{j-1}$ ,  $\nu_j = \nu_{j-1}$ ), то система рівнянь (34.53) дає

$$A_r^{j-1}(\xi) = A_r^j(\xi). \tag{34.54}$$

Розв'язок системи (34.51) у загальному вигляді можна подати у формі

$$\begin{aligned}
A_k^j(\xi) &= \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} a_{kr}^{jl}(\xi, t) f_r^l(t) dt, \quad a_{kr}^{jl}(\xi, t) = \frac{\Delta_{kr}^{jl}(\xi, t)}{\Delta_1(\xi)} \\
& \quad (k = 1 \dots 4; \quad l, j = \overline{-M, L}; \quad r = 1, 2, 4, 5),
\end{aligned} \tag{34.55}$$

де  $\Delta_1(\xi)$  – визначник системи (34.51);  $\Delta_{kr}^{jl}(\xi, t)$  – відповідні алгебричні доповнення, що стосуються функцій стрибка  $f_r^j(t)$ ; функції  $a_{kr}^{jl}(\xi, t)$  так само як і  $c_{kr}^j(\xi)$ ,  $F_{kr}^j(\xi, t)$  залежать від пружних сталих та геометрії пакету.

Підставляючи отримані значення  $A_k^j(\xi)$  у вирази (34.49) та (34.50), обчислюємо коригувальні напруження та похідні переміщень

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{pq}^{1j}(x, y) &= \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} R_{pqr}^{jl}(z, t) f_r^l(t) dt, \\
\frac{\partial \hat{u}_q^{1j}(x, y)}{\partial x} &= \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} R_{qr}^{jl}(z, t) f_r^l(t) dt \quad (p, q = x, y; \quad l, j = \overline{-M, L}; \quad r = 1, 2, 4, 5),
\end{aligned} \tag{34.56}$$

де дійсні цілком регулярні всередині смуг  $S_j$  функції впливу визначаються виразами

$$\begin{aligned}
R_{yyr}^{jl}(z, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ a_{1r}^{jl}(\xi, t) + \xi y a_{3r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{-|\xi| y} + \right. \\
& \quad \left. + \left[ a_{2r}^{jl}(\xi, t) + \xi y a_{4r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{|\xi| y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi, \\
R_{xyr}^{jl}(z, t) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ -\operatorname{sign}(\xi) a_{1r}^{jl}(\xi, t) + (1 - |\xi| y) a_{3r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{-|\xi| y} + \right. \\
& \quad \left. + \left[ \operatorname{sign}(\xi) a_{2r}^{jl}(\xi, t) + (1 + |\xi| y) a_{4r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{|\xi| y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi, \\
R_{xxr}^{jl}(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ a_{1r}^{jl}(\xi, t) + (\xi y - 2\operatorname{sign}(\xi)) a_{3r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{-|\xi| y} + \right. \\
& \quad \left. + \left[ a_{2r}^{jl}(\xi, t) + (\xi y + 2\operatorname{sign}(\xi)) a_{4r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{|\xi| y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi,
\end{aligned}$$

$$R_{xr}^{jl}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ k_4^j a_{1r}^{jl}(\xi, t) + \left( k_4^j \xi y - 2 \operatorname{sign}(\xi) \right) a_{3r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ \left. + \left[ k_4^j a_{2r}^{jl}(\xi, t) + \left( k_4^j \xi y + 2 \operatorname{sign}(\xi) \right) a_{4r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi, \quad (34.57)$$

$$R_{yr}^{jl}(z, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ -k_4^j \operatorname{sign}(\xi) a_{1r}^{jl}(\xi, t) - \left( k_5^j + k_4^j |\xi| y \right) a_{3r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{-|\xi|y} + \right. \\ \left. + \left[ k_4^j \operatorname{sign}(\xi) a_{2r}^{jl}(\xi, t) + \left( -k_5^j + k_4^j |\xi| y \right) a_{4r}^{jl}(\xi, t) \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi.$$

Переходячи до системи координат  $x_j O_j y_j$  всередині смуги  $S_j$ , запишемо

$$\hat{\sigma}_{p_j q_j}^{1j}(x_j, y_j) = \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} R_{pqr}^{jl}(z_j + z_{0j}, t) f_r^l(t) dt, \\ \frac{\partial \hat{u}_{q_j}^{1j}(x_j, y_j)}{\partial x_j} = \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} R_{qr}^{jl}(z_j + z_{0j}, t) f_r^l(t) dt \quad (34.58) \\ (p, q \sim x, y; \quad l = -M \dots L; \quad r = 1, 2, 4, 5),$$

а у відповідній локальній повернутій системі  $s_j O_j n_j$  –

$$\hat{\sigma}_{p_j q_j}^{1j}(s_j, n_j) = \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} R_{p_j q_j r}^{jl*} \left[ (s_j + in_j) e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right] f_r^l(t) dt, \\ \frac{\partial \hat{u}_{q_j}^{1j}(s_j, n_j)}{\partial s_j} = \sum_l \sum_r \int_{L_l^j} R_{q_j r}^{jl*} \left[ (s_j + in_j) e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right] f_r^l(t) dt \quad (34.59) \\ (p, q \sim s, n; \quad l = -M \dots L; \quad r = 1, 2, 4, 5).$$

де, подібно до (34.39), з огляду на те, що

$$\sigma_{n_j n_j} = \sigma_{x_j x_j} \sin^2 \alpha_j + \sigma_{y_j y_j} \cos^2 \alpha_j - \sigma_{x_j y_j} \sin 2\alpha_j, \\ \sigma_{s_j s_j} = \sigma_{x_j x_j} \cos^2 \alpha_j + \sigma_{y_j y_j} \sin^2 \alpha_j + \sigma_{x_j y_j} \sin 2\alpha_j, \quad (34.60) \\ \sigma_{s_j n_j} = -\frac{1}{2} \left( \sigma_{x_j x_j} - \sigma_{y_j y_j} \right) \sin 2\alpha_j + \sigma_{x_j y_j} \cos 2\alpha_j,$$

отримуємо за аналогією до (34.41), (34.43) вирази для функцій

$$R_{x_j x_j r}^{jl*} = R_{x_j x_j r}^{jl} \cos^2 \alpha_j + R_{y_j y_j r}^{jl} \sin^2 \alpha_j + R_{x_j y_j r}^{jl} \sin 2\alpha_j, \\ R_{y_j y_j r}^{jl*} = R_{x_j x_j r}^{jl} \sin^2 \alpha_j + R_{y_j y_j r}^{jl} \cos^2 \alpha_j - R_{x_j y_j r}^{jl} \sin 2\alpha_j, \quad (34.61)$$

$$R_{x_j y_j r}^{jl*} = -\frac{1}{2} \left( R_{x_j x_j r}^{jl} - R_{y_j y_j r}^{jl} \right) \sin 2\alpha_j + R_{x_j y_j r}^{jl} \cos 2\alpha_j;$$

$$R_{x_j r}^{jl*} = k_1^j R_{x_j x_j r}^{jl*} - k_2^j R_{y_j y_j r}^{jl*},$$

$$R_{y_j r}^{jl*} = k_3^j R_{x_j y_j r}^{jl*} - k_1^j \times \begin{cases} \left[ (-1)^s R_{x_j x_j s}^{jl*} + 2R_{x_j x_j s+3}^{jl*} \right] & (r, s = 1, 2; \quad s \neq r), \\ (-1)^s R_{x_j x_j s}^{jl*} & (r, s = 4, 5; \quad s \neq r). \end{cases} \quad (34.62)$$

Тому на лінії включення ( $n_j = 0$ )

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{p_j q_j}^{1j}(s_j) &= \sum_l \sum_r R_{p_j q_j r}^{jl*} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^l(t) dt, \\ \frac{\partial \hat{u}_{q_j}^{1j}(s_j)}{\partial s_j} &= \sum_l \sum_r R_{q_j r}^{jl*} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^l(t) dt \quad (p_j, q_j \sim s_j, n_j).\end{aligned}\quad (34.63)$$

Вислідне поле напружень та похідних переміщень на лінії включення з урахуванням (34.16) та (34.63) таке:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{n_j n_j}^{1j\pm}(s_j) &= \mp \frac{1}{2} f_1^j(s_j) + \frac{1-\kappa_j}{2(1+\kappa_j)} t_2^j(x) - \frac{2G_j}{1+\kappa_j} t_5^j(x) + \\ &\quad + \sum_l \sum_r R_{n_j r}^{jl*} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^l(t) dt, \\ \hat{\sigma}_{s_j n_j}^{1j\pm}(s_j) &= \pm \frac{1}{2} f_2^j(s_j) + \frac{1-\kappa_j}{2(1+\kappa_j)} t_1^j(x) + \frac{2G_j}{1+\kappa_j} t_4^j(x) + \\ &\quad + \sum_l \sum_r R_{s_j r}^{jl*} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^l(t) dt, \\ \frac{\partial \hat{u}_{s_j}^{1j\pm}(s_j)}{\partial s_j} &= \mp \frac{1}{2} f_4^j(x) + \frac{\kappa_j}{2G_j(1+\kappa_j)} t_2^j(x) + \frac{1-\kappa_j}{2(1+\kappa_j)} t_5^j(x) + \\ &\quad + \sum_l \sum_r R_{s_j r}^{jl*} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^l(t) dt, \\ \frac{\partial \hat{u}_{n_j}^{1j\pm}(s_j)}{\partial s_j} &= \mp \frac{1}{2} f_5^j(x) + \frac{\kappa_j}{2G_j(1+\kappa_j)} t_1^j(x) - \frac{1-\kappa_j}{2(1+\kappa_j)} t_4^j(x) + \\ &\quad + \sum_l \sum_r R_{n_j r}^{jl*} \left( s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}, t \right) f_r^l(t) dt.\end{aligned}\quad (34.64)$$

Підставляючи вирази (34.64) в умови (34.29), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка  $f_r^j(t)$ . Розв'язавши її, можна вважати відомим поле напружень і переміщень у довільній точці композиту.

### Включення, паралельне до межі поділу матеріалів

Єдина незручність виразів (34.59), (34.64) полягає у тому, що їх не можна використовувати, якщо включення розміщене всередині смуги, але не нахилене, а паралельне до межі поділу матеріалів, оскільки, якщо  $\alpha_j = 0$ , то вісь  $s_j$  збігається з лінією  $y = y_{0j}$ .

Щоб уникнути цього розглянемо на осі  $s_j$  точку  $O_j^0$  ( $s_j = s_{0j}$ ) посередині відрізка  $L_j'$  (рис. 34.4) і помістимо у неї початок ще одної системи координат

$$S_j O_j^0 N_j: S_j = s_j - s_{0j}, \quad N_j = n_j.$$

Тоді

$$(s_j + in_j) e^{i\alpha_j} + z_{0j} = (S_j + iN_j) e^{i\alpha_j} + z_{0j}^0, \quad s_j e^{i\alpha_j} + z_{0j} = S_j e^{i\alpha_j} + z_{0j}^0, \quad (34.65)$$



де  $z_{0j}^0 = z_{0j} + s_{0j}e^{i\alpha_j}$  – координата точки  $O_j^0$  в основній системі координат  $xOy$ . Зокрема, коли  $\alpha_j = 0$ , то

$$s_j + in_j + z_{0j} = S_j + iN_j + z_{0j}^0, \quad s_j + z_{0j} = S_j + z_{0j}^0. \quad (34.66)$$

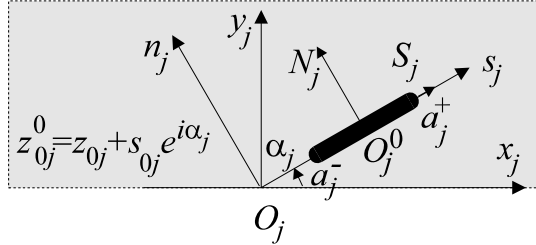


Рис. 34.4. Нахилене до межі півплощини включення

З урахуванням підстановок (34.65), (34.66) виразами (34.59), (34.64) можна користуватися вже у довільному випадку.

### Зосереджені сили та дислокації всередині пакету смуг

Побудуємо однорідний розв'язок для сукупності зосереджених сил та крайових дислокацій у смугах пакету. Такий розв'язок  $\Phi^{0j}$  розглядатимемо як суму основного однорідного  $\Phi^{00j}$  та коригувального  $\Phi^{01j}$  розв'язків.

Спочатку звернемося до конструювання основного розв'язку. Для цього вважатимемо

$$f_r(t) = f_r^j \delta(t), \quad f_1^j = P_y^j, \quad f_2^j = P_x^j, \quad f_4^j = b_x^j, \quad f_5^j = b_y^j, \quad (34.67)$$

де  $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака. Підставляючи ці вирази у формули (34.12), з огляду на (13.95), одержимо вирази

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}^{00j}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{pqmr}^j r_m(-z) f_r^j, \\ \frac{\partial u_q^{00j}(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\pi} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{qmr}^j r_m(-z) f_r^j \quad (p, q \sim x, y), \end{aligned} \quad (34.68)$$

які визначають поля напружень та похідних переміщень від прикладеної у початку системи координат безмежної однорідної площини з пружними сталими  $E_j$ ,  $\nu_j$  сили  $P_x^j + iP_y^j$  та крайової дислокації з вектором Бюргерса  $b_x^j + ib_y^j$  (тому цей розв'язок наділений верхніми індексами "00j"). Якщо ж ці чинники розміщені у точці  $z_{*j}$ , то

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}^{00j}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{pqmr}^j r_m(z_{*j} - z) f_r^j, \\ \frac{\partial u_q^{00j}(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\pi} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{qmr}^j r_m(z_{*j} - z) f_r^j \quad (p, q \sim x, y). \end{aligned} \quad (34.69)$$

Вважаючи у залежностях (34.59), що

$$\begin{aligned} f_r^j(t) &= \tilde{f}_r^j \delta(t - s_{*j}), \quad \tilde{f}_1^j = P_n^j, \quad \tilde{f}_2^j = P_s^j, \quad \tilde{f}_4^j = b_s^j, \quad \tilde{f}_5^j = b_n^j, \\ P_n^j &= P_y^j \cos \alpha_j - P_x^j \sin \alpha_j, \quad P_s^j = P_y^j \sin \alpha_j + P_x^j \cos \alpha_j, \end{aligned}$$

$$b_n^j = b_y^j \cos \alpha_j - b_x^j \sin \alpha_j, \quad b_s = b_y^j \sin \alpha_j + b_x^j \cos \alpha_j, \quad (34.70)$$

отримаємо коригувальне поле напружень і похідних переміщень

$$\sigma_{pq}^{01j}(x, y) = \sum_l \sum_r R_{pqr}^{l*}(z, s_{*j}) \tilde{f}_r^j, \quad (34.71)$$

$$\frac{\partial u_q^{01j}(x, y)}{\partial x} = \sum_l \sum_r R_{qr}^{l*}(z, s_{*j}) \tilde{f}_r^j \quad (p, q \sim s, n).$$

### Включення всередині смуги

**Загальна схема.** Вважатимемо  $L = M = 0$  і розглянемо включення вздовж відрізка  $L'_0 = [a^+; a^-]$ , орієнтованого під кутом  $\alpha_0 = \alpha$  до краю  $y = 0$  смуги заввишки  $H_0 = H$  з пружними сталими  $E_0, \nu_0$  (рис. 34.5).

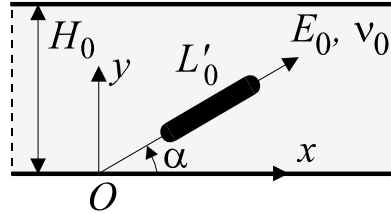


Рис. 34.5. Нахилене включення всередині смуги

Якщо на межі тіла задані напруження, то крайові умови (34.33) набудуть вигляду

$$\left( \hat{\sigma}_{py}^{00} + \hat{\sigma}_{py}^{10} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left( \hat{\sigma}_{py}^{00} + \hat{\sigma}_{py}^{10} \right) \Big|_{y=H} = 0 \quad (p \sim x, y), \quad (34.72)$$

або з урахуванням залежностей (5.23) та (5.18) ( $z_{00} = 0$ ) –

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ -\text{sign}(\xi) A_1^0(\xi) + A_3^0(\xi) + \text{sign}(\xi) A_2^0(\xi) + A_4^0(\xi) \right\} e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{xy mr}^* r_m \left[ t - x e^{-i\alpha} \right] f_r^0(t) dt, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ A_1^0(\xi) + \xi H A_3^0(\xi) \right] e^{-|\xi|H} + \left[ A_2^0(\xi) + \xi H A_4^0(\xi) \right] e^{|\xi|H} \right\} e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{yymr}^* r_m \left[ t - (x + iH) e^{-i\alpha} \right] f_r^0(t) dt, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ A_1^0(\xi) + A_2^0(\xi) \right\} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{yymr}^* r_m \left[ t - x e^{-i\alpha} \right] f_r^0(t) dt, \\ & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[ -\text{sign}(\xi) A_1^0(\xi) + (1 - |\xi|H) A_3^0(\xi) \right] e^{-|\xi|H} + \left[ \text{sign}(\xi) A_2^0(\xi) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+(1+|\xi|H)A_4^0(\xi)]e^{|\xi|H}\}e^{-i\xi x}d\xi = -\frac{1}{\pi}\int_{L'_0}\sum_r\sum_{m=1}^4a_{xymr}^*r_m[t-(x+iH)e^{-i\alpha}]f_r^0(t)dt.$$

Побудувавши інтегральне перетворення цих виразів на підставі залежності (34.1), маємо

$$\begin{aligned}\xi^2\{A_1^0(\xi)+A_2^0(\xi)\}&=\frac{1}{\pi}\int_{L'_0}\sum_r\sum_{m=1}^4a_{yymr}^*r_m(\xi,t,0)f_r^0(t)dt, \\ \xi^2\{-\text{sign}(\xi)A_1^0(\xi)+A_3^0(\xi)+\text{sign}(\xi)A_2^0(\xi)+A_4^0(\xi)\}&= \\ &=-\frac{1}{\pi}\int_{L'_0}\sum_r\sum_{m=1}^4a_{xymr}^*r_m(\xi,t,0)f_r^0(t)dt, \\ \xi^2\{[A_1^0(\xi)+\xi HA_3^0(\xi)]e^{-|\xi|H}+[A_2^0(\xi)+\xi HA_4^0(\xi)]e^{|\xi|H}\}&= \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{L'_0}\sum_r\sum_{m=1}^4a_{yymr}^*r_m(\xi,t,H)f_r^0(t)dt, \\ \xi^2\{[-\text{sign}(\xi)A_1^0(\xi)+(1-|\xi|H)A_3^0(\xi)]e^{-|\xi|H}+[\text{sign}(\xi)A_2^0(\xi)+ \\ &+(1+|\xi|H)A_4^0(\xi)]e^{|\xi|H}\}=-\frac{1}{\pi}\int_{L'_0}\sum_r\sum_{m=1}^4a_{xymr}^*r_m(\xi,t,H)f_r^0(t)dt,\end{aligned}\tag{34.73}$$

де

$$r_m(\xi,t,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}r_m[t-(x+iy)e^{-i\alpha}]e^{i\xi x}dx.\tag{34.74}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}r_1[t-(x+iy)e^{-i\alpha}]&=\frac{-u\cos\alpha}{u^2+v^2}+\frac{v\sin\alpha}{u^2+v^2}, \\ r_2[t-(x+iy)e^{-i\alpha}]&=\frac{-u\sin\alpha}{u^2+v^2}-\frac{v\cos\alpha}{u^2+v^2}, \quad u=x-t\cos\alpha, \quad v=t\sin\alpha-y, \\ r_3[t-(x+iy)e^{-i\alpha}]&=2\left\{-\sin\alpha\sin 2\alpha\frac{u^3}{(u^2+v^2)^2}+\cos\alpha\sin 2\alpha\frac{v^3}{(u^2+v^2)^2}+ \right. \\ &\left. +(\sin\alpha\sin 2\alpha-2\cos\alpha\cos 2\alpha)\frac{uv^2}{(u^2+v^2)^2}-(\cos\alpha\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha)\frac{u^2v}{(u^2+v^2)^2}\right\}, \\ r_4[t-(x+iy)e^{-i\alpha}]&=2\left\{-\sin\alpha\cos 2\alpha\frac{u^3}{(u^2+v^2)^2}+\cos\alpha\cos 2\alpha\frac{v^3}{(u^2+v^2)^2}+ \right.\end{aligned}$$

$$\left. + (\sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha \sin 2\alpha) \frac{uv^2}{(u^2 + v^2)^2} - (\cos \alpha \cos 2\alpha - 2 \sin \alpha \sin 2\alpha) \frac{u^2 v}{(u^2 + v^2)^2} \right\}, \quad (34.75)$$

то з огляду на перші два співвідношення (13.87)

$$\begin{aligned} r_m(\xi, t, y) &= \pi \sum_{k=1}^4 a_{mk}(t, y) J_k(\xi, y) e^{-|\xi(t \sin \alpha - y)|} e^{i\xi t \cos \alpha}, \\ J_1(\xi, y) &= 1, \quad J_2(\xi, y) = \text{sign}(\xi), \quad J_3(\xi, y) = \xi, \quad J_4(\xi, y) = |\xi|, \\ J_5(\xi, y) &= \xi y, \quad J_6(\xi, y) = |\xi| y, \quad J_7(\xi, y) = \xi^2 y, \quad J_8(\xi, y) = \xi |\xi| y, \\ a_{11}(t, y) &= \text{sign}(v) \sin \alpha, \quad a_{12}(t, y) = -i \cos \alpha, \quad a_{13}(t, y) = a_{14}(t, y) = 0, \\ a_{21}(t, y) &= -\text{sign}(v) \cos \alpha, \quad a_{22}(t, y) = -i \sin \alpha, \quad a_{23}(t, y) = a_{24}(t, y) = 0, \\ a_{31}(t, y) &= -2 \text{sign}(v) \sin \alpha \cos 2\alpha, \quad a_{32}(t, y) = -2i \sin \alpha \sin 2\alpha, \\ a_{33}(t, y) &= -2i |v| \cos 3\alpha, \quad a_{34}(t, y) = 2v \sin \alpha, \\ a_{41}(t, y) &= 2 \text{sign}(v) \sin \alpha \sin 2\alpha, \quad a_{42}(t, y) = -2i \sin \alpha \cos 2\alpha, \\ a_{43}(t, y) &= -2i |v| \sin \alpha, \quad a_{44}(t, y) = 2v \cos 3\alpha. \end{aligned} \quad (34.76)$$

Таким чином, система алгебричних рівнянь (34.51) конкретизується за допомогою виразів

$$\begin{aligned} c_{11}^0(\xi) &= 1, \quad c_{12}^0(\xi) = 1, \quad c_{14}^0(\xi) = 0, \quad c_{15}^0(\xi) = 0, \quad c_{21}^0(\xi) = -\text{sign}(\xi), \\ c_{22}^0(\xi) &= \text{sign}(\xi), \quad c_{24}^0(\xi) = 1, \quad c_{25}^0(\xi) = 1, \quad c_{31}^0(\xi) = e^{-|\xi|H}, \quad c_{32}^0(\xi) = e^{|\xi|H}, \\ c_{34}^0(\xi) &= \xi H e^{-|\xi|H}, \quad c_{35}^0(\xi) = \xi H e^{|\xi|H}, \quad c_{41}^0(\xi) = -\text{sign}(\xi) e^{-|\xi|H}, \\ c_{42}^0(\xi) &= \text{sign}(\xi) e^{|\xi|H}, \quad c_{44}^0(\xi) = (1 - |\xi|H) e^{-|\xi|H}, \quad c_{45}^0(\xi) = (1 + |\xi|H) e^{|\xi|H}, \end{aligned} \quad (34.77)$$

$$\begin{aligned} F_{1r}^0(\xi, t) &= \frac{1}{\pi \xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{yymr}^* r_m(\xi, t, 0), \quad F_{2r}^0(\xi, t) = -\frac{1}{\pi \xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{xymr}^* r_m(\xi, t, 0), \\ F_{3r}^0(\xi, t) &= \frac{1}{\pi \xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{yymr}^* r_m(\xi, t, H), \quad F_{4r}^0(\xi, t) = -\frac{1}{\pi \xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{xymr}^* r_m(\xi, t, H) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} F_{1r}^0(\xi, t) &= \frac{1}{\xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{yymr}^* \sum_{k=1}^4 a_{mk}(t, 0) J_k(\xi, 0) e^{-|\xi t \sin \alpha|} e^{i\xi t \cos \alpha}, \\ F_{2r}^0(\xi, t) &= -\frac{1}{\xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{xymr}^* \sum_{k=1}^4 a_{mk}(t, 0) J_k(\xi, 0) e^{-|\xi t \sin \alpha|} e^{i\xi t \cos \alpha}, \\ F_{3r}^0(\xi, t) &= \frac{1}{\xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{yymr}^* \sum_{k=1}^4 a_{mk}(t, H) J_k(\xi, H) e^{-|\xi(t \sin \alpha - H)|} e^{i\xi t \cos \alpha}, \\ F_{4r}^0(\xi, t) &= -\frac{1}{\xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{xymr}^* \sum_{k=1}^4 a_{mk}(t, H) J_k(\xi, H) e^{-|\xi(t \sin \alpha - H)|} e^{i\xi t \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (34.78)$$

де слід врахувати, що якщо  $y = 0$ , то  $v = t \sin \alpha$ ,  $\text{sign}(v) = 1$ ; якщо ж  $y = H$ , то  $v = t \sin t - H$ ,  $\text{sign}(v) = -1$ .

### Однорідні розв'язки для смуги

Якщо у точці  $z_{*0} = s_{*0} e^{i\alpha} = x_{*0} + iy_{*0}$  смуги прикладена зосереджена сила та крайова дислокація, то з огляду на (34.71) однорідний коригувальний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}^{010}(x, y) &= \sum_r R_{pqr}^{0*}(z, s_{*j}) \tilde{f}_r^0, \\ \frac{\partial u_q^{010}(x, y)}{\partial x} &= \sum_r R_{qr}^{0*}(z, s_{*j}) \tilde{f}_r^0 \quad (p, q \sim x, y). \end{aligned} \quad (34.79)$$

Відповідний повний основний розв'язок є суперпозицією (34.79) та (34.69), якщо  $j = 0$ .

Запишемо ще чотири характерні однорідні розв'язки для смуги.

1. Однорідний розтяг вздовж осі  $x$  напруженнями  $\sigma_{xx}^\infty = p_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{00} &= p_1, \quad \sigma_{yy}^{00} = \sigma_{xy}^{00} = 0, \quad \partial u_x^{00} / \partial x = k_1^0 p_1, \quad \partial u_y^{00} / \partial x = 0, \\ \sigma_{ss}^{00} &= p_1 \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{nn}^{00} = p_1 \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{sn}^{00} = -p_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \partial u_s^{00} / \partial s &= p_1 (k_1^0 \cos^2 \alpha - k_2^0 \sin^2 \alpha), \quad \partial u_n^{00} / \partial s = -p_1 k_4^0 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (34.80)$$

2. Однорідний розтяг уздовж осі  $y$  напруженнями  $\sigma_{yy}^\infty = p$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{00} &= p, \quad \sigma_{xx}^{00} = \sigma_{xy}^{00} = 0, \quad \partial u_x^{00} / \partial x = -k_2^0 p, \quad \partial u_y^{00} / \partial x = 0, \\ \sigma_{ss}^{00} &= p \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{nn}^{00} = p \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{sn}^{00} = p \sin \alpha \cos \alpha, \\ \partial u_s^{00} / \partial s &= p (k_1^0 \sin^2 \alpha - k_2^0 \cos^2 \alpha), \quad \partial u_n^{00} / \partial s = -pk_4^0 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (34.81)$$

3. Згин:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{00} &= p(1 - 2y/H), \quad \sigma_{yy}^{00} = \sigma_{xy}^{00} = 0, \quad \partial u_x^{00} / \partial x = k_1^0 p(1 - 2y/H), \quad \partial u_y^{00} / \partial x = 0, \\ \sigma_{ss}^{00} &= p \cos^2 \alpha (1 - 2s/B), \quad \sigma_{nn}^{00} = p \sin^2 \alpha (1 - 2s/B), \quad \sigma_{sn}^{00} = -p \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2s/B), \\ \partial u_s^{00} / \partial s &= p (k_1^0 \cos^2 \alpha - k_2^0 \sin^2 \alpha) (1 - 2s/B), \quad \partial u_n^{00} / \partial s = -pk_4^0 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2s/B), \end{aligned} \quad (34.82)$$

$$B = H / \sin \alpha.$$

4. Поперечний зсув:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{00} &= \sigma_{yy}^{00} = 0, \quad \sigma_{xy}^{00} = 4\tau \left[ \frac{y}{H} \left( \frac{y}{H} - 1 \right) \right], \quad \frac{\partial u_x^{00}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y^{00}}{\partial x} = k_4^0 \sigma_{xy}, \\ \sigma_{ss}^{00} &= -\sigma_{nn}^{00} = \sin 2\alpha \sigma_{xy} = 4\tau \sin 2\alpha \left[ \frac{s}{B} \left( \frac{s}{B} - 1 \right) \right], \\ \sigma_{sn}^{00} &= \cos 2\alpha \sigma_{xy} = 4\tau \cos 2\alpha \left[ \frac{s}{B} \left( \frac{s}{B} - 1 \right) \right], \quad \frac{\partial u_s^{00}}{\partial s} = 4k_4^0 \tau \sin 2\alpha \left[ \frac{s}{B} \left( \frac{s}{B} - 1 \right) \right], \\ \frac{\partial u_n^{00}}{\partial s} &= 4k_4^0 \tau \cos^2 \alpha \left[ \frac{s}{B} \left( \frac{s}{B} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (34.83)$$

Числовий аналіз для вклучення всередині смуги

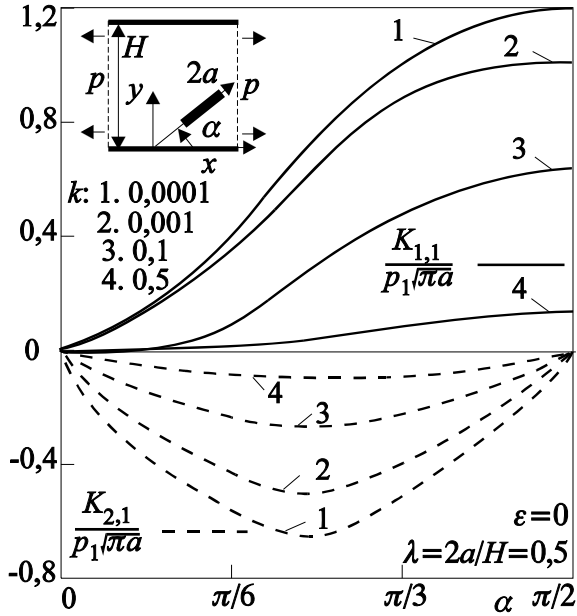


Рис. 34.6

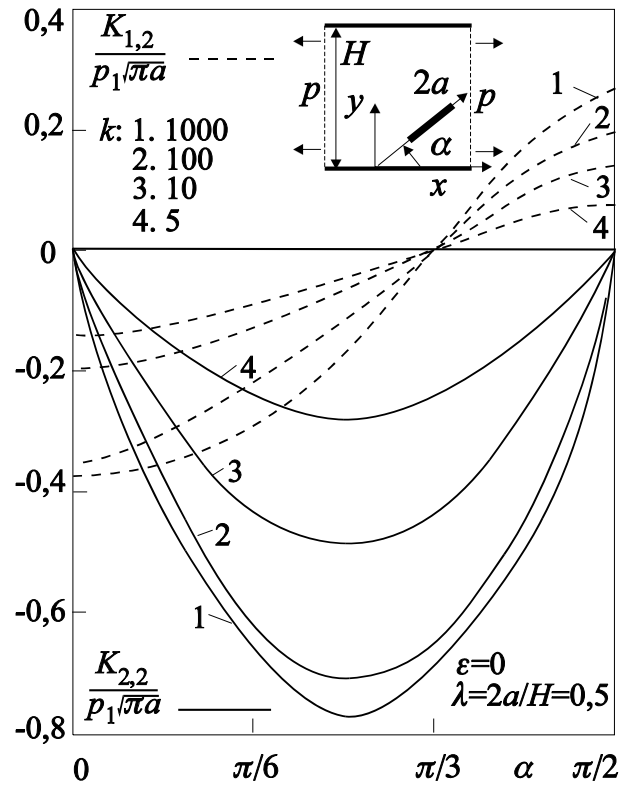


Рис. 34.7

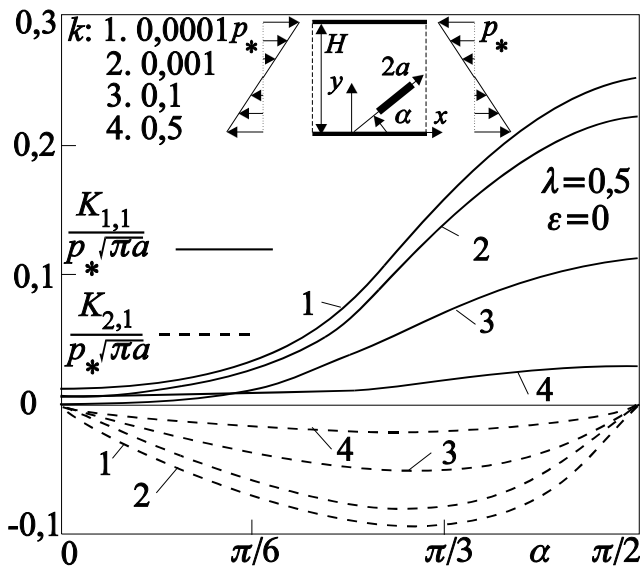


Рис. 34.8

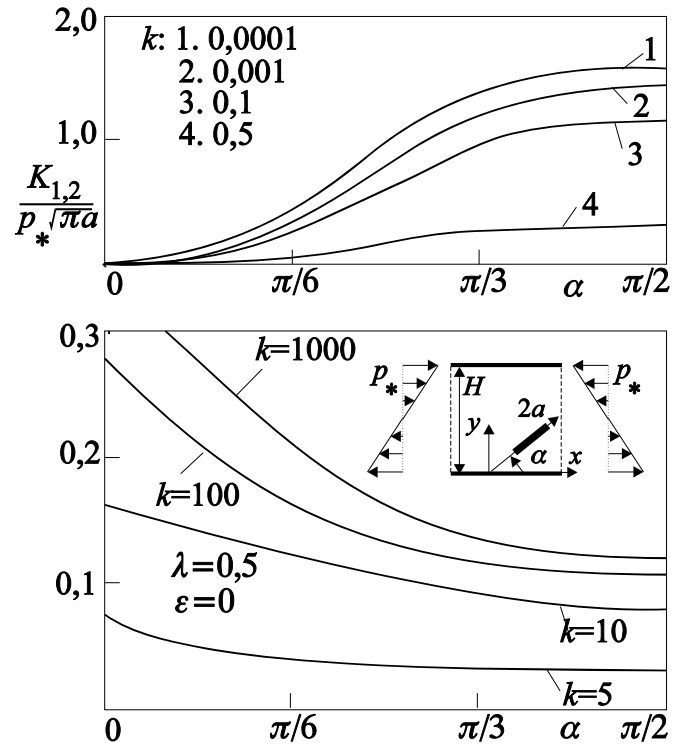


Рис. 34.9

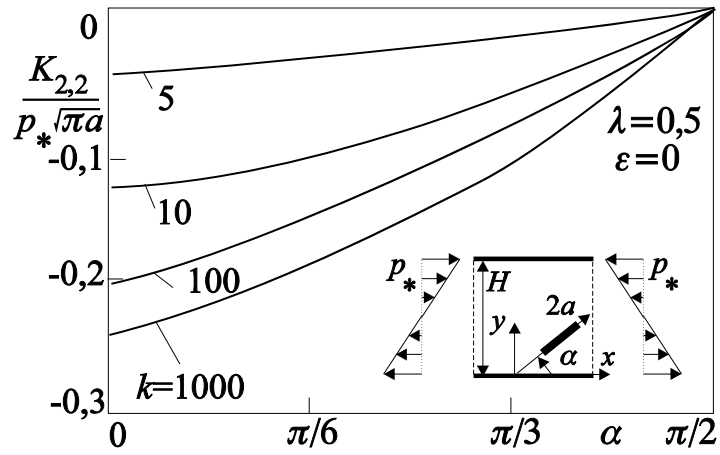


Рис. 34.10

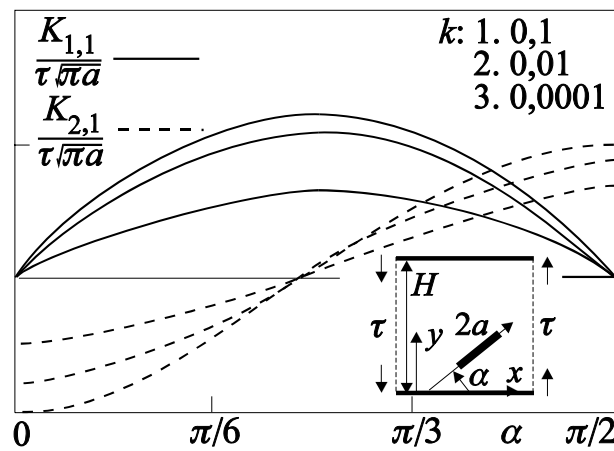


Рис. 34.11

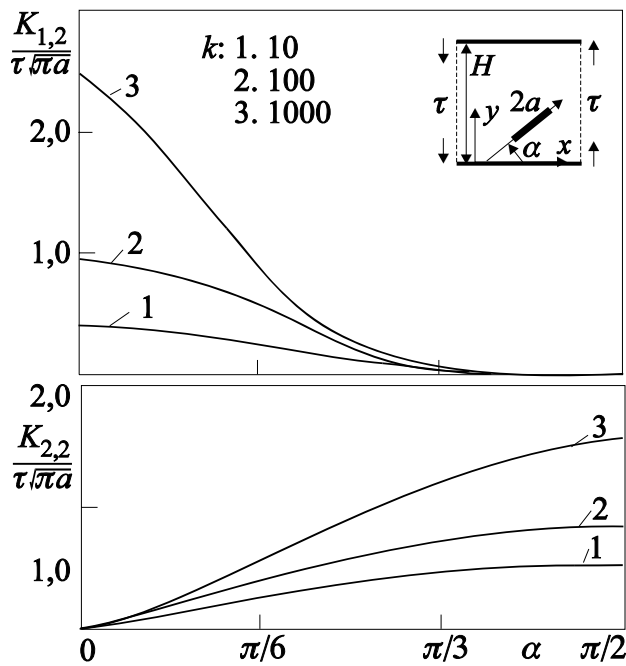


Рис. 34.12

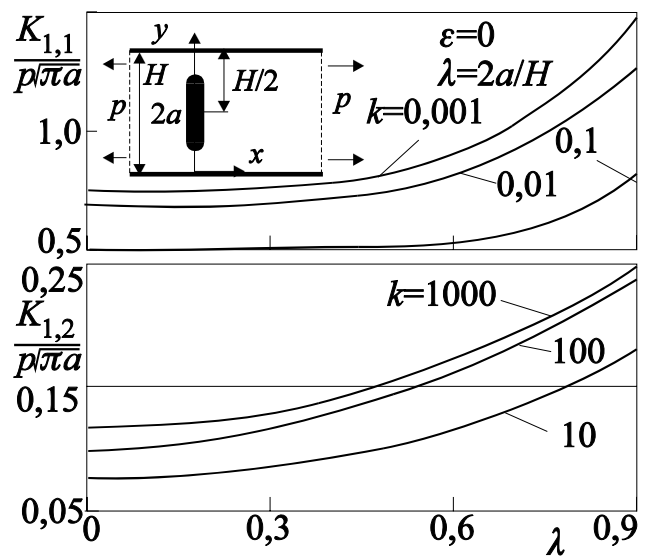


Рис. 34.13

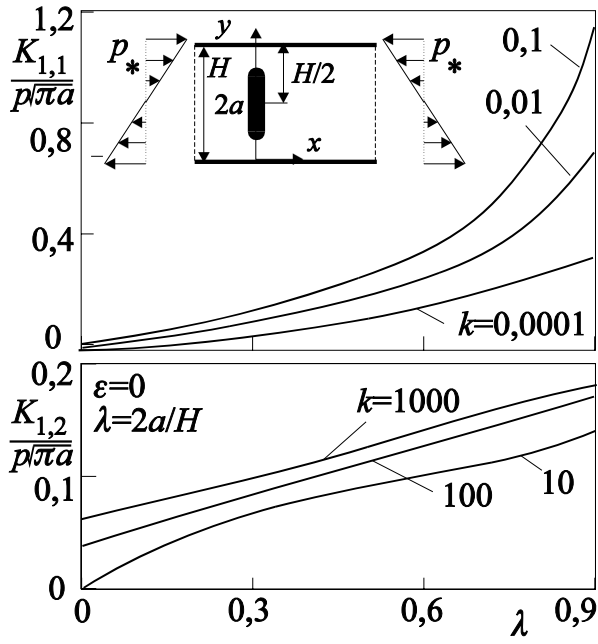


Рис. 34.14

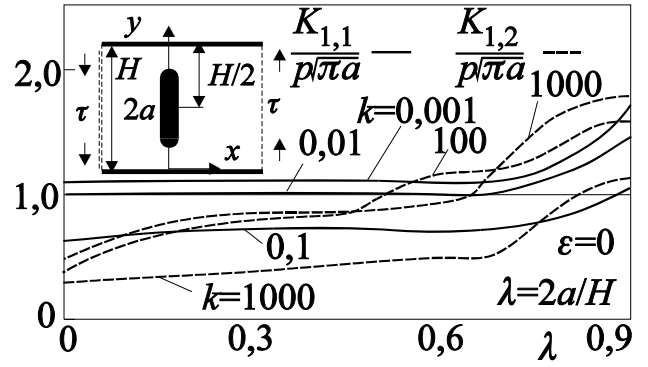


Рис. 34.15

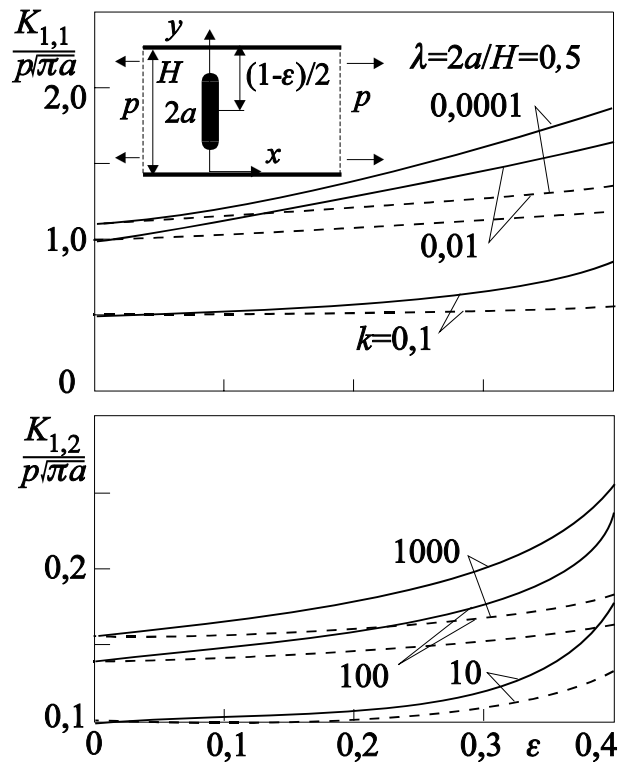


Рис. 34.16



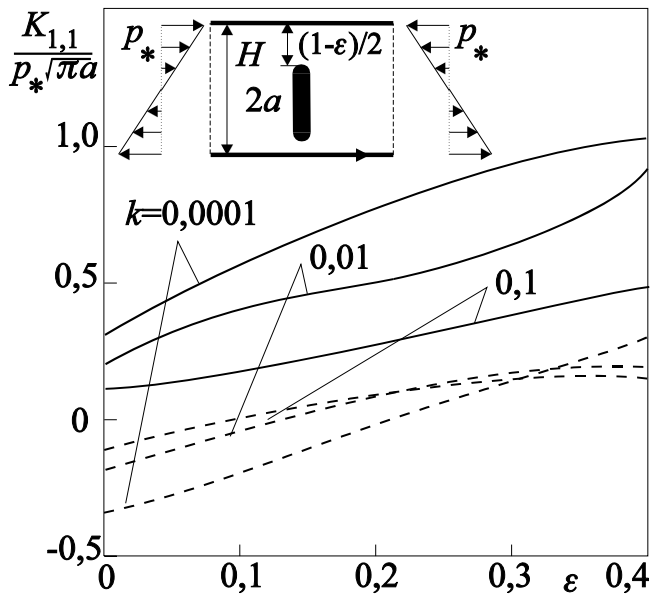


Рис. 34.17

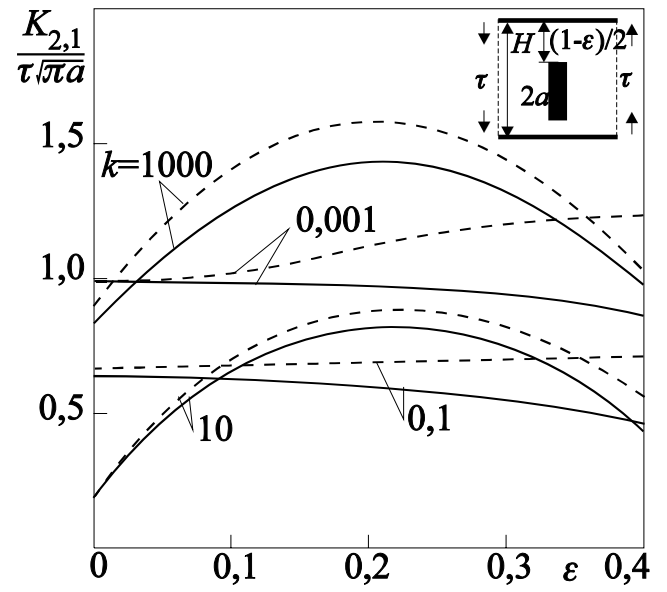


Рис. 34.18

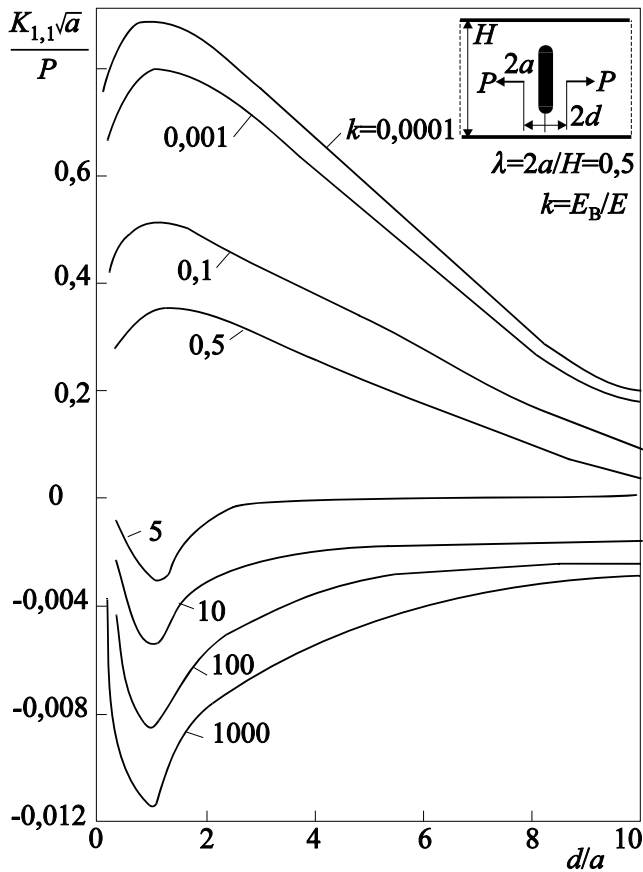


Рис. 34.19

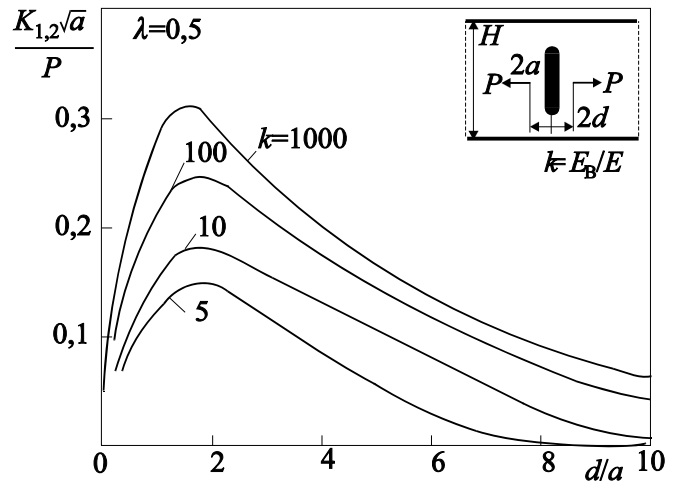


Рис. 34.20

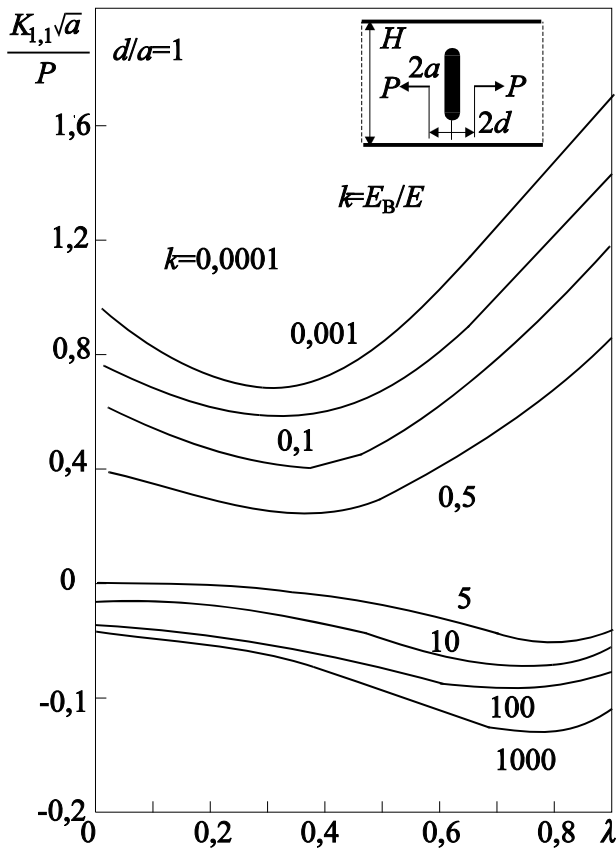


Рис. 34.21

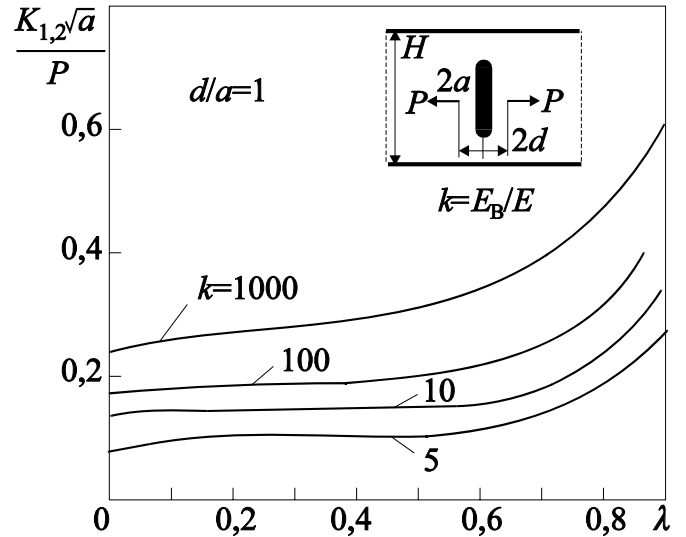


Рис. 34.22

Здійснений на основі методу ортогональних многочленів О.О.Євтушенком числовий аналіз зосереджувався на обчисленні УКІН та напружень на межі вклучення з матрицею. Обчислення здійснені для ПНС стосовно відносної товщини  $h_0/a = 0,1$  ( $2a = a^+ - a^-$ ) вклучення прямокутного профілю ( $\beta = \infty$ ) та однакових коефіцієнтів Пуассона матриці та вклучення  $\nu_0 = \nu_B$ . Досліджений вплив кута  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ) орієнтації вклучення, його відносної жорсткості  $k = E_B/E_0$ , відносної довжини  $\lambda = 2a/B$  вклучення стосовно розміру  $B = H/\sin \alpha$  перерізу та ексцентриситету  $\varepsilon = 1 - (a^+ - a^-)/B$  розташування вклучення. Обчислення здійснені з точністю до 1%.

Отримано, що для податних вклучень ( $k < 1$ ) домінують УКІН  $K_{1,1}, K_{2,1}$ : у цьому випадку значна концентрація напружень спостерігається на лінії продовження серединної осі вклучення. Якщо  $k < 0,0001$ , то значення УКІН відповідають тріщині і  $K_{1,1}, K_{2,1}$  практично збігаються (похибка не більша за 1%) зі значеннями  $K_1, K_2$  відповідно у випадку аналогічних задач теорії тріщин [1379, 1437, 1671].

Обчислення за  $k = 1$  дали нульові значення УКІН. Для відносно жорстких вклучень ( $k > 1$ ) переважають УКІН  $K_{1,2}, K_{2,2}$ . У цьому випадку, на відміну від податного вклучення, напруження концентруються головню на межі контакту вклучення з матрицею.

На рис. 34.6 – 34.12 зображена залежність безрозмірних значень УКІН від  $\alpha$  для деяких значень  $k$  центрально розташованого ( $\varepsilon = 0$ ) вклучення за  $\lambda = 0,5$  за розтягу вздовж осі  $x$  (рис. 34.6, 34.7), згину (рис. 34.8 – 34.10), зсуву (рис. 34.11, 34.12).

Вплив  $\lambda$  ( $\alpha = \pi/2, \varepsilon = 0$ ) за тих же способів навантажування та значень  $k$  відображений на рис. 34.13 – 34.15. Помітно, що збільшення  $\lambda$  спричиняє збільшення всіх УКІН. Якщо

$\lambda \rightarrow 0$ , то результати обчислень прямують до значень, які відповідають включенню у необмеженій ізотропній площині.

Для податних ( $k < 1$ ) включень, вістря яких не дуже близькі до краю смуги, в умовах  $\alpha = \pi/2$  для обчислення  $K_{1,1}$  можна запропонувати за аналогією до Ісиди [1379] апроксимаційну формулу

$$K_{1,1}(a^\pm) / p\sqrt{\pi a} = \pm \theta / \sqrt{\cos(\pi\lambda/2)}, \quad \theta = \left(4k_1^0 \sqrt{1 + G_B/G_0}\right)^{-1}. \quad (34.84)$$

Слушність її підтверджується зіставленням значень  $K_{1,1}/p\sqrt{\pi a}$ , обчислених числово-аналітичним методом (другий стовпчик табл. 34.1) та за формулою (34.84) (третій стовпчик цієї ж таблиці). В інших стовпчиках таблиці містяться відповідні значення УКІН для згину та зсуву.

**Таблиця 34.1. Ненульові УКІН на вістрі  $s = a^-$  для центрально розташованого ( $\varepsilon = 0$ ) перпендикулярного до межі смуги ( $\alpha = \pi/2$ ) включення за  $k = 0,1$**

$\lambda$	Розтяг уздовж осі $x$			Згин		Зсув	
	$\frac{K_{1,1}}{p\sqrt{\pi a}}$	(34.84)	$\frac{K_{1,2}}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{1,1}}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{1,2}}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{2,1}}{\tau\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{2,2}}{\tau\sqrt{\pi a}}$
0,1	0,4412	0,4415	0,0001	0,0213	0,9465	0,6322	0,0186
0,2	0,4527	0,4535	0,0003	0,0444	0,9850	0,6368	0,0316
0,3	0,4740	0,4757	0,0005	0,0708	1,0216	0,6434	0,0599
0,4	0,4969	0,4997	0,0012	0,0905	1,0591	0,6546	0,0838
0,5	0,5313	0,5338	0,0017	0,1150	1,1027	0,6773	0,0914
0,6	0,5831	0,5844	0,0042	0,1405	1,1601	0,7046	0,1124
0,7	0,6664	0,6623	0,0064	0,1782	1,2473	0,7609	0,1153
0,8	0,8127	0,8036	0,0147	0,2315	1,3326	0,8719	0,1191
0,9	1,1548	1,1183	0,0340	0,3367	1,5211	1,1587	0,1468

Вплив зміни ексцентриситету  $\varepsilon$  за значень параметрів  $\alpha = \pi/2$ ,  $\lambda = 0,5$  ілюструють рис. 34.16 – 34.18. Помітно, що за розтягу (рис. 34.16) більші значення УКІН на тому вістрі включення, що розташоване ближче до краю смуги. Це явище вже було відзначене у теорії тріщин [1271].

Вплив зосереджених сил досліджений для випадку центрально розташованого ( $\varepsilon = 0$ ) перпендикулярного до граней ( $\alpha = \pi/2$ ) включення за дії двох однакових за величиною та протилежно спрямованих сил  $P$ , прикладених на серединній лінії смуги симетрично стосовно неоднорідності на відстані  $d$  від неї. Внаслідок такого способу навантажування та орієнтації включення  $K_{1,2} = K_{2,2} = 0$ .

Залежність значень ненульових безрозмірних УКІН (віднесених до  $P/\sqrt{\pi a}$ ) від відносної відстані  $d/a$  точок прикладання сил, коли  $\lambda = 0,5$ , для окремих значень  $k$  містять рис. 34.19, 34.20. Помітне з віддаленням сил від включення спочатку швидко збільшення, а потім зменшення до нуля абсолютних значень УКІН. УКІН  $K_{1,1}$  досягає найбільших значень на тріщині,  $K_{1,2}$  – на абсолютно жорсткому включенні.

Рис. 34.21, 34.22 подають залежність ненульових безрозмірних УКІН від відносної довжини включення  $\lambda$ , якщо відносна відстань точок прикладання сил фіксована ( $d/a = 1$ ). Зазначимо, що для податних включень  $k < 1$  зі збільшенням  $\lambda$  УКІН  $K_{1,1}$  спочатку до певної

міри зменшується, а потім круто зростає до безмежно великого значення, коли вістря включення наближається до краю смуги. Щодо УКІН  $K_{1,2}$ , то його поведження діаметрально протилежне: зі збільшенням  $\lambda$  він спершу дещо збільшується, а потім поволі прямує до нуля.

Таким чином, у випадку навантажування зосередженими силами можна говорити про оптимальне їхнє розташування та оптимальну довжину включення, які можуть забезпечити мінімальні чи максимальні значення обраних УКІН.

Дослідження напружень на лінії контакту з включенням свідчать про істотний вплив жорсткості неоднорідності та точок прикладання сил на величину і характер розподілу нормальних і дотичних напружень.

### Включення всередині півплощини (півпростору)

Якщо висота смуги  $H = H_0$  безмежно велика, то згідно із загальними засадами  $A_2^0(\xi) = A_4^0(\xi) = 0$  і для визначення коефіцієнтів  $A_1^0(\xi)$ ,  $A_3^0(\xi)$  необхідно розв'язати систему рівнянь (34.73), яка тепер набуває вигляду [214]

$$\begin{aligned} \xi^2 A_1^0(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{yy mr}^* r_m(\xi, t, 0) f_r^0(t) dt, \\ \xi^2 \left\{ -\text{sign}(\xi) A_1^0(\xi) + A_3^0(\xi) \right\} &= -\frac{1}{\pi} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{xy mr}^* r_m(\xi, t, 0) f_r^0(t) dt, \end{aligned} \quad (34.85)$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} A_1^0(\xi) &= \frac{1}{\pi \xi^2} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 a_{yy mr}^* r_m(\xi, t, 0) f_r^0(t) dt, \\ A_3^0(\xi) &= \frac{1}{\pi \xi^2} \int_{L'_0} \sum_r \sum_{m=1}^4 \left( \text{sign}(\xi) a_{yy mr}^* - a_{xy mr}^* \right) r_m(\xi, t, 0) f_r^0(t) dt. \end{aligned} \quad (34.86)$$

Тобто, у цьому випадку у виразах (34.55)

$$\begin{aligned} a_{1r}^{00}(\xi, t) &= \frac{1}{\pi \xi^2} \sum_{m=1}^4 a_{yy mr}^* r_m(\xi, t, 0), \quad a_{2r}^{00}(\xi, t) = a_{4r}^{00}(\xi, t) = 0, \\ a_{3r}^{00}(\xi, t) &= \frac{1}{\pi \xi^2} \sum_{m=1}^4 \left( \text{sign}(\xi) a_{yy mr}^* - a_{xy mr}^* \right) r_m(\xi, t, 0). \end{aligned} \quad (34.87)$$

Отже,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{pq}^{10}(x, y) &= \sum_r \int_{L'_0} R_{pqr}^{00}(z, t) f_r^0(t) dt, \\ \frac{\partial \hat{u}_q^{10}(x, y)}{\partial x} &= \sum_r \int_{L'_0} R_{qr}^{00}(z, t) f_r^0(t) dt \quad (p, q \sim x, y), \end{aligned} \quad (34.88)$$

де

$$\begin{aligned} R_{yyr}^{00}(z, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ a_{1r}^{00}(\xi, t) + \xi y a_{3r}^{00}(\xi, t) \right\} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\ R_{xyr}^{00}(z, t) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ -\text{sign}(\xi) a_{1r}^{00}(\xi, t) + (1 - |\xi|y) a_{3r}^{00}(\xi, t) \right\} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{xxr}^{00}(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ a_{1r}^{00}(\xi, t) + (\xi y - 2\text{sign}(\xi)) a_{3r}^{00}(\xi, t) \right\} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\
R_{xr}^{00}(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ k_4^0 a_{1r}^{00}(\xi, t) + (k_4^0 \xi y - 2\text{sign}(\xi)) a_{3r}^{00}(\xi, t) \right\} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\
R_{yr}^{00}(z, t) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ -k_4^0 \text{sign}(\xi) a_{1r}^{00}(\xi, t) - (k_5^0 + k_4^0 |\xi|y) a_{3r}^{00}(\xi, t) \right\} e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi.
\end{aligned}$$

Як наслідок останніх виразів

$$\begin{aligned}
J_{yymr}(x, y, t) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ a_{yymr}^* (1 + |\xi|y) - a_{xyymr}^* \xi y \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\
J_{xyymr}(x, y, t) &= \frac{i}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ a_{yymr}^* (-\text{sign}(\xi) + \xi y) - a_{xyymr}^* (1 - |\xi|y) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\
J_{xxmr}(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ a_{yymr}^* (-1 + |\xi|y) + a_{xyymr}^* (2\text{sign}(\xi) - \xi y) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\
J_{xmr}(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ a_{yymr}^* (k_4^0 - 2 + |\xi|y k_4^0) + \right. \\
&\quad \left. + a_{xyymr}^* (2\text{sign}(\xi) - k_4^0 \xi y) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi, \\
J_{ymr}(x, y, t) &= \frac{i}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -a_{yymr}^* (2k_1^0 \text{sign}(\xi) - k_4^0 \xi y) + \right. \\
&\quad \left. + a_{xyymr}^* (k_5^0 + k_4^0 |\xi|y) \right] e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi.
\end{aligned} \tag{34.89}$$

Врахувавши розвинення (34.76), запишемо

$$\begin{aligned}
J_{pqmr}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^8 b_{pqmr}^k J_k^*(x, y, t), \quad J_{pmr}(x, y, t) = \sum_{k=1}^8 b_{pmr}^k J_k^*(x, y, t), \\
J_k^*(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} J_k(\xi, t) e^{-|\xi|Y} e^{-i\xi X} d\xi, \quad X = x - t \cos \alpha, \quad Y = y + t \sin \alpha,
\end{aligned} \tag{34.90}$$

де

$$\begin{aligned}
b_{yymr}^1 &= -\left[ a_{yymr}^* a_{m1} \right] / 2\pi, \quad b_{yymr}^5 = -\left[ a_{yymr}^* (a_{m5} + a_{m2}) - a_{xyymr}^* a_{m1} \right] / 2\pi, \\
b_{yymr}^2 &= -\left[ a_{yymr}^* a_{m2} \right] / 2\pi, \quad b_{yymr}^6 = -\left[ a_{yymr}^* (a_{m6} + a_{m1}) - a_{xyymr}^* a_{m2} \right] / 2\pi, \\
b_{yymr}^3 &= -\left[ a_{yymr}^* a_{m3} \right] / 2\pi, \quad b_{yymr}^7 = -\left[ a_{yymr}^* (a_{m7} + a_{m4}) - a_{xyymr}^* a_{m3} \right] / 2\pi, \\
b_{yymr}^4 &= -\left[ a_{yymr}^* a_{m4} \right] / 2\pi, \quad b_{yymr}^8 = -\left[ a_{yymr}^* (a_{m8} + a_{m3}) - a_{xyymr}^* a_{m4} \right] / 2\pi, \\
b_{xyymr}^1 &= -i \left[ a_{xyymr}^* a_{m1} \right] / 2\pi, \quad b_{xyymr}^5 = -i \left[ a_{yymr}^* a_{m1} + a_{xyymr}^* (a_{m5} - a_{m2}) \right] / 2\pi, \\
b_{xyymr}^2 &= -i \left[ a_{xyymr}^* a_{m2} \right] / 2\pi, \quad b_{xyymr}^6 = -i \left[ a_{yymr}^* a_{m2} + a_{xyymr}^* (a_{m6} - a_{m1}) \right] / 2\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{xy\mu r}^3 &= -i \left[ a_{xy\mu r}^* a_{m3} \right] / 2\pi, & b_{xy\mu r}^7 &= -i \left[ a_{y\mu r}^* a_{m3} + a_{xy\mu r}^* (a_{m7} - a_{m4}) \right] / 2\pi, \\
b_{xy\mu r}^4 &= -i \left[ a_{xy\mu r}^* a_{m4} \right] / 2\pi, & b_{xy\mu r}^8 &= -i \left[ a_{y\mu r}^* a_{m4} + a_{xy\mu r}^* (a_{m8} - a_{m3}) \right] / 2\pi, \\
b_{xx\mu r}^1 &= \left[ -a_{y\mu r}^* a_{m1} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m2} \right] / 2\pi, & b_{xx\mu r}^2 &= \left[ -a_{y\mu r}^* a_{m2} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m1} \right] / 2\pi, \\
b_{xx\mu r}^3 &= \left[ -a_{y\mu r}^* a_{m3} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m4} \right] / 2\pi, & b_{xx\mu r}^4 &= \left[ -a_{y\mu r}^* a_{m4} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m3} \right] / 2\pi, \\
b_{xx\mu r}^5 &= \left[ -a_{y\mu r}^* (a_{m5} - a_{m2}) + a_{xy\mu r}^* (2a_{m6} - a_{m1}) \right] / 2\pi, \\
b_{xx\mu r}^6 &= \left[ -a_{y\mu r}^* (a_{m6} - a_{m1}) + a_{xy\mu r}^* (2a_{m5} - a_{m2}) \right] / 2\pi, \\
b_{xx\mu r}^7 &= \left[ -a_{y\mu r}^* (a_{m7} - a_{m4}) + a_{xy\mu r}^* (2a_{m8} - a_{m3}) \right] / 2\pi, \\
b_{xx\mu r}^8 &= \left[ -a_{y\mu r}^* (a_{m8} - a_{m3}) + a_{xy\mu r}^* (2a_{m7} - a_{m4}) \right] / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^1 &= \left[ a_{y\mu r}^* (k_4^0 - 2) a_{m1} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m2} \right] / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^2 &= \left[ a_{y\mu r}^* (k_4^0 - 2) a_{m2} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m1} \right] / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^3 &= \left[ a_{y\mu r}^* (k_4^0 - 2) a_{m3} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m4} \right] / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^4 &= \left[ a_{y\mu r}^* (k_4^0 - 2) a_{m4} + 2a_{xy\mu r}^* a_{m3} \right] / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^5 &= \left\{ a_{y\mu r}^* \left[ (k_4^0 - 2) a_{m5} + k_4^0 a_{m2} \right] + a_{xy\mu r}^* (2a_{m6} - k_4^0 a_{m1}) \right\} / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^6 &= \left\{ a_{y\mu r}^* \left[ (k_4^0 - 2) a_{m6} + k_4^0 a_{m1} \right] + a_{xy\mu r}^* (2a_{m5} - k_4^0 a_{m2}) \right\} / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^7 &= \left\{ a_{y\mu r}^* \left[ (k_4^0 - 2) a_{m7} + k_4^0 a_{m4} \right] + a_{xy\mu r}^* (2a_{m8} - k_4^0 a_{m3}) \right\} / 2\pi, \\
b_{x\mu r}^8 &= \left\{ a_{y\mu r}^* \left[ (k_4^0 - 2) a_{m8} + k_4^0 a_{m3} \right] + a_{xy\mu r}^* (2a_{m7} - k_4^0 a_{m4}) \right\} / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^1 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* 2k_1^0 a_{m2} + a_{xy\mu r}^* k_5^0 a_{m1} \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^2 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* 2k_1^0 a_{m1} + a_{xy\mu r}^* k_5^0 a_{m2} \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^3 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* 2k_1^0 a_{m4} + a_{xy\mu r}^* k_5^0 a_{m3} \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^4 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* 2k_1^0 a_{m3} + a_{xy\mu r}^* k_5^0 a_{m4} \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^5 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* (2k_1^0 a_{m6} + k_4^0 a_{m1}) + a_{xy\mu r}^* (k_5^0 a_{m5} + k_4^0 a_{m2}) \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^6 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* (2k_1^0 a_{m5} + k_4^0 a_{m2}) + a_{xy\mu r}^* (k_5^0 a_{m6} + k_4^0 a_{m1}) \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^7 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* (2k_1^0 a_{m8} + k_4^0 a_{m3}) + a_{xy\mu r}^* (k_5^0 a_{m7} + k_4^0 a_{m4}) \right] / 2\pi, \\
b_{y\mu r}^8 &= i \left[ -a_{y\mu r}^* (2k_1^0 a_{m7} + k_4^0 a_{m4}) + a_{xy\mu r}^* (k_5^0 a_{m8} + k_4^0 a_{m3}) \right] / 2\pi.
\end{aligned} \tag{34.91}$$

Використання залежностей (13.93) дає можливість обчислити інтеграли

$$\begin{aligned}
J_1^*(x, y, t) &= 2 \operatorname{Re} \frac{i}{Z} = -2 \operatorname{Im} \frac{1}{Z}, & J_5^*(x, y, t) &= YJ_3^*(x, y, t) = -i \operatorname{Im} \frac{i(Z - \bar{Z})}{Z^2} = -i \operatorname{Re} \frac{Z - \bar{Z}}{Z^2}, \\
J_2^*(x, y, t) &= -2i \operatorname{Re} \frac{1}{Z} = -2i \operatorname{Im} \frac{i}{Z}, & J_6^*(x, y, t) &= YJ_4^*(x, y, t) = \operatorname{Im} \frac{Z - \bar{Z}}{Z^2} = -i \operatorname{Re} \frac{i(Z - \bar{Z})}{Z^2}, \\
J_3^*(x, y, t) &= -2i \operatorname{Re} \frac{i}{Z^2} = 2i \operatorname{Im} \frac{1}{Z^2}, & J_7^*(x, y, t) &= -2 \operatorname{Im} \frac{i(Z - \bar{Z})}{Z^3} = -2 \operatorname{Re} \frac{Z - \bar{Z}}{Z^3}, \\
J_4^*(x, y, t) &= -2 \operatorname{Re} \frac{1}{Z^2} = 2 \operatorname{Im} \frac{i}{Z^2}, & J_8^*(x, y, t) &= 2i \operatorname{Im} \frac{Z - \bar{Z}}{Z^3} = -2i \operatorname{Re} \frac{i(Z - \bar{Z})}{Z^3},
\end{aligned} \tag{34.92}$$

$$Z = X + iY.$$

Таким чином, остаточно маємо явні вирази для функцій

$$R_{pqr}^{00}(z, t) = \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^8 b_{pqmr}^k J_k^*(x, y, t), \quad R_{pr}^{00}(z, t) = \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^8 b_{pmr}^k J_k^*(x, y, t). \tag{34.93}$$

Якщо підставити у (34.88) вирази

$$\begin{aligned}
f_r(t) &= \tilde{f}_r^0 \delta(t - s_{*0}), \quad \tilde{f}_1^0 = P_n^0, \quad \tilde{f}_2^0 = P_s^0, \\
\tilde{f}_4^0 &= b_s^0, \quad \tilde{f}_5^0 = b_n^0, \quad P_n^0 = P_y^0 \cos \alpha - P_x^0 \sin \alpha, \\
P_s^0 &= P_y^0 \sin \alpha + P_x^0 \cos \alpha, \quad b_n^0 = b_y^0 \cos \alpha - b_x^0 \sin \alpha, \quad b_s^0 = b_y^0 \sin \alpha + b_x^0 \cos \alpha
\end{aligned} \tag{34.94}$$

та позначити  $x_{*0} = s_{*0} \cos \alpha$ ,  $y_{*0} = s_{*0} \sin \alpha$ , то одержимо

$$\sigma_{pq}^{010}(x, y) = \sum_r R_{pqr}^{00}(z, s_{*0}) \tilde{f}_r^0, \quad \frac{\partial u_q^{010}(x, y)}{\partial x} = \sum_r R_{pr}^{00}(z, s_{*0}) \tilde{f}_r^0 \quad (p, q \sim x, y) \tag{34.95}$$

– вираз для компенсувального поля напружень у півпросторі з пружними сталими  $E_0$ ,  $\nu_0$ , коли у точці  $z_{*0} = s_{*0} e^{i\alpha}$  діє зосереджена сила  $P_x^0 + iP_y^0$  та крайова дислокація з вектором Бюргерса  $b_x^0 + ib_y^0$ . З урахуванням залежностей (34.93)

$$\begin{aligned}
\sigma_{pq}^{010}(x, y) &= \sum_r \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^8 b_{pqmr}^k J_k^*(x, y, s_{*0}) \tilde{f}_r^0, \\
\frac{\partial u_q^{010}(x, y)}{\partial x} &= \sum_r \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^8 b_{pmr}^k J_k^*(x, y, s_{*0}) \tilde{f}_r^0 \quad (p, q \sim x, y).
\end{aligned} \tag{34.96}$$

Отримані у цьому підпункті результати для включення всередині півплощини збігаються з виразами, одержаними у п. 30.6 методами теорії функцій комплексної змінної. Вони впливають теж з формул для однієї смуги, якщо у них перейти до границі  $H \rightarrow \infty$ .

### 34.5. Пакет шарів з тонкими міжфазними включеннями

Якщо включення розміщене на межі поділу двох шарів  $S_j$  та  $S_{j-1}$ , то методика розв'язування задачі в цілому зберігається. Певна різниця (так само як і у п. 22.4 під час вивчення аналогічної антиплоскої задачі) полягає у тому, що для побудови основних збурених розв'язків  $\hat{\Phi}^{0j}$  у  $S_j$  та  $\hat{\Phi}^{0,j-1}$  у  $S_{j-1}$  від включення на їхній межі використовується розв'язок (34.20) для стрибка напружень і переміщень на лінії поділу двох безмежних середовищ зі сталими  $E_j$ ,  $\nu_j$  та  $E_{j-1}$ ,  $\nu_{j-1}$ . Вирази, що стосуються у цьому розв'язку верхньої півплощини-

ни, віднесемо до основного збуреного розв'язку в  $S_j$ , а вирази, що відповідають у цьому нижній півплощині — до основного збуреного розв'язку в  $S_{j-1}$ .

Якщо  $i$  на верхньому і на нижньому краях смуги  $S_j$  знаходяться включення, то кожне з них дає свій незалежний внесок у розв'язок  $\hat{\Phi}^{0j}$ . Включення, які містяться всередині  $S_j$  дають свій внесок до  $\hat{\Phi}^{0j}$  за загальним правилом, сформульованим у п. 34.4.

Оскільки розв'язок (34.20) забезпечує умови ідеального механічного контакту на лінії розташування включення, то за відсутності включень всередині та на інших межах смуг, що пристають до цієї лінії, умови механічного контакту (34.35) повинні задовольняти лише збурені коригувальні розв'язки  $\hat{\Phi}^{1j}$ , тобто повинні виконуватися умови (34.52), які породжують систему рівнянь (34.53).

### 34.6. Пружна рівновага багат шарового середовища з розрізами

#### Постановка задачі

Розглянемо пружну рівновагу кусково-однорідної площини, складеної з двох смуг  $S_1$ ,  $S_1$  та двох півплощин  $S_3$ ,  $S_4$  з різних матеріалів з розрізами  $L' = \bigcup_{n=1}^N L'_n$ ,  $L'_n = [a_n^-; a_n^+]$  уздовж лінії  $L$  злуки смуг (рис. 34.23), якщо діють однорідне поле напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ,  $\sigma_{xxk}^\infty = p_k$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$  та зосереджені сили  $P_k = P_{xk} + iP_{yk}$  і моменти  $M_k$  у точках  $z_{*k}$  ( $k = 1 \dots 4$ ).

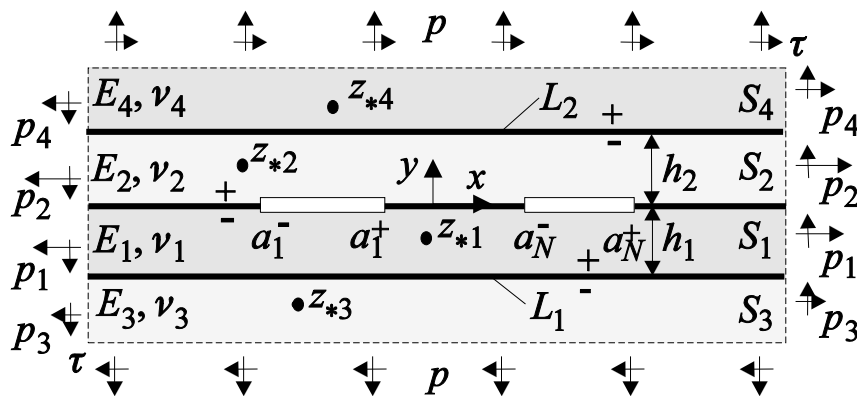


Рис. 34.23. Схема задачі

Вважаємо, що до берегів розрізів прикладені напруження

$$\sigma_{yyj}(x) - i\sigma_{xyj}(x) = \sigma^\pm(x) - i\tau^\pm(x) = \sigma_{j1}(x) - i\sigma_{j2}(x) \quad (x \in L', \quad j = 1, 2). \quad (34.97)$$

Після деформування тіла береги розрізів не контактують.

Крайові умови на лінії  $L$  запишуться у вигляді (30.1), (30.2):

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy1} - i\sigma_{xy1}) - (\sigma_{yy2} - i\sigma_{xy2}) &= f_1(x) - if_2(x) \equiv f_1^*(x), \\ (u'_{x1} + iu'_{y1}) - (u'_{x2} + iu'_{y2}) &= f_4(x) + if_5(x) \equiv f_4^*(x) \quad (x \in L), \end{aligned} \quad (34.98)$$



причому  $f_1^*(x) = f_4^*(x) = 0$ , якщо  $x \notin L'$ . У даному випадку функція стрибка  $f_1^*$  відома і дорівнює

$$f_1^*(x) = (\sigma^- - \sigma^+) - i(\tau^- - \tau^+) = (\sigma_{11} - \sigma_{21}) - i(\sigma_{12} - \sigma_{22}).$$

На лініях  $L_1, L_2$  контакту смуг з півплощинами виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yyj} - i\sigma_{xyj} = \sigma_{yyk} - i\sigma_{xyk} \cdot u'_{xj} + iu'_{yj} = u'_{xk} + iu'_{yk} \quad (z \in L_j: j = 1, 2; k = j + 2). \quad (34.99)$$

Цю задачу можна окремо розв'язувати загальним методом інтегральних перетворень Фур'є для багатошарових областей або скористатися загальними побудовами для пружного включення, вважаючи, що функція стрибка  $f_1^*(x)$  відома (зокрема дорівнює нулю, якщо на берегах тріщин навантаження симетричне). Подамо ще один спосіб, який поєднує апарат теорії функцій комплексної змінної та інтегралів Фур'є. Можливість такого підходу була підказана автору В.К.Опанасовичем.

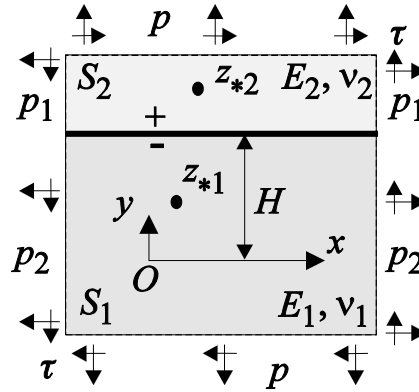


Рис. 34.24

### Напруження і переміщення на лінії поділу матеріалів $y = H$

Нехай у площині  $S_0$  пряма  $y = H$  є лінією поділу матеріалів двох півплощин  $S_1$  та  $S_2$  з різними пружними сталими (рис. 34.24). Якщо комплексні потенціали  $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$  залежностей (13.19) визначені в області  $S_k$  ( $k = 1, 2$ ), то за [635, 112] під функцією  $\Phi_k(z)$  в області  $S_l$  ( $l = 3 - k$ ) розумітимемо

$$\Phi_k(z) = -\bar{\Phi}_k(z - 2iH) - z\bar{\Phi}'_k(z - 2iH) - \bar{\Psi}_k(z - 2iH) \quad (z \in S_l; k = 1, 2; l = 3 - k). \quad (34.100)$$

Звідси, замінюючи  $z$  на  $\bar{z} + 2iH$  та приймаючи до відома, що якщо  $z \in S_l$ , то  $\bar{z} + 2iH \in S_k$  і навпаки, отримуємо

$$\Phi_k(\bar{z} + 2iH) = -\overline{\Phi_k(z)} - (\bar{z} + 2iH)\overline{\Phi'_k(z)} - \overline{\Psi_k(z)} \quad (z \in S_k; k = 1, 2; l = 3 - k).$$

Це дає остаточно

$$\Psi_k(z) = -\Phi_k(\bar{z} + 2iH) - \overline{\Phi_k(z)} - (\bar{z} + 2iH)\overline{\Phi'_k(z)} \quad (z \in S_k; k = 1, 2; l = 3 - k). \quad (34.101)$$

Підставляючи (34.101) у (13.19), одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_{yyk} - i\sigma_{xyk} &= \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z} + 2iH) + (z - \bar{z} - 2iH)\overline{\Phi'_k(z)}, \\ 2G_k(u'_{xk} + iu'_{yk}) &= \kappa_k \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z} + 2iH) - (z - \bar{z} + 2iH)\overline{\Phi'_k(z)} \quad (z \in S_k; k = 1, 2). \end{aligned} \quad (34.102)$$

Подамо функції  $\Phi_k(z)$ ,  $\Psi_k(z)$  у вигляді

$$\Phi_k(z) = \Gamma_k + S_{kk}(z) + \Phi_{0k}(z), \quad \Psi_k(z) = \Gamma'_k + R_{kk}(z) + R_k(z) + \Psi_{0k}(z) \quad (z \in S_k; \quad k=1,2),$$

де  $\Phi_{k0}(z)$ ,  $\Psi_{k0}(z)$  – голоморфні у  $S_k$  функції, що зникають на нескінченності;  $S_{kk}(z)$  – особливість функції  $\Phi_k(z)$ ;  $R_{kk}(z)$ ,  $R_k(z)$  – особливості функції  $\Psi_k(z)$  у  $S_k$ . Підставивши ці вирази у (34.100), отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \Gamma_{k^*} + S_{kk^*}(z) - \bar{\Phi}_{0k}(z - 2iH) - z\bar{\Phi}'_{0k}(z - 2iH) - \bar{\Psi}_{0k}(z - 2iH), \\ S_{kk^*}(z) &= -\frac{\kappa_k \phi_k P_k}{z - z_{*k}^*} + \frac{(z_{*k}^* - z_{*k}^*) \phi_k \bar{P}_k}{(z - z_{*k}^*)^2} - \frac{iM_k}{2\pi(z - z_{*k}^*)^2}, \end{aligned} \quad (34.103)$$

$$z_{*k}^* = \bar{z}_{*k} + 2iH, \quad \Gamma_{k^*} = -\Gamma_k - \bar{\Gamma}'_k \quad (z \in S_l; \quad k=1,2; \quad l=3-k);$$

$S_{kk^*}(z)$  – особливість функції  $\Phi_k(z)$  у області  $S_l$ .

### Система інтегральних рівнянь для системи тріщин у шаруватому середовищі

Повертаючись до розв'язування задачі для багат шарового середовища з тріщинами, подамо комплексні потенціали у вигляді

$$\Phi_k(z) = \Gamma_k^* + S_{kk}(z) + \Phi_{0k}^*(z) \quad (z \in S_k; \quad k = \overline{1,4}), \quad (34.104)$$

де  $\Phi_{0k}^*(z)$  – голоморфні у  $S_k$  функції, які можна записати у вигляді

$$\Phi_{0k}^*(z) = \Phi_{0k}(z) + A_{0k}(z) + B_{0k}(z) + S_{kk^*}(z) \quad (k=1,2),$$

$$\Phi_{0k}^*(z) = \Phi_{0k}(z) + S_{kk^*}(z) \quad (k=3,4), \quad A_{0k}(z) = \int_0^\infty A_k(\xi) e^{-i\xi z} d\xi, \quad (34.105)$$

$$B_{0k}(z) = \int_0^\infty B_k(\xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad \Gamma_k^* = \begin{cases} \Gamma_k = \frac{1}{4}(p + p_k) & (z \in S_k), \\ \Gamma_{k^*} = -\frac{3}{4}p + \frac{1}{4}p_k + i\tau & (z \notin S_k); \end{cases}$$

$\Phi_{0k}(z)$  ( $k=1\dots 4$ ) – невідомі поки що голоморфні в  $S_k$  функції;  $A_k(z)$ ,  $B_k(z)$  ( $k=1,2$ ) – функції впливу, що враховують присутність підкріплювальних півплощин;  $S_{kk}(z)$  та  $S_{kk^*}(z)$  – особливості функцій  $\Phi_k(z)$  та їхніх продовжень (для  $k=1, 3$  – через лінію  $L_1$ ; для  $k=2, 4$  – через  $L_2$ ) в сенсі рівності (34.103).

З умови однаковості напружень на лініях  $L_1$ ,  $L_2$  (34.99) з урахуванням (34.104)

$$\Phi_{0j}^+(z) + \Phi_{0k}^+(z) = \Phi_{0j}^-(z) + \Phi_{0k}^-(z) \quad (z \in L_j; \quad j=1,2; \quad k=j+2).$$

Розв'язуючи цю задачу лінійного спряження, знаходимо

$$\Phi_{0j}(z) = -\Phi_{0k}(z) \quad (j=1,2; \quad k=j+2). \quad (34.106)$$

З умови однаковості переміщень (34.99) з урахуванням (34.102) подібним чином знаходимо

$$\Phi_{0k}(z) = \begin{cases} c_k^* [A_{0j}(z) + S_{jj}(z)] - d_j^* S_{kk^*}(z) & (z \in S_k), \\ d_k^* [B_{0j}(z) + S_{jj^*}(z)] - c_j^* S_{kk}(z) & (z \in S_j) \end{cases} \quad (j=1,2; \quad k=j+2), \quad (34.107)$$

де

$$c_k^* = e_{kj}/c_{kj}, \quad d_k^* = e_{kj}/c_{jk}, \quad e_{kj} = G_k(1 + \kappa_j), \quad c_{kj} = G_k + \kappa_k G_j.$$

З умови збігу переміщень по обидва боки від ліній  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  у границі  $|x| \rightarrow \infty$  отримуємо зв'язки між пружними сталими та зусиллями на нескінченності

$$G_1(\kappa_i \Gamma_i + \Gamma_{i*}) = G_i(\kappa_1 \Gamma_1 + \Gamma_{1*}) \quad \text{або} \quad G_1 B_i = G_i B_1 \quad (i = 2, 3, 4). \quad (34.108)$$

Розв'язавши систему рівнянь (34.106), (34.107), матимемо

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} A_{01}(z) + c_1 B_{01}(z) + A_{11}(z) & (z \in S_1), \\ d_1 A_{01}(z) + B_{01}(z) + A_{12}(z) & (z \in S_3), \end{cases}$$

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} c_2 A_{02}(z) + B_{02}(z) + A_{21}(z) & (z \in S_2), \\ A_{02}(z) + d_2 B_{02}(z) + A_{22}(z) & (z \in S_4), \end{cases} \quad (34.109)$$

$$A_{j1}(z) = \Gamma_j + S_{jj}(z) + c_j S_{jj*}(z) + c_j^* S_{kk}(z), \quad c_j = 1 - d_k^*,$$

$$A_{j2}(z) = \Gamma_{j*} + S_{jj*}(z) + d_j S_{jj}(z) + d_j^* S_{kk*}(z), \quad d_j = 1 - c_k^*.$$

Граничні значення напружень та похідних від переміщень на лінії  $L$  дорівнюють

$$\sigma_{yyj}(x) - i\sigma_{xyj}(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \Phi_j(z) - \Phi_j(z + 2iH_j^*) - 2iH_j^* \Phi_j'(z) \right], \quad (34.110)$$

$$2G_j [u'_{xj}(x) + iu'_{yj}(x)] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \kappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(z + 2iH_j^*) + 2iH_j^* \Phi_j'(z) \right] \quad (x \in L),$$

або з урахуванням (34.109) –

$$\sigma_{yyj}(x) - i\sigma_{xyj}(x) = \int_0^\infty \left[ A_{j*}^+(\xi) e^{i\xi x} + A_{j*}^-(\xi) e^{-i\xi x} \right] d\xi + T_j^1(x), \quad (34.111)$$

$$2G_j [u'_{xj}(x) + iu'_{yj}(x)] = \int_0^\infty \left[ A_{j+2*}^+(\xi) e^{i\xi x} + A_{j+2*}^-(\xi) e^{-i\xi x} \right] d\xi + 2G_j T_j^2(x),$$

де

$$A_{1*}^-(\xi) = \left[ 1 - d_1 e^{-2\xi H_1} \right] A_1(\xi) + 2\xi H_1 c_1 \overline{B_1(\xi)},$$

$$A_{1*}^+(\xi) = -2\xi H_1 \overline{A_1(\xi)} + \left[ c_1 - e^{2\xi H_1} \right] B_1(\xi),$$

$$A_{2*}^-(\xi) = \left[ c_2 - e^{2\xi H_2} \right] A_2(\xi) - 2\xi H_2 \overline{B_2(\xi)},$$

$$A_{2*}^+(\xi) = 2\xi H_2 c_2 \overline{A_2(\xi)} + \left[ 1 - d_2 e^{-2\xi H_2} \right] B_2(\xi),$$

$$A_{3*}^-(\xi) = \left[ \kappa_1 + d_1 e^{-2\xi H_1} \right] A_1(\xi) - 2\xi H_1 c_1 \overline{B_1(\xi)},$$

$$A_{3*}^+(\xi) = 2\xi H_1 \overline{A_1(\xi)} + \left[ \kappa_1 c_1 + e^{2\xi H_1} \right] B_1(\xi),$$

$$A_{4*}^-(\xi) = \left[ \kappa_2 c_2 + e^{2\xi H_2} \right] A_2(\xi) + 2\xi H_2 \overline{B_2(\xi)},$$

$$A_{4*}^+(\xi) = -2\xi H_2 c_2 \overline{A_2(\xi)} + \left[ \kappa_2 + d_2 e^{-2\xi H_2} \right] B_2(\xi),$$

$$T_j^1(x) = A_{j1}(x) - A_{j2}(x + 2iH_j^*) - 2iH_j^* \overline{A'_{j1}(x)}, \quad H_j^* = (-1)^j H_j,$$

$$T_j^2(x) = \left[ \kappa_j A_{j1}(x) + A_{j2}(x + 2iH_j^*) + 2iH_j^* \overline{A'_{j1}(x)} \right] / 2G_j \quad (k, j = 1, 2).$$

Підставляючи вирази (34.111) в умови (34.98), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ A^1(\xi) e^{-i\xi x} - \overline{A^2(\xi) e^{i\xi x}} \right] d\xi &= f_1^*(t) + N^1(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_1^*(t) + N^1(t) \right] \left[ e^{i\xi t} e^{-i\xi x} + e^{-i\xi t} e^{i\xi x} \right] dt d\xi, \\ \int_0^{\infty} \left[ A^3(\xi) e^{-i\xi x} + \overline{A^4(\xi) e^{i\xi x}} \right] d\xi &= f_4^*(t) + N^2(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_4^*(t) + N^2(t) \right] \left[ e^{i\xi t} e^{-i\xi x} + e^{-i\xi t} e^{i\xi x} \right] dt d\xi, \end{aligned} \quad (34.112)$$

де

$$\begin{aligned} A^1(\xi) &\equiv A_{1*}^-(\xi) - A_{2*}^-(\xi) = \left[ 1 - d_1 e^{-2\xi H_1} \right] A_1(\xi) + 2\xi H_1 c_1 \overline{B_1(\xi)} - \\ &\quad - \left[ c_2 - e^{2\xi H_2} \right] A_2(\xi) + 2\xi H_2 \overline{B_2(\xi)}, \\ A^2(\xi) &\equiv \overline{A_{2*}^+(\xi)} - \overline{A_{1*}^+(\xi)} = 2\xi H_1 A_1(\xi) + \left[ e^{2\xi H_1} - c_1 \right] \overline{B_1(\xi)} + \\ &\quad + 2\xi H_2 c_2 A_2(\xi) + \left[ 1 - d_2 e^{-2\xi H_2} \right] \overline{B_2(\xi)}, \\ A^3(\xi) &\equiv \frac{A_{3*}^-(\xi)}{2G_1} - \frac{A_{4*}^-(\xi)}{2G_2} = \frac{1}{2G_1} \left\{ \left[ \kappa_1 + d_1 e^{-2\xi H_1} \right] A_1(\xi) - 2\xi H_1 c_1 \overline{B_1(\xi)} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2G_2} \left\{ \left[ \kappa_2 c_2 + e^{2\xi H_2} \right] A_2(\xi) + 2\xi H_2 \overline{B_2(\xi)} \right\}, \\ A^4(\xi) &\equiv \frac{\overline{A_{3*}^+(\xi)}}{2G_1} - \frac{\overline{A_{4*}^+(\xi)}}{2G_2} = \frac{1}{2G_1} \left\{ 2\xi H_1 A_1(\xi) + \left[ e^{2\xi H_1} + \kappa_1 c_1 \right] \overline{B_1(\xi)} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2G_2} \left\{ \left[ \kappa_2 + d_2 e^{-2\xi H_2} \right] \overline{B_2(\xi)} - 2\xi H_2 c_2 A_2(\xi) \right\}, \\ N^k(x) &= T_2^k(x) - T_1^k(x) \quad (k, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Під час побудови (34.112) використане співвідношення (13.99).

Прирівнявши у рівності (34.112) члени біля  $e^{i\xi x}$  та  $e^{-i\xi x}$  відповідно, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \left\{ A^1(\xi), A^2(\xi), A^3(\xi), A^4(\xi) \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ f_1^*(t) + N^1(t), -\overline{f_1^*(t) - N^1(t)}, \right. \\ &\quad \left. f_4^*(t) + N^2(t), \overline{f_4^*(t) + N^2(t)} \right\} e^{i\xi t} dt. \end{aligned} \quad (34.113)$$

Розв'язавши її стосовно  $A_j(\xi), \overline{B_j(\xi)}$  ( $j=1,2$ ) та підставляючи одержані значення в (34.110) і переходячи до границі  $y \rightarrow 0$  з урахуванням (13.102), отримаємо залежність напружень та похідних від переміщень на  $L$  від функцій стрибка  $f_r^*(x)$  ( $r=1,4$ ), зовнішнього навантаження, пружних сталей і геометрії пакету, аналогічну до виразів (34.38). Якщо вва-

жати функцію стрибка  $f_1^*(x)$  невідомою, то використання її в умовах взаємодії довільного типу дає можливість одержати інтегральні рівняння для їх визначення.

Стосовно розглядуваного випадку, підставляючи одержані вирази у крайову умову (34.97) за довільного значення  $j=1$  або  $j=2$ , одержимо визначальну систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} + (-1)^j \gamma_1 f_{j+3}(x) + \sum_{m=1, 2L'} \int k_m^{r1}(x, t) f_{m+3}(t) dt = F_r(x) \quad (34.114)$$

$$(x \in L'; \quad r=1, 2; \quad j=3-r).$$

Тут введені позначення

$$F_r(x) = F_r^1(x) + F_r^2(x), \quad F_r^1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2 f_r(t) - N_r^2(t) - \gamma_2 N_r^1(t)}{t-x} dt +$$

$$+ \frac{\sigma_{1j}(x) + m_{12}^+ f_j(x) + (-1)^r \left[ (1+l_1^-) T_{1j}(x) + m_{12}^+ N_j^1(x) \right]}{l_1^+},$$

$$F_r^2(x) = \int_{L'} k_j^{r2}(x, t) f_j(t) dt - \sum_{l=1, 2} \sum_{m=1, 2-\infty}^{+\infty} \int k_m^{r1}(x, t) N_m^n(t) dt \quad (n=1, 2; \quad l=3-n),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^{1r}(x, t), \quad k_2^{2r}(x, t) \\ k_2^{1r}(x, t), \quad k_1^{2r}(x, t) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} G_1^r(\xi) + G_2^r(\xi), \quad G_1^r(\xi) - G_2^r(\xi) \\ G_3^r(\xi) + G_4^r(\xi), \quad G_4^r(\xi) - G_3^r(\xi) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin[\xi(t-x)] \\ \cos[\xi(t-x)] \end{array} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

$$T_1^1(x) = T_{11}(x) + iT_{12}(x), \quad N^j(x) = N_1^j(x) + iN_2^j(x),$$

$$\Delta(\xi) = 2l_1^+ \left[ l_3^2 c_{12} c_{21} e^{2\xi H} + \Delta_0(\xi) \right], \quad H = H_1 + H_2, \quad \Delta_0(\xi) = l_3^2 \left[ (m_1^1 H_{21}(\xi) - m_2^1) H_2^+(\xi) - \right.$$

$$\left. - (m_1^2 H_{22}(\xi) - m_2^2) H_1^+(\xi) - l_1 l_2 H_3^+(\xi) + c_{12} c_{21} H(\xi) - g_0(\xi) \right],$$

$$G_1^1(\xi) = -l_3 \left[ (e_{12} H_{21}(\xi) + m_3^1) H_2^-(\xi) + (e_{21} H_{22}(\xi) + m_3^2) H_1^-(\xi) + m_2^- H_3^-(\xi) + m_1^+ H(\xi) \right] -$$

$$- 2l_1^+ \Delta_0(\xi), \quad G_2^1(\xi) = l_3 \left[ e_{21} H_{11}(\xi) H_2^+(\xi) + e_{12} H_{12}(\xi) H_1^+(\xi) - g_1(\xi) \right],$$

$$G_3^1(\xi) = l_3 \left[ (k_{12} H_{21}(\xi) + m_4^1) H_2^+(\xi) - (k_{21} H_{22}(\xi) + m_4^2) H_1^+(\xi) + m_2^+ H_3^+(\xi) + m_1^- H(\xi) + \right.$$

$$\left. + g_2(\xi) \right] - 2l_1^- \Delta_0(\xi), \quad G_4^1(\xi) = 0,$$

$$G_1^2(\xi) = l_4 \left[ - (e_{22} H_{21}(\xi) - m_5^1) H_2^-(\xi) - (e_{21} H_{22}(\xi) - m_5^2) H_1^-(\xi) + m_3^+ H_3^-(\xi) + m_4^- H(\xi) \right] -$$

$$- 2m_{12}^- \Delta_0(\xi), \quad G_2^2(\xi) = l_4 \left[ m_6^1 H_{11}(\xi) H_2^+(\xi) + m_6^2 H_{12}(\xi) H_1^+(\xi) + g_3(\xi) \right],$$

$$G_3^2(\xi) = l_4 \left[ (m_1 H_{21}(\xi) + m_2) H_2^+(\xi) + (m_3 H_{22}(\xi) + m_4) H_1^+(\xi) + m_3^- H_3^+(\xi) + m_4^+ H(\xi) + \right.$$

$$\left. + g_4(\xi) \right] - 2m_{12}^+ \Delta_0(\xi), \quad G_4^2(\xi) = l_4 m_5 \left[ H_{11}(\xi) H_2^-(\xi) - H_{12}(\xi) H_1^-(\xi) \right],$$

$$\begin{aligned}
g_0(\xi) &= l_1^2 H_{21}(\xi) H_{22}(\xi) + e_{12} e_{21} H_1(\xi) + m_7^2 H_{21}(\xi) + m_7^1 H_{22}(\xi) + m_6, \\
g_1(\xi) &= 2\xi H_1(\xi) (H_1 e_{12} + H_2 e_{21}) + m_3^2 H_{11}(\xi) + m_3^1 H_{12}(\xi), \\
g_2(\xi) &= 2 \left( l_1 H_{21}(\xi) H_{22}(\xi) + m_8^2 H_{21}(\xi) - m_8^1 H_{22}(\xi) + m_7 \right), \\
g_3(\xi) &= -2\xi H_1(\xi) (H_1 e_{22} + H_2 e_{21}) + m_5^2 H_{11}(\xi) + m_5^1 H_{12}(\xi), \\
g_4(\xi) &= 2 \left( l_1 H_{21}(\xi) H_{22}(\xi) - m_8 H_{21}(\xi) - m_9 H_{22}(\xi) - m_5 H_1(\xi) + m_{10} \right), \\
H(\xi) &= c_1 c_2 d_1 d_2 e^{-2\xi H}, \quad H_1(\xi) = 8\xi^2 H_1 H_2 c_1 c_2, \quad H_{1r}(\xi) = 4\xi H_r c_r, \quad H_{2r}(\xi) = 4\xi^2 H_r^2 c_r, \\
H_r^\pm(\xi) &= e^{2\xi H_r} \pm c_r d_r e^{-2\xi H_r}, \quad H_3^\pm(\xi) = c_1 d_1 e^{2\xi(H_2 - H_1)} \pm c_2 d_2 e^{-2\xi(H_2 - H_1)}, \\
m_1^\pm &= c_{21} \pm c_{12}, \quad m_2^\pm = l_1 \pm l_2, \quad m_3^\pm = l_2 \pm \kappa_2 l_1, \quad m_4^\pm = \kappa_2 c_{12} \pm c_{21}, \quad m_1^r = l_1 c_{jr}, \\
m_2^r &= c_r c_{rj} l_1 - d_r c_{jr} l_2, \quad m_3^r = d_1^r e_{rj}, \quad m_4^r = 2d_2^r G_j + d_1^r e_{rj}, \quad m_5^r = d_2^r e_{2j}, \\
m_6^r &= \frac{1}{2} e_{2r} (1 - \kappa_j), \quad m_7^r = c_r c_{rj}^2 + d_r l_1^2, \quad m_8^r = d_1^r G_r + d_2^r G_j, \quad m_0 = (d_2 + c_2 \kappa_2^2) G_1, \\
m_1 &= \kappa_2 l_1 - c_{21}, \quad m_2 = d_2^1 e_{22}^1 - 2d_1^1 \kappa_2 G_1, \quad m_3 = l_1 - c_{12}, \quad m_4 = d_2^2 e_{21}^2 - 2m_0, \\
m_5 &= \frac{1}{2} e_{21} (1 + \kappa_2), \quad m_6 = c_1 c_2 l_2^2 + d_1 d_2 l_1^2 + c_2 d_1 c_{21}^2 + c_1 d_2 c_{12}^2, \quad m_7 = d_1^1 d_2^2 G_1 - d_1^1 d_2^1 G_2, \\
m_8 &= d_2^2 G_2 + m_0, \quad m_9 = d_2^1 G_2 + d_1^1 G_1, \quad m_{10} = d_2^2 d_2^1 G_2 - d_1^1 m_0, \quad d_1^r = c_r + d_r, \quad d_2^r = c_r \kappa_r - d_r, \\
k_{rj} &= e_{rj}^r - 2G_j, \quad e_{rj}^r = G_r (1 - \kappa_j), \quad l_1 = G_2 - G_1 = G_{21}^-, \quad l_2 = \kappa_2 G_1 - \kappa_1 G_2, \quad l_3 = 1/(2G_1 G_2), \\
l_4 &= l_3/(2G_1), \quad \gamma_r = l_r^- / l_1^+, \quad l_1^\pm = G_1 G_2 (1/c_{12} \pm 1/c_{21}) = l_{12}^\pm, \\
m_{rj}^\pm &= G_r (c_{jr} \pm \kappa_j c_{rj}) / (2c_{12} c_{21}) \quad (r=1,2; \quad j=3-r).
\end{aligned}$$

Відзначимо, що функції  $F_r(x)$  мають конкретний механічний зміст

$$F_1(x) = \sigma_{xy}^0(x) / l_1^+, \quad F_2(x) = \sigma_{yy}^0(x) / l_1^+, \quad (34.115)$$

де  $\sigma_{xy}^0(x)$ ,  $\sigma_{yy}^0(x)$  – нормальні й дотичні напруження на лінії  $L$  за відсутності розрізів.

Отже, як випливає з (34.114) та (34.115), однорідний розв'язок  $\sigma_{xy}^0(x)$ ,  $\sigma_{yy}^0(x)$  для чотирикомпонентної площини за дії напружень на нескінченності, сил, моментів та зусиль на берегах тріщин будується у квадратурах.

Шукані функції  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$  повинні задовольняти звичні умови, що випливають з умови однозначності переміщень під час обходу навколо розрізу:

$$\int_{a_n^-}^{a_n^+} f_j(t) dt = 0 \quad (n = \overline{1, N}; \quad j = 4, 5). \quad (34.116)$$

Якщо зовнішнє навантаження прикладене лише до берегів розрізу, то рівняння (34.114) дещо спрощується

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} + (-1)^j \gamma_1 f_{j+3}(x) + \sum_{m=1,2} \int_{L'} k_m^{r1}(x,t) f_{m+3}(t) dt = F_r^*(x) \\
(x \in L'; \quad r=1,2; \quad j=3-r),
\end{aligned} \quad (34.117)$$

де

$$F_r(x) \sim F_r^*(x) = \frac{\sigma_{1j}(x) + m_{12}^+ f_j(x)}{l_1^+} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2 f_i(t)}{t-x} dt + \int_{L'} k_j^{r2}(x,t) f_j(t) dt.$$

Сингулярні рівняння (34.117) для випадку однакових матеріалів смуг  $S_1$ ,  $S_2$  та симетричності навантаження берегів тріщин  $\sigma_{1k}(x) = \sigma_{2k}(x)$  з точністю до позначень збігаються з отриманими у [1273].

Якщо  $H_1, H_2 \rightarrow \infty$ , то з (34.114) випливають рівняння (30.55) для системи розрізів на лінії поділу двох півплощин

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} + (-1)^j \gamma_1 f_{j+3}(x) = F_r(x) \quad (x \in L'; \quad r=1,2; \quad j=3-r). \quad (34.118)$$

У границі  $H_1 \rightarrow 0$  ( $H_2 \rightarrow 0$ ) певні частини кожного фредгольмового ядра  $k_j^{rl}(x,t)$  вироджуються у ядра Коші, які можна долучити до відповідних членів. В результаті отримують рівняння, тотожні (34.114) за умови збігу пружних сталей смуги  $S_1$  ( $S_2$ ) та пристайної до неї півплощини  $S_3$  ( $S_4$ ). Зокрема, якщо одночасно  $H_1, H_2 \rightarrow 0$ , то граничний перехід породжує рівняння (34.118), коли у ньому  $l_1^\pm \sim l_{12}^\pm$ ,  $l_2^\pm \sim m_{12}^\pm$  замінити на  $l_1^\pm \sim l_{34}^\pm$ ,  $l_2^\pm \sim m_{34}^\pm$  відповідно.

Якщо матеріал якоїсь із півплощин абсолютно податний (її модуль пружності нульовий), то це відповідає відсутності цієї півплощини. Якщо матеріал якоїсь із півплощин абсолютно жорсткий (безмежно великий модуль пружності), то це відповідає штивному защемленню пакету вздовж лінії контакту з цією півплощиною.

Якщо матеріали смуг однакові ( $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ), то  $\gamma_1 = 0$  і системи рівнянь (34.114), (34.117), (34.118) спрощуються відповідно до вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} + \sum_{m=1,2} \int_{L'} k_m^{r1}(x,t) f_{m+3}(t) dt = F_r(x) \quad (x \in L'; \quad r=1,2); \quad (34.119)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} = F_r^*(x) \quad (x \in L'; \quad r=1,2); \quad (34.120)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} = F_r(x) \quad (x \in L'; \quad r=1,2). \quad (34.121)$$

Ці рівняння можна розв'язувати, застосувавши викладені у розд. II методи.

Коефіцієнти інтенсивності напружень у цьому випадку мають зміст

$$K_1 - iK_2 \sim K_{1,1} - iK_{2,1} = -\frac{2\sqrt{2\pi}G_1}{1+\kappa_1} \lim_{x \rightarrow a+0} \left\{ \sqrt{x-a} [f_5(x) - if_4(x)] \right\}. \quad (34.122)$$

Якщо до того ж і матеріали півплощин однакові ( $E_3 = E_4$ ,  $\nu_3 = \nu_4$ ), то неважко, скориставшись (34.122) та властивістю неперервності переміщень, отримати граничні значення КІН, коли  $H \rightarrow 0$ :

$$\lim_{H \rightarrow 0} (K_1 - iK_2)_1 = \frac{G_1(1+\kappa_3)}{G_3(1+\kappa_1)} (K_1 - iK_2)_3. \quad (34.123)$$

Формула (34.123) дає граничні значення КІН для тріщини всередині смуги (матеріал 1);  $(K_1 - iK_2)_3$  характеризує КІН в однорідному середовищі з матеріалу 3 за такого навантаження, яке виникає, коли  $H = 0$ . Отже, впливом матеріалу смуги навіть безмежно малої висоти, якщо вона облямовує тріщину, нехтувати не можна.

У випадку геометричної ( $H_1 = H_2 = H$ ) і пружної ( $E_1 = E_2$ ,  $E_3 = E_4$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $\nu_3 = \nu$ ) симетрії задачі (за таких умов  $p_1 = p_2$ ,  $p_3 = p_4$ ) під час дії лише напружень на нескінченності та симетрії зусиль на берегах тріщини з (34.119) отримують систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r+3}(t) dt}{t-x} + \int_{L'} k_m^{r1}(x,t) f_{m+3}(t) dt = F_r(x) \quad (x \in L'; r=1,2), \quad (34.124)$$

$$F_1(x) = \sigma_{xy}^0(x)/l_1^+, \quad F_2(x) = \sigma_{yy}^0(x)/l_1^+.$$

Якщо зусилля симетричні стосовно осей  $x$  та  $y$ , то з (34.124) одержуємо  $f_1^*(x) = f_4(x) = 0$  та рівняння для визначення  $f_5(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_5(t) dt}{t-x} + \int_{L'} k_2^{21}(x,t) f_5(t) dt = F_2(x) \quad (x \in L'), \quad (34.125)$$

де

$$F_2(x) = F_2^1(x) + F_2^2(x), \quad F_2^1(x) = \frac{\sigma_{11}(x) + T_{11}(x)}{l_1^+} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2^2(t) + \gamma_2 N_2^1(t)}{t-x} dt,$$

$$F_2^2(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} [k_1^{22}(x,t) N_2^1(t) + k_2^{21}(x,t) N_2^2(t)] dt, \quad g_j(\xi) = \frac{q_j(\xi)}{q_0(\xi)},$$

$$\left\{ k_1^{11}(x,t), k_2^{21}(x,t), k_2^{22}(x,t) \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{q_1(\xi)}{q_0^+(\xi)}, \frac{q_1^+(\xi)}{q_0^-(\xi)}, \frac{q_2^+(\xi)}{q_0^-(\xi)} \right\} \sin[\xi(t-x)] d\xi,$$

$$q_0^{\pm}(\xi) = c_1 d_1 e^{-2\xi H} \pm 4\xi H c_1 - e^{2\xi H}, \quad q_1^{\pm}(\xi) = d_1 + c_1 \left( 1 \pm 4\xi H + 4\xi^2 H^2 - 2d_1 e^{-2\xi H} \right),$$

$$q_2^{\pm}(\xi) = d_1 - c_1 \left( \kappa_1 \pm 2\xi H (\kappa_1 - 1) - 4\xi^2 H^2 - d_1 (\kappa_1 - 1) e^{-2\xi H} \right),$$

$$l_1^+ = \frac{2G_1}{1+\kappa_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1-\kappa_1}{4G_1}, \quad c_1 = 1 - \frac{e_{31}}{c_{13}}, \quad d_1 = 1 - \frac{e_{31}}{c_{31}}.$$

Зокрема, якщо  $E_1 = E_3$ ,  $\nu_1 = \nu_3$ , звідси отримуємо  $c_1 = d_1 = 0$ ,  $k_j^{nm}(x,t) = 0$ .

### Аналіз числових результатів

**Загальні відомості для силової симетрії.** На основі рівняння (34.125) числові розрахунки здійснені для випадку пружної, силової та геометричної симетрії задачі стосовно одного не завантаженого ( $\sigma_{11} = 0$ ) розрізу вздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  за плоского напруженого стану для різних значень відносної жорсткості смуг та півплощин  $k = E_1/E_3$  та відносної висоти  $h = H/a$  смуги. Вивчений вплив однорідного поля розтягувальних напружень на нескінченності (рис. 34.25) та зосереджених сил  $\pm i P_j$ , прикладених у точках  $\pm i d_j$  ( $j = 1, 3$ ). Покладалося  $\nu_1 = \nu_3 = 1/3$ . Деякі результати обчислення КІН та розкриття тріщини  $\delta(x) = 2u_y(x)$  викладені у праці [980].

Застосування схеми методу ортогональних многочленів у поєднанні із запропонованою у § 6 методикою обчислення ядер типу інтегралів Фур'є для досягнення точності 1% ( $k = 10$ ;  $0,1$ ) дало можливість обмежитися у рядах поліномів Чебишева усього сімома чле-



нами у разі  $h = 0,1$  і лише трьома, коли  $h = 0,5$ . Значення параметрів  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $R$ , що використовувалися для обчислення коефіцієнтів матриці, обиралися  $R = 3,5/h$ ,  $N_2 = E(9 + M)$  ( $E(A)$  - ціла частина числа  $A$ ),  $N_3 = 70$  для  $k > 1$ . Якщо  $k \rightarrow 0$ , то  $\lim_{\xi \rightarrow 0} g_j(\xi) = \infty$  ( $j = 1, 2$ ) і зі зменшенням  $k$  (збільшенням жорсткості підкріплювальних півплощин) для забезпечення потрібної міри точності слід відповідно збільшувати  $N_3$ , тобто збільшувати кількість членів ряду, який апроксимує  $g_j(\xi)$ .

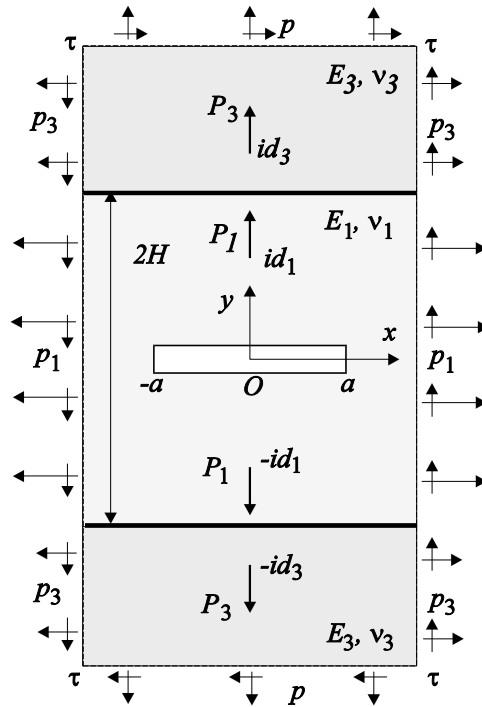


Рис. 34.25

У праці [1273] обчислені КІН аналогічного прикладу за використання квадратурних формул Гаусса – Чебишева для двох конкретних значень параметрів  $E_1, E_3, \nu_1, \nu_3$  плоскої деформації. Здійснення обчислень методом § 6 для цих же параметрів збіглося з даними цитованої праці у межах точності, яку забезпечує подана у [1273] графічна побудова.

**Розтяг на нескінченності.** Для механічної коректності задачі поряд з напруженням  $p$  слід також прикласти напруження  $\sigma_{xxk}^{\infty} = p_k$  ( $k = 1, 3$ ) відповідно до умови

$$G_3 [(\kappa_1 - 3)p + (1 + \kappa_1)p_1] = G_1 [(\kappa_3 - 3)p + (1 + \kappa_3)p_3].$$

На рис. 34.26 зображені графіки залежності безрозмірного КІН  $K_1/p\sqrt{\pi a}$  від  $h$  для окремих значень  $k$ . Чим більший модуль пружності підкріплювальних півплощин, тим менші  $K_1$  та  $\delta(x)$  за сталого значення  $h$ . Цей ефект підвищується зі зменшенням  $h$  (збільшенням  $a$ ) причому, якщо  $k < 1$  (півплощини жорсткіші за смугу), то зі зменшенням  $h$  значення КІН  $K_1$  та розкриття тріщини  $\delta(x)$  зменшуються; якщо ж  $k > 1$ , то  $K_1$  та  $\delta(x)$  зі зменшенням  $h$  зростають. Якщо  $h \rightarrow 0$ , то розрахунки підтверджують правильність формули (34.123).

Обчислення для розтягу на нескінченності (як і для зсуву) теж підтвердили формулу (34.123), яка у даному випадку набуває вигляду

$$\lim_{H \rightarrow 0} (K_1 - iK_2) = k\sqrt{\pi a} (p - i\tau).$$

**Зосереджені сили.** Дія зосереджених сил [980] досліджена для варіанту, коли діють дві співвісні протилежно спрямовані перпендикулярно до осі тріщин сили (у смузі чи півплощинах),  $P_j = P$ ,  $d_j = d$ . Якщо відносна відстань  $D = d/a < h$ , то сили діють у смузі. Обчислювався безрозмірний КІН  $K_1/K_1^0$ , де  $K_1^0$  стосується значення КІН біля тріщини у однорідній площині з властивостями смуги та такому ж розташуванні сил, тобто, коли  $E_1 = E_3$ ,  $\nu_1 = \nu_3$ :

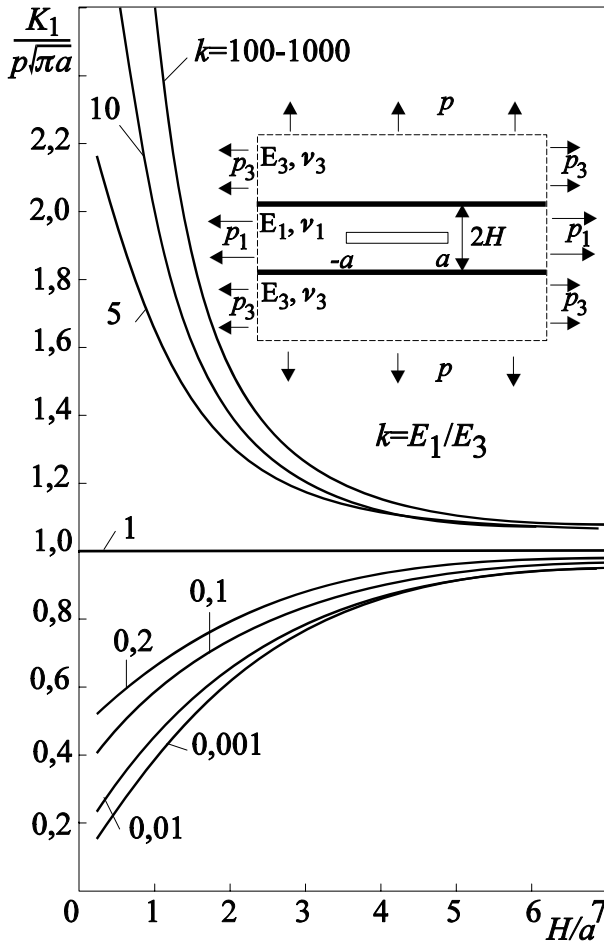


Рис. 34.26

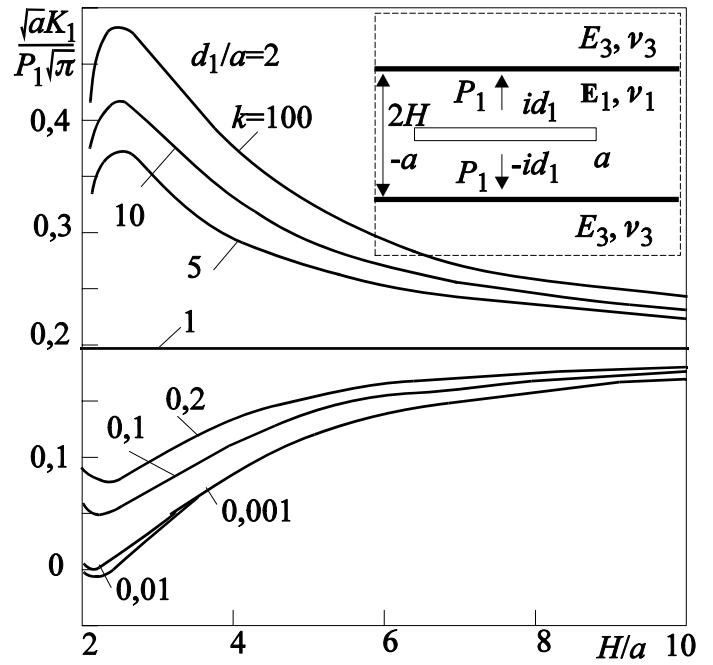


Рис. 34.27

$$K_1^0 = \frac{P}{\sqrt{\pi a} \kappa} \left[ \frac{\kappa}{(1+D^2)^{1/2}} + \frac{(\kappa-1)D^2}{(1+D^2)^{3/2}} \right], \quad D = \frac{d}{a}, \quad \kappa = \frac{\kappa_1 + 1}{\kappa_1 - 1}. \quad (34.126)$$

На рис. 34.27, 34.28 для низки значень параметра  $k$  відображена залежність  $K_1/K_1^0$  від  $h$  у випадках, якщо сили розміщені всередині смуги (рис. 34.27,  $D = 2$ ) та в півплощинах (рис. 34.28,  $D = 10$ ).

Якщо сили прикладені всередині смуги (див. рис. 34.27), то за умови  $E_1 > E_3$  зі зменшенням ширини смуги ( $H \geq d$ ) спостерігається спершу збільшення КІН до певного значення, а потім різке його зменшення. Коли треба рахуватися з  $K_1$ , то за таких обставин сили вигідніше прикладати або досить близько до тріщини, або на лініях злуки з півплощинами, аніж всередині смуги поблизу межі фаз. Якщо ж  $E_1 < E_3$ , то ефект буде зворотним – зі змен-

шенням  $h$  КІН спочатку зменшуватиметься, а потім збільшуватиметься. Внаслідок цього обчислене значення  $K_1$  може виявитися від'ємним. Це свідчить, що біля вістря тріщини діють напруження стиску. Очевидно, що запропонована постановка задачі не передбачає взаємного натиску берегів тріщини і отримані числові результати у цьому випадку не є коректними та вимагають уточнення постановки задачі.

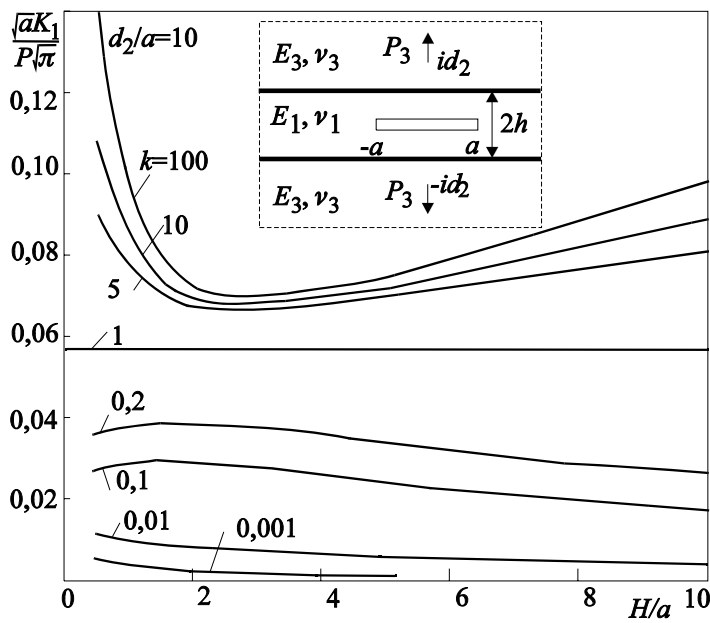


Рис. 34.28

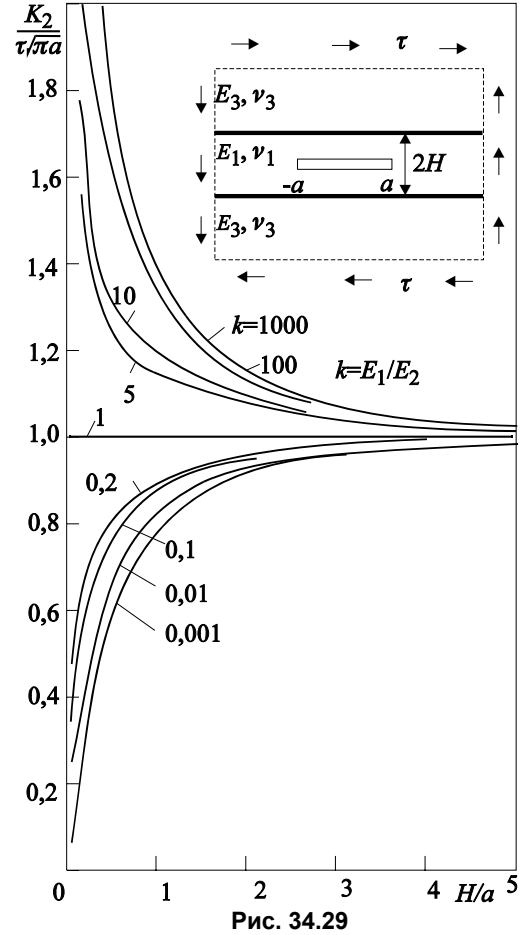


Рис. 34.29

Зменшення і навіть зміна знаку КІН, якщо підкріплювальні півплощини достатньо жорсткі, дають змогу визначити таку область точок прикладання сил, коли руйнування композиції не буде пов'язане з просуванням даної тріщини.

Вказане явище різкої зміни КІН за розташування сил поблизу межі поділу матеріалів згладжується з віддаленням точок прикладання сил від тріщини та межі фаз.

Якщо сили прикладені всередині півплощин (див. рис. 34.28), то за умови  $E_1 > E_3$  зі зменшенням  $h$  КІН спочатку зменшується, а потім підвищується. У цьому випадку існує оптимальна висота смуги  $2H$ , за якої при заданих  $k > 1$ ,  $d$  значення КІН мінімальне. Якщо ж  $E_1 < E_3$ , то ефект протилежний: за певної ширини смуги КІН досягає максимуму.

З проходженням точок прикладання сил через межу поділу матеріалів з однаковими коефіцієнтами Пуассона значення КІН змінюється неперервно, хоча й не гладко.

За умови  $k \geq 1000$  підкріплювальні півплощини (якщо вони не завантажені) можна вважати відсутніми. Якщо  $k \rightarrow 0$ , то за прикладених всередині півплощин сил КІН  $K_1$  разом з розкриттям тріщини теж прямує до нуля.

Профіль деформованої тріщини та її розкриття істотно залежать від  $k$  та розташування сил.

**Поперечний зсув на нескінченності.** Для дослідження впливу поперечного зсуву на нескінченності  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$  (див. рис. 34.25) доцільно використовувати рівняння (34.124), де  $F_1(x) = \tau/l_1^+$ ,  $F_2(x) = 0$ . Звідси  $f_5(x) = 0$ ,  $K_1 = 0$ , а для визначення функції стрибка  $f_4(x)$  та КІН  $K_2$  залишається рівняння (34.124), коли  $j = 1$ . Числові результати для безрозмірного КІН  $K_2/\tau\sqrt{\pi a}$  (рис. 34.29) одержані за тих же допущень, що й для розтягу. Вони мають якісно таке ж поведження, як і  $K_1/p\sqrt{\pi a}$ : за меншої жорсткості матеріалу смуги КІН не перевищують відповідних значень, отриманих для розрізів у однорідній пластинці, за більшої жорсткості матеріалу – вони більші від величин, даних розв'язком для однорідної пластинки, але менші від значень, що на основі формули (34.123) дорівнюють  $G_1(1+\kappa_3)/[G_3(1+\kappa_1)]$ .

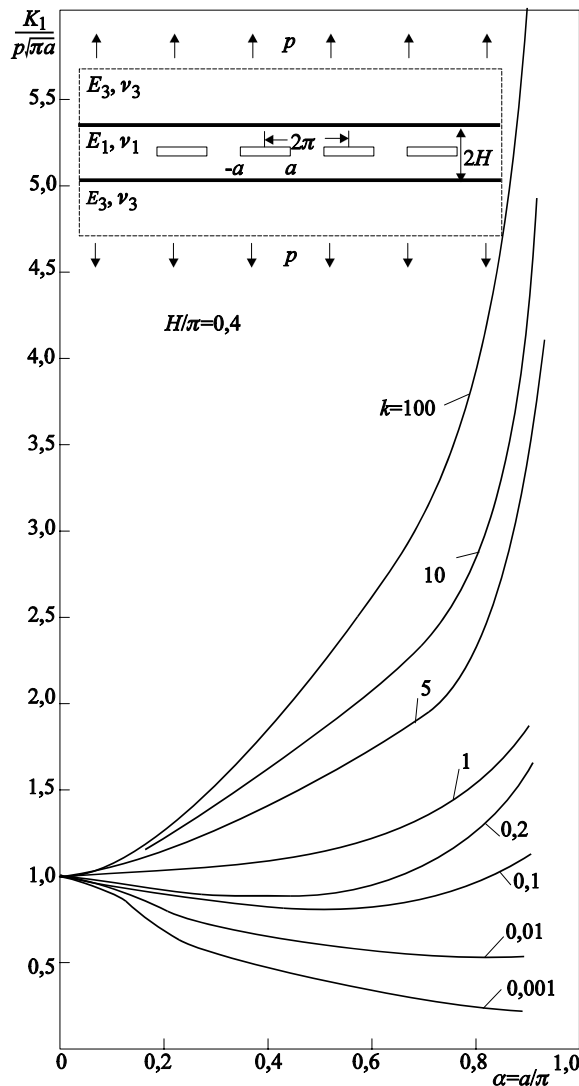


Рис. 34.30

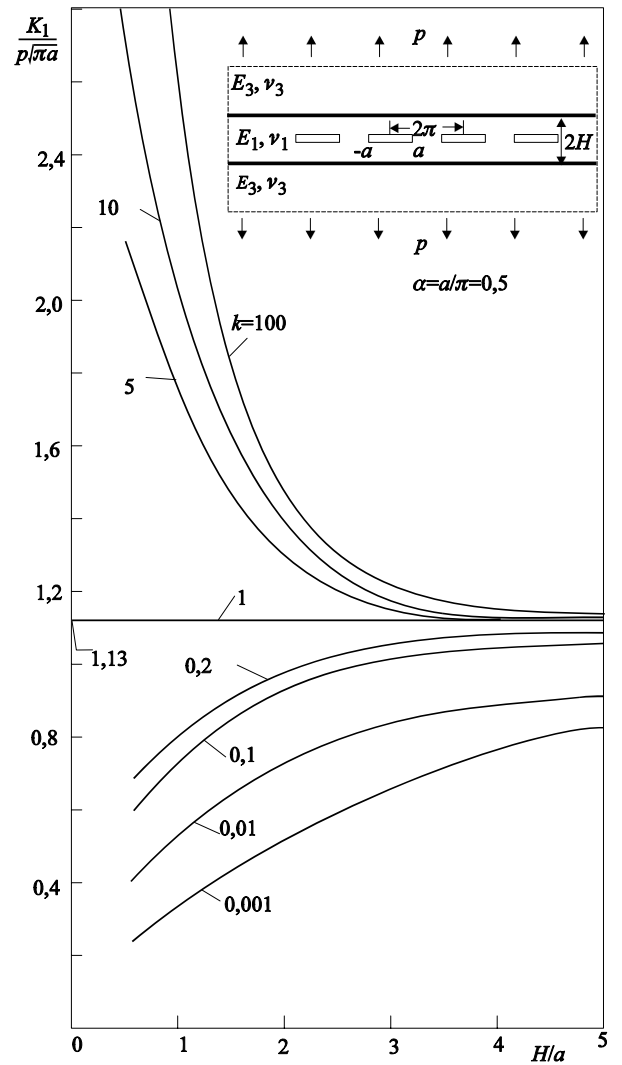


Рис. 34.31

Праця [1011] містить застосування одержаних тут результатів до оцінки міцності зварних з'єднань трубопроводів.

**Періодична задача для співвісних розрізів.** Одержані вище результати легко узагальнюються на випадок періодичної задачі для шаруватого середовища з розрізами [981], коли тріщини та зосереджені сили повторюються вздовж осі  $x$  з періодом  $d_x = 2\pi$ . Не заглиблюючись тут у техніку побудови визначальних рівнянь (див. § 8) вкажемо, що загальне рівнян-

ня (34.114) зберігається за умови заміни ядра Коші  $1/(t-x)$  на ядро Гільберта  $\operatorname{ctg}[(t-x)/2]$  та врахування повторюваності зосереджених чинників. Якщо довжина тріщин у групі періоду разом з шириною смуг зменшується до нуля (фіксована безрозмірна довжина тріщин), то з цих рівнянь випливають співвідношення (34.114) неперіодичної задачі. Числовий аналіз з використанням методу ортогональних многочленів та методики п. 8.3 це підтвердив.

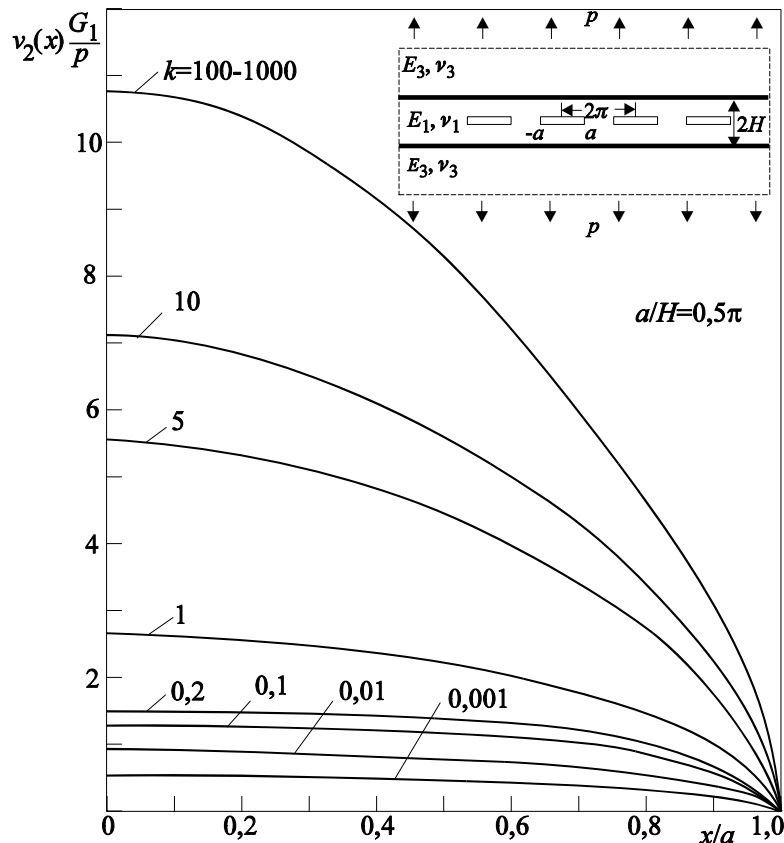


Рис. 34.32

Рівняння періодичної задачі досліджувалися стосовно одної щілини у періоді повторюваності завдовжки  $2a$  у випадку плоского напруженого стану,  $\nu_1 = \nu_3 = 1/3$  – для розтягу на нескінченності за геометричної ( $H_1 = H_2 = H$ ) і пружної ( $E_1 = E_2, E_3 = E_4, \nu_1 = \nu_2, \nu_3 = \nu_4$ ) симетрії задачі. Тоді також  $p_1 = p_2, p_3 = p_4$ . Для забезпечення точності обчислень в 1% виявилось достатнім взяти 4...10 перших ненульових членів розвинення функції стрибка  $f_5(x)$ .

На рис. 34.30 зображена залежність безрозмірного КІН  $K_1/p\sqrt{\pi a}$  від відносної довжини тріщини  $\alpha \equiv 2a/d_x = a/\pi$  для низки значень  $k$ , коли відносна ширина смуги  $h \equiv H/a = d_x/5 = 0,4\pi$ . Чим менший модуль пружності підкріплювальних півплощин, тим більшим є значення КІН. Зі збільшенням півдовжини тріщини  $a$  (зменшенням відстані між щілинами) вплив пружних властивостей півплощин підсилюється. У границі, коли  $a \rightarrow \pi$ , отримуємо  $K_1 \rightarrow \infty$ . Якщо ж  $a \rightarrow 0$ , то  $K_1 \rightarrow p\sqrt{\pi a}$  – до величини, властивої одному розрізу у безмежній площині з пружними властивостями смуги, які за такого навантаження не мають значення. Результати, відображені на кривій  $k=1$  з точністю до 1% збігаються зі значеннями, визначеними формулою  $K_1^0 = p\sqrt{2\pi \operatorname{tg}(a/2)}$  для повторюваних співвісних тріщин у безмежній однорідній площині.

У випадку, коли довжина тріщин прямує до нуля і пропорційно до неї зменшується також і ширина смуги (зафіксоване значення параметра  $h$ ), отримують значення для одної тріщини  $2a$  у підкріпленій двома півплощинами смугі завширшки  $2H$ . Цей зв'язок між розв'язками задачі для скінченної кількості тріщин та відповідної періодичної задачі проявляється і на аналітичному рівні: з інтегральних рівнянь періодичної задачі в границі випливають інтегральні рівняння задачі неперіодичної.

На рис. 34.31 поміщена залежність  $K_1/p\sqrt{\pi a}$  від  $h$  для  $\alpha = 0,5$  та деяких значень параметра  $k$ . Якщо  $k > 1$ , то зі зменшенням  $h$  КІН збільшується; якщо ж  $k < 1$  – навпаки, зі зменшенням  $h$  зменшується також і КІН  $K_1$ .

Так само, як на КІН механічні та геометричні параметри задачі впливають і на переміщення берегів тріщини (рис. 34.32). Збільшення відносної жорсткості півплощин так само, як і зближення тріщин, збільшує їхнє розкриття.

### § 35. Напружено-деформований стан анізотропного середовища з тонкими включеннями

#### 35.1. Постановка задачі про тонке включення на прямій межі поділу матеріалів

Розглядається плоска задача теорії пружності для двох анізотропних середовищ (півплощин) [16\*, 513, 514, 1005], коли на лінії  $L = L' \cup L''$  злуки матеріалів (рис. 35.1), які відповідають півплощинам  $S_2$  ( $\text{Im } z > 0$ ) і  $S_1$  ( $\text{Im } z < 0$ ) розміщена система з  $N+1$  включень малої товщини  $2h(x)$ . Внаслідок тонкості їх можна моделювати стрибком векторів напружень і переміщень на серединній лінії  $L' = \bigcup_{p=0}^N L'_p$ ,  $L'_p = [a_p^-, a_p^+]$ .

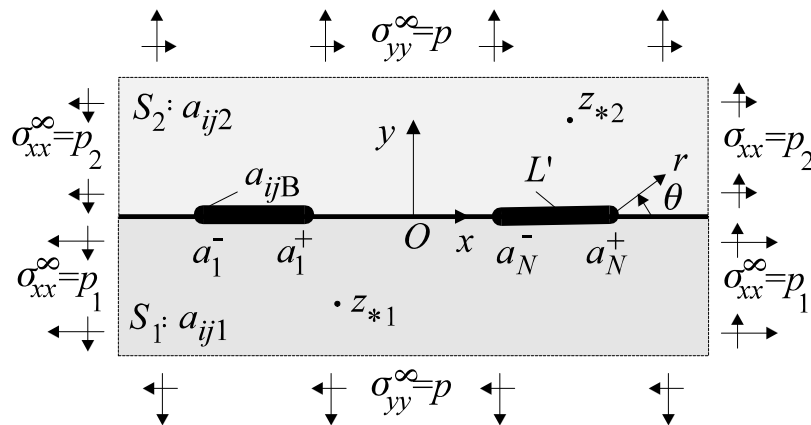


Рис. 35.1. Схема задачі

Пружні сталі (див. п. 13.4) матеріалів і включень позначимо  $a_{ijk}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ;  $k = 1, 2, B$ ), причому властивості кожного із включень можуть відрізнятися між собою. Зовнішнє навантаження задане рівномірно розподіленими на безмежності зусиллями  $\sigma_{yuk}^{\infty} = p$ ,  $\sigma_{xxk}^{\infty} = p_k$ ,  $\sigma_{xyk}^{\infty} = \tau$  ( $k = 1, 2$ ), які задовольняють аналогічні до (30.11) умови

$$a_{1m1}p_1 + a_{2m1}p + a_{6m1}\tau = a_{1m2}p_1 + a_{2m2}p + a_{6m2}\tau \quad (m=1,6)$$

$$\left( \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} \Big|_{x=\infty}, \frac{\partial u_{y1}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial u_{y2}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} \quad (y=0); \right. \quad (35.1)$$

$$\left. \frac{\partial u_{xk}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = a_{11k}p_k + a_{12k}p + a_{16k}\tau, \frac{\partial u_{yk}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{1}{2}(a_{16k}p_k + a_{26k}p + a_{66k}\tau) \right),$$

а також зосередженими силами  $\mathbf{P}^k = P_1^k + iP_2^k$ , крайовими дислокаціями з векторами Бюргерса  $b^k = b_1^k + ib_2^k$ , силовими і дислокаційними диполями, прикладеними в точках  $z_{*k} \in S_k$  ( $k=1,2$ ). Жорстке повертання на нескінченності відсутнє. Тут і надалі індекси  $k$  вказують належність відповідних величин до півплощини  $S_k$  ( $k=1,2$ ) або до включення ( $k=B$ ).

У випадку плоского напруженого стану за відсутності масових сил компоненти тензора напружень визначаються формулами (13.29), де  $F \sim F^k$  – функція напружень. Якщо корені  $\mu_i^k$  характеристичного рівняння різні, то справджуються вирази (13.31), (13.32).

Розглянемо три види вектор-рядків стану

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \left\| \sigma_{yy}(z), \sigma_{xy}(z), \frac{\partial}{\partial x} u_x(z), \frac{\partial}{\partial x} u_y(z) \right\|, \quad \boldsymbol{\sigma}_0(z) = \left\| \sigma_{yy}(z), \sigma_{xy}(z), \sigma_{xx}(z) \right\|,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*(z) = \left\| \sigma_{yy}(z), \sigma_{xy}(z), \sigma_{xx}(z), \frac{\partial}{\partial x} u_x(z), \frac{\partial}{\partial x} u_y(z) \right\|;$$

функцій стрибка

$$\mathbf{f}(x) = \left\| f_1(x), f_2(x), f_4(x), f_5(x) \right\|,$$

причому

$$\{\mathbf{f}(x), f_r(x)\} \sim \{\mathbf{f}^p(x), f_r^p(x)\} \quad (r=1,2,4,5),$$

якщо  $x \in L'_p$ ;  $\mathbf{f}(x) = 0$  якщо  $x \notin L'$ ; одиничну матрицю  $\mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|$  та матриці

$$\mathbf{M}^{kj} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -\mu_1^k & p_1^k & q_1^k \\ 1 & -\mu_2^k & p_2^k & q_2^k \\ 1 & -\bar{\mu}_1^j & \bar{p}_1^j & \bar{q}_1^j \\ 1 & -\bar{\mu}_2^j & \bar{p}_2^j & \bar{q}_2^j \end{array} \right\|, \quad \mathbf{M}_0^{kj} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -\mu_1^k & (\mu_1^k)^2 \\ 1 & -\mu_2^k & (\mu_2^k)^2 \\ 1 & -\bar{\mu}_1^j & (\bar{\mu}_1^j)^2 \\ 1 & -\bar{\mu}_2^j & (\bar{\mu}_2^j)^2 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{M}_*^{kj} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -\mu_1^k & (\mu_1^k)^2 & p_1^k & q_1^k \\ 1 & -\mu_2^k & (\mu_2^k)^2 & p_2^k & q_2^k \\ 1 & -\bar{\mu}_1^j & (\bar{\mu}_1^j)^2 & \bar{p}_1^j & \bar{q}_1^j \\ 1 & -\bar{\mu}_2^j & (\bar{\mu}_2^j)^2 & \bar{p}_2^j & \bar{q}_2^j \end{array} \right\|,$$

$$\mathbf{K} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|, \quad p_m^k = a_{11k}(\mu_m^k)^2 - a_{16k}\mu_m^k + a_{12k}, \quad q_m^k = a_{12k}\mu_m^k - a_{26k} + a_{22k}/\mu_m^k$$

$$(m, k=1,2).$$

Тут і надалі у цьому параграфі  $\mu_m^k$  – корені (з додатною уявною частиною) характеристичного рівняння (13.48); нижній індекс після коми означає диференціювання за наступною після коми змінною; за одночасної присутності індексів  $k, l$  в одному виразі вважаємо, що

$k, l = 1, 2$ ;  $l = 3 - k$ ;  $r = 1, 2, 4, 5$ . За розгляду лише одного включення ( $N = 0$ ) індекс  $p = 0$ , що характеризує його номер, для спрощення згадуватися не буде.

З урахуванням виразів (13.32) маємо

$$\sigma_0(z) = \sigma_0^0(z) + \Phi_{kk}(z^k) \mathbf{M}_0^{kk} \quad (z \in S_k; z^k = x + \mu^k y, k = 1, 2); \quad (35.2)$$

$$\sigma(z) = \sigma^0(z) + \Phi_{kk}(z^k) \mathbf{M}^{kk}, \quad \sigma_*(z) = \sigma_*^0(z) + \Phi_{kk}(z^k) \mathbf{M}_*^{kk} \quad (z \in S_k; k = 1, 2), \quad (35.3)$$

де

$$\sigma^0(z) = \left\| \sigma_{yy}^0(z), \sigma_{xy}^0(z), \frac{\partial}{\partial x} u_x^0(z), \frac{\partial}{\partial x} u_y^0(z) \right\|, \quad \sigma_0^0(z) = \left\| \sigma_{yy}^0(z), \sigma_{xy}^0(z), \sigma_{xx}^0(z) \right\|,$$

$$\sigma_*^0(z) = \left\| \sigma_{yy}^0(z), \sigma_{xy}^0(z), \sigma_{xx}^0(z), \frac{\partial}{\partial x} u_x^0(z), \frac{\partial}{\partial x} u_y^0(z) \right\|,$$

$$\Phi_{kj}(z^k) = \left\| \varphi_{1k}(z_1^k), \varphi_{2k}(z_2^k), \overline{\varphi_{1j}(z_1^k)}, \overline{\varphi_{2j}(z_2^k)} \right\|;$$

верхнім індексом "0" відзначені величини, що стосуються однорідного розв'язку (лінія стрибка відсутня).

Якщо зовнішнім навантаженням є лише однорідне поле напружень на нескінченності, то

$$\sigma^0(z) = \sigma^\infty = \left\| p, \tau, \frac{\partial}{\partial x} u_{xk}, \frac{\partial}{\partial x} u_{yk} \right\|, \quad \sigma_0^0(z) = \sigma_0^\infty = \left\| p, \tau, p_k \right\|,$$

$$\sigma_*^0(z) \equiv \sigma_*^\infty = \left\| p, \tau, p_k, \frac{\partial}{\partial x} u_{xk}, \frac{\partial}{\partial x} u_{yk} \right\|, \quad (35.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{xk} = a_{11k} p_k + a_{12k} p + a_{16k} \tau, \quad \frac{\partial}{\partial x} u_{yk} = \frac{1}{2} (a_{16k} p_k + a_{26k} p + a_{66k} \tau) \quad (z \in S_k; k = 1, 2).$$

Граничне значення вектора стану на лінії поділу матеріалів  $y = 0$  ( $z = z^1 = z_m^1 = x$ ) дорівнює

$$\sigma^\pm(x) = \sigma^0(x) + \left\| \varphi_{1k}^\pm(x), \varphi_{2k}^\pm(x), \overline{\varphi_{1k}^\mp(x)}, \overline{\varphi_{2k}^\mp(x)} \right\| \mathbf{M}^{kk}, \quad k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (35.5)$$

Тут і надалі відповідно до виразу у фігурних дужках значенню  $k = 2$  відповідає верхній знак, а  $k = 1$  – нижній.

Крайова умова (30.1) для включення в ізотропному кусково-однорідному середовищі у даному випадку набуває вигляду

$$\sigma^-(x) - \sigma^+(x) = \mathbf{f}(x) \quad (x \in L). \quad (35.6)$$

### 35.2. Прямолінійне включення в однорідному середовищі

У цьому пункті обмежимося випадком однорідної матриці. Параметри матеріалів, корені характеристичного рівняння тощо, відзначені індексами  $k = 1$  і  $k = 2$ , у цьому випадку збігаються ( $\mu_m^k \sim \mu_m$ ,  $a_{ijk} \sim a_{ij}$ ). З урахуванням цього зауваження і формули (35.3) умова (35.6) набуде вигляду

$$\left\| \varphi_{11}^+(x) - \varphi_{11}^-(x), \varphi_{21}^+(x) - \varphi_{21}^-(x), \overline{\varphi_{11}^-(x)} - \overline{\varphi_{11}^+(x)}, \overline{\varphi_{21}^-(x)} - \overline{\varphi_{21}^+(x)} \right\| \mathbf{M}^{11} = -\mathbf{f}(x) \quad (35.7)$$

$$(x \in L).$$

За допомогою функції  $\mathbf{F}(z^k) = \Phi_{11}^*(z^k) \mathbf{K} \mathbf{M}^{11}$ , де



$$\Phi_{kj}^*(z^k) = \left\| \varphi_{1k}(z_1^k), \varphi_{2k}(z_2^k), \overline{\varphi_{1j}(z_1^k)}, \overline{\varphi_{2j}(z_2^k)} \right\|$$

рівність (35.7) переписеться так:

$$\mathbf{F}^-(x) - \mathbf{F}^+(x) = \mathbf{f}(x) \quad (x \in L)$$

і розв'язок цієї задачі лінійного спряження, який зникає на нескінченності, має вигляд

$$\mathbf{F}(z^1) = \frac{i}{2} \mathbf{t}(z^1), \quad \mathbf{t}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\mathbf{f}(t)}{t-z} dt = \sum_{p=1}^N \mathbf{t}^p(z), \quad \left\{ \mathbf{t}^p(z), t_r^p(z) \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{L'_p} \frac{\left\{ \mathbf{f}(t), f_r(t) \right\}}{t-z} dt. \quad (35.8)$$

Звідси  $\Phi_{11}^*(z^k) = \frac{i}{2} \mathbf{t}(z^k) [\mathbf{M}^{11}]^{-1} \mathbf{K}$ , причому перші дві компоненти чотиривимірного вектора  $\Phi_{11}^*(z^1) \in$  шуканими потенціалами  $\varphi_{m1}(z_m^1)$  ( $m=1,2$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_{mj}(z_m^k) &= \frac{i}{2} \sum_r t_r(z_m^k) [\mathbf{M}^{ij}]_{rm}^{-1} = \frac{i}{2} t(z_m^k) M_{jj}^m = \\ &= \frac{1}{2i} \left[ t_1(z_m^1) \tilde{q}_m^1 + t_2(z_m^1) \tilde{p}_m^1 - t_4(z_m^1) \tilde{\mu}_m^1 + t_5(z_m^1) \tilde{l}_m^1 \right], \end{aligned} \quad (35.9)$$

де  $[\mathbf{A}]^{-1}$  визначає операцію обернення матриці  $\mathbf{A}$ ;  $M_{kj}^p$  –  $p$ -ий стовпчик матриці  $[\mathbf{M}^{kj}]^{-1} \mathbf{K}$ , причому множення правобіч на  $\mathbf{K}$  не змінює перші два стовпчики довільної матриці;

$$\mathbf{M}_{kk}^m = \left\| -\tilde{q}_m^k, -\tilde{p}_m^k, \tilde{\mu}_m^k, -\tilde{l}_m^k \right\|^T, \quad \tilde{d}_m^k = d_m^k / [2\mu_m^k p_m^k - 2q_m^k], \quad d_m^k = \left\{ q_m^k, p_m^k, \mu_m^k, 1 \right\}; \quad (35.10)$$

$d_m^k$  – означає будь-яку з величин, записаних у фігурних дужках; символ  $\mathbf{t}$  означає транспонування матриці.

Вважатимемо, що зовнішнє навантаження відсутнє і  $f_r(t) = f_r \delta(t)$ . Тоді з урахуванням властивостей дельта-функції (13.95) на основі (35.8)

$$\begin{aligned} t_r(z_m^1) &= -f_r / (\pi z_m^1), \quad \mathbf{t}(z_m^1) = -\mathbf{f} / (\pi z_m^1) \equiv -\|f_1, f_2, f_4, f_5\| / (\pi z_m^1), \\ \varphi_{mj}(z_m^k) &= \frac{\mathbf{fM}_{jj}^m}{2\pi i z_m^k} = \frac{A_m^j}{z_m^1}, \quad A_m^j = \frac{\mathbf{fM}_{jj}^m}{2\pi i} = \frac{-f_1 \tilde{q}_m^j - f_2 \tilde{p}_m^j + f_4 \tilde{\mu}_m^j - f_5 \tilde{l}_m^j}{2\pi i}. \end{aligned} \quad (35.11)$$

Згідно з механічним змістом функцій стрибка цей розв'язок відповідає зосередженій силі  $\mathbf{P} \equiv P_1 + iP_2 = f_2 + if_1$  і крайовій дислокації  $\mathbf{b} \equiv b_1 + ib_2 = f_4 + if_5$ , локалізованим у початку системи координат. Якщо вважати, що ці зосереджені чинники містяться в точці  $z_*$  комплексної площини  $z$ , то відповідний розв'язок можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_{mj}(z_m^k) &= G_{mj}(z_m^k) \equiv -A_m^j P_{0k} \left(0, z_m^k\right), \quad P_{0k} \left(0, z_m^k\right) = \left(z_{*m}^k - z_m^k\right)^{-1}, \\ z_{*m}^k &= x_* + \mu_m^k y_* \sim x_* + \mu_m y_*. \end{aligned} \quad (35.12)$$

Якщо припустити, що  $f_1 = 0, f_2 = 0, f_5 = 0, z_* = 0$  і  $f_4 = b$ , то на основі виразів (35.12) і (35.3) будуть отримані співвідношення для крайової дислокації  $b \sim b_x$  в однорідному анізотропному середовищі ( $a_{ij} \sim s_{ij}$ ).

У загальному випадку за наявності напружень на нескінченності, зосередженої сили  $f_2 + if_1$  і дислокації  $f_4 + if_5$  в точці  $z_*$ , а також лінії стрибка  $L'$  маємо

$$\sigma(z) = \sigma^0(z) + \Phi_{11}(z^1) \mathbf{M}^{11} = \sigma^0(z) + \left\| \varphi_{11}(z_1^1), \varphi_{21}(z_2^1), \overline{\varphi_{11}(z_1^1)}, \overline{\varphi_{21}(z_2^1)} \right\| \mathbf{M}^{11}, \quad (35.13)$$

де функції  $\varphi_{m1}(z_m^1)$  визначаються виразом (35.9), а

$$\sigma^0(z) = \sigma^\infty(z) + \mathbf{G}_{11}(z^1)\mathbf{M}^{11}, \quad \mathbf{G}_{kj}(z^k) = \left\| G_{1k}(z_1^k), G_{2k}(z_2^k), \overline{G_{1j}(z_1^k)}, \overline{G_{2j}(z_2^k)} \right\|.$$

Силовий або дислокаційний диполь інтенсивності  $M_{ij}$  є парою спрямованих вздовж осі  $x_i$  сил  $P_i$  (див. рис. 32.14) або дислокацій зі складовими вектора Бюргерса  $b_i$  за умови, що їхні величини  $P_i$ ,  $b_i$  прямують до безмежності, а орієнтовані вздовж осі  $x_j$  плечі  $c_j$  прямують до нуля так, що добуток  $M_{ij} \equiv P_i c_j = \text{const}$  ( $M_{ij} \equiv b_i c_j = \text{const}$ ).

Якщо позначити  $f(Q_i)$  розв'язок для відповідного базового чинника (сили чи дислокації)  $Q_i$  в точці  $z_{*1} = x_{*1} + iy_{*1} \equiv x_{*1} + iy_{*1}$ , то розв'язок для відповідного диполя  $M_{ij}$  в цій же точці можна подати у вигляді

$$f_d(M_{ij}) = \lim_{c_j \rightarrow 0} \left[ -c_j \frac{\partial f(Q_i)}{\partial x_j} \right] \quad (x_1 \sim x_1, x_2 \sim y_1).$$

Тоді, оскільки для сили і дислокації в анізотропному матеріалі розв'язок задається формулою (35.12)  $G_{mj}(z_m^k) \equiv -A_m^j P_{0k}(0, z_m^k)$ , то для відповідного диполя, орієнтованого під кутом  $\varphi$  з плечем  $c \rightarrow 0$  (напрямок плеча характеризує орієнтацію диполя) маємо

$$G_{mjd}(z_m^k) = -c \left[ \frac{\partial G_{mj}}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial G_{mj}}{\partial y_1} \sin \varphi \right] = A_{md}^j Q_{0k}(0, z_m^k) \left[ \cos \varphi + \mu_m^k \sin \varphi \right], \quad (35.14)$$

$$Q_{0k}(0, z_m^k) = (z_{*m}^k - z_m^k)^{-2}, \quad A_{md}^j = c A_m^j \quad (k = 1, 2; \mu_m^1 = \mu_m^2).$$

У частковому випадку сукупності двох взаємно перпендикулярних силових диполів однакової інтенсивності  $M_{21} = M_{12}$  відповідає зосереджений в  $z_{*1}$  момент (центр обертання) інтенсивності  $M_1 \equiv M_{21} + M_{12}$ .

### 35.3. Кусково-однорідний матеріал

Звернемось до загальнішого випадку, коли лінія  $y = 0$  поділяє анізотропні матеріали з різними властивостями і у кожній із півплощин  $S_k$  діє зосереджена сила й дислокація, які характеризуються функцією  $G_{mk}$ . На основі подання (35.12), (32.13) вектор стану в кожній із півплощин запишемо

$$\sigma(z) = \sigma^\infty(z) + \left[ \mathbf{G}_{11}(z^k) + \mathbf{G}_{22}(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk} + \boldsymbol{\varphi}_{kk}(z^k) \mathbf{M}^{kk} \quad (z \in S_k; k = 1, 2). \quad (35.15)$$

Тепер умову (35.6) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi_{12}^+(x), \varphi_{22}^+(x), \overline{\varphi_{12}^-(x)}, \overline{\varphi_{22}^-(x)} \right\| \mathbf{M}^{22} - \left\| \varphi_{11}^-(x), \varphi_{21}^-(x), \overline{\varphi_{11}^+(x)}, \overline{\varphi_{21}^+(x)} \right\| \mathbf{M}^{11} = \\ & = -\mathbf{f}(x) + \left[ \mathbf{G}_{11}(x) + \mathbf{G}_{22}(x) \right] \left[ \mathbf{M}^{11} - \mathbf{M}^{22} \right] \end{aligned}$$

або

$$\mathbf{F}^+(x) - \mathbf{F}^-(x) = -\mathbf{f}(x) + \left[ \mathbf{G}_{11}(x) + \mathbf{G}_{22}(x) \right] \left[ \mathbf{M}^{11} - \mathbf{M}^{22} \right], \quad (35.16)$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(z^k) &= \boldsymbol{\Phi}_{kl}^*(z^k) \mathbf{K} \mathbf{M}^{kl} = \left\| \varphi_{1k}(z_1^k) + \varphi_{2k}(z_2^k) - \overline{\varphi_{1l}}(z_1^k) - \overline{\varphi_{2l}}(z_2^k), \right. \\
&\quad - \mu_1^k \varphi_{1k}(z_1^k) - \mu_2^k \varphi_{2k}(z_2^k) + \overline{\mu_1^l} \overline{\varphi_{1l}}(z_1^k) + \overline{\mu_2^l} \overline{\varphi_{2l}}(z_2^k), \\
&\quad + p_1^k \varphi_{1k}(z_1^k) + p_2^k \varphi_{2k}(z_2^k) - \overline{p_1^l} \overline{\varphi_{1l}}(z_1^k) - \overline{p_2^l} \overline{\varphi_{2l}}(z_2^k), \\
&\quad \left. + q_1^k \varphi_{1k}(z_1^k) + q_2^k \varphi_{2k}(z_2^k) - \overline{q_1^l} \overline{\varphi_{1l}}(z_1^k) - \overline{q_2^l} \overline{\varphi_{2l}}(z_2^k) \right\| \quad (z \in S_k; k=1,2).
\end{aligned} \tag{35.17}$$

Розв'язок задачі спряження (35.16), що зникає на нескінченності, запишеться

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(z^k) &= \frac{i}{2} \mathbf{t}(z^k) + \mathbf{G}_{lk}^*(z^k) \mathbf{K} (\mathbf{M}^{lk} - \mathbf{M}^{kl}), \\
\mathbf{G}_{kj}^*(z^l) &= \left\| G_{1k}(z_1^l), G_{2k}(z_2^l), \overline{G_{1j}}(z_1^l), \overline{G_{2j}}(z_2^l) \right\|.
\end{aligned} \tag{35.18}$$

На основі (35.17)  $\boldsymbol{\Phi}_{kl}^*(z^k) = \mathbf{F}(z^k) [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K}$ , тому

$$\boldsymbol{\Phi}_{kl}^*(z^k) = -\frac{1}{2i} \mathbf{t}(z^k) [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} + \mathbf{G}_{lk}^*(z^k) \left[ \mathbf{K} \mathbf{M}^{lk} [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} - \mathbf{E} \right], \tag{35.19}$$

де  $\mathbf{R}^{kl} = [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} \mathbf{M}^{kl}$ , причому

$$\overline{\mathbf{R}^{kl}} = -\mathbf{R}^{lk}, \quad \mathbf{K} \mathbf{M}^{lk} = \mathbf{M}^{lk} \mathbf{R}^{lk}, \quad \left[ \mathbf{K} \mathbf{M}^{lk} [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} - \mathbf{E} \right] = \left[ \mathbf{M}^{lk} \mathbf{R}^{lk} [\mathbf{M}^{kl}]^{-1} \mathbf{K} - \mathbf{E} \right].$$

Перші дві компоненти вектора  $\boldsymbol{\Phi}_{kl}^*(z^k)$  згідно з його означенням є шуканими функціями  $\varphi_{mk}(z_m^k)$  ( $m=1,2$ ):

$$\begin{aligned}
\varphi_{mk}(z_m^k) &= \frac{i}{2} \sum_r t_r(z_m^k) [\mathbf{M}^{kl}]_{rm}^{-1} + \\
&\quad + \sum_{r,s,t=1}^4 \left[ \mathbf{G}_{lk}^*(z_m^k) \right]_r K_{rs} M_{st}^{lk} [\mathbf{M}^{kl}]_{tm}^{-1} - G_{ml}(z_m^k) \quad (z^k \in S_k; k=1,2).
\end{aligned} \tag{35.20}$$

Тут враховано, що множення будь-якої матриці справа на  $\mathbf{K}$  не змінить двох перших її стовпчиків; перший індекс знизу визначає номер рядка елемента відповідної матриці, а другий – номер його стовпчика.

Врахуємо, що

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_{kk}(z^k) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^*(z^k) (\mathbf{E} + \mathbf{K}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}_{lk}^*(\overline{z^k}) (\mathbf{E} - \mathbf{K}), \\
\mathbf{M}^{kk} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{K}) \mathbf{M}^{kl} + \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \mathbf{M}^{lk}, \\
(\mathbf{E} + \mathbf{K})(\mathbf{E} - \mathbf{K}) &= 0, \quad (\mathbf{E} \pm \mathbf{K})^2 = 2(\mathbf{E} \pm \mathbf{K}).
\end{aligned} \tag{35.21}$$

Тоді згідно з (35.15), (35.19)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(z) &= \boldsymbol{\sigma}^0(z) + \frac{i}{4} \left[ \mathbf{t}(z^k) (\mathbf{R}^{kl} + \mathbf{E}) + \mathbf{t}(\overline{z^k}) (\mathbf{R}^{lk} - \mathbf{E}) \right], \\
\boldsymbol{\sigma}^0(z) &= \boldsymbol{\sigma}^\infty + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{G}_{lk}^*(z^k) \mathbf{K} \mathbf{M}^{lk} (\mathbf{R}^{kl} + \mathbf{E}) + \mathbf{G}_{kl}^*(z^k) (\mathbf{E} + \mathbf{K}) \mathbf{M}^{kl} + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{G}_{kl}^*(\overline{z^k}) \mathbf{K} \mathbf{M}^{kl} (\mathbf{R}^{lk} - \mathbf{E}) + \mathbf{G}_{lk}^*(\overline{z^k}) (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \mathbf{M}^{lk} \right].
\end{aligned} \tag{35.22}$$

Врахувавши співвідношення Сохоцького – Племеля, маємо

$$[\mathbf{t}(z)]^\pm = \pm i \mathbf{f}(x) + \mathbf{t}(x), \quad [\overline{\mathbf{t}(z)}]^\pm = \mp i \overline{\mathbf{f}(x)} + \overline{\mathbf{t}(x)}$$

і тепер на основі (35.22) граничні значення вектора  $\boldsymbol{\sigma}(z)$  на лінії  $L$  дорівнюють

$$\boldsymbol{\sigma}^\pm(x) = \boldsymbol{\sigma}^0(x) \mp \frac{1}{4} \mathbf{f} \left( 2\mathbf{E} + \mathbf{R}^{kl} - \mathbf{R}^{lk} \right) + \frac{i}{4} \mathbf{t}(x) \left( \mathbf{R}^{kl} + \mathbf{R}^{lk} \right), \quad k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}, \quad l = 3 - k, \quad (35.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0(x) = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \mathbf{G}_{lk}^*(x) \mathbf{Q}^{lk} + \mathbf{G}_{kl}^*(x) \mathbf{Q}^{kl}, \quad \mathbf{Q}^{kl} = \mathbf{M}^{kl} \left( \mathbf{E} + \mathbf{R}^{kl} \mathbf{R}^{lk} \right).$$

Тут верхньому знаку відповідають значення  $k = 2, l = 1$ ; нижньому –  $k = 1, l = 2$ . У формулі для  $\boldsymbol{\sigma}^0(x)$  можна брати будь-яку із цих пар значень індексів  $k, l$ .

У випадку однорідної матриці  $\mathbf{M}^{kl} = \mathbf{M}^{lk} = \mathbf{M}^{kk} = \mathbf{M}^{ll}$ ,  $\mathbf{R}^{kl} = \mathbf{R}^{lk} = \mathbf{R}^{kk} = \mathbf{R}^{ll}$  і тому на основі (35.22)

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \boldsymbol{\sigma}^0(z) + \frac{i}{4} \left\{ \left[ \mathbf{t}(z^k) + \mathbf{t}(\overline{z^k}) \right] \mathbf{R}^{11} + \left[ \mathbf{t}(z^k) - \mathbf{t}(\overline{z^k}) \right] \mathbf{E} \right\},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0(z) = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \mathbf{G}_{lk}^*(z^k) + \mathbf{G}_{kl}^*(z^k) \right] (\mathbf{E} + \mathbf{K}) + \left[ \mathbf{G}_{kl}^*(\overline{z^k}) + \mathbf{G}_{lk}^*(\overline{z^k}) \right] (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \right\} \mathbf{M}^{kk} = \quad (35.24)$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^\infty + \left[ \mathbf{G}_{11}^0(z^k) + \mathbf{G}_{22}^0(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk};$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\pm(x) = \boldsymbol{\sigma}^0(x) \mp \frac{1}{2} \mathbf{f}(x) \mathbf{E} + \frac{i}{2} \mathbf{t}(x) \mathbf{R}^{11}. \quad (35.25)$$

Співвідношення (35.24) випливають також з формул (35.3), (35.9). З формули (35.24) отримується залежність (35.13).

### 35.4. Ізотропія матеріалів

Випадок ізотропії матеріалів у плоскій задачі на відміну від антиплоскої вимагає до себе особливої уваги, оскільки він не впливає із звичайної підстановки:  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{16} = a_{26} = 0$ ,  $2a_{12} + a_{66} = 2a_{11}$  і значень коренів характеристичного рівняння  $\mu_1^k = \mu_2^k = i$ , а необхідно здійснити граничний перехід від анізотропного до ізотропного випадку, коли  $\mu_1^k \rightarrow \mu_2^k \rightarrow i$ .

Обертання матриці  $\mathbf{M}^{kj}$  дає

$$\mathbf{M}_{kj}^p = \left\| A_{p1}^{kj}, A_{p2}^{kj}, A_{p3}^{kj}, A_{p4}^{kj} \right\| / \Delta, \quad (35.26)$$

де  $\Delta$  – визначник матриці  $\mathbf{M}^{kj}$ ;  $A_{pn}^{kj}$  – алгебричні доповнення до відповідних елементів.

$$\begin{aligned} A_{m1}^{kj} &= \left[ \mu_e^k \overline{p_e^j} \overline{q_m^j} + \overline{\mu_m^j} p_e^k \overline{q_e^j} + \overline{\mu_e^j} \overline{p_m^j} q_e^k - \overline{\mu_m^j} \overline{p_e^j} q_e^k - \overline{\mu_e^j} p_e^k \overline{q_m^j} - \mu_e^k \overline{p_m^j} \overline{q_e^j} \right], \\ A_{m2}^{kj} &= \left[ p_m^j q_e^k + p_e^k \overline{q_e^j} + \overline{p_e^j} \overline{q_m^j} - \overline{p_m^j} \overline{q_e^j} - \overline{p_e^j} q_e^k - \overline{p_e^k} q_m^j \right], \\ A_{m3}^{kj} &= \left[ \overline{\mu_e^j} \overline{q_m^k} + \mu_e^k \overline{q_e^j} + \overline{\mu_m^j} q_e^k - \overline{\mu_m^j} \overline{q_e^j} - \overline{\mu_e^j} q_e^k - \mu_e^k \overline{q_m^j} \right], \\ A_{m4}^{kj} &= \left[ \overline{\mu_m^j} \overline{p_e^j} + \overline{\mu_e^j} p_e^k + \mu_e^k \overline{p_m^j} - \overline{\mu_e^j} \overline{p_m^j} - \mu_e^k \overline{p_e^j} - \overline{\mu_m^j} p_e^k \right], \\ \Delta &= A_{11}^{kj} - A_{12}^{kj} \mu_1^k + A_{14}^{kj} p_1^k + A_{14}^{kj} q_1^k \quad (m, l = 1, 2; \quad l = 3 - m). \end{aligned} \quad (35.27)$$

В результаті алгебричних перетворень для однорідної матриці, коли верхніми індексами над сталими матеріалів і коренями характеристичного рівняння можна знехтувати, з урахуванням формул ортогональності Стро (10.15) [1021]

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= \mu_1 p_2 + \mu_2 p_1, & q_1 + \bar{q}_1 &= \mu_1 p_1 + \mu_1 \bar{p}_1, \\ q_2 + \bar{q}_2 &= \mu_2 p_2 + \mu_2 \bar{p}_2, & q_1 + \bar{q}_2 &= \mu_2 p_1 + \mu_1 \bar{p}_2, \end{aligned}$$

матимемо

$$\begin{aligned} \Delta &= 2a_{11}a_{22} \operatorname{Re}[(d_{12}\mu_2 + d_{21}\mu_1)/\mu_1\mu_2], \\ A_{m1} &\sim A_{m1}^{kj} = a_{11}[a_{26}d_{me} + a_{12}\mu_m d_{me} - a_{11}\mu_m o_{me}], & A_{m3} &\sim A_{m2}^{kj} = -a_{11}\mu_m d_{me}, \\ A_{m2} &\sim A_{m2}^{kj} = a_{11}[a_{12}d_{me} + a_{16}\mu_m d_{me} - a_{11}\mu_m n_{me}], & A_{m4} &\sim A_{m4}^{kj} = a_{11}d_{me}, \\ d_{me} &= \bar{\mu}_m \mu_e (\bar{\mu}_m - \mu_e) + \mu_e \bar{\mu}_e (\mu_e - \bar{\mu}_e) + \bar{\mu}_m \bar{\mu}_e (\bar{\mu}_e - \bar{\mu}_m), \\ o_{me} &= \bar{\mu}_m^2 \mu_e^2 (\bar{\mu}_m - \mu_e) + \mu_e^2 \bar{\mu}_e^2 (\mu_e - \bar{\mu}_e) + \bar{\mu}_m^2 \bar{\mu}_e^2 (\bar{\mu}_e - \bar{\mu}_m), \\ n_{me} &= \bar{\mu}_m \mu_e (\bar{\mu}_m^2 - \mu_e^2) + \mu_e \bar{\mu}_e (\mu_e^2 - \bar{\mu}_e^2) + \bar{\mu}_m \bar{\mu}_e (\bar{\mu}_e^2 - \bar{\mu}_m^2). \end{aligned} \quad (35.28)$$

На основі цих співвідношень

$$\begin{aligned} d_{12} + d_{21} &= M(\mu_1 + \mu_2 - \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2), & d_{12}\mu_1 + d_{21}\mu_2 &= M(\mu_1\mu_2 - \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2), \\ d_{12}\mu_2 + d_{21}\mu_1 &= M[\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 - (\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2], \\ d_{12}\mu_1^2 + d_{21}\mu_2^2 &= M[(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\mu_1\mu_2 - (\mu_1 + \mu_2)\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2], \\ d_{12}\mu_1^3 + d_{21}\mu_2^3 &= M[(\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\mu_1\mu_2 - (\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 - \mu_1^2\mu_2^2], \\ n_{12} + n_{21} &= M[\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 - \bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_2^2], \\ n_{12}\mu_1 + n_{21}\mu_2 &= M[(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\mu_2 - (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2], \\ n_{12}\mu_2 + n_{21}\mu_1 &= M[(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1^2 + \mu_2^2) - (\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2)], \\ n_{12}\mu_1^2 + n_{21}\mu_2^2 &= M[\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1\mu_2(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2) - \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)(\mu_1 + \mu_2)], \\ n_{12}\mu_1^3 + n_{21}\mu_2^3 &= M[\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2) - \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)], \\ o_{12} + o_{21} &= M[(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2) - (\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2)], \\ o_{12}\mu_2 + o_{21}\mu_1 &= M[\bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2 + (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1^2 + \mu_2^2) - \\ &\quad - (\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2)], & M &= (\mu_1 - \mu_2)(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2), \\ o_{12}\mu_1 + o_{21}\mu_2 &= M[\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) - \mu_1\mu_2(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2) - \bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2], \\ o_{12}\mu_1^2 + o_{21}\mu_2^2 &= M[\mu_1^2\mu_2^2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) - \bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2(\mu_1 + \mu_2)], \\ o_{12}\mu_1^3 + o_{21}\mu_2^3 &= M[\mu_1^2\mu_2^2(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2^2) - \bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_2^2(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)]. \end{aligned} \quad (35.29)$$

Таким чином, якщо перейти до границі  $\mu_1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow i$ , виділивши без змін множник  $M$ , то отримаємо

$$\begin{aligned}
d_{12} + d_{21} &\sim 4iM, & d_{12}\mu_2 + d_{21}\mu_1 &\sim -8M, & d_{12}\mu_1 + d_{21}\mu_2 &\sim 0, & d_{12}\mu_1^2 + d_{21}\mu_2^2 &\sim 4iM, \\
d_{12}\mu_1^3 + d_{21}\mu_2^3 &\sim -8M, & n_{12} + n_{21} &= 0, & n_{12}\mu_1 + n_{21}\mu_2 &\sim -4iM, & n_{12}\mu_2 + n_{21}\mu_1 &\sim 4iM, \\
n_{12}\mu_1^2 + n_{21}\mu_2^2 &\sim 8M, & n_{12}\mu_1^3 + n_{21}\mu_2^3 &\sim 12iM, & o_{12} + o_{21} &\sim 12iM, \\
o_{12}\mu_2 + o_{21}\mu_1 &\sim -16M, & o_{12}\mu_1 + o_{21}\mu_2 &\sim -8M, & o_{12}\mu_1^2 + o_{21}\mu_2^2 &\sim -4iM, \\
o_{12}\mu_1^3 + o_{21}\mu_2^3 &= 0, & \Delta &\sim 16a_{11}a_{22}M.
\end{aligned} \tag{35.30}$$

На основі виразів (35.11) і (35.26) отримаємо

$$\begin{aligned}
\varphi_{m1}(z_m^1) &= \frac{\mathbf{fM}_{11}^m}{2\pi iz_m^1} = \frac{\tilde{\alpha}_m}{2\pi iz_m^1}, \\
\tilde{\alpha}_m &= \frac{f_1 A_{m1} + f_2 A_{m2} + f_4 A_{m3} + f_5 A_{m4}}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Навіть на цій стадії ще рано здійснювати граничний перехід  $\mu_m \rightarrow i$ . Необхідно спочатку на основі потенціалів записати вирази для напружень, деформацій і переміщень, наприклад, для складової

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{\mu_1^2 \tilde{\alpha}_1}{z_1^1} + \frac{\mu_2^2 \tilde{\alpha}_2}{z_2^1} - \frac{\bar{\mu}_1^2 \bar{\tilde{\alpha}}_1}{\bar{z}_1^1} - \frac{\bar{\mu}_2^2 \bar{\tilde{\alpha}}_2}{\bar{z}_2^1} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{\mu_1^2 \tilde{\alpha}_1}{z_1^1} + \frac{\mu_2^2 \tilde{\alpha}_2}{z_2^1} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{\mu_1^2 \tilde{\alpha}_1 \bar{z}_1^1 \bar{z}_2^1 z_2^1 + \mu_2^2 \tilde{\alpha}_2 \bar{z}_1^1 \bar{z}_2^1 z_1^1}{|z_1^1|^2 |z_2^1|^2} \right].
\end{aligned} \tag{35.31}$$

Далі слід врахувати, що  $z_m^1 = x^1 + \mu_m y^1$ , перемножити і додати члени у чисельнику, врахувати вирази (35.28), згрупувати члени, які відповідають лівим частинам виразів (35.30) і лише після цього згідно з (35.30) можна скоротити чисельник і знаменник на  $M$ . Тепер можна вважати матеріал ізотропним, підставити  $\mu_m = i$  остаточно отримати, скажімо, якщо  $f_1 = f_2 = 0$ , вираз для цієї складової при дії дислокації в ізотропному тілі.

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{4\pi r^4} \left[ y(3x^2 + y^2) f_4 - x(x^2 - y^2) f_5 \right].$$

Подібно здійснюються перетворення і для інших компонент тензора напружень

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{\tilde{\alpha}_1}{z_1^1} + \frac{\tilde{\alpha}_2}{z_2^1} \right], \\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{\mu_1 \tilde{\alpha}_1}{z_1^1} + \frac{\mu_2 \tilde{\alpha}_2}{z_2^1} \right].
\end{aligned}$$

Таким чином, хоча комплексне подання (13.32) і неправильне за однакових коренів характеристичного рівняння, ізотропний випадок можна отримати належним переходом до границі в аналітичних виразах. У числових розрахунках ізотропний матеріал слід моделювати матеріалом з невеликою мірою анізотропії. У цьому випадку необхідна певна обережність, оскільки зменшення міри анізотропії не завжди приводить до збільшення точності розрахунків.

У табл. 35.1 записані результати обчислення величин  $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2$ , що фігурують в означенні УКІН для трьох різних ступенів слабкої анізотропії, визначеної коефіцієнтами  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  ( $a_{12} = -0,333$ ;  $a_{66} = 2,666$ ;  $a_{16} = a_{26} = 0$ ). Обчислення здійснювалися зі звичайною (одинар-

ною) точністю. Обчислення здійснювалися або за безпосередніми формулами (верхні рядки), або з використанням оберненої матриці (нижні рядки). Помітно, що за навіть за відносно невеликої міри слабкої анізотропії (варіанти 1–3) величини  $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2$  цілком задовільно відображають свої граничні значення, властиві для ізотропного матеріалу (останній рядок). Надмірне зменшення міри анізотропії (варіанти 5 і далі) веде до віддалення від цього граничного значення, причому іноді й дуже значного.

Таблиця 35.1. Залежність сталих від міри слабкої анізотропії матеріалу

Варіант	$a_{11}$	$a_{22}$	$\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2$	$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$	$\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$	$\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2$
1	1,1	0,9	-0,500000014 -0,499999999	-0,174668014 <i>i</i> -0,174668028 <i>i</i>	0 0	-0,263854004 <i>i</i> -0,263854004 <i>i</i>
2	1,010	0,990	-0,49999844 -0,500000003	-0,16758115 <i>i</i> -0,16757972 <i>i</i>	$\sim 10^{-6}$ 0	-0,25126142 <i>i</i> -0,25126226 <i>i</i>
3	1,005	0,995	-0,49999585 -0,500000038	-0,16717000 <i>i</i> -0,16716427 <i>i</i>	$-0,313 \cdot 10^{-5}$ 0	-0,2506250 <i>i</i> -0,25062581 <i>i</i>
4	1,001	0,999	-0,49999998 -0,50000138	-0,1668335 <i>i</i> 0,1667964 <i>i</i>	$\sim 10^{-7}$ 0	-0,250125 <i>i</i> -0,2501321 <i>i</i>
5	1,0001	0,9999	-0,50001800 -0,50138300	-0,166742 <i>i</i> -0,171204 <i>i</i>	0,000012 0	-0,250025 <i>i</i> -0,244577 <i>i</i>
Точно	1	1	-0,5	-0,16675 <i>i</i>	0	-0,25 <i>i</i>

Використання підвищеної, скажімо подвійної, точності істотно збільшує надійність граничного переходу у числових розрахунках, відчутно звужуючи область розбіжності.

У задачах поздовжнього зсуву (§ 23) немає необхідності у таких пересторогах: там граничний перехід від анізотропії до ізотропії здійснюється цілком природно.

### 35.5. Сингулярні інтегральні рівняння

Другий варіант умов взаємодії, поданий у пп. 16.2 (перше, друге і третє співвідношення (16.29) та залежність (16.40)), для анізотропного включення на прямолінійній межі анізотропних матеріалів з урахуванням жорсткої складової  $\varepsilon_B$  у матричній формі має вигляд

$$\left[ \sigma^+(x) + \sigma^-(x) \right] \Lambda = \left( 2N_{a_p^-} - \frac{1}{h} \int_{a_p^-}^x f dx \right) \mathbf{V} - \varepsilon_B \mathbf{c}, \quad (35.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_x^+ - u_x^-) = k_1 (\sigma_{yy}^+ - \sigma_{yy}^-) + k_2 (\sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^-) \quad (x \in L'_p),$$

де

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_{12B} & a_{22B} & a_{26B} \\ a_{16B} & a_{26B} & a_{66B} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11B} & a_{21B} & a_{16B} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad N_w = \begin{vmatrix} N_w^1 \\ N_w^2 \\ N_w^4 \\ N_w^5 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}; \quad (35.33)$$

$$N_w^1 = \frac{k_1 N_w^2 - N_w^4}{k_2}, \quad N_w^2 = -\frac{\sigma_{xxB}^+ + \sigma_{xxB}^-}{2} \Big|_{x=w} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \sigma_{xxn}^0(w) \sqrt{a_{66n} / \max(a_{66B}, a_{66n})},$$

$$N_w^4 = -\frac{u_{xB}^+ - u_{xB}^-}{2h} \Big|_{x=w} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^2 \left[ (a_{16B} + a_{16n}) \sigma_{xxn}^0(w) + (a_{26B} + a_{26n}) \sigma_{yy}^0(w) + \right. \\ \left. + 2a_{66n} \sigma_{xy}^0(w) - 2u_y^0(w) \right] \frac{\min(a_{66B}, a_{66n})}{a_{66n}}, \quad (35.34)$$

$$N_w^5 = \frac{u_{yB}^+ - u_{yB}^-}{2h} \Big|_{x=w} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \left[ a_{12n} \sigma_{xxn}^0(w) + a_{22n} \sigma_{yy}^0(w) + \frac{1}{2} (a_{26B} + a_{26n}) \sigma_{xy}^0(w) \right] \times \\ \times \frac{\min(a_{22B}, a_{22n})}{a_{22n}}, \quad k_1 = a_{12B} - \frac{a_{11B} a_{22B}}{a_{21B}}, \quad k_2 = a_{16B} - \frac{a_{11B} a_{26B}}{a_{21B}}.$$

Підставляючи (35.23) у (35.32), маємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{h} \int_{a_p^-}^x \mathbf{f} \mathbf{V} dx - \left( \mathbf{f} \operatorname{Re} \mathbf{R}^{21} + \mathbf{t} \operatorname{Im} \mathbf{R}^{21} \right) \mathbf{\Lambda} = 2 \mathbf{N}_{a_p^-} \mathbf{V} - 2 \mathbf{\sigma}^0 \mathbf{\Lambda} - \varepsilon_B \mathbf{c}, \quad f_4 = k_1 f_1 + k_2 f_2 \quad (x \in L'_p), \quad (35.35)$$

розв'язок якої за відсутності жорсткої складової повороту включення повинен задовольняти додаткові умови

$$\int_{a_p^-}^{a_p^+} \mathbf{f}(t) dt = 2h \left[ \mathbf{N}_{a_p^-} - \mathbf{N}_{a_p^+} \right] \quad (p = \overline{1, N+1}). \quad (35.36)$$

Жорсткий поворот включення  $\varepsilon_B$  знаходимо з умови рівності нулю головного моменту сил, які діють на включення з боку матриці

$$\frac{1}{h} \int_{a_p^-}^{a_p^+} f_1(t) \left( t - \frac{a_p^+ + a_p^-}{2} \right) dt + \int_{a_p^-}^{a_p^+} |\sigma_{xy}|_L dt = (a_p^- - a_p^+) \left( N_{a_p^-}^1 + N_{a_p^+}^1 \right). \quad (35.37)$$

Значення сталих  $\mathbf{N}_{a_p^\pm}$  відомі точно лише у граничних випадках. У загальному випадку їх можна визначити за наближеними апріорними формулами

$$N_b^1 = \frac{N_b^4 - k_3 N_b^2}{k_1}, \quad N_b^2 = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \sigma_{xxn}^0(b) \sqrt{\frac{a_{66n}}{\max(a_{66B}, a_{66n})}},$$

$$N_b^4 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^2 \frac{\min(a_{66B}, a_{66n})}{a_{66n}} \left[ (a_{16B} + a_{16n}) \sigma_{xxn}^0(b) + (a_{26B} + a_{26n}) \sigma_{xxn}^0(b) + \right. \\ \left. + 2a_{66n} \sigma_{xy}^0(b) - 2 \frac{\partial}{\partial x} u_y^0(b) \right], \quad (35.38)$$

$$N_b^5 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \frac{\min(a_{22B}, a_{22n})}{a_{22n}} \left[ a_{12n} \sigma_{xxn}^0(b) + a_{22n} \sigma_{yy}^0(b) + \frac{1}{2} (a_{26B} + a_{26n}) \sigma_{xy}^0(b) \right].$$

Вважаючи, що включення є абсолютно жорсткими ( $a_{ijB} \rightarrow 0$ ), із системи (35.35) випливає



$$f_4(x) = f_5(x) = 0, \quad \sum_{r=1}^2 [f_r \operatorname{Re} R_{km}^{21} + t_r \operatorname{Im} R_{km}^{21}] = 2\sigma_m^0(x) \quad (m=1,2). \quad (35.39)$$

Для тріщини ( $a_{iVB} \rightarrow \infty$ ) отримаємо ідентичні до [745, 1221] рівняння

$$f_1(x) = f_2(x) = 0, \quad \sum_{r=4}^5 [f_r \operatorname{Re} R_{km}^{21} + t_r \operatorname{Im} R_{km}^{21}] = 2\sigma_m^0(x) \quad (m=1,2). \quad (35.40)$$

Для однорідної матриці системи сингулярних інтегральних рівнянь (35.35), (35.39), (35.40) спрощуються.

Таким чином система рівнянь (35.35) дає можливість отримати відомі граничні випадки і можна вважати, що вона доволі добре описує розв'язок задачі за довільних механічних властивостей включень.

### 35.6. Асимптотичні залежності

Розглянемо характер розподілу напружень та зміщень у малому околі кінця включення, що міститься в однорідному ортотропному тілі. Тоді  $a_{ij1} = a_{ij2}$ ,  $\mu_m^1 = \mu_m^2 \sim \mu_m$ , матриця  $\mathbf{R}$  є суто уявною.

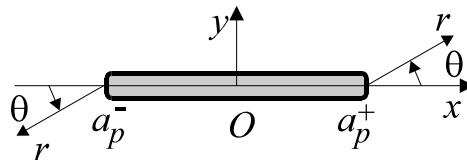


Рис. 35.2. Локальна полярна система координат біля вістря включення

В околі вершини включення  $a_p^\pm$  введемо локальну полярну систему координат (рис. 35.2)

$$\tilde{z} = r e^{i\theta} = \tilde{x} + i\tilde{y}, \quad \tilde{z}_m = r\omega_m = r(\cos\theta + \mu_m \sin\theta), \quad z = a_p^\pm \pm \tilde{z}, \quad z_m = a_p^\pm \pm \tilde{z}_m, \quad (35.41)$$

$$(m=1,2; \quad p=\overline{1, N+1}).$$

Тут і надалі обирається верхній знак, коли досліджується розподіл напружень біля правого торця, і нижній, якщо розглядається лівий торець.

Згідно з теорією сингулярних інтегралів [635, 111] побудовані асимптотичні вирази:

$$t_r^p(z_m) = \mp \left[ p_r^{p\pm} (r\omega_m)^{-1/2} - q_r^{p\pm} + O(r^{1/2}) \right], \quad p_r^{p\pm} = \lim_{s_m \rightarrow 0} \left[ \sqrt{s_m} f_r^p(x) \right], \quad (35.42)$$

$$\int t_r^p(z_m) dz_m = \left[ -2p_r^{p\pm} (r\omega_m)^{1/2} \pm q_r^{p\pm} z_m + O(r^{3/2}) \right], \quad q_r^{p\pm} = \pm \lim_{x \rightarrow a_p^\pm} t_r^p(x),$$

де  $s_m$  – відстань від точки  $x$  на відрізку  $L'_m$  до її кінця  $a_m^\pm$  відповідно.

Підставляючи (35.42) у (35.24), отримаємо асимптотичні вирази для напружень та переміщень в околі кінця включення

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} &= \frac{2K_{1,2}}{Q\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_2)^2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_1^2 \omega_2^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_1)^2 \\ -\mu_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_1^1 \omega_1^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + \frac{2K_{2,2}}{Q\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_2)^2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_2^2 \omega_2^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \right. \right. \\
&\quad - \left. \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_1)^2 \\ -\mu_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_2^1 \omega_1^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + \frac{K_{1,1}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_2)^2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{\mu_1 \omega_2^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_1)^2 \\ -\mu_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{\mu_2 \omega_1^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{K_{2,1}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_2)^2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{\omega_2^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu_1)^2 \\ -\mu_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{\omega_1^{-1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + O(1), \right. \\
\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} &= \pm \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left( \frac{2K_{1,2}}{Q} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_1^2 \omega_2^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_1^1 \omega_1^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + \frac{2K_{2,2}}{Q} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_2^2 \omega_2^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \right. \right. \right. \\
&\quad - \left. \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{Q_2^1 \omega_1^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + K_{1,1} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{\mu_1 \omega_2^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{\mu_2 \omega_1^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} + \right. \\
&\quad \left. \left. + K_{2,1} \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \left\| \frac{\omega_2^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} - \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \left\| \frac{\omega_1^{1/2}}{\mu_1 - \mu_2} \right\} \right\} + O(r^{3/2}), \right. \tag{35.43}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Q &= (W_2 + \bar{W}_2)(W_3 + \bar{W}_3), \quad Q_1^m = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_m} (\bar{W}_2 \bar{W}_3 - \bar{W}_1 \bar{W}_4) - \frac{p_1 p_2}{p_m} \bar{W}_4 - \frac{q_1 q_2}{q_m} \bar{W}_3, \\
Q_2^m &= (\bar{W}_2 \bar{W}_3 - \bar{W}_1 \bar{W}_4) - \frac{p_1 p_2}{p_m} \bar{W}_2 - \frac{q_1 q_2}{q_m} \bar{W}_1, \quad W_1 = a_{11}(\mu_1 + \mu_2) - a_{16}, \\
W_3 &= a_{11} \mu_1 \mu_2 - a_{12}, \quad W_2 = \frac{a_{22}}{\mu_1 \mu_2} - a_{12}, \quad W_4 = a_{22} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} - a_{26} \quad (m=1,2); \tag{35.44}
\end{aligned}$$

$$K_{1,2} + iK_{2,2} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{r=1}^2 p_r^\pm (\operatorname{Im} R_{r1} + i \operatorname{Im} R_{r2}),$$

$$K_{1,1} + iK_{2,1} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{r=4}^5 p_r^\pm (\operatorname{Im} R_{r1} + i \operatorname{Im} R_{r2}).$$

Величини  $K_{j,i}$  є узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (УКІН), що мають відповідно до (35.43) такий механічний зміст:

$$K_{1,1} + K_{1,2} + i(K_{2,1} + K_{2,2}) = \lim_{r \rightarrow 0} (\theta=0) \left[ \sqrt{2\pi r} (\sigma_{yy} + i\sigma_{xy}) \right]. \tag{35.45}$$

Цей вираз цілком ідентичний першій залежності у (31.20). Аналогічно можна побудувати й інші.

У випадку тріщини  $K_{1,2} = K_{2,2} = 0$ ,  $K_{1,1} \sim K_1$ ,  $K_{2,1} \sim K_2$  і вирази (35.43) збігаються з класичними КІН  $K_1, K_2$  [1079].

Асимптотика (35.43) збігається з асимптотикою (7) праці Д.Клементса [1221], якщо врахувати зв'язок між УКІН (35.44) та цитованої праці

$$K_{j,1} = K_{1j}^{\text{Clem}}, \quad K_{j,2} = \frac{W_3 + \bar{W}_3}{2(W_1W_4 - W_2W_3)} K_{2j}^{\text{Clem}} \quad (j = 1, 2).$$

У випадку одної тріщини уздовж відрізка  $[-a; a]$  однорідної матриці розв'язок відповідного (35.40) рівняння за дії напружень на нескінченності, сил і дислокацій дає

$$\begin{aligned} K_{1,1} + iK_{2,1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=3}^4 p_n (R_{n1}^0 + iR_{n2}^0), \quad K_{1,2} + iK_{2,2} = 0, \quad f_1(x) = f_2(x) = 0, \\ f_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} [F_i + hT_i + L_{i1}Q(x, z_{*1}) + L_{i2}Q(x, z_{*2}) + L_{i3}Q(x, \bar{z}_{*1}) + L_{i4}Q(x, \bar{z}_{*2})], \\ L_{i1} &= B_i A_1 - C_i \mu_1 A_1, \quad L_{i2} = B_i A_2 - C_i \mu_2 A_2, \quad L_{i3} = B_i \bar{A}_1 - C_i \bar{\mu}_1 \bar{A}_1, \quad L_{i4} = B_i \bar{A}_2 - C_i \bar{\mu}_2 \bar{A}_2, \\ F_i &= B_i (A_1 + A_2 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2) - C_i (\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \bar{\mu}_1 \bar{A}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{A}_2), \quad T_i = \frac{2}{\pi} (N_{-a}^i - N_a^i), \\ Q(x, z) &= \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{x - z}, \quad A_j = A_j^1 = A_j^2, \quad B_k = \frac{(-1)^l 2R_{l2}^0}{R_{42}^0 R_{31}^0 - R_{32}^0 R_{41}^0}, \quad C_k = \frac{(-1)^k 2R_{l1}^0}{R_{42}^0 R_{31}^0 - R_{32}^0 R_{41}^0}, \\ R_{ij}^0 &= \text{Im } R_{ij}^{11} \quad (i = 3, 4; j = 1, 2; k \neq l; k, l = 3, 4). \end{aligned} \quad (35.46)$$

Для одного абсолютно жорсткого включення уздовж відрізка  $[-a; a]$  однорідної матриці розв'язок відповідного (35.39) рівняння за дії напружень на нескінченності, сил і дислокацій дає

$$\begin{aligned} K_{1,2} + iK_{2,2} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^2 p_n (R_{n1}^0 + iR_{n2}^0), \quad K_{1,1} + iK_{2,1} = 0, \quad f_3(x) = f_4(x) = 0, \\ f_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} [F_i + hT_i - \varepsilon_B C_i x + L_{i1}Q(x, z_{*1}) + L_{i2}Q(x, z_{*2}) + \\ &+ L_{i3}Q(x, \bar{z}_{*1}) + L_{i4}Q(x, \bar{z}_{*2})], \quad L_{i1} = B_i p_1 A_1 + C_i q_1 A_1, \quad L_{i2} = B_i p_2 A_2 + C_i q_2 A_2, \\ L_{i3} &= B_i \bar{p}_1 \bar{A}_1 + C_i \bar{q}_1 \bar{A}_1, \quad L_{i4} = B_i \bar{p}_2 \bar{A}_2 + C_i \bar{q}_2 \bar{A}_2, \quad A_j = A_j^1 = A_j^2, \quad T_i = \frac{2}{\pi} (N_{-a}^i - N_a^i), \\ F_i &= B_i (p_1 A_1 + p_2 A_2 + \bar{p}_1 \bar{A}_1 + \bar{p}_2 \bar{A}_2) + C_i (q_1 A_1 + q_2 A_2 + \bar{q}_1 \bar{A}_1 + \bar{q}_2 \bar{A}_2), \\ B_k &= \frac{(-1)^l 2R_{l4}^0}{R_{24}^0 R_{13}^0 - R_{23}^0 R_{14}^0}, \quad C_k = \frac{(-1)^k 2R_{l3}^0}{R_{24}^0 R_{13}^0 - R_{23}^0 R_{14}^0}, \quad R_{ij}^0 = \text{Im } R_{ij}^{11} \quad (i = 1, 2; k \neq l; k, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (35.47)$$

У загальному випадку, коли включення є пружним, система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язується методом колокацій.

Слід зазначити, що у формулі (35.43) подана лише сингулярна частина. Врахування других членів асимптотичних розвинень приводить до набагато громіздкіших виразів. Подібно до випадку антиплоскої анізотропії (див. пп. 23.3, 23.5) їх за потреби теж можна побудувати.

### 35.7. Аналіз прикладів

#### Дія однорідного поля напружень на нескінченності

Числові розрахунки [16\*] здійснені для ортотропної матриці та ізотропного включення прямокутного профілю, розміщеного уздовж осі  $x$  пружної симетрії на відрізку  $L' = [-a; a]$  ( $A \equiv a/h_0 = 10$ ), коли задане однорідне поле напружень на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty = p$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = \tau$  (плоский напружений стан,  $\nu_B = 1/3$ ). На рис. 35.3 зображена залежність нормованих значень УКІН  $K_{1,1}/(p\sqrt{\pi a})$  і  $K_{1,2}/(p\sqrt{\pi a})$  від логарифма відносної жорсткості включення  $\lg(I_1)$  ( $I_1 = \sqrt{a_{11}a_{22}/a_{11B}a_{22B}}$ ) у випадку дії нормального напруження  $p$ . Суцільна лінія відповідає таким співвідношенням між пружними сталими матриці:  $a_{11}/a_{22} = 0,6803$ ,  $a_{12}/a_{22} = -0,061$ ,  $a_{66}/a_{22} = 7,407$ ; штрихова – ізотропній матриці ( $a_{11}/a_{22} = 1$ ,  $a_{12}/a_{22} = -1/3$ ,  $a_{66}/a_{22} = 8/3$ ). Залежності від параметра відносної зсувної жорсткості  $\lg(I_2)$  ( $I_2 = a_{66}/a_{66B}$ ) для іншої пари УКІН  $K_{2,1}/(\tau\sqrt{\pi a})$ ,  $K_{2,2}/(\tau\sqrt{\pi a})$  за дії напружень поперечного зсуву  $\tau$  і тих же значень пружних сталей містяться на рис. 35.4.

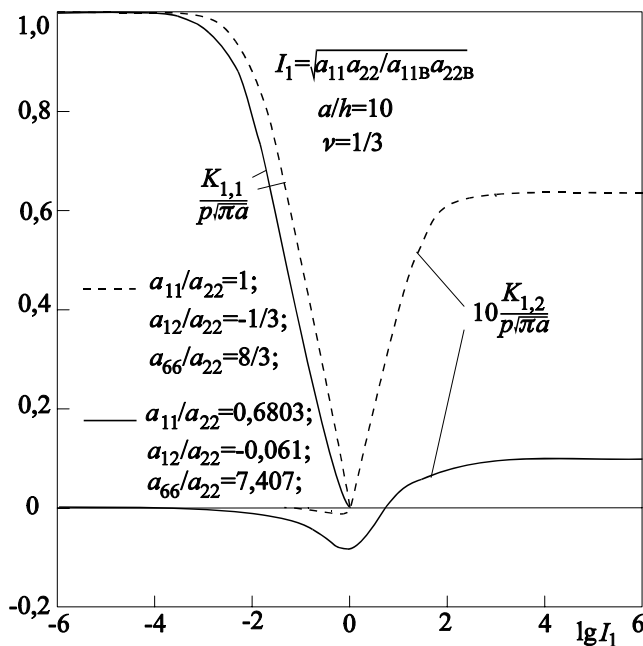


Рис. 35.3

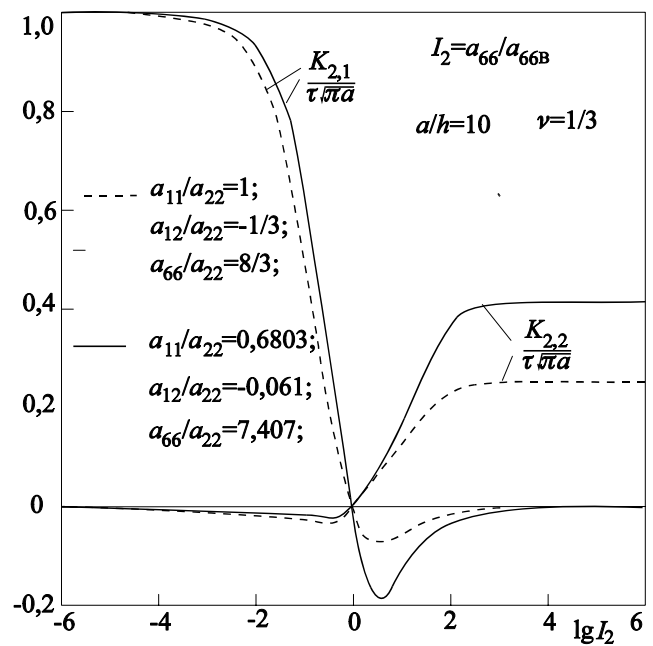


Рис. 35.4

Аналіз результатів дає можливість зробити такі висновки: УКІН  $K_{1,2}$  істотно залежить від ступеню ортотропії матриці; УКІН  $K_{2,2}$  чутливий до ортотропії лише для достатньо жорстких включень ( $I_2 > 10$ ), а  $K_{2,1}$  – коли жорсткості матриці і включення є величинами одного порядку; на зміну  $K_{1,1}$  міра ортотропії матриці впливає слабо.

Дія зосереджених сил та крайових дислокацій

У випадку дії зосереджених чинників досліджене [514, 1005] ізотропне включення ( $a_{11B}/a_{22B} = 1$ ,  $a_{12B}/a_{22B} = -1/3$ ,  $a_{66B}/a_{22B} = 8/3$ ) уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  у волокнистому склопластику, для якого  $\{E_x, E_y, G_{xy}\} = \{4,76; 2,07; 0,23\} \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{xy} = 0,149$  [43].

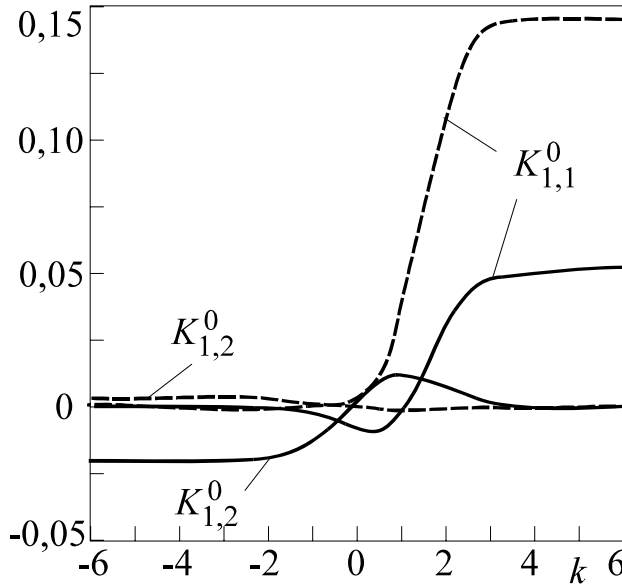


Рис. 35.5. Залежність УКІН від відносної жорсткості включення для зосередженої сили і крайової дислокації

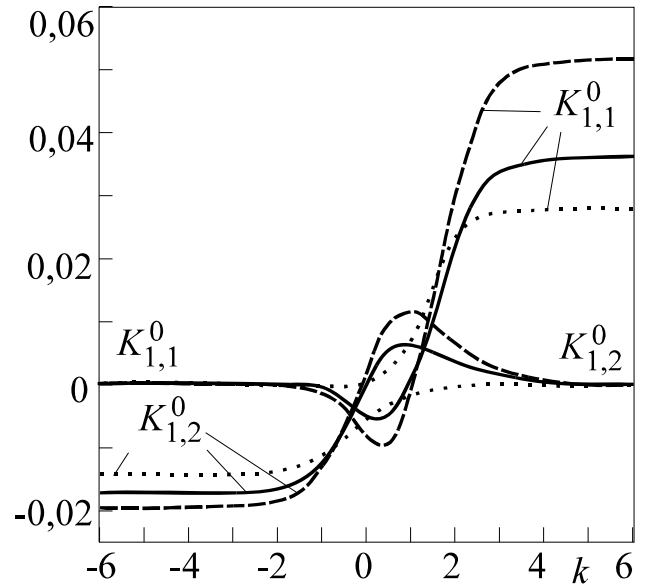


Рис. 35.6. Вплив відносної жорсткості включення та міри анізотропії матеріалу на УКІН

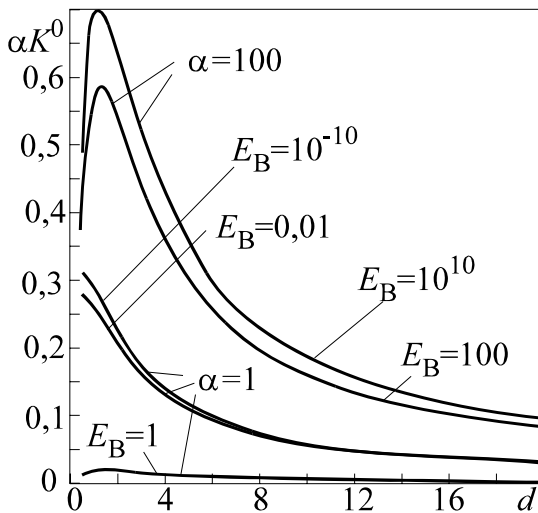


Рис. 35.7. Залежність величини  $K^0$  від точок розміщення зосереджених сил

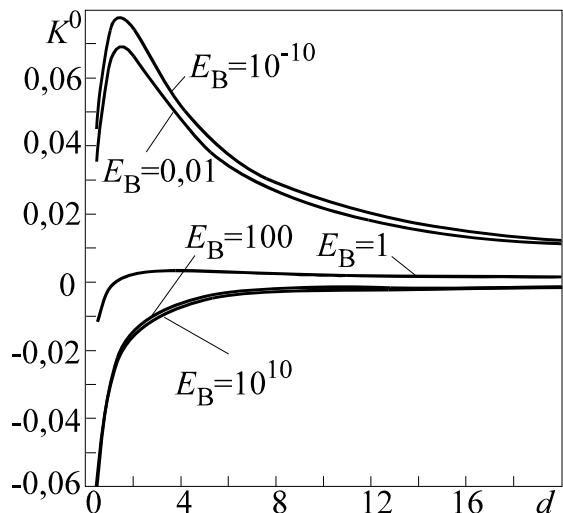


Рис. 35.8. Залежність величини  $K^0$  від точок розміщення крайових дислокацій

На рис. 35.5 штриховими лініями відображені залежності нормованих УКІН  $K_{i,j}^0 = K_{i,j} \sqrt{a} / P$  від відносної жорсткості включення  $k = \lg(\sqrt{a_{11B} a_{22B}} / a_{11} a_{22})$ , коли у точці  $(0, a)$  середовища прикладена зосереджена сила  $(0, P)$ . Суцільні лінії відображають залежність відповідно нормованих УКІН  $K_{i,j}^0 = K_{i,j} \sqrt{a} / (Gb)$ , якщо у тій же точці розміщена крайова дислокація з вектором Бюргерса  $(b, 0)$ . Вже при  $k = -3$  (відношення модулів пружності

включення і середовища порядку  $10^3$ ) значення УКІН з точністю до 1% збігаються зі значеннями, обчисленими за формулами (35.47) для абсолютно жорсткого включення; при  $k = 3$  – зі значеннями, обчисленими для тріщини згідно виразів (35.46).

Рис. 35.6 відображає вплив відносної жорсткості включення та міри анізотропії матриці на зміну УКІН у тілі. Пунктирна лінія відповідає ізотропній матриці, штрихова – матриці з волокнистого склопластику, суцільна – склотекстоліту  $\{E_x, E_y, G_{xy}\} = \{2,15; 1,98; 0,401\} \cdot 10^4$  Мпа,  $\nu_{xy} = 0,152$  [43]. У точці  $(0, a)$  середовища розміщена крайова дислокація з вектором Бюргерса  $(b, 0)$ . У даному випадку, в анізотропному матеріалі біля вістря неоднорідності виникають більші напруження.

На рис. 35.7 і 35.8 подані залежності величини  $K^0 = K_{11}^0 + K_{21}^0$ , яка відповідно до виразу (35.45) визначає асимптотичну поведінку напружень  $\sigma_{yy}$  на продовжені осі включення від параметра  $d = c/a$ , коли симетрично по обидва боки від осі включення у точках  $(0, c)$  і  $(0, -c)$  прикладені протилежно спрямовані сили  $(0, P)$  та  $(0, -P)$  чи розміщені крайові дислокації  $(b, 0)$  та  $(-b, 0)$  відповідно. Кожна лінія відповідає іншому значенню модуля пружності  $E_B = 1/a_{11B}$  включення. З рис. 35.7 видно, що для жорсткіших від середовища включень існує певне значення величини  $d$ , за якого  $K^0$  досягає екстремального значення. У випадку крайових дислокацій (рис. 35.8), спостерігається протилежний ефект:  $K^0$  має екстремуми, якщо включення податніші за середовище.

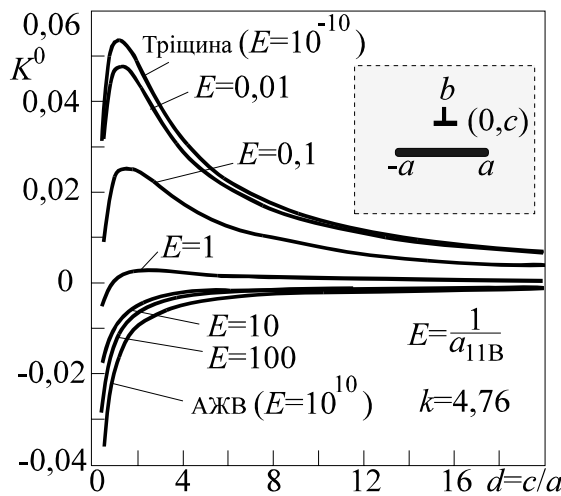


Рис. 35.9

На рис. 35.9 [514] відображена залежність величини

$$K^0 = \frac{k\sqrt{a}}{bE_x} (K_{11} + K_{21}),$$

яка відповідно до виразу (35.45) визначає асимптотичну поведінку напружень  $\sigma_{yy}$  на продовжені осі включення від параметра  $d = c/a$ , коли лише з одного боку від осі включення у точці  $(0, c)$  розташована крайова дислокація  $(b, 0)$ . Матеріал матриці – волокнистий склопластик  $\{E_x, E_y, G_{xy}\} = \{4,76; 2,07; 0,23\} \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{xy} = 0,149$ . Кожна лінія відповідає іншому значенню модуля пружності  $E_B = 1/a_{11B}$  включення. Для податніших від середовища включень існує певне значення величини  $d$ , за якого  $K^0$  досягає екстремального значення.

### 35.8. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних шаруватих структур з чужорідними включеннями

Розглянемо [945] плоску задачу теорії пружності для пакету анізотропних смуг  $S_j$  ( $j = -M, \dots, L$ ) заввишки  $H_j$  з пружними характеристиками  $a_{kmj}$  ( $k, m = 1, 2, 6$ ). Висота крайніх смуг може бути скінченною або безмежно великою. Вісь  $Ox$  основної системи декартових координат  $xOy$  спрямуємо вздовж лінії розмежування смуг  $S_0$  і  $S_{-1}$ . В середині смуг  $S_j$  уздовж відрізків  $L'_j$  розміщені тонкі пружні неоднорідності, нахилені під кутами  $\alpha_j$  до ліній поділу матеріалів  $y = y_{0j}$  ( $j = -M + 1, \dots, L$ ). У смугах може бути декілька включень, або їх може не бути зовсім. Включення можуть також розміщуватися на межі фаз. У центрі  $O_j$  відрізків  $L'_j$  розмістимо початок двох локальних систем координат  $x_j O_j y_j$  і  $s_j O_j n_j$ , пов'язаних між собою залежністю

$$z \equiv x + iy = z_j + z_{0j}, \quad z_j \equiv x_j + iy_j, \quad s_j + in_j = z_j e^{-i\alpha_j}. \quad (35.48)$$

Координати точок  $O_j$  в основній системі координат  $xOy$  позначені  $z_{0j}$ .

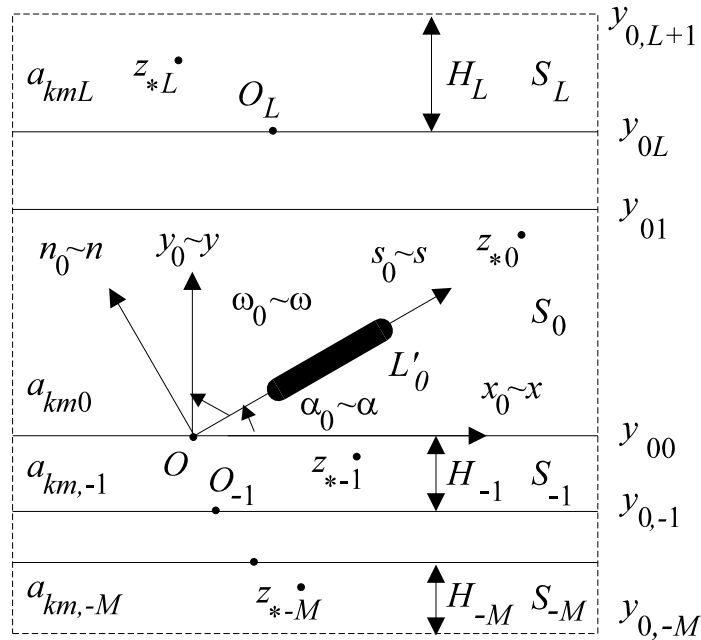


Рис. 35.10. Схема багат шарового середовища з тонкими включеннями

На лініях  $y = y_{0j}$  розмежування матеріалів смуг  $S_j$  і  $S_{j-1}$  виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma^j = \sigma^{j-1} \quad (y = y_{0j}, \quad j = -M + 1, \dots, L), \quad (35.49)$$

де  $\sigma^j = \|\sigma_{yy}^j, \sigma_{xy}^j, u_{x,x}^j, u_{y,x}^j\|$ .

На межах пакету задаємо зусилля або переміщення; напруження також збурюють сили  $\mathbf{P}^j = P_1^j + iP_2^j$  та крайові дислокації з векторами Бюргерса  $\mathbf{b}^j = b_1^j + ib_2^j$ , розташовані у точках  $z_{*j} = x_{*j} + iy_{*j}$  смуг  $S_j$ .

За принципом спряження континуумів різної вимірності вплив тонкого включення на напружено-деформований стан тіла зводиться до утворення на  $L'_j$  стрибків вектора напружень та похідної від вектора переміщень

$$\left\| \left[ \sigma_{nn}^{j-} - \sigma_{nn}^{j+}, \sigma_{sn}^{j-} - \sigma_{sn}^{j+}, \frac{\partial}{\partial s_j} [u_{s_j}^{j-} - u_{s_j}^{j+}], \frac{\partial}{\partial s_j} [u_{n_j}^{j-} - u_{n_j}^{j+}] \right] \right\| = \left\| [f_1^j(s_j), f_2^j(s_j), f_4^j(s_j), f_5^j(s_j)] \right\| \equiv \mathbf{f}^j(s_j) \quad (s_j \in L'_j), \quad (35.50)$$

причому  $\mathbf{f}^j(s_j) = 0$ , якщо  $s_j \notin L'_j$ . Функції стрибка, взагалі кажучи, невідомі.

Так само, як і у § 34, розв'язок  $\boldsymbol{\sigma}^j$  задачі у смугі  $S_j$  можна подати у вигляді суперпозиції однорідного  $\boldsymbol{\sigma}^{0j}$ , породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень, і збуреного  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j$  розв'язків. У свою чергу,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j$  є сумою основного збуреного розв'язку  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{0j}$  для безмежної площини з притаманними  $S_j$  механічними властивостями і включеннями (якщо у  $S_j$  включень немає, то  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{0j} = 0$ ) та збуреного коригувального  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{1j}$ , який враховує скінченність висоти смуги та вплив сусідніх смуг, не породжуючи стрибків напружень і переміщень:

$$\boldsymbol{\sigma}^j(z) = \boldsymbol{\sigma}^{0j}(z) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^j(z) = \boldsymbol{\sigma}^{0j}(z) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{0j}(z) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{1j}(z) \quad (z \in S_j). \quad (35.51)$$

Однорідний розв'язок відповідає зовнішньому навантаженню та задовольняє умови ідеального механічного контакту (35.49). Під час переходу через вісь включень він не викликає стрибків напружень і переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти нульові граничні умови, умови ідеального механічного контакту на лініях поділу матеріалів та породжувати стрибки напружень і похідних від переміщень (35.50).

Методика знаходження розв'язку задачі аналогічна до описаної для антиплоскої задачі теорії тонких включень в ізотропному (§ 22) та анізотропному (§ 23) середовищах, а також для плоскої задачі шаруватого ізотропного середовища (§ 34).

В ролі окремого прикладу розглянемо кусково-однорідну анізотропну площину, яка складається із двох півплощин  $S_1$  і  $S_2$ . Вважатимемо для означеності, що всередині півплощини  $S_2$  паралельно до межі поділу матеріалів  $y = 0$  розміщене тонке пружне включення (координати центру  $-z_{02} = iH$ ); а в точці  $z_{*2}$  діють зосереджена сила та крайова дислокація. Включення має довжину  $2a$  і сталу товщину  $2h$ .

Розв'язком для включення всередині однорідної площини відповідно до (35.24) є

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{0(2)} = \frac{i}{4} \left[ \left( \mathbf{t}(z^{(2)}) + \mathbf{t}(\bar{z}^{(2)}) \right) \mathbf{R}^{22} + \left( \mathbf{t}(z^{(2)}) - \mathbf{t}(\bar{z}^{(2)}) \right) \mathbf{E} \right]. \quad (35.52)$$

Залежність (35.52) – основний збурений розв'язок для півплощини  $S_2$ . Відповідний розв'язок для півплощини  $S_1$  внаслідок відсутності у ній включень дорівнює нулю.

Задовольнивши умови ідеального механічного контакту між півплощинами, знайдемо збурений коригувальний розв'язок

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{1(2)} = \frac{1}{8i} \left[ \mathbf{t}(z^{p(2)}) \mathbf{P} + \mathbf{t}(\bar{z}^{p(2)}) \mathbf{Q} \right], \quad (35.53)$$

де

$$z_k^{(2)} = x + \mu_k^{(2)} y - \bar{\mu}_k^{(2)} H \quad (k = 1, 2),$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{M}^{22})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \mathbf{M}^{22} (\mathbf{K} \bar{\mathbf{M}}^{12})^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \mathbf{K} \mathbf{M}^{22}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{M}^{22})^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{K}) \mathbf{M}^{22} (\mathbf{K} \bar{\mathbf{M}}^{12})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \mathbf{K} \mathbf{M}^{22},$$



Підставивши повний розв'язок для півплощини  $S_2$  в умови взаємодії (35.32), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_2} \mathbf{f}(t) \mathbf{V} dt + it(x_2) \mathbf{R}^{22} \mathbf{B} - \frac{i}{4} \mathbf{t}(z^{p(2)}) \mathbf{P} \mathbf{B} - \frac{i}{4} \mathbf{t}(\bar{z}^{p(2)}) \mathbf{Q} \mathbf{B} = \\ = 2\mathbf{N}_{-a} \mathbf{V} - 2\boldsymbol{\sigma}^{0(2)} \mathbf{B}, \quad f_4 = k_1 f_1 + k_2 f_2 \quad (x_2 \in [-a; a]) \end{aligned} \quad (35.54)$$

з додатковою умовою

$$\int_{-a}^a \mathbf{f}(t) dt = 2h(\mathbf{N}_{-a} - \mathbf{N}_a). \quad (35.55)$$

Числові розрахунки з використанням методу колокацій виконано для півплощини  $S_2$  з волокнистого склопластику  $\{E_x; E_y; G_{xy}\} = \{4,76; 2,07; 0,23\} \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{xy} = 0,149$ ; півплощини  $S_1$  зі склотекстоліту  $\{E_x; E_y; G_{xy}\} = \{2,15; 1,98; 0,401\} \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{xy} = 0,152$ , або абсолютно податного чи абсолютно жорсткого матеріалу (відповідно суцільна, пунктирна та штрихова лінії на рис. 35.11, 35.12). Включення є ізотропним зі змінюваним модулем пружності. Воно заглиблене на  $d \equiv H/a = 1$  від межі поділу півплощин  $y=0$ .

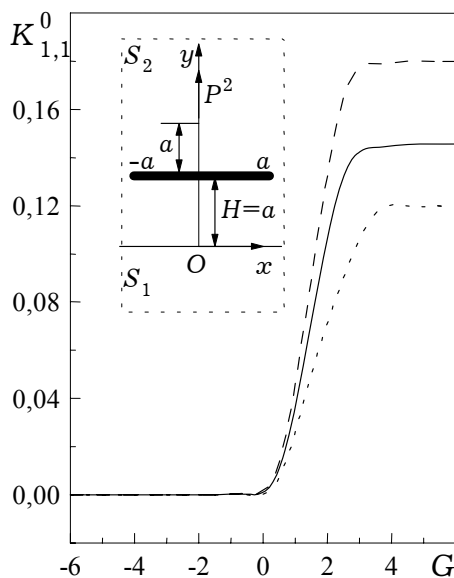


Рис. 35.11

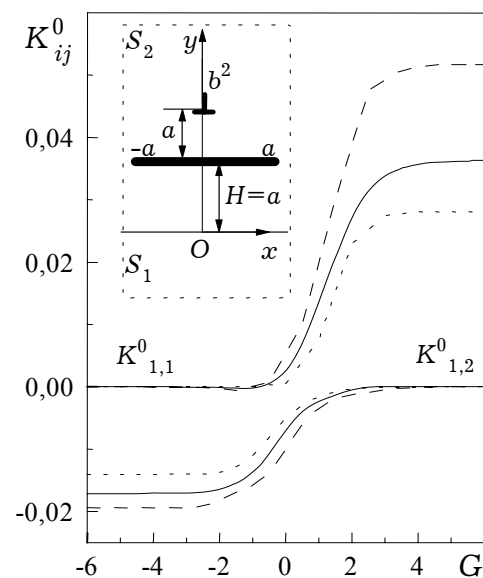


Рис. 35.12

Рис. 35.11 відображає залежність безрозмірних узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН)  $K_{ij}^0 = K_{ij} \sqrt{a} / P^2 \sqrt{\pi}$  від параметра жорсткості включення  $G = \lg\left(\sqrt{a_{11B} a_{22B} / a_{112} a_{222}}\right)$ . У точці  $(0, 2a)$  півплощини  $S_2$  діє зосереджена сила  $(0, P^2)$ . Рис. 35.12 стосується аналогічної залежності, коли у точці  $(0, 2a)$  півплощини міститься крайова дислокація  $(b^2, 0)$ . При такому навантаженні  $K_{ij}^0 = K_{ij} a_{662} \sqrt{a} / b^2 \sqrt{\pi}$ .

Для  $G > 3$  та  $G < -3$  числові розв'язки з точністю до 1% виходять на граничні значення, властиві розв'язкам для щілини та абсолютно жорсткого включення відповідно.

Абсолютна жорсткість чи податність  $S_1$  еквівалентна задачі для анізотропного півпростору  $S_2$  із защемленим чи вільним краєм відповідно. Незалежно від пружних властивостей півплощини  $S_1$  відповідна суцільна лінія графічної залежності УКІН завжди лежатиме між пунктирною та штриховою.

### § 36. Сила, що діє в ізотропному середовищі на крайову дислокацію поблизу тонкого дефекту

Пластичне деформування та руйнування матеріалу поблизу концентраторів напружень тісно пов'язані з переміщенням у цій зоні дислокацій. Однією з важливих характеристик, що визначають рухливість дислокацій, є сила, що діє на дислокацію. Характерні особливості цієї сили досить ґрунтовно вивчені стосовно взаємодії дислокацій з такими дефектами, як скінченні та півбезмежні тріщини (щілини) [1572, 1456, 1299, 1448]. Однак взаємодія дислокацій з іншими тонкими неоднорідностями, зокрема, абсолютно жорсткими включеннями (АЖВ) і абсолютно жорсткими тонкими плівками (АЖТП), досліджена дуже мало. Праці [1652, 1390, 1590] містять, головним чином, числові результати аналізу взаємодії дислокацій з абсолютно жорстким еліпсоїдним та еліптичним (зокрема, видовженим чи лінійним) включеннями. Вивчена також взаємодія крайової дислокації з пружним коловим циліндром [1253]. У § 26 вивчені питання сили, що діє на гвинтову дислокацію поблизу тонкого пружного включення, та емісії гвинтових дислокацій з його поверхні. У цьому параграфі розглядається сила, що діє на крайову дислокацію поблизу тонкого включення [952, 940].

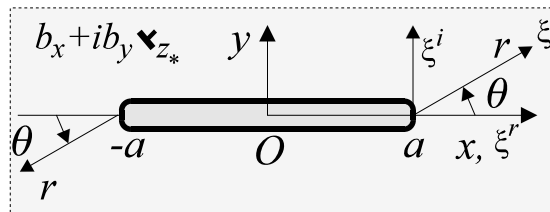


Рис. 36.1. Крайова дислокація поблизу включення

У п. 32.3 досліджена взаємодія крайової дислокації з тонкостінними (стрічковими) включеннями і, зокрема, отримані аналітичні розв'язки для поля напружень та узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень біля математичного розрізу (тріщини) і абсолютно жорсткої тонкої плівки (абсолютно жорсткого включення) скінченної або півбезмежної довжини (ширини). Спираючись на ці результати та формулу Піча – Келера [461, 1065, 111], яка означає силу, що діє на дислокацію у точці  $z_*$ , отримуємо для крайової дислокації поблизу тонкого включення (рис. 36.1)

$$F_x(z_*) = b_1 \sigma_{xy}^{*0}(z_*) + b_2 \sigma_{yy}^{*0}(z_*); \quad F_y(z_*) = -b_1 \sigma_{xx}^{*0}(z_*) - b_2 \sigma_{xy}^{*0}(z_*), \quad (36.1)$$

де  $b_1 \sim b_x$ ,  $b_2 \sim b_y$  – компоненти вектора Бюргерса дислокації; індексом " $*0$ " відзначене поле напружень у точці  $z_*$  без урахування власного поля напружень від дислокації у цій точці. Якщо крім дислокації в точці  $z_*$  на тіло не діють інші чинники, то це є збурене поле напружень у точці  $z_*$  розташування дислокації. Слід зазначити, що хоча у більшості наукових праць і використовують формулу (36.1), деякі автори застосовують іншу. У книзі А.М.Косевича [461, с. 40] можна довідатися, що за пропозицією Віртмана (J.Weertman) для можливості врахування непружної зміни об'єму під час переповзання дислокацій компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}$  слід заступити компонентами девіатора напружень  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk} / 3$ . Зрештою, таке коригування має значення лише для дислокації крайової, а не гвинтової.

Тоді згідно з (30.24) та (32.10) для абсолютно жорсткого включення уздовж відрізка  $[-a; a]$  за дії ізольованої дислокації

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{*0}(z) - i\sigma_{xy}^{*0}(z) &= \frac{1}{2(1+\kappa)} \left[ t_1^{*0}(z) - \kappa t_1^{*0}(\bar{z}) - (z-\bar{z}) \overline{t_1^{*0}(z)} \right], \\ \sigma_{xx}^{*0}(z) &= -\frac{1}{2(1+\kappa)} \operatorname{Im} \left[ 3t_1^{*0}(z) + \kappa t_1^{*0}(\bar{z}) + (z-\bar{z}) \overline{t_1^{*0}(z)} \right], \\ t_1^{*0}(z) &= \frac{i\phi}{l_2^+} \left[ \kappa f_4^* K_1(z, z_*, \kappa^{-1}) - \overline{f_4^* L_1(z, z_*)} \right], \quad l_2^+ = \frac{\kappa}{2G(1+\kappa)}.\end{aligned}\quad (36.2)$$

Аналогічно для тріщини згідно з виразами (30.24), (30.9)

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{*0}(z) - i\sigma_{xy}^{*0}(z) &= \frac{G}{1+\kappa} \left[ t_4^{*0}(z) + t_4^{*0}(\bar{z}) - (z-\bar{z}) \overline{t_4^{*0}(z)} \right], \\ \sigma_{xx}^{*0}(z) &= -\frac{G}{1+\kappa} \operatorname{Im} \left[ 3t_4^{*0}(z) - t_4^{*0}(\bar{z}) + (z-\bar{z}) \overline{t_4^{*0}(z)} \right], \\ t_4^{*0}(z) &= \frac{2i\phi G}{l_1^+} \left[ f_4^* K_1(z, z_*, -1) + \overline{f_4^* L_1(z, z_*)} \right], \quad l_1^+ = \frac{2G}{1+\kappa},\end{aligned}\quad (36.3)$$

$f_4^* = b_1 + ib_2$ . Причому тут так само, як і для (36.2),  $\phi = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}$  (для плоского напруженого стану  $\phi = (1+\nu)/(8\pi)$ ).

Враховуємо, що

$$\begin{aligned}K_1(z, z_*, \kappa^{-1}) &= -ie^{i\alpha_1} \left\{ \frac{1}{z-z_*} \left[ 1 - \frac{X(z_*)}{X(z)} \right] - \frac{1}{\kappa(z-\bar{z}_*)} \left[ 1 - \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z)} \right] + \frac{1-\kappa}{\kappa X(z)} \right\}, \\ L_1(z, z_*) &= -ie^{-i\alpha_1} \frac{(\bar{z}_* - z_*)}{(z-\bar{z}_*)^2} \left[ \frac{a^2 - z\bar{z}_*}{X(z)X(\bar{z}_*)} + 1 \right],\end{aligned}\quad (36.4)$$

де  $X(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ ;  $\alpha_1$  – кут, утворений з віссю  $Ox$  вектором Бюргера, який у цьому випадку без зменшення загальності можна вважати нульовим. Тому після використання граничних переходів

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \left[ \frac{1}{z-z_*} \left( \frac{X(z_*)}{X(z)} - 1 \right) \right] = \frac{z_*}{a^2 - z_*^2}, \quad \lim_{z \rightarrow z_*} \left[ \frac{1}{(z-\bar{z}_*)^2} \left( \frac{a^2 - z\bar{z}_*}{X(z)X(\bar{z}_*)} + 1 \right) \right] = \frac{-a^2}{2(\bar{z}_*^2 - a^2)}$$

отримуємо

$$\begin{aligned}t_1^{*0}(z_*) &= \frac{\phi}{l_2^+} \left\{ f_3^* \left[ \frac{1-\kappa}{X(z_*)} + \frac{1}{\bar{z}_* - z_*} \left( 1 - \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} \right) + \frac{\kappa z_*}{z_*^2 - a^2} \right] - \overline{f_3^*} \left[ \frac{\bar{z}_* - z_*}{(z_* - \bar{z}_*)^2} \left( \frac{a^2 - z\bar{z}_*}{X(z)X(\bar{z}_*)} + 1 \right) \right] \right\}, \\ t_1^{*0}(\bar{z}_*) &= \frac{\phi}{l_2^+} \left\{ f_3^* \left[ \frac{1-\kappa}{X(\bar{z}_*)} - \frac{\kappa}{z_* - \bar{z}_*} \left( 1 - \frac{X(z_*)}{X(\bar{z}_*)} \right) - \frac{\bar{z}_*}{\bar{z}_*^2 - a^2} \right] + \overline{f_3^*} \left[ \frac{(\bar{z}_* - z_*) a^2}{2(\bar{z}_*^2 - a^2)^2} \right] \right\}, \\ -(z-\bar{z}) \overline{t_1^{*0}(z_*)} &= \left\{ \overline{f_3^*} \left[ \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left( \frac{X(z_*)}{X(\bar{z}_*)} - 1 \right) - \frac{\bar{z}_* X(z_*)}{X^3(\bar{z}_*)} + \frac{(1-\kappa)\bar{z}_*(z_* - \bar{z}_*)}{X^3(\bar{z}_*)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa(z_* - \bar{z}_*) \frac{a^2 + 2\bar{z}_*^2}{2(\bar{z}_*^2 - a^2)^2} \right] - f_3^* \left[ \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left( \frac{2a^4 + 2\bar{z}_*^3 z_* - a^2 z_*^2 - 3a^2 \bar{z}_*^2}{X(z)X(\bar{z}_*)} - 2 \right) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (36.5)$$

Якщо ядро дислокації міститься на осі абсцис у точці  $(x_*, 0)$ , то, з огляду на граничні рівності

$$\lim_{y_* \rightarrow 0} \frac{1}{z_* - \bar{z}_*} \left( 1 - \frac{X(\bar{z}_*)}{X(z_*)} \right) = \begin{cases} x_* / (x_*^2 - a^2) & (|x_*| > a), \\ x_* / (a^2 - x_*^2) - i/y_* & (|x_*| > a); \end{cases}$$

$$\lim_{y_* \rightarrow 0} X(z_*) = \begin{cases} \text{sign}(x_*) \sqrt{x_*^2 - a^2} & (|x_*| > a), \\ [\pm] \sqrt{a^2 - x_*^2} & (|x_*| > a), \end{cases}$$

маємо за умови  $|x_*| > a$

$$t_1^*(z_*) \rightarrow t_1^*(\bar{z}_*) \rightarrow \frac{\phi(1-\kappa)}{l_2^+} f_3^* T^*(x_*), \quad -(z_* - \bar{z}_*) \overline{t_1^{*'}(z_*)} \rightarrow 0,$$

$$T^*(x_*) = \frac{\text{sign}(x_*)}{\sqrt{x_*^2 - a^2}} - \frac{x_*}{x_*^2 - a^2},$$

а якщо  $|x_*| < a$ , то

$$t_1^*(z_*) \rightarrow \frac{\phi}{l_2^+} \left[ f_3^* \left( \frac{x_*(1+\kappa)}{x^2 - a^2} \Big|_{[\mp]} \frac{i(1-\kappa)}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} + \frac{i}{y_*} \right) - \overline{f_3^*} \frac{i}{y_*} \right],$$

$$t_1^*(\bar{z}_*) \rightarrow \frac{\phi}{l_2^+} \left[ f_3^* \left( -\frac{x_*(1+\kappa)}{x^2 - a^2} \Big|_{[\pm]} \frac{i(1-\kappa)}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} + \frac{i\kappa}{y_*} \right) \right],$$

$$-(z_* - \bar{z}_*) \overline{t_1^{*'}(z_*)} \rightarrow \frac{\phi}{l_2^+} \left( \overline{f_3^*} \frac{i}{y_*} - f_3^* \frac{2i}{y_*} \right).$$

Тут і надалі (формули (36.10)–(36.12)) беремо арифметичне значення кореня; верхній знак у квадратних дужках стосується верхнього берега проміжку  $[-a; a]$ , нижній – його нижнього берега.

Таким чином, для дислокації на продовженні осі абсолютно жорсткої тонкої плівки

$$\left\{ \sigma_{yy}^{*0}(x_*), \sigma_{xy}^{*0}(x_*), \sigma_{xx}^{*0}(x_*) \right\} =$$

$$= -\frac{(1-\kappa)^2 \phi G}{\kappa} T^*(x_*) \left\{ b_2, b_1, \frac{3+\kappa}{1-\kappa} b_2 \right\} \quad (|x_*| > a); \quad (36.6)$$

$$\left\{ F_x(x_*), F_y(x_*) \right\}^{\text{АЖВ}} =$$

$$= -\frac{(1-\kappa)\phi G}{\kappa} T^*(x_*) \left\{ (1-\kappa)b^2, -4b_1 b_2 \right\}, \quad b^2 = b_1^2 + b_2^2 \quad (|x_*| > a), \quad (36.7)$$

а для тріщини

$$\left\{ F_x(x_*), F_y(x_*) \right\}^{\text{ТР}} = 4\phi G T^*(x_*) \left\{ b^2, -2b_1 b_2 \right\} \quad (|x_*| > a). \quad (36.8)$$

Порівнюючи отримані вирази для абсолютно жорсткого включення і тріщини, можна стверджувати, що на продовженні осі дефекту

$$\left\{ F_x(x_*), F_y(x_*) \right\}^{\text{АЖВ}} = -\frac{(1-\kappa)^2}{4\kappa} \left\{ F_x(x_*), F_y(x_*) \right\}^{\text{ТР}}. \quad (36.9)$$

Якщо дислокація наближається до краю дефекту, то

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{*0}(x_*) &= \frac{\phi G}{\kappa} \left[ -b_2 \frac{(1+\kappa)^2 x_*}{x_*^2 - a^2} [\pm] b_1 \frac{1-\kappa^2}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} + b_1 \frac{1+\kappa^2}{y_*} \right], \\ \sigma_{xx}^{*0}(x_*) &= \frac{\phi G}{\kappa} \left[ -b_2 \frac{(1+\kappa)(3-\kappa)x_*}{x_*^2 - a^2} [\pm] b_1 \frac{(1-\kappa)(3-\kappa)}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} - b_1 \frac{1+\kappa^2}{y_*} \right], \\ \sigma_{xy}^{*0}(x_*) &= \frac{\phi G}{\kappa} \left[ -b_1 \frac{(1+\kappa)^2 x_*}{x_*^2 - a^2} [\mp] b_2 \frac{1-\kappa^2}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} - b_2 \frac{1+\kappa^2}{y_*} \right].\end{aligned}$$

Тоді для абсолютно жорсткого включення

$$\begin{aligned}F_x(x_*) &= -\frac{\phi G (1+\kappa)^2 (b_1^2 + b_2^2)}{\kappa} \frac{x_*}{x_*^2 - a^2}, \\ F_y(x_*) &= \frac{\phi G}{\kappa} \left[ 4b_1 b_2 (1+\kappa) \frac{x_*}{x_*^2 - a^2} [\mp] \frac{1-\kappa}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} \left[ (3-\kappa)b_1^2 - (1+\kappa)b_2^2 \right] + \frac{1+\kappa^2}{y_*} b^2 \right];\end{aligned}\quad (36.10)$$

для тріщини

$$F_x(x_*) = 0, \quad F_y(x_*) = \frac{\phi G}{\kappa} \left[ [\mp] \frac{8}{\sqrt{a^2 - x_*^2}} b_1^2 + \frac{2}{y_*} b^2 \right].\quad (36.12)$$

Вираз для сили, що діє на дислокацію у точці  $\xi_*$  поблизу півбезмежного абсолютно жорсткого включення, розташованого уздовж осі  $\text{Re } \xi \leq 0$ , можна отримати із виразів

$$\begin{aligned}K_1(z, z_*, \kappa^{-1}) &= ie^{i\alpha_1} \left[ \frac{1}{\xi_* - \xi} \left( 1 - \sqrt{\frac{\xi_*}{\xi}} \right) - \frac{1}{\kappa(\bar{\xi}_* - \xi)} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\xi}_*}{\xi}} \right) \right], \\ L_1(z, z_*) &= ie^{-i\alpha_1} \frac{(\bar{\xi}_* - \xi)}{2\sqrt{\xi \bar{\xi}_*} (\sqrt{\xi} + \sqrt{\bar{\xi}})^2}, \quad z = \xi + a, \quad z_* = \xi_* + a, \quad a \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Це дає такі вирази для напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{*0}(\xi_*) - i\sigma_{xy}^{*0}(\xi_*) &= \frac{\phi G}{2\kappa r} [-b_1 B_2 + ib_1 B_1 - b_2 B_4 + ib_2 B_3], \\ \sigma_{xx}^{*0}(\xi_*) &= \frac{\phi G}{2\kappa r} [b_1 B_5 - b_2 B_6], \quad \xi = r \cdot e^{i\theta},\end{aligned}\quad (36.13)$$

де

$$\begin{aligned}B_1 &= -\kappa^2 - \frac{1}{2} + \kappa \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \kappa \cos 3\theta, \quad B_2 = -(1+\kappa^2) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \kappa \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \kappa \sin 3\theta, \\ B_3 &= (1+\kappa^2) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \kappa \sin \theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta + \kappa \sin 3\theta, \quad B_4 = -\frac{5}{2} - \kappa^2 + 3\kappa \cos \theta + \frac{3}{2} \cos 2\theta - \kappa \cos 3\theta, \\ B_5 &= -(1+\kappa^2) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\kappa \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \kappa \sin 3\theta, \quad B_6 = \kappa^2 - \frac{3}{2} + \kappa \cos \theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta + \kappa \cos 3\theta.\end{aligned}$$

Тому остаточно

$$F_x = -\frac{\phi G}{2\kappa r} [b_1^2 B_1 + b_2^2 B_4 + b_1 b_2 (B_2 + B_3)], \quad F_y = -\frac{\phi G}{2\kappa r} [b_1^2 B_5 - b_2^2 B_3 - b_1 b_2 (B_1 + B_6)]. \quad (36.14)$$

Якщо ядро дислокації лежить на продовженні осі включення, то

$$F_x(r) = \frac{\phi G}{2\kappa r} (1-\kappa)^2 b^2, \quad F_y(r) = -\frac{\phi G}{2\kappa r} 4(1-\kappa) b_1 b_2, \quad (36.15)$$

а в околі берега півбезмежного абсолютно жорсткого включення –

$$F_x(\xi^r) = -\frac{\phi G}{\kappa} \frac{b^2 (1+\kappa)^2}{2\xi^r}, \quad F_y(\xi^r) = \frac{\phi G}{\kappa} \left[ \frac{b^2 (1+\kappa^2)}{\xi^i} + \frac{2(1+\kappa) b_1 b_2}{2\xi^r} \right], \quad \xi^* = \xi^r + i\xi^i. \quad (36.16)$$

Формули (36.15), (36.16) можна також отримати за допомогою відповідного граничного переходу у виразах (36.6) і (36.11).

У полярній системі координат компоненти сили, що діє на дислокацію

$$F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \quad F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta,$$

набувають для півбезмежного дефекту вигляду

$$F_r = b\sigma_{r\theta}^* = \frac{\phi G}{2\kappa r} (1-\kappa)^2 b^2, \quad F_\theta = -\frac{\phi G}{2\kappa r} \left\{ b_1^2 \left[ \left(1+\kappa^2\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin \theta + 2\kappa \sin 2\theta \right] + \right. \\ \left. + b_2^2 \left[ \left(1+\kappa^2\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin \theta - 2\kappa \sin 2\theta \right] + 4b_1 b_2 (\cos \theta - \kappa \cos 2\theta) \right\}. \quad (36.17)$$

Як і для півбезмежного розрізу [1456], радіальна складова сили, що діє на дислокацію біля півбезмежної абсолютно жорсткої тонкої плівки не залежить від полярного кута  $\theta$ , а лише від відстані дислокації до вістря дефекту.

Якщо врахувати, що у випадку півбезмежної тріщини [1456]

$$F_r^{\text{TP}} = -\frac{2\phi G b^2}{r},$$

то

$$F_r^{\text{АЖВ}} = -\frac{(1-\kappa)^2}{4\kappa} F_r^{\text{TP}}. \quad (36.18)$$

Таким чином, якщо дислокація притягується до вістря тріщини з тим більшою силою, чим менша стисливість (чим більший коефіцієнт Пуассона  $\nu$ ) матеріалу, то від вістря півбезмежної абсолютно жорсткої тонкої плівки вона відштовхується тим сильніше, чим більша стисливість (чим менший  $\nu$ ). Причому для нестисливого матеріалу ( $\nu = 0,5$ ) радіальна складова сили  $F_r = 0$ .

Потенціальна енергія дислокації

$$U = -\int F_r dr - \int r F_\theta d\theta$$

у випадку півбезмежної абсолютно жорсткої тонкої плівки дорівнює

$$U = -\frac{\phi G}{2\kappa} \left\{ (1-\kappa)^2 b^2 \ln(r) + b_1^2 \left[ 2(1+\kappa^2) \ln \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \cos \theta + \kappa \cos 2\theta \right] + \right. \\ \left. + b_2^2 \left[ 2(1+\kappa^2) \ln \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + 3 \cos \theta - \kappa \cos 2\theta \right] + 4b_1 b_2 \left( \sin \theta - \frac{\kappa}{2} \sin 2\theta \right) \right\}. \quad (36.19)$$

Результати для сили, що діє на дислокацію поблизу тріщини можна отримати аналогічно зі співвідношень (36.3). Однак найпростіше записати їх, формально підставивши значення  $\kappa = -1$  у вирази (36.1), (36.2), (36.5), (36.14)–(36.17), (36.19), так само, як одержаний вираз (36.8). Таким чином, на основі формул (36.1), (36.2), (36.5) можна записати вираз із праці

[1299] для сили, що діє на дислокацію поблизу скінченної тріщини у випадку однорідної матриці, а з (36.14), (36.15), (36.16), (36.19) впливають залежності (1)–(4), (9) праці [1456]. Підставляючи у вирази (36.4), (36.2) значення  $\kappa = -1$ , одержуємо комплексні потенціали, які описані у працях [1159, 824], де вивчається поле напружень від крайової дислокації поблизу тріщини скінченної довжини. Таке підставлення відповідає аналогії [1250] між зосередженими силами і крайовими дислокаціями, коли перехід від розв'язку для сил до розв'язку для дислокацій здійснюється формальним прийняттям  $\nu = 1$  (тоді  $\kappa = 3 - 4\nu = -1$ ). Тут можна лише зазначити, що жорстке включення моделюється розподіленими силами, а тріщина – дислокаціями (п. 30.8).

Вважаючи, що  $a \rightarrow \infty$ , отримуємо  $X(\bar{z}_*)/X(z_*) \rightarrow -1$ , і на основі (36.2) та (36.5)

$$t_1^{*0}(z_*) = \frac{i\phi}{l_2^+ y_*} (f_4^* - \bar{f}_4^*), \quad t_1^{*0}(\bar{z}_*) = \frac{i\phi\kappa}{l_2^+ y_*} f_4^*, \quad -(z_* - \bar{z}_*) t_1^{*0r}(z_*) = \frac{i\phi}{l_2^+ y_*} (f_4^* - 2f_4^*),$$

$$\left\{ \sigma_{yy}^{*0}(x_*), \sigma_{xy}^{*0}(x_*), \sigma_{xx}^{*0}(x_*) \right\} = \frac{\phi G (1 + \kappa^2)}{\kappa y_*} \{b_1, -b_2, -b_1\}$$

та вираз

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{\phi G (1 + \kappa^2)}{\kappa y_*} b^2, \quad (36.20)$$

який визначає силу, що діє на дислокацію біля жорстко защемленого краю (ЖЗК) півплощини (див. [1257] або (27) [1652]). Вважаючи  $\kappa = -1$ , одержуємо відомі вирази (3.72) [1065], (27) [1652], (34) [1448] для сили, що діє на дислокацію біля вільного краю (ВК) півплощини:

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{2\phi G}{y_*} b^2. \quad (36.21)$$

Формули (36.20) можна отримати також з виразів (36.16) або (36.17) з урахуванням граничного переходу

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \sin \theta, \sin 2\theta, \cos \theta, \cos 2\theta \right\} \frac{1}{r} = \left\{ \frac{2}{y_*}, 0, 0, 0, 0 \right\}.$$

Із рівностей (36.20), (36.21) отримуємо залежність

$$F_y^{\text{ЖЗК}} = -\frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} F_y^{\text{ВК}}. \quad (36.22)$$

Числові розрахунки у випадку пружного включення виконуються на основі виразів (30.45<sup>1</sup>) як однорідного розв'язку, що дає можливість обчислити  $t_1^{*0}(z)$ ,  $t_4^{*0}(z)$  і з використанням (30.24), (36.1) – силу, що діє на дислокацію.

## § 37. Міцність тіл з тонкими включеннями

### 37.1. Граничне навантаження для крихкого тіла з тонкостінним пружним включенням [796]

Теоретичному дослідженню руйнування поблизу гострокутних і тонкостінних включень присвячено чимало праць, зокрема, заснованих на загальнотеоретичних передумовах [76, 63, 61, 698, 1078, 909]. Вивчалася можливість застосування різних критеріальних співвідношень, у яких руйнування матриці в околі вістря абсолютно жорсткого або пружного дефекту пов'язувалося з максимальними головними, дотичними, радіальними або окружними

напруженнями, максимумом питомої енергії деформації або формозміни тощо. Для жорстких включень, зокрема, абсолютно жорстких [76, 63, 61, 698], досить добре обгрунтоване застосування критеріальної функції  $\Phi_1 = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{r} \sigma_{rr})$ . Для відносно податних включень, які узагальнюють тріщинуватий дефект, рекомендується [698]  $\sigma_{\theta\theta}$ -критерій та відповідна до нього критеріальна функція виду  $\Phi_2 = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{r} \sigma_{\theta\theta})$ . Тому можна сподіватися, що функція

$$\Phi_3 = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{r} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})),$$

яка раніше [632, 692] також використовувалася для прогнозу руйнування тіл з тріщинами і зв'язана у плоскій задачі з границею інтенсивності об'ємної деформації, виявиться зручною під час аналізу руйнування тіл з пружними тонкими прошарками.

Застосуємо критеріальні функції  $\Phi_1$ ,  $\Phi_3$  до визначення граничних зусиль в ізотропній пластинці (сталі  $E, \nu, G$ ), що перебуває в однорідному полі нормальних напружень  $\sigma_{yy}^{\infty} = p > 0$ ,  $\sigma_{xx}^{\infty} = q = \eta p$  і містить тонке пружне (сталі  $E_B, \nu_B, G_B$ ) включення завдовжки  $2a$  з серединною товщиною  $2h_0$ , орієнтоване під кутом  $\alpha$  до осі  $x$ . Локальне руйнування пов'яжемо з початком тріщиноутворення біля краю прошарку і визначимо умовою

$$\Phi_{i\theta \max} = K_0$$

– максимальне за кутом  $\theta$  значення функції  $\Phi_i$  у момент руйнування досягає опору матеріалу матриці до зародження тріщини  $K_0$ .

На основі означення функції  $\Phi_3$  та виразів (31.24) отримуємо

$$\Phi_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ (K_{1,1} - \kappa_* K_{1,2}) \cos \frac{\theta}{2} + (\kappa_* K_{2,2} - K_{2,1}) \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (37.1)$$

та породжений цією функцією кут  $\theta_*$  площини розтріскування матриці

$$\theta_* = \begin{cases} 2 \arctg \left[ \frac{(K_{2,1} - \kappa_* K_{2,2})}{(\kappa_* K_{1,2} - K_{1,1})} \right] & (K_{1,1} \neq \kappa_* K_{1,2}), \\ \pm \pi & (K_{1,1} = \kappa_* K_{1,2}), \end{cases} \quad (37.2)$$

коли функція  $\Phi_3$  досягає максимального за кутовою змінною  $\theta$  значення.

З урахуванням залежностей (37.1), (37.2) умова руйнування набуде вигляду

$$(K_{1,1} - \kappa_* K_{1,2})^2 + (\kappa_* K_{2,2} - K_{2,1})^2 = \frac{1}{2} \pi K_0^2 \quad (37.3)$$

Якщо вважати, що профіль тонкого включення близький до еліптичного, то за такого способу навантажування і формул (30.70)

$$\{K_{1,1}; K_{1,2}; K_{2,1}; K_{2,2}\} = p \sqrt{\pi a} \{B \cdot Q(\alpha, 1, \eta) + F \cdot Q(\alpha, \eta, 1); D \cdot Q(\alpha, 1, \eta) + C \cdot Q(\alpha, \eta, 1); A(1-\eta) \sin 2\alpha; V(1-\eta) \kappa_*^{-1} \sin 2\alpha\}, \quad Q(\alpha, a, b) = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha,$$

$$A = k_2 \frac{G_B/2 - G + (E_B G - E G_B/2)/m_2}{(1+\kappa)(\lambda_{21} - k_2)(1 - a\lambda_0^{0r})}, \quad B = -2G \frac{r_5 k_* (m_1 - \eta_1) + r_6 (k_0 \eta_1 - k_0^*)}{r_9},$$

$$C = \frac{r_7 (1 - m_1) + r_8 (k_1 - k_1^*)}{r_9}, \quad D = \frac{r_7 k_* (m_1 - \eta_1) + (k_0 \eta_1 - k_0^*)}{r_9}, \quad \eta_1 = \sqrt{\min(1, k)},$$



$$F = -2G \frac{r_5(1-m_1) - r_6(k_1 - k_1^*)}{r_9}, \quad V = \frac{A}{2k_2G}, \quad k_* = \frac{k_1}{k_0}, \quad k_0^* = \frac{1+\kappa}{8G}, \quad k_1^* = \frac{3-\kappa}{8G},$$

$$r_4 = (1 + a\lambda_4^0)(a\lambda_4^0 - 1) + \lambda_{41}(\lambda_{31} - a\lambda_3^0), \quad r_5 = \frac{1 + \lambda_1^0}{l_1^+}, \quad r_6 = \frac{a\lambda_3^0 - \lambda_{31}}{\Lambda_1}, \quad (37.4)$$

$$r_7 = \frac{\lambda_{41}}{l_1^+}, \quad r_8 = \frac{\lambda_4^{0'} - 1}{\Lambda_1}, \quad r_9 = r_4(1 + \kappa), \quad m_2 = \max(E, E_B), \quad m_1 = \frac{1}{k_0 m_2}, \quad k = \frac{E_B}{E},$$

Підставляючи вирази (37.4) у (37.3), визначимо граничне навантаження  $p = p_*$ :

$$p_* = K_0 \frac{\varphi^{-1/2}(\alpha, \eta)}{\sqrt{2a}} \quad \text{або} \quad \bar{p}_* \equiv p_* \frac{\sqrt{2a}}{K_0} = \varphi^{-1/2}(\alpha, \eta), \quad (37.5)$$

де

$$\varphi(\alpha, \eta) = [Q(\alpha, Q_1, Q_2)]^2 + E_2 \sin 2\alpha, \quad Q_1 = B - D + \eta(F - C),$$

$$Q_2 = F - C + \eta(B - D), \quad E_2 = (V - A)^2 (1 - \eta)^2.$$

Коли  $\eta = 1$  (всебічний рівномірний розтяг) слушний простіший вираз

$$\bar{p}_* = |F - C + B - D|^{-1}.$$

Найнебезпечнішу орієнтацію включення визначає кут  $\alpha = \alpha_*$ , за якого  $p_*$  досягає свого мінімального значення  $p_{* \min}$ :

$$\bar{p}_{* \min} \equiv p_{* \min} \sqrt{2a}/K_0 = \min \{p_{*1}, p_{*2}, p_{*3}\}, \quad (37.6)$$

причому

$$p_{*1} = 1/|Q_1|, \quad \text{коли} \quad \alpha_* = 0, \pi;$$

$$p_{*2} = 1/|Q_2|, \quad \text{коли} \quad \alpha_* = \pm \pi/2;$$

$$p_{*3} = \varphi^{-1/2}(\alpha_*, \eta), \quad \text{коли} \quad \alpha_* = \arctg R^{-1/2},$$

$$R = \frac{[Q_1(Q_2 - Q_1) + E_2]}{2E_2 - Q_2(Q_2 - Q_1)},$$

якщо під коренем виходить від'ємна величина, то значення  $p_{*3}$  у формулі (37.6) не враховується. За всебічного розтягу ( $\eta = 1$ )  $Q_1 = Q_2, E_2 = 0$  і внаслідок цього  $p_{*1} = p_{*2} = p_{*3}$ .

Критеріальна функція  $\Phi_1$  для випадку  $\eta = 1$  дає вираз

$$\bar{p}_{* \min} = \min \{q_{*1}, q_{*2}\}, \quad q_{*1} = 4|2(B + F) - (\kappa + 3)(D + C)|^{-1},$$

$$q_{*2} = 8 \left\{ (B + F) \left[ 5 \cos\left(\frac{\theta_*}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta_*}{2}\right) \right] - (D + C) \left[ 5 \cos\left(\frac{\theta_*}{2}\right) + (2\kappa + 1) \cos\left(\frac{3\theta_*}{2}\right) \right] \right\}, \quad (37.7)$$

$$\theta_* = 2 \arcsin \sqrt{[2(B + F) + (9\kappa + 7)(D + C)]/[6(B + F) + (2\kappa + 1)(D + C)]}.$$

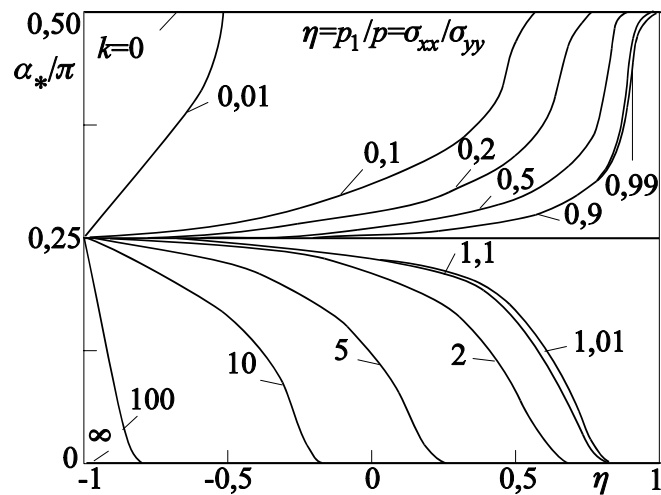
На основі виразів (37.5) – (37.7) визначалися значення зведеного граничного навантаження  $\bar{p}_*$  за рівномірного всебічного розтягу, а також зведене мінімальне граничне навантаження  $\bar{p}_{* \min}$  та кут  $\alpha_*$  найнебезпечнішої орієнтації включення для двовісного напруженого

стану за деяких значень відносної жорсткості  $k$  включення еліптичного профілю ( $a/h_0 = 10$ ,  $\nu = \nu_B = 1/3$ ).

У табл. 37.1 другий рядок відповідає значенням  $\bar{p}_{*min}$ , одержаним на основі формули (37.6) (функція  $\Phi_3$ ), коли  $\eta = 1$ ; третій рядок – за співвідношеннями (37.7) для функції  $\Phi_1$ . Помітно, що функція  $\Phi_1$  для  $k < 1$  дає завищені, а для  $k > 1$  – занижені значення граничного навантаження у порівнянні з функцією  $\Phi_3$ . Однак обидві вони прогнозують мінімальну міцність для дефектів у вигляді тріщини та абсолютно жорсткого включення.

**Таблиця 37.1. Знерозмірене граничне навантаження всебічного розтягу відповідно до двох критеріальних функцій**

$k$	$10^{10}$	$10^4$	100	10	2	0,5	0,1	0,01	0,001
$\bar{p}_{*min}$ за $\Phi_3$	4,000	4,003	4,272	7,048	33,671	27,245	3,612	1,240	1,026
$\bar{p}_{*min}$ за $\Phi_1$	3,200	3,202	3,423	5,562	25,082	46,112	6,617	2,275	1,883



**Рис. 37.1. Залежність кут найнебезпечнішої орієнтації включення від його жорсткості та параметра двовісності навантаження**

Вплив параметра  $\eta$  на кут  $\alpha_*$  найнебезпечнішої орієнтації включення за окремих значень відносної жорсткості відображений на рис. 37.1 – 37.3. У випадку одновісного розтягу найнебезпечніша орієнтація тріщини – уперек, а абсолютно жорсткого включення – уздовж напрямку дії зусиль (рис. 37.1). Діаграма граничних напружень (рис. 37.2) при  $k > 1$  якісно збігається з діаграмами праці [63] для абсолютно жорстких дефектів.

Підтверджується і сподівання того, що тріщина та абсолютно жорстка неоднорідність є найнебезпечнішими типами дефектів. Зближення пружних властивостей включення та матриці викликає різке збільшення  $\bar{p}_{*min}$  (рис. 37.3) – якщо  $k \rightarrow \infty$ , то  $\bar{p}_{*min} \rightarrow \infty$ . Однак слід врахувати, що розглянуті тут критеріальні співвідношення не беруть до відома глобальної міцності матриці, можливості руйнування включення чи безпосередньо міжфазної межі [698, 1078]. Умови цих явищ неважко додатково залучити для побудови більш повного критеріального співвідношення.

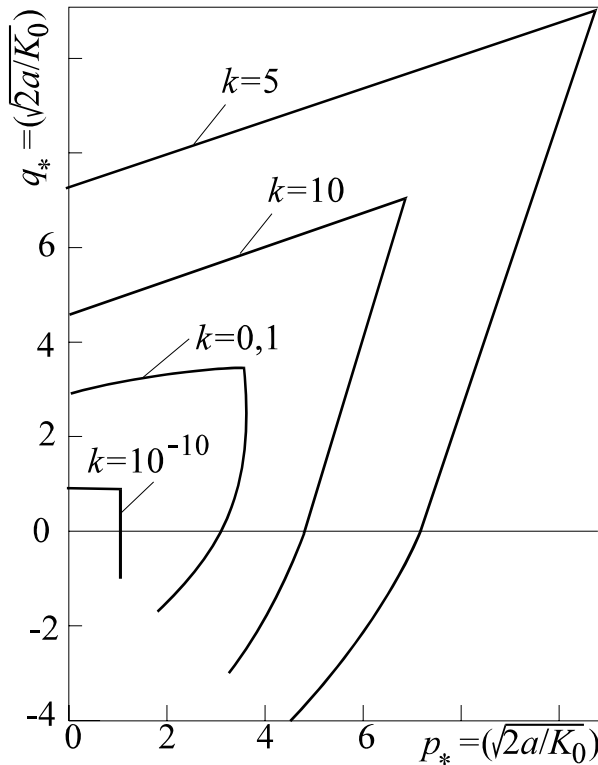


Рис. 37.2. Діаграма граничних значень для деяких значень  $k$

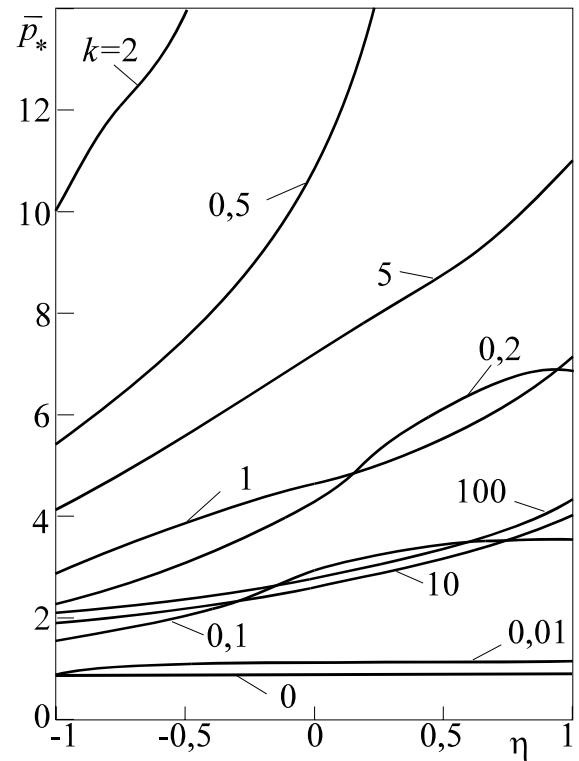


Рис. 37.3. Залежність зведеного навантаження від параметра  $\eta$

### 37.2. Міцність тіл з випадковим розподілом тонких включень [995]

У праці [147] в рамках плоскої задачі теорії пружності вперше була запропонована схема розрахунку ймовірнісних характеристик граничного навантаження за складного напруженого стану крихкого дефектного (неоднорідного) тіла за відомої умови граничного стану елемента конструкції з дефектом типу розрізу або жорсткого включення і відомому законі ймовірнісного розподілу геометричних параметрів неоднорідності у матриці.

Ця розрахункова схема, результати визначення напруженого стану § 30 і локального руйнування матеріалу (п. 37.1) біля тонкостінних пружних включень використані тут для визначення ймовірнісних характеристик міцності дискретно армованих пластин за плоского напруженого стану. Отримані результати можуть бути корисними для оцінки міцності стрічкових композитів.

Нехай крихка пластина, що містить досить віддалені (які не взаємодіють між собою) пружні тонкі включення з близьким до еліптичного профілем, перебуває у стані двовісного розтягу  $\sigma_{yy}^{\infty} \equiv p > 0$ ,  $\sigma_{xx}^{\infty} = q \equiv \eta p$ .

Геометричні параметри включення – півдовжина  $a$  центральної частини дефекту і кут  $\alpha$  між напрямками осі неоднорідності й осі ординат – є випадковими величинами з відомою густиною  $f(\alpha, a)$  їхнього сумісного розподілу в діапазоні допустимих значень  $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ ,  $|\alpha| \leq \pi/2$ . Випадковий характер має теж максимальна відносна півширина  $\bar{h} = h_0/a$  центральної частини неоднорідності, але оскільки  $0 < h_0 \ll a$ , то діапазон зміни її можливих значень досить малий і можна на першому етапі розрахунків вважати відношення  $\bar{h}$  сталим. Розкидом пружних властивостей дефектів також нехтуємо.

Граничне навантаження  $p_*$  визначимо виразом (37.5). Оскільки параметри  $a$  і  $\alpha$  випадкові, то для кожного заданого значення  $\eta$  граничне навантаження елемента пластини з поодиноким дефектом також випадкове і змінюється у межах від  $p_{\min}$  до  $p_{\max}$ , які на основі (37.5) дорівнюють

$$\begin{aligned} p_{\min}(\eta) &= \frac{K_0}{\sqrt{2a_{\max}}} \min_{\alpha} [\varphi^{-1/2}(\alpha, \eta)], \\ p_{\max}(\eta) &= \frac{K_0}{\sqrt{2a_{\min}}} \max_{\alpha} [\varphi^{-1/2}(\alpha, \eta)]. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Значення величини  $p_{\min}(\eta)$  обчислене у п. 37.1.

Функцію розподілу ймовірностей граничного навантаження  $p_*$  елемента пластини з одним дефектом подамо виразом [150]

$$F_1(p, \eta) = \iint_R f(\alpha, a) d\alpha da \quad (p_{\min} \leq p \leq p_{\max}), \quad (37.9)$$

де інтегрування здійснюється по області  $R$  можливих значень параметрів  $a$  і  $\alpha$ , для яких

$$\frac{K_0}{\sqrt{2a\varphi(\alpha, \eta)}} < p.$$

Подвійний інтеграл у формулі (37.9) можна замінити повторним інтегруванням

$$\begin{aligned} F_1(p, \eta) &= \int_{L_{\alpha}} \left[ \int_{a^*(\tilde{p}, \alpha, \eta)}^{a_{\max}} f(\alpha, a) da \right] d\alpha, \quad \tilde{p} = \frac{\sqrt{2a_{\max} p}}{K_0}, \\ a^* &\equiv \frac{(K_0)^2}{2p^2\varphi(\alpha, \eta)} = \frac{a_{\max}}{\tilde{p}^2\varphi(\alpha, \eta)}, \quad \tilde{a}^* \equiv \frac{a^*}{a_{\max}} = \frac{1}{\tilde{p}^2\varphi(\alpha, \eta)}, \end{aligned} \quad (37.10)$$

де  $\tilde{p}$  – зведене навантаження;  $a^*$  – критична півдовжина дефекту за його орієнтації, даного навантаження і властивостей матеріалів;  $L_{\alpha}$  – множина значень  $\alpha$ , для яких при даних  $p$  та  $q$  виконується умова

$$a_{\min} \leq a^* \leq a_{\max}.$$

За стохастичної незалежності величин  $\alpha$  і  $a$ , коли

$$f(\alpha, a) = f_1(\alpha) f_2(a),$$

формула (37.10) спрощується:

$$F_1(p, \eta) = \int_{L_{\alpha}} f_1(\alpha) [1 - \Phi_2[a^*(\tilde{p}, \alpha, \eta)]] d\alpha. \quad (37.11)$$

Тут  $\Phi_2(a)$  – функція розподілу ймовірностей величини  $a$ , причому

$$\Phi_2(a_{\max}) = 1.$$

Якщо тіло містить  $n$  дефектів, то відповідну функцію  $F_n(p, \eta)$  розподілу граничного навантаження можна визначити на основі моделі "найслабшої ланки" (29,17)

$$F_n(p, \eta) = 1 - [1 - F_1(p, \eta)]^n. \quad (37.12)$$

Для здійснення розрахунків необхідно конкретизувати явний вигляд функцій  $f(\alpha, a)$  або  $f_1(\alpha)$  і  $\Phi_2(a)$ . Оскільки у макроскопічно ізотропному матеріалі можна вважати всі можливі орієнтації дефекту однаково ймовірними, то це дає

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\pi}, \quad \Phi_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2} \left( |\alpha| \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (37.13)$$

Якщо функцію розподілу півдовжин включень взяти у вигляді

$$\Phi_2(a) = 1 - (1 - \tilde{a})^{r+1}, \quad f_2(a) = \frac{r+1}{a_{\max}} (1 - \tilde{a})^r \quad (37.14)$$

$$\left( 0 < \tilde{a} = \frac{a}{a_{\max}} \leq 1, \quad r \geq 0, \quad a_{\min} = 0 \right),$$

то з урахуванням (37.13) формулу (37.11) перетворимо до вигляду

$$F_1(p, \eta) = \tilde{F}_1(\tilde{p}, \eta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{L_\alpha} (1 - \tilde{a}_*)^{r+1} d\alpha, \quad (37.15)$$

причому  $L_\alpha$  – множина можливих значень  $|\alpha| \leq \pi/2$ , для яких за даних  $p, \eta$  виконується умова  $0 \leq \tilde{a}_* \leq 1$ .

Побудуємо явний вигляд області інтегрування  $L_\alpha$ . Нехай для початку

$$R \equiv \frac{Q_1(Q_2 - Q_1) + 2E_2}{2E_2 - Q_2(Q_2 - Q_1)} \geq 0.$$

Позначимо

$$Q_3 \equiv \left[ \left( Q_1 \cos^2 \alpha_* + Q_2 \sin^2 \alpha_* \right)^2 + E_2 \sin^2 2\alpha_* \right]^{1/2} \equiv \varphi^{1/2}(\alpha_*, \eta) \geq 0,$$

де значення кута  $\alpha_*$  найнебезпечнішої орієнтації дефекту дає співвідношення (37.6)

$$\alpha_* = \arctg R^{-1/2}.$$

Вважатимемо, що

$$Q_3 \leq |Q_2| \leq |Q_1|.$$

Тоді.

При  $c_1 \leq \tilde{p} \leq c_2$  ( $c_i = 1/|Q_i| = p_i^*$ )  $L_\alpha = [-\alpha_3; -\alpha_2] \cup [\alpha_2; \alpha_3]$ ,

де  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \alpha^+$  – розв'язок рівняння  $\tilde{a}_* = 1$  або  $\varphi(\alpha, \eta) = 1/\tilde{p}^2$  на проміжку  $[0, \pi/2]$ :

$$\alpha^\pm = \arctg \left( \frac{Q_1 Q_2 + 2E_2 - \frac{1}{\tilde{a}\tilde{p}^2} \pm \sqrt{D_1}}{\frac{1}{\tilde{a}\tilde{p}^2} - Q_2^2} \right)^{1/2},$$

$$D_1 = \left[ \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{\tilde{a}\tilde{p}^2} + 4E_2 \left[ Q_1 Q_2 + E_2 - \frac{1}{\tilde{a}\tilde{p}^2} \right] \right].$$

При  $c_2 \leq \tilde{p} < c_3$  –  $L_\alpha = \left[ -\frac{\pi}{2}; -\alpha^+ \right] \cup \left[ -\alpha^-; 0 \right] \cup \left[ 0; \alpha^- \right] \cup \left[ \alpha^+; \frac{\pi}{2} \right]$ .

При  $c_3 \leq \tilde{p} < \infty$  –  $L_\alpha = \left[ -\frac{\pi}{2}; 0 \right] \cup \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

Якщо виконується умова  $Q_3 \leq |Q_1| \leq |Q_2|$ , то

$$\text{при } c_2 \leq \tilde{p} < c_1 - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; -\alpha^+\right] \cup \left[\alpha^+; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{при } c_1 \leq \tilde{p} < c_3 - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; -\alpha^+\right] \cup \left[-\alpha^-; 0\right] \cup \left[0; \alpha^-\right] \cup \left[\alpha^+; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{при } c_3 \leq \tilde{p} < \infty - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

У припущенні, що  $|Q_1| \leq |Q_2| \leq Q_3$

$$\text{при } c_3 \leq \tilde{p} < c_2 - L_\alpha = \left[-\alpha^+; -\alpha^-\right] \cup \left[\alpha^-; \alpha^+\right];$$

$$\text{при } c_2 \leq \tilde{p} < c_1 - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; -\alpha^+\right] \cup \left[\alpha^+; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{при } c_1 \leq \tilde{p} < \infty - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

І для останнього варіанту  $|Q_2| \leq |Q_1| \leq Q_3$  -

$$\text{при } c_3 \leq \tilde{p} < c_1 - L_\alpha = \left[-\alpha^+; -\alpha^-\right] \cup \left[\alpha^-; \alpha^+\right];$$

$$\text{при } c_1 \leq \tilde{p} < c_2 - L_\alpha = \left[-\alpha^+; 0\right] \cup \left[0; \alpha^+\right];$$

$$\text{при } c_2 \leq \tilde{p} < \infty - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Випадок  $R = 0$  досліджується простіше.

Коли  $|Q_2| \leq |Q_1|$ , то

$$\text{при } c_1 \leq \tilde{p} < c_2 - L_\alpha = \left[-\alpha^+; 0\right] \cup \left[0; \alpha^+\right];$$

$$\text{при } c_2 \leq \tilde{p} < \infty - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

а коли  $|Q_1| \leq |Q_2|$

$$\text{при } c_2 \leq \tilde{p} < c_1 - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; -\alpha^+\right] \cup \left[\alpha^+; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{при } c_1 \leq \tilde{p} < \infty - L_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Для всебічного рівномірного розтягу, коли  $p = q > 0$  ( $\eta = 1$ ), виконуються рівності

$$Q_1 = Q_2, E_2 = 0, R = -1, \varphi(\alpha, \eta) = Q_1^2$$

і функція розподілу  $F_1(p, 1)$  набуває вигляду

$$F_1(p, 1) = \tilde{F}_1(\tilde{p}, 1) = \left[1 - (Q_1 \tilde{p})^{-2}\right]^{r+1}, c_1 = 1/|Q_1| \leq \tilde{p} < \infty. \quad (37.16)$$

За більшої кількості  $n$  включень вираз (37.12) доцільно замінити розподілом Вейбула [150]

$$F_n(p, \eta) = 1 - \exp\left[-cn(p - p_{\min})^m\right] (c > 0, m > 0). \quad (37.17)$$

Тут для визначення параметрів  $c$ ,  $m$  розподілу використовуються співвідношення

$$c = \lim_{p \rightarrow p_{\min}} \frac{F_1(p, \eta)}{(p - p_{\min})^m}, \quad m = r + 1 \quad (37.18)$$

і умова  $0 < c < \infty$ . Наприклад, на основі виразів (37.16) і (37.18) при  $\eta = 1$  маємо

$$c = \left(2\sqrt{2a_{\max}} |Q_1| / K_0\right)^{r+1}; \quad (37.19)$$

$$F_n(p, \eta) = \tilde{F}_n(\tilde{p}, \eta) = 1 - \exp\left[-n(2|Q_1|(\tilde{p} - \tilde{p}_{\min}))^{r+1}\right]. \quad (37.20)$$

Рівняння кривих граничного стану, записане у середніх значеннях руйнівних напружень, має вигляд

$$\langle \tilde{p} \rangle = \tilde{p}_{\min}(\eta) + \int_{\tilde{p}_{\min}(\eta)}^{\tilde{p}_{\max}(\eta)} [1 - F_1(p, \eta)]^n dp, \quad \langle \tilde{q} \rangle = \eta \langle \tilde{p} \rangle. \quad (37.21)$$

## РОЗДІЛ VII

### ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

#### § 38. Концентрація напружень у термопружному тілі з міжфазними включеннями. Плоске температурне поле

##### 38.1. Постановка задачі

Розглядається термопружна рівновага кусково-однорідного середовища, що складається з двох однорідних областей  $S_k$  ( $k=1,2$ ) з механічними та теплофізичними сталими  $E_{*k}, \nu_{*k}, \alpha_{T*k}, \lambda_k$  відповідно (рис. 38.1). На лінії  $L$  ( $L = L' \cup L''$  збігається з віссю  $x$  системи координат  $xOy$ ) поділу матеріалів уздовж  $L' = \bigcup_{p=1}^N L'_p$ ,  $L'_p = [a_p^-, a_p^+]$  локалізовані  $N$  тонких теплоактивних включень завширшки  $2h(x)$  зі сталими  $E_B, \nu_B, \alpha_B, \lambda_B$ , які для кожного з включень можуть бути іншими.

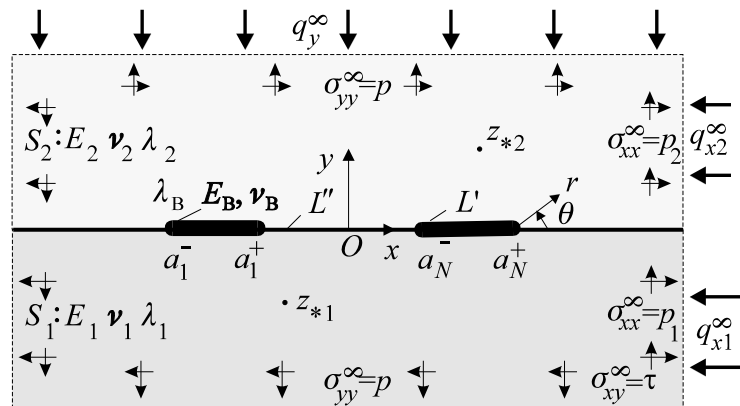


Рис. 38.1. Схема задачі термопружності кусково-однорідної пластини з тонкими включеннями на межі поділу матеріалів

Навантажування середовища здійснюється на нескінченності однорідним полем  $\sigma_{yy}^{\infty} = p, \sigma_{xxk}^{\infty} = p_k, \sigma_{xy}^{\infty} = \tau$  і тепловим потоком  $q^{\infty} = q_{xk}^{\infty} + iq_y^{\infty}$ , а також силами  $P_k$ , моментами  $M_k$ , дислокаціями  $b_k$ , джерелами тепла інтенсивності  $q_k$  і тепловими диполями інтенсивності  $q_{kk}$  в точці  $z_{*k}$ . Можливе урахування впливу (припливу) тепла  $Q = \sum_{p=1}^N Q_p$  з обла-

сті включень. Механічний контакт між компонентами системи вважається ідеальним. Нагадаємо, що залежність між теплофізичними сталими із зірочкою і без неї є такою:  $E_* \sim E/(1-\nu^2)$ ,  $\nu_* \sim \nu/(1-\nu)$ ,  $\alpha_{T*} \sim (1+\nu)\alpha_T$  для плоскої деформації (ПД);  $E_* \sim E, \nu_* \sim \nu$ ,



$\alpha_{T*} \sim \alpha_T$  для узагальненого плоского напруженого стану (УПНС). Тут  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_T$  – модуль пружності, коефіцієнти Пуассона та коефіцієнт термічного розширення матеріалу відповідно;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

З огляду на припущення, що силові і дислокаційні чинники не збурюють поля температури (взаємозв'язаність деформаційних і температурних процесів тут не береться до відома) їх не братимемо до уваги, оскільки відповідна задача вже розв'язана у розд. VI. Збурення температурного поля тонкими включеннями та температурними чинниками (потокми тепла, джерелами тепла та їх диполями) вивчене у розд. IV. Це поле можна вважати відомим і віднести до зовнішнього температурного навантаження.

Таким чином, задача спряження континуумів різної вимірності після того, як знайдене температурне поле (розд. IV), у термопружності залишається тою ж самою, що й у теорії пружності (розд. VI): залишаються слухними вирази (30.1), (30.2) крайових умов; залежності (30.17) для напружень і переміщень на межі поділу; подання (30.20), (30.21) для напружень і переміщень у довільній точці композиту; асимптотичні залежності § 31. Лише тепер однорідний розв'язок  $\sigma_{ij}^0, u_j^0$  ( $i, j \sim x, y$ ) визначається температурним полем. Теплове деформування включення враховують відповідні умови взаємодії.

Загалом напружено-деформований стан  $\sigma_{ij}, u_j \in$  суперпозицією однорідного  $\sigma_{ij}^0, u_j^0$  та збуреного присутністю включень  $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{u}_j$  станів. Вектори напружень і переміщень від однорідного стану під час переходу через  $L$  змінюються неперервно

$$\left(\sigma_{yy1}^0 - i\sigma_{xy1}^0\right) - \left(\sigma_{yy2}^0 - i\sigma_{xy2}^0\right) = 0, \quad \left(u_{x1}^0 + iu_{y1}^0\right) - \left(u_{x2}^0 + iu_{y2}^0\right) = 0 \quad (x \in L). \quad (38.1)$$

Для збуреного – аналогічно до (30.1) вводяться функції стрибка:

$$\begin{aligned} \left(\hat{\sigma}_{yy1} - i\hat{\sigma}_{xy1}\right) - \left(\hat{\sigma}_{yy2} - i\hat{\sigma}_{xy2}\right) &= f_1(x) - if_2(x) \equiv f_1^*(x), \\ \left(\hat{u}'_{x1} + i\hat{u}'_{y1}\right) - \left(\hat{u}'_{x2} + i\hat{u}'_{y2}\right) &= f_4(x) + if_5(x) \equiv f_4^*(x) \quad (x \in L), \end{aligned} \quad (38.2)$$

причому

$$f_1^*(x) = f_4^*(x) = 0 \quad \text{при } x \in L''.$$

## 38.2. Інтегральні рівняння

### Однорідний розв'язок

Для визначення однорідного розв'язку  $\sigma_{ij}^0, u_j^0$  щодо суто температурного навантаження напруження і переміщення в кожній з розглянутих півплощин  $S_k$  запишемо за допомогою трьох комплексних потенціалів: Колосова – Мусхелішвілі  $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$  і температурного  $\Phi_T(z)$ . Термопружний розв'язок подамо у вигляді суми однорідного  $\Phi_k^0(z), \Psi_k^0(z)$  та збуреного  $\hat{\Phi}_k(z), \hat{\Psi}_k(z)$  розв'язків. Температурне поле відноситься до навантаження. Тому загальний однорідний розв'язок термопружної задачі має вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{yyk}^0 - i\sigma_{xyk}^0 &= \Phi_k^0(z) + \overline{\Phi_k^0(z)} + z\overline{\Phi_k^{0'}(z)} + \overline{\Psi_k^0(z)}, \\ 2G_k(u_{xk}^{0'} + iu_{yk}^{0'}) &= \kappa_k\Phi_k^0(z) - \overline{\Phi_k^0(z)} - z\overline{\Phi_k^{0'}(z)} - \overline{\Psi_k^0(z)} + \beta_{Tk}\Phi_T(z), \\ \kappa_k &= \frac{3-\nu_{k*}}{1+\nu_{k*}}, \quad \beta_{Tk} = 2\alpha_{T*k}G_k \quad (z \in S_k; k=1,2),\end{aligned}\quad (38.3)$$

де потенціал  $\Phi_T(z)$  визначений формулами (18.3), (18.4), (18.8),

Згідно з методикою п. 30.2

$$\begin{aligned}\sigma_{yyk}^0(z) - i\sigma_{xyk}^0(z) &= \Phi_k^0(z) - \Phi_k^0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_k^{0'}(z)}, \\ 2G_k[u_{xk}^{0'}(z) + iu_{yk}^{0'}(z)] &= \kappa_k\Phi_k^0(z) + \Phi_k^0(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k^{0'}(z)} + \beta_{Tk}\Phi_T(z) \\ &\quad (z \in S_k; k=1,2).\end{aligned}\quad (38.4)$$

Потенціал однорідного поля  $\Phi_k^0(z)$  з урахуванням (13.17) та [636, 896, 112] шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_k^0(z) &= \beta_{Tk}\phi_k[D_{k1}(z) + D_{k2}(z)] + \varepsilon_{kj}D_{j1}(z) + \Phi_{0k}(z), \\ \Phi_j^0(z) &= -\beta_{Tj}\phi_j \sum_{m=1}^4 \bar{D}_{jm}(z) - \varepsilon_{jk}[\bar{D}_{k1}(z) + z\bar{D}'_{k1}(z)] - \beta_{Tj}\phi_j[z\bar{D}'_{j1}(z) + z\bar{D}'_{j2}(z)] + \\ &\quad + \Phi_{0j}^0(z) \quad (z \in S_k; j=3-k); \quad \varepsilon_{kj} = -\beta_{Tk}\phi_k \frac{q_k\lambda_j}{q_j\lambda_k}, \quad \phi_k = \frac{1+\nu_{*k}}{8\pi},\end{aligned}\quad (38.5)$$

$$D_{k3}(z) = -\frac{q_k}{\lambda_k} \frac{\bar{z}_{*k}}{z - z_{*k}}, \quad D_{k4}(z) = -\frac{q_{kk}}{\lambda_k} \left[ \frac{\exp(-i\theta_k)}{z - z_{*k}} + \frac{\bar{z}_{*k} \exp(i\theta_k)}{(z - z_{*k})^2} \right],$$

причому  $\Phi_{0m}^0(z)$  – функції, що зникають на нескінченності і голоморфні в  $S_k$  ( $k, m=1,2$ ). Введене вище значення сталої  $\varepsilon_{kj}$  визначається з умови однозначності напружень і деформацій на нескінченності. При цьому вимагається виконання умови (18.12) загального балансу тепла у середовищі.

Застосування методики п. 30.2 дає вирази

$$\begin{aligned}\Phi_{0k}^0(z) &= (m_k^j - 1)\beta_{Tk}\phi_k \left[ \bar{D}_{k3}(z) + z\bar{D}'_{k1}(z) - \frac{q_k}{\lambda_k} \right] + \\ &\quad + (2\beta_{Tk}\phi_k m_k^j p_j - \varepsilon_{kj})D_{j1}(z) + \beta_{Tk}e_k (2m_k^j p_k - 1)\bar{D}_{k1}(z) - 2\pi\beta_{Tk}\phi_k m_k^j \hat{\Phi}_T(z), \\ \Phi_{0j}^0(z) &= -m_k^j \beta_{Tk}\phi_k \bar{D}_{k3}(z) - (\beta_{Tj}\phi_j m_k^j - \varepsilon_{jk}) \left[ z\bar{D}'_{k1}(z) - \frac{q_k}{\lambda_k} \right] - \\ &\quad - (2\beta_{Tk}\phi_k m_k^j p_j - \beta_{Tj}\phi_j)D_{j1}(z) - (2\beta_{Tk}\phi_k m_k^j p_k - \varepsilon_{jk})\bar{D}_{k1}(z) + 2\pi\beta_{Tk}\phi_k m_k^j \hat{\Phi}_T(z), \\ e_{kj} &= E_{*k}(1+\nu_{*j}) + E_{*j}(3-\nu_{*k}), \quad m_k^j = \frac{4E_{*j}}{e_{kj}}, \quad p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (z \in S_k; k=1,2; j=3-k),\end{aligned}\quad (38.6)$$

які разом з (38.5), (38.4) дають можливість конкретизувати залежності для однорідного розв'язку  $\sigma_{ij}^0, u_j^0$ .

$$c = \begin{cases} 2(1+\nu_j)(1+\nu_k) & (\text{УПНС}), \\ \frac{2}{(1-\nu_j)(1-\nu_k)} & (\text{ПД}), \end{cases}$$

Навантаження на нескінченності й термопружні сталі зв'язані умовою

$$\begin{aligned} (\kappa_1 \Gamma_1 - \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}'_1 + \beta_{T1} \Phi_T^\infty) G_2 &= (\kappa_2 \Gamma_2 - \bar{\Gamma}_2 - \bar{\Gamma}'_2 + \beta_{T2} \Phi_T^\infty) G_1, \\ \Gamma_k &= \frac{1}{4}(p + p_k), \quad \Gamma'_k = \frac{1}{2}(p - p_k) + i\tau. \end{aligned} \quad (38.7)$$

Окрім того, коли  $q_{xk}^\infty = 0$  ( $k = 1, 2$ ), то необхідно, щоб виконувалася умова  $\alpha_{T2} / \lambda_2 = \alpha_{T1} / \lambda_1$ ; коли  $q_y^\infty = 0$ , то необхідно, щоб  $\alpha_{T2} = \alpha_{T1}$ .

### Система сингулярних інтегральних рівнянь для включень

Підставляючи співвідношення (30.17) сумісно з (30.1), (30.2), (38.4) – (38.6) в умови взаємодії тонкого теплоактивного включення з матрицею (16.13) (без урахування підкреслених членів, що відповідають величинам порядку  $h^2$ ), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \rho_{i1} t_2(x) + \rho_{i2} t_5(x) + \rho_{i3} s_{2n}(x) + \rho_{i4} s_{5n}(x) + \rho_{i5} f_1(x) + \rho_{i6} f_4(x) &= F_i(x), \\ \rho_{j1} t_1(x) + \rho_{j2} t_4(x) + \rho_{j3} s_{1n}(x) + \rho_{j4} s_{4n}(x) + \rho_{j5} f_2(x) + \rho_{j6} f_5(x) &= F_j(x), \end{aligned} \quad (38.8)$$

$$t_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(t) dt}{t-x}, \quad s_{rn} = \int_{a_n^-}^x f_r(t) dt \quad (x \in L'_n; n = \overline{1, N}; i = 1, 2; j = 3, 4; r = 1, 2, 4, 5),$$

де функції  $F_m(x)$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) визначені формулами (16.14), а коефіцієнти дорівнюють

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= 2m_{12}^- h / E_{*B}, \quad \rho_{12} = -2l_1^+ h / E_{*B}, \quad \rho_{13} = -\nu_{*B} / E_{*B}, \quad \rho_{14} = 1, \\ \rho_{15} &= (m_{12}^+ - m_{21}^+) h / E_{*B}, \quad \rho_{16} = 2l_1^- h / E_{*B}, \quad \rho_{21} = -2h \left( \nu_{*B} m_{12}^- / E_{*B} + l_2^+ \right), \\ \rho_{22} &= 2h \left( \nu_{*B} l_1^+ / E_{*B} - m_{12}^- \right), \quad \rho_{24} = 0, \quad \rho_{25} = -h \left[ (m_{12}^+ - m_{21}^+) \nu_{*B} / E_{*B} + 2l_2^- \right], \\ \rho_{26} &= (m_{12}^+ - m_{21}^+ - 2\nu_{*B} l_1^- / E_{*B}) h, \quad \rho_{23} = -1 / E_{*B}, \quad \rho_{31} = 2\nu_{*B} m_{12}^- h / E_{*B}, \\ \rho_{32} &= 2\nu_{*B} l_1^+ h / E_{*B}, \quad \rho_{33} = 1 / (\nu_{*B} E_{*B}), \quad \rho_{35} = -\nu_{*B} (m_{12}^+ - m_{21}^+) h / E_{*B}, \\ \rho_{36} &= 2\nu_{*B} l_1^- h / E_{*B}, \quad \rho_{34} = -1, \quad \rho_{41} = -2m_{12}^- h, \quad \rho_{42} = 2l_2^+ h, \quad \rho_{44} = -1, \\ \rho_{43} &= -2(1 + \nu_{*B}) / E_{*B}, \quad \rho_{45} = -2l_2^- h, \quad \rho_{46} = -(m_{12}^+ - m_{21}^+) h. \end{aligned}$$

При цьому повинні виконуватися додаткові умови (30.39), (30.40). Торцьові сталі визначаються апріорними виразами (30.45) або за допомогою підходу п. 39.3.

**Абсолютно жорсткі включення.** Вважаючи, що  $E_B \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_{Tk} = 0$ , маємо

$$\begin{aligned}
f_4^*(x) &= -\left[ u_x^{0r}(x) + iu_y^{0r}(x) \right]_h \approx 0, \quad t_1^*(x) - i\beta_1 f_1^*(x) = F_1^*(x), \\
F_1^*(x) &\equiv \frac{i}{2l_2^+} \left\langle u_x^{0r}(x) + iu_y^{0r}(x) \right\rangle_h - \frac{\varepsilon_B}{l_2^+} - i \frac{m_{21}^+ - m_{12}^+}{l_2^+} \left[ u_x^{0r}(x) + iu_y^{0r}(x) \right]_h + \\
&+ \frac{im_{21}^-}{\pi l_2^+} \int_{L'} \left[ u_x^{0r}(\xi) + iu_y^{0r}(\xi) \right]_h \frac{d\xi}{\xi - x}, \quad \beta_1 = \frac{l_2^-}{l_2^+} \quad (x \in L').
\end{aligned} \tag{38.9}$$

**Щілини.** Коли  $E_B \rightarrow \infty$ , то з (38.8) отримаємо

$$\begin{aligned}
f_1^*(x) &= -\left[ \sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) \right]_h \approx 0, \quad t_4^*(x) - i\beta_4 f_4^*(x) = F_4^*(x), \\
F_4^*(x) &\equiv \frac{i}{2l_1^+} \left\langle \sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) \right\rangle_h + i \frac{m_{21}^+ - m_{12}^+}{l_1^+} \left[ \sigma_{yy}^0(x) - i\sigma_{xy}^0(x) \right]_h + \\
&+ \frac{m_{21}^-}{\pi l_1^+} \int_{L'} \left[ \sigma_{yy}^0(\xi) - i\sigma_{xy}^0(\xi) \right]_h \frac{d\xi}{\xi - x}, \quad \beta_4 = \frac{l_1^-}{l_1^+} \quad (x \in L').
\end{aligned} \tag{38.10}$$

Рівняння (38.9), (38.10) є узагальненням рівнянь (30.46), (30.47) для абсолютно жорсткого включення та тріщини відповідно за силового навантаження, що враховує товщину дефекту. Підкреслені доданки малі порівняно з не підкресленими членами і тому їх можна за потреби відкинути. Якщо  $h \rightarrow 0$ , то вирази (38.9) зводиться до (30.46); залежності (38.10) – до (30.47).

Знехтувавши у (38.9) підкресленими членами, одержимо для **абсолютно жорсткої плівки (АЖП)** уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  такі вирази:

$$\begin{aligned}
f_4^*(x) &= 0, \quad K_{1,1} = K_{2,1} = 0, \quad n_4^\pm = 0, \quad n_1^\pm = \frac{i}{4l_2^+} \left\langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \right\rangle_h \Big|_{x=a^\pm} - \frac{\varepsilon_B^-}{2l_2^+}, \\
f_1^*(x) &= \omega_1 \left\{ \left\langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \right\rangle_h^0 + 2i\varepsilon_B^- \right\} - \omega_1^2 \tilde{f}_3(x) + i\omega_1^3 \tilde{f}_6(x) + \\
&+ \omega_1^4 \frac{X_0^+(x)}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left\langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \right\rangle_h^0 + 2i\varepsilon_B^- - \omega_1^5 \tilde{f}_3(\xi) + i\omega_1^6 \tilde{f}_6(\xi) \right\} \frac{d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi - x)} + \\
&+ \omega_1^7 \frac{X_0^+(x)}{\pi} \left\{ \int_{-a}^{+a} f_1^*(\xi) d\xi + \omega_1^8 \int_{-a}^{+a} \tilde{f}_3(\xi) d\xi - i\omega_1^9 \int_{-a}^{+a} \tilde{f}_6(\xi) d\xi \right\}, \\
K_{1,2}^\pm - iK_{2,2}^\pm &= \frac{m_{21}^-}{2\sqrt{\pi a} \sqrt{l_2^{+2} - l_2^{-2}}} \int_{-a}^a \left( \frac{a \pm \xi}{a \mp \xi} \right)^{1/2 \mp i\mu_1} \left\{ \left\langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \right\rangle_h^0 + 2i\varepsilon_B^- - \omega_1^5 \tilde{f}_3(\xi) + \right. \\
&+ \left. i\omega_1^6 \tilde{f}_6(\xi) \right\} d\xi \mp im_{21}^- \left\{ A_1^1 - iA_1^2 + \omega_1^8 \int_{-a}^a \tilde{f}_3(\xi) d\xi - i\omega_1^9 \int_{-a}^a \tilde{f}_6(\xi) d\xi \right\},
\end{aligned} \tag{38.11}$$

де

$$X_0(z) = (z+a)^{-1/2+i\mu_1} (z-a)^{-1/2-i\mu_1}, \quad X_0(x) = (x+a)^{-1/2+i\mu_1} (x-a)^{-1/2-i\mu_1} =$$

$$= -\frac{i \exp(\pi\mu_1)}{\sqrt{a^2-x^2}} \exp\left(i\mu_1 \ln \frac{a+x}{a-x}\right), \quad \mu_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\kappa_1 e_{21}}{\kappa_2 e_{12}}, \quad \omega_1^1 = \frac{l_2^-}{2(l_2^{+2} - l_2^{-2})}, \quad \omega_1^2 = \omega_1^8 + \omega_1^1 \omega_1^5,$$

$$\omega_1^3 = \omega_1^1 \omega_1^6 + \omega_1^9, \quad \omega_1^4 = \frac{l_2^+}{2(l_2^{+2} - l_2^{-2})}, \quad \omega_1^5 = 4(1+\nu_{*1})(1+\nu_{*2}) \frac{\beta_{T2} n_1 \kappa_1 - \beta_{T1} n_2 \kappa_2}{e_{21} \kappa_1 + e_{12} \kappa_2},$$

$$\omega_1^6 = 4 \frac{(1+\nu_{*1})(1+\nu_{*2})}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\beta_{T2} \kappa_1 - \beta_{T1} \kappa_2}{e_{21} \kappa_1 + e_{12} \kappa_2}, \quad \omega_1^7 = \frac{l_2^+}{l_2^+ + l_2^-}, \quad \omega_1^8 = (1+\nu_{*1})(1+\nu_{*2}) \frac{l_3^+}{l_2^+},$$

$$\omega_1^9 = (1+\nu_{*1})(1+\nu_{*2}) \frac{l_4^+}{l_2^+}, \quad l_3^\pm = \frac{\beta_{T2} n_1 \pm \beta_{T1} n_2}{e_{21}}, \quad l_4^\pm = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \frac{\beta_{T2}}{e_{21}} \pm \frac{\beta_{T1}}{e_{12}} \right);$$

$\langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \rangle_h^0$  – складові частини (38.9), що не містять залежних від збуреного температурного поля членів:

$$\langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \rangle_h^0 = \langle u_x^{0r} + iu_y^{0r} \rangle_h - 2(1+\nu_{*1})(1+\nu_{*2}) \left( \frac{\beta_{T2}}{e_{21}} \hat{\Phi}_T^+(x) + \frac{\beta_{T1}}{e_{12}} \hat{\Phi}_T^-(x) \right);$$

радикали додатні, логарифм – дійсна функція.

Для **однорідної матриці** ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\alpha_{T1} = \alpha_{T2} = \alpha_T$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ) отримаємо з (38.11) вираз для УКІН  $K_{1,2}^\pm, K_{2,2}^\pm$ , аналогічний до (П.16) [95]. Знехтувавши у (38.10) підкресленими членами, одержимо для **тріщини** уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  такі результати:

$$f_1^*(x) = 0, \quad K_{1,2} = K_{2,2} = 0, \quad n_1^\pm = 0, \quad K_{1,1} - iK_{2,1} = (k_1 - ik_2) / \sqrt{a/\pi},$$

де  $k_1, k_2$  – позначення для КІН міжфазної тріщини [843, 1687]. Беручи до відома умову коректності задачі (31.7), отримаємо  $\varepsilon_4 \cong 0$ ,  $\cos \varepsilon_4 \cong 1$ ,  $\sin \varepsilon_4 \cong 0$ , і з урахуванням цієї умови перші члени асимптотичного розвинення напружень в околі вістря міжфазної тріщини (31.2) збігатимуться з виразами (3.124) [1079], якщо вважати  $K_{1,1} - iK_{2,1} \sim K_1 - iK_1$  і виправити помилку друку.

Остаточно

$$f_1^*(x) = 0, \quad K_{1,2} = K_{2,2} = 0, \quad n_1^\pm = 0, \quad n_4^\pm = \frac{1}{4l_1^+} \langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h \Big|_{x=\pm a},$$

$$f_4^*(x) = \omega_4^1 \langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h^0 + \omega_4^2 \tilde{f}_3(x) - i\omega_4^3 \tilde{f}_6(x) + \frac{X_0^+(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \omega_4^4 \langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h^0 + \right.$$

$$\left. + \omega_4^5 \tilde{f}_3(\xi) - i\omega_4^6 \tilde{f}_6(\xi) \right\} \frac{d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-x)} - \frac{X_0^+(x)}{\pi i} \omega_4^7 \left\{ \int_{-a}^a f_4^*(\xi) d\xi - \right.$$

$$\left. - \omega_4^8 \int_{-a}^a \tilde{f}_3(\xi) d\xi + i\omega_4^9 \int_{-a}^a \tilde{f}_6(\xi) d\xi \right\},$$

$$K_{1,1}^{\pm} - iK_{2,1}^{\pm} = \frac{E_1^* E_2^*}{\sqrt{\pi a e_{12} e_{21}}} \int_{-a}^a \left( \frac{a \pm \xi}{a \mp \xi} \right)^{1/2 \mp i\mu_4} \left\{ \omega_4^4 \langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h^0 + \omega_4^5 \tilde{f}_3(\xi) - \right. \\ \left. - i\omega_4^6 \tilde{f}_6(\xi) \right\} d\xi \mp i l_1^+ \left\{ A_1^4 + iA_1^5 - \omega_4^8 \int_{-a}^a \tilde{f}_3(\xi) d\xi + i\omega_4^9 \int_{-a}^a \tilde{f}_6(\xi) d\xi \right\}, \quad (38.12)$$

де

$$X_0(z) = (z+a)^{-1/2+i\mu_4} (z-a)^{-1/2-i\mu_4}, \quad X_0(x) = (x+a)^{-1/2+i\mu_4} (x-a)^{-1/2-i\mu_4} = \\ = \frac{i \exp(\pi\mu_4)}{\sqrt{a^2-x^2}} \exp\left(i\mu_4 \ln \frac{a+x}{a-x}\right), \quad \mu_4 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e_{21}}{e_{12}}, \quad \omega_4^1 = \frac{e_{21} - e_{12}}{4E_1^* E_2^*}, \quad \omega_4^2 = \frac{e_{21} - e_{12}}{e_{21} + e_{12}} \omega_4^5 + \omega_4^8, \\ \omega_4^3 = \frac{e_{21} - e_{12}}{e_{21} + e_{12}} \omega_4^6 + \omega_4^9, \quad \omega_4^4 = \frac{e_{21} + e_{12}}{4E_1^* E_2^*}, \quad \omega_4^5 = \alpha_{T^*2} p_1 - \alpha_{T^*1} p_2, \quad \omega_4^6 = \frac{\alpha_{T^*2} - \alpha_{T^*1}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\ \omega_4^7 = \frac{e_{21} + e_{12}}{2e_{21}}, \quad \omega_4^8 = \frac{2\alpha_{T^*2} p_1 e_{12} + 2\alpha_{T^*1} p_2 e_{21}}{e_{12} + e_{21}}, \quad \omega_4^9 = \frac{2\alpha_{T^*2} e_{12} + 2\alpha_{T^*1} e_{21}}{(\lambda_1 + \lambda_2)(e_{21} + e_{12})},$$

$\langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h^0$  – складові правої частини (38.10), що не містять залежних від збуреного температурного поля членів:

$$\langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h^0 = \langle \sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 \rangle_h + 2E_1^* E_2^* \left\{ \frac{\alpha_{T^*2}}{e_{21}} \hat{\Phi}_T^+(x) + \frac{\alpha_{T^*1}}{e_{12}} \hat{\Phi}_T^-(x) \right\};$$

радикали додатні, логарифм – дійсна функція.

Якщо абсолютно податний дефект є **теплоізолюваною тріщиною**, то з використанням (18.16) додатково матимемо

$$\int_{-a}^a \tilde{f}_3(\xi) d\xi = - \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \xi^2} \left\langle \frac{\partial t^0}{\partial y} \right\rangle_h d\xi, \quad \int_{-a}^a \tilde{f}_6(\xi) d\xi = 0. \quad (38.13)$$

Причому, якщо у (38.12) вважати  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\alpha_{T1} = \alpha_{T2} = \alpha_T$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то для УКІН  $K_{1,1}^{\pm}$ ,  $K_{2,1}^{\pm}$  матимемо вираз, аналогічний до (1.86) [706].

Вважаючи абсолютно податне включення ще й **абсолютно теплопровідним**, з урахуванням (18.33) отримаємо

$$\int_{-a}^a \tilde{f}_3(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-a}^a \tilde{f}_6(\xi) d\xi = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \xi^2} \left\langle \lambda \frac{\partial t^0}{\partial x} \right\rangle_h d\xi. \quad (38.14)$$

**Кусково-однорідне середовище без включень.** Якщо  $h \rightarrow 0$ , то  $f_r(x) = 0$  ( $r = 1, 2, 4, 5$ ) – збурений розв'язок є нульовим.

**Однорідна матриця.** Якщо  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\alpha_{T1} = \alpha_{T2} = \alpha_T$ , то  $\rho_{m5} = \rho_{m6} = 0$  і система сингулярних інтегральних рівнянь (38.8) спрощується, розділяючись на дві незалежні системи з двох рівнянь кожна:

$$\rho_{i1} t_2(x) + \rho_{i2} t_5(x) + \rho_{i3} s_{2n}(x) \rho_{i4} s_{5n}(x) = F_i(x), \\ \rho_{j1} t_1(x) + \rho_{j2} t_4(x) + \rho_{j3} s_{1n}(x) \rho_{j4} s_{4n}(x) = F_j(x), \quad (38.15) \\ (x \in L'_n; n = \overline{1, N}; i = 1, 2; j = 3, 4).$$

Тоді  $\mu_m = 0$  ( $m = 1, 4$ ): розв'язки для тріщини чи абсолютно жорсткої плівки належать до класу функцій  $\Pi^{-1/2, -1/2}(f_m^*)$  і тому, не осцилюючи, є коректними.

**Однорідне середовище без включень.** Цей випадок можна отримати з (38.15) або вважаючи  $h \rightarrow 0$ , або  $E \rightarrow E_B$ ,  $\nu \rightarrow \nu_B$ ,  $\alpha_T \rightarrow \alpha_{TB}$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_B$ .

### 38.3. Концентрація напружень біля тонкого теплопасивного включення

Для прикладу вивчається концентрація напружень біля тонкостінного пружного включення скінченної довжини в однорідній ізотропній матриці під впливом рівномірного нагрівання до температури  $T_0$ , потоку тепла на нескінченності інтенсивності  $q_\varphi$  під кутом  $\varphi$  до осі включення уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$ , джерела тепла потужності  $q$  в точці  $z_*$  [115, 110]. Обмежимося двовимірним випадком відсутності тепловіддачі з бічних поверхонь. Вважається також, що включення теплопасивне, тобто, воно не збурює температурне поле в матриці. Це цілком можливе, якщо воно не проводить тепла у поздовжньому напрямі, а у поперечному – тепло передається без перешкод. Така постановка задачі виключає необхідність розв'язування задачі теплопровідності і дає можливість скористатися з розв'язку відповідної пружної задачі (розд. VI), коли під величинами  $u_x^0, u_y^0, \sigma_{yy}^0, \sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0$  розуміти компоненти вектора переміщення і тензора напружень у нагрітому однорідному середовищі (без прошарків). Таким чином, за відсутності джерел тепла

$$2G(u_x^{0r} + iu_y^{0r}) = \beta_T \Phi_T(z), \quad \sigma_{yy}^0 = \sigma_{xx}^0 = \sigma_{xy}^0 = 0, \quad (38.16)$$

$$\Phi_T(z) = T_0 + \frac{q\varphi z}{\lambda} e^{-i\varphi}, \quad \beta_T = 2\alpha_{T*}G = 2(1 + \kappa)H,$$

а за нагрівання джерелом тепла слід скористатися з виразів

$$\sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0 = \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)}, \quad \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 = 4\operatorname{Re}\Phi_0(z),$$

$$2G[u_x^{0r} + iu_y^{0r}] = \kappa\Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} - z\overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0(z)} + \beta_T\Phi_T(z),$$

де

$$\Phi_0(z) = -\frac{mH}{2} \ln(z - z_*), \quad \Psi_0(z) = \frac{mH\overline{z_*}}{2(z - z_*)}, \quad \Phi_T(z) = m \ln(z - z_*), \quad m = \frac{q}{2\pi\lambda};$$

$\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності матриці;  $H = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)}$  для ПНС;  $H = \frac{\alpha E}{2}$  – для ПД;  $\alpha, \alpha_B$

– температурні коефіцієнти лінійного розширення (термічного розширення) матеріалу матриці та прошарку. Таким чином, для джерела тепла

$$2G(u_x^{0r} + iu_y^{0r}) = -(\sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0) = mH \left\{ \ln|z - z_*| + \frac{z - z_*}{2(\overline{z - z_*})} \right\}. \quad (38.17)$$

Температурне видовження включення легко врахувати, використавши вираз  $\beta_T - \beta_{TB}$  замість величини  $\beta_T$ . Тоді  $u_x^{0r}, u_y^{0r}$  – похідні компонент вектора переміщення точок матриці відносно відповідних точок матриці з матеріалу включення. Якщо  $\beta_T = \beta_{TB}$ , то внаслідок

того, що таке включення не збурює поле температури, отримуємо  $u_x^{0'} = u_y^{0'} = \dots = 0$ , звідки впливає рівність нулю функцій стрибка, а, отже, й збуреного напружено-деформованого стану.

Під час рівномірного нагрівання та дії потоку тепла у частковому випадку щілини отримаємо рівність нулю всіх функцій стрибка, а, отже, і напружень, оскільки  $f_1^*(x) = 0$ , а рівняння

$$t_4^*(x) = i \left[ \sigma_{yy}^0(x) - i \sigma_{xy}^0(x) \right] / l_1^+, \quad l_1^+ = \frac{2G}{1+\kappa} \quad (x \in L') \quad (38.18)$$

для **тріщини** дасть за такого навантаження нульовий розв'язок  $f_3^*(x) = 0$ .

Для відповідної **абсолютно жорсткої плівки**  $f_4^*(x) = 0$ , а розв'язок рівняння

$$t_1^*(x) = i \left[ u_x^{0'}(x) + i u_y^{0'}(x) \right] / l_2^+ \equiv F_*(x), \quad l_2^+ = \frac{\kappa}{2G(1+\kappa)} \quad (x \in L') \quad (38.19)$$

має вигляд

$$f_1^*(x) = \frac{-1}{\pi X_0(x)} \int_{-a}^a \frac{F_*(t) X_0(t) dt}{t-x},$$

$$X(z) = \sqrt{z^2 - a^2} = i X_0(z), \quad X_0(z) = \sqrt{a^2 - z^2} \quad (x \in L').$$

Тоді маємо вирази для УКІН

$$\left\{ K_{1,1}^\pm - i K_{2,1}^\pm, K_{1,2}^\pm - i K_{2,2}^\pm \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a \pm t}}{\sqrt{a \mp t}} \left\{ \sigma_{yy}^0 - i \sigma_{xy}^0, \frac{-2G(u_x^{0'} + i u_y^{0'})}{\kappa \kappa^*} \right\} dt, \quad (38.20)$$

$$\kappa^* = \frac{2}{\kappa - 1}.$$

Ця формула дає можливість обчислити УКІН  $K_{1,1}, K_{2,1}$  для щілини і  $K_{1,2}, K_{2,2}$  – для абсолютно жорсткої плівки.

Тепер для **абсолютно жорсткої плівки**

$$f_1^*(x) = i \beta_t \frac{2T_0 x + q_\varphi (2x^2 - a^2) e^{-i\varphi} / \lambda}{8Gl_2^+ X_0(x)}, \quad K_{1,1} = K_{2,2} = 0, \quad \rho = \frac{z + X(z)}{a}, \quad (38.21)$$

$$t_1^*(x) = -i \alpha \beta_t \frac{2T_0 / \rho + q_\varphi a \rho^{-2} e^{-i\varphi} / \lambda}{2Gl_2^+ X(z)}, \quad K_{1,2} \pm i K_{2,2} = \sqrt{\pi \alpha} \beta_t \frac{2T_0 + q_\varphi a e^{\pm i\varphi} / \lambda}{4\kappa \kappa^*}.$$

Якщо позначити через  $K_{j,i}(\varphi)$  відповідний УКІН при заданому куті  $\varphi$  орієнтації теплового потоку відносно осі включення, то виявиться, що існує проста кутова залежність

$$\left\{ K_{1,1}(\varphi), K_{1,2}(\varphi) \right\} = \left\{ K_{1,1}(0), K_{1,2}(0) \right\} \cos \varphi,$$

$$\left\{ K_{2,1}(\varphi), K_{2,2}(\varphi) \right\} = \left\{ K_{2,1}(\pi/2), K_{2,2}(\pi/2) \right\} \sin \varphi. \quad (38.22)$$

Використання виразів (38.17), (38.21) та (IX.24) [706] дає для абсолютно жорсткої теплорозподільної плівки у випадку дії джерела тепла



$$K_{1,2} - iK_{2,2} = \frac{-mH\sqrt{\pi}}{2\kappa\kappa_*\sqrt{a}} \left\{ a \ln \left[ \frac{(z_* + X(z_*))(\bar{z}_* + X(\bar{z}_*))}{4} \right] \mp 2z_* \pm \right. \\ \left. \pm \left[ X(z_*) + X(\bar{z}_*) \right] + \frac{(a \pm \bar{z}_*)(z_* - \bar{z}_*)}{X(\bar{z}_*)} \right\}, \quad K_{1,1} = K_{2,1} = 0. \quad (38.23)$$

Вираз для КІН  $K_{1,1} - iK_{2,1}$  теплопасивної тріщини збігається з правою частиною (38.23), якщо покласти  $\kappa\kappa_* = 1$  (див. також (IX.24) [706]).

Числовий аналіз УКІН здійснений стосовно трьох випадків: рівномірного нагрівання до температури  $T_0$  (рис. 38.2), а також потоків тепла вздовж (рис. 38.3) та впоперек (рис. 38.4) осі включення. Використовувалася основна пружна модель дефекту і метод ортогональних поліномів для розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь. Вважалося, що півтовщина прошарку дорівнює  $h(x) = h_0 [1 - (x/a)]^{1/2\beta}$ ,  $\nu = \nu_0 = 1/3$ ,  $A = a/h_0 = 10$  тіло перебуває в умовах плоского напруженого стану,  $K_T = T_0 \sqrt{\pi a} \beta_T$ ,  $K_{II} = q_\phi a \sqrt{\pi a} \beta_T / \lambda$ . Суцільна лінія стосується еліптичного профілю включення ( $\beta = 1$ ), штрихова – прямокутного ( $\beta = \infty$ ), а пунктирна – характеризує деяку проміжну форму ( $\beta = 2$ ). Чим більше значення параметра  $\beta$ , тим більшим за абсолютною величиною є відповідне значення УКІН.

Збіжність процесу обчислень оцінювалася апостеріорним методом; практична похибка не перевищувала 1%. У табл. 38.1 міститься максимальна відносна похибка (у відсотках) обчислення УКІН для еліптичного та прямокутного профілів включення у полі теплового потоку за відносної жорсткості включення  $k \equiv E_B / E = 0,2$  та різних значень кількості  $M$  врахованих членів розкладу функцій стрибка у ряд поліномів Чебишева з виділеною кореневою особливістю у допущенні, що за  $M = 51$  отримано точні значення.

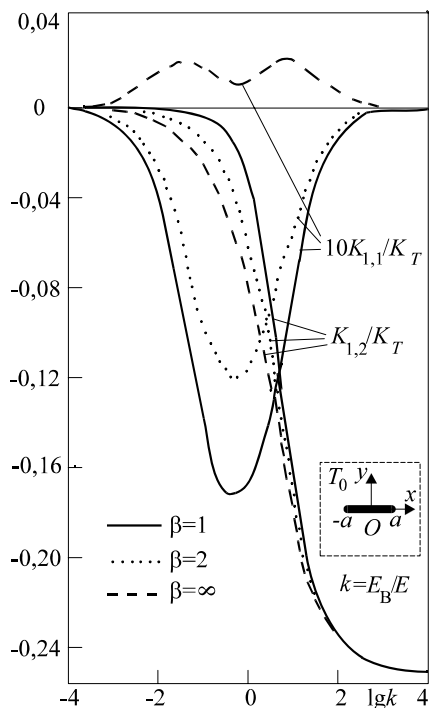


Рис. 38.2

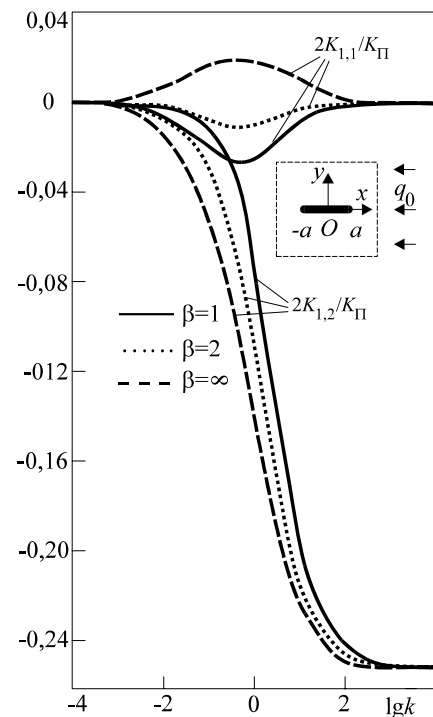


Рис. 38.3

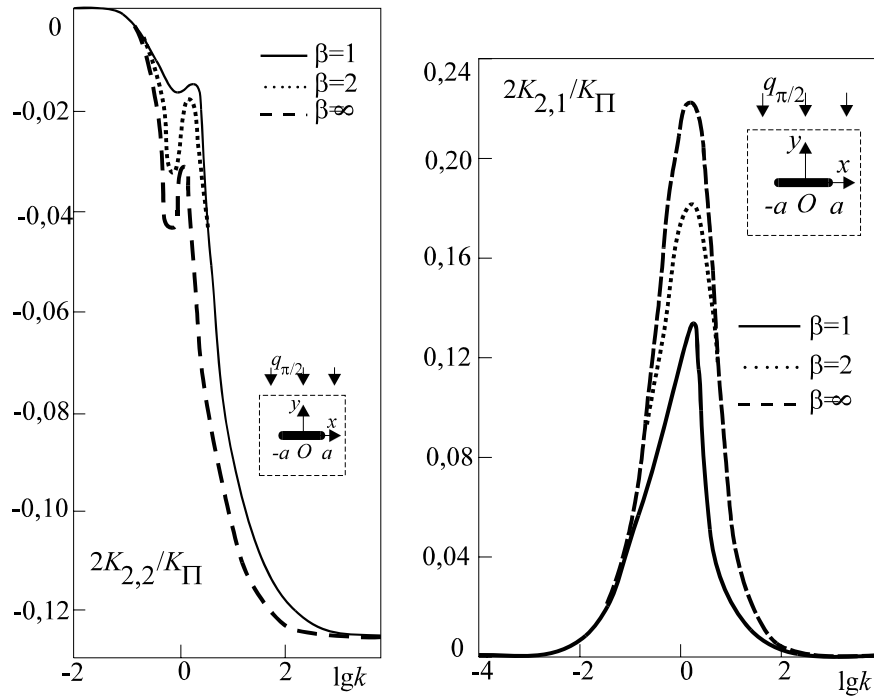


Рис. 38.4

Граничні значення відносної жорсткості включення у випадках щілини та абсолютно жорсткого включення приводять в межах точності обчислень до результатів аналітичних розрахунків: у випадку тепlopасивної тріщини всі УКІН дорівнюють нулю, а для абсолютно жорсткого за потоку тепла є ненульовими –

$$\frac{K_{2,2}(\pi/2)}{K_{II}} = \frac{K_{1,2}(\pi/2)}{K_{II}} = \frac{-1}{2\kappa^*} = -0,125.$$

**Таблиця 38.1.** Збіжність результатів обчислення значень УКІН за різної кількості  $M$  врахованих членів розвинення функцій стрибка у ряд поліномів Чебишева з виділеною кореневою особливістю (максимальна відносна похибка у відсотках відносно значень відповідних величин, отриманих за  $M = 51$  для  $k \equiv E_B / E = 0,2$ )

$M$	$K_{1,1}$	$K_{1,2}$	$K_{2,2}$	$K_{2,1}$	$K_{1,1}$	$K_{1,2}$	$K_{2,2}$	$K_{2,1}$
	еліптичний профіль ( $\beta = 1$ )				прямокутний профіль ( $\beta = \infty$ )			
1	35,1	49,4	12,5	12,5	201	86	30	30
6	0,065	-1,12	-0,16	-0,15	84	13	0,80	0,80
11	-0,12	0,24	-0,003	0,003	26	4,2	0,27	0,27
16	0,038	-0,11	-0,020	-0,016	11,7	1,84	0,12	0,12
21	-0,032	0,049	-0,0063	-0,0025	6,33	1,01	0,067	0,067
26	0,014	-0,036	-0,0089	-0,0057	3,64	0,57	0,037	0,037
31	-0,012	0,014	-0,0051	-0,0017	2,21	0,350	0,023	0,023
36	0,0079	-0,0170	-0,0056	-0,0025	1,28	0,200	0,0130	0,0130
41	-0,0042	0,0039	-0,0036	-0,0006	0,71	0,110	0,0079	0,0077
46	0,0060	-0,0110	0,0047	-0,0007	0,29	0,044	0,0063	0,0030

### 38.4. Приклади розрахунку УКІН для кусково-однорідної матриці

Обчислювалися значення УКІН кусково-однорідної матриці для двох способів температурного навантажування: 1) джерелами тепла інтенсивності  $q_k = \pm q$  в точках  $z_k = \pm id$ ,

$k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ , диполями тепла інтенсивності  $q_{kk}$  однакової орієнтації  $\theta_k = \pi/2$  у тих же точках.

Використання формул (38.11), (38.12) дає можливість отримати окремі замкнуті розв'язки для міжфазного дефекту.

### Абсолютно податне теплоізольоване включення (тріщина)

Абсолютно податне теплоізольоване включення (тріщина) для випадку  $\alpha_{T^*2} / \lambda_2 = \alpha_{T^*1} / \lambda_1$  має такі УКІН:

$$K_{1,1}^{\pm} - iK_{2,1}^{\pm} = \pm i \frac{qE_{*1}E_{*2}\alpha_{T^*2}\sqrt{a/\pi}}{\lambda_2} \left\{ \frac{1}{e_{21}} J_{22}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) + \frac{1}{e_{12}} J_{21}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) \right\} \mp \frac{l_1^+}{\sqrt{\pi a}} (A_1^4 + iA_1^5), \quad \mu_4 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e_{21}}{e_{12}} \quad (\text{навантаження 1}); \quad (38.24)$$

$$K_{1,1}^{\pm} - iK_{2,1}^{\pm} = \mp i \frac{(q_{22}E_{*2} + q_{11}E_{*1})\alpha_{T^*2}}{16\sqrt{\pi a}\lambda_2} J_{61}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) - \frac{(i \pm 2\mu_4)\alpha_{T^*2}}{8\sqrt{\pi a}\lambda_2} \left\{ q_{22}E_{*2} J_{62}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) - q_{11}E_{*1} J_{63}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) \right\} \mp \quad (38.25)$$

$$\mp i \frac{2l_1^+ \alpha_{T^*2} (\lambda_1 q_{22} + \lambda_2 q_{11})}{\sqrt{\pi a} \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} J_{64} \left( \frac{d}{a} \right) \mp i \frac{l_1^+}{\sqrt{\pi a}} (A_1^4 + iA_1^5) \quad (\text{навантаження 2}).$$

Якщо властивості матеріалів півплощин однакові, то (38.24) перепишеться у вигляді

$$K_{1,1}^{\pm} - iK_{2,1}^{\pm} = \mp i \frac{qE_*\alpha_{T^*}a\sqrt{a}}{2\lambda\sqrt{\pi}\sqrt{d^2 + a^2}} \mp \frac{E_*}{4\sqrt{\pi a}} (A_1^4 + iA_1^5) \quad (\text{навантаження 1}), \quad (38.26)$$

який відрізняється від аналогічного виразу праці [706] лише останнім доданком.

### Абсолютно податне абсолютно теплопровідне включення

Абсолютно податне абсолютно теплопровідне включення для випадку  $\alpha_{T^*2} = \alpha_{T^*1}$  має такі УКІН

$$K_{1,1}^{\pm} - iK_{2,1}^{\pm} = \pm i q E_{*1} E_{*2} \alpha_{T^*} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 e_{12}} J_{23}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) + \frac{1}{\lambda_2 e_{21}} J_{24}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) \right\} \mp \frac{i l_1^+}{\sqrt{\pi a}} (A_1^4 + iA_1^5), \quad \mu_4 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e_{21}}{e_{12}} \quad (\text{навантаження 1}); \quad (38.27)$$

$$K_{1,1}^{\pm} - iK_{2,1}^{\pm} = \mp i \frac{\alpha_{T^*2}}{16\sqrt{\pi a}} \left( \frac{q_{22}E_{*2}}{q_2} + \frac{q_{11}E_{*1}}{q_1} \right) J_{61}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) - \frac{(i \pm 2\mu_4)\alpha_{T^*2}}{8\sqrt{\pi a}} \times \left\{ \frac{q_{22}E_{2*}}{\lambda_2} J_{62}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) - \frac{q_{11}E_{1*}}{\lambda_1} J_{63}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_4 \right) \right\} \mp i \frac{l_1^+}{\sqrt{\pi a}} (A_1^4 + iA_1^5) \quad (\text{навантаження 2}). \quad (38.28)$$

### Абсолютно жорстка теплоізолювана плівка

Абсолютно жорстка теплоізолювана плівка у випадку  $\alpha_{T*2}G_2 / (\lambda_2\kappa_2) = \alpha_{T*1}G_1 / (\lambda_1\kappa_1)$  має такі значення УКІН:

$$K_{1,2}^{\pm} - iK_{2,2}^{\pm} = \mp i \frac{2q\sqrt{a/\pi}m_{21}^{-}\alpha_{T*2}E_{*2}}{l_2^+ \lambda_2 (3-\nu_{*2})} \left\{ \frac{(3-\nu_{*1})(1+\nu_{*2})}{e_{12}} J_{21}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) + \frac{(3-\nu_{*2})(1+\nu_{*1})}{e_{21}} \times \right. \\ \left. \times J_{22}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) \right\} \mp i \frac{m_{21}^{-}}{\sqrt{\pi a}} (A_1^1 - iA_1^2), \quad \mu_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\kappa_1 e_{21}}{\kappa_2 e_{12}} \quad (\text{навантаження 1});$$

$$K_{1,2}^{\pm} - iK_{2,2}^{\pm} = \pm i \frac{m_{21}^{-}}{2\sqrt{\pi a} l_2^+} \left\{ d_1 J_{65}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) + d_2 J_{66}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) \right\} + \\ + \frac{(i \pm 2\mu_1) m_{kj}^{-}}{8\sqrt{\pi a} l_2^+} \left\{ \frac{\alpha_{T*1}(1+\nu_{*1})q_{11}}{\lambda_1} J_{63}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) - \frac{\alpha_{T*2}(1+\nu_{*2})q_{22}}{\lambda_2} J_{62}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) \right\} \pm \\ \pm i \frac{(1+\nu_{*1})(1+\nu_{*2})m_{21}^{-} l_3^+}{\sqrt{\pi a} l_2^+} \left( \frac{q_{11}}{\lambda_1} + \frac{q_{22}}{\lambda_2} \right) J_{64}^{\pm} \left( \frac{d}{a} \right) \mp i \frac{m_{21}^{-}}{\sqrt{\pi a}} (A_1^1 - iA_1^2) \quad (\text{навантаження 2}).$$

### Абсолютно жорстка теплопровідна плівка

УКІН для абсолютно жорсткої теплопровідної плівки у випадку  $\alpha_{T*2}G_2 / \kappa_2 = \alpha_{T*1}G_1 / \kappa_1$ :

$$K_{1,2}^{\pm} - iK_{2,2}^{\pm} = \mp i \frac{2q\sqrt{a/\pi}m_{21}^{-}\alpha_{T*2}E_{*2}}{l_2^+ (3-\nu_{*2})} \left\{ \frac{(3-\nu_{*1})(1+\nu_{*2})}{\lambda_1 e_{12}} J_{23}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{(3-\nu_{*2})(1+\nu_{*1})}{\lambda_1 e_{21}} J_{24}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) \right\} \mp i \frac{m_{21}^{-}}{\sqrt{\pi a}} (A_1^1 - iA_1^2) \quad (\text{навантаження 1});$$

$$K_{1,2}^{\pm} - iK_{2,2}^{\pm} = \pm i \frac{m_{21}^{-}}{2\sqrt{\pi a} l_2^+} \left\{ d_1 J_{65}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) + d_2 J_{66}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) + \frac{(i \pm 2\mu_1) m_{kj}^{-}}{8\sqrt{\pi a} l_2^+} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\alpha_{T*1}(1+\nu_{*1})q_{11}}{\lambda_1} J_{63}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) - \frac{\alpha_{T*2}(1+\nu_{*2})q_{22}}{\lambda_2} J_{62}^{\pm} \left( \frac{d}{a}, \mu_1 \right) \right] \right\} \mp \\ \mp i \frac{m_{21}^{-}}{\sqrt{\pi a}} (A_1^1 - iA_1^2) \quad (\text{навантаження 2}).$$

У формулах (38.24) – (38.32) використані позначення

$$d_1 = \left[ \frac{\alpha_{T*1}(1+\nu_{*1})}{4} + \alpha_{T*1}(p_2 - p_1) \right] \frac{q_{11}}{2\lambda_1} + \left[ \frac{\alpha_{T*2}(1+\nu_{*2})}{4} + 2\alpha_{T*1}p_2 \right] \frac{q_{22}}{2\lambda_2}, \\ d_2 = \left[ \frac{\alpha_{T*2}(1+\nu_{*2})}{4} + \alpha_{T*2}(p_1 - p_2) \right] \frac{q_{22}}{2\lambda_2} + \left[ \frac{\alpha_{T*1}(1+\nu_{*1})}{4} + 2\alpha_{T*2}p_1 \right] \frac{q_{11}}{2\lambda_1},$$

$$J_{2m}^{\pm}(y, \eta) = \frac{y^2 \pm i\gamma_m y}{\sqrt{1+y^2}} \exp(2\gamma_m \eta \operatorname{arctg} y) - \sqrt{1+y^2} \quad (m=1,2),$$

$$J_{2m}^{\pm}(y, \eta) = \frac{y^2 \pm i\gamma_m y}{\sqrt{1+y^2}} \exp(2\gamma_m \eta \operatorname{arctg} y) - y \quad (m=3,4),$$

$$J_{61}^{\pm}(y, \eta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{ch} 2\eta \operatorname{arctg} y \mp \frac{i}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{sh} 2\eta \operatorname{arctg} y,$$

$$J_{64}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - 1, \quad J_{6m}^{\pm}(y, \eta) = \frac{iy^2 \mp \gamma_m y}{(1+y^2)^{3/2}} \exp(2\gamma_m \eta \operatorname{arctg} y) \quad (m=2,3),$$

$$J_{6m}^{\pm}(y, \eta) = 1 - \frac{y \pm i\gamma_m}{\sqrt{1+y^2}} \exp(2\gamma_m \eta \operatorname{arctg} y) \quad (m=5,6), \quad \gamma_m = (-1)^m.$$

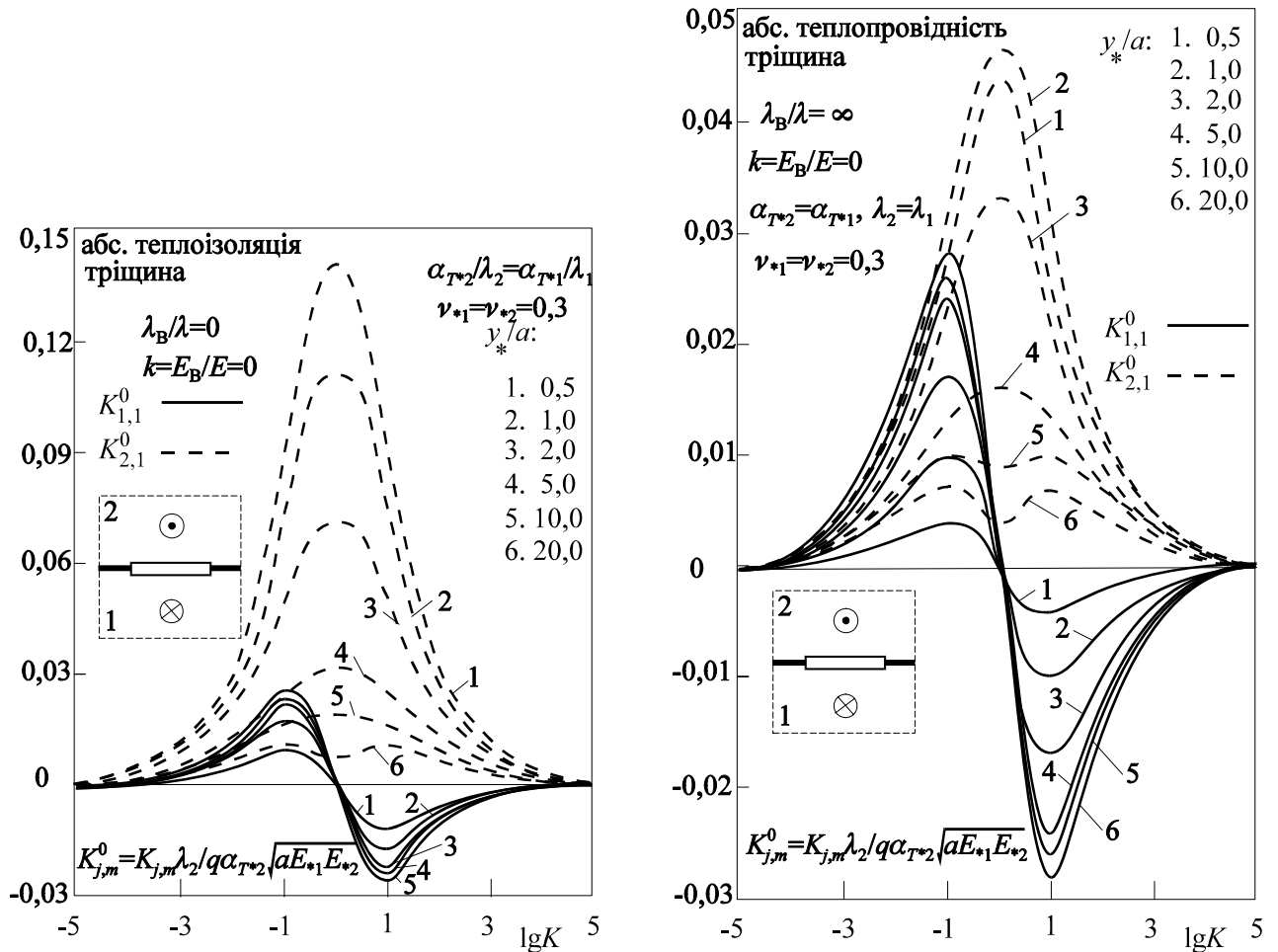


Рис. 38.5

### Аналіз результатів для міжфазного включення

Аналіз залежності безрозмірних УКІН  $K_{m,j}^0$  ( $m, j = 1, 2$ ) (38.24)–(38.32) від безрозмірних параметрів  $K = E_{*2}/E_{*1}$ ,  $y^*/a$  для навантаження 1 (джерелами тепла) і відповідно для:

абсолютно податного теплоізолюваного включення

$$(\alpha_{T^*1} = \alpha_{T^*2}, \lambda_1 = \lambda_2, K_{m,j}^0 = K_{m,j} \lambda_2 / (q \alpha_{T^*2} \sqrt{a E_{*1} E_{*2}}));$$

абсолютно податного теплопровідного включення

$$(\alpha_{T^*2} / \lambda_2 = \alpha_{T^*1} / \lambda_1, K_{m,j}^0 = K_{m,j} \lambda_2 / (q \alpha_{T^*2} \sqrt{a E_{*1} E_{*2}}));$$

абсолютно жорсткого теплоізолюваного включення

$$(\alpha_{T^*2} E_{*2} / \lambda_2 = \alpha_{T^*1} E_{*1} / \lambda_1, K_{m,j}^0 = K_{m,j} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} / (q \sqrt{a \alpha_{T^*1} \alpha_{T^*1} E_{*1} E_{*2}}));$$

абсолютно жорсткого абсолютно теплопровідного включення

$$(\alpha_{T^*1} E_{*1} = \alpha_{T^*2} E_{*2}, \lambda_1 = \lambda_2, K_{m,j}^0 = K_{m,j} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} / (q \sqrt{a \alpha_{T^*1} \alpha_{T^*1} E_{*1} E_{*2}})),$$

якщо  $\nu_{*1} = \nu_{*2} = 0,3$  відображена на рис. 38.5, 38.6.

Обчислення свідчать, що УКІН  $K_{2,m}$  ( $m = 1, 2$ ), породжені нормальним до осьової лінії включення навантаженням, максимальні за величиною, коли матеріали півплощин мають однакові механічні властивості; УКІН  $K_{1,m}$  ( $m = 1, 2$ ), викликані зсувом на поверхні включення, досягають екстремальних значень, коли механічні властивості матеріалів матриці відрізняються приблизно на порядок.

Виявилось також, що використання диполів як чинників навантаження (принаймні у досліджених граничних випадках) не вносить істотних змін у якісну картину у порівнянні з навантаженням джерелами тепла. Відмінність полягає лише у тому, що диполь впливає на напружено-деформований стан матриці в околі включення на менших відстанях  $y_*/a$ , ніж джерело тепла. Це пояснюється підвищеною мірою самоврівноваженості (повна теплова самоврівноваженість) теплового диполя як теплового чинника.

Якісна оцінка аналітичних результатів, одержаних на основі формул (39.9), (39.15) – (39.20), дає можливість зробити висновок, що збільшення тепловіддачі з бічних поверхонь пластини чи зменшення тепловіддачі з бічних поверхонь включення викликає зменшення абсолютних значень УКІН.

### Числовий аналіз для однорідної матриці

Методом колокацій з використанням екстраполяції за Річардсоном досліджена зміна УКІН у випадку пружного включення сталої товщини  $h/a = 0,001$  в однорідній матриці за умов плоского температурного поля та двох способів температурного навантаження: 1) джерелами тепла інтенсивності  $q_k = \pm q$  у точках  $z_{*k} = \pm i y_*$ ,  $k = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ; 2) джерелами тепла інтенсивності  $q_k = \pm q$  в точках  $z_{*k} = \pm x_*$  ( $k = 1, 2$ ). Обчислення здійснені для  $\nu = \nu_B$ ,  $\alpha_{TB} / \alpha_T = 0$  у широкому діапазоні зміни відносної жорсткості  $k = E_B / E$  та відносної теплопровідності  $\Lambda = \lambda_B / \lambda$  включення ( $10^{-5} \leq k, \Lambda \leq 10^5$ ). Для досягнення точності порядку 1% за найнесприятливіших параметрів задач виявилось достатнім утримати 40 ненульових коефіцієнтів розвинення у ряд за многочленами Чебишева з виділеною кореневою особливістю.

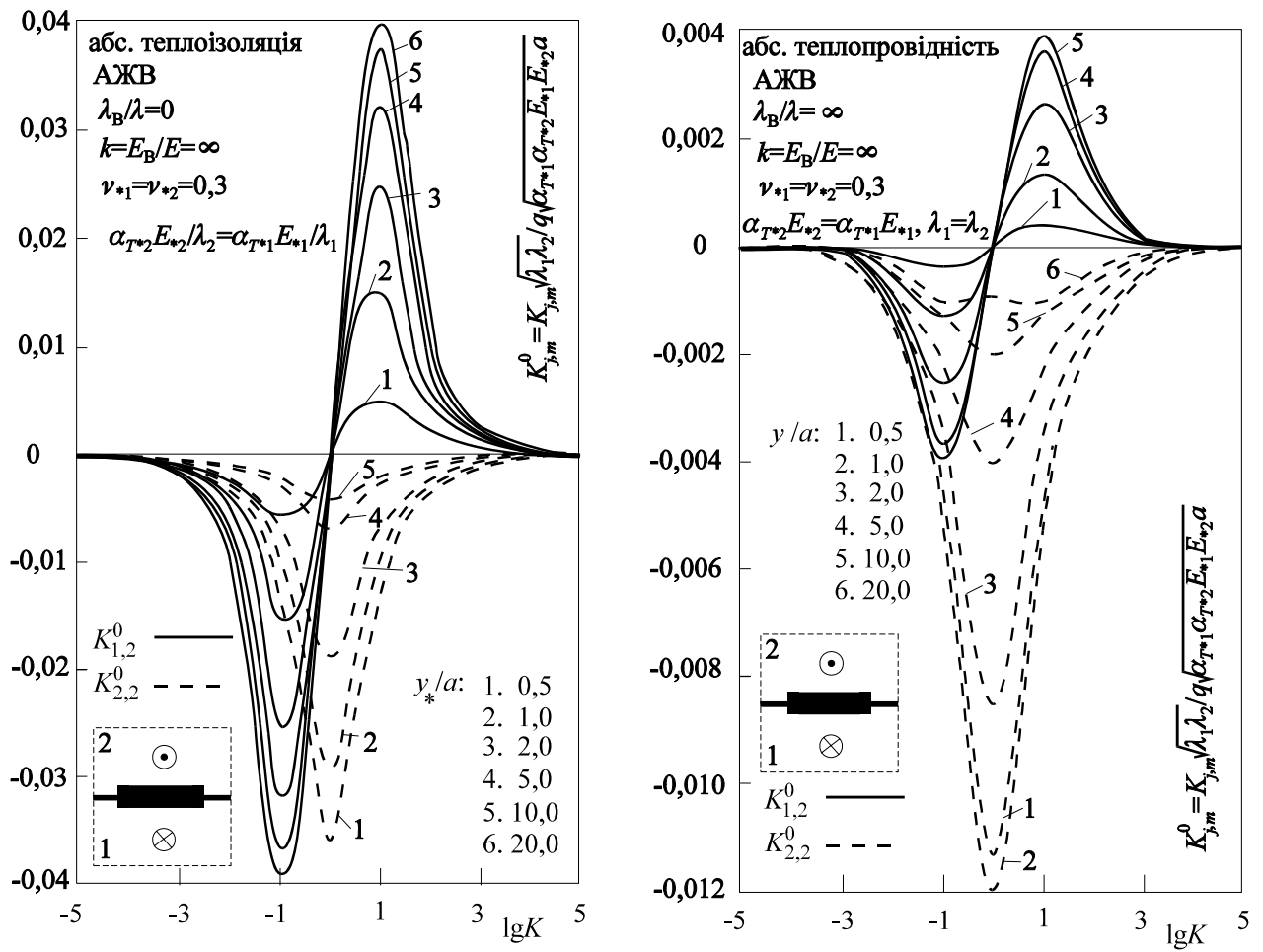


Рис. 38.6

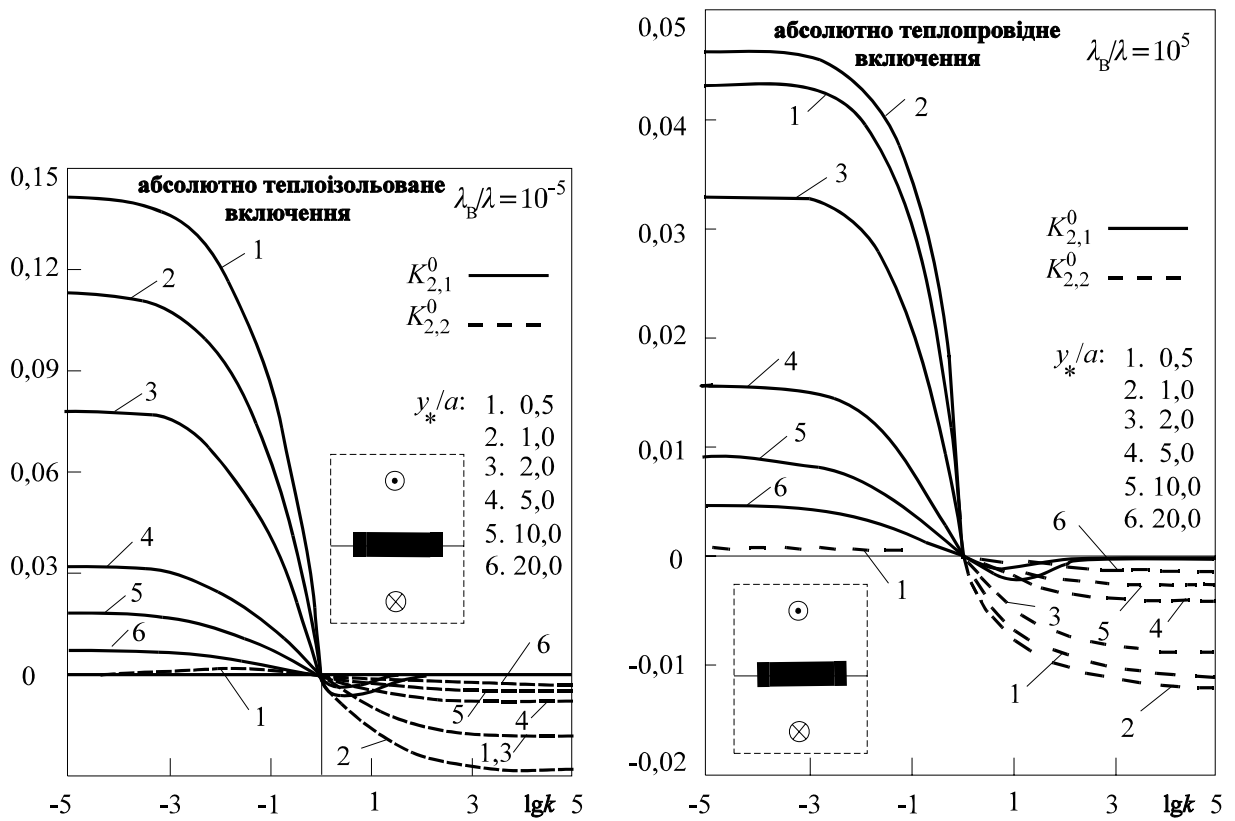


Рис. 38.7

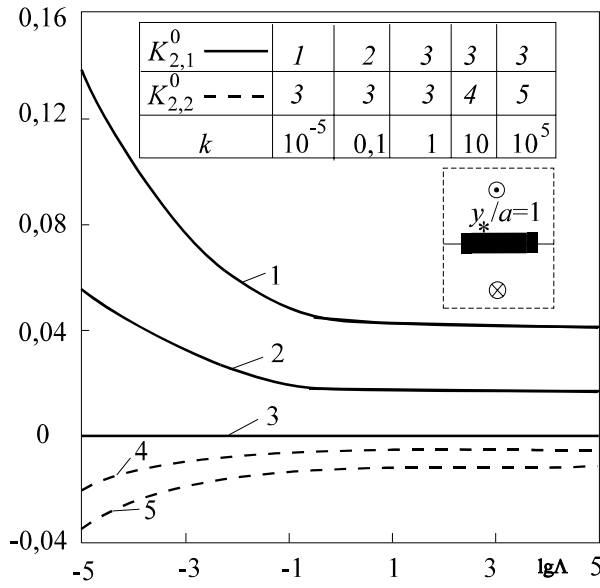


Рис. 38.8

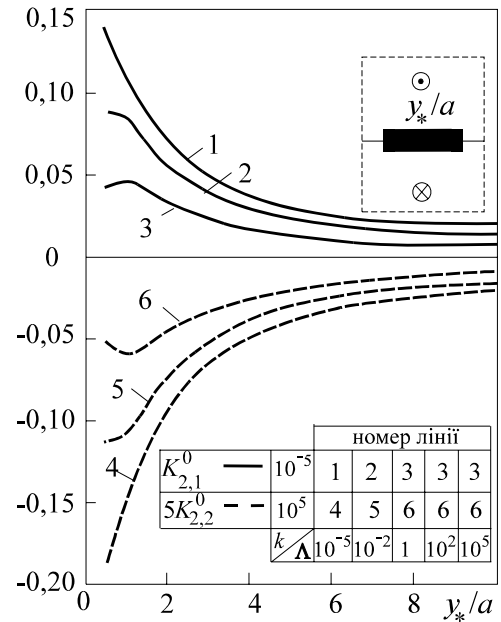


Рис. 38.9

На рис. 38.7 – 38.12 відображена залежність безрозмірних УКІН

$$K_{j,m}^0 = K_{j,m} \lambda / (q \alpha_T E^* \sqrt{\pi a}) \quad (j, m = 1, 2)$$

від параметрів  $k$ ,  $\Lambda$ , отриманих для різних безрозмірних відстаней  $y^*/a$ ,  $x^*/a$  теплових джерел від включення.

Помітна екстремальність УКІН для теплоізолюваної тріщини і абсолютно жорсткого теплоізолюваного включення. Домінуючу роль для податних включень відіграють коефіцієнти  $K_{j,1}$  ( $j = 1, 2$ ), що визначаються стрибком похідних від переміщень на берегах включень, а для жорстких включень – УКІН  $K_{j,2}$  ( $j = 1, 2$ ), які визначаються стрибками контактних напружень (рис. 38.7, 38.10). Збільшення коефіцієнта відносної теплопровідності  $\Lambda$  спричиняє зменшення УКІН за абсолютною величиною (рис. 38.8, 38.11).

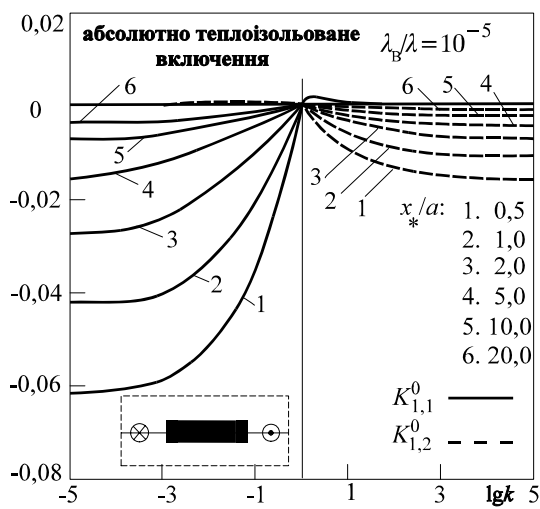


Рис. 38.10

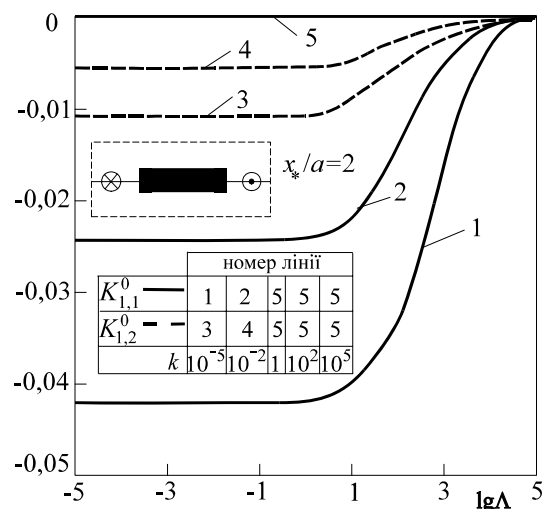


Рис. 38.11

Якісна оцінка результатів, отриманих на основі аналітичних виразів (38.24) – (38.32), дає можливість зробити висновок, що збільшення тепловіддачі з бічних поверхонь пластини



приводить до зменшення УКІН за абсолютною величиною, а збільшення тепловіддачі з бічних поверхонь включення дає обернений ефект.

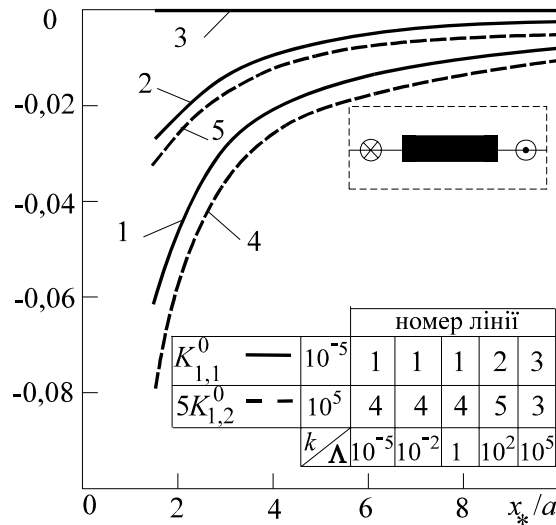


Рис. 38.12

Останній ефект породжує також в цілому відносне віддалення  $y^*/a$ ,  $x^*/a$  джерел від включення (рис. 38.9, 38.12). Однак у зв'язку з цим слід відзначити й існування певної відстані джерел, коли абсолютне значення УКІН сягає свого максимуму.

Зазначимо також, що значення УКІН, отримані за  $k=10^{-5}$ ,  $\Lambda=10^{-5}$ , за  $k=10^{-5}$ ,  $\Lambda=10^5$ , за  $k=10^5$ ,  $\Lambda=10^{-5}$  та за  $k=10^5$ ,  $\Lambda=10^5$  відрізняються від УКІН для абсолютно податного теплоізолюваного, абсолютно податного абсолютно теплопровідного, абсолютно жорсткого теплоізолюваного і абсолютно жорсткого абсолютно теплопровідного включення відповідно не більше, як на 1%, тобто, перебувають у межах точності здійснених обчислень. Для досягнення такої точності слід було вважати  $h/a \leq 0,001$ . Зрозуміло, що чим тоншим є включення – тим, згідно з концепцією методу функцій стрибка, точнішими будуть отримані на його основі результати.

## § 39. Задача термопружності в умовах узагальненого плоского температурного поля

### 39.1. Загальна методика

З геометричного погляду задача термопружності для кусково-однорідної пластини завтовшки  $2\delta$  в умовах узагальненого плоского температурного поля ідентична задачі для середовища (пластини) в умовах плоского температурного поля, коли її поверхні теплоізолювані (див. п. 38.1). Зовнішнє навантаження здійснюється тими ж чинниками за винятком теплового потоку на нескінченності, який внаслідок тепловіддачі позбавлений фізичного сенсу.

Поставлену задачу можна розв'язати з використанням інтегральних перетворень за методикою § 34. Однак видається зручнішим звести її до розв'язування відповідної задачі термопружності в умовах плоского температурного поля (п. 38.2).

Оскільки в кожній з частин  $S_k$  ( $k=1,2$ ) напруження та деформації повинні задовольняти рівняння рівноваги (13.14), закон Дюамеля – Нейманна (13.15), а також рівняння сумісності деформацій у напруженнях (13.16), то функція Ейрі  $\mathfrak{F}_k(x, y)$  задовольнятиме рівняння сумісності (13.18)

$$\Delta\Delta\mathfrak{F}_k(x, y) + \alpha_{Tk} E_k \Delta T(x, y) = 0 \quad (k=1,2). \quad (39.1)$$

В умовах плоского температурного поля функція  $T(x, y)$  є гармонічною. Це обумовлює бігармонічність  $\mathfrak{F}_k(x, y)$  та можливість ефективного застосування методів теорії функцій комплексної змінної. У даному випадку  $T$  задовольняє рівняння Гельмгольца (19.1). Тому подамо  $\mathfrak{F}_k(x, y)$  як суму її бігармонічної складової  $\mathfrak{F}_k^{\bar{0}}(x, y)$  та часткового розв'язку  $\mathfrak{F}_k^T(x, y)$  неоднорідного рівняння (39.1)

$$\mathfrak{F}_k(x, y) = \mathfrak{F}_k^{\bar{0}}(x, y) + \mathfrak{F}_k^T(x, y). \quad (39.2)$$

Вважаючи функцію  $\mathfrak{F}_k^T(x, y)$  відомою, введемо у розгляд величини

$$\begin{aligned} \sigma_{xxk}^{\bar{0}}(x, y) &= \sigma_{xxk}(x, y) - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yyk}^{\bar{0}}(x, y) = \sigma_{yyk}(x, y) - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial x^2}, \\ \sigma_{xyk}^{\bar{0}}(x, y) &= \sigma_{xyk}(x, y) + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial x \partial y} \quad ((x, y) \sim z \in S_k; k=1,2). \end{aligned} \quad (39.3)$$

Звідси з урахуванням закону Дюамеля – Нейманна (13.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{xk}^{\bar{0}}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{xk}(x, y)}{\partial x} - \frac{\alpha_{Tk} \lambda_k \delta}{\alpha_k} \left[ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial y^2} - \nu_k \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial x^2} \right] - \alpha_{Tk} T, \\ \frac{\partial u_{yk}^{\bar{0}}(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u_{yk}(x, y)}{\partial y} - \frac{\alpha_{Tk} \lambda_k \delta}{\alpha_k} \left[ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial x^2} - \nu_k \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial y^2} \right] - \alpha_{Tk} T, \\ \frac{\partial u_{xk}^{\bar{0}}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_{yk}^{\bar{0}}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{xk}(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_{yk}(x, y)}{\partial x} + \frac{2(1+\nu_k) \alpha_{Tk} \lambda_k \delta}{\alpha_k} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k^T(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (39.4)$$

Значимо, що величини  $\sigma_{xxk}^{\bar{0}}, \sigma_{yyk}^{\bar{0}}, \sigma_{xyk}^{\bar{0}}, u_{xk}^{\bar{0}}, u_{yk}^{\bar{0}}$  задовольняють у областях  $S_k$  ( $k=1,2$ ) рівняння рівноваги (13.14), закон Гука

$$\frac{\partial u_{xk}^{\bar{0}}}{\partial x} = \frac{1}{E_k} [\sigma_{xxk}^{\bar{0}} - \nu_k \sigma_{yyk}^{\bar{0}}], \quad \frac{\partial u_{yk}^{\bar{0}}}{\partial y} = \frac{1}{E_k} [\sigma_{yyk}^{\bar{0}} - \nu_k \sigma_{xxk}^{\bar{0}}], \quad \frac{\partial u_{xk}^{\bar{0}}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yk}^{\bar{0}}}{\partial x} = \frac{2(1+\nu_k)}{E_k} \sigma_{xyk}^{\bar{0}}$$

та рівняння сумісності деформацій  $\Delta(\sigma_{xxk}^{\bar{0}} + \sigma_{yyk}^{\bar{0}}) = 0$ , тобто, усі рівняння теорії пружності.

Тому з математичного погляду визначення "бігармонічних" напружень і переміщень еквівалентне задачі термопружності за плоского температурного поля (п. 38.2).

Для визначення часткового розв'язку  $\mathfrak{F}_k^T(x, y)$  зінтегруємо рівняння

$$\Delta\Delta\mathfrak{F}_k^T(x, y) = -\alpha_{Tk} E_k \Delta T(x, y),$$

отримавши

$$\Delta\mathfrak{F}_k^T(x, y) = -\alpha_{Tk} E_k [T(x, y) - T_0]. \quad (39.5)$$

З рівняння теплопровідності (19.1)

$$T(x, y) - T_c = \frac{\lambda_k \delta}{\alpha_k} \Delta T(x, y) - \frac{Q_k(x, y)}{2\alpha_k} \quad ((x, y) \sim z \in S_k). \quad (39.6)$$

Підставляючи (39.6) у (39.5) після повторного інтегрування [711, 739] маємо

$$\mathfrak{I}_k^T(x, y) = -\frac{\alpha_{Tk} E_k \lambda_k \delta}{\alpha_k} [T(x, y) - T_c] + \frac{\alpha_{Tk} E_k}{2\alpha_k} W_k(x, y), \quad (39.7)$$

де у випадку дії джерел тепла та теплових диполів у точці  $z_{*k}$  функція

$$W_k(x, y) = -\frac{q_k}{2\pi} \ln r_k + \frac{q_{kk} (x - x_{*k}) \cos \theta_k + (y - y_{*k}) \sin \theta_k}{r_{*k}^2}, \quad (39.8)$$

$$r_{*k}^2 = \sqrt{(x - x_{*k})^2 + (y - y_{*k})^2}.$$

Таким чином, маючи частковий розв'язок (39.7), заміною (39.3), (39.4) у розгляд вводяться "бігармонічні" напруження і переміщення, визначення яких цілком аналогічне розв'язуванню задачі термопружності за умов плоского температурного поля.

## 39.2. Однорідна пластинка з включеннями

### Загальний випадок

Застосуємо загальну методику до прикладу однорідної пластинки з включеннями. Вважаючи  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\alpha_{T1} = \alpha_{T2} = \alpha_T$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , з урахуванням того, що з погляду теплопровідності включення є лінією розподілених джерел та диполів тепла, на основі (39.8) отримаємо вираз для  $\mathfrak{I}_k^T(x, y)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_k^T(x, y) = & -\frac{\alpha_T E}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{4\pi\lambda\delta} \sum_{k=1}^2 q_k [K_0(\omega r_{*k}) + \ln r_{*k}] + \frac{1}{4\pi\lambda\delta} \sum_{k=1}^2 q_{kk} [(x - x_{*k}) \cos \theta_k + \right. \\ & \left. + (y - y_{*k}) \sin \theta_k] \left[ \frac{\omega K_1(\omega r_{*k})}{r_{*k}} - \frac{1}{r_{*k}^2} \right] - \frac{y}{2\pi} \int_{L'} \tilde{f}_3(\xi) \left[ \frac{\omega K_1(\omega r)}{r} - \frac{1}{r^2} \right] d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{L'} \tilde{f}_6(\xi) [K_0(\omega r) + \ln r] d\xi, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}. \right. \end{aligned} \quad (39.9)$$

Ця функція повністю враховує температурний вплив на поле напружень та переміщень і подальше визначення величин (39.3), (39.4) є вже суто силовою задачею, розглянутою у розд. VI.

Обчислимо також похідні, що фігурують у (39.3), (39.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{I}_k^T(x, y)}{\partial \gamma \partial \beta} = & \frac{\alpha_T E}{4\pi\lambda\delta} \sum_{k=1}^2 \left\{ q_k \Omega_{\gamma\beta}^S(x - x_{*k}, y - y_{*k}) + q_{kk} \Omega_{\gamma\beta}^D(x - x_{*k}, y - y_{*k}, \theta_k) \right\} + \\ & + \frac{\alpha_T E}{2\pi} \int_{L'} \tilde{f}_3(\xi) \Omega_{\gamma\beta}^D(x - \xi, y, \pi/2) - f_6(\xi) \Omega_{\gamma\beta}^S(x - \xi, y) / \lambda \} d\xi \quad (\alpha, \beta \sim x, y), \end{aligned} \quad (39.10)$$

де

$$\begin{aligned}\Omega_{xx}^S(x, y) &= \frac{x^2 K_0(\omega R) + (x^2 - y^2) K^*(\omega R)}{R^2}, \quad \Omega_{xy}^S(x, y) = \frac{4xy K^{**}(\omega R)}{R^2}, \\ \Omega_{yy}^S(x, y) &= \frac{y^2 K_0(\omega R) + (y^2 - x^2) K^*(\omega R)}{R^2}, \\ \Omega_{xx}^D(x, y) &= \frac{2x \cos \theta}{R^4} [-\Lambda_1(x, y) + \Lambda_3(x, y)] + \frac{2y \sin \theta}{R^4} [\Lambda_2(x, y) + \Lambda_3(x, y)], \\ \Omega_{yy}^D(x, y) &= \frac{2x \cos \theta}{R^4} [\Lambda_1(x, y) + \Lambda_4(x, y)] + \frac{2y \sin \theta}{R^4} [-\Lambda_2(x, y) + \Lambda_4(x, y)], \\ \Omega_{xy}^D(x, y) &= \frac{4y \cos \theta}{R^4} [\Lambda_2(x, y) + \Lambda_3(x, y)] + \frac{4x \sin \theta}{R^4} [\Lambda_1(x, y) + \Lambda_4(x, y)], \\ \Lambda_1(x, y) &= (3y^2 - x^2) K^{**}(\omega R), \quad \Lambda_2(x, y) = (3x^2 - y^2) K^{**}(\omega R), \\ \Lambda_3(x, y) &= \frac{x^2 \omega R K_1(\omega R)}{2}, \quad \Lambda_4(x, y) = \frac{y^2 \omega R K_1(\omega R)}{2}, \quad K^*(z) = \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2}, \\ K^{**}(z) &= K^*(z) + K_0(z)/2, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad K_n(z) - \text{функції Макдональда.}\end{aligned}$$

"Бігармонічне" поле напружень та переміщень (39.3), (39.4)  $\sigma_{ij}^{\bar{6}}, u_j^{\bar{6}}$  аналогічно до того, як це зроблено у п. 38.1, вважатимемо суперпозицією однорідного  $\sigma_{ij}^{\bar{6}0}, u_j^{\bar{6}0}$  та збуреного присутністю включень  $\hat{\sigma}_{ij}^{\bar{6}}, \hat{u}_j^{\bar{6}}$  станів, які, подібно до (38.1), (38.2), задовольняють умови

$$\begin{aligned}(\sigma_{yy1}^{\bar{6}0} - i\sigma_{xy1}^{\bar{6}0}) - (\sigma_{yy2}^{\bar{6}0} - i\sigma_{xy2}^{\bar{6}0}) &= 0, \quad (u_{x1}^{\bar{6}0'} + iu_{y1}^{\bar{6}0'}) - (u_{x2}^{\bar{6}0'} + iu_{y2}^{\bar{6}0'}) = 0 \quad (x \in L); \\ (\hat{\sigma}_{yy1}^{\bar{6}} - i\hat{\sigma}_{xy1}^{\bar{6}}) - (\hat{\sigma}_{yy2}^{\bar{6}} - i\hat{\sigma}_{xy2}^{\bar{6}}) &= f_1(x) - if_2(x) \equiv f_1^*(x), \\ (\hat{u}_{x1}^{\bar{6}'} + i\hat{u}_{y1}^{\bar{6}'}) - (\hat{u}_{x2}^{\bar{6}'} + i\hat{u}_{y2}^{\bar{6}'}) &= f_4(x) + if_5(x) \equiv f_4^*(x) \quad (x \in L),\end{aligned} \quad (39.11)$$

причому

$$f_1^*(x) = f_4^*(x) = 0,$$

якщо  $x \in L''$ .

Тому крайова задача визначення  $\sigma_{ij}^{\bar{6}}, u_j^{\bar{6}}$  є суто силовою, оскільки всі температурні чинники, які впливають на напружено-деформований стан пластини, вже враховані заміною (39.3), (39.4).

З урахуванням змісту однорідного й збуреного розв'язків та їхнього силового характеру

$$\begin{aligned}\sigma_{yyk}^{\bar{6}0}(z) - i\sigma_{xyk}^{\bar{6}0}(z) &= \Phi_k^0(z) - \Phi_k^0(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \Phi_k^{0'}(z), \\ 2G [\hat{u}_{xk}^{\bar{6}0'}(z) + i\hat{u}_{yk}^{\bar{6}0'}(z)] &= \kappa \Phi_k^0(z) + \Phi_k^0(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k^{0'}(z)}, \\ \hat{\sigma}_{yyk}^{\bar{6}}(z) - i\hat{\sigma}_{xyk}^{\bar{6}}(z) &= \hat{\Phi}_k(z) - \hat{\Phi}_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \hat{\Phi}_k'(z), \\ 2G [\hat{u}_{xk}^{\bar{6}'}(z) + i\hat{u}_{yk}^{\bar{6}'}(z)] &= \kappa \hat{\Phi}_k(z) + \hat{\Phi}_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\hat{\Phi}_k'(z)} \quad (z \in S_k),\end{aligned} \quad (39.12)$$

де

$$\begin{aligned}
\Phi_k^0(z) &= \Gamma_k + S_{11}(z) + S_{22}(z), \\
\Phi_j^0(z) &= -\bar{\Gamma}_j - \bar{\Gamma}'_j - \bar{S}_{jj}(z) - \bar{R}_{jj}(z) - \bar{R}_j(z) - z\bar{S}'_{11}(z), \\
\hat{\Phi}_k(z) &= \frac{i}{2(1+\kappa)} \left[ t_1^*(z) + 2Gt_4^*(z) \right], \\
\hat{\Phi}_j(z) &= \frac{i}{2(1+\kappa)} \left[ \kappa t_1^*(z) + 2Gt_4^*(z) \right].
\end{aligned} \tag{39.13}$$

Тоді з урахуванням формул Сохоцького – Племеля

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\sigma}_{yy}^{\bar{6}} - i\hat{\sigma}_{xy}^{\bar{6}} \right\rangle_L &= -4i \frac{1-\kappa}{1+\kappa} t_1^*(x) - 16i \frac{G}{1+\kappa} t_4^*(x), \quad \left[ \hat{\sigma}_{yy}^{\bar{6}} - i\hat{\sigma}_{xy}^{\bar{6}} \right]_L = f_1^*(x), \\
\left\langle \frac{\partial \hat{u}_x^{\bar{6}}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y^{\bar{6}}}{\partial x} \right\rangle_L &= -4i \frac{\kappa}{G(1+\kappa)} t_1^*(x) + 4i \frac{1-\kappa}{1+\kappa} t_4^*(x), \quad \left[ \frac{\partial \hat{u}_x^{\bar{6}}}{\partial x} + i \frac{\partial \hat{u}_y^{\bar{6}}}{\partial x} \right]_L = f_4^*(x).
\end{aligned} \tag{39.14}$$

Переходячи у (39.12) – (39.14) за допомогою (39.3), (39.4) до реальних напружень та переміщень, отримуємо

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\sigma}_{yy} \right\rangle_L &= \left\langle \hat{\sigma}_{yy}^{\bar{6}} \right\rangle_L, \quad \left\langle \hat{\sigma}_{xy} \right\rangle_L = \left\langle \hat{\sigma}_{xy}^{\bar{6}} \right\rangle_L, \quad \left[ \hat{\sigma}_{yy} \right]_L = \left[ \hat{\sigma}_{yy}^{\bar{6}} \right]_L, \quad \left[ \hat{\sigma}_{xy} \right]_L = \left[ \hat{\sigma}_{xy}^{\bar{6}} \right]_L, \\
\left\langle \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right\rangle_L &= \left\langle \frac{\partial \hat{u}_x^{\bar{6}}}{\partial x} \right\rangle_L, \quad \left\langle \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right\rangle_L = \left\langle \frac{\partial \hat{u}_y^{\bar{6}}}{\partial x} \right\rangle_L, \quad \left[ \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right]_L = \left[ \frac{\partial \hat{u}_x^{\bar{6}}}{\partial x} \right]_L, \quad \left[ \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right]_L = \left[ \frac{\partial \hat{u}_y^{\bar{6}}}{\partial x} \right]_L, \\
\left\langle \sigma_{yy}^0 \right\rangle_L &= \left\langle \hat{\sigma}_{yy}^{0\bar{6}} \right\rangle_L + D_{xx}(x), \quad \left\langle \sigma_{xy}^0 \right\rangle_L = \left\langle \hat{\sigma}_{xy}^{0\bar{6}} \right\rangle_L - D_{xy}(x), \quad \left[ \sigma_{yy}^0 \right]_L = \left[ \hat{\sigma}_{yy}^{0\bar{6}} \right]_L, \\
\left[ \sigma_{xy}^0 \right]_L &= \left[ \hat{\sigma}_{xy}^{0\bar{6}} \right]_L, \quad \left\langle \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right\rangle_L = \left\langle \frac{\partial \hat{u}_x^{0\bar{6}}}{\partial x} \right\rangle_L - \frac{1+\nu}{E} D_{xx}(x) + 2\alpha_T T_c, \quad \left[ \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right]_L = \left[ \frac{\partial \hat{u}_x^{0\bar{6}}}{\partial x} \right]_L, \\
\left\langle \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right\rangle_L &= \left\langle \frac{\partial \hat{u}_y^{0\bar{6}}}{\partial x} \right\rangle_L - \frac{1+\nu}{E} D_{xy}(x) + 2\alpha_T T_c, \quad \left[ \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right]_L = \left[ \frac{\partial \hat{u}_y^{0\bar{6}}}{\partial x} \right]_L, \\
D_{\varphi\psi}(x) &= \frac{\partial^2 \mathfrak{I}^T(x, -0)}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial^2 \mathfrak{I}^T(x, +0)}{\partial \varphi \partial \psi} \quad (\varphi, \psi \sim x, y).
\end{aligned} \tag{39.15}$$

Підставляючи (39.15) в умови взаємодії тонкого теплоактивного включення з матрицею (16.13) (без урахування підкреслених членів, що відповідають величинам порядку  $h^2$ ), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
\rho_{i1} t_2(x) + \rho_{i2} t_5(x) + \rho_{i3} s_{2n}(x) + \rho_{i4} s_{5n}(x) &= F_i^T(x), \\
\rho_{j1} t_1(x) + \rho_{j2} t_4(x) + \rho_{j3} s_{1n}(x) + \rho_{j4} s_{4n}(x) &= F_j^T(x) \\
(x \in L'_n; \quad n = \overline{1, N}; \quad i = 1, 2; \quad j = 3, 4),
\end{aligned} \tag{39.16}$$

яка відрізняється від (38.15) лише правими частинами

$$\begin{aligned}
F_1^T(x) &= \frac{\nu_B}{E_B} N_x(a_n^-) - V(a_n^-) + \frac{\nu_B}{E_B} \int_{a_p^-}^x [\sigma_{xy}^{06}]_h d\xi - \int_{a_p^-}^x \left[ \frac{\partial u_x^{06}}{\partial x} \right]_h d\xi - \frac{h}{E_B} \langle \sigma_{yy}^{06} \rangle_h - \frac{h}{E_B} D_{xx}(x) - \\
&\quad - \alpha_{TB} h \langle T \rangle_h, \\
F_2^T(x) &= \frac{1}{E_B} N_x(a_n^-) + \frac{1}{E_B} \int_{a_p^-}^x [\sigma_{xy}^{06}]_h d\xi - h \left\langle \frac{\partial u_x^{06}}{\partial x} \right\rangle_h - \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{yy}^{06} \rangle_h + \left( \frac{1+\nu}{E} - \frac{\nu_B}{E_B} \right) h D_{xx}(x) - \\
&\quad - 2\alpha_T h T_c + \alpha_{TB} h \langle T \rangle_h, \\
F_3^T(x) &= -\frac{\nu_B}{E_B} N_{xy}(a_n^-) + \int_{a_p^-}^x \left[ \frac{\partial u_x^{06}}{\partial x} \right]_h d\xi - \frac{1}{\nu_B E_B} \int_{a_p^-}^x [\sigma_{yy}^{06}]_h d\xi + \frac{\nu_B}{E_B} h \langle \sigma_{xy}^{06} \rangle_h - \frac{\nu_B}{E_B} h D_{xy}(x) - \\
&\quad - \frac{1+\nu_B}{\nu_B} \alpha_{TB} \int_{a_p^-}^x [T]_h d\xi, \\
F_4^T(x) &= V'(a_n^-) + \int_{a_p^-}^x \left[ \frac{\partial u_x^{06}}{\partial x} \right]_h d\xi + \frac{1}{G_B} \int_{a_p^-}^x [\sigma_{yy}^{06}]_h d\xi - h \left\langle \frac{\partial u_y^6}{\partial x} \right\rangle_h + \frac{1+\nu}{E} h D_{xy}(x) - 2\alpha_T h T_c - \\
&\quad - 2h \varepsilon_{nB}^-,
\end{aligned}$$

При цьому повинні виконуватися додаткові умови (30.46), (30.47), що мають той самий фізичний сенс. Торцеві сталі визначаються апріорними виразами (30.53) або за допомогою підходу п. 39.3.

### Абсолютно жорсткі включення

Вважаючи, що  $E_B \rightarrow \infty$ , з формул (39.16) маємо

$$\begin{aligned}
f_4^*(x) &= -\left[ u_x^{06'}(x) + i u_y^{06'}(x) \right]_h \approx 0, \\
t_1^*(x) &= F_1^{*T}(x) \equiv \\
&\equiv -\frac{iG(1+\kappa)}{4\kappa} \left\{ \left\langle u_x^{06'}(x) + i u_y^{06'}(x) \right\rangle_h - \frac{D_{xx}(x)}{2G} - i \frac{D_{xy}(x)}{2G} + 2\alpha_T(1+i)T_c \right\},
\end{aligned} \tag{39.17}$$

звідки

$$\begin{aligned}
f_1^*(x) &= \frac{-1}{\pi \sqrt{(a_n^+ - x)(x - a_n^-)}} \left\{ \int_{L_n} \frac{\sqrt{(a_n^+ - \xi)(\xi - a_n^-)}}{\xi - x} F_1^{*T}(\xi) d\xi + Q_{1n} - i Q_{2n} \right\} \\
&\quad (x \in L_n; n = \overline{1, N}).
\end{aligned} \tag{39.18}$$

### Щілини

Щілини відповідають податним включенням, коли  $E_B \rightarrow 0$ . Тоді з (39.16) отримаємо

$$f_1^*(x) = -\left[\sigma_{yy}^{06}(x) - i\sigma_{xy}^{06}(x)\right]_h \approx 0, \quad (39.19)$$

$$i_4^*(x) = F_4^*(x) \equiv -i \frac{1+\kappa}{16G} \left\{ \left\langle \sigma_{yy}^{06}(x) - i\hat{\sigma}_{xy}^{06} \right\rangle_h + D_{xx}(x) + iD_{xy}(x) \right\},$$

звідки

$$f_4^*(x) = \frac{-1}{\pi \sqrt{(a_n^+ - x)(x - a_n^-)}} \left\{ \int_{L_n} \frac{\sqrt{(a_n^+ - \xi)(\xi - a_n^-)}}{\xi - x} F_4^{*T}(\xi) d\xi + Q_{4n} + iQ_{5n} \right\} \quad (39.20)$$

$$(x \in L_n; n = \overline{1, N}).$$

### Бездефектна матриця

Цей випадок можна отримати з (39.16) або коли  $h \rightarrow 0$ , або коли

$$E_B \rightarrow E, \nu_B \rightarrow \nu, \alpha_{TB} \rightarrow \alpha_T, \lambda_B \rightarrow \lambda, \alpha_B \rightarrow \alpha.$$

Таким чином, розв'язок задачі термопружності для кусково-однорідної пластинки з урахуванням тепловіддачі з бічних поверхонь легко знаходиться з відомого розв'язку задачі термопружності за плоского температурного стану. Тому надалі можна зосередити увагу лише на дослідженні термонапруженого стану масиву чи пластини з теплоізолюваними бічними поверхнями та тонкими міжфазними пружними теплоактивними включеннями.

### 39.3. Визначення зусиль і переміщень на торцях включень

Для уникнення недосконалості апріорних співвідношень (30.53) можна використати інший підхід, що використовує додаткові фізично обґрунтовані в околі торця включення допущення, аналогічні здійсненим для поздовжнього зсуву. Вперше подібний метод застосований у [25] для визначення осьових зусиль на кінці тонкого включення за допомогою асимптотичних подань біля вістря включення та вирізів для коефіцієнтів інтенсивності осьових напружень у площині з тонкими прошарками. Застосуємо його для визначення також дотичних (зсувних) зусиль та переміщень на торцях включень, використавши припущення про ідеальний механічний контакт включення з матрицею (неідеальність чи гладкість контакту не вносить принципових змін у реалізацію запропонованої схеми).

Введемо у розгляд похідні відносних переміщень на торцях

$$\{U'(w_n), V'(w_n)\} = \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial x} \{u_x(w_n, y), u_y(w_n, y)\} dy \quad (w_n \sim a_n^\pm).$$

Для побудови зв'язку між  $U(w_n), V(w_n)$  та  $U'(w_n), V'(w_n)$  запишемо закон Дюамеля – Нейманна (13.15) для області, зайнятої включенням

$$\sigma_{xxB} = \frac{E_{*B}}{1-\nu_{*B}^2} \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial x} + \nu_{*B} \frac{\partial u_{yB}}{\partial y} \right] - \frac{E_{*B}}{1-\nu_{*B}^2} \alpha_{T*B} t_B,$$

$$\sigma_{xyB} = G_B \left[ \frac{\partial u_{xB}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yB}}{\partial x} \right]$$

і, усереднюючи ці вирази уздовж його товщини, тобто обчислюючи інтеграли

$$\int_{-h}^h \sigma_{xxB}(x, y) dy = \frac{E_{*B}}{1-\nu_{*B}^2} \int_{-h}^h \frac{\partial u_{xB}(x, y)}{\partial x} dy + \frac{E_{*B}}{1-\nu_{*B}^2} \{u_{yB}(x, h) - u_{yB}(x, -h)\} - \frac{E_{B*}}{1-\nu_{B*}^2} \alpha_{TB*} \int_{-h}^h t_B(x, y) dy,$$

$$\int_{-h}^h \sigma_{xyB}(x, y) dy = G_B \{u_{xB}(x, h) - u_{xB}(x, -h)\} + G_B \int_{-h}^h \frac{\partial u_{yB}(x, h)}{\partial x} dy,$$

легко отримати

$$U(w_n) = V'(w_n) - \frac{N_{xy}(w_n)}{G_B},$$

$$V(w_n) = \frac{U'(w_n)}{\nu_{*B}} - \frac{1-\nu_{*B}^2}{E_{*B}\nu_{*B}} N_x(w_n) - \frac{1+\nu_{*B}}{\nu_{*B}} \alpha_{T*B} \int_{-h}^h t_B(w_n, y) dy,$$
(39.21)

Врахування ідеальності механічного контакту уздовж торців включення дає можливість записати також

$$N_x(w_n) = \int_{-h}^0 \sigma_{xx1}^0(w_n, y) dy + \int_0^h \sigma_{xx2}^0(w_n, y) dy + \int_{-h}^0 \hat{\sigma}_{xx1}(w_n, y) dy + \int_0^h \hat{\sigma}_{xx2}(w_n, y) dy,$$

$$N_{xy}(w_n) = \int_{-h}^0 \sigma_{xy1}^0(w_n, y) dy + \int_0^h \sigma_{xy2}^0(w_n, y) dy + \int_{-h}^0 \hat{\sigma}_{xy1}(w_n, y) dy + \int_0^h \hat{\sigma}_{xy2}(w_n, y) dy,$$

$$U'(w_n) = \int_{-h}^0 u_{x1}^{0'}(w_n, y) dy + \int_0^h u_{x2}^{0'}(w_n, y) dy + \int_{-h}^0 \hat{u}_{x1}'(w_n, y) dy + \int_0^h \hat{u}_{x2}'(w_n, y) dy,$$

$$V'(w_n) = \int_{-h}^0 u_{y1}^{0'}(w_n, y) dy + \int_0^h u_{y2}^{0'}(w_n, y) dy + \int_{-h}^0 \hat{u}_{y1}'(w_n, y) dy + \int_0^h \hat{u}_{y2}'(w_n, y) dy.$$
(39.22)

Для обчислення інтегралів у (39.22) запишемо спочатку на основі формул (13.16), (38.4) подання

$$\sigma_{xxk}^0(z) + i\sigma_{xyk}^0(z) = \Phi_k^0(z) + 2\overline{\Phi_k^0(z)} + \Phi_k^0(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k^{0'}(z)},$$

$$2G_k \left[ u_{xk}^{0'}(z) + iu_{yk}^{0'}(z) \right] = \kappa_k \Phi_k^0(z) + \Phi_k^0(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k^{0'}(z)} + \beta_{Tk} \Phi_T(z),$$
(39.23)

$$\hat{\sigma}_{xxk}(z) + i\hat{\sigma}_{xyk}(z) = \hat{\Phi}_k(z) + 2\overline{\hat{\Phi}_k(z)} + \hat{\Phi}_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\hat{\Phi}_k'(z)},$$

$$2G_k \left[ \hat{u}_{xk}'(z) + i\hat{u}_{yk}'(z) \right] = \kappa_k \hat{\Phi}_k(z) + \hat{\Phi}_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\hat{\Phi}_k'(z)} + \beta_{Tk} \Phi_T(z) \quad (z \in S_k).$$

Підставляючи у (39.23) значення потенціалів  $\Phi_k^0(z)$ ,  $\hat{\Phi}_k(z)$ ,  $\Phi_T(z)$  з (38.5), (38.6), (30.21) після інтегрування по  $y$  та використання (39.21), (39.22), отримаємо залежність  $U(w_n)$ ,  $V(w_n)$ ,  $N_x(w_n)$ ,  $N_{xy}(w_n)$  від зовнішнього навантаження та функцій стрибка. Таким чином система сингулярних інтегральних рівнянь (38.8) повністю замикається на функції стрибка.

Конкретизуємо методику стосовно випадку однорідної матриці з включеннями ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\alpha_{T1} = \alpha_{T2} = \alpha_T$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ), підданої впливові джерел тепла, коли



$$\begin{aligned}
\sigma_{xxk}(z) + i\sigma_{xyk}(z) &= \beta_T \eta \left\{ D_{11}(z) + \overline{D_{11}(z)} + D_{21}(z) + \overline{D_{21}(z)} - D_{13}(z) - \overline{D_{23}(z)} - \right. \\
&\quad \left. - zD'_{11}(z) - zD'_{21}(z) + \frac{q_1 + q_2}{\lambda} \right\} - 2\pi\beta_T \eta \left\{ \hat{\Phi}_T(z) + 2\overline{\hat{\Phi}_T(z)} + \hat{\Phi}_T(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\hat{\Phi}'_T(z)} \right\} + \\
&\quad + \hat{\Phi}_k(z) + 2\overline{\hat{\Phi}_k(z)} + \hat{\Phi}_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\hat{\Phi}'_k(z)}, \\
u'_{xk}(z) + iu'_{yk}(z) &= -\alpha_{T^*} \eta \left\{ D_{11}(z) + \overline{D_{11}(z)} + D_{21}(z) + \overline{D_{21}(z)} + D_{13}(z) + \overline{D_{23}(z)} + \right. \\
&\quad \left. + zD'_{11}(z) + zD'_{21}(z) - \frac{q_1 + q_2}{\lambda} \right\} + 2\pi\alpha_{T^*} \eta \left\{ \hat{\Phi}_T(z) + \hat{\Phi}_T(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\hat{\Phi}'_T(z)} \right\} + \\
&\quad + \frac{\alpha_{T^*}}{\lambda} \left( -q_x^\infty + iq_y^\infty \right) z + \frac{1}{2G} \left\{ \kappa_k \hat{\Phi}_k(z) + \hat{\Phi}_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\hat{\Phi}'_k(z)} \right\} + \alpha_T \Phi_T^\infty.
\end{aligned} \tag{39.24}$$

Прийемо у (39.24)  $z = w_n + iy$  і введемо безрозмірні величини

$$\begin{aligned}
\left\{ \tilde{y}, \tilde{\xi}, h_n, \tilde{\xi}_n, \tilde{y}_{kn}, \tilde{x}_{kn} \right\} &= \frac{1}{c} \left\{ y, \xi, h(w_n), \xi - w_n, y_k \pm h(w_n), x_k - w_n \right\}, \\
\varphi_m(x/a) &= \frac{f_m(x)}{E} \quad (m=1, 2); \quad \varphi_m(x/a) = f_m(x) \quad (m=4, 5);
\end{aligned} \tag{39.25}$$

$c$  – певний характерний лінійний розмір задачі, наприклад, максимальна півдовжина включень

$$2c = \max_{n \in [1, \dots, N]} \left\{ a_n^+ - a_n^- \right\}.$$

Інтегруючи (39.24) по  $y$  відповідно до (39.22), отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{N_x(w_n) + iN_{xy}(w_n)}{cE_*} &= \frac{\alpha_{T^*} q_2}{4\pi\lambda} \sum_{k=1}^2 \frac{q_k}{q_2} \left\{ \left( \tilde{y}_{kn}^+ - i\tilde{x}_{kn} \right) \ln \sqrt{\tilde{y}_{kn}^{+2} + \tilde{x}_{kn}^2} - \right. \\
&\quad \left. - \left( \tilde{y}_{kn}^+ - i\tilde{x}_{kn} \right) \ln \sqrt{\tilde{y}_{kn}^{-2} + \tilde{x}_{kn}^2} \right\} + \sum_{m=1}^6 \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \varphi_m(\xi) K_m(\tilde{\xi}_n, h_n) d\xi, \\
\frac{U'(w_n) + iV'(w_n)}{c(1+\nu_*)} &= \frac{\alpha_{T^*} q_2}{4\pi\lambda} \sum_{k=1}^2 \frac{q_k}{q_2} \left\{ \left( \tilde{y}_{kn}^- + i\tilde{x}_{kn} \right) \ln \sqrt{\tilde{y}_{kn}^{-2} + \tilde{x}_{kn}^2} - \right. \\
&\quad \left. - \left( \tilde{y}_{kn}^+ + i\tilde{x}_{kn} \right) \ln \sqrt{\tilde{y}_{kn}^{+2} + \tilde{x}_{kn}^2} \right\} - 2\tilde{x}_{kn} \left( \arctg \frac{\tilde{y}_{kn}^+}{\tilde{x}_{kn}} - \arctg \frac{\tilde{y}_{kn}^-}{\tilde{x}_{kn}} \right) + \\
&\quad + \sum_{m=1}^6 \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \varphi_m(\xi) K_{m+6}(\tilde{\xi}_n, h_n) d\xi + \frac{2\alpha_{T^*} h_n}{1+\nu_*} \left( \frac{-q_x^\infty + iq_y^\infty}{\lambda} w_n + \Phi_T^\infty \right),
\end{aligned} \tag{39.26}$$

де

$$\begin{aligned}
K_1(\tilde{\xi}_n, h_n) &= -2d_n + (1+\nu_*)r_n, \quad K_2(\tilde{\xi}_n, h_n) = i\{2d_n - (1+\nu_*)r_n\}, \quad K_4(\tilde{\xi}_n, h_n) = r_n, \\
K_3(\tilde{\xi}_n, h_n) &= -\frac{\alpha_{T^*} q_2}{\lambda} m_n, \quad K_5(\tilde{\xi}_n, h_n) = -ir_n, \quad K_6(\tilde{\xi}_n, h_n) = i\frac{\alpha_{T^*} q_2}{\lambda} m_n, \\
K_7(\tilde{\xi}_n, h_n) &= -4d_n + (1+\nu_*)r_n, \quad K_8(\tilde{\xi}_n, h_n) = i\{2(1-\nu_*)d_n + (1+\nu_*)r_n\}, \\
K_9(\tilde{\xi}_n, h_n) &= -\frac{\alpha_{T^*} q_2}{\lambda} m_n, \quad K_{10}(\tilde{\xi}_n, h_n) = -\frac{2}{1+\nu_*} d_n + r_n,
\end{aligned}$$

$$K_{11}(\tilde{\xi}_n, h_n) = i \left\{ \frac{2\nu^*}{1+\nu^*} d_n - r_n \right\}, \quad K_{12}(\tilde{\xi}_n, h_n) = -i \frac{\alpha_T q_2}{\lambda} \{ m_n + 2\tilde{\xi}_n d_n \},$$

$$d_n = \arctg \frac{h_n}{\tilde{\xi}_n}, \quad r_n = \frac{h_n \tilde{\xi}_n}{h_n^2 + \tilde{\xi}_n^2}, \quad m_n = h_n \ln \sqrt{h_n^2 + \tilde{\xi}_n^2}.$$

Таким чином, за допомогою (39.26), (39.21) побудований зв'язок заздалегідь невідомих торцевих сталей з функціями стрибка та зовнішнім навантаженням.

#### § 40. Граничні теплові потоки у пластинах зі стохастичними теплопровідними тріщинами

Під граничним тепловим потоком розумітимемо таке його значення, за якого починається локальне руйнування тіла біля одного з дефектів, що містяться у ньому. Вважатимемо, що густина дефектів у пластині невелика і їхньою можливою взаємодією можна знехтувати.

Для розв'язування поставленої задачі [107, 106] треба попередньо з'ясувати граничні значення теплового потоку в пластині з ізолюваною теплопровідною щілиною, а вже пізніше врахувати в отриманому розв'язку статистичні ефекти. Розв'язок першої частини ґрунтується на використанні в ролі умови початку процесу руйнування біля вістря розрізу умови п. 37.1

$$\Phi_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{r} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^* \right]_{\theta=\theta_*} = K_0, \quad (40.1)$$

де  $(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^*$  – значення суми напружень  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$  для граничного теплового потоку  $q_*$ ;  $\theta_*$  – значення кута  $\theta$ , за якого  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$  набуває максимального значення;  $K_0$  – стала, що характеризує опір матеріалу зародженню тріщини. На основі формул (40.1) і (31.17)

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left( K_{1,1} \cos \frac{\theta}{2} - K_{2,1} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (40.2)$$

де значення УКІН за дії теплового потоку інтенсивністю  $q$  під кутом  $\alpha$  до осі розрізу визначається співвідношенням (див. п. 38.3)

$$K_{1,1} = Aa^{3/2} q \frac{\lambda_B \cos \alpha}{\lambda_B h_0 + \lambda a}, \quad K_{2,1} = Aa^{3/2} q \frac{\lambda \sin \alpha}{\lambda h_0 + \lambda_B a}, \quad A = \pm \frac{\alpha_T E h_0}{4\lambda^2} (\lambda_B - \lambda). \quad (40.3)$$

Тут  $E$  – модуль пружності;  $\alpha_T$  – коефіцієнт теплового розширення матеріалу матриці;  $\lambda$ ,  $\lambda_B$  – відповідно коефіцієнти теплопровідності пластини та середовища, що заповнює щілину;  $a$  – півдовжина щілини;  $2h_0$  – її розкриття щілини у центральній частині. Вважається, що до прикладання теплового навантаження щілина мала еліптичний профіль. Верхній знак у виразі для  $A$  стосується правого, а нижній – лівого вістря розрізу.

На основі формули (40.2)  $\theta_* = 2\arctg(-K_{2,1}/K_{1,1})$  і критерій руйнування (40.1) набуде вигляду

$$(K_{1,1})^2 + (K_{2,1})^2 = \frac{\pi}{2} K_0^2. \quad (40.4)$$

Звідси з урахуванням виразів (40.3) для  $K_{1,1}$ ,  $K_{2,1}$  визначається граничний тепловий потік

$$q^* = \frac{\sqrt{\pi/2} K_0}{|A| a^{3/2}} \left[ \frac{\lambda_B^2 \cos^2 \alpha}{(\lambda_B h_0 + \lambda a)^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \alpha}{(\lambda h_0 + \lambda_B a)^2} \right]^{-1/2}. \quad (40.5)$$

Оскільки надалі йтиметься тільки про граничний тепловий потік, то за відсутності непорозуміння індекс "\*" біля  $q$  будемо упускати.

Переходячи до другої частини поставленої задачі, вираз (40.5) подамо у найзагальнішому вигляді

$$q = \varphi(\alpha, a). \quad (40.6)$$

Геометричні параметри задачі  $\alpha$ ,  $a$  вважаються тепер випадковими величинами з відомою густиною  $f(\alpha, a)$  їхнього спільного розподілу у діапазоні допустимих значень  $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ ,  $|\alpha| \leq \pi/2$ . Випадковий характер має також максимальна півширина  $h_0$  щілини, однак, оскільки  $0 \leq h_0 \ll a$ , то діапазон зміни можливих значень  $\bar{h} = h_0/a$  доволі малий і тому можна за потреби вважати  $\bar{h}$  детермінованою величиною, що жорстко зв'язана з  $a$  ( $\bar{h} = \text{const}$ ). Детермінованими вважаються також і параметри  $K_0$ ,  $E$ ,  $\alpha_T$ ,  $\lambda_B$ ,  $\lambda$ , оскільки розкид цих фізичних величин у реальних матеріалах менш виражений порівняно з геометричними характеристиками дефектів.

Внаслідок розкиду величин  $\alpha$ ,  $a$  граничний тепловий потік  $q$  елемента пластини із щілиною буде випадковою величиною, що змінюється в межах від  $q_{\min}$  до  $q_{\max}$ , причому, функція розподілу ймовірності величини  $q$  дається формулою [150]

$$F_1(q) = \iint_R f(\alpha, a) d\alpha da, \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, \quad (40.7)$$

де  $R$  – двовимірна область можливих значень параметрів  $\alpha$ ,  $a$ , для яких  $q = \varphi(\alpha, a) < q$ .

Дещо зменшуючи загальність задачі, вважатимемо, що  $\alpha$  і  $a$  – статистично незалежні випадкові величини, для яких густини і функції розподілу мають відповідно вигляд  $f_1(\alpha)$ ,  $\Phi_1(\alpha)$ ,  $f_2(a)$ ,  $\Phi_2(a)$ . Тоді, оскільки  $q = \varphi(\alpha, a) = f_1(\alpha) f_2(a)$ , то існує можливість зведення інтегрування в (40.7) по двовимірній області до однократного інтегрування. Якщо позначити через  $q_1$ ,  $q_2$  значення граничного теплового потоку (40.5) при  $a = a_{\max}$  і  $\alpha = \pi/2$ ,  $\alpha = 0$  відповідно;  $\alpha_1 > 0$  – розв'язок рівняння (40.6) стосовно  $\alpha$ ;  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  – розв'язок рівняння (40.6) стосовно  $a$  при  $\alpha = \pi/2$ ,  $\alpha = 0$  відповідно, то у конкретному випадку залежності (40.6) у формі (40.5) і при  $a_{\min} = 0$  співвідношення (40.7) набуде вигляду

$$\begin{aligned} F_1(q) &= \int_{a_1}^{a_{\max}} f_2(a) \left[ \int_{-\pi/2}^{-\alpha_1} f_1(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\pi/2} f_1(\alpha) d\alpha \right] da = \\ &= \int_{a_1}^{a_{\max}} f_2(a) [1 + \Phi_1(-\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1)] da \quad (\lambda > \lambda_B, \quad q_1 \leq q \leq q_2); \end{aligned} \quad (40.8)$$

$$\begin{aligned}
 F_1(q) &= \int_{a_1}^{a_2} f_2(a) \left[ \int_{-\pi/2}^{-\alpha_1} f_1(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\pi/2} f_1(\alpha) d\alpha \right] da + \int_{a_2}^{a_{\max}} f_2(a) \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha) d\alpha \right] da + \\
 &= \int_{a_1}^{a_2} f_2(a) [1 + \Phi_1(-\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1)] da + 1 - \Phi_2(\alpha_2) \quad (\lambda > \lambda_B, \quad q_2 < q < \infty);
 \end{aligned} \tag{40.9}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(q) &= \int_{a_2}^{a_{\max}} f_2(a) \left[ \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} f_1(\alpha) d\alpha \right] da = \\
 &= \int_{a_2}^{a_{\max}} f_2(a) [\Phi_1(\alpha_1) - \Phi_1(-\alpha_1)] da \quad (\lambda < \lambda_B, \quad q_2 \leq q \leq q_1);
 \end{aligned} \tag{40.10}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(q) &= \int_{a_2}^{a_1} f_2(a) \left[ \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} f_1(\alpha) d\alpha \right] da + \int_{a_1}^{a_{\max}} f_2(a) \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha) d\alpha \right] da = \\
 &= \int_{a_1}^{a_2} f_2(a) [\Phi_1(\alpha_1) - \Phi_1(-\alpha_1)] da + 1 - \Phi_2(\alpha_1) \quad (\lambda < \lambda_B, \quad q_1 < q < \infty).
 \end{aligned} \tag{40.11}$$

Тут

$$q_1 = \frac{K_0 \sqrt{\pi/2}}{|A| a_{\max}^{3/2}} \cdot \frac{\lambda h_0 + \lambda_B a_{\max}}{\lambda}, \quad q_2 = \frac{K_0 \sqrt{\pi/2}}{|A| a_{\max}^{3/2}} \cdot \frac{\lambda_B h_0 + \lambda a_{\max}}{\lambda_B}; \tag{40.12}$$

$$\alpha_1 = \arcsin \sqrt{R}, \quad R = \frac{(\bar{\lambda} \bar{h} + 1)^2 / \bar{q}^2 - \bar{\lambda}^2}{(\bar{\lambda} \bar{h} + 1)^2 / (\bar{\lambda} + \bar{h})^2 - \bar{\lambda}^2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda_B}{\lambda}, \quad \bar{q} = \frac{\sqrt{2a/\pi q A}}{K_0}. \tag{40.13}$$

Величини  $a_1, a_2$  визначають з рівнянь

$$A^2 \lambda^2 q^2 a_1^3 - \frac{\pi}{2} K_0^2 (\lambda_B^2 a_1^2 - 2 \lambda_B \lambda h_0 a_1 - \lambda^2 h_0^2) = 0; \tag{40.14}$$

$$A^2 \lambda_B^2 q^2 a_2^3 - \frac{\pi}{2} K_0^2 (\lambda^2 a_2^2 - 2 \lambda_B \lambda h_0 a_2 - \lambda_B^2 h_0^2) = 0. \tag{40.15}$$

Для здійснення обчислень необхідно конкретизувати явний вигляд функцій  $f_1(\alpha)$ ,  $\Phi_1(\alpha)$ ,  $f_2(a)$ ,  $\Phi_2(a)$ . У макроскопічно ізотропному матеріалі можна вважати всі можливі орієнтації щілин однаково ймовірними. Це дає залежності (37.13)  $f_1(\alpha) = 1/\pi$  ( $|\alpha| \leq \pi/2$ ). Густина розподілу півдовжин щілин можна прийняти у степеневому вигляді (37.14)

$$f_2(a) = \frac{r+1}{a_{\max}} (1-\tilde{a})^r \left( 0 < \tilde{a} = \frac{a}{a_{\max}} \leq 1, \quad 0 \leq r, \quad a_{\min} = 0 \right),$$

властивому статистичній моделі випадкової величини з незростаючою густиною, значення якої обмежені скінченним інтервалом.

Тоді формули (40.8) – (40.11) набудуть вигляду

$$F_1(q) = (1-\tilde{a}_1)^{r+1} - \frac{2(r+1)}{\pi} \int_{\tilde{a}_1}^1 \alpha_1 (1-\tilde{a})^r d\tilde{a}, \quad \tilde{a}_i = \frac{a_i}{a_{\max}} \quad (\lambda > \lambda_B, \quad q_1 \leq q \leq q_2); \tag{40.16}$$

$$F_1(q) = (1 - \tilde{a}_1)^{r+1} - \frac{2(r+1)}{\pi} \int_{\tilde{a}_1}^{\tilde{a}_2} \alpha_1 (1 - \tilde{a})^r d\tilde{a} \quad (\lambda > \lambda_B, q_2 < q < \infty; \lambda < \lambda_B, q_1 < q < \infty); \quad (40.17)$$

$$F_1(q) = \frac{2(r+1)}{\pi} \int_{\tilde{a}_2}^1 \alpha_1 (1 - \tilde{a}_1)^r d\tilde{a} \quad (\lambda \leq \lambda_B, q_2 \leq q \leq q_1). \quad (40.18)$$

Залежності (40.16) – (40.18) подають функції розподілу ймовірності того чи іншого значення граничного теплового потоку в елементі пластини з одною щілиною, у якої ймовірнісні характеристики визначаються рівностями (40.12), (40.13).

Якщо тіло містить  $n$  дефектів, то функцію  $F_n(q)$  розподілу граничного теплового потоку можна побудувати на основі моделі "найслабшої ланки" [150] у подібній до (29.17) формі

$$F_n(q) = 1 - [1 - F_1(q)]^n. \quad (40.19)$$

Для великих  $n$  доцільно подібно до (37.17) скористатися співвідношенням Вейбулла

$$F_n(q) = 1 - \exp[-cn(q - q_{\min})^m] \quad c > 0, m > 0, \quad (40.20)$$

де параметри  $c, m$  дорівнюють

$$c = \lim_{q \rightarrow q_{\min}} \frac{F_1(q)}{(q - q_{\min})^m}, \quad m = r + 1. \quad (40.21)$$

Отримані результати легко узагальнюються на випадок тонких включень так, як це зроблено у §§ 29, 37.

## РОЗДІЛ VIII

### АНАЛІЗ ПРОБЛЕМАТИКИ ВКЛЮЧЕНЬ ТА МЕТОДІВ ЇЇ ВИРІШЕННЯ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

#### § 41. Загальні питання теорії включень

##### 41.1. Область застосування теорії тонких включень

Будова реальних матеріалів досить далека від ідеальної: прошарки чужорідних середовищ, частинки вогнетривів, зони окисненого металу є поширеними вадами її мікро- та макроструктури. У книзі [146] зазначено, що за звичайних методів витоплювання сталь містить приблизно 0,1%: об'ємної частки включень розміром порядку мікронів; в  $1 \text{ см}^3$  речовини приблизно одне включення розміром більше 1 мм та 1...100 включень розміром 1...0,1 мм. В одній тоні сталі міститься  $10^{12}$ ... $10^{13}$  включень окислів і ще більше сульфідних включень, причому 98% мають розмір менший від 0,2 мкм, через що навіть у мікроскоп не всі включення можна помітити [57]. Див. теж новіші дослідження у цьому напрямі [1552, 1640]. Вдосконалення процесів витопу металів дає можливість покращити якість сталей, але не позбавляє їх від різноманітних за складом та розмірами включень. Класифікацію дефектів можна знайти в оглядовій праці [1478].

Запропоноване читачу монографічне дослідження стосується тонкостінних включень, тобто таких включень, один із розмірів яких малий у порівнянні з іншими. Такі включення є поширеним типом дефектів та конструкційних (переважно підкріплювальних) елементів.

Необхідність урахування наявності тонких включень виникає також під час дослідження фазових перетворень [1072, 1415, 385, 386, 1780, 1464] матеріалів, наприклад росту мартенситу в аустенітному середовищі [547, 548, 252, 30\*]. Виявлено [129], що найбільш безпечними під час фазових перетворень є тонкі пластинчасті включення.

Під час експлуатації конструкцій, особливо внаслідок сумісної дії механічних навантажень та корозійно-активних середовищ, змінюються фізико-механічні властивості матеріалів, формується наведена неоднорідність [660]. У парах тертя за таких умов виникають тонкі шари пластифікованого матеріалу і спрацювання таких пар різко уповільнюється.

Однією із центральних проблем петрології та її теорії метаморфізму є [253] питання з'ясування доцільної орієнтації мінеральних включень у негідростатичних пружних полях. У цитованій праці розглянуто задачу опису рівноважних розміщень жорсткого включення у пружній матриці, коли включення здатне перекристалізовуватися. На основі принципу мінімуму пружної енергії деформації розвинуто загальну теорію та розглянуто прості приклади для еліптичного включення.

Загалом не лише тріщини, але й довільні інші неоднорідності матеріалу, передовсім тонкостінні, є потужними концентраторами напружень і саме біля них починаються процеси пластичного деформування та руйнування. Причому, як зазначається у [159], безпосередньо біля вершин м'яких включень спостерігається локальне руйнування, а біля жорстких – згущення смуг ковзання та утворення мікротріщин на певній віддалі від вістря неоднорідності. Відомо, що в околі кінчика жорсткого лінійного включення в ізотропному [1642] та анізотропному [85] середовищі так само, як і біля тонких пружних [978, 14] чи плоских пружних гострокутних [699], поле напружень має сингулярність типу кореня квадратного. Розв'язок плоскої задачі про концентратори напружень із тонкими заокругленими вістрями в ізотроп-

ній пластині [92] дав можливість виявити зв'язок між концентраторами напружень і коефіцієнтами інтенсивності напружень у тому випадку, коли радіус кривизни заокруглення є дуже малим.

Навіть щонайдрібніші дефекти мають вплив на перебіг процесів деформування та руйнування. Навіть наявність у кристалах включень другої фази у багатьох випадках обумовлює появу у них вогнищ руйнування при механічному навантажуванні [41, 1681]. Однорідність пластичної деформації матриці має великий вплив на умови руйнування самих включень як у масивних полікристалічних тілах, так і у монокристалах [1059].

Загалом характеристики втоми й міцності матеріалів істотно залежать від характеру розподілу, форми і механічних властивостей металевих та неметалевих включень [1564, 1285, 1521, 1519, 1520, 1530, 933], оскільки на ці процеси мають вплив не лише безпосередньо включення, але й процеси на межах поділу – проковзування та розтріскування на поверхнях поділу фаз здебільшого сприяє блокуванню розвитку внутрішніх тріщин у матриці. Сталь з пластинчастими включеннями руйнується значно швидше від сталі з включеннями глобулярними [57].

У монографії П.В.Яснія [1134] та у подальших дослідженнях очолюваного ним колективу виявлений багатоплановий вплив попереднього пластичного деформування на деформаційні властивості металів та стопів, їхню міцність та тріщиновитримність. За пластичного деформування змінюється мікроструктура матеріалу і велику роль у цьому відіграють дрібні включення.

Неметалеві включення здійснюють додатковий шкідливий вплив на водневе скрушіння сталі [1719]: мікродослідження зруйнованих труб нафто- і газопроводів виявило множинні тріщини, пов'язані з платівковими видовженими включеннями сірчистого марганцю, котрі збільшували швидкість підростання тріщини та зменшували порогове значення коефіцієнта інтенсивності напружень у поперечному за товщиною напрямку. Ті самі явища виявлені і у публікації [344]. Механічні властивості зварних з'єднань теж істотно залежать від мікроструктури зварного шва та розподілу у ньому включень [1349]. Про сумісний вплив включень і фазових перетворень та способи їх врахування за допомогою пластичних смуг та зон рівномірної дилатації йдеться у праці [1143].

Сильно впливає на руйнування та деформування матеріалів орієнтація включень [1746], причому це явище обумовлене інтенсифікацією пластичного деформування біля вістря тріщини за сприятливої орієнтації включень. У цій праці також зазначається, що найбільший вплив на деформацію мають видовженість включення у напрямі руйнування та довжина перемичок між порами. Виникнення руйнування на мікрорівні цілком відповідає двовимірному процесові і може описуватися відповідними теоріями. А ось вже доволі розвинене руйнування (на мезорівні) слід описувати за допомогою тривимірних моделей.

Велика кількість керамічних композиційних матеріалів, які використовує промисловість, містить пластинчасті включення, які за певних умов можуть фазово трансформуватися (цементи, кераміки  $Al_2O_3$ ,  $NB$  з домішками  $ZrO_2$  тощо), зрештою навіть заповнені водою тріщини, які на морозі замерзають.

Останнім часом постала теорія та практика конструювання та використання композиційних матеріалів з плоскою арматурою. У роботі [1321] відзначена велика перевага від використання для армування стрічок замість волокон: міцність на розтяг у трансверсальному напрямку у випадку однонапрявленого армування стрічками становила 50...75% від величини міцності у поздовжньому напрямку тоді як використання волокон дає зазвичай 2...15%. Праця [1556] обґрунтовує переваги стрічкового армування перед волоконним для досягнення високої міцності у двох напрямках. Огляд [1569] (див. теж [1331, 1197, 136]) також відзначив низку переваг плоского армування, що сприяє покращанню технологічності, механічних властивостей, збільшенню коефіцієнта армування, опору до порушення герметичності, що свід-

чить про перспективність виготовлення композитів з плівковою, стрічковою та лусковою арматурою. Використання зовнішнього стрічкового армування у сталезалізобетоні дає можливість економити 15...45 %: металу у порівнянні із залізобетонними та суто металевими конструкціями [406]. Вже наприкінці 70-х років минулого століття промисловість випускала 4 марки пластинчастих включень (розміри плоскої поверхні до десятків мікрон і завтовшки менше мікрона) для створення композитів внаслідок спікання алюмінієвої пудри ( $Al_2O_3$ ) [306]. З приводу стрічкових наповнювачів див. теж [169, 1539, 1353]. Біля 25% утримувальних (несучих) конструкцій нового літака А370 виготовлені із композиційних матеріалів. Майже уся хвостова частина (та деякі інші) виготовлені із нового полімерного композиту Glare, у якому арматурою є однонаправлені скловолокна та алюмінієва фольга. Одне лише використання цього матеріалу дало можливість зекономити більше 500 кг ваги літака.

У цілому механіка композиційних матеріалів успішно розвивається на основі поєднання аналітичних розв'язків для поодиноких (найчастіше із використанням підходів Ешелбі [415, 1354]) чи регулярних систем включень канонічної, придатної для легкого обчислення, форми та статистичних методів [1068, 530, 529, 918].

Зацікавлення у стрічковому армуванні композитів зростає [1289, 1717, 1778, 541].

Тонкостінні включення можуть виконувати роль тензодатчиків [362], підкріплень (зокрема, берегів тріщин [802]) зварних та клейових з'єднань. Новіші експериментальні методи дають можливість для вимірювання контактних напружень використовувати п'єзочутливі плівки у вигляді електропровідного паперу, який змінює свій електричний опір внаслідок поперечного обтискання [1039]. Існує методика моделювання за допомогою включень у пластинах їх підкріплення за допомогою накладок [1578]. Загалом для розрахунку зварних швів слід застосовувати як методи аналізу залишкових напружень, так і (набагато рідше) моделі чужорідних включень. З деякими із існуючих підходів можна ознайомитися у працях [1496, 826–828, 381].

Заповнену рідиною [1354, 315] або іншим матеріалом [388, 1048], зокрема й полімерним [551] тріщину теж можна вважати тонкостінним включенням, а процедуру заповнення щілини [388] можна вважати одним із ефективних методів підвищення ресурсу працездатності виробів [1098, 659, 405, 1547]. Ці явища використовуються в інженерній практиці. Так званий Tafftride-процес [1404] полягає у просочуванні сталевих деталей упродовж певного часу (переважно 10–120 хв.) соляними розчинами ціанистоводневої кислоти, нагріванні та охолодженні холодною водою. Було виявлено, що внаслідок такої процедури, наприклад, межа втомної міцності зразків з поверхневими тріщинами завглибшки 1,5 мм за згину із крученням підвищувалася на 63%. Заклеювання тріщини навіть дуже податним клеєм істотно зменшує небезпеку крихкого руйнування конструкцій. Це стосується не лише будівельних конструкцій, але й виробів із алюмінію [1324, 1135].

Теорія тонкостінних включень може знайти застосування і у механіці гірських порід [724], геофізиці [160, 651], тектоніці. Щоправда, слід мати на увазі, що великі масштаби залучених до деформування обсягів матерії вимагають урахування у цих задачах впливу сили ваги та розвитку процесів руйнування у часі, причому швидкоплинних для сейсмічних процесів та квазістатичних довготривалих для тектонічних [651]. Для механіки ґрунтів надзвичайно важливе урахування пористості структур та заповненості порожнин, у тому числі й численних дрібних пор та мікротріщин іншими матеріалами, зокрема й рідкими – водою, газом, нафтою тощо. Вже існуючі підходи моделювання цих явищ не можуть не використовувати у побудові різних моделей концепції масивного чи тонкого включення. Скажімо, у праці Л.М. Качанова [383] пропонується на цей випадок замість тензора густини тріщин  $T_\alpha$  у тріщинуватому тілі з модулем пружності  $E_0$  використовувати модифікований тензор  $T'_\alpha = (1 - E^*/E_0)T_\alpha$ , де  $E^*$  – модуль пружності заповнювача тріщин. Інші підходи [1523,



1522] дають можливість враховувати декілька масштабних рівнів внутрішніх дефектів та різних видів їхнього заповнення, описуючи кожен систему незалежно і своїми ефективними параметрами. Зрозуміло, що такі підходи є інтегральними і жодну концентрацію напружень та вплив на нерівномірність поля напружень вони виявити не можуть.

Аналіз напружено-деформованого стану із включеннями (поодинокими та множинними, зокрема й двоперіодичними) надзвичайно важливий для теорії композиційних матеріалів – розрахунку їх ефективних сталей, у тому числі й п'єзоелектричних міцності, надійності та ресурсу [123, 1515, 1622, 617, 356]. Розв'язки окремих задач для п'єзоелектриків із включеннями можна знайти у [1399] (три- та двовимірні задачі загального типу); [1729, 1200, 1421, 1364, 1365] (еліпсоїдальні включення); [1584] (включення загальної форми у плоскій задачі); [1218, 1561, 1757, 1736] (еліптичне включення у плоскій задачі); [1546] (круговий циліндр за антиплоского деформування).

Методи і досвід розв'язування задач теорії пружності, термо-, електро- та магнітопружності є особливо важливими для розвитку нового напрямку механіки, пов'язаного із вивченням смарт-матеріалів [1780, 1464], нановключень (див. напр. [1723, 1481, 1241, 1626, 1542, 1639]). Передостання праця містить бібліографічний огляд праць (154 назв.) у напрямку теорії включень із застосуванням результатів до аналізу наноструктур.

Так само, як за допомогою тріщин можна формувати всередині пружних тіл області із нульовими чи заданими напруженнями на їх берегах, так за допомогою лінійчатих жорстких включень можна формувати зони, всередині яких деформації відсутні [1336].

## 41.2. Поверхні поділу матеріалів

Поверхні поділу матеріалів внаслідок складних фізико-хімічних явищ, що перебігають у цій зоні, за своїми властивостями часто істотно відрізняються від середовищ, які до них пристають [452], і тому за допомогою тонкостінних включень можна з певною точністю моделювати міжфазні межі.

С.Оно та С.Кондо [669] зазначили, що ще від часів Т.Юнга (1805 р.) межа між двома деформівними середовищами, зокрема рідиною та її парою, розглядалася з механічного погляду так, ніби це була рівномірно натягнута плівка нульової товщини. Сам поверхневий натяг визначався на основі макроскопічних підходів переважно як сила зчеплення, яка діє уперек кожної одиниці довжини лінії на цій фіктивній плівці. «Однак при переході структура рідини змінюється не стрибком, а поступово. Тому Ван-дер-Ваальс та його учні запропонували описувати поверхневий натяг за допомогою інтегралу по перехідній області від різниці між двома тисками, нормальним і дотичним, прийнявши гіпотезу, що до цієї досить малої кількості неоднорідної речовини застосовні закони макроскопічної гідродинаміки.» З урахуванням цього у цитованій книзі для аналізу міжфазових зон використовується модель поверхні, якій приписуються певні властивості на основі урахування адсорбції розчиненої у ній речовини.

Д.Можі [612], підсумовуючи свої багаторічні дослідження разом із Баркіним зазначив між іншим, що ізотропні пружні тіла мають поверхневу енергію, яку слід обов'язково враховувати під час розгляду механізмів контакту тіл у відповідності до енергії адгезії Дюпре  $W = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}$ , де  $\gamma_{12}$  – міжповерхнева енергія.

Річ у тому, що межа поділу двох матеріалів не є суто геометричним об'єктом. У сучасному розумінні під час контакту матеріалів внаслідок процесів дифузії, фазових перетворень та інших тонких фізико-хімічних процесів на їхній межі формується певний перехідний шар зі специфічними властивостями (див. напр. [1127], де згадуються двовимірні середовища-поверхні, що мають певні фізико-механічні характеристики). Навіть суто поверхневі явища можуть істотно впливати на характер формулювання крайових умов [753]. Згаданий шар

прийнято моделювати поверхнею з певними фізико-механічними властивостями [1238, 750, 749]. Такий перехідний шар обумовлює вплив на дефекти, які перебувають поблизу них, зокрема й на розподіл напружень поблизу тріщин, що виходять на межу поділу [1512]. У загальному випадку при переході через поверхні поділу двох середовищ поряд із стрибком нормальних напружень, обумовленим кривизною поверхні, може від градієнту поверхневого натягу виникати стрибок дотичних напружень. Це спричинює перерозподіл концентрації домішок у приповерхневих шарах і, як наслідок, зміну перебігу таких поверхневих процесів, як корозія, змочуваність, розтікання тощо.

Один можливий спосіб визначення механічних характеристик такої суміші, утвореної внаслідок простих хімічних реакцій на поверхні поділу, можна знайти у праці [387, 385]. Інші міркування з цього приводу викладені у [437].

У 1990 р. Державний комітет з винаходів та відкриттів СРСР зафіксував відкриття (Б.Дерягін, Ю.Поповський, Б.Алтоіз) формування деякими органічними рідинами на твердій поверхні слабо упорядкованих шарів рідких кристалів. Виявилось, що молекули у таких шарах укладені паралельно одна до другої і зсунуті уздовж своїх осей на довільні відстані, причому утворені шари мають більше сотні молекулярних розмірів та різко відмежовані від основного об'єму рідини.

Термодинамічний підхід до аналізу поверхонь поділу започаткований працями Дж.Гіббса (див. [1312]), який вивчав властивості рідин і запропонував модель її поверхні з урахуванням поверхневого натягу. Надалі Дж.Гіббсу вдалося теж урахувати ефекти адсорбції на поверхні твердих тіл. Велике значення для розвитку цього підходу мала праця R.Ghez [1311], який вивчив умови температурної та хімічної рівноваги (однаковість хімічних потенціалів), умови локальної однорідності (рівновагу фаз, наростання та розчинення). Низка питань побудови теорії міжфазних поверхонь вивчена Ю.З.Повстенком та ін. [750, 749] (див. теж [793, 751, 748, 752, 755, 756, 754]). Отримані рівняння дають можливість розв'язувати конкретні прикладні проблеми, пов'язані з міграцією точкових дефектів в околі порожнин [757] та ін. Виникнення перехідного шару спричинює стрибки нормальних та дотичних напружень [783, 757], температури [1382] та інших термодинамічних величин. Бібліографія з цього питання доволі широка, оскільки перерозподіл поля напружень в околі межі поділу матеріалів здійснює істотний вплив на перебіг фазових перетворень, корозійних та інших процесів, а отже й впливає на міцність злуки. Відзначимо тільки, що врахування перебігу фізико-хімічних процесів дає можливість розглянути рухому межу поділу і побудувати відповідну модель [1031]. Слід теж враховувати, що загалом розрізняють [254] два типи міжфазних меж – когерентних, за допомогою яких моделюють контакт твердих тіл, та меж із проковзуванням, які застосовують у випадку, коли одна із фаз є рідиною чи газом.

Загалом властивості міжфазної межі сильно залежать від часу. Наприклад, у праці [1140] відзначено, що під час дослідження пари сталь–алюміній у діапазоні температур 360...400 °С виявлене підростання шару частинок  $Fe_2Al_5$ , пропорційне до кореня квадратного від часу. У свою чергу, пори, які утворилися біля цих частинок, виявилися основною причиною збільшення крихкості злуки матеріалів.

Урахування властивостей міжфазної межі важливе не лише для аналізу тонких механізмів, але й суто механічних явищ, що має особливе значення для оцінки механічних властивостей композиційних матеріалів [1173]. Певна поверхнева обробка волокон та іншої арматури може набагато покращити властивості композиту [1419]. Деякі автори, наприклад [1345], таку перехідну зону моделюють тонким прошарком з третього матеріалу і обмежуються аналізом виключно механічних явищ (див. теж [170, 10\*, 645, 363]).

У зв'язку з цим слід нагадати, що питання коректності класичної постановки плоскої контактної задачі стаціонарної термодинаміки, яка передбачає використання моделі ідеального контакту, вже доволі давно обговорювалися у працях [1165, 1228, 1227]. Автори відзна-

чають, що традиційне допущення ідеального температурного контакту та теплової ізоляції поза межею контакту спричиняє протиріччя, якщо тепловий потік спрямований у матеріал з меншим параметром  $\delta = \alpha(1 + \nu)/k$  ( $\alpha$  – коефіцієнт температурного розширення;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $k$  – питома теплопровідність). Тобто, у даному випадку може не існувати розв'язку задачі. Вихід був знайдений у припущенні неідеальності температурного контакту, коли різниця температур контактних поверхонь обернено пропорційна до нормальних контактних напружень (коефіцієнт пропорційності названий контактним опором). Однак це спричиняє, у свою чергу, нелінійність задачі, яку можна усунути припущенням про нульовість контактного тиску в зоні неідеального контакту. Зазначимо, що перепад температур повинен урівняти нормальні контактні напруження у цій області.

Відома проблема виникнення у плоскій задачі осцилюючої особливості біля вістря тріщини на межі поділу матеріалів безперечно породжена некоректністю формулювання задачі. Її найчастіше позбуваються введенням біля вістря малої перехідної зони, однак осциляція пропадає і тоді, коли на межі поділу матеріалів вводять перехідну зону у вигляді примежевого шару [1248, 1153].

Робота J.W.Cahn [1184] відзначає можливість формування внутрішніх поверхонь між поверхневих напружень.

Існує також інша тенденція моделювання тонких двовимірних макроскопічних об'єктів тривимірними – для того, щоб могли деталізувати аналіз процесів, які там відбуваються. Наприклад, у праці [1327] смуга ковзання розглядається як тонка тривимірна область сильно деформованого матеріалу. Вона дає можливість описати підростання тріщини всередині одного зерна. Така ідея є близька до широко використовуваної у механіці руйнування концепції розкриття тріщини [693, 694].

### 41.3. Моделі перехідних шарів

Під час дослідження контакту тіл, що взаємодіють (між матрицею та включенням або перехідним шаром у тому числі) найчастіше використовується умова ідеального механічного і теплового контакту. Допускається теж можливість проковзування (гладкий контакт – нульовість дотичних напружень) [1393] або наявність кулонового тертя.

Неідеальний контакт за допомогою введення додаткового тонкого прошарку, наділеного певними властивостями, можна звести до ідеального: контакт через проміжний тонкий шар. Саме таким способом вивчалася [576, 986] термопружна взаємодія шорстких поверхонь. Пізніше цей підхід вилився у видозміну методу функцій стрибків – метод міжконтактних прозорів (див. пп. 46.3).

Проміжковий шар моделюється іншим матеріалом, причому його зовнішній контур у праці [1582] описується конфокальним еліпсом. У цьому випадку за рівномірного нагрівання композиту отримано аналітичний розв'язок проблеми. Розглянута [1580] і подібна задача для багатозарового проміжного шару (межі поділу матеріалів – концентричні кола) навколо кругового включення. У праці [35\*] перехідний шар навколо кругового включення моделюється концентричним круговим кільцем, причому його зв'язок із матрицею є ідеальним, а із включенням – проковзуючим. У довільній точці перехідного шару розташована крайова дислокація. Це дало можливість авторам розглянути взаємодію тріщини з ковзною межею. Взаємодія включень із подібними нелінійними перехідними шарами розглянута у [26\*, 31\*].

Постановка плоскої задачі для довільної кількості довільно розташованих кругових включень у праці [1515] передбачала моделювання перехідного шару вінклеровою основою, припускаючи, що напруження від матриці до включення передаються неперервно, а нормальні і дотичні переміщення зазнають стрибків, пропорційних відповідно нормальним і дотичним напруженням. Коефіцієнти пропорційності  $k_1$  і  $k_2$  вважалися сталими, хоча й, можливо, різ-

ними для кожного із включень. Такий проміжний шар був названий однорідно неідеальним (homogeneously imperfect interface). Така ж модель була використана і для розв'язування задачі про термічне навантаження радіальної тріщини у круговому включенні [1144].

Низка робіт використовувала модель так званого неоднорідного неідеального перехідного шару (inhomogeneously imperfect interface), коли коефіцієнти пропорційності моделі Вінклера (постелі) змінюються уздовж межі поділу. Для кругового включення такі підходи використано [1579] для опису ковзного контакту ( $k_1=0$ ,  $k_2 = k_2(\theta)$ ) та загального типу неоднорідного контакту  $k_1 = k_1(\theta)$ ,  $k_2 = k_2(\theta)$  [1659, 1658, 1660, 1406]. Для опису взаємодії пружної [1628, 1630] і термопружної [1628] еліптичного включення з матрицею була використана ця ж модель.

Задача, коли проміжний шар між круговим включенням та матрицею описано рівняннями Ляме, розглянута для випадку ізотропії матеріалів [1038]. Подібна задача для ортотропних матеріалів із урахуванням натягу кругового диску вивчена у [1018] (перехідний шар змодельовано пружною лінією, що сприймає розтяг та згин у площині пластини зсуву [717]).

У випадку аналізу антиплоскої задачі для еліптичного включення в полі однорідного зсуву [1628, 1629] було використано модель однорідного неідеального перехідного шару, коли стрибка напружень у шарі немає, а стрибок переміщень пропорційний дотичним напруженням, причому коефіцієнт постелі  $k_3 = \text{const}$  (нульовий для гладкого контакту і безмежно великий для контакту ідеального). Ця ж модель була використана [1734] для аналізу взаємодії двох різних кругових циліндрів із різними перехідними шарами із включенням Ешелбі.

Декілька років раніше до аналізу кругового циліндричного включення було використано неоднорідну модель при  $k_3 = k_3(\theta)$  [1585]. В обох випадках враховувалося додаткове існування у включенні власних деформацій.

У праці [1735] перехідний шар безмежного кругового циліндра за поздовжнього зсуву вважається тонким шаром змінної товщини (та ж модель неоднорідного неідеального контакту). Побудовано розв'язки для зосередженої сили і гвинтової дислокації у довільній точці матриці (функції Гріна) і виявлено, що можна так підібрати параметри покриття і включення, що їхня наявність не змінюватиме енергії деформації пружного тіла (стелтс-включення). На основі отриманої функції Гріна досліджено взаємодію тріщини із покритим включенням і обчислено значення коефіцієнта інтенсивності напружень.

Більш реалістичну модифікацію вінклерової моделі у застосування до волокнистих композитів застосував J.D.Achenbach з учнями [1137, 1138, 1212]. Ця модель, названа моделлю механічних пружин, відрізняється від моделі вінклерової тим, що припускає за стискаючих нормальних радіальних напружень на поверхні включення відсутність стрибка переміщень у перехідному шарі.

#### 41.4. Основні напрями дослідження задач для тіл з тонкими включеннями

Для аналізу відповідних задач можна запропонувати низку загальних підходів [238]:

- 1) розглянути включення довільної форми, а потім істотно зменшити один із його розмірів;
- 2) застосувати прямі числові методи, зокрема МСЕ, МГІР;
- 3) використати експериментальні методи;
- 4) за допомогою асимптотичних методів детально розглянути напружено-деформований стан біля вістря неоднорідності та межі поділу матеріалів;
- 5) опрацювати специфічну теорію, що дала би можливість досить просто розв'язувати відповідні задачі з урахуванням малої товщини дефекту.

Відповідно до цієї класифікації нижче буде здійснено аналіз методів та основних результатів, отриманих у опрацювання тематики тонких включень.

До задач про тонкостінні включення близька доволі добре опрацьована проблематика склеювання двох тіл (див. напр. [1277, 1268, 140]), оскільки шар клею моделюється тонким прошарком чи включенням. Надзвичайно близькі їй задачі про підкріплення краю півплощини та отворів тонкими накладками. Фактично накладка є включенням із одним вільним краєм. Підкріплювальний елемент переважно розглядається або за теорією одновимірних стрингерів [1505, 633, 20, 626, 870], які працюють лише на розтяг, або за теорією тонких стрижнів [569, 588, 573, 13\*, 1018, 103] та ін. В останньому випадку можна враховувати не лише можливість існування проміжного шару між підкріпленням та основою, але й ексцентричність підкріплення тощо (див. балкові моделі включень). Теорія деформування початково напружених тіл з тонкими накладками розроблена О.М.Гузєм С.Ю.Бабичем та В.Б.Рудницьким [271, 270].

Проміжне місце між задачами теорії включень та накладок займає задача Райсснера (див. напр. [1565, 634, 3]). Бібліографія з цих питань є теж дуже широкою.

## § 42. Методи аналізу тіл з включеннями довільної форми

### 42.1. Термінологія

На початку розділу зробимо деякі термінологічні зауваження, що стосуються застосування термінів «включення» (англ. inclusion) та «неоднорідність» (англ. inhomogeneity). Українська та російська мови (за винятками дуже нечисленних авторів) не робить у науково-технічних текстах між ними різниці і вважає практично синонімами. В англійській літературі ситуація дещо інша. Деякі, хоча і не всі, автори надають цим термінам різний сенс, тому читаючи англійську літературу слід зважати на можливість різночитань. У оглядовій праці Т.Мура [1526] (див. теж [1527, 29\*, 1771] та оглядову працю [1533]), де розглядаються майже виключно англійські праці періоду 1982–1987 рр., які стосуються аналізу впливу включень та неоднорідностей на напружений стан тіл, вслід за міркуваннями J.D.Eshelby [1281, 1282, 1280] включенням (inclusion) називається підобласть  $\Omega$  деякої області  $D$ , де задані власні деформації, у той час, як поза нею ( $D - \Omega$ ) ці власні деформації відсутні. Під власними деформаціями тут розуміють такі непружні деформації, як теплове розширення внаслідок локального нагріву певної ділянки тіла, фазові перетворення, деформації натягу, залишкові та пластичні деформації. З деякими прикладами розв'язування таких задач можна ознайомитися у працях [1781, 1782, 1341, 1755, 1756, 1363]. Деякі автори (наприклад [1734]) область власних деформацій називають включенням Ешелбі (Eshelby inclusion).

А ось якщо пружні сталі підобласті  $\Omega$  різняться від сталих у  $D - \Omega$  (матриці), то така підобласть Т.Мураю називається неоднорідністю (inhomogeneity). Поки тіло з такою неоднорідністю не піддане силовому впливові, розв'язування задачі для нього не має сенсу, на відміну від задачі для тіла з включенням, оскільки власні деформації і без додаткового зовнішнього впливу індукують у області  $D$  перерозподіл полів напружень. Там же зазначається, що якщо у неоднорідності виникають власні деформації (скажімо, виділення у металах, вставлені з натягом неоднорідності), то такий об'єкт пропонується називати неоднорідним включенням (inhomogeneous inclusion). Щоправда, Т.Мура робить тут же зауваження, що таке розрізнення термінів не є достатньо зручним і включеннями можна називати всі вищезгадані об'єкти, хіба що розрізнення є вкрай необхідним. Так що, читаючи англійські праці, слід ці термінологічні різночитання мати на увазі.

У цій праці включенням називається підобласть  $\Omega$  тіла  $D$ , яка має термомеханічні властивості інші, ніж у оточуючій його матриці  $D - \Omega$ , тобто це такий об'єкт, який за Т.Мураю називається неоднорідністю.

Переважно аналітичні методи застосовувалися до задач про включення канонічної форми у необмежених середовищах. До найпростіших належать задача про сферичне включення та безмежне циліндричне включення (кругове) [1325]. Побудований фундаментальний розв'язок (прямолінійна дислокація) для сферичного включення [1650]. Два сферичні включення вивчені, зокрема у [1196]; взаємодія сферичних включень досліджена теж у праці [16] (ізотропний осесиметричний випадок) та [1211] (анізотропія) Одне й два кругові включення розглянуті у працях [1359, 1358]. Гладкий контакт на межі зі сферичним включенням розглянутий у [1459].

Визначення пружних полів включень, що взаємодіють, стосується праця [1360]. Огляд складніших задач, що стосуються трансверсально-ізотропних тіл, можна знайти у оглядовій праці Ю.М.Подільчука [765]. Наближений розв'язок осесиметричної задачі із жорстким включенням містить публікація [1575]. Включення довільної форми в межах плоскої задачі для анізотропної площини чи півплощини з використанням ідей Ешелбі розглянуте у [1581, 1583]. Звернемо увагу і на розв'язки плоскої задачі для включення параболічної форми [1087, 1088], на основі якого, так само, як і для еліптичної [1086], можна вивчати особливості пружних полів біля тонких неоднорідностей.

## 42.2. Методи аналізу

### Метод власних функцій

У межах першого підходу опрацьовано декілька ефективних методів і розв'язані деякі конкретні задачі. Вкажемо на метод власних функцій, за яким переміщення та напруження збуреного поля в області включення і в матриці подається у формі рядів за деякими системами власних функцій. Коефіцієнти рядів найчастіше визначають з умови мінімуму середньої квадратичної похибки задовольняння крайових умов та умов контактної взаємодії у скінченній кількості точок [1217, 1457].

### Метод збурення форми границі. Метод конформних відображень

Метод конформних відображень [635], який найчастіше застосовується до двовимірних задач, полягає у пошуку збуреного включенням розв'язку за допомогою конформного відображення області, зайнятої включенням, на круг одиничного радіуса (або його зовнішність). Комплексні потенціали подають у вигляді рядів Лорана з невідомими коефіцієнтами. Використання умов ідеального контакту зводить задачу до безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь стосовно цих коефіцієнтів [1620, 856, 463, 568, 567, 1026, 1027, 1323]. Цим методом у плоскій пружності і термопружності розв'язано велику кількість задач для включень еліптичної [1335, 462, 1202, 1323] (в ізотропному та анізотропному матеріалі), овальної [1292], прямокутної [1189–1191, 572] форм тощо. Важливі застосування для геофізичних досліджень мають отримані цим методом розв'язки задачі для кругового (з проміжним шаром) чи еліптичного включення за ідеального контакту з необмеженим нестисливим ізотропним пружним чи в'язким середовищем [1595].

Подібні результати отримані стосовно аналогічних задач поздовжнього зсуву [326] та ін.

Із застосуванням методу конформних відображень та збурення форми межі (границі) В.В.Панасюком, Л.Т.Бережницьким та їх учнями розв'язані задачі про концентрацію напружень в ізотропних та анізотропних середовищах біля гострокутних порожнин, жорстких та пружних включень з точками звороту стосовно антиплоского зсуву [73, 81, 74, 69, 285, 68], плоскої пружності [700, 75, 80, 79, 864, 66, 67, 1439] та термопружності [286] і побудовані

відповідні асимптотичні залежності, що відповідають (у випадку отворів) та узагальнюють (у випадках включень) класичні залежності теорії тріщин. Двочленні асимптотичні вирази у випадку гострокутних отворів та жорстких включень подані у [280, 64]. Дуже цікавим є розв'язок [188] задачі для тонкого жорсткого включення одної спеціальної форми.

Докладно застосування методу збурення форми межі висвітлене у працях О.М.Гузя та Ю.М.Неміша [269, 267, 268].

### Метод узагальнених функцій

Одним із ефективних способів побудови диференціальних рівнянь задач про включення є використання апарату узагальнених функцій. У рамках цього підходу пружні і теплофізичні властивості складеного тіла описують з використанням ступінчатих функцій єдиними аналітичними виразами [780, 442, 520]. Підставлення цих функцій у диференціальні рівняння неоднорідної теорії теплопровідності, пружності чи термопружності приводить до відповідних рівнянь з коефіцієнтами у вигляді ступінчатих функцій та їхніх похідних. Систематичний виклад методу та розв'язки низки задач теплопровідності і термопружності для складених тіл з плоскопаралельними, циліндричними і сферичними межами поділу можна знайти у монографіях [782, 520].

У рамках такого підходу тонкостінне включення з теплофізичними параметрами  $s$  отримують спрямовуванням товщини  $2h$  прошарку до нуля зі збереженням сталості добутків  $2rc$ , названих *зведеними характеристиками включення* [780]. Розв'язки конкретних задач теплопровідності і термопружності для тонких стрижневих і плоских включень у тривимірному середовищі можна знайти у працях [781, 817, 818, 416] та ін.

У працях [1381, 1400] подібним чином досліджені задачі для пружних включень зі складнішою границею у вигляді необмежених циліндрів (плоска деформація) прямокутного, трикутного та еліптичного перерізу. У [1400] досліджені тонкі стрічкові включення як граничний випадок еліптичного циліндра. Там само вивчається істотно просторова задача для призматичних включень.

### Метод потенціалів. Метод особливостей

Оскільки плоским задачам теорії пружності і стаціонарної теплопровідності відповідають диференціальні рівняння еліптичного типу, то це дає можливість шукати їхні розв'язки у вигляді суперпозиції потенціалів простого та подвійного шарів. Стосовно аналізу включень дослідження у цьому напрямку започаткував Д.І.Шерман [1120, 1121]. Досить детальний аналіз цих та пов'язаних з ними результатів наведений у оглядовій роботі [1119] і § 22 книги [713], де наведене (формули (19.2), (19.3)) записане Д.І.Шерманом подання у зручнішому для його використання вигляді (позбавлене неістотних для розв'язування задачі членів). У праці [1041] можна довідатися про їхнє застосування до розв'язування конкретних задач. Загальна методика полягає у поданні комплексних потенціалів  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  у вигляді інтегралів Коші з наперед невідомою густиною, яку після задовольнення умов ідеального контакту на межі поділу матеріалів знаходять з регулярних інтегральних рівнянь типу Шермана–Лаурічелли. У 1959 р. був побудований [21\*, 635] досконаліший спосіб, що знайшов більше поширення [746] та подальше вдосконалення [1688]. Зіставлення результатів числового аналізу з точним розв'язком Гардімана [1335] засвідчило надійність та досить швидку збіжність методу. Деякі міркування для відповідних задач у анізотропному середовищі можна знайти у [1745].

Інтегральні рівняння Шермана – Лаурічелли так само, як і М.І.Мусхелішвілі [635], мають власні розв'язки. Тому під час їхнього розв'язування слід враховувати деякі додаткові

умови, що мають певний механічний сенс, зокрема забезпечують однозначність переміщень за обходу навколо включення. Подібні умови треба задовольнити і на границі тіла при заданих там зусиллях чи переміщеннях [56, 55, 713].

Застосування узагальнених пружних потенціалів широко обговорюється у працях [507, 508, 721, 713, 714, 1055] та ін. Принагідно зазначимо, що побудова розв'язків крайових (граничних) та контактних задач у вигляді потенціалів простого та подвійного шару дає можливість інтерпретувати ці інтеграли по контуру чи поверхні як розподіл на них зосереджених чинників та їхніх диполів з наперед невідомою густиною, яку визначають з умови задоволення крайових умов і умов контакту середовища. Така фізична інтерпретація методу потенціалів отримала назву **методу особливостей**. Тому зробити строге розмежування методів потенціалів і функцій Гріна не можна, оскільки в обох випадках визначальна роль належить фундаментальним розв'язкам, які визначаються різними типами функцій Гріна.

На основі методу конформних відображень та рядів Лорана для задачі про колове включення було розроблено [1504] спеціалізовану схему методу скінченних елементів із спеціальним восьмивузловим елементом, яку можна застосовувати для довільних систем (у тому числі й періодичних) включень довільної форми.

Використання аналітичного розв'язку для пружного еліптичного включення у поєднанні із статистичними методами дала можливість визначити міцність композиту із випадково розподіленими не взаємодіючими (мале наповнення композиту) волокнистими композитами [148].

Плоскі задачі стосовно тріщин всередині і зовні кругового пружного включення в ізотропному матеріалі розглянуті, зокрема, у працях [1032, 1207, 185]. У першій із них вивчаються прямолінійні тріщини, у тому числі і з урахуванням можливого перетину межі включення, у другій – викривлені (параболічні), у третій – лише радіальні. Взаємодію тріщини із пружними включеннями різної форми дослідили Х.Н.Ліу, F.Erdogan [1471] (див. теж [1447]).

Взаємодія зовнішніх тріщин з еліптичними включеннями у ізотропних матеріалах вивчена у [581] (плоска теплопровідність), [1550] (тріщина біля жорсткого еліптичного включення), [1465] (плоска задача методом еквівалентного включення Ешелбі); внутрішніх тріщин у еліптичних включеннях [1033, 1751]; при перетині тріщиною межі поділу – [1750, 27\*].

Цим працям передувало дослідження Г.Сендецького [1621] про радіальну тріщину біля жорсткого кругового циліндра в антиплоскій постановці.

Вивчене розтріскування на межі поділу одного жорсткого ([1707] (одна тріщина), [1720] (дві тріщини)), одного пружного [1266, 1171, 1302, 1414] та двох пружних [1434] кругових включень у плоскій постановці, еліптичного жорсткого, причому видовженого [1370], еліптичного пружного включення [1401] (методом еквівалентних включень Ешелбі). Слід звернути увагу також на праці [1169, 1164, 1596, 1779].

Прикро, але на Заході залишився не поміченим великий цикл піонерських робіт з цієї проблематики, виконаний Д.В. Гриліцьким та його учнями [243, 857, 242, 205, 241, 217, 234, 233, 231, 687] ще 1960–74 рр. Деякі з отриманих результатів у поширеному вигляді викладені у навчальних посібниках для студентів монографічного характеру [244, 248, 246]. Деякі роботи цього колективу в напрямку робіт анізотропної пружності тіл з тріщинами згадані у пп. 47.2.

Незважаючи на те, що розв'язування задач поздовжнього зсуву є набагато простішим від плоских, праць, які стосуються антиплоскої деформації тіл із включеннями є набагато менше. Для антиплоскої задачі досліджена [1621] з використанням методу конформних відображень подібна задача для довільного частково відшарованого жорсткого включення у загальній постановці та приклади для включення у формі еліпса і квадрата з округленими



вершинами. Лише у 1996 р. С.Q.Ru та P.Shiavone [1586] з використанням комплексних потенціалів розв'язали задачу про дію однорідного напруженого стану на нескінченності на простір з чужорідним еліптичним циліндром та дійшли давно відомого висновку, що поле деформацій всередині включення має бути однорідним.

З докладним аналізом тріщини на межі еліптичного включення у ізотропній пластині можна ознайомитися також у [1407].

Антиплоску задачу про взаємодію тріщини з пружним круговим (циліндричним) включенням розглянули Р.С.Theocaris, С.В.Demakos [1683]. Задача про тріщину на межі кругового циліндра розглянув Y.W.Liu [1474].

До задач розтріскування на межі з включенням дуже близькі задачі про гладкий контакт (проковзування) на межі поділу матеріалів [1369, 1168, 1712].

З методу потенціалів виріс потужний прямий числовий метод – метод граничних елементів, який має численні модифікації. З використанням цього підходу у праці [862] було розглянуто плоску задачу теплопровідності та термопружності для двох з'єднаних півплощин із криволінійними тріщинами та пружними включеннями довільної форми. Частковий випадок відповідної пружної задачі (включення у півплощині з жорстко защемленою межею) розглянутий недавно [1667] (див. також подібну задачу для півплощини та смуги з локалізованими власними деформаціями чи включеннями у [1209]).

Аналогічні методи для аналізу однорідних та кусково-однорідних анізотропних середовищ з тріщинами, отворами та жорсткими і пружними включеннями довільної форми (обчислення зроблені переважно для еліптичної – див. теж монографію [535]) розробили С.О.Калоєров з учнями [366] і В.В.Божидарнік з О.В.Максимович [124, 123] (див. огляди літератури у цих монографіях). Згадаємо тут лише працю [1193], де вивчено антиплоске деформування необмеженого анізотропного середовища з еліптичним включенням за довільного розташування радіальної тріщини.

Метод потенціалів, тобто подання розв'язку у вигляді розподілених по поверхні безмоментних та моментних диполів, подібно, як це фактично було зроблено Дж.Ешелбі до розв'язування включень у ізотропному матеріалі було використане [1771] для аналізу просторових включень (неоднорідностей) в ортотропному матеріалі. Як окремий випадок з використанням методу еквівалентних включень Ешелбі подано розв'язок для термопружних переміщень від термічних власних деформацій.

Набагато швидше 1971 р. N.Kinoshita, T.Mura [1416] записали у квадратурах розв'язок для еліпсоїдального включення в анізотропному середовищі. На основі цього розв'язку S.C.Lin та T.Mura [1468] дослідили граничні випадки сплющеного та видовженого сфероїдного включення у трансверсально-ізотропному матеріалі, спростивши вигляд відповідних інтегралів (див. теж працю [504]). Технічні проблеми із обчисленням цих інтегралів подолали V.M.Levin, M.G.Markov [1460]. Отриманий розв'язок було покладено в основу реалізації самоузгодженого методу ефективної апроксимації середовища (effective medium approximation – ЕМА) для визначення ефективних характеристик трансверсально-ізотропного середовища з сфероїдальними неоднорідностями та швидкості поширення у ньому пружних хвиль.

Важливі результати у вивченні видовжених тонких включень (двовимірних включень) в анізотропному матеріалі отримали Н.Fan і L.M.Keer [1287]. Як спеціальні випадки розглянуто тріщину (порожнину) та абсолютно жорстке включення. Виявлена спорідненість між цього типу дефектами і з'ясовано, що загальну теорію пружних тонких дефектів не можна побудувати з розв'язку Ешелбі для еліпсоїда за винятком вищезгаданих спеціальних випадків. Фактично можна отримати тільки результати відповідної якісної моделі (див. пп. «якісна модель» п.46.2).

### Метод функцій Гріна та інші споріднені методи

Перші результати стосовно постановки плоскої задачі теорії пружності належать С.Г. Міхліну, який у 1935 р. використав комплексну функцію Гріна для побудови узагальненого ядра Шварца та наступного виведення інтегральних рівнянь Фредгольма задачі [596, 597]. Отримані результати викладені в монографії [595, 635] та на стор.168–169 книги [713]. Використання фундаментальних розв'язків задачі теорії пружності і термопружності дало можливість [507, 508] побудувати сингулярні і функціональні рівняння стосовно крайових і контактних значень векторів переміщень і густини поверхневих сил, які, у свою чергу, допомогли здійснити глибокий теоретичний аналіз проблеми, зокрема, довести існування та єдиність розв'язку крайових задач для тіл з включеннями, записати сингулярні інтегральні рівняння відповідних задач [507, 508, 382].

Для розв'язування задач про тіла із областями залишкових деформацій (включень у термінології Т.Мури, включень Ешелбі) придатні фундаментальні розв'язки для однорідного тіла (див. напр. функції Гріна у кусково-однорідній ізотропній площині [1482], скінченному тілі [1145], дво- та тривимірному анізотропному середовищі [1284, 1149, 1701, 1700, 1699, 1695, 1704, 1731, 1730, 1732, 1733, 1706]). R.R.Castles і Т.Мура [1187] виявили, що якщо зовні еліпсоїдальної області (включення Ешелбі у центрі якого є початок системи координат) власні деформації мають вигляд  $r^{-p}$  ( $p > 0$ ), то всередині включення переміщення і напруження дорівнюють нулю.

Цікавим є розв'язок задачі термопружності S.Lee, C.C.Hsu [1455] для приповерхневого температурного паралелепіпеда у півпросторі та Б.В.Процюка [829, 830] для температурного паралелепіпеда у підкріпленому пружним шаром півпросторі. У його працях розвинута методика побудови функцій Гріна для багатьох випадків. У випадку неоднорідностей – фундаментальні розв'язки для тіла із неоднорідністю (включення із іншого матеріалу). Згадаємо про деякі фундаментальні розв'язки плоскої задачі для ізотропного тіла з круговим включенням [1254, 1348, 1256, 1258, 1251]; для ізотропного тіла – жорсткого [1590] та пружного [1652, 1651] еліптичного включення (крайові дислокації), дислокація всередині еліптичного включення [1741]; анізотропного середовища з еліптичним включенням [1697, 1698].

Функція Гріна у антиплоскій задачі для анізотропного середовища із еліптичним включенням побудована у [1697]. Функцію Гріна антиплоскої задачі для гвинтової дислокації, що взаємодіє із ізотропним пружним включенням довільної форми вивчено у [1738]. Задача власних деформацій (еліптичний циліндр Ешелбі) у анізотропному півпросторі вивчена у [1497].

Деякі інші фундаментальні розв'язки згадані у тексті монографії під час аналізу впливу дислокацій на тонкі включення (див. теж [1065, 1351]).

У 1977 р. метод функцій Гріна було застосовано до аналізу задачі про пружний еліпсоїд у анізотропному середовищі [1454]. Докладно питання застосування методу функцій Гріна до аналізу впливу включень викладене у монографії [1552].

Сутність методу особливостей полягає у заданні на певній поверхні  $S$  (лінії  $L$  для двовимірного випадку) всередині деякої області (найзручніше для цього використати необмежений простір чи площину) розподілу з наперед невідомою густиною  $f$  зосередженого чинника  $q$ . За допомогою теореми згортки на підставі відповідних фундаментальних розв'язків одержують подання напружень, переміщень тощо у довільній точці області через густини і з використанням крайових умов та умов контакту будують інтегральні рівняння стосовно цих густин.

Тріщини можна моделювати розподіленими дислокаціями, абсолютно жорсткі тонкі включення – розподіленими зосередженими силами [111]. Це найкращий спосіб розв'язування задач про взаємодію включень із тріщинами і тонкими включеннями. Однак

переважно такі задачі формулювалися як крайові задачі і розв'язувалися із використанням теорії потенціалів.

За наявності у тілі включень метод особливостей узагальнюється так: матрицю без включень і окремо кожне включення занурюють у простір з відповідними механічними властивостями, записуючи для кожного з них відповідні подання окремо для кожного з включень і для матриці; переходять до граничних значень на краю тіла та межі поділу матеріалів і, задовольняючи крайові умови та умови спряження на межі поділу середовищ, отримують інтегральні рівняння. Наприклад, у [1167] в рамках плоскої задачі термопружності включення замінене еквівалентною системою сил і теплових джерел.

Метод особливостей має ті переваги, що вибір того чи іншого типу зосередженого чинника дає змогу забезпечити бажаний ступінь заникання розв'язку на нескінченності, моделювання особливостей задачі і фізичну інтерпретацію результатів. Зокрема у теорії тріщин набув поширення дислокаційний підхід, який забезпечує стрибок переміщень верхнього і нижнього берегів тріщини.

У частковому випадку, коли роль зосереджених чинників відіграють сили, відповідні подання мають властивості (структуру) потенціалу простого шару (для переміщень) та потенціалу подвійного шару (для напружень) [714], а метод особливостей називають **методом фіктивних сил** чи **фіктивних навантажень** [840]. Застосування методу сил в плоских задачах теорії пружності для ізотропних середовищ обговорюється В.К.Перехватовим [719], а у [101] міститься програма розв'язування такої задачі.

Однією з модифікацій методу сил є **метод півплощин (заморожування)** [1495], який приводить до регулярних інтегральних рівнянь типу Шермана–Лаурічелли (див. теж роботи Р.В.Гольдштейна та Н.Дж.Альтиєро, Д.Л.Сікарські у збірнику [590]).

Оскільки інтегральні рівняння, одержані за допомогою методів теорії потенціалів чи особливостей, переважно надто складні для аналітичної побудови розв'язку і основним методом їхнього розв'язування є певна дискретизація з наступним застосуванням числових методів [590, 713, 714, 143], то доцільно від самого початку скористатися не неперервним, а дискретним розподілом особливостей [1767, 343]. Цей підхід одержав назву **метод дискретних сингулярностей (особливостей)**.

Інші модифікації методу сил спрямовані на спрощення розрахункової схеми. У [720] розподіл сил уздовж контуру включення вважається кусково-сталім, а однаковість переміщень вимагається лише у обраних вузлових точках. Таким чином досліджена плоска задача стаціонарної термопружності для включення, впровадженого з натягом.

### Формула Сомільяно

Формула Сомільяно знайшла своє застосування у роботі [1574] для побудови загального способу виведення інтегральних рівнянь задачі для пружних тіл з включеннями довільної форми так само, як і під час опрацювання загальної схеми методу граничних інтегральних рівнянь [590, 1361, 1645]. Ефективність цього методу підтверджена у [1574] побудованими розв'язками плоскої задачі для еліптичного включення, вставленого з натягом у безмежну матрицю з того ж матеріалу та для чужорідного квадратного включення. Низка задач у межах тривимірної пружності і термопружності розв'язана на основі пакету Ю.В.Верюжського [143].

Врахування анізотропії не вносить принципівих ускладнень: слід лише знати фундаментальні розв'язки для відповідного класу матеріалів. На основі формули Сомільяно можна отримати основні залежності методу функцій стрибка [966, 112] (див. нижче).

**Наслідок теорії гармонічних потенціалів (часткова поліноміальна консервативність)**

Значний вплив на розвиток теорії і практики розрахунків напружено-деформованого стану тіл з включеннями здійснила по-своєму унікальна властивість еліпсоїдальних неоднорідностей у необмеженому однорідному ізотропному середовищі. Застосування теорії гармонічних потенціалів до задач електропровідності засвідчило, що в однорідному на безмежності електричному полі електричне поле діелектрика еліпсоїдальної форми теж однорідне. Аналогічне явище повинне було спостерігатися теж у задачах теорії пружності, що характеризується бігармонічним потенціалом. Ці результати безпосередньо впливають з досліджень N.M.Ferrers [1291], F.W.Dyson [1262] потенціалу неоднорідного еліпсоїду.

Вперше думку про те, що за дії однорідного поля напружень на нескінченності напружений стан еліптичного (плоска задача) і еліпсоїдального включення (тривимірна задача) теж буде однорідним стосовно розв'язування задач теорії пружності використали у 1954 р. Н.Гардіман [1335] і у 1957–1959 рр. Дж.Ешелбі [1281, 1282] відповідно. Книга [1128] містить переклад двох останніх праць російською мовою.

Використання методу конформних відображень дало можливість [1335] визначити напружений стан матриці і побудувати зв'язок між напруженнями на безмежності та всередині включення. Г.П.Черепанов та ін. [1086, 1078] узагальнили розв'язок Гардімана на випадок додаткового впливу рівномірного нагрівання пластинки та виділили проміжкові асимптотики розв'язку, коли товщина включення прямує до нуля, а його матеріал має велику податність. Виявлено, зокрема, що за умови  $k \equiv \mu_{\text{вкл}}/\mu \leq \sqrt{2b/a} \ll 1$  ( $a$  і  $b$  – велика та мала півосі включення) напруження біля вістря включення мають кореневу особливість і аналогічно до теорії тріщин можна розглядати коефіцієнти інтенсивності напружень.

Використання принципу "мікроскопа" [1079] і точного розв'язку для включення параболічної форми [1087, 1088] дають можливість вважати, що подібний розподіл напружень спостерігається і для інших округлених біля вістря тонких податних включень [1078].

У відзначеній праці [1281] на основі методу зосереджених сил та еквівалентного включення Ешелбі використав однорідність поля деформацій для обчислення енергії пружної деформації тіла з включенням не торкаючись досить складної побудови напружено-деформованого стану поза включенням. Виклад цього результату можна знайти у книгах [1128, 483] та ін. В [1282, 1128] задача визначення переміщень в ізотропній матриці, викликаних однорідними власними деформаціями деякої підобласті (а внаслідок принципу еквівалентного включення і у відповідній задачі для чужорідного включення у матриці, підданій однорідному деформуванню на безмежності), зведена до визначення гармонічних потенціалів на межі поділу. Стосовно еліпсоїдальної області отримані формули істотно спрощуються і дають можливість записати певні вирази для переміщень, деформацій та напружень. Наступна праця [1280] обговорює і випадок поліноміального поля деформацій на безмежності.

Пошук форми жорсткого включення, яке спричиняє найменшу концентрацію напружень виявив [1264], що це є еліпсоїд.

Про поліноміальну консервативність див. нижче.

### **Метод зосереджених сил Ешелбі (метод еквівалентного включення)**

Визначаючи поле переміщень від чужорідного включення у безмежній ізотропній матриці з заданим на безмежності сталим полем напружень, Дж.Ешелбі [1281, 1128], базуючись на [1281] частковій поліноміальній консервативності як на найпростішій формі принципу поліноміальної консервативності (див. нижче), висловив припущення, що включення можна замінити матеріалом матриці, який підданий однорідній власній деформації, моделюючи цю задачу певним розподілом уздовж поверхні поділу областей зосереджених сил чи дислокацій Сомільяно. Найпростіше та наочне обґрунтування методу зосереджених сил Ешелбі міститься у [1488].

Відповідно до часткової поліноміальної консервативності, якщо поле деформацій всередині чужорідного включення в необмеженому тілі однорідне, то збурене поле переміщень збігається з переміщеннями від однорідних власних деформацій відповідної області в однорідному масиві зі сталими, які дорівнюють різниці пружних сталих матриці та включення [1281, 1128]. М.А. Jaswon, R.D. Bhargava [1383] деталізували цей метод стосовно плоскої задачі теорії пружності, R.D. List, J.P.O. Silberstein [1470] з використанням методу конформних відображень розв'язали задачу для безмежної пластинки з квадратним включенням, підданої однорідній початковій деформації. Т. Mura і S.C. Lin [1532] узагальнили результати Дж. Ешелбі на анізотропний випадок, досліджуючи енергію деформації тіла з включенням у вигляді сплющеного еліпсоїда (сфероїда), що підданий рівномірному нагріванню. Тут детально досліджений частковий випадок еліптичної тріщини, однак напружено-деформований стан і вплив пружних властивостей включення не досліджені.

Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної пластинки із еліптичним включенням вивчав Ю.М. Подільчук [764]. Інший вид анізотропії такої задачі досліджено у [1766], загальний тип анізотропії – у [1371]. Окремі плоскі задачі для включень у анізотропних середовищах досліджувалися і у [1620] (еліптичне і лінійне включення), [1765]. Принагідно згадаємо про розв'язки пружної антиплоскої задачі для еліптичного включення в ізотропному матеріалі [1322] та у кусково-однорідному анізотропному просторі [1776].

У праці [1531] відзначено, що метод еквівалентних включень можна застосовувати у випадку необмеженої кількості включень у безмежному масиві, однак тоді додаткові власні деформації не можуть бути однозначно визначені. Наявність двох еліптичних неоднорідностей вперше досліджена Z.A. Moschovidis, Т. Mura [1524]. Застосувавши методи збурення Б.А. Зімін [329] дослідив задачу про два еліпсоїдальні включення в ізотропному середовищі. Плоска задача для еліптичного включення досить детально досліджена у праці [1765], де визначене поле переміщень, напружень, пружна енергія та жорстке повертання включення. Численні дослідження спрямовані на врахування анізотропії пружних властивостей матриці і включення, наприклад [1529, 1297, 1532, 1454]. Можливість періодично повторюваних еліпсоїдальних включень розглядалася у [1518, 1727] та ін.

У працях [1391, 1392] порівнюються реалізації методу еквівалентного включення і методу граничних інтегральних рівнянь стосовно визначення деформацій у необмеженому середовищі за однорідних власних деформацій кубічного включення. Обидва методи дають близькі результати за помірної різниці між пружними властивостями фаз? а загалом поблизу куткових точок збіжність першого методу краща.

Пряме використання формули Сомільяно з огляду на його регулярність стосовно напружень на поверхні не розв'язується коректно відносно цих величин [1070]. Автор надає перевагу новому  $p$ -рівнянню, яке є сингулярним стосовно компонент вектора напружень.

F. Erdogan [1269] звів задачу про середовище з включеннями до задачі про однорідне середовище з розподіленими по об'єму області, яку займали включення, та її границі наперед невідомих масових і поверхневих сил. Використання функції Гріна для кожної із складових (конституант – включень і матриці) дає систему СІР, визначених на межі тіла та межі поділу фаз. За однаковості коефіцієнтів Пуассона ці рівняння істотно спрощуються.

### Метод еквівалентного включення

Метод еквівалентного включення виявився найпродуктивнішим для аналізу впливу на пружні поля фазових перетворень [1415]. На основі цього методу була розглянута низка цікавих три- та двовимірних обернених та оптимізаційних задач для еліптичних та еліпсоїдальних включень у ізотропних та анізотропних середовищах [1083, 145, 1263, 392, 391, 1417], задачі для еліпсоїдального включення у ізотропному півпросторі [1623], у одному із двох

ізотропних півпросторів, що перебувають у ідеальному та гладкому контакті [1770] та в анізотропному однорідному [1201, 1203] та кусково-однорідному [1536] середовищах.

### Поліноміальна консервативність

У 1971 р. було доведено [505], що якщо в необмеженому анізотропному середовищі поле деформацій на безмежності є поліномом деякого степеню, то поле деформацій усередині еліпсоїдального чужорідного включення теж буде поліномом того ж степеню. Воно одержало назву властивості поліноміальної консервативності ( $p$ -властивість). Для прикладу автори розглянули однорідне та лінійне поля деформацій для включень з довільними пружними властивостями і поліноміальну деформацію стосовно абсолютно жорсткого включення та порожнини. Пізніше Б.А.Зимін [329] показав, що  $p$ -властивість справедлива теж і для включень з нелінійно пружного матеріалу за умови однорідності поля деформацій на нескінченності.

Відкриття  $p$ -властивості сприяло розв'язанню широкого кола задач теорії пружності, термопружності, в'язкопружності і механіки полімерів. У [766] подані точні аналітичні розв'язки для необмеженого ізотропного масиву з еліпсоїдальним включенням за лінійного та сталого поля напружень на нескінченності; визначений напружений стан термопружного середовища зі сфероїдальним включенням за рівномірного нагрівання і однорідного поля напружень на нескінченності; точно розв'язана задача для важкого півпростору з сфероїдальним включенням, оскільки і у цьому випадку напруження є лінійними функціями координат на нескінченності. Застосування принципу Вольтерри дало можливість вивчити вплив рівномірного нагрівання і однорідного поля напружень на нескінченності на деформацію в'язкопружної матриці за наявності сфероїдального включення.

Розв'язування задач для включень у вигляді пружних еліпсоїда і сфероїда цікаве і можливістю моделювання тонких дискових та стрижневих включень: видовженого сфероїдального [1634] (так само, як плоска еліптична тріщина і голкова порожнина в анізотропному пружному середовищі [504]); сплющеного сфероїдального включень за та без урахування пластичного деформування матриці, що деформується зусиллями, паралельними до екваторіальної площини [1635] (метод Ешелбі); жорсткого сфероїдального включення (зокрема і диску) за скручувальних зусиль [1235]; жорсткого еліпсоїдального диску та видовженої голки в анізотропному середовищі за однорідного розтягу та зсуву на нескінченності (контактні напруження на поверхні поділу матеріалів) та замкнений розв'язок у випадку трансверсально-ізотропної матриці [592]; енергія деформації тіла з тонким еліпсоїдальним включенням у анізотропній матриці [1532]. Аналогічним чином у [1766] граничним переходом від еліптичного включення отриманий розв'язок для тонкого жорсткого лінійного включення в анізотропній матриці.

А.Чен та К.Янг [1195] подібно до [1269] вводять у розгляд фіктивні масові сили в області, зайнятій включенням. Деформації всередині включення розвивають у ряд Тейлора і будують систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для коефіцієнтів розвинення. Чим більше членів цього ряду приймають до відома – тим вищий порядок одержаної апроксимації. Урахування лише першого члена, що відповідає припущенню про однорідність поля деформацій, дає порівняно прості вирази, використані авторами при розгляді включення сфероїдальної, кубічної та певної видовженої форми. У першому з цих випадків гіпотеза однорідності відповідає дійсності і даний метод дає точний результат. В усіх інших – розв'язок наближений.

### 42.3. Деякі специфічні методи та класи пружних і непружних задач

#### Інші методи

Для розв'язування задач про включення у пружних середовищах можна використовувати метод  $K$ -функцій [365]. Досліджуючи напружений стан пластин з пружними включеннями, зручно не розв'язувати безпосередньо тривимірну задачу, а врахувати тривимірність напруженого стану, розв'язуючи послідовність двовимірних задач [40, 168]. Низка методів, що використовуються під час дослідження тіл з отворами і детально розглянуті у шостому розділі книги [199], придатна і для дослідження впливу включень.

#### Інші класи задач теорії пружності

Із антиплоскою задачею теорії пружності споріднені задачі кручення [37, 535, 1176]. Задачі згину пластин із включеннями (з урахуванням також існування можливих тріщин) розглянуті теж у великій кількості наукових праць. Згадаємо для прикладу тільки [535, 1170, 1362]. Друга праця стосується включення типу Ешелбі, коли в еліптичній області пластини задане власне поле поворотів нормалей, коли таке поле власних поворотів задане у властиво еліптичному чужорідному включенні, а також якщо у круговій пластинці існує кругова область однорідних власних кутів повороту. Третя праця стосується згину анізотропної пластини із еліптичним чи круговим отвором (чи й тріщиною) або такими ж жорсткими включеннями.

Велика увага завжди приділялася вивченню напруженого стану і концентрації напружень у оболонках із включеннями [1718, 781, 1091, 255, 1775], однак кількість праць з цієї тематики, що орієнтуються на аналітичні, а не числові методи, не є великою.

#### Непружні та нелінійні явища

Хоча монографія стосується лише питань пружності і термопружності, для ілюстрації широти спектру проблематики включень коротко згадаємо лише деякі праці, що стосуються урахування не лише непружних ефектів і які потрапили у поле зору автора. Плоске в'язкопружне деформування пластин із включеннями розглянуте у працях С.О.Калоєрова і А.Б.Мироненка [367, 368]. Модель мікрополярного середовища для розв'язування кубоїдного включення Ешелбі використана у [1625]. Не залишилися поза увагою задачі для еластомірів з включеннями [1210].

Геометрично нелінійна постановка задачі для множинних включень та аналіз деяких результатів викладені у статті [1535].

Два останні десятиліття бурхливо розвивається механіка п'єзоелектричних матеріалів і, відповідно, аналіз впливу включень у таких матеріалах на механічні та електричні та магнітні поля. Найбільшого прогресу досягнуто у дослідженні впливу жорстких [1200] та пружних [1729, 1421, 1364, 1365] еліпсоїдальних (у частковому випадку сфероїд – еліпсоїд обертання) включень, які у частковому випадку трансформуються у сплющені еліптичні (кругові) включення. Більш загальні результати, які стосуються включень довільної форми у три- і двовимірних середовищах можна знайти у [1399].

Плоска задача для п'єзоелектричного включення Ешелбі (матеріал матриці із власними деформації) довільної форми вивчена С.Ру [1584]. Реальні еліптичні включення у п'єзоелектриках досліджувалися у [1218] (отвір або абсолютно жорстке включення), [1757] (співфокусна тріщина всередині включення), [1561] (враховуються також температурні чин-

ники та прямолінійні тріщини зовні включення, що нагріваються). Тріщину на межі поділу з круговим включенням досліджували у праці [1736].

Задачу для кругового циліндра в межах антиплоскої п'єзоелектрики вивчено у [1546].

Застосування до вивчення задач теорії включень довільного профілю і особливо тонкостінних рівнянь плоскої задачі теорії пружності і особливо узагальненого плоского напруженого стану не є простим та однозначним. Зрозуміло, що безпосередньо біля лінії контакту матеріалів у тонких пластинах виникатиме істотно тривимірний напружений стан, на що звертало увагу багато дослідників, див. напр. [1090]. Однак якщо зважити на експериментальні дослідження тривимірних ефектів поблизу вістря тріщини [1577], то така зона для тріщини не поширюється далі, як на відстань половини товщини пластинки. Для включень (навіть гострокінцевих і тонких) рівень концентрації напружень є набагато меншим у порівнянні із тріщиною, а тому зона тривимірності повинна бути ще меншою. В.В.Лобода [540] з використанням рівнянь тривимірної теорії пружності дослідив напружено-деформований стан півшару, підкріпленого стрингером. Звівши цю тривимірну задачу до послідовності двовимірних, було з'ясовано, що напруження в зоні підкріплення, обумовлені ефектами тривимірності полів співвимірні із дотичними напруженнями, які отримуються за використання двовимірних теорій.

## § 43. Асимптотичні методи

### 43.1. Загальні відомості

Під час розв'язування задач для тонкостінних включень і визначення концентрації напружень біля краю неоднорідності з урахуванням її форми ефективним є застосування методу спряження зовнішнього і внутрішнього асимптотичного розвинень [641] (див. теж автореферати дисертацій [642, 601, 277], монографії [643, 640, 1525, 374], препринт [360] та недавні огляди G.B.Sinclair [1643, 1644]. На с. 81–86 класичної праці Г.П.Черепанова [1079] теж можна ознайомитися із використанням асимптотичних методів до аналізу тонких включень.

Найкраще асимптотичні методи придатні для аналізу напруженого стану поблизу особливих точок (кутових чи з малим радіусом кривизни) на контурі включення та оцінки енергетичних параметрів [600, 609, 38, 553].

В асимптотичній теорії найчастіше застосовується схема Ван-Дайка [135, 644]. Основна ідея цієї схеми полягає у тому, що розв'язок шукають у вигляді двох асимптотичних розвинень за малим параметром, що характеризує область включення: зовнішнього та внутрішнього. Зовнішнє асимптотичне розвинення описує розв'язок задачі всюди за винятком деякого малого околу краю включення, а внутрішнє – всередині цього малого околу. Два розвинення узгоджуються між собою за допомогою принципу зшивання асимптотичних розвинень.

Зовнішнє асимптотичне розвинення записують у вигляді ряду за малим параметром і після підставлення його у диференціальні рівняння та умови ідеального чи неідеального контакту включення з матрицею отримують послідовність диференціальних рівнянь та крайових умов для визначення кожного члена розвинення. Внутрішнє розвинення будують подібним чином, але із попереднім введенням внутрішніх (пограншарових розв'язків, які мають сенс базових розв'язків) розвинень.



### 43.2. Зовнішнє асимптотичне розвинення

Для побудови зовнішнього розвинення можна абстрагуватися від точного опису геометрії, замінивши її певною поверхнею (лінією), на якій певні величини змінюються стрибком. Внутрішнє асимптотичне розвинення має вигляд пограншарового розв'язку. У теорії пружності ідею такого методу вперше висловив Г.П.Черепанов [1077] (див. теж § 1 розд. 2 [1078, 1085]), будуючи загальну теорію рівнянь рівноваги спряжених континуумів різної вимірності (неперервного середовища, армованого пружними тонкими стрижнями чи оболонками а також оболонки, армованих стрижнями). Отримане ним співвідношення (13) [1077] за суттю є зовнішнім розв'язком для тривимірного середовища, армованого оболонками. До цих досліджень можна долучити започатковані ще у 1963 р. праці Я.С.Підстригача [736], Ч.Возняка [1747, 1749, 1748], де вивчається динамічна модель тіла, армованого гнучкими мембранами та нитками.

### 43.3. Окремі класи задач

#### Осесиметричні просторові задачі

Дослідження осесиметричної задачі теорії пружності концентрації напружень поблизу вістря списового включення у пружному тілі [603] виявило, що розв'язок має дві складові, з яких одна має вигляд пограничного шару. В особливій точці включення не має сингулярності (є обмеженим), хоча це і не стосується випадку абсолютно жорсткого тіла (окремо розглянутий двовимірний випадок і там граничні переходи до порожнини і абсолютно жорсткого матеріалу неможливі). У аналогічній плоскій задачі [608] пізніше було з'ясовано, що час переходу до абсолютно жорсткого чи абсолютно податного включення пограншаровий доданок формує кореневу особливість. Руйнування біля списового включення, вставленого з натягом у порожнину, подібну до нього і дещо іншу, вивчене у [602]. Сингулярність напружень і руйнування біля тонкого включення кінчної форми вивчене Н.В.Мовчан та С.О.Назаровим [610, 611].

У роботі С.К.Канауна [370] (див. теж [372, 373]) метод спряження внутрішнього і зовнішнього асимптотичного розвинення поєднаний з методом ефективного включення Ешелбі для вивчення тонкостінного жорсткого і податного пружного включення у необмеженому анізотропному тривимірному середовищі. Отримані часткові випадки тріщини та абсолютно жорсткої тонкої плівки. Побудовані інтегральні рівняння стосовно функції, заданої на серединній поверхні включення та вказано асимптотики розв'язку цього рівняння і вид асимптотик напружень біля краю поверхневого тонкого включення. У праці Г.П.Черепанова [1208] поряд із аналізом інваріантних  $\Gamma$ -інтегралів подана теорія зміцнених композитів і з використанням згаданих вище внутрішнього та зовнішнього розкладів розглянуті випадки армування тривимірного тіла відносно жорсткою оболонкою та пружної оболонки при її армуванні відносно жорстким ребром. Розвиток цих результатів містить праця [653]. Тут пропонується наближений асимптотичний розв'язок задачі із використанням специфічного пограншару і наближена інженерна формула для оптимальної довжини волокна арматури. Застосування методики  $\Gamma$ -інтегрування дає такі ж результати. Використовується тут теж і числовий метод MSE, на основі результатів якого подається наближений аналітичний вираз, який різниться не більше, як на 2% від числових.

І.С.Зорін та С.О.Назаров [354] дослідили асимптотики тонкого тороїдного включення, перерізом якого є довільна двовимірна область.

Принагідно згадаємо тут працю J.D.Eshelby [1283], де вивчається задача про розтяг простору уздовж осі тонкого внутрішнього волокна. Тут зазначається аналогія такої задачі

до проблеми обтікання видовженого тіла рідиною чи збурення однорідного електричного поля у середовищі із циліндричним провідником (див. [524]). Запропоновано уточнені вирази розподілу напружень у волокні та його максимального значення, поправковий множник до згаданого розв'язку Г.П.Черепанова [1208].

### Осесиметричне кручення

Я.І.Кунець, О.П.Піддубняк [763] (див. теж [501]) послідовно застосували класичну схему Ван-Дайка до розв'язування задач осесиметричного кручення простору та півпростору з тонким включенням з вістрям скінченного кута розхилу. Заслугує уваги цікава й перспективна ідея [500] (аналогічна плоска задача розглянута у [598]), пов'язана з використанням асимптотичних методів, коли в тілі виділяють тонкий шар, частину якого складає включення сталої товщини (своєрідне кусково-однорідне включення). Такі включення в рамках одновимірної моделі вивчалися також і у [870].

### Викривлені стрижні у просторовому тілі

Розв'язок задачі про криволінійний стрижень у тривимірному однорідному середовищі подано у вигляді асимптотичних розвинень у ряди за малим параметром (відношення характерного розміру попереччя до довжини) і обчислення головних членів таких розвинень на основі інтегрального рівняння задачі для різних механічних полів отримано С.К.Канауном [371]. Виявлено, що головний член поля всередині включення є сумою повільно змінюваної складової та функції типу пограншару.

Безперечно, що до аналізу тонких пружних включень можна застосовувати результати праці В.Е.Єлісеєва [317], отримані під час вивчення рівноваги криволінійного стрижня, навантаженого на бічній поверхні та торцях.

### Плоскі задачі

Поряд із вищезгаданою працею [608] асимптотичні методи до аналізу напруженого стану біля вістря загостреного пружного, порожнинного і абсолютно жорсткого включень, з нульовим кутом розхилу, а також інших форм включень, скажімо  $h(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2}h_0(x)$ , клиновидного з малим кутом розхилу застосовували механіки ленінградської школи [607, 600, 604–606]. Безпосередньо біля вістря напруження були скінченними, а коренева особливість від пограншарової складової розв'язку з'являлася на певній дуже малій відстані від вістря.

В останній праці вивчалася загальніша проблема тонкого включення довільної змінюваної товщини (відношення товщини до довжини має порядок  $\varepsilon$ ), коли відношення модулів пружності матеріалів включення та матриці має той самий порядок  $\varepsilon$ . Подано асимптотичний аналіз за  $\varepsilon$  напружено-деформованого стану біля берегів включення. Вірогідно, що ця праця постала на основі опублікованої набагато раніше дуже часто тепер цитованої роботи D.Caillerie [1155] (повідомлення цих результатів у працях французької академії наук відбулося ще у 1978 р.). У цій публікації D.Caillerie розглядалося включення у вигляді плоскої циліндричної підобласті завтовшки  $2\varepsilon$  з залежними від  $\varepsilon$  пружними сталими, збільшення яких відбувається із прямуванням  $\varepsilon$  до нуля за законом  $\varepsilon^{-a}$ , де  $a > 0$ . Досліджені випадки, коли  $a < 1$ ,  $a = 1, 2, 3$ ,  $a > 3$ . Задача досліджувалася у варіаційній постановці, і були вивчені також випадки, коли межею області включення була дуга кривої чи точка. У роботі вивчені суто теоретичні питання єдиності розв'язків, збіжності процесів; якийсь числовий аналіз прикладів відсутній.

Асимптотичний аналіз згину криволінійних стрижнів у площині згину [795] можна використати і у плоскій теорії тонкостінних включень.

Огляд результатів на кінець 90-х років з плоских задач теорії тріщин, стрингерів, розклинювальних вставок та включень за наявності розшарування, отриманих із використанням головно асимптотичних методів зробили В.М.Александров та Б.И.Сметанін [26].

### **Взаємодія неоднорідностей у плоскій задачі**

У праці [1447] з використанням апарату узагальнених функцій та моделі пружного тіла з мікроструктурою побудовано наближені вирази для пружних полів та енергії пружної взаємодії між тріщиною та малим включенням довільної форми. У роботі [853] вивчається взаємодія тонкого жорсткого включення скінченної довжини змінюваної товщини та співвісною тріщиною, коли відстань між вістрями дефектів є малою ( $2\varepsilon$ ). Методом зшивання асимптотик визначено КІН біля найближчого вістря тріщини та коефіцієнт біля старшого члена асимптотики розв'язку в околі контуру включення.

### **Антиплоска задача**

Пояснення згадуваного вище явища різкої зміни структури напруженого стану в околі податного (м'якого) включення, коли його модуль пружності прямує до нуля, подане Я.І.Кунцем [502]. З використанням методу зрощування асимптотичних розвинень, методу сингулярних інтегральних рівнянь та механічних квадратур обґрунтована поява у граничному переході кореневої сингулярності. Багато із цих питань є близькі до результатів вивчення динамічних явищ у задачах тонких включень, опрацьованих цим автором [501].

З урахуванням відомих аналогій між задачами антиплоского деформування, теплопровідності та електростатики тут можна також згадати про задачі теплопровідності, які стосуються аналізу впливу тонкого безмежного прошарку на температуру в неоднорідному середовищі [892], стаціонарного та нестаціонарного впливу прошарку з високою теплопровідністю [1130, 1131], вивчення періодичної задачі для прошарку з дуже високою чи дуже малою теплопровідністю [17\*]; про задачі електростатики для включення із великою діелектричною сталою [890, 891].

## **§ 44. Експериментальні методи**

Дослідне визначення поля і концентрації напружень біля тонкостінних і волокнистих включень (переважно методами фотопружності) є дуже складним з огляду на тривимірність поля, високих градієнтів напружень, відсутності чіткої поверхні поділу матеріалів та складності фотопружного аналізу у безпосередній близькості до неї, складності у забезпеченні ідеального контакту (адгезії) включення з матрицею, неможливості позбутися залишкових напружень після виготовлення моделі тощо.

Праці D.M.Schuster, E.Scala [1597], W.R.Tyson і G.J.Davies [1716] є, певно, першими серйозними дослідженнями двовимірних моделей, а праці I.M.Дюреллі та його співробітників [1260, 1549, 1261] одними з перших вивчали тривимірне поле напружень в тілах з волокнистими включеннями. У [1679] досліджена концентрація напружень на поодинокому включенні-волокні трикутного, прямокутного і півкруглого попереччя у залежності від його відносної жорсткості та довжини. Тензометрування застосовувалося до аналізу внутрішніх напружень у праці [1298].

В оглядових працях [1099, 1126, 308, 506] досить повно охарактеризований стан опрацювання цього питання станом на 1971 рік, коли були отримані, зрештою, визначальні ре-

зультати з цього питання. Вкажемо теж на оглядові праці [1367, 1502] та важливі публікації [1484, 1485].

#### 44.1. Загальний розподіл напружень

Зазначимо, що у більшості дослідів включення мали жорсткість набагато більшу від матриці і їх можна наближено вважати абсолютно жорсткими. Відзначається, що біля кінця волокна є істотна концентрація дотичних напружень, тут же виникають великі поперечні нормальні напруження. Більшість експериментальних досліджень навіть для волокнистих композитів здійснена на плоских пластинчастих зразках, у які вклеєне тонке відносно жорстке (практично абсолютно жорстке), або лише у декілька разів жорсткіше включення сталої товщини, кінці якого мають ту чи іншу форму.

У згадуваній праці [1716] розглядалося прямокутне алюмінієве включення у матриці із епоксидної смоли за розтягу уздовж включення напруженням  $\sigma$ . Найбільше дотичне напруження біля вістря включення, що спостерігалось, перевищувало значення  $2,5\sigma$ . Вже на відстані двох діаметрів (товщин) включення експериментальні дані збігалися із отриманими теоретичними даними. Були побудовані і експериментальні графіки дотичних та максимальних дотичних напружень на межі поділу матеріалів. M.Fujiwara [1296] з'ясував розподіли цих же величин на поверхні включення для різної орієнтації включення щодо напрямку прикладених зусиль. D.R.Jenkins [1386] напевно вперше застосував у фотопружних дослідженнях напружень поблизу скляного стрижня у поліефірній смоли світло газового лазера.

N.C.Remedios, W.G.Wood [1567] здійснили комплексне аналітико-числово-експериментальне дослідження поля напружень для двох комбінацій матеріалів стрижня і матриці. Математична модель включення припускала лінійну залежність зміни зусиль уздовж межі контакту і отримане рівняння розв'язувалося методом дискретизації у припущенні сталості зусиль на кожному елементі розбиття. Відзначений хороший збіг полів напружень, розрахованих і зафіксованих усіма методами. Подібні картини напружень були отримані тими ж дослідними, аналітичними і числовими методами у праці [1217], хоча не враховувалося зчеплення торців із матрицею.

У [1313] було досліджено зразки з епоксидної смоли, у які вклеювалися або вставлялися без тертя (змащені) відрізки платинороднієвого дроту. Напруження у матриці визначалися методами фотопружності, а у волокні – рентгенівськими. Виявлено, що реальна ефективна довжина волокна (довжина передачі навантаження) добре збігається із розрахованою стандартними методами, однак максимальні напруження у волокні різнилися від теоретично розрахованих.

A.Feinhold та ін. [1288] експериментально дослідили розподіл напружень у поліуретанових пластинках скінченної ширини із прямокутними полістироловими включеннями (не тонкими) у випадках, коли осі симетрії складових паралельні і нахилені під кутом  $\pi/4$ . Подано графіки головних напружень у двох характерних поперечних перерізах пластин. Подібне дослідження для практично абсолютно жорсткого прямокутного включення (відношення модулів пружності має третій порядок) здійснене у [1511]. Вивчено вплив трьох різних розмірів вставок та кутів їх орієнтації на коефіцієнт концентрації напружень. Результати дослідів підтвердили висновки, отримані за допомогою застосування МСЕ [1510].

J.Javornicky [1384] для аналізу характеристик викривлених волокон у композитах застосував методи фотопружності стосовно плоских моделей з різним розташуванням включень. Особлива увага приділена визначенню дотичних напружень на межі поділу матеріалів. Для випадку ортогональних рядів включень отримані траєкторії максимальних дотичних напружень.

#### 44.2. Аналіз впливу торців

Можливо першими до аналізу впливу форми торця тонкого включення-волокна на розподіл напружень поблизу нього звернулися D.M.Schuster і E.Scala (1965) [1597]. Застосувавши техніку мікрофотопружного експерименту, було виявлене поле напружень поблизу кінця ізольованого сапфірового ( $\alpha - \text{Al}_2\text{O}_3$ ) вусу. Для прямокутного вусу дослідні дані практично збігалися із даними Тайсона – Дейвіса [1716] про рівень максимальних дотичних напружень біля вістря приблизно  $2,5\sigma$ . А ось у випадку загостреного торця ці напруження виявилися набагато меншими.

T.F.MacLaughlin [1484, 28\*] у 1966, 1968 рр. докладно вивчили вплив форми кінця сталюого включення у епоксидній матриці ( $E_f/E_m \sim 3000$  у першій і  $E_f/E_m \sim 40$  у другій праці) на рівень концентрації напружень (закруглений радіусом  $0,15R$ , загострений з кутом при вершині  $\pi/6$ , дуже сильно загострений, прямокутний) у тому випадку, коли волокно витягується силою із матриці. Побудовано графіки  $\tau_{\max}$ . У цьому дослідженні (на відміну від праці [1597], де зразок містив внутрішнє включення і біля вістря із загостреним торцем було отримано найменшу концентрацію напружень) отримано найнижчу концентрацію напружень біля прямокутного кінця включення. Змодельовано у праці також розрив волокна за допомогою формування зразків з двома волокнами, кінці яких є на певній не заповненій матеріалом відстані. Виявилось, що найбільша концентрація дотичних напружень  $\tau_{\max}/\tau_{\text{сер}}$  сягала 13 (більше на  $\sim 50\%$  напруження біля ізольованого, охопленого матеріалом торця), якщо кінці волокон були на відстані, не більшій від діаметра волокна. Вивчені ефекти різної об'ємної частки волокон (0,16 і 0,45), ексцентриситету (неспіввісності) сусідніх волокон, перекривання (проекції неспіввісних волокон одне на друге ненульові).

I.M.Allison та L.C.Hollaway [1141, 1142] використали такого ж типу зразок (матриця – аральдит СТ200, волокно – дюралюміній або сталь), як у Тайсона – Дейвіса [1716], і розтяг напруженням  $\sigma$ . У [1141] на відміну від [1716] було отримано рівень концентрації вищим біля закруглених торців, аніж біля прямих (для закругленого  $\tau_{\max}/\sigma = 4,2$ ,  $\tau_{xy}^{\max}/\sigma = 1,93$ ,  $\sigma_1^{\max}/\sigma = 7$ ; для прямокутного –  $\tau_{\max}/\sigma = 2,3$ ,  $\tau_{xy}^{\max}/\sigma = 2$ ,  $\sigma_1^{\max}/\sigma = 4$ ). Тут  $\sigma_1$  – найбільше головне напруження. З'ясовано, що  $\tau_{xy} = 0$  на відстані  $20$  діаметрів  $d$  від торця, а отже ефективна довжина включення дорівнює  $40d$ . Обчислене за дотичними напруженнями максимальне напруження розтягу у волокні дорівнювало  $172\sigma$  для закругленого і  $85\sigma$  для прямого. У праці [1142] збільшено кількість досліджуваних форм торця і здійснено зіставлення отриманих експериментальних результатів із розрахунками на комп'ютері.

M.J.Iremonger, W.G.Wood [1375] (фотопружне- та МСЕ-дослідження) зазначили, що через зв'язаний із матрицею торець включення передається значна кількість навантаження (це узгоджується із висновками МСЕ-аналізу [1186, 1543]). Виявлено теж, що частка навантаження, яка передається через торець волокна збільшується зі зменшенням проміжку між кінцями сусідніх волокон (такий же висновок вже згадуваних праць [1142, 1543]). Загалом досліджені залежності дотичних і нормальних напружень на поверхнях поділу матеріалів, а також зусиль всередині включення, від об'ємної частки волокон, а також від відстані між кінцями сусідніх волокон. Існування чи відсутність матеріалу між кінцями волокон дуже сильно впливає на величину концентрації напружень. За появи порожнини між кінцями волокон, що відбувається внаслідок обривання волокон, дотичні напруження зростають на порядок при відстані між торцями  $0,2d$ . Виявлено, що пластичне течіння починається біля кутів включення і поширюється уздовж ширини та довжини включення до його центральної

частини. Воно зменшує концентрацію напружень і збільшує ефективну довжину включення. При цьому біля включення постають нормальні напруження стиску.

Вплив форми торця включення, орієнтації волокон та об'ємної частки наповнення у статичному випадку досліджує також праця [1554], а у динамічному – [1553].

### 44.3. Руйнування волокон

Праця [319] із використанням методу муарових смуг досліджувала деформування і руйнування м'яких (припій ПОС-30) нахилених до вільної поверхні тонких прошарків за стиску в умовах плоскої деформації. Виявлені пластично деформовані та «жорсткі» зони.

О. Tamate, Н. Sekine і Y. Ozawa [1674] у 1982 р. в ролі критерію зародження руйнування біля тонких включень вибрали умову, що руйнування визначається граничним значенням нормального напруження  $\sigma_{nn}$  біля вістря включення, а кут руху  $\varphi$  – умовою  $\partial\sigma_{nn}/\partial\varphi = 0$ . Для теоретичного аналізу використано асимптотичні формули для поля напружень біля абсолютно жорсткого включення, у яких на додаток до однорідного поля напружень на нескінченності додатково враховано й температурне розширення-зсідання включення. Побудовано формули для визначення критичного навантаження і напряму розвитку тріщини. Фотопружні експерименти на плоских зразках здійснено для тонких включень п'яти різних скінченних довжин з відносною жорсткістю 73,8. В експериментах отримано кут поширення тріщини за поздовжнього розтягу  $90,3^\circ$ . У 1987 р. С.Ю.Попіна та Г.Т.Сулим [796] запропонували і докладно дослідили критерій зародження руйнування біля тонкого пружного включення.

Праця Р.В. Hughes, N.I. Fattuhi [1366] стосується визначення міцності попередньо розтягнутих сталевих (різних марок) волокон у розтягуваних матрицях із вапняного та цементного розчинів. Виявлена лінійна залежність між зусиллям розтягу та логарифмом довжини волокна, а також зростання ефективної міцності межі контакту зі збільшенням довжини заглиблення волокон та їх об'ємної частки.

Розподіл напружень у матриці поблизу розірваного волокна на двовимірній моделі, яка моделювала об'ємну частку волокон 0,714 з відносною жорсткістю  $E_f/E_m = 55$  поляризаційно-оптичним методом дослідили Т. F. MacLaughlin, M. R. Barker [1485]. Для максимальних дотичних напружень було отримане значення коефіцієнта концентрації напружень 12, а для нормальних напружень – 9. Подібне дослідження виконали раніше M. J. Iremonger, W. G. Wood [1377], докладно дослідивши вплив величини незаповненого проміжку між двома частинами одного розірваного волокна. В обох згаданих вище працях отримані дослідні дані порівнюються із власними даними числових досліджень із використанням МСЕ.

### 44.4. Визначення КІН

Е.Е. Gdoutos [1309] переніс методику фотопружного визначення КІН біля вістря тріщини на випадок визначення КІН біля тонкого абсолютно жорсткого волокна з використанням поляризаційно-оптичного методу. Вивчені загальні властивості поля ізохром, вплив коефіцієнта Пуассона матеріалу пластинки. Запропоновано методику безпосереднього експериментального визначення КІН.

У працях Ю.І. Сорокатога та ін. [898, 900, 899, 901] опрацьована методика визначення узагальнених КІН біля вістря тонкого пружного включення, визначено поля напружень у матриці та побудована залежність КІН від форми кінця включення. У публікаціях [1689, 1690] метод каустик визначення КІН поширений на неоднорідності загальної природи. 1991 р. було опубліковане теоретико-експериментальне дослідження [321], що стосувалася визначення методом фотопружності поля напружень поблизу торця тонкого включення прямокутного

профілю (плоский напружений стан) для того, щоб поміж чотирьох способів обчислення напружень на торці включення вибрати оптимальний.

#### 44.5. Склейка матеріалів

Оскільки шар клею є тонким, то методи дослідження клейових з'єднань та отримані внаслідок цього результати дають багато корисної інформації для дослідників тонких включень, особливо, якщо шар клею містить тонкі дефекти. Якщо ж склеювання відбувається у стик, то шар клею є звичайним включенням у вигляді проміжного шару. Скажімо, у роботі Ichiro Tuzi [1714] з використанням лазерної техніки досліджено розтяг двох прямокутних пластин завширшки 30 мм, з'єднаних між собою шаром м'якшого чи жорсткішого за пластини клею завтовшки 2,5; 5; 10; 20 і 30 мм так, щоб загальна довжина зразка дорівнювала 140 мм. Вимірювалися на осі зразка і на межі поділу матеріалів. На цій межі напруження змінюються нерівномірно, причому концентрація напружень спостерігалася або на краях, або в середині шва. У шарах м'якого клею напруження дещо зменшувалися (у жорсткого – збільшувалися) при зменшенні товщини шару клею.

У праці L.W.Zachary, T.R.Rogge [1774] методами фотопружності та МСЕ дослідили з'єднання унапусток двох металевих пластин. Отримано графіки розподілу у шарі клею дотичних напружень за наявності у ньому паралельно чи перпендикулярно до напрямку дії зсувних напружень тріщини або тонкого жорсткого включення. Виявлено, що максимальні дотичні напруження за існування дефекту у 4–5 разів більші, аніж за їх відсутності, причому паралельна тріщина є більш небезпечною від перпендикулярної.

Автори праці [58] поляризаційно-оптичним методом на плоских моделях виявили, що у з'єднаннях унапусток існування непроклею поле напружень змінює не дуже сильно, у той час, як для з'єднань типу накладка непроклеї завдовжки від нуля до половини довжини накладки практично не змінює рівня максимальних дотичних напружень. Автори не аналізують причини цього явища. Видається, що так само, як і у теорії композитів, тут слід ввести поняття ефективної ширини накладки. Напевно, вибрана для експериментів ширина накладки була набагато більшою від ефективної.

### § 45. Прямі числові методи

Проблема дослідження напруженого стану елементів з тонкими абсолютно жорсткими деформівними, зокрема, пружними включеннями числовими методами залишилася практично поза увагою дослідників. Після появи методу скінченних елементів (МСЕ) його переваги для розв'язування задач теорії пружності над сітковими стали очевидними. Класичним прикладом застосування МСЕ у механіці композиційних матеріалів (волокно скінченної довжини у тривимірному тілі та лінійне у двовимірному) є [1186]. Багато з передбачених МСЕ-результатів підтвердилися експериментами [1367, 1485]. Те ж стосується МСЕ-аналізу [1510, 1543, 1053]. Тому застосування МСЕ до задач теорії тонкостінних включень можна вважати ефективним та надійним способом математичного моделювання явища.

R.M.Barker, T.F.MacLaughlin [1166] на плоскій і тривимірній моделях регулярної структури розірваних волокон з'ясовували коефіцієнти концентрації напружень у волокні та матриці залежно від трьох параметрів: об'ємної частки волокон (0,45 – два волокна цілі і одне розірване (для плоского випадку)); 0,74 – 4 волокна цілі і одне розірване (для плоского випадку)); заповненої матеріалом відстані між розірваними волокнами ( $t = 0,1d - 20d$ ) та відношення модулів пружності складових ( $k \equiv E_f / E_m = 1,4 \dots 200$ ) і порівнювали отримані результати із своїми експериментальними даними. Виявилось, що коефіцієнти концентрації

напружень у волокні малочутливі до об'ємної частки волокон; зі збільшенням відношення модуля пружності волокна до матриці порядку 50 він (ККН) сягає значення приблизно 1,5 і подальше збільшення жорсткості волокна ККН практично не збільшується. Максимальні напруження у матриці набагато більші, ніж у волокнах (збільшуються зі зменшенням  $t$ ), і зі збільшенням відносної жорсткості волокон різко зростають – вже при помірних значеннях навантажень вони можуть сягнути межі текучості.

Процеси руйнування біля включення вивчалися також у роботі G.G.Trantina, M.Varishpolsky [1708] з використанням двовимірної моделі пружно-пластичного деформування за деформаційною теорією. Поряд із порожнинами сферичної та еліптичної форми було розглянуто пружні включення, зв'язані та не зв'язані із матрицею. Для моделювання поверхні включень першого типу було запропоновано спеціальні стрижневі елементи, які мають велику жорсткість за стиску та малу за розтягу. Розв'язок задачі для зв'язаного включення виявив, що концентрація напружень біля нього мала для зародження тріщини в основному матеріалі, а тому для аналізу руйнування було прийнято, що спочатку крихто руйнується саме включення, а вже потім утворена тріщина продовжує підростати у матриці. Побудовано тарувальні залежності умовного КІН для тріщин, які ростуть із дефектів всіх типів.

Дослідження [362] впливу орієнтації прямолінійного тонкого включення (три значення кутів (0, 30 і 60 градусів), модуль пружності удвічі більший від модуля матриці, плоский напружений стан) на рівень нормальних напружень на його поверхні виявило, що ця неоднорідність розподілу напружень різниться не більше, як на 4–10% від середнього значення для цієї орієнтації (саме це середнє значення від орієнтації залежить дуже сильно). Ця праця була виконана для можливості уточнення характеристик нових давачів напружень, які розробляли у НДІ будівництва Естонії. У тому 1983 р. Г.Т.Сулим та І.В.Рокач [998] дослідили розподіл дотичних та нормальних напружень на поверхні пружного та абсолютно жорсткого включень (у тому числі і з використанням спеціальної розрахункової моделі для абсолютно жорсткого включення).

Деякі праці поєднували теоретичні, експериментальні методи із МСЕ-аналізом напружено-деформованого стану. N.C.Remedios, W.G.Wood [1567] у своїй багатоплановій праці у частині, що стосується використання МСЕ обчислили розподіли дотичних напружень на межі поділу, нормальних напружень розтягу у стрижні і також виявили, що в діапазоні відносної жорсткості включення 2...1000 зміна коефіцієнта Пуассона в проміжку 0,2...0,4 мало впливає на зміну полів напружень. Подібні картини напружень були отримані і у працях H.D.Conway та ін. [1217, 1230], де враховується взаємодія включень-неоднорідностей скінченної довжини, укладених з так званим перекриттям кінців волокон (кінці волокон одного ряду проектується на волокна у сусідніх рядах). У цих задачах не враховувалося зчеплення торців із матрицею.

Праці [1377, 1375] теж мали комплексний характер. Інше дослідження тих же авторів [1376] з використанням МСЕ стосувалося вивчення двовимірної моделі поля напружень в околі розірваних волокон у припущенні пружності волокон та пружно-пластичності матриці. Вивчено дві ситуації: розірване волокно міститься між неперервними волокнами; сусіднє волокно теж розірване, але місце розриву зсунуте в осьовому напрямі на відстань, меншу від половини ефективної довжини включення. Підтверджено, що, як і у попередній праці, в околі порушення суцільності волокна нормальні напруження на поверхні цього, а також і сусідніх волокон, може сягнути значних величин. Вони обумовлені локальним стиском вкрай напруженої області матриці поблизу кінця короткого волокна. Зі зменшенням незаповненої зони вони можуть дещо зменшитися, а ось за пластичного течіння – стати помітно вищими. Останнє спричинене, напевно, збільшенням стискуваності матеріалу матриці на початковій стадії пластичного течіння. Ці нормальні напруження для розіраного волокна є стискуваль-



ними, а для сусідніх – розтягувальними. В цілому це обтискання розірваного волокна є позитивним, оскільки покращує передачу напружень зсуву внаслідок сил тертя навіть у випадку масштабного руйнування зчеплення волокна із матрицею.

Підтверджено і те, що пластичне деформування у матриці зароджується біля кутових точок і просувається із збільшенням навантаження уздовж волокна. Якщо розрив сусіднього волокна розташований на відстані, меншій від половини ефективної довжини, то пластичні зони сусідніх розірваних волокон зливаються, утворюючи нахилену до осі волокна область, яка може стати джерелом подальшого руйнування композиту. Праця містить дуже багато цікавого ілюстративного матеріалу.

Пластичне течіння армованої волокнами бору плоскої алюмінієвої пластини з урахуванням величини навантаження, об'ємної частки волокон, втрати зчеплення торців волокон із матеріалом матриці аналізували W.Fengels, A.Troost [1290]. Пружно-пластичне деформування із застосуванням до втомного руйнування розглянуте у праці [1337, 1453].

Для дослідження впливу поверхневого шару на межі контакту волокна із матрицею B.D.Agarwal, R.K.Bansal [1139] ввели проміжний шар скінченної товщини (зі своїм модулем пружності), яким моделюється поверхня поділу. Поза цим шаром розташована матриця із усередненими властивостями. Вплив інших волокон враховується крайовими умовами. Задача розв'язується за допомогою осесиметричних скінченних елементів. Виявлено, що пружні властивості композиту в цілому мало залежать від властивостей прошарку, однак вони мають великий вплив на передавання зусиль до волокон та на міцність композиту – зменшення модуля пружності прошарку зменшує міцність композиту.

Моделі нелінійної контактної взаємодії матриці із включенням розглянув H.Schäfer [1591] стосовно взаємодії сталених стрижнів арматури із бетоном. В основу покладається лінійний чи нелінійний зв'язок між дотичними й нормальними напруженнями на межі контакту (отриманий експериментально чи із теоретичних міркувань), а сама область контакту (як проміжний шар) розбивається на трикутні елементи (для одновимірних задач, зокрема осесиметричних, – на відрізки), де переміщення апроксимуються лінійними чи квадратичними функціями. Для прикладу розглянуто розтяг стрижня, охопленого круговим бетонним циліндром.

Вивчено вплив двох паралельних тонких підкріплень-включень на КІН тріщини, що розташована між ними перпендикулярно [599]. Ця задача є модельною для аналізу розвитку внутрішніх тріщин у шарових чи волокнистих однонапрямлених композитах.

Вплив міри анізотропії волокон, їх об'ємної частки та характеру укладання (квадратна і гексагональна ґратки) на поле мікронапружень та ефективні характеристики однонапрявленого композиту з використанням двовимірної і тривимірної розрахункових схем МСЕ дослідили Р.Б.Рікардс та А.К.Чате [848]. Числові результати зіставлено з експериментальними даними.

Т.Абе [1136] з використанням запропонованого ним методу нормованих приростів, а також МСЕ досліджує плоску та осесиметричну задачу для тіла із двоперіодичними системами еліптичних та відповідно еліпсоїдальних включень. Праця [1562] містить відносно невеликий огляд результатів застосування МСЕ до аналізу впливу включень різної форми.

Деякі роботи стосуються застосування МСЕ до визначення напруженого стану у конструктивних елементах зі зварними швами, модельованими включеннями: [318] (підкріплена ребрами жорсткості пластина з поперечним зварним швом, який зсідається у поперечному напрямі; порівняння з даними експерименту); [487] – дискусія з приводу застосовності МСЕ до розв'язування задачі про прямокутний поперечний зварний шов у смузі; [1420] (огляд дослідницьких робіт Інженерної Вищої Школи та Центрального Інституту Стандартів в області застосування МСЕ для оцінки міцності зварних з'єднань).

Для застосування МСЕ у розрахунку тіл із тонкими тріщинами дуже придасться досвід його використання у механіці руйнування, опрацьований у численних працях, наприклад [1514, 1624].

Відносно свіжий (на кінець минулого століття) огляд застосувань МСЕ до аналізу стрічкових конструкцій можна знайти у [1483]. Включення кругової та еліптичної форми досліджене у праці [1710]. Складна нестационарна задача дифузійно-дисперсійного перенесення тепла і маси у матриці та адвективного перенесення криволінійними каналами (включеннями) розв'язана за допомогою МСЕ [511].

В останні десятиліття потужного розвитку набув метод граничних елементів, придатний для розв'язування тих класів матеріалів (а ще краще і задач), для яких побудовані функції Гріна. Його використання у лінійній теорії пружності для аналізу впливу пружних включень стає щораз ширшим [1458, 1473].

## § 46. Методи теорії тонкостінних включень

У більшості випадків отримання розв'язку для включення досить загальної форми є досить складним і вимагає застосування потужних обчислювальних засобів. Тому вигідним є спосіб аналізу тонкостінних включень, що полягає у виключенні із розгляду самого включення і заміни його впливу умовами неідеального контакту берегів матриці уздовж середньої поверхні чи лінії неоднорідності, яка заступає включення. Таку думку стосовно питань теплопровідності висловив у 1963 р. Я.С.Підстригач [738, 775], побудувавши відповідні умови взаємодії. Фактично такий спосіб еквівалентний побудові зовнішнього асимптотичного розв'язку задачі і його вслід за Г.П.Черепановим [1077] можна назвати принципом спряження континуумів різної вимірності. Подібна думка висловлена також у [669, 1311]. На основі поєднання принципів спряження та умов взаємодії (про це нижче) постав метод функцій стрибка, розвинутий автором цієї книги.

### 46.1. Стрибкові зміни полів у механіці деформівного твердого тіла

Стрибкова зміна полів тензора напружень, вектора переміщень, температури, теплових потоків та інших величин у суцільному середовищі пов'язана із зміною властивостей тіла, режимів навантаження і роботи, втратою суцільності, фазовими перетвореннями тощо. Природа натуральних стрибків, які можуть виникнути у суцільному середовищі (в однорідному середовищі стрибків бути не може), обговорена у підручниках з теорії пластичності [408, 111]. У кусково-однорідному пружному середовищі окремі компоненти тензора напружень можуть мати стрибки; у ідеально пружно-пластичному стрибки можуть мати вже дотичні складові векторів переміщення тощо. Питання побудови тензорів-операторів, які дають можливість обчислити закономірний стрибок тензора напружень чи деформацій за відомими значеннями цих тензорів з одного боку поверхні поділу пружних анізотропних матеріалів вирішив R.Hill [1350].

Нижче конспективно звернемо увагу на деякі праці, де обговорюються причини виникнення стрибків та де розв'язки зі стрибковою зміною використовуються для моделювання певних явищ та процесів.

### Загальні питання

У праці [1329] систематизовано усі головні рівняння механіки суцільного середовища стосовно деформівних твердих тіл і докладно аналізуються умови, які виникають на стрибках польових величин. С.М.Dafemos [1233] аналізує випадок, коли розв'язок одновимірної задачі для пружного тіла без урахування дії масових сил порівнюється із розв'язком для матеріалу із пам'яттю форми, у якому можуть виникнути оборотні (які не збігаються за фазою з

напруженнями) деформації. У зв'язку із цим аналізується поява нестійких слабких розв'язків, які породжують стрибки упродовж скінченного проміжку часу.

### Просторові задачі

**Ізотропія. Стрибки переміщень.** Стрибки переміщень виникають на дислокаціях і самі дислокації можуть служити зручним апаратом для моделювання тріщин у суцільних тілах. Ця ідея широко обговорюється у монографії. У зв'язку із цим нагадаємо лише працю [624], де знову повертаються до ідеї ввести стрибок переміщень у точці простору, а потім застосувати формулу згортки (здійснити інтегрування) уздовж поверхні, для забезпечення на ній заданого стрибка. За допомогою цього (не нового) підходу досліджена особливість біля клиновидного жорсткого включення. Б.М.Зінов'єв [335] виявив, що розподілені уздовж певної лінії чи поверхні дипольні силові навантаження викликають там стрибки переміщень. Однак разом із цим вони спричиняють і стрибки напружень, а тому їх слід компенсувати розподіленими зосередженими силами. Отримані формули для обчислення напружень у просторі внаслідок дії диполів, розподілених уздовж криволінійного відрізка. У 1983 р. були опубліковані отримані методом потенціалів результати А.М.Рвачова [844] стосовно визначення поля напружень у ізотропному середовищі з заданим розривом переміщень на довільній поверхні. Поле напружень обчислювалося з використанням дислокацій Сомільяно та розподілених по поверхні зосереджених сил та диполів. Зазначалося, що отримані формули можна використати для розв'язування крайових задач із заданими непружними деформаціями (фактично тонкими дефектами) на поверхні. Перед тим ці ідеї були вже використані Б.М.Зінов'євим та ін.

Б.М.Зінов'єв у праці [331] вивчив моделювання стрибка переміщень у пластинці (по відрізку прямої) та у просторі (по фрагменту плоскої поверхні) за допомогою розподілених моментних та безмоментних диполів.

Моделювання тріщин у просторовому тілі за допомогою розподілених сил за диполів (назване авторами *методом масових сил* – тріщина моделюється розподіленими у суцільному тілі масовими силами), використане також і у праці М.Ісиди, Н. Тсуро, Н.Ногусі [1380].

D.W.Scott і D.L.H.K.Lee [1598] запропонували запропонований ще у 1976 р. С.Краучем [1232, 468] *метод стрибків зміщень* стосовно двовимірних тіл (ті ж сили і силові диполі) застосовувати у схемі МГЕ для простих тривимірних тіл. Згідно із означенням цей метод «є різновидом МГР, у якому джерелом переміщень, деформацій та напружень у досліджуваному тілі є відповідним чином побудований розподіл скінченних сегментів з розривами переміщень на тій частині межі тіла, де з крайових умов задачі задані переміщення чи напруження.» Y.Mizuta і H.K.Lee [1513] пропонують запропонований ще у 1976 р. С.Краучем [1232, 468] метод стрибків зміщень стосовно двовимірних тіл застосовувати у схемі МГЕ для тривимірних тіл (з використанням тих же виразів).

G.M.Vörös [1725] сформулював варіаційну задачу для визначення переміщень у пружному середовищі з поверхнею розриву переміщень. Стверджується, що цей функціонал можна використати в задачах для пружних включень і дислокацій у статичних і динамічних випадках.

Праця H.N.G.Wadley, C.B.Scruby [1726] стосується визначення переміщень на поверхні компактного зразка внаслідок раптової появи у ньому тріщин нормального розриву. Таку тріщину автори пропонували моделювати розподіленими уздовж поверхні трійками ортогональних силових диполів (центрів розширення). Реалізація ідеї здійснюється на основі розв'язку динамічної задачі для диполя у пружному півпросторі.

Для розв'язування задачі про пружну взаємодію двох безмежних смуг, які розтягуються та згинаються на нескінченності відповідно зосередженими силами й моментами (різними для кожної смуги) та є з'єднані між собою тонким проміжком клею скінченної довжини,

L.M.Keer [1410] (див. теж [1411]) припустив, що на берегах шару клею стрибок можуть мати лише переміщення, причому стрибок поздовжніх переміщень є лінійною функцією координати (похідна стрибка переміщень – стала), а стрибок поперечних переміщень за дії сил дорівнює нулю, а при дії моментів – пропорційний квадрату поздовжньої координати.

**Стрибки напружень.** Формування стрибків напружень у просторі та півпросторі від розподілених зосереджених сил та можливості заміни таких неперервних розподілів у методі компенсувальних навантажень системою дискретно розподілених статично еквівалентних систем сил на прикладі розподілу по круговій циліндричній поверхні вивчено у праці [313].

**Стрибки переміщень і напружень.** Стрибки напружень і переміщень розглянуті у праці E.Kossecka [1433] (1971), де побудовано (один із перших) зв'язок між стрибками переміщень та напружень внаслідок розподілених по плоскій поверхні моментних і безмоментних диполів (double forces). За допомогою цих розв'язків будується фундаментальний розв'язок для центру тиску, як суперпозиції трьох взаємно перпендикулярних безмоментних диполів. Розглянуто три приклади – формування поверхневої дислокації і теорії тріщин.

Приблизно у цей же час розпочалися дослідження Б.М.Зінов'єва та ін. [333, 14, 343, 339, 334] по застосуванню моделювання тонких плоских неоднорідностей та просторових стрижнів за допомогою розподілених сил і силових диполів – *метод компенсувальних навантажень*. Плоска арматура (стрічка) і просторові стрижні й плівки вважалися наділеними скінченною жорсткістю на розтяг, зсув та згин. А.Г.Власов [153] використав такий підхід для вивчення низки плоских і просторових задач теорії тріщин. Досліджена можливість використання у схемі методу компенсувальних навантажень центрів розширення та обертання.

Треба зазначити, що у 1970–72 рр. Н.Д.Conway, С.І.Chang [1229], С.І.Chang, Н.Д.Conway, Т.С.Weaver [1188] (відповідно у плоскій та просторовій задачах) також використали моделювання пружних лінійних включень, що сприймають лише зусилля розтягустиску, дискретно розподіленими уздовж лінії в суцільному однорідному тілі, яка збігається із віссю включення, зосередженими силами. Така математична модель була застосована до обчислення ефективних характеристик відповідних регулярно армованих композитів.

Цікаву ідею (модель подвійного включення) запропонував Н.Stang [1654] для опису підростання мікротріщин у волокнистому композиті. Вважається, що під час перетину мікротріщиною волокна воно відшаровується від матриці ще на деякій відстані від площини тріщини. Внаслідок цього стрибки напружень і переміщень ніби розвиваються по просторовій області (приблизно еліпсоїду, названому подвійним включенням). Запропоновано правило перенесення класичного розв'язку для еліпсоїдальної порожнини на мікрорівень зруйнованого волокна.

Особливості формулювання придатних для застосування у схемах прямих числових методів варіаційних принципів для задач пружної рівноваги тіл, що мають на деяких внутрішніх лініях чи поверхнях задані стрибки напружень і переміщень, розглянуто у [849]. Розглянуто приклад розрахунку МСЕ плоскої задачі для смуги із внутрішньою лінією заданих стрибків. Іншу подібну задачу, коли на поверхні сферичного включення в безмежному середовищі задані стрибки векторів напруження і переміщень, розв'язав І.І.Цагарелі [1071]. Розв'язок подано у вигляді абсолютно рівномірно збіжних рядів.

**Анізотропія. Стрибки напружень.** Формування стрибків напружень у трансверсально-ізотропному просторі [336] та лінійно-анізотропному [338] півпросторі від розподілених уздовж гладких поверхонь зосереджених сил та можливості заміни таких неперервних розподілів у методі компенсувальних навантажень системою дискретно розподілених статично еквівалентних систем сил вивчили Б.М.Зінов'єв та Т.Ф.Карманова.

**Стрибки переміщень і напружень.** Метод компенсувальних навантажень Александрова – Зінов'єва було застосовано за участю Т.Ф.Карманової [338, 340] до просторових задач анізотропних тіл із включеннями. Стрибки напружень і переміщень у прямолінійно анізот-

ропному просторі для побудови розв'язків для побудови теорії тонких включень ввів В.П.Силованюк [881, 882]. Тут використовується подання напружень і переміщень через три гармонічні функції, використовує їх подання через певні невідомі функції за допомогою інтегрального розвинення Фур'є і з використанням оберненого перетворення Фур'є отримує залежність полів від стрибків. Використання крайових умов дає систему сингулярних інтегральних рівнянь.

### Плоскі задачі

**Ізотропія. Стрибки переміщень.** Вище згадувалося, що у 1976 р. С.Крауч [1232, 468] запропонував різновид МГІ – метод стрибків зміщень – для аналізу напружено-деформованого стану у плоскій задачі теорії пружності із використанням фундаментальних розв'язків для зосередженої сили і силового диполя.

Р.Л.Салганік [866], досліджуючи деформування шаруватих середовищ з тонкими шарами, у яких поздовжні напруження дуже малі або їх можна вважати незалежними від прогину, розглянув задачу визначення напружено-деформованого стану, створеного стрибком прогину сталої величини від зменшення товщини деякого шару, який розташований у глибині сильно стиснутого масиву. Таким стрибком прогину пропонується моделювати вплив на шаруватий масив гірських порід підземної виробки з довгою лавою на певних відстанях від неї.

**Стрибки напружень і переміщень.** Відповідно до означення Г.П.Черепанова [1082] (1966) під налягаючою тріщиною розуміють математичний розріз уздовж лінії  $L$ , на якому задані стрибки нормальних напружень, зміщень, дотичних напружень (зокрема, нульовий), а силова взаємодія протилежних берегів розрізу може бути цілком довільною, зокрема й нелінійною. Такі умови автор для лінійного випадку з сухим кулонівським тертям із зчепленням записав у вигляді

$$[u_y] = \alpha(x), [\sigma_{yy}] = \beta(x), [\sigma_{xy}] = \gamma(x), \sigma_{xy}^{\pm} = -k^{\pm}(x) + \rho^{\pm}(x)\sigma_{yy}^{\pm} \text{ на } L,$$

та у нелінійному випадку –

$$[u_y] = \alpha(x), [\sigma_{yy}] = \beta(x), [\sigma_{xy}] = \gamma(x), \sigma_{xy}^{\pm} = F^{\pm}(\sigma_{yy}^{\pm}) \text{ на } L.$$

Квадратними дужками означено стрибки відповідних величин. У праці подано залежність у квадратурах потенціалів Колосова – Мусхелішвілі від функцій стрибка.

J.Maul [1501] розглянув задачу про визначення напружено-деформованого стану пластинки з включенням загалом довільної форми (приклад – кругової форми) у випадку, коли на межі поділу матеріалів задані стрибки переміщень і напружень. Переміщення у кожній із областей подаються у вигляді потенціалів простого шару з невідомими густинами і з використанням умов на контурі спряження, будується система сингулярних інтегральних рівнянь.

Якщо береги тріщин не навантажені, або навантажені симетричним навантаженням (часто цей випадок помилково називають навантаженням самоврівноваженим), то та таких тріщинах виникають лише стрибки переміщень. За довільного несиметричного навантаження берегів тріщин на них виникають, окрім заздалегідь невідомих стрибків переміщень, ще й обумовлені (наперед відомі) зовнішнім навантаженням стрибки напружень. Приклад розв'язування відповідної плоскої задачі теорії пружності містить праця K,S.Parihar, S. Sowdamini [1548]. Стрибки напружень і переміщень для опису тонких неоднорідностей загальної природи (тріщини, жорсткі включення, у тому числі і відшаровані) у пластині із круговою пружною шайбою використано у працях I.M.Горанової [182] (радіальні дефекти всередині чи зовні включення), [183] (дефекти уздовж дуг концентричних і межею поділу кіл), [184] (два радіальні співвісні дефекти всередині включення).

**Стрибки напружень, переміщень, джерел тепла і температурних диполів.** У 1983 р. Г.Т.Сулим [966] дав теорію використання формули Сомільяно для розв'язування задачі термопружності для довільного анізотропного середовища та її трансформацію для випадків плоскої та антиплоскої задач. Для моделювання тонкостінних включень запропоновано їх моделювати розподіленими уздовж серединних поверхонь (ліній) стрибками векторів напружень і переміщень, джерел тепла і теплових потоків.

Подібні часткові результати стосовно використання лише стрибків переміщень, які дають можливість моделювати поверхні розриву переміщень, через два роки подали S.A. Zhou, R.K.T. Hsieh [1783]. Переміщення поблизу поверхні розриву розглядаються як сума поверхневого інтеграла від стрибка переміщень (пружна складова) та об'ємного інтеграла від температури (температурна складова) і інтерпретують як поле переміщень, породжене розподілом уздовж поверхні розриву та у всьому просторі пружних монополів. Конкретизація отриманих виразів здійснена для дислокації Вольтерри та дисклінації на довільній поверхні Ляпунова.

У праці Н.Р.Рабіновича та ін. [840] для розв'язування задач термопружності обмежених двовимірних тіл із тріщинами, тонкими абсолютно жорсткими включеннями та ін. пропонується використання методу фіктивних навантажень, згідно із яким межу області (якщо вона є) та осьові лінії дефектів заміняють рівномірно розподіленими особливостями типу джерел тепла, температурних диполів, сил і дислокацій (подібно, як у методі функцій стрибка, тільки дискретним способом). Обмежене тіло з тріщинами чи тонкостінними включеннями замінюється областю, де відомі фундаментальні розв'язки згаданих задач. Лінії краю області й дефектів вважаються лініями дії теплових джерел і сил (на межі розширеного відповідно до типу функцій Гріна тіла) та сил і дислокацій на осях дефектів (жорстких включень та тріщин відповідно). Криві лінії апроксимують лінійними відрізками. Інтенсивність (густини) розподілів на кожному відрізку вважається сталою (невідомою). З використанням інтегрування фундаментальних розв'язків записуються подання температури, потоків, переміщень і напружень через невідомі значення інтенсивностей, а задовольняння крайових умов дає можливість отримати систему алгебричних рівнянь для обчислення цих інтенсивностей.

**Анізотропія. Стрибки переміщень.** З використанням розв'язку для силового диполя (метод компенсувальних навантажень) Б.М.Зінов'єв [332] отримав сингулярні (ядро Коші) інтегро-диференціальні рівняння теорії тріщин в анізотропному середовищі. Праця К.І.Knowles, Елі Sternberg [1418] досліджує геометрично нелінійні рівняння плоскої деформації тіла, у якому переміщення неперервні, але існують розриви градієнта переміщень у стисливому, зокрема й анізотропному середовищі. Виявлено, що такі стрибки багато в чому схожі на аеродинамічні стрибки у стаціонарних потоках, що виникають, коли рівняння рівноваги втрачають свою еліптичність. Докладно розглянуто приклад стрибка сталої інтенсивності. Побудовані рівняння застосовано до аналізу формування ліній ковзання (Чернова – Людерса).

**Стрибки напружень.** П.І.Перлін [18\*] ввів у потенціали Колосова – Мусхелішвілі додаткові складові, які відповідають дії розподілених з наперед невідомою густиною уздовж довільної лінії розподілених зосереджених сил, завдяки чому було отримано можливість будувати розв'язки з неперервними на цій лінії переміщеннями і стрибковими змінами напружень. Завдяки цьому було побудовано узагальнену крайову умову на включенні і запропоновано для знаходження невідомої густини використовувати умови на включенні. Для прикладу розглянуто з використанням відповідних умов взаємодії задачу про дві півплощини, поєднані безмежним абсолютно гнучким стрингером, розв'язану раніше К.С.Чобаняном, А.С.Хачикяном [1097]. Побудовано формули для визначення напружень та стрибків напружень в ортотропній пластинці під час переходу через навантажений неперервно розподіленими силами відрізків [340]. У ґрунтовній праці В.В.Шушунова [1125] побу-

довано фундаментальні розв'язки для зосередженої сили у безмежній площині та півплощині стосовно усіх типів прямолінійної анізотропії матеріалу та подано залежності напружено-деформованого стану і стрибків напружень при дії зосереджених сил на відрізьку прямої, причому з урахуванням усіх можливих типів крайових умов на межі півплощини.

**Стрибки переміщень і напружень.** Метод Александрова – Зінов'єва успішно використовується і для моделювання стрибків напружень та переміщень у анізотропних пластинах. У праці [342] так само, як і для ізотропного матеріалу отримані формули для напружень і переміщень при дії на відрізьку прямої неперервно розподілених сил (потенціал простого шару) та розподілу моментних і безмоментних диполів (потенціал подвійного шару) для випадку лінійної зміни густин. Стрибки зміщень пропорційні густині відповідного подвійного шару, а стрибки напружень – першій похідній від густини подвійного шару. Однак сам подвійний шар поряд із стрибком переміщень формує і стрибок напружень. Тому автори пропонують створити «узагальнене навантаження», яке було б такою комбінацією двох типів потенціалів, що створює стрибок переміщень без стрибка напружень (густина потенціалу простого шару (розподіл сил) підбирається так, щоб компенсувати стрибок напружень від потенціалу подвійного шару (розподілених диполів). Розвиток цих ідей та аналіз способів апроксимації неперервних розподілів уздовж кривих ліній розглянуто у наступній праці цих же авторів [337] (див. теж [15]).

Поряд із новосибірською школою цими питаннями успішно цікавляться й одеські механіки – див. напр. [475].

### **Пластили та оболонки із включеннями**

Урахування стрибка кутів повертання моделює деформування згину тонкої пластини з класичним нехтуванням можливого контакту берегів тріщини. Одночасне врахування стрибків переміщень та кутів повертання необхідне для моделювання задач деформування оболонок із тріщинами, напр. [256]. Побудовані системи диференціальних рівнянь для отримання стрибкових розв'язків для пологих оболонок [429, 425] та з використанням апарату узагальнених функцій отримано розв'язки, що мають стрибки переміщень, напружень, зусиль та моментів на твірній циліндричної оболонки Кірхгофа – Лява [458, 681]. Г.А.Морарь [623] побудував функції Гріна, які стосуються дії зосереджених стрибків переміщень (дислокацій), зосередженого кута повертання нормалі, зосередженого моменту та зосередженої узагальненої поперечної сили. Згортка відповідних функцій дає можливість отримати залежність напружено-деформованого стану від чотирьох функцій відповідних величин. Автор рекомендує використовувати ці розв'язки для вивчення впливу тріщин, включень, ребер та пластичних шарнірів. Для прикладу розглянуто пластичний шарнір у плиті на вінклеровій основі під час навантажування плити лінійним силовим навантаженням уздовж довільної лінії (на цій заданий стрибок поперечної сили).

### **46.2. Умови взаємодії**

Ці умови впливають зі зв'язку між напруженнями і переміщеннями, температурою і тепловими потоками на протилежних берегах прошарку (умов взаємодії тонкостінного включення з навколишнім середовищем). Їхня кількість залежить від розглядуваного класу задач.

### **Елементарні моделі**

Найпростішою моделлю тонкого включення є модель тріщини, коли на її берегах задані напруження чи переміщення. Задання переміщень характеризує жорстке защемлення відпо-

відного берега із натягом і, якщо на берегах тріщини задані нульові переміщення, то це відповідає моделі тонкого нерухомого абсолютно жорсткого включення (плівки). До цих моделей є близькою модель завареної тріщини [388], коли тріщину з розкриттям  $h_0(r)$  уздовж лінії  $L$  замінюють вставкою із того ж матеріалу товщини  $h(r) = h_0(r)(1 - \alpha_T \Delta T)$  ( $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення металу;  $\Delta T$  – значення температури металу шва під час охолодження). Тоді вважають, що стрибки вектора напружень та дотичної складової вектора переміщень на лінії  $L$  дорівнюють нулю, а стрибок нормальної складової переміщень – ні:

$$[u_\tau] = 0, [u_n] = f(r) \equiv h(r) - h_0(r) = -\alpha_T \Delta T h_0(r).$$

Дещо складнішими, але все ж елементарними, будуть моделі нестисливої чи навіть стисливої рідини (газу) [315, 1516].

### Модель запізнення зсуву

Ймовірно вперше таку модель використав у 1952 р. Н.Л.Сох [1231] в теорії волокнистих композитів (подібно і N.F.Dow [1246]), а у середині шістдесятих років – А.Келлі, W.R.Tyson [1413] (див. теж [1412]). Відповідно до неї: навантаження на волокно передається лише внаслідок деформації зсуву, яка виникає на поверхні поділу матриця-волокно; впливом торців (зусилля через них не передаються), сусідніх волокон і складного напруженого стану нехтують. Така проста теорія все ж виявила, що існує певна «довжина передачі навантаження» (ефективна довжина включення) – мінімальна довжина волокна, починаючи від якої максимальні напруження розтягу у включенні досягають того ж рівня, що й у безмежно довгого волокна. Розрахунок дотичних напружень на поверхні поділу виявив майже лінійну його залежність від відстані до торця включення. Загалом Н.Л.Сох дослідив ефекти орієнтації волокон паперу та інших подібних композитів на міцність. Вважалося, що композит містить безмежно довгі прямі хаотично орієнтовані волокна, навантажені лише на кінцях. Згинальна жорсткість волокон нульова.

Більш досконалі пізніші теорії дали набагато менше значення напружень у включення та істотно більші напруження біля кінців включення у матриці, зокрема й різке зростання дотичних напружень на поверхні поділу під час наближення до торця, що було доволі добре підтверджене вже у дослідях Тайсона – Дейвіса [1716]. У книзі А.Келлі [389] модель передачі напружень Кокса докладно аналізується та зіставляється із іншими більш пізнішими даними, у тому числі й з урахуванням передачі напружень через торець.

Відповідно до згаданої праці N.F.Dow [1246]: 1. волокно оточене циліндричною матрицею; 2. волокно і матриця пружні; 3. зчеплення між ними ідеальне; 4. прямі до деформації радіальні лінії у волокні та матриці залишаються прямими і після деформації. Внаслідок цього у [1502] було отримано для включення діаметром  $d$  (площа поперечного перерізу  $A_f$ , пружні модулі  $E_f, G_f$ ) завдовжки  $l$  у матриці-циліндрі ( $A_m, E_m, G_m$ ) дотичні напруження на межі поділу дорівнюють

$$\tau = \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{P_{eff}}{A_m E_f / E_m + A_f} \right] \left[ \frac{\sinh(\lambda/d_f (h/2 - x))}{\cosh(\lambda h/2 d_f)} \right] \left( 0 < x < \frac{l}{2} \right),$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}(G_f/E_f)[1 + A_f/A_m \cdot E_f/E_m]}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1) + (G_f/G_m)\sqrt{A_m/A_f + 2 - \sqrt{2}}}}$$



де  $P_{eff} = \sigma_a A_m (1 - E_m / E_f)$  – ефективне навантаження, що передається волокну.

### Моделі стрингера

Модель стрингера була запропонована Е.Меланом [1505] у 1932 р. для аналізу впливу гнучких пружних накладок на поверхні деформовних тіл і надалі успішно використовувалися багатьма дослідниками. Деякі результати щодо її розвитку та застосування містяться у працях [1180, 1422, 1177, 1274, 1156, 1686], книгах А.І.Каландія [364], В.М.Александрова, С.М.Мхитаряна [25], В.С.Саркісяна [870]. Л.Ф.Фільштинський з учнями [355, 54] використав її для розв'язування задач електропружності п'єзокерамік з пружними провідниками. Така модель придатна для вивчення гнучких, але жорстких (аж до нерозтягливих) щодо розтягу включень. Відповідно до цієї моделі під час переходу через вісь включення виникає стрибок дотичних напружень (інтеграл цього стрибка від торця до поточної точки дорівнює поздовжньому зусиллю розтягу-стиску у цій точці включення), а усі інші компоненти вектора напружень і переміщень є неперервними.

P.S.Theocaris та D.Bardzokas [1685] для аналізу тонкого підкріплення пластинки із викривленою тріщиною використали модель стрингера із урахуванням стрибка нормальних та дотичних напружень на берегах стрингера.

### Якісна модель

І.Т.Денисюк за співпраці із Л.Т.Бережницьким [65, 288, 287, 289] запропонував отримати рівняння для пружного лінійного включення як окремий граничний випадок розв'язку задачі про багатокутне гострокінцеве пружне включення. Так само, як це було зроблено у випадках отримання із розв'язків для багатокінцевих отворів та абсолютно жорстких включень часткових розв'язків для тріщини та лінійного жорсткого включення. Такий підхід стосовно пружного включення дав можливість отримати чітко ідентифіковані кількісні значення лише граничних випадків жорсткого включення та тріщини через те, що параметрами моделі є пружні сталі матеріалів, та довжина включення. Товщина включення у побудованих залежностях не фігурує, оскільки як окремий параметр цілком випадає при здійсненні граничного переходу. Зрозуміло, що за фіксованих (ненульових і не необмежених значень) пружних властивостей включення зі зменшенням його товщини до нуля має бути отриманий однорідний розв'язок (відсутність включення). Тому, хоча у отримані залежності входять фізико-механічні сталі, реальна жорсткість включення (а не матеріалу включення – хоч би як добутку жорсткості його матеріалу на товщину) у рівняннях цієї моделі не представлена.

### Вінклерова модель та її модифікації

О.В.Соткілава, Г.П.Черепанов [902] запропонували моделювати включення прошарком, наділеним властивостями вінклерової основи (вінклерова модель) – на включенні стрибка вектора напружень немає і вони пропорційні до стрибка відповідних складових вектора переміщень (див. також моделі перехідних шарів у § 41). Використання цієї моделі і замкнутого розв'язку задачі про еліптичну щілину у необмеженому середовищі дало можливість В.В.Панасюку, О.Є.Андрейківу, М.М.Стаднику та їхнім учням [695, 882] дослідити широкий клас задач для плоских еліптичних в плані та близьких до них включень у тривимірних та двовимірних тілах. Такі моделі часто використовують під час розрахунку тришарових обо-

лонок [636, 554, 293, 646], для моделювання клейових шарів [1277, 1268, 140, 137] чи тонких проміжних шарів у контактних задачах.

Слід принагідно зазначити, що під час розрахунку клейових з'єднань використовують також ще дві моделі [839]: 1.  $\sigma_{n\tau} = \text{const}$ ,  $\sigma_{nn} = 0$ ,  $u_\tau$  – лінійне; 2.  $E_{\tau\tau} = 0 \rightarrow \sigma_{\tau\tau} = 0$ . Для другої моделі шару клею напруження і переміщення в шарі визначаються через дотичні напруження та півсуму й піврізницю переміщень на його поверхнях, а нормальні поперечні напруження лінійно змінюються по товщині:

$$\sigma_{nn} = -n \frac{d\sigma_{n\tau}}{d\tau} + \frac{1}{h} \frac{u_\tau^+ - u_\tau^-}{2}.$$

Відповідно до моделі Вінклера нормальне розходження берегів включення (щілини) пропорційне до нормального напруження, а відносний зсув берегів у певному напрямі – пропорційний до відповідного дотичного напруження. Л.М.Куршин та І.Д.Суздальницький [510, 935] узагальнили цю модель для плоскої задачі, вважаючи, як і у моделі Вінклера рівними нулю стрибки вектора напружень, а стрибки переміщень для включення завтовшки  $h$  уздовж осі  $Ox$  дорівнюють

$$u_y^+ - u_y^- = \frac{1 - \nu_B^2}{E_B} h \sigma_{yy} - \nu_B \frac{h}{2} (u_x^+ + u_x^-), \quad u_x^+ - u_x^- = \frac{1}{G_B} h \sigma_{xy} - \frac{h}{2} (u_y^+ + u_y^-).$$

### Моделі пружин і тяжів

Близький до вінклерової моделі спосіб моделювати включення так, як лінійну та нелінійну взаємодію між берегами тріщин за допомогою натягнутих між берегами тріщини пружин чи пружних ниток. Специфіка такого підходу полягає у природній дискретизації умов взаємодії та можливості використання для розв'язування конкретних задач добре відомих розв'язків про дію зосередженої сили на край тріщини [30, 1633]. Такі пружини можуть моделювати не лише нормальне розкриття тріщини, але й дотичну взаємодію (скажімо, сили тертя) [628]. Граничний перехід (вимога неперервного розподілу) може привести до моделі вінклерової основи [637].

Глибоким розвитком цього підходу є так звана модель лінійних пружин (line-spring model), запропонована Дж. Райсом та Р.Леві [1570, 1571] для дослідження задач для видовжених поверхневих тріщин у пластинах і оболонках. За цією моделлю (див. теж [1236, 176]) така тривимірна задача зводиться до двох двовимірних, з яких перша стосується задачі розтягу і згину пластини (чи відповідно оболонки) із наскрізною тріщиною, береги якої сполучені між собою певними лінійними пружинами, які розтягуються і згинаються, а друга (плоска задача) є розтягом та згином смуги з такою шириною, як пластинка (оболонка), що має крайову тріщину тої ж глибини, що досліджувана плоска поверхнева.

### Балкова модель

Дещо складнішою від моделі стрингера є балкова модель [1605, 973], що враховує опір включення на розтяг та згин. Вона придатна для відносно жорстких та штивних (з опором на згин) включень і породжує стрибки вектора напружень – його нормальних і дотичних складових. Поле переміщень є неперервним. Великий досвід у розробці, модифікаціях та застосуванні таких моделей містять праці, у яких пружні стрижні застосовуються в ролі симетричних чи несиметричних підкріплень отворів та країв ізотропних та анізотропних пластин [1118, 859, 858, 573, 103]. Такі підкріплення використовуються і для підкріплення

просторових конструкцій та панелей [521]. Зрозуміло, що застосування таких моделей набагато складніше у порівнянні із моделлю стрингера Мелана.

Аналогічним чином за двобічного контакту такий стрижень відіграє роль включення-прошарку, який поєднує між собою два конструктивні елементи. Ю.М.Коляно та Ф.Н.Флейшман [449] із застосуванням операторного методу отримали рівняння для опису такого включення як лінії неідеального термомеханічного контакту між двома прямокутними пластинами. Див. також інші роботи у цьому напрямі Ф.Н.Флейшман та Б.Л.Пелеха [1050, 718] з приводу спряження пластин та складових шарових композитів.

Складніші моделі однорідних та неоднорідних криволінійних стрижнів змінюваного перерізу були запропоновані Н.П.Флейшманом, І.А.Зоненашвілі та ін. [353, 350, 1049, 349, 351, 352] для спряження елементів оболонок з урахуванням навіть зміщення серединних поверхонь.

Загальніша модель тонкого стрижня подвійної кривизни Б.Л.Пелеха враховує і поперечний зсув [717]. Застосування її у випадку плоскої задачі про підкріплення кругового отвору розірваними стрижнями відображено у праці [1017]. Тонке включення на межі вивчене у роботі [1019].

Відповідним чином узагальнюється і модель стрингера [1146, 1147], яка враховує його жорсткість на згин.

### **Моделі тонких прошарків**

Можливе використання певних аналітичних підходів для побудови рівнянь, які дають змогу враховувати тонкі лінійні на нелінійні прошарки у матеріалі та на його поверхні, коли важливе й урахування їхнього впливу на контактні явища: [190] (метод фазових інтегралів для одновимірних неоднорідностей), [555] (асимптотичний метод для аналізу тонкостінних структур), [1724] (варіаційний принцип Кастиліано використовується для розв'язання двох задач для пружного шару), [7\*] (асимптотичні рівняння для великих та малих модулів пружності тонкого покриття півплощини – модель граничних властивостей). В окремих працях таке підкріплення чи ребро розраховувалося з використанням теорії плоского напруженого стану [154] чи плоскої деформації [7]. У [181] використано термопружну реологічну модель анізотропного тонкого прошарку, що дає можливість описати натяг, утворення прозорів, проковзування, зчеплення, часткове відривання, фрикційну взаємодію тощо. Дуже загальні рівняння тонких проміжних шарів у композитах, як умов неідеального контакту, де поряд із деформаціями фігурують зведена теплопровідність, теплоємність і теплопроникність запропоновано як розвиток ідей Я.С.Підстригача Ю.З.Повстенком [750]. Звернемо увагу також на публікації [39, 1636, 1286, 1627, 658, 1631, 1517, 32\*, 1769].

Розглядаються успішно моделі тонких включень, придатні для аналізу динамічних явищ: [1172] – м'які і відносно жорсткі прошарки, [1576] – в'язкопружні прошарки.

### **Моделі тонких прошарків-оболонок**

Так само, як тонке включення у двовимірному об'єкті має вигляд лінії-балки, у тривимірному середовищі тонке включення може бути не лише лінією, але й поверхнею (пластиною чи оболонкою). У праці [774] такого типу умови неідеального контакту для оболонки у акустичному середовищі було зведено до крайової задачі для хвильового рівняння з ускладненими умовами на поверхні, що відповідає серединній поверхні оболонки (стрибка переміщень немає). Конкретизацію умов здійснено для оболонки Кірхгофа – Лява з урахуванням геометричної нелінійності. Співвідношення істотно спрощуються у випадках плоскої та осе-

симетричної задач, а також геометричної лінійності. Рівночасно подібним чином у праці [793] за відсутності стрибка переміщень описано модель включення-оболонки у середовищі із взаємозв'язаними полями деформацій, тепла і дифузії речовини. У монографії Я.С.Підстригача та Ю.М.Коляно [779] подано отримані операторним методом умови неідеального термомеханічного контакту твердих тіл з урахуванням скінченності швидкості поширення тепла (див. теж [786, 792, 1129, 1749, 1747, 1748, 1432]). Вважається, що стрибок переміщень на оболонці дорівнює нулю. Окремо розглянуто і модель покриття тіла, якщо воно із зовнішнім середовищем взаємодіє (віддає тепло) за законом Ньютона.

### **Моделі усереднених властивостей (моделі повного спектру властивостей)**

Попередні моделі в певному сенсі доповнюють одна іншу, однак не можуть описати поведінку включень у складніших випадках деформування та застосовуватися до включень, близьких за властивостями до матриці. Це спонукало появу і розвиток моделей усереднених властивостей, які дають можливість описати включення з довільними пружними властивостями. Ця модель є розвитком умов К.С.Чобаняна А.С.Хачикяна [1097] для абсолютно гнучкого ортотропного включення в рамках плоскої теорії пружності та теплопровідного включення Я.С.Підстригача [738]. Узагальнення цієї моделі завершене Д.В.Гриліцьким та Г.Т.Сулимом 1975 р. щодо плоскої задачі теорії пружності [237], Г.Т.Сулимом щодо термопружності [974] (1979) й антиплоскої деформації [951] (1981), Й.З.Піскозубом і Г.Т.Сулимом щодо теплопровідності [734] (1983) та Д.В.Гриліцьким, В.К.Опанасовичем, І.П.Шацьким [228] (1983) для включення в оболонці, Я.С.Підстригачем [737] (1982) та М.М.Стадником [908] (1988) для оболонкового включення.

Подібну до моделі Д.В.Гридіцького, Г.Т.Сулима модель, яка враховує три (з чотирьох) функцій стрибка, запропонував у 1976 р. W.Thein [1682] для дослідження навскісних клейових з'єднань. У цій моделі вважається, що стрибок дотичних напружень на берегах контакту із включенням дорівнює нулю, а поздовжні нормальні напруження на берегах самого включення однакові. Окрім цієї праці автор не зустрічав інших публікацій із використанням такої моделі, хоча вона доволі універсальна і є найближчою з усіх відомих до моделей повного спектру властивостей.

### **Нелінійні механічні моделі включень**

Класична модель пластичної смуги Дагдейла, використовувана у задачах теорії тріщин для моделювання пластичного деформування поблизу тріщин у пружно-пластичних тілах [704] цілком може служити і найпростішою моделлю. Досвід аналізу пластичного деформування прошарків між пластинчастими елементами та двома циліндричними тілами [44] може знадобитися для побудови моделі тонкого пружно-пластичного включення. Задача для в'язкопружного тонкого безмежного прошарку використана для аналізу динамічних процесів розглянута у праці [1576]. Модель тонких пористих включень (пористий алюміній) була успішно використана у публікації [53].

### **Умови теплового і термопружного контакту**

**Тепловий контакт.** Як вже згадувалося, у 1963 р. Я.С.Підстригач [738, 775], висловивши ідею про можливість заміни тонкого внутрішнього прошарку з чужорідного матеріалу у вигляді оболонки поверхнею, на якій будуть записані умови неідеального контакту між поєднуваними тілами, записав такі умови стосовно рівнянь теплопровідності, у яких фігурували три контактні теплофізичні параметри: зведені теплопровідність, теплоємність і

термоопір. Якщо ці параметри дорівнюють нулю, то контакт між поверхнями виявлявся ідеальним (рівність температур і рівність потоків тепла через поверхню) – прошарок не мав жодного впливу на температурне поле у композиті. Вважалося, що первинний контакт між тілами та прошарком був ідеальним, а між тілами та довколишнім середовищем відбувається теплообмін за Ньютоном. У другій праці більш докладно викладено матеріал першої.

Принагідно згадаємо, що ще у 1957 р. V.Vodička [1721, 1722] визначив температурне поле у двох плоскопаралельних шарах і у двошаровій круговій та еліптичній трубі за неідеального контакту між складовими:

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} + h_2 (T_1 - T_2) = \frac{\partial T_2}{\partial n} + h'_2 (T_1 - T_2) = 0 \quad (h_2 = \text{const}, h'_2 = \text{const}).$$

Ці рівняння (умови) можна було отримати із умов Я.С.Підстригача за припущення рівності нулю контактної теплопровідності і теплоємності.

У праці [772] Я.С.Підстригач докладно аналізує побудовані умови теплової взаємодії та розглядає часткові випадки. Ще раз стверджується, що: «Формулювання умов ідеального контакту передбачає, що тіла, які перебувають у контакті, розділені ідеальною (математичною) поверхнею, причому кожне із тіл є однорідним аж до поверхні поділу. Насправді між тілами може існувати деякий перехідний шар, властивості якого різняться від властивостей контактуючих тіл.»

«У зв'язку із цим доцільна постановка задачі, що впливає із такої розрахункової моделі. Вважаючи товщину перехідного шару малою у порівнянні з іншими розмірами, будемо його вважати тонкою оболонкою з певними фізико-механічними характеристиками. Зберігаючи ці характеристики сталими та прямуючи товщину оболонки до нуля, отримаємо деяку фізичну поверхню поділу між тілами з притаманними їй певними значеннями фізико-механічних характеристик. Умови, які повинні задовольняти на цій поверхні величини, що характеризують фізико-механічний стан системи, називатимемо умовами фізико-механічного контакту розглядуваних тіл.»

Умови взаємодії [738, 775] були у [772] конкретизовані і на плоский випадок. Тут же зазначається, що вони є частковим випадком отриманих роком швидше В.М.Гембарою [172] умов неідеального контакту для пластин і оболонок. Як частковий випадок із вищезгаданих рівнянь плоскої задачі впливали також рівняння теплообміну Ю.М.Коляно, записані для пластини, підкріпленої на межі тонким стрижнем [443].

Аналогічні умови теплової взаємодії у 1965 р. Я.С.Підстригач отримав операторним методом [773, 736]. Пізніше [778, 779] у побудованих умовах неідеального контакту була врахована скінченна швидкість поширення тепла і вони були перенесені на випадок тонких пластин, коли з бічних поверхонь у доквілля відбувається теплопередача за Ньютоном [776, 772, 443, 172]. Теплові умови В.М.Гембари [172] розвинув Ю.М.Коляно [440], врахувавши нестационарність теплопровідності, а також те, що температурне поле по товщині анізотропних (ортотропних) пластин є несиметричним внаслідок різних властивостей і температури зовнішнього середовища по обидва боки від з'єднаної пластини. До того ж припускалося, що всередині ребра може діяти джерело тепла.

О.В.Караванський [378] узагальнив теплові умови Ю.М.Коляно і В.М.Гембари на випадок різних товщини і пластинок і поєднувальних стрижнів-ребер, а також несиметричності (рівної висоти виступаючих частин) цих ребер. Ще складніші умови температурної взаємодії, які враховують квадратичний розподіл температури по товщині проміжної пластинки-ребра, отримані у монографії [781] (див. також [791]).

У 1980 р. Й.З.Піскозуб та Г.Т.Сулим запропонували умови [731] теплової взаємодії для плоскої задачі теорії теплопровідності тіл з тонкими включеннями. У 1981 р. Г.Т.Сулим опублікував два варіанти умов взаємодії для пружного включення скінченної ширини (плівкову та основну), які відповідно до аналогії Г.С.Кіта [393] переносяться і на випадок теплової вза-

ємодії. Це моделі повного спектру властивостей і вони мають доволі універсальний характер, оскільки, дають можливість врахувати увесь спектр зміни теплофізичних характеристик матеріалу включення та отримати у граничних випадках моделі абсолютно теплопровідного і абсолютно теплоізоляованого включень. Вони враховують також можливість теплопередачі через торці включень. Подальший розвиток таких моделей вже стосовно безпосередньо теплових процесів відбувся у праці Й.З.Піскозуба, Г.Т.Сулима [734] та інших, відображених у тексті монографії.

**Термопружний контакт.** Я.С.Підстригач, Ю.А.Чорнуха та М.І.Войтович [784] опрацювали рівняння, які дають можливість визначати термопружний стан пластин і оболонок, спряжених між собою за допомогою плоского криволінійного ортотропного стрижня довільного поперечного перерізу. Між стрижнем і оболонками ідеальний тепловий контакт, а на не контактуючих з оболонками частинах бічних поверхонь і на торцях теплообмін із навколишнім середовищем – за законом Ньютона. Використовуються тривимірні рівняння нестационарної теплопровідності та усереднення по області поперечного перерізу стрижня температури та обчислення першого моменту. З механічної точки зору використано рівняння підкріплювальних стрижнів Т.Л.Мартиновича [565, 566, 558, 569, 570, 103, 123], доповнені членами, що враховують температурну складову деформацій. За допомогою цих рівнянь було, зокрема, розв'язано складну термопружну задачу для двох компланарних кругових пластин (у різних площинах), поєднаних між собою за допомогою кільця-стрижня [1089], коли нагрівання системи відбувається зовнішнім середовищем на основі закону Ньютона.

У 1969 р. Ю.М.Коляно [440] поряд із новими тепловими умовами було узагальнено силові умови В.М.Гембари, який у своїх термопружних умовах припускав, що підкріплювальний стрижень сприймає лише розтяг-стиск. У нових умовах враховувалася також згинальна жорсткість стрижня (стрибок переміщень дорівнює нулю, а стрибок напружень – ні).

У 1979 р. О.В.Караванський [378], формулюючи умови термопружного контакту тіл з поєднувальними ребрами, узагальнив умови теплопровідності (див. вище), а також модифікував з погляду механіки деформування умови М.П.Шереметьєва [1118], що стосуються підкріплення меж пластин стрижнями.

У монографії Я.С.Підстригача, Ю.М.Коляно та М.М.Семерака [781] (див. також [791, 440, 445]) поряд із складними умовами температурної взаємодії, які враховують квадратичний розподіл температури по товщині проміжної пластинки-ребра, сформульовані умови силовой взаємодії тіл через пластину, які враховують її розтяг-стиск та згин.

У 1975 р. Я.С.Підстригач та Ю.М.Коляно [780] опублікували рівняння узагальненої термопружності для шару, циліндра і кулі з тонкими чужорідними включеннями, коли всередині тонкого шару починає в певний момент часу діяти джерело тепла сталої потужності. Вони містять зведену теплопровідність, густину, жорсткість на розтяг включення. Рівняння взаємозв'язаної задачі термопружності побудував М.Г.Кривцун [481]. У 1979 р. Г.Т.Сулимом було запропоновано [974] спектр різних умов термопружної взаємодії плоскої задачі для ортотропного тонкого викривленого включення за схемою усереднених властивостей.

Узагальнення умов тривимірної механічної взаємодії тонкого включення Я.С.Підстригача [737] типу усереднених властивостей на термопружний випадок здійснив у 1984 р. М.В.Хай [1058]. Враховано зв'язаність полів температури і деформацій. Для випадку незв'язаної задачі із використанням потенціалів з невідомими густинами розподілу отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення цих густин. Однак через складність умов, а відтак і цієї системи, досі ще не розглянутий жоден приклад використання цих умов для розв'язування конкретних задач.

### 46.3. Метод особливостей

Під час моделювання дефектів та інших недосконалостей крайових умов (спряження континуумів різної вимірності) широко використовується метод особливостей. Його сутність полягає у тому, що реальна тонка недосконалість усувається з розгляду, а її вплив на середовище замінюють дією розподілених уздовж поверхні  $S$  (лінії  $L$ ) силових, моментних та інших чинників, густина яких визначається з умови сумісності деформацій на даній поверхні та серединній поверхні дефекту, підданого впливові компонування навантаження, що однакове за величиною та протилежне за знаком до заданого на  $S$ . Вперше такий підхід був використаний у гідроаеромеханіці під час вивчення обтікання рідиною чи газом твердих тіл. Поширилася ідея Л.Прандля [542, 56] моделювати крило скінченного профілю розподіленими уздовж його хорди вихорами, що забезпечує стрибок швидкостей на верхньому та нижньому берегах профілю.

Вибір типу зосереджених чинників методу особливостей визначається вимогами забезпечення необхідної швидкості зникання на нескінченності, зручністю реалізації обчислювальної схеми та необхідністю забезпечити можливість стрибка на  $S$  тої чи іншої величини. Фактично використання тих або інших потенціалів передбачає явне або неявне застосування методу особливостей.

#### Метод сил

Однією з найпростіших модифікацій методу особливостей є **метод сил** (особливості – зосереджені сили). Стрибки компонент вектора напружень на  $S$  дорівнюють відповідним компонентам розподілених на  $S$  сил. Вектор переміщень – неперервний. Цей метод у явній чи неявній формі широко застосовується теоріями волокнистих композитів, де волокно замінюють лінією з розподіленими поздовжніми силами, тонкі включення представляють у вигляді моделей стрингера, балки, мембранної оболонки [1077], коли взаємним зміщенням берегів неоднорідності можна знехтувати.

#### Метод дислокацій

В рамках методу дислокацій дефект (тріщина) моделюється розподіленими дислокаціями, що забезпечують на  $S$  стрибок вектора переміщень та неперервність вектора переміщень, причому густина розподілу дислокацій дорівнює дотичній похідній стрибка відповідної компоненти вектора переміщень. Через неперервність вектора напружень цей метод можна застосувати до тріщин з симетрично навантаженими берегами [369] та тонких включень, у яких напруження не змінюються по товщині (рідкі та інші податні включення, до яких можна, зокрема, застосувати вінклерову модель [902, 695]).

Узагальненням методу дислокацій є *метод дисторсій* В.А.Осадчука [685, 686], який дефект (зокрема в оболонці) моделює розподіленими дислокаціями та дисклінаціями.

#### Метод компенсувальних (фіктивних) навантажень

Метод компенсувальних (фіктивних) навантажень передбачає, що компенсувальне навантаження складається не лише з зосереджених сил, але й моментних та безмоментних диполів та їхніх похідних [330, 844]. На основі цього методу розглядалися стрижневі та оболонкові включення і тріщини у тривимірному середовищі [14] та інші задачі. Застосування методу компенсувальних навантажень ускладнюється тим, що диполі породжують одночасний стрибок напружень і переміщень. Тому, скажімо, для розв'язування задач теорії

тріщин треба підбирати узгоджені розподіли сил та дислокацій в той час, коли метод дислокацій дуже просто вирішує цю проблему.

### **Метод функцій стрибка**

Метод функцій стрибка, що поєднує методи сил та дислокацій (у теорії пружності) і вводить стрибки векторів напружень та переміщень, позбавлений останнього недоліку методу компенсувальних навантажень. Вперше його застосував Г.Т.Сулим 1975 р. [239, 236] у плоскій задачі теорії пружності разом з Д.В.Гриліцьким та у 1981 р. у антиплоскій задачі, у 1983 р. [966] стосовно оболонкового включення. У задачах теплопровідності методу відповідає поєднання методів розподілу джерел та диполів тепла, що породжують незалежні стрибки нормального потоку тепла та температури. У 1984 р. Д.В.Гриліцький, В.К.Опанасович та І.П.Шацький [226–230] застосували цей метод до розв'язування задачі тонкостінних включень в оболонках, ввівши додаткові стрибки кутів повертання нормалі та згинальних моментів (загалом вісім функцій стрибка). Докладно ідея методу функцій стрибків, на якому ґрунтується матеріал цієї монографії, викладена у розд. I.

### **Метод функцій міжконтактних прозорів**

Метод функцій міжконтактних прозорів почав розвиватися головню зусиллями Р.М.Мартиняка відповідно до концепції методу функцій стрибка для моделювання контактної пружної і термопружної взаємодії безмежних півплощин з неідеально прямими (шорсткі, неглибокі виїмки) поверхнями та з урахуванням можливого існування на поверхнях нестисливої рідини (мастила) чи тонких включень [575, 577, 986] та ін. Так само, як і у методі стрибка, вводяться стрибки векторів напружень, переміщень (температури і потоку тепла для температурної задачі). Головна різниця полягає у тому, що, розглядаючи гладкий контакт притискання, вважають, що у місцях зміни крайових умов напруження є скінченними, і стрибки переміщень називають міжконтактними прозорами. Розглянуті в межах застосування цього методу задачі споріднені також і з задачами розклинювання. Повніший аналіз праць із цієї тематики розглянуто у тій частині пп. 47.3, що стосується плоских контактних задач.

Близька за тематикою задача про стискання між двома ортотропними півпросторами ортотропного шару (плоска деформація), пружні властивості якого та товщина можуть стрибком змінюватися, досліджена Р.Л.Салганіком [867]. Використано апарат інтегрального перетворення Фур'є та метод Вінера – Хопфа. Отримано прості вирази для поля напружень у місці стрибка завдяки припущенню про однорідність деформацій уперек шару, яке можна вважати слухним, якщо забезпечується малість зміни напружень на відстанях порядку товщини шару. Останнє буде виконуватися, якщо відносна податність шару є великою, або подовжня податність набагато більша від поперечної. Також вважалось, що під час визначення нормальних напружень дотичними напруженнями всередині шару можна знехтувати (такий прийом часто використовується у задачах трибомеханіки), а на відстанях, більших від деякої характерної, на якій всередині шару фіксується істотна зміна напружень, поле напружень теж по товщині не змінюється.

### **Метод лінійних розвинень потенціалів**

Своєрідним поєднанням у єдине ціле принципу спряження та умов взаємодії є метод лінійних розвинень потенціалів, опрацьований Д.В.Гриліцьким, В.К.Опанасовичем та їхніми учнями (М.С.Драган, Л.О.Тисовський та ін.), які запропонували (плоска пружність [303] та термопружність [208], згин пластин Кірхгофа [207], антиплоска задача [675, 674]) вважати включення об'єктом того ж класу, що й навколишнє середовище, тобто охарактеризувати його



го такими ж потенціалами, що й матрицю. Використання розвинення потенціалів включення у ряд за степенями малої товщини, утримання лише перших двох членів цього розвинення (певні стійкі комбінації цих членів відповідають функціям стрибка методу стрибків) та умов ідеального контакту включення з матрицею дало можливість звести задачу до систем сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР). Виділення у побудованих співвідношеннях згаданих стійких співвідношень дає можливість отримати крайові умови інтерпретувати як умови взаємодії. Скажімо, під час розв'язування задачі поздовжнього зсуву [675, 674] фактично використані умови взаємодії є спрощеним варіантом умов взаємодії Г.Т.Сулима [951]. Недоліками цього способу є неможливість застосування методу до включень складної механічної природи (коли немає потенціалів) та складність аналізу врахованих та відкинутих механічних явищ.

Спосіб розвинення потенціалів Колосова – Мусхелішвілі для розв'язування задачі про контакт двох півплощин, поєднаних тонкою пружною смугою застосували 1986 р. L.Stagni, R.Lizzio [1653]. Для прикладу досліджено вплив на поле напружень центру тиску у одній із півплощин поблизу межі поділу матеріалів.

### Інші методи

Загалом до розв'язування задач теорії тонкостінних включень можна успішно застосувати *методи теорії функцій комплексної змінної* [978, 237, 951], *інтегральних перетворень Фур'є* [977, 983, 215, 214], *Мелліна* [311] та ін. У 1978 р. Г.Я.Попов [807] розвинув *узагальнений метод інтегральних перетворень* – своєрідну модифікацію методу функцій стрибка, засновану на використанні інтегральних перетворень. Детальний виклад методу можна знайти також у [802], де міститься також розв'язок багатьох задач теорії тонкостінних включень. Істотною перевагою методу є можливість дослідження задач для тіл обмежених розмірів та урахування взаємоперетину неоднорідностей. У 1999 р. Г.Я.Попов побудував [809] розривні розв'язки для шарового середовища, коли на його межі існують дефекти у вигляді тріщин і різного типу включень.

## § 47. Задачі теорії тонкостінних включень в ізотропних середовищах

### 47.1. Теплопровідність тіл з тонкими включеннями

#### Теплопровідність тонких включень у просторових тілах

У праці [11\*] Г.С.Кіт із використанням теорії потенціалів [400], опрацьованої ним та М.В.Хаєм для розв'язування задач термопружності теорії тріщин побудував інтегральні рівняння для тонких плоских теплопровідних включень-тріщин трьох типів: якщо включення теплоактивне в тому сенсі, що підтримує на своїх берегах задану температуру; якщо воно теплопроникне (тепловий потік пропорційний до різниці температур); коли воно моделюється умовами неідеального контакту Я.С.Підстригача [738, 775]. Для усіх типів включень записано інтегральні рівняння та обговорюються умови їх розв'язуваності. Найскладніша система рівнянь отримана у третьому випадку. Точний розв'язок рівнянь для включення першого типу і теплоізолизованого включення другого типу автор пропонує шукати для кругової області або півплощини із використанням теореми Дайсона [1262] (див. теж [1728] і с. 550 монографії [1079]). Розглянуто два приклади – для кругового теплоактивного включення

з температурою  $T_0 + T_1 r^2 + T_2 r^4$  та теплопроникного включення, коли застосовується метод колокацій.

### Теплопровідність пластин без віддачі з бічних поверхонь

**Умови теплопровідності на межі тіл.** Внаслідок аналогії між задачами поздовжнього зсуву та двовимірної теплопровідності без віддачі з бічних поверхонь [393] результати, отримані під час дослідження задачі теорії тонкостінних включень одного класу, можуть суто формально переноситися на відповідні задачі другого класу. У монографії Г.С.Кіта та М.Г.Кривцуна [396] досить детально досліджений випадок лінійних теплоізолюваних дефектів [1641] (тріщин) і тому на них детально зупинятися не будемо.

У вже згадуваних працях [738, 775] Я.С.Підстригач запропонував загальну схему дослідження теплообміну між двома тілами через проміжковий тонкий шар. Вперше конкретну плоску задачу теплопровідності й термопружності для безмежної пластинки з пружною круговою шайбою, коли на межі поділу виконуються згадані умови, розв'язав Ю.М.Коляно [441]. Одночасно вплив проміжкового шару на збурення однорідного потоку тепла у безмежному середовищі зі сферичним включенням дослідив П.Р.Шевчук [1116]. Роком пізніше G.C.Sih [1641] для аналізу задачі провідності тепла у пластині із рядом співвісних тріщин ввів як невідомі функції суму та різницю (стрибок) температур на берегах тріщини і визначив потенціал температурного поля через цей стрибок. Було розглянуто приклади двох теплоізолюваних тріщин-включень під дією однорідного потоку тепла на нескінченності, періодичну задачу для одної такої тріщини і побудовано асимптотичні вирази потоків тепла і температури біля вістря теплоізолюваної тріщини.

Умови неідеального теплового контакту на скінченному відрізку (своєрідне включення) межі поділу матеріалів смуги та півплощини використали також Ю.М.Коляно та Ю.О.Музичук [448]. Отримано, що максимальний стрибок температури отримується для теплоізолюваної неоднорідності і температура на ній скінченна.

Задачу теплопровідності для теплопровідної неоднорідності скінченної довжини дослідили ймовірно Г.С.Кіт та Я.С.Підстригач у 1966 р. [399], ввівши стрибок температури і вважаючи тепловий потік неперервним. Аналогічна задача для тріщини та абсолютно жорсткого включення розглядалася набагато пізніше у [1423]. У § 2.3 [396] розв'язана така ж задача, але на цей раз у припущенні змінного коефіцієнта термоопору включення.

У 1967 р. [777] були записані інтегральні рівняння загального типу для задачі теплопровідного дефекту, однак конкретні розрахунки здійснені щодо тріщини з термоопором. Потім ці результати були розвинуті у книзі [396] (§§ 1.6, 2.10).

Як ще один приклад використання побудованих умов теплової взаємодії у складній задачі можна розглянути дослідження [785], де визначається температурне поле сферичної оболонки з круговим плоским диском за допомогою кільця-стрижня, коли відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем. У рівняннях враховується ексцентриситет і неортогональність спряження. Ця задача відповідає реальному дослідженню сферичного батискафа з акумулятором.

У задачах теплопровідності ефективно використовувався метод узагальнених функцій. Для задачі про тонку смугу, паралельну до межі пружної півплощини (шар у півпросторі), коли межа тіла навантажена за гармонічним температурним законом, О.К.Романчук [851] із використанням узагальнених функцій отримав аналітичний розв'язок задачі та дослідив нестационарне температурне поле у півплощині у залежності від часу і частоти. У задачі про смугу з внутрішнім тонким прошарком Б.В.Ковальчук [416] ввів для прошарку зведену теплопровідність і з використанням опису теплофізичних властивостей смуги як єдиного цілого за допомогою дельта-функції Дірака та інтегрального перетворення Фур'є було побудовано

систему рівнянь задачі. Задачу теплопередачі через тонку пластинку сталюї товщини з великою теплопровідністю розглянуто у монографії Е Санчес-Паленсії [868], яка стосується теорії усереднення рівнянь у частинних похідних для опису явищ у різко неоднорідних середовищах, зокрема в теорії композитних матеріалів.

У 1983 р. М.В.Хай [1057], розвиваючи ідею Я.С.Підстригача та досвід Г.Т.Сулима та Й.З.Піскозуба у застосуванні методу функцій стрибка до плоских задач теплопровідності тіл із тонкими включеннями запропонував замінити тонкі включення «двосторонніми поверхнями, між якими відбувається теплообмін за законом неідеального теплового контакту». За допомогою комбінації гармонічних потенціалів простого та подвійного шару він отримав для плоского тонкого включення систему сингулярних рівнянь щодо стрибка температур і теплових потоків.

**Лінійні теплопровідні включення за спрощеними моделями.** Досить загальна постановка задачі у 1972 р. здійснена у [1], де отримана можливість досліджувати як погану, так і хорошу теплопровідність неоднорідності (за допомогою різних виразів для крайової умови, що пов'язували між собою температуру  $T$  і функцію течії  $\psi$ , які є дійсною та уявною частинами комплексного потенціалу –  $\partial\psi/\partial\tau = \partial T/\partial n$ ):

$$h_1 \frac{\partial\psi}{\partial n} = -\varepsilon (T^+ - T^-) \text{ – для поганої теплопровідності;}$$

$$h_1 \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon_1 (\psi^+ - \psi^-) \text{ – для доброї теплопровідності.}$$

Аналогічну періодичну задачу для включень із поганою теплопровідністю розглянуто у [2]. Вивчаючи включення з хорошою теплопровідністю, Н. Sekine та Т. Mura [1605] врахували стрибок потоку тепла і знехтували стрибком температури, одержавши, зокрема, замкнутий розв'язок для абсолютно теплопровідного включення (антиплоский відповідник абсолютно жорсткого включення).

**Лінійні теплопровідні включення і методи функцій стрибка та лінійного розвинення потенціалів.** Подальші дослідження теорії і практики придатного у застосуванні для повного спектру зміни теплофізичних властивостей тонких включень методу функцій стрибка Г.Т.Сулима з Й.З.Піскозубом, започатковані у 1979–80 рр. [955, 729], були спрямовані на застосування до цього класу задач методу функцій стрибка, розвиток умов взаємодії з урахуванням їх можливої теплоактивності [726], анізотропії властивостей, впливу різних типів теплових чинників тощо. Інші праці з цього напрямку відображені у розд. IV монографії.

Дещо пізніше Д.В.Гриліцький, М.С.Драган та В.К.Опанасович [208] (1980) застосували до розв'язування задачі теплопровідності тонких включень метод лінійного розвинення потенціалів, що дає в межах єдиного підходу можливість отримати одночасно усі граничні випадки – абсолютну теплопровідність і теплоізоляваність. Аналогічна задача для системи прямолінійних теплопровідних включень була розглянута за участю В.В.Божидарніка [672, 103]. Після цього з використанням цього ж методу І.І.Бернаром [97, 96] був досліджений вплив на температурне поле пластинки включення по дузі кола.

### Теплопровідність з тепловіддачею з бічних поверхонь

Врахуванню тепловіддачі з поверхонь пластин та стрибків температури і теплового потоку стосовно теплопровідних включень присвячений § 8.4 [396]. Тут побудовані інтегральні рівняння стаціонарної задачі, яка детально досліджується у простому варіанті умов взаємодії для прямолінійного дефекту з термоопором. Розвиток досліджень Г.Т.Сулима та Й.З.Піскозуба у цьому напрямку пов'язаний із застосуванням методу функцій стрибка [732, 728].

### Урахування умов на торцях

Під час дослідження задач теплопровідності тіл з тонкими неоднорідностями необхідно враховувати ще деякі додаткові умови, у яких фігурують значення певних величин на торцях включення – *торцьових сталих*. Загальноновизнано, що стрибок температури на краях дорівнює нулю. Однак у працях, що враховують стрибок нормальної складової потоку (тобто по-здовжнє поширення тепла у включенні), виникає потреба обчислити кількість  $Q$  тепла, що протікає через торець включення. У праці [1] це питання не розглядається, у [1605] припускається  $Q=0$ , що вірне лише для теплоізоляованого включення, або включення нульової товщини. Г.С.Кіт та М.Г.Кривцун [396] вважають стрибок температури та інтеграл потоку тепла разом зі своїми похідними на торцях нульовими.

Найпростішим виходом із цієї ситуації виявилось використання для обчислення торцьових сталих апріорних виразів [690, 691, 734]. Ця ідея використана пізніше і у [208]. Другий спосіб визначення  $Q$  [728] використовує інтегральне задовольнення умови однаковості потоків тепла у торці включення на прилеглий частині матриці. Його ідея запозичена у праці [25].

Оскільки задача термопружності передбачає знаходження поля температур, то деякі результати, які стосуються задач теплопровідності можна знайти у працях із термопружності.

### 47.2. Теорія пружності плескатих включень

Плескатим називатимемо включення, один із геометричних розмірів якого набагато менший від двох інших, тобто яке має вигляд фрагменту тонкої пластини чи оболонки. Середина площина такого тонкого включення може бути плоскою або належати викривленій поверхні.

#### Абсолютно жорсткі плескаті включення

Можливо, що вперше дослідження про переміщення жорсткого дискового включення перпендикулярно до своєї площини здійснив у 1962 р. W.D.Collins [1226], а у своїй площині – L.M.Keer [1408] (1965). Дещо пізніше А.І.Лур'є [543, 544] узагальнив задачу Робена про трансляційне й обертове переміщення в ізотропному просторі абсолютно жорсткої сфери на випадок абсолютно жорсткого еліпсоїда і побудував аналітичний розв'язок такої задачі. Звідси як частковий випадок можна було отримати (але автор цього не робив) розв'язок задачі для плоского еліптичного включення у безмежному ізотропному середовищі. Логічного розвитку та узагальнення ця задача отримала у праці [1403], де були розглянуті аналогічні задачі для жорсткого еліптичного диску, а також про нерухоме жорстке включення та про переміщення у тілі жорсткої смуги із еліптичним отвором. Дискове жорстке включення з відшарованим берегом дослідив L.M.Keer [1409].

Далі найбільш повно цю проблему розвинув та опрацював A.Selvadurai. Звернемо увагу у першу чергу на його монографію [1608] та деякі із статей – [1614] (на основі розв'язку для жорсткого сфероїда отримано сплющене кругове дискове і видовжене веретенне включення), [1613] (гнучке нерозтягливе еліптичне плескате включення у трансверсально-ізотропному середовищі), [1611] (у площині жорсткого кругового дискового включення діє зосереджена сила – функція Гріна відповідної задачі), [1607] (кругове жорстке дискове включення на межі поділу двох матеріалів – визначена залежність між величиною сили та переміщенням включення), [1610] (жорстке дискова накладка на поверхні пружного півпростору відтягується у центрі нормальною силою, а під поверхнею розташована компланарно тріщина – осесиметрична задача), [1609] (еліптичне жорстке плескате включення на межі поділу двох трансверсально-ізотропних середовищ). Див. також публікації [1612, 1618, 1617, 1615, 1616]. В

останній праці досліджуються нелінійні явища на поверхні контакту тіл, пов'язані із поділом поверхонь, повторним контактом, ковзанням і зчепленням, попереднім стиском поверхонь контакту. Публікація [1559] стосується здійснення граничного переходу від розв'язку задачі про міжфазне абсолютно жорстке плоске еліптичне включення до лінійного жорсткого міжфазного включення на межі поділу двох півплощин. У роботі [22\*] абсолютно жорсткий круговий диск на межі поділу двох ізотропних матеріалів з'єднаний із одним чи двома півпросторами.

У праці [1763] побудована функція Гріна для загальної задачі диск чи тріщина. Згадаємо тут і роботу про гладкий контакт жорсткого сплющеного сфероїдального включення, що вставлене у щілину (розклинювання дискової тріщини) [1711]. Л.Т.Бережницький та І.Т.Денисюк у першій своїй праці [89] циклу із трьох праць, які стосуються жорсткого еліптичного в план тонкого включення, розглянули випадок його розташування в ізотропному середовищі.

Із застосуванням методів гомогенізації у працях польських механіків [1397, 1396] було побудовано інтегральні рівняння та досліджено задачі для плоского жорсткого включення на межі поділу матеріалів у періодичному двофазовому шаровому композиті.

Методом розривних розв'язків Г.А.Морарь [625] дослідив задачу для поміщеного у простір плоского штивного (що не згинається) включення з урахуванням стрибка лише нормальних напружень.

### Пружні плескати включення

Дослідження тонких пружних включень у тривимірних тілах започаткувала у 1976 р. праця В.В.Панасюка, О.Є.Андрейківа, М.М.Стадника [695], де у рамках методу дислокацій з урахуванням вінклерової моделі досліджене плоске у плані тонке включення у ізотропному необмеженому середовищі. Стосовно таких включень у трансверсально-ізотропних середовищах такі дослідження були здійснені у [917]. Розвиток досліджень у цьому напрямку, що стосувався профілю та кривизни вершини включення, їхньої взаємодії, способів навантаження однорідним полем напружень, підсумований у монографіях [710, 882]. Як частковий випадок звідси можна отримати і результати для плоскої та антиплоскої деформації (див. також [911]).

Важливі відомості щодо особливостей деформування тривимірних тіл з тонкими включеннями можна дістати з праць А.Сельвадураї [1608]. У 1983 р. на основі формули Сомільяно та методу функцій стрибка автор [966] вказав загальний спосіб побудови інтегральних рівнянь для включення уздовж поверхні Ляпунова. Деяко пізніше М.В.Хай [1056, 1055] побудував подібні залежності на основі гармонічних потенціалів та з використанням умов взаємодії Я.С.Підстригача [737] записав інтегральні рівняння для плоских у плані включень. Г.Я.Попов [802] до задач для тонких повністю і частково зчеплених з матрицею включень застосував узагальнений метод інтегральних перетворень. Для прикладу вивчалось абсолютно жорстке включення. Відзначено, що відшарування посилює особливість розв'язку від  $-1/2$  до  $-3/2$ , гладкий контакт одного з берегів викликає осциляцію напружень.

Недавно А.Качиньські [1395] застосував вінклерову модель до аналізу поля напружень біля еліптичного в плані тонкого пружного включення на межі поділу матеріалів періодично-шарових композитів. Для опису композиту було застосовано гомогенізацію. Задача звелася до сингулярного інтегрального рівняння стосовно стрибка переміщень берегів включення.

Споріднені із теорією тонких включень осесиметричні задачі для гладкого контакту двох півпросторів з використанням методу міжконтактних прозорів у випадку збурення плоскої поверхні одної із них розглянуті у працях Г.С.Кіта, Р.М.Мартиняка, Б.Є.Монастирського

[619, 404, 620–622]. Подібні задачі у випадку заповнення недосконалості нестисливою рідиною – у [618, 1398].

### Кручення тіл з тонкими включеннями

**Жорсткі включення.** Дослідження проблеми кручення пружного півпростору з тонкими дефектами з урахуванням практичного значення цієї задачі для механіки ґрунтів та будівництва фундаментів і анкерів розпочате ще у сорокових роках минулого століття [1588, 1566, 1183, 1503]. Новий імпульс цим дослідженням дав R.D.Low [1477] у черговій задачі про кручення пружного півпростору з тонким дисковим дефектом. У праці Д.В.Грилицького, О.П.Піддубняка [232] (1975) досліджена задача про кручення півпростору, що з'єднаний із шаром, якщо на межі поділу матеріалів є щілина або жорстке включення у вигляді диску або площини з круговим отвором. У той же час G.K.Dhawan [1243] дослідив менш загальну задачу про кручення однорідного півпростору з круговим тонким включенням. Через рік В.В.Пороховський та О.П.Піддубняк [819] за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля побудували інтегральні рівняння Фредгольма другого роду (розв'язуються методом послідовних наближень), дослідили проблему кручення пакету з двох шарів за допомогою кругового жорсткого диску, розташованого на межі поділу матеріалів. Зовнішні поверхні шарів могли бути вільними або жорстко защемленими.

Кручення півпростору з круговою жорсткою наладкою за допомогою розподілених по його поверхні дотичних напружень за допомогою інтегральних перетворень дослідив Л.В.Ляхов [549].

Задача кручення безмежного циліндра, складеного із двох матеріалів, коли всередині є плоска дискова щілина із різними крайовими умовами на її берегах, у тому числі й підкріпленим жорстко одним берегом (жорстке включення із одним відшарованим берегом), дослідили О.П.Піддубняк та Я.І.Кунець [761].

Неосесиметрична задача кручення необмеженого середовища із тонким жорстким еліптичним включенням як граничного випадку кручення простору із еліпсоїдальним включенням була розглянута І.Т.Денисюком [281].

**Пружні включення.** Вивчення кручення тіл з тонкими включеннями розпочалося у 1978 р. працею О.П.Піддубняка [760], де в на основі методу функцій стрибка і використаням апарату інтегрального перетворення Ганкеля побудована система двох СІР для включення на межі поділу двох півпросторів і з використанням розвинення функцій стрибка у ряди поліномів Якобі з виділеною особливістю, задача зведена до системи лінійних алгебричних рівнянь. Розглянуто приклади для включення в однорідному середовищі. Було побудовано дві умови взаємодії для пружного включення, одна із яких – типу вінклерівської. Подальші дослідження цього класу задач розвивалися за участю Я.І.Кунця: [500] – дискове включення на межі півпросторів чи простору із шаром; [763] – кручення півпростору із тонким включенням за використання умов взаємодії Я.С.Підстригача (методом парних інтегральних рівнянь отримана система сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, що за допомогою методу ортогональних поліномів Чебишева зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь); [762, 759] – тонке включення сталої товщини на межі поділу двох півпросторів під впливом зосередженого моменту на осі симетрії задачі; виділяється шар матеріалу на продовженні площини включення, так, ніби включення є необмеженим та кусково-однорідним - отримані неklasичні умови взаємодії не є наслідком розвинення у ряди (скінченні суми) по товщині включення; [496, 497] – необмежений простір із тонким пружним включенням, край якого має кут малого розкриття (метод зрощування асимптотичних розв'язків за певних обмежень на пружні сталі) у; [498] – кручення простору за допомогою зосе-

редженого моменту з урахуванням змінності товщини включення, край якого має кут малого розкриття (попередньо згаданий підхід).

Як часткові були отримані граничні випадки тріщини та абсолютно жорсткого включення. М.М.Стадник [907] в рамках вінклерової моделі (як спрощеного варіанту умов О.П.Піддубняка) розглянув відносно м'які включення, нехтуючи стрибком дотичних напружень. Обчислені КІН.

Т. Tsuji та ін. [1713] дослідили задачу сумісного кручення двох циліндрів різного діаметра, що зв'язані між собою тонким шаром пружного клею. Сам шар клею моделюється циліндром, що має радіус найтоншого циліндра. Використовується тривимірне формулювання задачі із поданням функції напружень Буссінеска у вигляді рядів за функціями Бесселя та експонентами у циліндричній системі координат. Вводиться та обчислюється коефіцієнт інтенсивності напружень.

### 47.3. Плоска задача механічної взаємодії для тіл з тонкими включеннями

#### Абсолютно жорсткі включення

Між розв'язуванням задач теорії тріщин та відповідних задач для абсолютно жорстких плівки немає жодних принципових відмінностей. Можна навіть вказати існування певної аналогії [64], яка дає можливість від розв'язку для абсолютно жорсткої плівки формально перейти до розв'язку аналогічної задачі для тріщини (але не навпаки). І все ж, незважаючи на спричинену цим більшу загальність розв'язків для абсолютно жорсткої плівки, їх побудові приділено надто мало уваги.

**Включення у безмежному однорідному середовищі.** У 1965 р. G.C.Sih [1642] вірогідно уперше строго поставив та розв'язав плоску задачу визначення напруженого стану тіла з абсолютно жорсткими тонкими включеннями скінченної довжини (названими ним негативними тріщинами), розташованими на одній прямій, коли навантаження здійснюється довільним типом напружень на нескінченності, а також зосередженою силою, зокрема й прикладеною до центру включення. Було розглянуте одне включення і був виявлений закон розподілу напружень біля кінця абсолютно жорсткого включення, відзначене існування кореневої особливості і введене поняття коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) біля абсолютно жорсткої плівки як комплексного коефіцієнта біля особливості функції напружень і побудовані асимптотичні залежності напружень. Виявлено кути максимуму окружних напружень для різних значень коефіцієнта Пуассона. З'ясовано головний момент зусиль, які виникають на включенні (який треба прикласти, щоб воно не оберталось). Окрім того, було розглянуто згин балки з внутрішнім жорстким включенням, однорідний розтяг площини з двома однаковими включеннями (обчислено також взаємне зміщення включень), а також періодична задача для співвісних включень.

Через рік F.Szelągowski [1594] отримав замкнуті розв'язки для одного чи довільної скінченної кількості жорстких включень, які з'єднують між собою однакові півплощини, що розтягуються на нескінченності уздовж лінії з'єднання.

Слід при цьому зазначити, що ще у 1952 р. вийшла праця [1231], яка стосується вивчення цієї проблеми, а до того часу праці М.І.Мусхелішвілі [635] повністю опрацювали теоретичні засади розв'язування цього класу задач. Між іншим, задачі теорії тріщин та абсолютно жорсткого включення мають свої відповідники посеред контактних задач.

У зв'язку із тим, що абсолютне жорстке включення можна розглядати як тріщину, на берегах якої задані крайові умови другого роду (скажімо нульові переміщення для включення вставленого у середовище без натягу – див. напр. працю [1374]), то таке включення називають і антитріщиною (anticrack – [1255, 1493]).

Праця С. Atkinson'a [1156] стосується, між іншим, побудови точних аналітичних розв'язків для одного і двох співвісних включень (для пружного стрингера побудовано рівняння Фредгольма, яке слід розв'язувати числово).

T.R.Brussat, R.A.Westmann [1178] розглянули розв'язки для жорстких включень на прямій лінії однорідного середовища, коли на їх торці не діють зусилля, і запропонували отримані розв'язки використовувати як вагові функції при аналізі взаємодіючих пружних тонких включень. Із узагальненнями методу вагових функцій Бюкнера у теорії тріщин можна ознайомитися у [1175, 1759], а його застосуванням у теорії абсолютно жорстких включень – у [1492]. Виявлено, що вагову функцію для абсолютно жорсткого включення можна подати у такому ж вигляді, що й для тріщин.

У праці [1355] (див. теж інші подібні праці [1234, 1356]) з використання комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі розв'язок задачі про тонке симетричне відносно деякої прямої абсолютно жорстке включення (чи такий же отвір) буде з використанням розподілу з невідомими густинами на вказаній осі зосереджених сил та моментів. Побудоване інтегральне рівняння стосовно цих густин і з використанням методу малого параметра (враховано три члени розкладу) отримана рекурентна система інтегральних рівнянь, які розв'язуються у квадратурах. При цьому вдається виділити кореневу особливість у розв'язку.

S.Matysiak і Z.Olesiak [1500] з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є побудували для одного жорсткого включення в полі двовісного розтягу вирази для напружень і переміщень у довільній точці тіла, ввели коефіцієнт інтенсивності напружень як коефіцієнт при кореневій особливості нормальних напружень на лінії продовження включення, побудували асимптотичні залежності для енергії формозміни та зміни об'єму і діаграми їх сталих значень біля вістря включення.

Y.T.Chou, Z.Y.Wang та Z.Y.Wang, H.T.Zhang і Y.T.Chou [1214, 1739, 1740] лінійне абсолютно жорстке включення в полі довільно орієнтованого одновісного розтягу на нескінченності дослідили двома способами: 1) на основі методу еквівалентного включення Ешелбі з наступним граничним переходом при прямуванні однієї з півосей включення до нуля; 2) методом М.І.Мухелішвілі. Ввели у розгляд три коефіцієнти сингулярності напружень (аналогічні до трьох коефіцієнтів інтенсивності напружень, які вводилися раніше і відповідали розтягу вздовж, упоперек осі включення, а також напруженням зсуву). Обчислюється також  $J$ -інтеграл та подається його залежність від коефіцієнтів сингулярності напружень.

Доцільно звернути увагу і на працю [1368].

K.Kunert побудував фундаментальні розв'язки для зосередженої сили і одного жорсткого включення ([1443] – сила діє уздовж осі включення; [1442] – сила діє симетрично і перпендикулярно до осі включення) і для двох півбезмежних включень [1444]. У праці [1592] побудовано замкнутий розв'язок для зосередженої сили у жорстко защемленій півплощині, який можна вважати також функцією Гріна для безмежного жорсткого включення чи головну частину розв'язку для зосередженої сили біля центральної частини включення. У праці М.Г.Стащука [921] розглянуто жорстке включення, яке може повертатися, побудовані залежності для обчислення головного моменту діючих на включення сил (для нерухомого включення) та кута повертання, коли момент дорівнює нулю. Побудовано функції Гріна для зосередженої сили та моменту. Зосереджена сила біля півбезмежного включення вивчена у праці [924].

Дещо відокремлено стоїть праця [1596], де з використанням апарату комплексної змінної (потенціали Колосова – Мухелішвілі) вивчається тонке, проте скінченної товщини жорстке включення, з урахуванням трьох форм його торцевих частин (округлена, півкругла та клинова). У другій частині роботи аналізується часткове розшарування на межі матеріалів волокна й матриці. Жорсткі включення в однорідному середовищі розглянуті теж у праці



[1163], де розв'язок побудовано із використанням інтегральних перетворень, а також у [625] за повного зчеплення, гладкого контакту та відшарування.

**Включення на лінії поділу матеріалів.** Жорсткі включення на межі поділу ізотропних матеріалів вивчені у працях F.Erdogan і G.D.Gupta [1275] (тут же й абсолютно гнучкий стрингер), О.М.Сахненко [872, 874] (отримано асимптотичні формули для напружень і переміщень у випадку дії напружень на нескінченності та рівномірного нагрівання з урахуванням осциляції). Подібні результати без урахування температурного чинника через 10 років опублікували Т.Kondo, М.Kobayashi і Т.Takagi [1428]. Тонке жорстке гладке включення змінюваної товщини на межі поділу матеріалів двох півплощин, що перебувають під впливом притискуючих зусиль та напружень зсуву на нескінченності, досліджено у праці Б.М.Семенова [876]. Поза включенням – контакт із тертям. Виділено 4 зони (ідеального контакту півплощин, контакту із проковзуванням, контакту матриці із включенням та відсутності контакту). Жорсткі включення на межі поділу матеріалів за ідеального контакту вивчено теж у працях [1275, 1162] (пряма лінія поділу) та [1427, 1194] (на дузі кола). З новіших праць на цю тему згадаємо працю [1132], де аналізується взаємодія скінченної тріщини та півбезмежного жорсткого включення, які лежать на межі поділу матеріалів. Р.В.N.Prasad та ін. [1559] застосували граничний перехід від розв'язку задачі про міжфазне абсолютно жорстке еліптичне включення для отримання розв'язку для тонкого жорсткого лінійного міжфазного включення.

**Взаємодія включень між собою та з тріщинами.** Взаємодію двох співвісних включень досліджено між іншими розглянутими там проблемами у [652].

Задачу перехрещених включень теж можна вважати задачею взаємодіючих між собою жорстких включень, що збігаються до однієї точки [822, 823, 821]. розглянуто різноманітні конфігурації перехрещених під прямим кутом чи Т-подібних структур із жорстких тонких включень та тріщин. У третій також розглянуто перехрещені перпендикулярно прямолінійні тріщини чи жорсткі включення, записано системи сингулярних інтегральних рівнянь, які розв'язувалися методом механічних квадратур. У часткових граничних випадках було отримано інтегральні рівняння та їх розв'язано для задач стосовно півплощини з вільною чи жорстко защемленою межею, коли на її край виходить тріщина чи жорстке включення. Аналіз розв'язку для рівноплечого хреста із жорстких включень дав можливість зробити висновок, що така конструкція є безпечнішою з погляду концентрації напружень від лінійного включення.

Задачу перехрещених жорстких включень під впливом центрально прикладеного крутного моменту і з урахуванням гладкого контакту, коли може відбутися відшарування уздовж наперед невідомих ділянок, вивчено М.Г.Моїсєєвим у його кандидатській дисертації [614, 615, 613].

Аналіз взаємодії жорстких включень між собою та з тріщинами найбільш докладно викладений у монографіях [95, 922]. Тут відображені й результати пружної взаємодії довільно орієнтованих включень між собою та з тріщинами [920, 78, 928, 930]. Один частковий випадок стосовно взаємодії включення із тріщиною (обчислення для симетричного випадку тріщини на серединному перпендикулярі до осі включення) розглянув набагато пізніше, у 1987 р., Х.Liu [1472]. Таку задачу ще у 1978 р. розглянув також і М.Б.Левченко [531], причому окрім неї було розглянуто й випадок, коли тріщина з обох боків виходить на включення. Вивчена теж взаємодія тріщини із двома включеннями скінченної довжини [1490] та з двома півбезмежними включеннями на одній із тріщиною осі [1499]. Вже згадувався загальніший випадок подібної задачі [1132], коли на прямій лінії поділу матеріалів лежать скінченна тріщина й півбезмежне жорстке включення.

У не раз згадуваній праці [1156] досліджена теж взаємодія радіально розташованого абсолютно жорсткого включення із круговим отвором та з межею поділу двох пружних пів-

площин. Коли включення перетинає межу поділу – побудовано рівняння Вінера – Хопфа, яке точно розв'язане.

Бібліографія із взаємодії масивних включень із тріщинами є доволі численною. Більш скромно представлені праці, де розглядаються тонкостінні жорсткі та масивні пружні включення. Для прикладу згадаємо задачу взаємодії кругового пружного включення та радіально-го жорсткого лінійного [1677]. Нагадаємо, що якщо розв'язана якась задача теорії тріщин, то цілком аналогічно можна розв'язати її відповідник для тонкого жорсткого включення.

Для аналізу взаємодії макротріщин з мікротріщинами та мікротріщинами [723, 722] та тонких жорстких макровключень [923] переважно застосовують асимптотичні методи малого параметра.

**Взаємодія включень – періодичні задачі.** Питання взаємовпливу жорстких включень у періодичних задачах вивчалось у працях [1642, 911, 1332, 1388, 1206] (співвісні скінченні включення в однорідному матеріалі), [1303] (співвісні скінченні на межі поділу матеріалів), [87] (орієнтовані під довільним кутом), [1190] (одноперіодична система компланарних включень і двоперіодична система), [411] (два ряди компланарних включень в ортотропній пластинці), [924] (півбезмежні включення), [1245] (двоперіодична система з використанням методу граничних інтегральних рівнянь). Математичною основою для аналізу таких задач може бути праця В.В.Сильвестрова [887]. Для розв'язування періодичних задач механіки руйнування шарових композитів із жорсткими прошарками може придатися розв'язок крайової задачі у публікації [1743], [927] (циклічна періодичність).

**Включення уздовж викривленої лінії.** Жорсткі включення уздовж викривленої лінії розглянуті у працях [77] (уздовж дуги кола в однорідному середовищі – двовісний розтяг з урахуванням можливого повертання включення), [1374] (уздовж дуги довільної кривої, однак приклад – для дуги півкола, розташованого симетрично стосовно напрямку одновісного розтягу) та [1427, 1194] (на межі поділу матеріалів кругового включення та безмежної матриці).

**Включення у кусково-однорідному середовищі.** Вивчений вплив внутрішніх жорстких включень на напружений стан двох з'єднаних півплощин, коли включення повністю охоплене одним із матеріалів [1268, 1156, 1587], виходить одним торцем на межу поділу матеріалів [175, 316, 130] (перпендикулярно до межі поділу) чи перетинає межу [210] (перпендикулярно).

**Включення у безмежних тілах із межею.** Взаємодія внутрішніх жорстких включень із межею півплощини вивчена вірогідно вперше у 1965 р. у праці [1593] (включення паралельне до межі півплощини, причому зовнішнє навантаження здійснюється зосередженою силою уздовж серединного перпендикуляра до осі включення). Включення перпендикулярне до межі півплощини вивчене у [1156]; довільну орієнтацію включення враховано у праці [59, 13]. Причому у праці [59] межа поверхні може бути або вільною від навантажень, або жорстко зацемленою.

У публікації [842] побудовано інтегральні рівняння для системи однакових тріщин (аналогічно й жорстких включень), які перпендикулярно виходять на поверхню півплощини. Жорстке включення, що виходить на вільну поверхню під довільним кутом, аналізується у [1340]. До тематики цих праць близька публікація [1336], де для розв'язування задачі про прямокутне абсолютно жорстке включення, що частково заглиблене у півплощину, використано розв'язок задачі про три внутрішні тонкі абсолютно жорсткі включення (одне паралельне до межі півплощини, а інші два – перпендикулярні до неї) і потім, збільшуючи розмір включення, наближають вершини включень до поверхні та до горизонтального включення. Детально аналізується особливість розв'язку у кутових точках. Побудовано велику кількість графіків і таблиць для різних способів навантажування жорсткого блоку (нормальне і зсувне навантаження, згинальний момент).

Важливі результати для довільно орієнтованого у півплощині абсолютно жорсткого чи гнучкого нерозтяжливого прямолінійного включення, коли на межу півплощини діє довільно нахилена зосереджена сила отримали A.V.Doym, A.Gursoy [1247]. Включення моделюють розподіленими з невідомою густиною зосередженими силами і з використанням відповідної функції Гріна та інтегрального перетворення Фур'є, отримано сингулярні інтегральні рівняння, які дали можливість обчислити КІН для різних значень параметрів задачі.

Включення, перпендикулярне до меж смуги за її розтягу, у 1973 р. дослідив G.D.Gupta [1330]. На основі цього розв'язку граничним переходом було побудовано розв'язок задачі для защемленої на торці півбезмежної смуги. L.M.Keer [1410] розв'язав задачу про поєднання жорстким ребром двох різних смуг, на які діють зусилля розтягу та згинальні моменти. Пакет із півплощини та смуги, коли у одному із складових міститься довільно орієнтоване абсолютно жорстке включення, розглянуто у [931].

Досліджена симетрична задача для клину з внутрішнім радіальним жорстким включенням, коли на береги клину діють гладкі штампи [11], а також для навантаженого жорсткого ребра, що лежить на межі поділу матеріалів з'єднаних клинів і виходить одною вершиною у вістря клинового пакету [31]. Відомості про деформування в'язкопружного клина, коли на його серединній лінії розташовані жорсткі включення, а на поверхні симетрично розташовані меланівські (гнучкі) накладки, можна знайти у [10].

Цікаве дослідження для довільно орієнтованої тріщини чи абсолютно жорсткого нерухомого включення у півплощині з тонким покриттям поверхні здійснене у [689]. Побудоване інтегральне рівняння для загального випадку. Якщо покриття відсутнє чи абсолютно жорстке, то отримані наближені замкнуті розв'язки задачі. Якщо дефект перпендикулярний до межі півплощини, то отримано зв'язок між КІН  $K_i^{\text{ажв.в}}$  для абсолютно жорсткого включення біля вільної поверхні та  $K_i^{\text{т.ж}}$  для тріщини біля защемленого краю

$$(3 - \kappa) \left( K_1^{\text{т.ж}} - iK_2^{\text{т.ж}} \right) = 4 \left( K_1^{\text{ажв.в}} - iK_2^{\text{т.ж}} \right).$$

**Відшарування включень.** Оскільки жорсткі включення доволі добре моделюють розподіл напружень у композитах із більш податною матрицею, то дуже важливим є вивчення проблеми про часткове відшарування таких включень від матриці. Велика кількість праць з цієї тематики стосується випадку, коли один берег включення є у повному контакті з середовищем, а другий – вільний від напружень. Можливо, вперше така задача сформульована і розв'язана ще у 1940 р. Д.І.Шерманом [1121], а потім у 1962 р. Г.П.Черепановим [1080]. Для дугового включення подібні результати отримав F.Erdogan [1270]. Подальший розвиток методів розв'язування цієї проблеми, у тому числі і з урахуванням часткового контакту відшарованої частини, можна знайти у працях [1051, 1230, 802, 1158, 926, 1310, 32, 889, 1133, 886, 359].

Навантажене зосередженою силою жорстке включення з відшаруванням у півплощині розглянуто у [845]. Навантажена розподіленим зусиллям плита, яка притискається до верхнього берега охоплюючої її щілини у півплощині вивчається у [126]. Задачу пропонується розв'язувати методом Жемочкіна, однак приклад розрахунку стосується лише жорсткої балки. Жорстке включення з одним відшарованим краєм, що виходить перпендикулярно на край півплощини, аналізує публікація [815]. Для аналізу напруженого стану біля жорсткого включення із відшарованим краєм використовувався і МСЕ із спеціальними сингулярними елементами [102]. Підростання тріщин (фактично взаємне проковзування матеріалів) на межі жорсткого волокнистого включення з урахуванням сил тертя між компонентами вивчене у [1179]. Така модель споріднена із моделлю смуг пластичності Дагдейла. Див. з цього приводу теж праці [614, 615, 613] про відшарування хрестовидного жорсткого включення. Опис роботи [616] поданий нижче у відповідному підпункті, що стосується пружних включень.

**Нелінійні та непружні моделі.** К. Hayashi [1343] побудував аналітичний розв'язок задачі біля вістря півбезмежного жорсткого включення у випадку моделі матеріалу Ромберга – Осгуда  $\varepsilon = \sigma \left[ 1 + \alpha (\sigma / \sigma_1)^{n-1} \right] / E$ . Виявилось, що особливість напружень у кінці жорсткого включення, як і в усіх інших випадках, така сама, як і у тріщині у такому ж матеріалі.

Низку задач для жорстких включень у випадку, коли їх кінцеві частини охоплюють пластичні смуги типу Дагдейла (аналогічно до того, як це було зроблено у працях В.Т.Вітвицького та В.А.Кривеня [151, 469] для антиплоскої задачі), розв'язали Л.Т.Бережницький та М.М.Кундрат [70–72, 492]. Визначені розміри пластичних зон, пружно-пластичний стан у матриці під час розриву волокна на два оцінюють за допомогою граничного переходу у пружно-пластичному розв'язку для двох жорстких включень. Застосування методу скінченних елементів до аналізу локалізованих пластичних зон [877] підтвердило слушність гіпотези про облямування пластичною смугою кінцевої частини включення.

Аналітичний розв'язок плоскої задачі для одного лінійного включення скінченної довжини без обмежень на довжину зон передруйнування отриманий у згаданих працях, а також більш ранніх публікаціях [1179, 1637], дав меншу від кореневої – логарифмічну особливість напружень в околі вершин включення. У першій із цитованих праць вважається, що кінцеві частини включення відшаровуються від матриці і між берегами утворених тріщин відбувається проковзування з взаємодією сил тертя.

Пізніше М.М.Кундрат розробив досконалішу двофазну модель, коли між пластичними смугами (перша фаза) та вістря включення формується дуже коротка зона розпушення матеріалу (друга фаза), де дотичні напруження лінійно зменшуються від нуля у вістрі до значення на початку пластичної смуги [93, 94, 493]. За допомогою такого підходу вдалося позбутися особливості поля напружень поблизу вістря жорстких включень [490].

Задачу для абсолютно жорсткого еліптичного чи тонкого лінійного включення у в'язкопружній пластинці розглянули С.О.Калоєров та А.Б.Мироненко [368].

Зацікавлення моментною моделлю теорії пружності Коссера [855, 23\*] дало можливість отримати розв'язок задачі для лінійного жорсткого включення у пластині Коссера [25\*]. Виявилось, що так само, як і у теорії тріщин, врахування несиметричності тензора напружень не дає підстав сподіватися на усунення особливості напруженого стану біля вістря тонкого жорсткого включення.

### Тонкі пружні й непружні включення (плоска задача)

**Включення у необмеженому однорідному і на межі кусково-однорідного середовища.** Початок математично строгому вивченню тонкостінних включень з пружного матеріалу поклала у 1967 р. праця [1097], де сформульована задача плоскої деформації ізотропного тіла з абсолютно гнучким тонким прямолінійним ортотропним включенням безмежної довжини. Були побудовані досить загальні умови взаємодії такого включення з довкіллям, які у їхньому спрощеному варіанті (модифікована модель стрингера) були застосовані до розв'язування конкретних задач ([39, 25, 364, 591, 625, 870, 1062–1064, 1096, 1097, 1181, 9\*, 15\*, 18\*, 19\*] та багато інших), зведених до інтегральних рівнянь типу Прандтля. З використанням розв'язку із стрибком напружень на криволінійній лінії П.И.Перлін [18\*] та умов [1097] розв'язав ту ж задачу про безмежний гнучкий стрингер між двома ідентичними піплощинами. N.C.Remedios та W.C.Wood [1568] розглянули модель включення-стрингера, уперше врахувавши зчеплення торців із матрицею і передачу через них зусиль від матриці до волокна. Для побудови розв'язку для отримання системи лінійних алгебричних рівнянь використовуються метод рядів Фур'є та заміна неперервного розподілу зусиль уздовж волокна дискретним. Особливість напружень на торцях включення не враховується (вважається, що там

діють зосереджені торцьові сили). Для прикладу розглянуто скловолокно в оточенні епоксидної смоли.

Відзначимо, що у [1181] отримані розв'язки для волокна змінного профілю (еліптичного профілю (отримана постійна деформація включення) та коли вістря має точку звороту) і відзначається хороше узгодження числових результатів з даними експерименту [1141] та МСЕ-аналізу [1186]. Метод функцій стрибка, названий методом розривних розв'язків, що теж враховує стрибки напружень та переміщень, дав можливість Г.А.Морарю [625] на основі моделі стрингера дослідити задачі для гнучких прямолінійних включень змінюваної товщини за повного контакту та з урахуванням відшарування.

Розвиток моделі стрингера дав можливість Д.В.Гриліцькому та Г.Т.Сулиму сформулювати й розв'язати низку задач [971, 960, 236] для одного чи періодично повторюваних міжфазних включень, де враховується також дія окрім напружень на нескінченності й зосереджених сил та умови на торцях включення. Модифікацію умов моделі стрингера, яка нехтує поперечними деформаціями, використали F.Erdogan і G.D.Gupta [1275] (стрингер на межі двох середовищ), С.Аtkinson [1156] (отримано рівняння Фредгольма) та Т.Р.Brussat, R.A.Westmann [1178]. В останній праці пропонується на основі розв'язків задачі для окремого пружного та абсолютно жорсткого включень побудувати функцію впливу пружності і надалі використовувати її для побудови на основі розв'язків для систем абсолютно жорстких включень чи абсолютно жорсткого включення у скінченних тілах відповідних розв'язків для пружних відповідників. З використанням моделі стрингера будується також інтегральне рівняння для включення в однорідній пластинці М.Д.Солодовником [897] та зазначається спосіб його розв'язування.

У всіх згаданих працях нехтувалося відносним переміщенням берегів включення і досліджувався лише стрибок на включенні дотичних напружень, а у працях [510, 902] нехтувалося стрибком вектора напружень та вивчалось розходження берегів неоднорідності. Важливі висновки зроблено з граничного переходу у розв'язку Г.П.Черепановим, Р.С.Кочаровим та О.В.Соткілавою [1086] задачі для еліптичного включення при силовому і температурному нагріванні та зіставлення отриманих асимптотичних залежностей із розв'язком для тонкого податного включення за моделлю вінклерової основи. Вказано умови застосовності цієї моделі.

Так само, як і у працях Г.П.Черепанова та у своїх працях для включень у просторових задачах, В.В.Панасюк, О.Є.Андрейків, М.М.Стадник та І.Я.Горбачевський до аналізу тонких включень використали модель основи Вінклера – тонке еліптичне включення [695], для якого побудовано залежність між коефіцієнтами концентрації напружень та КІН; побудовано аналітичні розв'язки для класу овальних включень [709, 708, 906]; отримано наближений аналітичний розв'язок для стрибків переміщень на включенні профілю Векуа [905]. Задачу для такого самого включення, розглянутого І.Н.Векуа під час побудови розв'язку рівняння Прандтля обтікання крила літака скінченного розміру [1557, 1558], раніше вивчав А.В.Чантурія [1073].

Тонке пружне включення у пластині, модуль пружності якої змінюється за експонентою уздовж осі включення вивчали З.С.Олесяк, О.О.Євтушенко та В.Й.Паук [1540, 312].

І перший, і другий підходи до постановки задачі для пружного включення є однобічними, оскільки перший придатний лише для гнучких, але жорстких щодо розтягу включень а другий – для дуже податних включень. Ці обмеження усунули праці Г.Т.Сулима з Д.В.Гриліцьким, де на додаток до стрибка переміщень спочатку [239] був врахований стрибок дотичних, а пізніше [237] і нормальних напружень. Після цього постановка задачі тонких включень набула завершеного вигляду і отримані співвідношення дали можливість отримати всі можливі граничні часткові випадки – тріщини, однорідної матриці та абсолютно жорсткого включення.

Звернемо уваги на оригінальний підхід [598], пов'язаний із використанням асимптотичних методів та виділення у тілі тонкого шару, частину якого складає включення сталої товщини (безмежне кусково-однорідне включення). Аналогічна осесиметрична задача роком швидше була розглянута у [500].

У 1983 р. А.О.Сяський та В.О.Сяський започаткували дослідження напружено-деформованого стану тонких викривлених включень на межі поділу середовищ. Перша праця [1019, 1015, 1020] стосувалася аналізу включення по дузі кола (розімкнутого) на межі поділу матеріалу пластини з круговою шайбою. Для включення було вибрано модель стрижня у вигляді пружної лінії, що сприймає розтяг та згин у площині пластини, що є частковим випадком загальнішої моделі тонкого стрижня подвійної кривизни з урахуванням навіть поперечного зсуву [717]. У тому ж 1983 р. І.І.Бернар та В.К.Опанасович [99] з використанням методу лінійного розвинення потенціалів дослідили тонке пружне включення по дузі кола в однорідній ізотропній пластинці. Загальніші результати для включення уздовж довільної кривої лінії із використанням методу функцій стрибка були отримані у праці [682] (записано інтегральні рівняння, асимптотики поля напружень та приклади включення по дузі кола, пів-еліпсу, параболи).

В.В.Мікаелян [591] з використанням апарату рядів Фур'є розв'язав симетричну задачу згину закріпленого жорстко на протилежних сторонах прямокутника, коли нормальна сила передається до конструкції через розташований у центральній частині пружний стрингер (від краю до краю прямокутника). Такого типу задачі можна розв'язувати (відносно легко це зробити наближено) за допомогою рівнянь плоскої задачі теорії пружності [303, 299]. З використанням методу лінійного розвинення потенціалів у першій згаданій праці розглянуто задачу згину смуги-балки з розташованим на нейтральній осі тонким пружним включенням за доволі загального типу навантаження, а у другій – задачу згину зосередженою силою консольної балки з внутрішнім вертикально розташованим тонким пружним включенням.

Приклад розв'язування задачі для тіл із попередніми напруженнями та включенням містить праця [4\*], де на межі поєднання двох попередньо напружених півплощин розташоване півбезмежне включення-стрингер.

І.Т.Денисюк застосував якісну модель (с. 94–100 [289]) тонкостінного пружного включення. Така модель дала можливість отримати кількісні значення лише для граничних випадків жорсткого включення та тріщини. Параметрами моделі є пружні сталі матеріалів і довжина включення (його товщини там немає).

Модель [237] з використанням техніки гомогенізації композитів була використана [1786] до аналізу впливу тонкого пружного включення на межі поділу матеріалів періодично шарових композитів.

Методи аналізу тонких пружних включень були також застосовані до аналізу щілини, заповненої рідиною чи газом. Перша така робота стосовно стисливої рідини, видається, належить О.О.Євтушенку, Г.Т.Сулиму [315]. Тут визначаються тиск та КІН біля вістря тріщини у випадку дії напружень на нескінченності. Подібний аналіз на основі моделі податного включення [510] здійснено у роботі [932], опублікованій у тому ж журналі без посилань на попередників. Задача для заповненої газом щілини у термопружній постановці з урахуванням можливого співдотику берегів тріщини та дії зосереджених сил у масиві вивчена у праці [482].

**Включення у необмежених кусково-однорідних середовищах.** У роботі [311] з використанням найбільш загальної моделі [237] на основі методу функцій стрибка та із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна було побудовано систему СІР для включення, що довільно орієнтоване у одній із з'єднаних між собою півплощин. Обґрунтовано вибір обходу полюсів для оцінки ядер інтегрального рівняння та аналізуються УКІН. У праці [8] роз-

глянуто задачу для двох стрингерів, що лежать на одній прямій у різних з'єднаних між собою півплощинах.

Е.Х.Григорян [202] побудував інтегральне рівняння для стрингера, який одним своїм кінцем лежить (перпендикулярно) на межі поділу матеріалів двох півплощин. У цей самий час було започатковано дослідження питання необмеженого наближення перпендикулярного включення до межі поділу із використанням загальної моделі методу функцій стрибка [310, 213, 314]. Вивчено зміну порядку особливості та розподіл дотичних напружень на поверхні неоднорідності.

Цикл досліджень про взаємодію тонких лінійних та масивних пружних включень у необмеженому середовищі за допомогою методу лінійного розвинення потенціалів здійснили Д.В.Грилицький, В.К.Опанасович і Л.О.Тисовський. Вкажемо на такі праці: [224] – побудовані рівняння для довільно розташованого тонкого включення зовні масивного кругового включення (обчислено вивчені узагальнені КІН для випадку кругового отвору); [225] – аналогічна задача для системи лінійних включень та масивного кругового включення; [223] – вивчені узагальнені КІН для довільно розташованого тонкого включення зовні масивного еліптичного включення; [220] – побудована система двох сингулярних інтегральних рівнянь для двох стрибків на включенні та інтегральні рівняння щодо густини потенціалів на контурі масивного включення довільної форми. Розраховано КІН для тонкого включення та коефіцієнти концентрації напружень на масивному круговому включенні. Найбільш загальні рівняння задачі про взаємодію довільної кількості довільних масивних та лінійних пружних включень вивчена у праці [222]. Докладно досліджено випадок, коли лінійне пружне включення взаємодіє із еліптичним отвором.

**Включення у необмежених тілах із межею.** Б.М.Нуллер та Л.Ф.Спеівцева [661] дослідили задачу для півбезмежного включення, яке під довільним кутом виходить на край півплощини. Таке включення моделює прошарок вивітреної породи, яка більшою мірою сприймає деформацію зсуву (ця властивість моделюється на основі вінклерової моделі), аніж поперечного стиску. Таким чином на такому включенні виникає лише стрибок дотичних напружень. Вважається, що модуль пружності моделі включення змінюється за законом  $K(r) = 1/(\beta r + \gamma r^{1-\omega})$ ,  $\beta, \gamma \geq 0$ ,  $\omega$  – довільне дійсне число.

Вивчення концентрації напружень біля включення у півплощині зі скінченим включенням у півплощині було ймовірно вперше започатковане у 1978 р. на основі методу стрибків [983] і розвинуте у праці [214]. Згодом було запропоновано загальний підхід до вивчення системи тонких включень у півплощині, у тому числі й викривлених [975] (конкретні дослідження для включення, перпендикулярного до поверхні півплощини). Подібну задачу для одновісного розтягу півплощини із довільною кількістю прямолінійних включень довільної орієнтації вивчено і у праці [680].

Ю.І.Ларькін [527] дослідив важливу для будівельної механіки задачу про передачу нормальної зосередженої сили через підкріплення (балка, що сприймає згин та розтяг-стиск) до півплощини, у якій на продовженні лінії дії сили розташоване тонке ребро, яке моделюється стрингером.

Задача для тонкого включення, що лежить на межі поєднання двох різних смуг, вивчена методом функцій стрибка у праці О.О.Євтушенка [309].

До розглянутого класу задач належить і задача про прямолінійне пружне включення-стрингер (також і жорстке) чи включення-балку (за рівняннями Кірхгофа – Лява), яке ортогонально вийшло на межу кругового отвору у необмеженій пластинці [451].

Низка робіт стосується тонких радіальних включень у клинових областях: [894] (півбезмежний стрингер на осі симетрії клину, який доповнює інший клин до повної площини – виявлена асимптотика напружень біля вершини стрингера); [6, 4, 5] (досліджені задачі про дію зосередженої сили у вершині однорідного клину чи клину, складеного з двох клинів од-

накового розхилу, коли з вістря виходить півбезмежний (складений із двох частин) чи скінченний стрингер (на продовженні контакт між клинами відсутній); [36] (поєднання двох клинів із внутрішньою тріщиною чи стрингером).

**Кусково-однорідні включення.** Працею В.С.Саркісяна та Е.Х.Григоряна [871] для безмежної смуги із безмежним включенням на її осі включення був започаткований аналіз задач із кусково-однорідними включеннями (за моделлю стрингера). Праця [203] дослідила безмежне включення-стрингер у необмеженій пластині, коли властивості центральної частини включення різняться від властивостей периферичних частин. Аналогічні задачі для клинів [6, 4, 5] згадувалися вище, так само, як і праці [598] та [500].

**Включення у тілах скінчених розмірів.** За допомогою парних інтегралів-рівнянь методом А.А.Баблюяна (подаючи функцію Ейрі у вигляді рядів за гіперболічними синусами і косинусами) А.А.Хачикян [1061] докладно розглянув симетричну задачу про двовісний розтяг (чи з іншими крайовими умовами) прямокутної пластинки із тонким пружним включенням-стрингером. Доведено квазі-цілком регулярність отриманої системи лінійних алгебричних рівнянь. Як часткові випадки розглянуто смугу з одним включенням чи із періодичною системою включень, паралельних (дано числовий аналіз) чи перпендикулярних до країв смуги; двоперіодичну систему включень у безмежній пластині та ін. Подібним методом розв'язана задача для попередньо напруженого стрингера, кінці якого виходять на межі прямокутника [869]. Обчислення здійснені для поставленої задачі та відповідного періодичного аналога. У праці Л.О.Тисовського [1025] подано інтегральне рівняння задачі для довільної системи пружних включень у круговому диску та подано результати числового аналізу рівномірного всебічного розтягу диску із одним включенням, розташованим симетрично на діаметрі. Тришарова ізотропна кругла пластинка з тонкими прямолінійними включеннями у одному із шарів, коли між шарами існує ідеальний механічний і тепловий контакт, основи пластинки теплоізовані, а на зовнішній межі задана температура, вивчена у праці В.К.Опанасовича, Л.О.Тисовського [683].

**Взаємодія тонкостінних дефектів між собою, з тріщинами та отворами. Періодичні задачі.** Періодичні задачі для пружних включень, причому на межі поділу двох середовищ, у різних модельних представленнях включень вивчалися вперше у роботах [987, 237, 236]. У випадку застосування моделі стрингера обчислення прикладів здійснювалося для включень на межі поділу, а у випадку повноцінної моделі включення – лише для співвісних включень у однорідному матеріалі. Періодичну задачу для системи лінійних компланарних включень (одне над другим) в ізотропному матеріалі дослідили Р.М.Мартиняк та Г.Т.Сулим [578]. Періодичний відповідник задачі для співвісних тонких податних включень за дії однорідного поля напружень на нескінченності у постановці [510] розглянуто у [936]. Споріднену задачу для податних включень із використанням моделі вінклерового податного включення еліптичного профілю через десять років розглянули М.М.Стадник та І.Я.Горбачевський [910]. У 1985 р. В.К.Опанасович і М.С.Драган [679] звернулися до періодичної задачі для нахилених під довільним кутом пружних включень. Періодичну задачу для поздовжнього розтягу тіла з круговими отворами та стрингерами між ними на лінії, яка проходить через центри кіл, вивчили М.З.Вулицький та І.Д.Суздальницький [163]. Розв'язки періодичних задач можуть служити наближенням відповідних неперіодичних задач для смуги.

**Двоперіодичні задачі.** Двоперіодичні задачі можуть служити наближенням розв'язку відповідних задач для тіл скінчених розмірів у формі представницького елемента, бути теоретичною основою для визначення ефективних характеристик регулярних композитів [199], а також служити наближеною оцінкою концентрації напружень у тілах з великою скінченною кількістю неоднорідностей. Незважаючи на велику важливість аналізу таких задач, увага до них з огляду на складність не є належною. У праці В.М.Долгіх та Л.А.Фільштінського [298] розглянуто таку задачу для абсолютно жорстких та податних на згин включень-



стрингерів. Обчислення напружень у волокні та ефективних характеристик композиту за розтягу перпендикулярно до осі включень здійснено для трикутного представницького елемента. Подібна задача для анізотропної матриці розглянута у [297]. Цікавим є дослідження В.М.Долгих [296] над пошуком оптимального профілю гнучкого армувального волокна-стрингера, яке сприймає лише деформації розтягу-стиску, для забезпечення його однакової поздовжньої міцності. Вважається, що міцність включення пов'язана із поздовжньою жорсткістю (добутком площі поперечного перерізу та модуля пружності). Розрахунок ефективних характеристик стрічкового композиту з використанням підходу і моделей методу функцій стрибка здійснив Д.В.Лозинський [541].

**Неперіодичні задачі.** Модифікацією методу функцій стрибка В.К.Опанасович і М.С.Драган [678] записали систему рівнянь для системи включень та дослідили взаємодію двох із них. Модель вінклерівських включень була використана М.М.Стадником та І.Я.Горбачевським [912] для вивчення взаємодії двох включень в одній площині та відповідної періодичної системи. Разом із тим на основі класичних силових і деформаційних критеріїв руйнування сформульовані критерії зародження руйнування біля тонкого включення. Огляд результатів дослідження згаданих у попередній праці задач та періодичної системи компланарних (одне над другим) включень зробили В.П.Силованюк з І.Я.Горбачевським [883]. Практично одночасно було вивчено взаємодію включень із тріщиною: тріщина довільним чином нахилена до безмежного включення-стрингера у безмежній площині за її двовісного розтягу [1215]; пружного включення на серединному перпендикулярі до міжфазної тріщини [209]; стрингера зі співвісною тріщиною [322].

**Відшарування включень.** У працях С.В.Босакова [128, 127, 126] балкова модель (у розв'язок входить циліндрична жорсткість плити) разом із методом ортогональних поліномів застосована до аналізу контактних напружень у тонкому пружному включенні (стала жорсткість), використаному як анкер, коли його один край є у ідеальному, а другий – у гладкому контакті із матрицею. Умови контакту задовольняються у скінченній кількості точок на основі відомого аналітичного розв'язку про дію зосередженої сили на край тріщини. Коефіцієнти інтенсивності на краях області порушення суцільності автора не цікавлять. У роботі [204] розглянута задача про симетричне (з обох боків) порушення контакту між безмежним включенням на лінії між двома ідентичними півплощинами.

Використання узагальненого перетворення Фур'є дає сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язується із використанням ортогональних поліномів Якобі (осцилююча особливість тріщини на межі поділу матеріалів). М.Г.Моїсєєв з Г.Я.Поповим [616] дослідили відшарування жорсткого чи пружного включення-стрингера під дією прикладеної до нього ексцентрично зосередженої сили у припущенні, що поверхні контакту матеріалів не можуть сприймати зусиль розтягу і там виникає розшарування.

Н. Sekine [1600] вивчив механіку деформування включення-стрингера у безмежному ізотропному масиві, який розтягується уздовж осі включення. Вважається, що до центральної зони ідеального контакту матеріалів з обох боків прилягають двофазові зони порушеного контакту, причому у перших – контакт гладкий (без тертя), а у других, що прилягають до вістря включення (тут нормальні напруження від'ємні) – із тертям. Припускається, що матеріал матриці у зонах контакту включення не відходить від нього.

**Контактні задачі для тіл із включеннями.** Д.В.Гриліцький, О.О.Євтушенко та В.Й.Паук розглянули декілька задач про тиск штампа на поверхню півплощини, всередині якої розміщене тонке пружне включення [313, 211]. Вивчено концентрацію напружень на краях штампа, у кінцях включень, коли штамп притискається до півплощини нормальною та зсуюється дотичною силою.

**Контактні задачі з урахуванням проміжних шарів.** Доволі часто контакт між тілами відбувається не безпосередньо, а через якийсь рідкий чи твердий проміжний шар. Якщо вра-

ховувати тонші фізичні чи хімічні механізми, то такий шар може моделювати результати механічної (наклеп) іонізації, азотування, утворення окисненого шару на вільній поверхні матеріалу, поверхневого натягу тощо. Оскільки такий тонкий шар перебуває між двома твердими деформівними чи недеформівними тілами, то до визначення його впливу також можна застосовувати методи теорії тонких включень. У праці Г.П.Александрової [28] з використанням інтегрального перетворення Фур'є побудоване й досліджене інтегральне рівняння задачі про вплив поверхневого натягу на поверхні півпростору, у який втискується штамп. Поверхневий натяг моделюється натягнутою на поверхню пружною мембраною, яка сприймає зусилля розтягу.

Н.Х.Арутюнян, В.М.Александров, М.Х.Мхитарян, Є.В.Коваленко та ін. [39, 414, 21, 23, 19, 413, 22, 25] розглянули задачі про контактну взаємодію (статика та усталений рух) штампів доволі загальної форми на півплощину чи смугу з урахуванням проміжних шарів, які деформуються за рівняннями теорії тонких плоских пластин. Модель рідкого проміжного шару побудована і використана у [18, 412, 22]. Тонке кругове проміжне підкріплення [638, 1028] у циліндричній фрикційній парі (циліндр – безмежний простір та циліндр – циліндрична труба відповідно) моделюють модифіковані рівняння Кірхгофа – Лява, які отримані на основі припущення, що поперечна деформація кільця дорівнює нулю, а для залежності поперечної сили від переміщень використані рівняння опору матеріалів теорії кривих брусів. Модель м'якого покриття у контактній задачі для гладкого штампа (задача Герца) використав М.І.Матthewson [1498].

Цікаві теоретичні та експериментальні дослідження сумісного деформування двох пластин, між якими без тертя лежить тонка металева прокладка, в навантаження прикладене до поверхонь пластин, отримані у працях [1509, 1508].

**Контактні задачі, розв'язані засобами методу міжконтактних прозорів. Плоскі силові задачі. Притискання півплощин.** У суто силових (пружних) задачах розглянуто питання формування на межі поділу гладких півплощин, що притискаються різними силовими чинниками (напруження на нескінченності, сили, моменти) зон втрати контакту [986, 14\*] (з'ясовано, що найменші сили для формування щілини заданої довжини мають бути прикладеними на певній відстані від межі поділу півплощин). Праця Р.М.Мартиняка [577] стосується аналізу задачі про визначення напружено-деформованого стану однорідної та кусково-однорідної площини, коли у тонкий отвір (на межі поділу матеріалів) вставлено з певним натягом без тертя абсолютно гнучке, нестисливе або абсолютно жорстке тонке включення і до берегів контактуючих із включенням півплощин симетрично прикладені однакові нормальні сили, які відтягують матеріал від включення. Вважається, що відшарування включення може бути повним або частковим (в останньому випадку зону контакту не шукають). У [559] розглянута подібна періодична задача. Різні задачі, коли в одному тілі (жорсткому) є неглибокі виступ чи виїмка, яка може бути частково заповнена рідиною, розглянуто у працях Г.С.Кіта, Р.М.Мартиняка, І.М.Мачишина [560, 583, 584, 403].

**Плоскі силові задачі. Зсув півплощин.** Якщо у цитованих вище працях розглядалося лише притискання півплощин одна до одної, то публікації [564, 562, 563] стосувалися вивчення пружної взаємодії двох притиснутих до себе півплощин зі збуреннями геометрії у випадку додаткового взаємного поперечного зсуву півплощин.

**Нелінійні задачі.** Ефекти в'язкопружності вивчені поки що лише у включеннях (прошарках) необмеженої довжини [9, 1394]. Задача для в'язкопружного тонкого безмежного прошарку розглянута у [1576].

#### 47.4. Антиплоска задача для тіл з тонкими включеннями

##### Абсолютно жорсткі включення

**Включення у безмежному однорідному середовищі.** Дослідження поздовжнього зсуву розпочала у 1975 р. праця [73], де методом конформних відображень для гострокутного абсолютно жорсткого включення були побудовані асимптотичні залежності для напружень та переміщень та введено поняття КІН біля тонкого вістря абсолютно жорсткого лінійного включення. У 1980 М.Г.Стащук [925, 95] з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної окремо розглянув прямолінійне скінченне та півнескінченне абсолютно жорстке включення, коли діють зосереджені сили (розв'язок має описку у знаку перед радикалом формули (II.94)). У монографії [22] можна знайти розв'язок задачі про рух абсолютно твердого тонкого включення у смузі в'язкої рідини. Лише у 1986 р. з'явилося, вірогідно, перше дослідження антиплоскої задачі для жорсткого включення на Заході [1740]. Тут з розв'язку для абсолютно жорсткого еліптичного циліндра, отриманого за допомогою методу фіктивних сил Ешелбі, здійснений граничний перехід (подібно до того, як це було зроблено роком раніше для плоскої задачі [1739]).

Побудовані розв'язки [272] для системи співвісних тріщин чи жорстких включень у безмежному масиві, модуль зсуву якого змінюється у перпендикулярному до площини дефектів напрямі за степеневим законом.

Метод функцій стрибка, названий методом розривних розв'язків, який теж враховує стрибки напружень та переміщень, дав можливість Г.А.Морарю [625] дослідити задачі для тріщини та тонкого жорсткого включення у повному та відшарованому контакті з матрицею.

**Взаємодія включень між собою та з тріщинами.** Великий цикл досліджень взаємного впливу зв'язаних між собою жорстких стрічкових включень за умов антиплоского деформування, коли вони витягуються із масиву, здійснили І.П.Шацький та А.М.Кундрат [1110, 1105, 1108, 1106, 1109, 1107, 1103]. Така постановка задачі про зв'язані включення має значення, якщо до включень (арматури) безпосередньо прикладене навантаження. Якщо ж навантаження прикладене поза включеннями (не нескінченності, чи силами всередині масиву), то немає різниці між тим, чи включення зв'язані між собою, чи ні, оскільки у задачах про жорсткі включення, як правило, вимагається їхня нерухомість.

Два перехрещені між собою абсолютно жорсткі включення різної довжини (чотири жорсткі включення, які виходять із однієї точки) розглянуті одеськими науковцями у 1985–87 рр. [33, 35]. В.В.Сільвестров і Н.Н.Тімофєєва [888] дослідили цікаву задачу про взаємодію співвісної системи з періодичного масиву тріщин у лівій частині цієї осі ( $x \leq 0$ ) та періодичної системи абсолютно жорстких включень іншої довжини у другій частині півосі ( $x > 0$ ).

**Включення уздовж викривленої лінії.** У дослідженні [1052] зроблена перша спроба побудувати та розв'язати інтегральне рівняння для включення уздовж дуги кола із зведеною жорсткістю, однак аналіз здійснений лише для тріщини (абсолютно податне включення) та включення з модулем зсуву удвічі більшим за модуль зсуву матриці. Граничний випадок абсолютно жорсткого включення не вивчався. Набагато пізніше до цієї проблематики підійшли китайські механіки [1205, 24\*] X.Zhang та ін. У останній праці внаслідок моделювання включення розподіленими зосередженими силами, було вивчено пружну взаємодію у пружному просторі викривлених тонких жорстких включень із пружним циліндричним включенням.

**Включення у кусково-однорідному середовищі.** Праця [1758] стосується задачі про жорстке лінійне включення, розташоване конфокально всередині пружного еліптичного включення в необмеженому пружному просторі.

**Включення у безмежних тілах із межею.** У 1983 р. І.П.Бутвинник, Л.Т.Бережницький та В.І.Похмурський [131] побудували характеристичні рівняння для визначення порядку сингулярності для півбезмежного жорсткого включення, яке під довільним кутом виходить на плоску межу поділу двох матеріалів, або лежить на одній із граней суцільного середовища, складеного із двох клинів. Формулювання та інтегральне рівняння подібної задачі для жорсткого стрічкового включення, що виходить перпендикулярно на вільну межу півпростору, пізніше зробили Л.К.Попова та В.Г.Попов [816]. Асимптотичний розв'язок за малим параметром задачі для розташованого на поздовжній осі смуги (серединній площині шару) жорсткого включення з урахуванням його відшарування отриманий Б.І.Сметаніним [895]. Отримані формули для дотичних напружень на поверхні контакту включення із смугою та залежність між головним вектором прикладених до включення зусиль та його зсувом.

**Відшарування включень.** Поряд із згаданою вище працею Б.І.Сметаніна [895] слід теж звернути увагу на працю [1370], де вивчається відшарування жорсткого видовженого еліптичного включення у його кінцевих частинах. У праці [1405] розглянуто повне відшарування одного берега жорсткого включення, а у [1407] за допомогою граничного переходу у задачі про еліптичне включення із тріщиною на межі поділу матеріалів – часткове відшарування на одному із берегів. Граничним переходом у останньому розв'язку отримано розв'язок для повністю відшарованого з особливостями порядку  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{4}$ .

**Нелінійні та непружні моделі.** Задачі антиплоскої деформації тіл з абсолютно жорсткими включеннями є зручним об'єктом для дослідження ефектів нелінійності, зокрема пластичності. У 1965 р. Г.П.Черепанов [1076] під час дослідження одної контактної задачі отримав результат, який можна трактувати так, що для півбезмежного жорсткого включення у ідеальному пружно-пластичному матеріалі під впливом дії однорідного поля дотичних напружень на нескінченності пластична зона має форму круга (кругового циліндра), діаметр якого лежить на включенні, торкаючись одним кінцем його вістря. Умови пластичності Трекса – Сен-Венана та Губера – Мізеса у антиплоскій задачі збігаються. Через 14 років Р.С.Гром'як [257] незалежно відтворив ці результати у безпосередній механічній постановці пружно-пластичної задачі теорії тонких включень.

Дослідження пружно-пластичної задачі для жорсткого включення скінченної довжини [466] у матеріалі Ільюшина – Генкі, для якого  $(1 + \varphi)\sigma_{xz} = G \partial w / \partial x$ ,  $(1 + \varphi)\sigma_{yz} = G \partial w / \partial y$ , де параметр  $\varphi$  дорівнює нулю у пружній зоні та більший від нуля у пластичній, виявило, що поки зовнішнє навантаження  $\tau$  менше  $\tau_y / 3$ , пластичні зони облямовують торцеві частини і є майже коловими, а зі збільшенням навантаження вони розширюються швидше у напрямі нормалі до осі включення.

Експерименти і практичний досвід дають, що крім континуальних пластичних зон можливе також існування дискретних зон у вигляді смуг пластичності. Г.П.Черепанов запропонував робити вибір поміж континуальними та дискретними розв'язками на основі принципу максимальної швидкості зростання дисипації енергії [1081].

У роботах В.Т.Вітвицького та В.А.Кривеня [151, 469] з використанням теорії функцій комплексної змінної та конформних відображень за аналогією до пластичної смуги Дагдейла у плоскій задачі [693, 694, 111] було запропоновано вважати, що пружно-пластичний розв'язок для жорсткого включення у ідеальному пружно-пластичному матеріалі, можна отримати на основі припущення про пластичну зону у вигляді смуги пластичності, яка облямовує кінцеві частини включення. У першій із згаданих праць розглянуте одне включення за однорідного зсуву на нескінченності у площині, перпендикулярній до площини стрічкового включення. Визначено дотичні напруження на поверхні включення та довжину пластичних зон у залежності від рівня прикладеного навантаження. Друга задача стосувалася симетричної взаємодії жорсткого включення з двома тріщинами по два боки на серединному перпен-

дикулярі до включення. Більш загальним є дослідження у такій же постановці виникнення пластичних зон біля абсолютно жорсткого ромбічного включення [149]. Подальші дослідження В.А.Кривеня розвитку континуальних та дискретних лінійчатих пластичних зон біля жорстких включень (лінійних, призматичних, прямокутних із кутовими та округленими вершинами) з урахуванням та без урахування періодичності, відшарування поверхонь вилилися у докторську дисертацію [480].

Праці К.Ф.Чорних, З.Н.Литвиненкової [1093, 538] розглядають "лункове" абсолютно жорстке включення у матриці з неогуківського матеріалу. Звідси, зокрема, випливають результати і для лінійного абсолютно жорсткого включення. Виявилось [1095], що поздовжній зсув еластомірів можна досліджувати на основі лінійної задачі. За методикою згаданих вище праць В.В.Божидарник, В.М.Садівський та В.І.Шваб'юк [108] розв'язали задачу про поміщене у неогуківський масив гострокінцеве жорстке включення, форма якого може змінюватися від тонкого лінійного з гіпоциклоїдного з більш як двома точками звороту.

К.Найаші [1344] побудував аналітичний розв'язок задачі біля вістря півбезмежного жорсткого включення у випадку моделі матеріалу Ромберга – Осгуда  $\varepsilon = \sigma \left[ 1 + \alpha (\sigma / \sigma_1)^{n-1} \right] / E$ . Так само, як і у плоскому випадку [1343] виявилось, що особливість напружень у кінці жорсткого включення, як і в усіх інших випадках, така сама, як і у тріщині у такому ж матеріалі. Аналогічні питання для вістря багатоклинового композиту з довільної кількості різних клинів із матеріалу із лінійним зміцненням за поздовжнього зсуву вивчені у праці [988]. Виявлено, що у цьому випадку розрахунки порядку особливості можна здійснювати на основі моделі лінійного матеріалу.

Оскільки тріщина моделюється розрізом з заданими на його берегах напруженнями, а абсолютно жорстке включення (фактично абсолютно жорстка плівка) – розрізом із заданими (зокрема, нульовими) переміщеннями, то різниця між ними полягає лише у типі крайових умов. Тому розв'язок довільної задачі теорії тріщин можна перенести на відповідну задачу для абсолютно жорсткого включення. Через те обмежимося посиланнями на монографії [95, 922, 64, 802]. Окремі результати можна знайти у працях для пружних включень, де абсолютно жорстке включення отримують як частковий випадок.

### **Антиплоска задача для тонких пружних включень**

Першою працею у цьому напрямку є публікація [1052] про включення уздовж дуги кола за найпростішою вінклеровою моделлю. Стрибок напружень вважався відсутнім. Фактично ця праця (з урахуванням аналогії [393]) узагальнювала на випадок викривленості результати праць Г.С.Кіта та Ю.С.Френчка щодо плоских задач теплопровідності прямолінійних тріщин з термоопором. Дещо раніше [74] були введені узагальнені КІН та побудовані одночленні асимптотичні залежності напружень та переміщень біля гострокінцевого пружного включення.

У 1981 р. Г.Т.Сулим [951] поставив та розв'язав на основі методу функцій стрибка задачу (для системи включень на межі поділу двох півпросторів, у безмежному просторі чи півпросторі) з урахуванням можливості одночасного стрибка напружень і переміщень, викривленості, побудував відповідні умови взаємодії, асимптотичні залежності, ввів узагальнені коефіцієнти напружень. Докладно вивчено приклад одного включення. Рівночасно подібні, але менш загальні результати, були отримані В.К.Опанасовичем та М.С.Драганом на основі методу лінійного розвинення потенціалів [675] щодо одного включення. Дещо пізніше [674] ці ж автори вивчили взаємодію двох включень.

Розв'язки для тонких включень еліптичного профілю на основі придатної для податних включень вінклерової моделі були отримані з рівнянь, побудованих граничним переходом

від тонкого включення у тривимірному масиві В.П.Силованюком і М.М.Стадником [885]. Таким самим методом І.Я.Горбачевський отримав розв'язок для двох взаємодіючих включень [187] у паралельних площинах.

І.Т.Денисюк [287] використав якісну модель тонкостінного пружного включення, яку раніше застосував до анізотропного випадку поздовжнього зсуву [288]. Вона дала кількісні значення для граничних випадків жорсткого включення та тріщини, однак оскільки у ній не використовується товщина включення, то побудовані залежності КІН від відношення пружних сталей матеріалів не відображають впливу на реальної (чи зведеної) жорсткості включення на розтяг (яка для дуже тонких включень визначається добутком модуля пружності і товщини включення).

## 47.5. Згин та кручення пластин з тонкими включеннями

### Жорсткі включення

**Включення у безмежній пластині.** Задачі згину пластин Кірхгофа з жорсткими гострокутними і лінійними включеннями дуже детально розглянуті у монографіях [64, 802]. До задач для тонких лінійних включень, які сприймають зовнішнє навантаження, дуже близькі задачі контактної взаємодії пластин із жорсткими ребрами [361], тому ці два класи задач можна об'єднати. Аналіз літературних джерел свідчить, що головний внесок у вирішення цієї наукової проблеми для тонких жорстких включень зробили одеські механіки – Г.Я.Попов, О.В.Оніщук, О.Б.Козін, С.Т.Грибняк та ін. Розподіл напружень біля вістря багатокутника з точками звороту, що міститься у пластині Кірхгофа – Лява, побудовано 1978 р. Я.Ф.Хрущем, М.В.Делявським та Л.Т.Бережницьким [1069]. Такі ж асимптотичні залежності властиві і для тонких жорстких лінійних включень. Характер особливості біля вістря жорсткого лінійного включення досліджений окремо за ідеального механічного контакту включення з пластиною [663, 183] та за його відшарування уздовж одного берега [665]. Одна із нечисленних праць англомовних праць, яка стосується згину тонко пластини із тріщиною та тонким жорстким включенням опублікували Х.-Ф. Wang, N.Hasebe [1737].

Пластинка із жорстким включенням, до якого прикладене навантаження довільного типу вивчена у праці [427].

Існування слабкої зсувної жорсткості пластини з тонкими лінійними жорсткими включеннями (в рамках уточненої моделі Тимошенка) враховане у працях [194, 192]: з'ясовано, що вибір моделі пластини істотно впливає на характер особливості стрибка поперечних сил. О.Тамате [1669] дослідив абсолютно жорстке включення у пластині Райсснера, у праці [1670] – подібну задачу для двох довільно орієнтованих включень у пластині Райсснера. Див. також подальші дослідження у [197].

**Перехрещені неоднорідності.** Задачі згину безмежних пластин із тонкими жорсткими включеннями, що перехрещуються під прямим кутом, були у центрі уваги праць одеських механіків [426, 422, 34, 664].

Деякі такі дослідження були виконані для випадку перехрещених включень у квадратній пластині [420, 432].

**Включення у пластинах, обмежених краями.** Окрім згаданих вище двох праць, які стосувалися перехрещених включень у квадратній пластинці, більшість досліджень для пластин із межами стосується прямокутників. Серед них слід згадати працю [666] (використовується регуляризація розбіжних інтегралів та будується швидкозбіжний наближений розв'язок; вивчене повертання включення, розвиток пластичного шарніру); [668] (розглянуто усі можливі класи задач із жорсткими включеннями – опирання, відшарування на одному чи двох берегах); [667] (досліджені особливості розв'язку, якщо лінійна жорстка опора одним

кінцем виходить на защемлений край пластинки); [327] (прямолінійне жорстке симетричне стосовно сторін прямокутника включення втискується у пластинку); [523] (прямолінійне жорстке розташоване з ексцентриситетом стосовно сторін прямокутника включення); [424] (включення у шарнірно опертій пластинці); [639] (криволінійне (приклад – параболічне) жорстке включення у шарнірно опертій прямокутній пластинці).

В.В.Грибова та О.В.Оніщук [198, 196] побудували спеціальну систему бігармонічних функцій, придатну для опису задач згину пластин із жорстким включенням, та застосували її до розв'язування задач згину прямокутних пластин із включенням. Розв'язок шукається у вигляді ряду за цими функціями; коефіцієнти ряду обчислюються методом колокацій – задовольняючи крайові умови на вибраній множині точок межі пластини.

Праці [423, 434] стосуються аналізу прогину мембран з навантаженими силами жорсткими включеннями, які загалом можуть бути криволінійними і не паралельними до координатних ліній. Для прикладу виявлено залежність між величиною навантаження включення, яке не є паралельним до сторони квадратної мембрани та його вертикальним зміщенням.

Пластинку (рівняння Кірхгофа чи Тимошенка) у вигляді смуги за існування півбезмежної жорсткої лінійної опори розглянули С.Т.Грибняк і Г.Я.Попов [195]. Зазначається, що вибір моделі пластинки істотно впливає на характер особливості поблизу кінця опори-включення: для пластинки Кірхгофа вона неінтегровна, а для моделі Тимошенка – інтегровна (див. теж [194]). Для подібної задачі півбезмежної жорсткої гладкої опори, що перебуває у безвідривному контакті, у випадку, коли береги смуги жорстко защемлені, отримано точний розв'язок [430]. Така ж задача для випадку, коли навантаження є непарною функцією стосовно осі, додатна піввісь якої збігається із лінією контакту із жорсткою опорою [426].

Шарнірно оперта півсмуга з жорстким включенням, яке паралельне до скінченного краю пластини, досліджена у [421].

Одне [846] та декілька [847] (без самоперетинів) жорстких включень у пластині, що має форму клину, розглянув В.В.Реут.

### Пружні включення у пластинах

**Аналогії.** З огляду на аналогію Віггардта та інші аналогії [29, 64, 132, 133, 155, 201, 264, 552, 648, 716, 1034, 1067, 1772] між плоскою чи іншою задачею і задачею згину пластин Кірхгофа чи іншого типу пластин результати аналізу задач згину пластин з гострокутними і тонкими включеннями та ін. можна перенести на відповідні плоскі задачі та навпаки. Наприклад, аналогія Б.Л.Пелеха [716,] стосується задач згину пластинок Тимошенка, аналогія І.Ю.Хоми [1067] – згину пластинок за теорією Векуа з плоскою моментною теорією пружності.

Плитова аналогія [655] полягає у тому, що функція напружень  $\chi(x_1, x_2)$ , яка у термопружності визначає компоненти тензора напружень

$$\sigma_{ij} = \left( \delta_{ij} \nabla^2 - \nabla_i \nabla_j \right) \chi \quad (i, j = 1, 2), \quad \sigma_{33} = \nu \nabla^2 \chi - 2\mu t T,$$

$$m = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_t, \quad \nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2,$$

під час нагрівання пластинки до температури  $Q$  задовольняє таке ж рівняння  $\nabla^4 \chi = \frac{E \alpha_t Q}{\kappa}$ ,

що й функція прогину  $w$  плити середньої товщини з жорсткістю на згин  $N$  при навантаженні її поверхні розподіленим навантаженням інтенсивності  $q$ :  $\nabla^4 w = \frac{q}{N}$ . Крайовим умовам вільних країв нагрітої пластинки ( $\chi = 0, \partial \chi / \partial n = 0$ ) у задачі згину відповідають умови

жорсткого защемлення ( $w = 0, \partial w / \partial n = 0$ ). Цю аналогію зауважив P.Dubas [1249], а пізніше розвинув F.Tremmel [1709].

**Безмежні пластини. Моделі повного спектру пружних властивостей.** Дослідження задач згину пластин Кірхгофа з тонкими пружними включеннями з використанням методу лінійного розвинення потенціалів започаткувала 1979 р. праця Д.В.Гриліцького, М.С.Драгана, В.К.Опанасовича [207]. Було розглянуто необмежену пластину, навантажену рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності з тонким прямолінійним пружним включенням скінченної довжини. Отримана система сингулярних інтегродиференціальних рівнянь, придатна для опису включень із довільними пружними властивостями – від абсолютно жорсткого до тріщини, береги якої під час згину не контактують. Використаний М.С.Драганом та М.І.Морозовим [302] метод функцій стрибка для побудови сингулярних інтегральних рівнянь задачі згину пластини із тонким включенням чи відповідної періодичної системи дав подібні результати. Аналогічна задача кручення для одного лінійного пружного включення у безмежній пластинці за дії однорідного поля крутних моментів на нескінченності була розглянута роком пізніше В.К.Опанасовичем, М.С.Драганом [677]. Було введено у розгляд чотири КІН та побудовано асимптотичні залежності для компонент тензора напружень у полярній системі координат  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ .

Задача для одного включення уздовж дуги кола на основі застосування методу лінійного розвинення потенціалів була повною мірою з аналізом усіх можливих граничних випадків та обчисленням КІН вивчена у публікації [671].

Побудована система сингулярних рівнянь для системи прямолінійних включень у необмеженій пластині та досліджена взаємодія двох однакових співвісних та компланарних включень [300, 219] у випадку дії згинальних та крутних рівномірно розподілених напружень на нескінченності. Те саме навантаження для безмежної пластинки із періодичною системою довільно орієнтованих включень вивчене у працях [304, 305].

Згин кусково-однорідних пластин із тонкими пружними включеннями вивчався Л.О.Тисовським та його співавторами. У першій праці цього циклу [221] розглянуто взаємодію радіально розташованого прямолінійного тонкого включення із круговим отвором чи абсолютно жорсткою шайбою під час двох способів циліндричного згину безмежної пластини. У граничному випадку зміни радіуса шайби отримано задачу про тонке пружне включення у пластині, складеній із двох півплощин. Записана система сингулярних інтегродиференціальних рівнянь для системи довільно орієнтованих тонких пружних включень та кругової шайби [1022]. Досліджено вплив на КІН відносної жорсткості одного включення та кута його орієнтації щодо шайби.

У пізніших працях Л.О.Тисовського та В.К.Опанасовича було використано метод функцій стрибка, їх досвід розв'язування плоских задач теорії тонких пружних включень та відому аналогію між плоскими задачами і задачами згину. Зокрема, у [684] досліджено згин пластики із еліптичною шайбою за довільного розташування прямолінійного тонкого включення; у [1023, 1024] – побудовано сингулярні інтегральні рівняння для одного та для системи криволінійних тонких пружних включень відповідно.

**Безмежні пластини. Модель балкова і стрингера.** Характер особливостей напружень у місцях взаємодіючої та взаємоперетину тонких неоднорідностей дослідили Г.Я.Попов та В.В.Реут [813]. Вивчений перетин двох стрижнів, точка дотику двох пружних стрижнів, тріщини і стрижня, тріщини, що виходить перпендикулярно на стрижень.

Згин безмежних пластин на лінійно деформованій основі у випадку додаткового підкріплення пластини декількома паралельними безмежними пружними ребрами вивчено Г.Я.Поповим та Ю.С.Процеровим [811]. Враховано ексцентричність розташування ребер, їх кручення, стиск-розтяг та згин у двох площинах. Розрахунки здійснені у випадку основи у вигляді півпростору за його ідеального зчеплення чи гладкого контакту з пластиною.



Є.А.Кобелев та М.Д.Работягова [410] дослідили можливість урахування довільного розподілу поперечного навантаження (його подають у вигляді тригонометричних рядів, що зменшує загальність і точність отриманих результатів) та апарату узагальнених розривних функцій на розрахунок плити, підкріпленої симетричним пружним ребром скінченної довжини.

Модель стрингера, яка враховує лише стрибок на включенні крутного моменту, була пізніше застосована Г.А.Морарем [625].

**Пластини із безмежними межами.** Згин пластини-смуги із жорстко защемленими краями у випадку, якщо на поздовжній осі пластини розташована півбезмежна тонка опора, яка деформується відповідно до закону Вінклера, а її контакт із пластиною є гладким та безвідривним [431]. Таку опору можна вважати своєрідним *вінклеровим включенням*.

Результати докладного аналізу впливу пружних підкріплень і тріщин на деформування та особливості напруженого стану пластин (асимптотики згинальних моментів та узагальнених оперечних сил) у вигляді клину подані у праці Г.Я.Попова, В.В.Реута [812]. Розглянуто деформування системи згином та крученням. Побудовано характеристичні рівняння стосовно порядку сингулярності у випадках перетину двох пружних стрижнів чи їх співдотуку під довільним кутом, а також дотуку стрижня до співвісної чи перпендикулярної тріщини. Розглянуто теж два типи клиновидних пластин, коли півбезмежне підкріплення лежить на осьовій лінії клину, а грані закріплені, та коли підкріплений один берег клину. З'ясовано, що пружні властивості підкріплення не впливають на особливість напруженого стану.

Деякі висновки спільних досліджень Московського інженерно-будівельного інституту та німецьких інститутів у Веймарі та Ляйпцігу реферуються у праці [1649]. Згадуються пластинки-смуги та їх підкріплення ребрами скінченної довжини, паралельними та перпендикулярними до країв пластини. Теоретичні дослідження порівнюються із даними експериментів.

**Прямокутні і кругові пластини. Балкові моделі.** Дослідження у цьому напрямку провадили переважно Г.Я.Попов, О.В.Оніщук, О.Б.Козін, С.Т.Грибняк [802, 418], які включення моделювали балкою з вільними кінцями. Пружне включення за моделлю балки з певною згинальною жорсткістю у шаруватій пластині досліджене у [810], а у пластині Тимошенка – у [194]. Подібний підхід у задачі згину прямокутної пластини із підкріпленням у вигляді балки на усій серединній лінії використали Л.М.Куршин та ін. [509] (а в граничному випадку абсолютно жорсткого підкріплення отримано результати для консольної пластини). Модель ребра жорсткості у прямокутній пластині, яка чинить опір розтягові-стиску, згину та крученню, використали Ю.П.Кочанов, В.В.Бугаєнко [465]. F.Yüksel [1773] для розв'язування задачі про підкріплення прямокутних пластин з довільно орієнтованою попередньо напруженою арматурою. Для побудови рівнянь задачі у ролі функції Гріна використано розв'язок Нав'є щодо прогину вільно опертої пластини, навантаженої вертикальною зосередженою силою.

У праці [433] криволінійні включення у прямокутних шарнірно опертих на краях пластиних моделюються стрибками польових характеристик. Побудовано інтегральні рівняння та отримано залежність прогинів від функцій стрибка.

Загальна схема розрахунку прямокутних пластин із перехресною системою підкріплювальних пружних ребер запропонована С.Марегою [556]. Досліджено вплив кількості ребер, їх жорсткості та відношення сторін прямокутника на напружено-деформований стан системи.

Вплив армувальних балкових елементів на КІН біля вістря тріщини у круглій пластині вивчив Л.Л.Лібацький [539]. Досліджено вплив жорсткості арматури на згин у повному діапазоні її зміни від нуля до нескінченності для чотирьох способів навантажування та закріплення пластини.

Слід звернути також увагу на публікацію [409], де розглянуто згин нелінійно пружних прямокутних пластин з розрізами, паралельними до берегів пластини. Пластина уздовж берега розрізу підкріплена симетричним відносно серединної поверхні пластини ребром скінченної довжини, деформування якого описується рівняннями моделі Кірхгофа – Лява. Для побудови рівнянь задачі використовується апарат розривних узагальнених функцій. Урахування нелінійності матеріалу пластини відбувається із використанням рівнянь теорії малих пружно-пластичних деформацій на основі методу пружних розв'язків Ільюшина у припущенні про нестисливість матеріалу за межею пропорційності.

#### **47.6. Тонкі включення у оболонках**

##### **Лінійні абсолютно жорсткі включення у оболонках**

У 1983 р. І.П.Шацький, а також Д.В.Гриліцький та В.К.Опанасович, ввівши чотири функції стрибка зсувних та перерізувальних зусиль на лінійному жорсткому включенні у циліндричній [1102, 1104] та пологій [228] оболонці, побудували систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо цих функцій стрибка та методом механічних квадратур дослідили зміну чотирьох КІН від геометричних параметрів задачі. У згаданій праці [1102] з використанням методу малого параметра побудовано наближені аналітичні вирази для КІН та з'ясовано можливості застосування цих формул. Виявлено також статико-геометричну аналогію для прямолінійної в плані тріщини чи абсолютно жорсткого включення у пологій оболонці [1100], що розв'язок задачі для тріщини при мембранному (моментному) навантаженні відповідає розв'язкові для включення при моментному (мембранному) навантаженні.

Асимптотичні вирази для розподілу параметрів напруженого стану поблизу вістря тонкого лінійного включення у пологій ізотропній оболонці отримані тими ж авторами у працях [229, 230]. Вони використовують введені у попередніх працях 4 КІН. Якщо включення орієнтоване уздовж ліній головної кривизни, то з використанням малого геометричного параметра побудовано наближені аналітичні залежності для КІН та виявлено область їх застосування. Подібні результати для випадку непологої оболонки з введенням функцій стрибка зусиль та моментів отримав А.С.Копець [457, 456].

Використання рівнянь теорії пологих оболонок з урахуванням зсувної жорсткості дало можливість отримати розщеплену на дві систему п'яти сингулярних інтегральних рівнянь для жорсткого включення, розташованого уздовж ліній головних кривизн серединної поверхні оболонки [274].

До тематики жорстких включень у оболонках дуже близькими є задачі контактної взаємодії оболонок із жорсткими ребрами [814, 419]. Фактично їх слід розв'язувати майже так само, як і задачі про жорсткі включення, до яких прикладене зовнішнє навантаження

##### **Лінійні пружні включення у оболонках**

Вивчення впливу тонких пружних включень на напружений стан оболонок розпочали 1981 р. Д.В.Гриліцький, В.К.Опанасович та І.П.Шацький [227]. З використанням концепції методу функцій стрибка розглянуто циліндричну оболонку із включенням уздовж напрямної оболонки. Побудовано математичну модель пружного включення та досліджено зміну КІН у випадку розтягу оболонки осьовими рівномірно розподіленими уздовж напрямної зусиллями, зміни відносної жорсткості включення та параметра кривизни оболонки. Як часткові отримано граничні випадки тріщини, жорсткого включення, бездефектної оболонки, а також пластини із пружним тонким включенням. Подібні результати стосовно пологої оболонки розглянуто у [226].

Набагато простішу математичну модель пружного включення-стрингера, який сприймає лише деформування розтягом-стиском (стрибки переміщень дорівнюють нулю (тріщина як частковий випадок вийти не може), опір згинів – нульовий), побудували і використали для обчислення одного-єдиного КІН В.П.Шевченко, Л.І.Стаценко та ін. [178, 919]. У останній праці отримано залежність КІН від більшої за одиницю відносної жорсткості включення і вона порівнюється із результатами досліджень І.П.Шацького. На жаль, не зрозуміла відмінність значень КІН для абсолютно жорсткого включення у різних працях.

Математичну модель тонкого пружного включення у непологій циліндричній оболонці побудував А.С.Копець [455].

Під час аналізу моделей умов взаємодії багато уваги було приділено умовам спряження (у тому числі й балковим) оболонкових конструкцій між собою та із пластинами. Фактично усі вони стосуються більшою чи меншою мірою задач тонких пружних включень у оболонках. На додаток до відносно великої кількості згаданих там праць згадаємо ще декілька. І.Сіелецька та S.Konieczny [1219] виклали метод побудови рівнянь кусково-однорідних оболонок у випадку, коли параметри фрагментів оболонки змінюються стрибками. Розглянуто приклад, коли товщина оболонки може стрибково змінюватися у напрямі одної із головних осей оболонки. У певному сенсі локальну зміну товщини оболонки на невеликому проміжку можна моделювати за допомогою зміни зведеної жорсткості за сталої (незмінної) товщини. У праці [580] розглянуто вплив товщини таких підкріплювальних ребер на напружено-деформований стан гнучкої пружно-пластичної оболонки. Загалом бібліографія праць, які стосуються розрахунку оболонкових конструкцій з урахування їх підкріплення стрингерами, дуже широка.

Г.Г.Шешунова [1123] за допомогою різницевого методу дослідила вплив пружного шпангоута на напружено-деформований стан оболонкової конструкції на основі використання рівнянь класичної лінійної теорії пружності. Зіставлення отриманих результатів із даними, отриманими на основі використання гіпотези Кірхгофа – Лява, виявило їх помітну різницю.

### 47.7. Розклинювання матеріалу

Задачі розклинювання матеріалів (тонкий клин, вставлений у щілину) є задачами для тонких включень, симетричних відносно поздовжньої осі, за неідеального механічного контакту і (в окремих випадках) із тріщиною, яка лежить на продовженні осі включення, прилягаючи до його вістря. Деякі роботи з цієї тематики вже згадувалися вище. Дуже близька до цих задач і тематика визначення навантаження на поверхні тріщини для забезпечення її заданого розкриття.

Вірогідно першою роботою цього класу є дослідження Г.І.Баренблатта, С.О Христиановича [47]. Подальші кроки були зроблені у працях [46, 49]. Дуже хороший аналіз результатів цих трьох праць зроблено на с. 625–628 монографії М.І.Мусхелішвілі [635]. Усі ці результати стосувалися розклинювання півбезмежних тріщин жорсткими включеннями. Такого типу задачі потім були вивчені Г.П.Черепановим [1084] (прямокутне гладке жорстке включення) і набагато пізніше М.Майті, R.Paramguru [1490] (включення – прямокутник, прямокутник із закругленим торцем, клин та ін.). Розв'язки побудованих інтегральних рівнянь отримуються у замкнутому вигляді. У праці цих же авторів [1489] вивчений випадок, коли два півбезмежні співвісні розрізи розкриваються двома симетричними гладкими жорсткими включеннями (скінченної довжини, якщо вони сягають вістря тріщин, чи півнескінченної, якщо їх торцева частина має ненульову товщину).

Низка робіт стосується розклинювання тріщин скінченної довжини у однорідному безмежному середовищі за допомогою жорстких включень – [557] (прямокутне жорстке вклю-

чення), [1646] (ромбічне включення (diamond-shaped)), [1715] (прямокутне і ромбічне включення), [1317] (визначення навантаження для забезпечення розкриття тріщини у безмежній пластині та смузі, детально вивчений випадок розкриття  $\delta(x) = \varepsilon(1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ), [1315] (у центральній частині тріщини задане розкриття, а на решті, що прилягає до кінців тріщини, – нормальні напруження; побудоване інтегральне рівняння; розрахунків прикладів немає), [1487, 1486] (загальна постановка, побудоване сингулярне рівняння із ядром Коші, розв’язок якого записується у квадратурах; граничний стан визначається критерієм Ірвіна; розглянуто приклад прямокутного включення).

Поряд із згаданою працею [1317] розклинювання тріщини у смузі, але на цей раз підкріпленій з обох боків однаковими півплощинами, вивчав S.R.Dhaliwal [1240]. Застосовано апарат скінченного інтегрального перетворення Гільберта, яке породжує інтегральне рівняння Фредгольма, до якого застосовується ітераційна схема (розв’язок у вигляді скінченної суми ряду за відношенням довжини тріщини до ширини смуги). Наближено визначається КІН у випадку включення прямокутної форми.

Задача розклинювання скінченної тріщини на межі поділу матеріалів двох півплощин вже не є симетричною. У праці [893] використовуються асимптотичні методи і враховується контакт берегів тріщини на ділянках малих у порівнянні із довжиною тріщини. G.M.L.Gladwel [1314] побудував систему з трьох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами типу Коші для визначення контактної тиску на межі двох півплощин, що притискаються рівномірно розподіленими напруженнями на нескінченності, у випадку, коли між ними лежить жорстке гладке включення. Напруження у точках зміни крайових умов нульові. Розв’язок шукають у вигляді рядів за поліномами Чебишева другого роду. Розглянуто приклади.

Велике прикладне значення мають дослідження розклинювання тріщин, які виходять на межу пружної півплощини [166] (трикутний клин; отримано розв’язку інтегрального рівняння задачі (першого роду) у логарифмічно-степеневий ряд за характерним параметром), [545] (трикутний клин, побудовано і досліджено інтегральне рівняння).

Задачі розклинювання тіл з урахуванням початкових напружень докладно й різнопланово розвинув О.М.Гузь [266, 263]. Ця тема розробляється і у праці [295]. Згадаємо побіжно і роботи [320, 1537], які стосуються аналізу усталеного розклинювального руху жорсткої смуги та голки у пружно-пластичному матеріалі.

## 47.8. Термопружність тіл із включеннями

На початку викладу цього матеріалу нагадаємо, що рівняння теплопровідності аналогічні рівнянням дифузії [1538] (так само, як і згадуваної вище антиплоскої деформації), а тому задачі термопружності легко перенести на задачі дифузопружності та навпаки. Зрозуміло, що межові шари між складовими матеріалами, які впливають на температурні потоки і розподіл температури, також впливатимуть на процеси перенесення матерії [790].

### Тривимірні включення у тривимірних тілах

Основні відомості із цього питання можна отримати у монографіях [779, 781, 766, 654, 439], підручнику [655], огляді [765] та багатьох інших. Частина важливих праць з питань термомеханіки було згадано у § 42 під час аналізу методів, застосованих до аналізу пружного і термопружного стану включень. Тут згадаємо лише деякі додаткові праці, які видалися автору корисними для використання у певних напрямках майбутніх досліджень із цієї проблематики. У публікації [174] розглядається застосування методу узагальнених функцій до вивчення циліндра скінченної довжини, який виходить перпендикулярно на межу півпросто-

ру. Застосовуючи розклади шуканих функцій у ряди Фур'є та Фур'є – Бесселя та інтегральне перетворення Ганкеля, отримано розв'язувальні рівняння проблеми. Розглянуто приклади.

Еліпсоїдальне (ідеальний контакт з матрицею), сфероїдальне та сферичне (конвективний теплообмін) включення за різних умов дослідив В.С.Кирилюк [390] (див. теж задачі термопружності для окремих тіл сфероїдальної форми [771])

Поля температур і термопружних напружень у випадку неідеального теплового контакту за Я.С.Підстригачем [738] сферичного тіла у необмеженому просторі дослідив П.Р.Шевчук [1116]. Розв'язок будується із використанням рядів за присланими функціями Лежандра (визначено перші члени рядів). Розвиток цих результатів на випадок багатощарових сфер можна знайти у [582] та інших публікаціях М.І.Махоркіна.

У праці [450] визначено узагальнене температурне поле у шарі зі стрижневим (ніжка електронного приладу) включенням у вигляді кругового циліндра. Більш загальні результати для кругового циліндра всередині шару (між його поверхнями) багатощарового півпростору містить монографія [439]

У працях Б.С.Воробця [162, 161] досліджується задача термопружності для тіла з лінійним (у сенсі видовженим циліндричним) включенням. У першій із них запропоновано аналітичний підхід, який дає можливість звести поставлену задачу для тіла із включенням до задачі для області, зайнятої основним матеріалом, при формулюванні на внутрішній межі таких крайових умов, які би відображували вплив включення. Друга публікація стосується розв'язування задачі тіла з циліндричним включенням із урахуванням умов ідеального контакту між матеріалами.

### Плоска задача для двовимірних (масивних) включень у пластинах

Г.С.Кіт та І.М.Зашкільняк [394] дослідили задачу про пружне кругове включення у півплощині з нагрітою до сталої температурою межею, коли включення виділяє тепло зі сталою інтенсивністю. Задача для кругового включення у безмежній пластині з урахуванням тепловіддачі з бічних поверхонь, причому різного для включення і пластинки, а також і з різних сторін, розв'язана у праці [488].

Побудовані інтегральні рівняння для півплощини із включенням довільної форми, коли на межі півплощини відбувається теплообмін і по ній рухається джерело тепла змінної інтенсивності [1036]. Задачі визначення температурних полів і напружень у безмежній площині з довільної форми включеннями та тріщинами зведені [862] до інтегральних рівнянь по замкнутим контурах меж поділу матеріалів та розімкнутим контурах тріщин. У окремому випадку побудована система рівнянь для двох з'єднаних півплощин з включеннями та тріщинами. Важливо, що у цьому рівнянні не фігурують невідомі функції на межі поділу півплощин. Тріщина на межі жорсткого еліптичного включення за рівномірного розтягу та нагрівання пластини з включенням розглянута у [51]. Тут, між іншим, отримано асимптотичні залежності для поля напружень біля вістря тріщини.

Вивчені задачі контакту безмежних півплощин з урахуванням неідеального (з термоопором) контакту за моделлю Я.С.Підстригача [445], а також у середовищах із тонкими прошарками [817]. Неідеальність контакту на межі кругового включення врахована у праці Z.Nashin [1342]. Зв'язана стаціонарна фактично одновимірна задача про дослідження двох смуг з нелінійно пружного матеріалу, коли на зовнішніх поверхнях задані переміщення, а термічний опір між шарами залежить від рівня напруженого стану, розв'язана А.Ю.Гусятниковим [276]. Використано умови теплового контакту з термоопором

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} R(\sigma_{nn}) = T_2 - T_1,$$

де  $R(\sigma_{nn})$  – контактний термоопір, який для сталених смуг беруть у вигляді  $R(\sigma_{nn}) = 0,96(2,6 + \sigma_{nn})^{-0,28}$  [799].

Зв'язана задача термопружності (стаціонарна і нестаціонарна) з використанням методу простих ітерацій для комп'ютерного моделювання з урахуванням неідеального контакту між шарами досліджена у [438]. Особливо зазначено, що неідеальність термомеханічного контакту змінює не лише кількісну, але і в окремих випадках навіть якісну картину розподілу температур і напружень у порівнянні із контактом ідеальним.

Теорію та практику застосування до задач шаруватих структур із плоскопаралельними межами з додатковим використанням умов неідеального контакту між шарами, існування на них тріщин розвинули праці Ю.М.Коляно, Р.М.Кушніра, В.С.Поповича та ін. [516, 517, 447, 518, 519, 1449]. К.В.Вишневський і Р.М.Кушнір [152] з використанням теорії узагальнених функцій і, як наслідок, побудованих частково вироджених диференціальних рівнянь стаціонарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термопружності для тіла з включенням загальної форми, яке перебуває у неідеальному контакті із матрицею, побудували граничні інтегральні рівняння поставленої проблеми.

І.Т.Деиісюк та В.М.Садівський [285] визначили асимптотики полів напружень і коефіцієнт інтенсивності біля багатокутного (із загостреними кінцями) жорсткого включення, розташованого у пружній пластині, що нагрівається. У наступній праці [286] вони детальніше дослідили цю ж задачу, вказали на аналогію таких задач термопружності та механіки руйнування (придатність отриманих значень КІН до аналізу граничного стану) і як частковий випадок дослідили тонке пластинчатє (лінійне) абсолютно жорстке включення.

### Термопружність плескатих включень у просторових тілах

Задачі термопружності для тонких включень (типу пластин чи оболонки) у тривимірних тілах є дуже нечисленими. У зв'язку із цим слід згадати вже цитовану працю Я.С.Підстригача і П.Р.Шевчука [791], у якій ставилася задача термопружності для пружного тіла із тонким включенням і покриттями у вигляді оболонки, а потім розв'язувалася [789, 788, 787]. Інший напрям цих досліджень представляють праці М.М.Стадника і Я.Ю.Морозовича [914, 916, 915]. Тут розглядається випуклий ізотропний многогранник із плоскими гранями, у якому міститься система теплопровідних пружних включень, обмежених деякими поверхнями (для практичних розрахунків сплющені еліпсоїдальні та близькі до них). Задане довільне поверхнєве силове навантаження многогранника та змінне температурне поле.

### Плоска задача термопружності для тонких включень і тріщин

**Тріщини.** Задачі термопружності для тріщин дуже добре вивчені. Тут декількома словами згадаємо ті праці, які враховують особливі умови на їх берегах, що дають можливість вважати тріщини у певному сенсі включеннями. Основні визначальні результати у цьому напрямі отримані працями Г.С.Кіта та М.Г.Кривцуна [397, 395, 396]. Великий внесок у розвиток цього наукового напрямку зробили праці Я.С.Підстригача та Г.С.Кіта [399, 777]. Задачу про розподілені уздовж довільної кривої прямокутної пластинки джерела тепла [1060] можна розглядати як модельну для теплоактивного включення, на якому виникає стрибок потоків тепла.

**Жорсткі включення.** Дослідження термопружності жорстких включень скінченної довжини передбачає, що від нагрівання вони не розширюються. Основну кількість досліджень задач цього класу здійснили японські вчені, передусім Н.Секіне, який звернувся до цієї теми у 1976 р. У працях [1603, 1601, 1602, 1678] додатково вважають включення теплоізолюва-

ним, моделюючи його розподілом зосереджених сил та джерел уявної інтенсивності [1603, 1601, 1602] чи диполів тепла [1678] (періодична задача з довільним нахилом включень у безмежній пластині під дією потоку тепла, перпендикулярного до осі включень). Н. Sekine [1601] побудував асимптотику напружень біля вістря включення і обчислив КІН при довільному куті потоку тепла із нескінченності. Враховано можливість повертання включення. Він же у [1602] вивчав одне включення у півплощині (моделюється розподіленими силами і джерелами тепла для формування стрибка вектора напружень і теплового потоку), а у [1604]

У праці Т. Koizumi та ін. [1423] врахований термоопір включення і з використанням методу потенціалів для температури і дислокацій для механічної частини розв'язується також аналогічна задача теорії тріщин, опублікована набагато раніше [399]. Скінченність області з включенням та ортотропія матеріалу матриці врахована N. Sumi [1665], причому для спрощення задачі температурне поле вважається вже відомим. Використовуються потенціали Колосова – Мусхелішвілі (у формі рядів Лорана) та конформні відображення. До числа доведений приклад обчислення КІН, коли на включенні та на межі пластинки задана сталі, але різні значення температури.

Подібні результати незалежно, але багато пізніше, отримали І.Т. Денисюк та В.М. Садівський [286, 8\*]. У першій праці результат для тонкого включення був отриманий як частковий випадок масивного багатокутного. У другій було враховане можливе повертання включення, дія джерела тепла і отримано аналітичні вирази для двох КІН.

У 1989 р. було побудовано інтегральні рівняння [1036, 1037] для зв'язаної із півплощиною смуги із системою довільно розташованих прямолінійних тріщин та жорстких включень.

**Пружні включення. Задачі тонких включень.** Монографія І.Т. Денисюка [289] на с. 143–147 містить розв'язок задач теплопровідності та термопружності тонкого прямолінійного гострокутного пружного включення у ізотропній пластині. Отриманий розв'язок відповідає якісній моделі тонкого включення (дає можливість отримати граничні випадки), але, оскільки у цьому фігурує лише один геометричний параметр включення (його довжина), отримані формули жодною мірою не відображають залежності від товщини включення. Побудовані вирази розподілу теплових потоків та напружень поблизу вістря неоднорідності.

У праці Ю.М. Коляно [440] (1969) було сформульовано умови взаємодії та розв'язано задачу термопружності для двох ортотропних пластин, поєднаних між собою за допомогою тонкого теж ортотропного стрижня, який сприймає стиск-розтяг та зсув. Пізніше разом із В.О. Волосом [444] на основі гіпотез про лінійний розподіл температури по товщині пластинки та незмінності нормалей вивів рівняння теплопровідності і термопружності для тонких неоднорідних пластин, фізико-механічні характеристики яких є функціями циліндричних координат. Як частковий випадок із них були отримані відповідні рівняння для наскрізних замкнених (кільцевих) і незамкнених (по дузі кола) тонких включень. Ці рівняння склали основу дисертації [158] та відображені у монографії [439].

Першими у 1979 р. задачу термопружності для тонкостінного пружного включення скінченної довжини з використанням потенціалів Колосова – Мусхелішвілі дослідили Н. Sekine, Т. Муга [1605] у припущенні відсутності стрибка переміщень та температури (для відносно жорстких включень з поганою теплопровідністю). Вважалось, що включення під час розтяг-стиску сприймає також і вплив поперечних напружень

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1 + \nu_B}{E_B} \left[ \sigma_{xx} - \nu_B (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + E_B \alpha_B T \right],$$

згин включення описується рівняннями згину балки Кірхгофа, а температурна умова має вигляд  $\lambda_B \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{Q}{h}$  ( $Q$  – тепло, що проходить через одиницю поверхні включення;  $h$  – характеризує термоопір включення). Через торці теп-

ло у включення не заходить. Використовуючи розподілені уздовж осі включення зосереджені сили і джерела тепла, будують потенціали через невідомі густини розподілів і, підставляючи їх в умови взаємодії, – систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язують методом механічних квадратур. Досліджено вплив на КІН зміни відносної жорсткості включення на розтяг і на згин, відносного значення його коефіцієнта лінійного розширення.

З використанням досвіду розв'язування цієї задачі Н. Sekine [1599] дослідив важливе для геофізики значення граничної довжини для заповненої рідиною і перпендикулярної до межі термопружного півпростору тріщини, коли тіло перебуває в умовах навантаження лінійним температурним градієнтом.

У 1979–1986 рр. набагато фізично повніші розв'язки на основі поєднання методів лінійного розвинення потенціалів та функцій стрибків отримали М.С. Драган, Д.В. Гриліцький, В.К. Опанасович та В.В. Божидарнік [676, 208, 301, 673] (див. теж [103]). Були досліджено вплив одного включення [676, 208] і термопружну взаємодію двох співвісних включень [301, 673], отримані асимптотичні вирази для полів термонапружень біля краю включення і всі можливі граничні випадки абсолютно теплопровідних, теплоізоляованих, твердих і податних включень. У згаданих працях не враховувалася тепловіддача з бічних поверхонь тіл.

У межах цієї концепції І.І. Бернар та В.К. Опанасович [100] розглянули задачу стаціонарної теплопровідності та статичної термопружності для пластини з тонкого включення по дузі кола безмежної ізотропної пластинки під впливом однорідного потоку тепла на нескінченності. Результати для дугового і прямолінійного (як граничного випадку дугового) включень, отримані у дисертації І.І. Бернара [98], викладені у монографії Ю.М. Коляно [439].

Г.Т. Сулим разом з Й.З. Піскозубом, Д.В. Гриліцьким та В.В. Божидарніком [735, 240, 992, 105] у 1983–87 рр. застосували удосконалені умови взаємодії, метод функцій стрибка для розв'язування задач для тонких лінійних включень на межі поділу двох пластин без та з урахуванням тепловіддачі з бічних поверхонь пластини. Були побудовані двочленні асимптотичні вирази для фізико-механічних полів [727] та вивчений вплив теплової активності включень [740].

У задачах пружності та термопружності так само як у задачах теплопровідності виникає потреба визначення *торцьових сталей*. Більшість праць цього напрямку ними нехтувала. Априорне визначення сталей започаткували праці [978, 237, 951], інтегральне – [735, 240]. Більшість праць (наприклад [1565, 633, 1178, 297]) цього напрямку ними нехтувала, явно чи неявно вважаючи, скажімо, зусилля на торці нульовими. Як один з нечисленних винятків, поза працями автора та деяких інших представників львівської школи механіки, можна відзначити публікацію [1568], де вперше говориться про необхідність врахування зусиль на торці волокна композиту.

У вже згадуваній праці [321] експериментально визначалося поле напружень поблизу торця тонкого включення завдовжки  $2a$  і товщини  $2h$  (прямокутний профіль, плоский напружений стан) і порівнювалося із теоретичним розв'язком, отриманим на основі моделі стрингера

$$\frac{h}{k_{\mathbf{B}}^0} u^* = hP(-a) - \int_{-a}^x [\sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^-] dt, \quad k_{\mathbf{B}}^0 = \frac{1 + \kappa_{\mathbf{B}}}{8G_{\mathbf{B}}}.$$

Значення торцьової сталої  $P(-a)$  (для цієї моделі одної) обчислювалося чотирма способами. Перший – на основі априорних виразів [978]; другий – на основі пропозиції праці [314] аби в околі торця стрибки напружень були сталими; третій – на основі нової пропозиції, щоб усереднене по товщині поздовжнє нормальне напруження  $\sigma_{xx}$  дорівнювало усередненню по товщині цього напруження у еліптичному включенні (для якого за однорідного розтягу відомий замкнутий розв'язок) з півосями одиничної довжини та  $h/(2a)$ ; четвертий – за інте-



гральним визначенням праці [25]. Теоретично були розраховані ізолінії  $\tau_{\max}$ , порівняно їх із отриманими в експериментах і на основі цього (хоча на думку автора картини були приблизно однакові) було зроблено висновок, що: «найбільш строго математично обґрунтованою є, на наш погляд, четверта схема, бо її використання не вимагає ніяких апріорних припущень і вона дає можливість виразити напруження на торці включення через стрибок дотичних напружень на його осьовій лінії».

Для дослідження особливостей термопружних напружень, що виникають у клейових з'єднаннях, технологія виготовлення яких передбачає нагрівання склеюваних поверхонь для пришвидшення полімеризації, Р.І.Мазінг [550] побудував два лінійні інтегральні рівняння для аналізу залишкових нормальних і дотичних напружень у тонкому шарі клею та прилеглих поверхнях.

**Контактні задачі.** Зв'язана задача термопружного контакту жорсткого штампа з урахуванням теплопровідного проміжного шару змінної товщини у вигляді пластини, яка враховує зміну умов теплообміну внаслідок зміни термоопору під час згину пластини, що контактує з твердим тілом через теплопровідний шар, розглянута у працях [348, 375]. Вивчена й аналогічна задача про контакт циліндричної оболонки з твердим шаром через тонкий проміжний шар [345]. У наступній праці [347] проміжний шар має змінну товщину. Для моделювання проміжних шарів у контактних задачах можливе продуктивне застосування специфічних елементів для схеми МСЕ [758, 181]. Тут розглянуто задачі термопружності й термопластичності. Використана реологічна модель прошарку дає можливість використовувати натяг, утворення прозорів, проковзування, зчеплення, часткове відривання, фрикційну взаємодію тощо.

Значення таких досліджень контактних задач має велике прикладне значення ще й тому, що термоопір між тілами, що контактують, істотно залежить від рівня напружень у зоні контакту [1124].

Принагідно згадаємо ідейно близькі до теорії тонких включень методи і результати розв'язування контактних задач теплопровідності, термопружності й механотермодифузії за допомогою методу міжконтактних прозорів. Плоску термопружну задачу стосовно формулювання та побудови інтегральних рівнянь крайових задач термічного та пружного контакту між гладкими тілами, які притискаються одне до другого, утворюючи зони контакту і порушення контакту із використанням методу, який пізніше було названо методом міжконтактних прозорів, було розглянуто у праці Р.М.Мартиняка [575]. У працях Р.М.Мартиняка та Р.М.Швеця [1113, 1111, 1112] додатково вважалося, що тонкі проміжки відсутності контакту між тілами заповнені газовим середовищем, яке чинить опір проходженню тепла, але не чинить опору деформуванню. Тому їх моделюють відрізками, на яких виникають стрибки температури і нормальних переміщень. Для прикладу розглянута дія двох зосереджених сил, які притискають півплощини та відповідна періодична задача.

У праці Р.М.Швеця, Р.М.Мартиняка [1114] умови теплової взаємодії (механічний контакт залишався гладким) були ускладнені врахуванням поряд із стрибком температури також і стрибка потоку тепла (так, як у методі функцій стрибка) і була розглянута періодична та неперіодична задача для тонких поверхневих теплофізичних неоднорідностей. Запропоновано також систему інтегральних рівнянь для випадку, коли в околі міжповерхневих дефектів всередині основного матеріалу розташовані тріщини та тонкі жорсткі включення [574].

Урахування явища дифузії, яка забезпечує внаслідок виходу дифузанта на поверхню ідеальним газом утворені внаслідок відставання півплощин порожнини, відбулося у роботі Р.М.Мартиняка [561]. Отримані рівняння дають можливість отримати доволі спрощений, швидше усього якісний опис явища.

Щодо задач теплопровідності, то слід принагідно також згадати працю А.А.Криштафовича [1185], яка стосується формулювання температурних умов на межі контакту двох анізотропних півплощин із збуреннями форми межі.

### Тонкі включення у оболонках

А.С.Гольцев і В.П.Шевченко за допомогою теорії узагальнених функцій та двовимірної перетворення Фур'є побудували інтегральні рівняння для оболонок довільної гауссової кривизни з прямолінійними термоізолюваними [180] та прямолінійними термоізолюваними, теплопровідними і теплопроникними [179] тріщинами. Для теплопровідної тріщини формулювалися умови неідеального теплового контакту у вигляді

$$\lambda_s \frac{\partial^2 (T^+ + T^-)}{\partial s^2} + 2\lambda_n \left( \frac{\partial T^+}{\partial n} - \frac{\partial T^-}{\partial n} \right) = 0,$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2 (T^+ - T^-)}{\partial s^2} + 6\lambda_n \left( \frac{\partial T^+}{\partial n} + \frac{\partial T^-}{\partial n} \right) - 12\lambda_n (T^+ - T^-) = 0,$$

а для теплопроникного –  $\lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)^\pm - \lambda_n (T^+ - T^-) = 0$ . Розглянуті приклади та отримані відомі з попередніх праць часткові випадки.

Поряд із згадуваними раніше під час аналізу умов термомеханічної взаємодії працями, де подані приклади розрахунку температурного і термомеханічного стану складних механічних систем зі спряженням елементів за допомогою стрижнів [784, 785, 1089], відзначимо ще одну – [156]. Тут досліджена конструкція, складена із довгої циліндричної оболонки, смуги-пластини і двох стрижнів, які з'єднують елементи між собою. Розрахунки здійснені на основі моделі [784], яка враховує реальну геометрію з'єднання, а саме: неортогональність з'єднаної поверхні оболонки з поверхнею контакту, а також зміщення серединних поверхонь оболонки, пластинки та осі стрижня.

О.Б.Козін [417, 418] розглянув вільно оперту на краях положу циліндричну оболонку (у плані є смугою) при підкріпленні її пружним півбезмежним ребром, що не чинить опору на розтяг-стиск, а лише на згин (контакт із ребром є повний та гладкий). Побудовано точний розв'язок відповідного інтегро-диференціального рівняння типу Вінера – Хопфа і досліджено асимптотику функції напружень (належить до класу функцій із неінтегрованою особливістю). У праці [433] з використанням апарату скінченних інтегральних перетворень та моделювання криволінійного включення стрибками польових характеристик, побудовано інтегральні рівняння для задач згину прямокутних у плані пологих оболонок чи пластин, що шарнірно оперті на краях. Для пластин отримано залежність прогинів від функцій стрибка.

## § 48. Задачі теорії тонкостінних включень в анізотропних середовищах

### 48.1. Плєскаті включення

Л.Т.Бережницький та І.Т.Денисюк у другій праці [90] циклу із трьох праць, які стосуються жорсткого еліптичного в плані тонкого включення, розглянули випадок його розташування в ортотропному середовищі.

Низку дуже важливих результатів для жорстких та пружних тонких включень (анкерів) у ортотропних матеріалах отримали А.Р.С.Selvadurai, В.П.Силованюк та інші автори, згадані

у п. 47.2 (пп. пружні плескати включення) та у деяких інших місцях цього розділу. Принагідно згадаємо монографії [882, 933].

## 48.2. Плоска задача теорії пружності

### Тріщини

На нинішній час досить повно опрацьована математична теорія тріщин в анізотропних середовищах. Докладний виклад методики розв'язування задач і огляд стосовних цього праць можна знайти у праці [701] та монографіях [124, 123]. Відзначено, що розщепити загальну тривимірну задачу на плоску та антиплоску не можна лише у двох випадках: загальної анізотропії, коли тіло не має площини пружної симетрії або така площина нахилена до поздовжньої осі тіла, а також для тіла з віссю симетрії третього порядку. Відзначено, що хоча С.Г.Лехніцький [534, 535] і розв'язав вперше задачу про еліптичний отвір у анізотропній пластині, відповідну задачу для прямолінійної тріщини вперше розглянув А. Stroh [1655] (див. теж [856, 1079, 878]). Загалом більшість сучасних досліджень теорії тріщин та інших задач анізотропної теорії пружності здійснюється із використанням так званого Строформалізму [1656, 1657, 1705, 1702, 1703, 1752]. Згадаємо також окремо розв'язок двоперіодичної задачі для тріщин [1040].

Щодо міжфазних тріщин в анізотропному матеріалі, то досить буде згадати публікації [745, 1121–1125, 216, 218, 245, 233, 247].

Загальніші результати стосовно гострокутних отворів у анізотропному середовищі, отримані на основі методу збурення форми границі тіла, викладені у праці [699, 79]. Як часткові випадки вивчено зміну форми отвору від розрізу до трикутної гіпоциклоїди, для яких отриманий явний вигляд коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) під час дії однорідного поля напружень на нескінченності.

### Абсолютно жорсткі включення

**Прямолінійні включення у необмеженому середовищі.** Прямолінійні включення у необмеженому середовищі досліджені у не дуже великій кількості праць. Вірогідно, перші такі праці належать Т. Mura, S.C. Lin [1468, 1532] (1973, 1974). У публікації 1975 р. [80] на основі граничного переходу у розв'язку задачі про абсолютно жорстке еліптичне ядро було розглянуто абсолютно жорстку плівку скінченної довжини в однорідній площині з прямолінійною анізотропією загального типу. У напруженнях виділена коренева особливість та побудовані асимптотичні залежності для поля напружень і переміщень біля вістря неоднорідності. Зроблено висновок, що у зоні справедливості асимптотик в напрямку максимальних окружних напружень дотичні напруження дорівнюють нулю для всіх гострокутних неоднорідностей незалежно від пружних властивостей матриці і заповнення.

Наступне, більш загальне дослідження 1978 р. [864], стосується застосування методу збурення форми границі до розв'язування задачі про концентрацію напружень біля гострокінцевих абсолютно жорстких включень з точками звороту на контурі в однорідному полі напружень на нескінченності. Досліджені КІН під час зміни форми включення від стрижневої (абсолютно жорстка плівка) до гіпоциклоїдної з трьома чи чотирма вістрями.

У праці Q. Li та T.C.T. Ting [1463], опублікованій у 1989 р. (див. теж [1462]), поруч із розв'язком для тонкого пружного включення подано розв'язок для жорсткого включення в одновісному полі розтягу під довільним кутом із урахуванням обертання включення. Записані асимптотики напружень на включенні та його продовженні, зокрема й для часткового ізотропного випадку. Y.H. Chen, H.G. Hahn [1204] також дослідили розподіл напружень і кое-

фіцієнти сингулярності напружень біля жорсткого включення в ортотропному матеріалі. Жодних посилань на піонерські праці українських механіків тут немає.

У публікації [3\*] для плоскої задачі для волокнистого композиту з жорсткими волокнами за правилом сумішей обчислюються ефективні модулі, а потім на основі формул цитованої праці [80] – КІН. Відсутній аналіз отриманих результатів та будь-яке зіставлення із раніше опублікованими працями.

**Взаємодія включень.** З використанням асимптотичних методів побудований [411] наближений аналітичний розв'язок періодичної задачі про два ряди компланарних абсолютно жорстких включень у ортотропній пластині. Досліджені контактні напруження, зусилля у включеннях та КІН для випадків слабкої та сильної взаємодії неоднорідностей.

**Включення по дузі кола.** У статті [546] побудовані функції напружень для ортотропної пластинки з впаяною в неї круговою ізотропною шайбою, коли на межі поділу матеріалів є абсолютно жорстка плівка. Визначені напруження на межі поділу матеріалів за одно- та двовісного розтягу на нескінченності. Ймовірно, це є перша постановка і розв'язок задачі про абсолютно жорстке включення в анізотропному матеріалі, до того ж іще на межі поділу матеріалів.

**Фундаментальні розв'язки.** Окремі фундаментальні (зосереджені сила та момент) розв'язки для площини із абсолютно жорстким скінченним чи півнескінченим включенням можна знайти у праці Л.И.Онишко [670]. Якщо усі згадані у цьому підпункті праці досліджували навантаження площини лише однорідним полем напружень на нескінченності, то у [670] побудовані явні вирази для КІН, коли діють зосереджена сила чи момент, прикладені до жорсткого включення в однорідній анізотропній площині чи поблизу нього.

**Включення у кусково-однорідних тілах.** Праці [478, 479] стосуються побудови фундаментального розв'язку для зосередженої сили в довільній точці складеного з двох анізотропних півплощин тіла та застосуванню отриманих результатів до вивчення впливу абсолютно жорсткої плівки всередині однієї з півплощин на напружено-деформований стан композиту. Досліджені асимптотики розв'язку у випадках, коли вістря включення або вийшло, або ще не вийшло під кутом на межу фаз. Спосіб виділення асимптотик при виході кінця включення на лінію поділу матеріалів із використанням асимптотичних властивостей певних сингулярних операторів з нерухомою особливістю розглянутий у [472].

В роботі [474] запропонована методика розв'язання задач про довільно орієнтовані тонкі дефекти (типу тріщин або включень) в неоднорідній анізотропній площині, в основі якої лежать інтегральні сингулярні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми компонент вектора зміщень і тензора напружень на довільному контурі. Ґрунтуючись на ній, у [471] досліджуються особливості розв'язків, коли один із таких дефектів лежить на межі поділу, а другий – всередині однієї з півплощин, виходить кінцем на лінію поділу чи її перетинає.

**Міжфазні включення.** На основі розв'язку крайової задачі Рімана після введення у розгляд на відрізьку лінії поділу анізотропних півплощин стрибків напружень і переміщень, у [480] була ґрунтовно досліджена задача про абсолютно жорстке включення малої змінної товщини на межі поділу анізотропних півплощин. Навантаження здійснювалося прикладеною до включення зосередженою силою. Вважалося, що контакт між включенням і матрицею або ідеальний (повний), або гладкий, або з одного боку включення ідеальний, а з другого гладкий. Вивчалось поведіння напружень біля вістря неоднорідності. Таким самим методом моделювання абсолютно жорсткої плівки розподіленими зосередженими силами розглянуте також міжфазне жорстке включення і побудовано аналітичний (осцилююча особливість) розв'язок для нього [477] (див. також [451]). Подібні праці на Заході з'явилися значно пізніше [1753, 1152]. У першій із цих праць включення було абсолютно гнучким і нерозтягливим.

**Відшаровані включення.** У зв'язку із розвитком застосувань композиційних матеріалів було виконано багато праць з питань появи розтріскування на межі контакту жорсткого включення із анізотропною матрицею [1696, 1152, 1161, 1357, 1493, 12].

**Нелінійні задачі.** Цикл робіт, які стосуються вивчення розвитку пластичних смуг типу Дагдейла, що облямовують кінцеві частини тонких жорстких включень у ортотропних матрицях, здійснив М.М.Кундрат [489, 495]. Такий підхід дав можливість зменшити особливість розв'язку від кореневої до логарифмічної. Він же за участю Г.Т.Сулима застосував [494, 1012, 1013] до розв'язування цих задач двофазову модель із зоною розпушення. Це дало можливість отримати механічно реалістичний скінченний розв'язок для поля напружень біля вістря включення.

**Розклинювання матеріалу.** До задач про абсолютно жорсткі включення та тріщини слід долучити й клас задач про розклинювання розрізів анізотропних тіл тонкими гладкими абсолютно жорсткими вставками. Першою працею у цьому напрямі було дослідження Г.І.Баренблатта й Г.П.Черепанова [48] для випадку ортотропії, причому як у статичному, так і динамічному випадках. У праці [1242] вивчається відповідна задача для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу.

Цікаве дослідження [1451], де гранульоване тіло моделюється анізотропним середовищем. Розклинювання відбувається за допомогою або одного жорсткого тіла (ділянки між вістрями включення та тріщини або вільні від напружень, або там прикладені певні зусилля), або двома жорсткими включеннями, що прилягають до вершин розрізу. В усіх випадках точки зміни граничних умов на тріщині фіксовані, через що напруження у цих точках сингулярні.

Праця [1220] стосується дослідження напруженого стану у ортотропній смузі з паралельними до її країв розрізами (один чи два), до берегів яких або прикладені задані зусилля, або які розклинюються абсолютно жорсткою гладкою прямокутною вставкою. Для коротких включень контакт двох його країв з матрицею повний; для довгого – контакт може на невідомих наперед ділянках порушуватися.

Можна згадати і публікацію [586], яка стосується розклинювання ортотропного матеріалу жорстким включенням.

Задачу, розв'язану у праці [841], можна вважати дещо іншою із класу задач про розклинювання, бо спільним для них є те, що контакт між включенням і матрицею гладкий, включення має певну задану незмінювану товщину та не розтягується. Однак відмінність полягає у тому, що у цитованій статті включення не опирається згиніві і контакт матриці з включенням відбувається уздовж усієї його бічної поверхні.

### Тонкі деформівні включення

**Гнучкі нестисливі включення.** У праці [841] на основі розв'язку про дію зосередженої сили на межу анізотропної півплощини та інтегрального перетворення Фур'є побудовано розв'язки задачі для абсолютно гнучкого, нестисливого тонкого включення змінної товщини на межі поділу анізотропних матеріалів за гладкого контакту включення з матрицею (своєрідна модифікація задачі розклинювання). Досліджено характер особливості напружень біля вістря неоднорідності залежно від форми її торця: для вістря з точкою звороту напруження скінченні; зі заокругленням – особливість степенева; з кутовою точкою – особливість логарифмічна.

**Гнучке включення у вигляді стрингера.** Робота [297] стосується застосування одновимірної моделі стрингера до розв'язування двоперіодичних задач та на основі цього визначення ефективних характеристик армованого тонкими стрічками-стрингерами анізотропного середовища. З використанням аналітичного подання потенціалів для задачі про еліптичне

пружне включення в анізотропному матеріалі W.T.Chen [1202] робиться хибний висновок про те, що через торці включень зусилля не передаються. Однак такий висновок не можна вважати коректним, оскільки перехід від регулярного до сингулярного розв'язку слід виконувати з використанням тоншого асимптотичного аналізу. Особливості напруженого стану біля такого включення-стрингера у кусково-однорідній анізотропній пластині вивчені у [480, 474].

На основі цієї ж моделі Л.А.Фільштінський [1043] дослідив гнучке розтягливе включення, що виходить на границю анізотропної півплощини. Поки ребро не вийшло на вільну межу, особливість є кореневою. В діапазоні кутів нахилу до межі  $\varphi \approx \pi/4 \dots \pi/3$  концентрація напружень майже повністю щезає. Коли  $\varphi \rightarrow 0$ , тоді теж з'являється коренева особливість.

Більш загальні порівняно з [1043] результати отримані у праці [476], де вивчався характер поведінки розв'язку під час виходу стрингера під довільним кутом на межу поділу двох анізотропних матеріалів. Побудовані точні розв'язки для півнескінченного та скінченного, але нерозтягливого стрингера. Виявилось, що показник особливості дотичних напружень у точці виходу стрингера на межу фаз не залежить від його пружних властивостей. Включення на межі анізотропних середовищ досліджене у праці [1753].

У 1989 р. у праці Q.Q.Li, T.C.T.Ting [1463] (див. теж [1462]) поряд із розглянутим окремо у цьому огляді випадком абсолютно жорсткого включення з використанням формалізму Стро (Stroh) та методики розв'язуванням інтегральних рівнянь [1275] побудовані інтегральні рівняння плоскої та антиплоскої задач (в єдиному комплексі) для гнучкого стрингера, який чинить опір лише деформуванню розтягом і яке може повертатися як жорстке ціле. Так само, як у [1739] було введено коефіцієнти сингулярності напружень (кутового асимптотичного розподілу немає). Для часткового ізотропного випадку отримано залежність граничних значень компонент тензора напружень від заданих деформацій на нескінченності. Для відносно жорсткого включення (малий параметр  $\lambda$ ) для сформульованої задачі побудовано рівняння Фредгольма (для плоского та антиплоского випадку вони мають однакову структуру) і в граничному випадку  $\lambda=0$  дають випадок абсолютно жорсткого включення. Подано його асимптотичний розв'язок для малих  $\lambda$  і на графіку відображено його значення для різних значень  $\lambda=0,2; 0,1; 0,02$  з урахуванням двох перших членів. Числовий розв'язок рівняння Фредгольма зіставлено із асимптотичним для значень малого параметра  $\lambda=0,1; 0,2$  (для останнього значення різниця розв'язків майже дворазова).

**Податні включення.** Дослідження [405] заповнену матеріалом тріщину розглядає як тонке деформівне включення змінної товщини, обумовленої початковим розкриттям щілини. Вважається, що стрибка напружень на включенні не виникає і цей шар клею деформується за схемою Вінклера. Задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля. Досліджена залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень в ортотропній матриці від жорсткості матеріалу включення під час дії нормальних та дотичних напружень на нескінченності.

У статті [854] розглядається поміщене в однорідну ортотропну пластину, що перебуває в полі рівномірного розтягу на нескінченності, податне ізотропне включення, на якому відсутній стрибок напружень. Усередненням закону Гука за товщиною включення побудовані дві умови взаємодії і задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно деякої комплексної функції. Конкретні приклади не розглядаються.

**Пружні включення. Пружні включення за якісною теорією.** І.Т.Денисюк на с. 124–129 монографії [289] виклав застосування якісної моделі тонкостінного пружного включення у ізотропній пластинці. Вона дає можливість отримати кількісні значення лише граничних

випадків жорсткого включення та тріщини. Параметрами моделі є пружні сталі матеріалів та довжина включення, однак товщина включення у них не фігурує.

**Пружні включення за стрижневою моделлю.** Найістотніші (хоча й не всі) особливості деформування включення враховує підхід праці [1018], де розглянута ортотропна пластинка, у отвір якої через тонкий проміжний шар сталої товщини, який вважається тонким стрижнем, вставлений з натягом ізотропний диск. Вважається, що стрижень працює на розтяг та згин у площині пластинки. Внаслідок замкнутості проміжного шару питання особливості напружень тут не виникає. Однак є змога дослідити вплив анізотропії матеріалу та жорсткість включення щодо розтягу та згину.

**Пружні включення за моделлю усереднених властивостей.** У 1987 р. методом функцій стрибка В.М.Павличком та Г.Т.Сулимом була досліджена концентрація напружень біля міжфазного тонкого пружного включення у однорідному полі напружень на нескінченності [16\*]. Запропонований підхід (модель повного спектру властивостей) дав змогу отримати всі можливі граничні випадки, коли включення моделює тріщину, абсолютно жорстку плівку, чи коли матеріали всіх складових однакові. Побудовані асимптотики полів напружень та переміщень виявилися (з точністю до позначень) у випадку включення в однорідному матеріалі такими ж, як побудовані для пружних гострокутних криволінійних багатокутників [67]. Пізніше автор разом із С.П.Шевчуком отримав інші відображені у цій монографії результати. Їх важливе для геофізики застосування розвинуто у публікації [1117]. Ці та інші дослідження автора у вивченні включень з використанням цього підходу викладені у тексті монографії.

**Контактні задачі з використанням методу міжконтактних прозорів.** Р.М.Швець, Р.М.Мартиняк та А.А.Криштафович перенесли на випадок ортотропних матеріалів раніше отримані для ізотропних матеріалів результати про гладкий контакт двох півплощин внаслідок притискування різними силовими чинниками [1115] та про вплив сил тертя на контактні напруження між пружною півплощиною та жорсткою з неглибокими гладкими виїмками на поверхні [484].

### 48.3. Антиплоска задача

#### Тріщини

Докладний аналіз задач поздовжнього зсуву для пружних тіл із тріщинами можна знайти у розділах 4 та 6 монографії [123]. Згадаємо лише окремо не зазначений там розв'язок двоперіодичної задачі для тріщин [157].

#### Абсолютно жорсткі включення

У 1976 р. вийшла з друку праця [84], у якій з використанням задачі лінійного спряження (Рімана – Гільберта) було розглянуто окремо тонке стрічкове включення, побудовані для нього двочленні асимптотичні вирази полів напружень і переміщень. Разом із тим запропоновано в ролі критерію руйнування біля вістря включення використовувати граничне значення густини повної енергії деформації.

У праці Q.Q.Li, T.C.T.Ting [1463] поряд із плоскою задачею для моделі стрингера (у тому числі й абсолютно жорсткого) розглянута аналогічна антиплоска (див. докладніше у підрозділі, де розглядаються модель гнучкого стрингера у плоскій задачі тонких пружних включень та абсолютно жорстке включення у плоскій задачі).

Система колінеарних жорстких включень була розглянута у [1389]. А.Jedidi та ін. [1385] побудували аналітичні розв'язки для двох ортотропних смуг із різними кутами нахилу

осей ортотропії, коли на межі поділу матеріалів задані різні крайові умови, які можна трактувати, зокрема, і як тріщини чи абсолютно жорсткі включення.

### Тонкі пружні включення

У 1982 р. Л.Т.Бережницький з І.Т.Денисюком [68] розв'язали задачу про гострокінцеве багатокутне пружне включення у анізотропному матеріалі та побудували відповідні асимптотичні залежності. І.Т.Денисюк [288] нову модель тонкостінного пружного включення, яку можна вважати якісною моделлю через те, що вона дає можливість отримати кількісні значення лише граничних випадків жорсткого включення та тріщини. Параметрами моделі є пружні сталі матеріалів, однак товщина включення у них не фігурує. Проте зрозуміло, що за фіксованих (ненульових і не необмежених значень) пружних властивостей включення зі зменшенням його товщини до нуля, має бути отриманий однорідний розв'язок (відсутність включення). У монографії [289] розглянуто також випадок взаємодії двох включень.

Модель пружного стрингера, придатна для відносно жорстких гнучких включень, яка не може мати своїм частковим граничним випадком розв'язок для тріщини, використано у низці праць японських вчених. У 1984–85 рр. Т.Kondo, Н.Sekine, О.Tamate [1430, 1431] розглянули задачу для довільно орієнтованої пружної плоскої стрічки у анізотропному півпросторі. Було окремо досліджено граничні випадки, коли включення одним ребром виходить на межу тіла, а також є абсолютно жорстким. В обчисленнях для п'яти типів матеріалів досліджувалося значення коефіцієнта інтенсивності напружень (для такої моделі він один) у залежності від заглиблення включення та окремих значень кута повертання включення. У іншій праці тих же авторів [1429] вивчена взаємодія такого ж включення із довільно орієнтованою тріщиною. Наступного року Т.Kondo [1425] вивчив взаємодію двох включень та періодичної системи колінеарних включень у безмежному анізотропному просторі. Т.Kondo, М.Kobayashi, Н.Sekine [1426] розв'язали задачу для включення, що своїм одним кінцем вийшло на межу поділу двох анізотропних півпросторів. Вивчено особливість поля напружень біля цього кінця.

У праці Q.Q.Li, Т.С.Т.Ting [1463] поряд із плоскою задачею для моделі стрингера розглянута аналогічна антиплоска (див. докладніше у підрозділ, де розглядається модель гнучкого стрингера у плоскій задачі тонких пружних включень).

### 48.4. Згин пластин із тонкими включеннями

У праці О.С.Яхси, М.М.Шahid [1764] з використанням інтегрального перетворення Фур'є розглянуто підкріплену ортотропну пластинку Райсснера з тріщиною за її згину рівномірно розподіленим поперечним навантаженням. Отримане сингулярне інтегральне рівняння, що розв'язується із використанням квадратурних формул Гаусса – Чебишева та Гаусса – Якобі. Окремо досліджено випадок, коли вістря тріщини є безпосередньо біля арматури. Побудовані асимптотичні залежності напруженого стану біля вістря тріщини. Виявлено, що сингулярність напружень у вістрі тріщини не залежить істотно від пружних властивостей та геометричних параметрів підкріплення, а визначається більшою мірою коефіцієнтом Пуассона пластини.

О.А.Сяський [1014] за допомогою апарату інтегралів Коші побудував систему двох сингулярних інтегральних рівнянь для згину анізотропної пластини Кірхгофа з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним стрижнем змінного поперечного перерізу. Конкретні обчислення здійснені для ортотропної пластинки із використанням методу колокацій для розв'язування систем рівнянь.

У працях одеських механіків [435, 436] досліджено згин вільно опертої на краях ортотропної пластини-смуги. У першій праці отриманий точний аналітичний розв'язок задачі у



випадку, коли на поздовжній осі розташована півбезмежна тонка пружна опора вінклерового типу, яка перебуває з пластиною у гладкому безвідривному контакті. Аналіз асимптотики контактних напружень у кінці опори свідчить про їх скінченність. Друга праця стосується випадку розташування на поздовжній осі пружної півбезмежної балки, яка навантажується зусиллям, що зникає з віддаленням на нескінченність. Визначено прогини балки і напруження на ділянці контакту пластини із ребром, досліджено асимптотику контактних зусиль біля кінця балки.

#### 48.5. Тонкі включення у оболонках

Праця [275] стосується побудови системи сингулярних інтегральних рівнянь для трансверсально-ізотропної оболонки із абсолютно жорстким лінійним включенням уздовж фрагменту лінії кривизни серединної поверхні. Запропоновано спосіб зведення цієї системи до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Вивчена також задача про взаємовплив у анізотропній оболонці тріщин та абсолютно гнучких ребер-стрингерів, які сприймають лише зусилля розтягу-стиску (стрибки переміщень дорівнюють нулю) [1046]. Розв'язок задачі про визначення напруженого стану у зварній із двох частин кусково-однорідній сферичній ортотропній оболонці, коли зварний шов моделюється включенням-стрижнем. Побудовано рівняння для поєднаних між собою сферичної оболонки із круговим отвором та сферичного купола. Для прикладу розглянуто залишкові температурні напруження на лінії зварювання, а також вивчено вплив жорсткості підкріплювального стрижня (зварного шва) та зсувів на напружений стан ортотропної оболонки із підкріпленням круговим отвором (модуль пружності купола дорівнює нулю).

#### 48.6. Задачі теплопровідності для тіл з тонкими включеннями

Анізотропія теплових властивостей у задачах теплопровідності і термопружності враховується вкрай рідко. Т.Л.Мартиневич та В.С.Куйбіда [571] використали для побудови рівнянь двовимірних прямолінійно-анізотропних тіл з гладким контуром зручні для числових застосувань потенціали подвійного шару та звели нестационарні задачі до інтегральних рівнянь Фредгольма – Вольтерри. Праця [485] стосується побудови в межах концепції методу міжконтактних прозорів двох узагальнених умов теплового контакту анізотропних тіл (плоска задача), коли внаслідок локальних нерівностей поверхонь видовжені проміжки, де відсутній безпосередній контакт, заповнені теплопровідною анізотропною речовиною, що не опирається деформуванню, а лише чинить термоопір.

#### 48.7. Термопружність анізотропних тіл з тонкими включеннями

##### Плескати включення у тривимірних тілах

Частина праць, які стосуються цієї тематики, була згадана у § 42 під час аналізу методів розв'язування задач теорії включень довільної форми. Тут згадаємо ще декілька розв'язків задач, що стосуються вивчення теплових і механічних полів у тілах із еліпсоїдальними [769, 391], з яких у граничних випадках можна отримати розв'язки для плескатих чи голкових (волоконних) включень.

**Жорсткі плескати включення.** На основі побудованого розв'язку задачі про плоску поверхню стрибка напружень та переміщень у необмеженому трансверсально-ізотропному середовищі В.П.Силованюком [881] досліджене питання про виникнення пластичного течіння від тонкого дискового абсолютно жорсткого включення [880]. І.Т.Денисюк на основі гра-

ничного переходу від сфероїдального жорсткого включення отримав розв'язок [284] для кругового плоского включення у трансверсально-ізотропному середовищі і дослідив поля напружень, температури і теплових потоків в околі фронту включення. Запропоновані розрахункові формули для обчислення КІН за локальними значеннями напружень, переміщень, температури. Поглиблення аналізу цієї проблеми здійснене у праці [91]. Розв'язок аналогічної задачі для еліптичного жорсткого включення за рівномірного нагрівання чи потоку тепла, перпендикулярного або паралельного до площини жорсткого еліптичного включення отримали у 1995–96 рр. Ю.М.Подільчук, В.В.Добричечір та ін. [715, 767, 768].

**Пружні плескати включення.** На основі усереднення рівнянь рівноваги та закону Гука у праці [917] побудовані шість умов взаємодії тонкого плоского в плані пружного включення з трансверсально-ізотропним середовищем, у яких фігурують різниці та суми контактних напружень на обох берегах включення. Проте для прикладу розглянуте тонке еліпсоїдальне включення з використанням не загальної, а найпростішої вінклерової моделі. Завдяки особливостям форми включення побудоване рівняння вдалося розв'язати у замкнутому вигляді і як частковий випадок отримати вирази КІН для тріщини.

На основі вищезгаданих умов взаємодії у [884] побудовані інтегральні рівняння відповідної задачі з тонкими сплющеними включеннями. Досліджені граничні випадки рівнянь. З цими та деякими іншими результатами цих робіт можна ознайомитися у монографії В.П.Силованюка [882].

### Плоска задача термопружності для тонких включень

**Податні лінійні (плоска задача).** У поле зору автора попала лише одна праця, яку можна вважати певною мірою причетною до цієї тематики. Т.Р.Tauchert [1680] розв'язав задачу про однорідну ортотропну смугу, на берегах якої задано температуру, а уздовж прямолінійного відрізка, паралельного до країв смуги, на якому переміщення, напруження і тепловий потік неперервні, а температура має стрибок, пропорційний до потоку (існує термоопір). Такий об'єкт можна вважати абсолютно гнучким стрингером, що не чинить опору на розтяг,

**Жорсткі лінійні (плоска задача).** Л.Т.Бережницький та В.М.Садівський з використанням теорії конформних відображень та методу збурення границі розв'язали задачу про визначення напруженого стану та концентрації напружень у анізотропних пластинах із багатокутними гострокінцевими включеннями [80, 865, 863, 864] та вказали способи обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Якщо вважати, що включення матиме два вістря, то цей випадок відповідатиме тонкому жорсткому включенню.

Задачу термопружності для ортотропного прямокутника з тонким прямолінійним жорстким включенням у такій самій постановці, як це було зроблено раніше для включення в ізотропній прямокутній пластинці [1665], розв'язав N.Sumі [1666]. Абсолютно жорстке включення на межі поділу двох анізотропних півплощин дослідили С.К.Chao, R.C.Chang [1192]. Отриманий А.С.Гольцевим [177] розв'язок для відрізка у ортотропній пластинці, коли на цьому задано сталі стрибки складових вектора переміщень і температури можна інтерпретувати як узагальнену задачу для жорсткого включення.

**Пружні лінійні (плоска задача).** Л.Т.Бережницький та І.Т.Денисюк з використанням апарату конформних відображень та методу збурення границі вивчили задачу визначення напруженого стану та концентрації напружень у анізотропних пластинах із анізотропними багатокутними гострокінцевими включеннями [66, 67], побудувавши асимптотичні вирази для розподілу напружень і переміщень біля вістря включення. Якщо включення матиме два вістря, то цей випадок відповідатиме тонкому пружному включенню із загостреними краями. Праця І.Т.Денисюка [282] подає результати докладного аналізу для цієї задачі впливу на КІН відносної жорсткості включення, міри ортотропії, геометрії включення.

Автору відома лише одна праця, де аналізується плоска задача термопружності для тонкого включення у ортотропному матеріалі. Л.Т.Бережницький та І.Т.Денисюк на основі розробленої ними і згаданої вище методики розв'язування задачі для багатокутних гострокіньцевих анізотропних включень розглянули питання теплопровідності та термопружності тонкого прямолінійного гострокутного пружного включення у пластині з прямолінійною анізотропією теплових та пружних властивостей [65]. Отриманий розв'язок відповідає якісній моделі тонкого включення, оскільки дає можливість отримати граничні випадки. Це пояснюється тим, що у всіх залежностях фігурує лише один геометричний параметр включення (його довжина) і вони жодною мірою не відображають залежності від товщини включення. Побудовані вирази розподілу теплових потоків та напружень поблизу вістря неоднорідності.

**Жорсткі лінійні (плоска задача електропружності).** J.Liang та ін. [1466] дослідили зв'язані електромеханічні поля у анізотропному п'єзоелектричному середовищі. збудовані наявними там тріщинами та жорсткими тонкими включеннями.

## § 49. Тонкі включення у п'єзоелектриках

Основний масив літератури в галузі механіки деформівного твердого тіла [712], що враховує п'єзоелектричні властивості матеріалів з тонкими неоднорідностями, стосується тріщин. Тонкі недеформівні та деформівні структури досі не стали об'єктами прискіпливої уваги, хоча відповідні дослідження розпочалися доволі давно. В Україні піонером таких наукових досліджень був Л.А.Фільштінський, який і далі плідно працює у напрямі вивчення п'єзоелектриків [1042]. Пізніше згадаємо деякі із інших його праць.

**Тонкі включення у просторових тілах.** Y Liu, H.Fan [1475] для аналізу деформування нанотрубки використали континуальну модель деформування зануреної у однорідний ізотропний континуум циліндричної оболонки. T.Chen [1199] виходячи із розв'язку для еліпсоїдального включення із властивостями матриці (включення Ешелбі), але з однорідним полем власних напружень і електричних переміщень всередині, побудували розв'язок для еліптичного циліндра (одна піввісь прямує до нескінченності).

**Жорсткі включення у антиплоскій та плоскій задачах. Антиплоска задача.** Згадаємо лише одну працю S.W.Chen [1198], де вивчається антиплоске деформування п'єзоелектричного середовища із тонким жорстким стрічковим включенням за дії відповідним чином спрямованого електричного поля. Z.M.Xiao та ін. [1760] побудували функцію Гріна для гвинтової дислокації у безмежному середовищі із стрічковим включенням.

**Плоска задача.** С.А.Мелкумян та В.Г.Галоян [585] розглянули задачу визначення спряженого електропружного поля у п'єзокерамічній площині з розрізом, у центральну частину якого вставлено без тертя тонке жорстке електронепроникне включення (розклинювання), а на решту частини берегів тріщини (де немає контакту із включенням) діє внутрішній тиск. Застосовано інтегральне перетворення Фур'є, яке дало можливість звести задачу до потрійних інтегральних рівнянь, які потім були трансформовані у парні ряди-рівняння. Побудовано точний розв'язок задачі.

Z.M.Xiao та ін. [1761] дослідили задачу зародження (за механізмом Зенера – Стро мікротріщини з вістря півбезмежного жорсткого включення у п'єзоелектричній площині. L.Wu та S.Du [1754] аналогічно до того, як це було зроблено у суто силовій задачі [1758], дослідили задачу про жорстке тонке включення, розміщене конфокально у електропружному еліптичному включенні, вставленому у безмежну п'єзоелектричну пластину.

Низка праць стосується тонких жорстких включень на межі поділу матеріалів двох різних п'єзоелектричних матеріалів: [1239] (включення проводить струм); [1301, 1300] (включення – діелектрики).

**Пружні включення. Плоска задача.** Одна із перших наукових праць, що стосується плоскої задачі для тонких деформівних включень у електропровідних пружних середовищах, була виконана Л.А.Фільштинським та його учнями у 1979 р. [647]. Тут розглянуто двоперіодичну задачу для тріщин чи пружних провідників-стрингерів у п'єзоелектричному середовищі для визначення ефективних характеристик такої структури-композиту (див. також [356]), а також задачу електропружності для півплощини з тріщиною чи періодичною системою пружних лінійних провідників.

У праці [54] розглянута задача про спряження механічних та електричних полів у п'єзокерамічному середовищі (плоска деформація), що містить тріщини або тонке стрічкове волокно. Для пошуку комплексних потенціалів використано функцію Гріна щодо дії зосередженої сили у довільній точці необмеженого п'єзоелектрика. Обчислено також КІН [355] для криволінійної тріщини з навантаженими берегами у п'єзоелектричній півплощині, із якої витягується співвісною зосередженою силою прямолінійне скінченної довжини тонке пружне включення-стрингер (одновимірна силова модель зі стрибком дотичних напружень). Розглянуто приклад ненавантаженої тріщини уздовж дуги еліпса та побудовано графіки зміни КІН, контактних зусиль у місці контакту включення із матрицею та зусилля у включенні.

Q.Luo, L.Tong [1479, 1480] побудували та докладно дослідили задачу про деформування тонкої балки, що має з одного чи симетрично із двох боків приклеєні (шар певної товщини) п'єзоелектричні накладки, що відіграють роль актуатора чи сенсора. Вважалося, що між складовими є ідеальний механічний контакт чи спостерігається відшарування.

## § 50. Руйнування тіл з включеннями

### 50.1. Загальні відомості та основні експериментальні факти

Внаслідок високої концентрації напружень в околі вершини тонкостінного включення довільної механічної природи пластичне деформування та руйнування матеріалу розпочинається передусім у цій області [933]. Воно може знайти свій вияв у руйнуванні матеріалу матриці, матеріалу включення [1078] або поверхні поділу матеріалів [453], якщо адгезія недостатньо міцна. Мікроструктурні дослідження пластичних стопів з ізольованими включеннями засвідчили, що руйнування розпочинається з руйнування включень чи межі поділу [1560].

З іншого боку, використання теоретичного коефіцієнта концентрації напружень, який ґрунтується на уявленні про однорідну будову матеріалів, часто ускладнює та обставина, що на мікрорівні матеріал однорідним не є. Для оцінки реального ККН слід використовувати також структурні властивості матеріалу [1269]. На виникнення спонтанного руйнування мають вплив дуже багато чинників, зокрема й розмір частинок [1438]. Виявлена висока кореляція між тріщиновитримністю і середньою відстанню між графітовими включеннями у високоміцних чавунах [467], а ось сама кількість включень за сталого вмісту графіту (отже, розмір включень) на тріщиновитримність не впливає.

Різниця коефіцієнтів лінійного розширення матеріалів включень та матриці у багатьох випадках є причиною часткового, а іноді й повного відшарування чи вилушування включень. Подекуди це явище відіграє корисну, зміцнювальну роль, оскільки на таких дефектах тріщини можуть гальмуватися, однак, утворені каверни можуть також об'єднуватися і спричиняти

розвиток руйнування [1506, 1244]. Ці спостереження підтверджують також цілеспрямовані експериментальні дослідження G.Maron, R.G.C.Arridge [1494] з розтягу плоских зразків із епоксидної смоли трьох типів – суцільних однорідних, з 1–3 круговими отворами і з такою ж кількістю так само розташованих сталевих шайб. Виявилося, що наявність шайб зменшує міцність суцільних однорідних зразків приблизно у 4 рази, а отворів – лише у 1,5. Причому такий самий результат (1,5 рази) був отриманий, якщо сталеві шайби поєднувалися із матрицею шаром клею з набагато меншим від матриці модулем пружності. Такий шар не чинить опору зсувним деформаціям та істотно зменшує концентрацію напружень.

Методами швидкісного фільмування та каустик P.S.Theocaris та J.Prassjanakis [1691] виявили, що у плоских композитних зразках з металевою ортогональною сіткою, залитою епоксидною смолою, тріщини ростуть з кутових точок включень перпендикулярно до напрямку розтягу.

Оглядова праця A.J.Perry [1551] (бібл. 188 назв) розглядає різні механізми зародження та розвитку пор у конструкційних елементах, які працюють в умовах повзкості, та роль у цих процесах включень. У склопластиках руйнування у багатьох випадках розпочинається на межі з'єднання волокон зі смолою, причому руйнування може розпочинатися і не тільки за виникнення у цій області великих напружень розтягу [1544].

Руйнування поблизу включення має три можливі аспекти: 1. може відбутися руйнування матриці і мікротріщина почне підростати всередині тіла; 2. руйнування може розвиватися всередині включення; 3. може відбутися руйнування межі поділу матеріалів. Можлива і така ситуація, коли процес руйнування буде охоплювати одночасно якісь дві чи навіть усі три складові. Усі зазначені нижче результати (якщо це не обумовлено окремо) стосуються плоскої задачі теорії пружності.

## 50.2. Абсолютно жорсткі гострокінцеві й тонкі включення

**Руйнування матриці.** Найбільше уваги приділено руйнуванню матриці. Теоретичне дослідження явища руйнування матриці біля включень із загостреними вершинами напевно започатковане у працях Л.Т.Бережницького, Р.С.Громяка, В.В.Панасюка та І.І.Труша [76, 63]. Вони пов'язали руйнування з радіальною складовою  $\sigma_{rr}$  тензора напружень в околі вістря гострокінцевого абсолютно жорсткого включення. При цьому побудовані діаграми граничного навантаження за складного (двовісного) напруженого стану, які пізніше були застосовані [62] і до пружних включень еліптичної форми, де можливе застосування класичних механічних теорій міцності. Інші критеріальні функції (напруження максимальні головні та максимальні дотичні  $\tau_{\max}$ , густини енергії формозміни  $W_{\phi}$  та повної енергії деформації  $W$ ) досліджені у [61].

У працях [702, 703] для аналізу локального руйнування біля гострокінцевих структурних елементів матеріалу пропонується застосувати концепцію макронапружень М.Я.Леонова [533], згідно з якою у трактуванні [702, 703] «сумарний вплив мікронеоднорідностей реального твердого тіла, які містяться всередині будь-якої сфери радіуса  $\rho$ , на механічні властивості приймається однаковим і тому вводяться у розгляд деякі усереднені деформації сфери радіуса  $\rho$  і до них застосовуються залежності, встановлені при стандартних механічних випробуваннях матеріалів». У праці [280] до вивчення руйнування біля вістря гострокутного отвору чи абсолютно жорсткого включення теж застосована концепція мікронапружень [533].

З прикладом використання концепції макронапружень до аналізу граничного стану плескатої еліптичної в плані включення у трансверсально-ізотропному тілі можна озна-

йомитися у [258]. Згадані також результати аналізу прикладу плоскої задачі для тіла з криво-лінійним вирізом або жорстким включенням, оточеним прошарком скінченої товщини.

Застосування Гдаутосом (E.E.Gdoutsos) критеріальних функцій  $\sigma_{\theta\theta}$  та  $W$  до гіпоциклоїдного [1305, 1308], та гіпоциклоїдного, астроїдного і лінійного [1307], лінійного [1304] включень дало близькі результати. Дослідження можливості застосування критеріальних функцій  $W$  та  $W_{\phi}$  до жорсткого міжфазного включення здійснене у [873]. Докладно руйнування біля поодиноких та розподілених випадковим чином абсолютно жорстких лінійних включень вивчали П.М.Витвіцький та С.Ю.Попіна [150].

Задачу про малу тріщину, яка виходить із вістря абсолютно жорсткого включення у напрямі його осі, розглянуто у працях [85, 86, 929]. У першій праці визначені КІН та особливості розв'язку у всіх особливих точках (вістря тріщини, включення та точка їх поєднання); у другій – розглянуто застосування класичних силових та енергетичних критеріїв теорії тріщин до аналізу зародження процесу руйнування у вістрі включення. У третій цитованій праці записане рівняння балансу енергії при виникненні та розвитку тріщини по заданій траєкторії. З урахуванням згаданої вище теорії макронапружень та отриманих розв'язків для тріщини на продовженні осі тонкого жорсткого включення у полі рівномірних напружень розтягу-стиску на нескінченності запропоновано теорію оцінювання критичної довжини тріщини, яка зароджується біля кінця твердого макродефекту.

О. Tamate, Н. Sekine та Y. Ozawa [1674] за критерій зародження руйнування поблизу тонкого жорсткого включення вибрали умову досягнення дотичними напруженнями екстремального значення. Верифікація цієї умови відбулася із використанням фотопружного аналізу плоских зразків з поздовжніми включеннями. Побудовані графіки залежності граничного навантаження від довжини включення.

Аналітичний розв'язок (методом конформних відображень) для тріщини, що виходить із вістря абсолютно жорсткого тонкого включення, побудований також і у праці [189]. З використанням класичного критерію руйнування для тріщини розглянуто граничну рівновагу пластини з включенням і з'ясовано, що при дії однорідного поля напружень на нескінченності лавинному росту тріщини передуватиме стадія повільного стійкого її підростання.

Тріщини, перпендикулярні до осі включення, які перетинають чи відходять від нього, розглянуто у праці В.І.Похмурського, М.Г.Стащука та І.П.Бутвинника [822, 823].

Задачу про малу тріщину, яка виходить під кутом із вістря абсолютно жорсткого включення, розглянуто у праці О. Tamate, Н. Sekine й Y. Ozawa [1675]. Включення моделюють за допомогою розподілу зосереджених сил невідомої густини, а тріщину – крайовими дислокаціями. За критерій появи тріщини приймається досягнення швидкістю звільнення енергії деформації певного критичного значення. На основі цього визначається прогнозований кут підростання тріщини. Досліджується вплив коефіцієнта Пуассона на величину цього кута. Експериментальні дослідження здійснені для плоских зразків із епоксидної смоли із тонкими сталевими вставками за рівномірного розтягу та стискування уздовж осі включення. Експерименти добре підтвердили теоретичні розрахунки при розтягу, та погано – за стиску (експерименти дали напрям росту у бік включення, а розрахунки – від нього).

Таку ж задачу про малу тріщину, яка виходить під кутом із вістря абсолютно жорсткого включення, із використанням техніки конформних відображень досліджували роком пізніше N. Hasebe та ін. [1338, 1339] у випадках, коли включення може повертатися, або його орієнтація є фіксованою за дії прикладеного до нього зосередженого моменту, довільного однорідного поля напружень на нескінченності. У першій із публікацій обчислювалися напруження уздовж межі контакту включення з матрицею та на березі тріщин, кут повертання включення і момент зусиль, які діють на нього, КІН біля вістря тріщини.

У другій праці отримані результати використовуються для вивчення з енергетичних позицій умов розвитку крихкого руйнування. Отримані дані для тріщини-відростку скінченної довжини екстраполюються для отримання даних для тріщини безмежно малої (мікротріщини). На основі цих даних розраховується швидкість звільнення енергії деформації біля тріщини безмежно малої довжини і на основі критерію максимальної швидкості звільнення енергії обчислюється кут початкового напрямку формування тріщини з вістря включення. Аналізуються випадки дії на включення зосередженого моменту та одновісного розтягу під кутом  $45^\circ$  до осі включення чи зсуву паралельно до включення. Подані також дуже скромні експериментальні дані стосовно стиску тіла з включенням уздовж осі включення.

Публікація [129] аналізує руйнування у матеріалі із включенням еліптичної форми, коли внаслідок зміни температури відбувається його фазове перетворення. У граничному випадку тонкого включення запропоновано критерій виникнення рухомо-рівноважної тріщини, причому зазначається, що такі тонкі платівкові включення є найменш небезпечними.

У праці [1563] вводиться поняття еквівалентного розміру дефектів зварних швів та застосовуються класичні теорії механіки руйнування. Руйнування у неогуківому матеріалі (блоки каучуку) з тонкими пластинками скла всередині вивчається у праці [1210].

**Руйнування межі фаз і включення.** Руйнування міжфазної межі вивчене набагато менше. До цих випадків належать згадувані вже раніше задачі для включень із відшарованими одним чи двома берегами. Однак відшарування може бути частковим і відбуватися або біля вістря включення, або у його центральній частині. П.С.Качур [384] вивчав можливе часткове відшарування уздовж межі поділу матеріалів. М.М.Кундрат [491] запропонував розглядати у комплексі два механізми руйнування композиту – внаслідок відшарування чи від розриву волокна на частини. Введене поняття критичної довжини включення, при якій відбувається зміна механізму руйнування. Виявлено, що для кожного способу навантажування, міцності волокна та межі поділу, можна знайти таку довжину, що коли включення є довшим від цього критичного значення, то руйнується включення, а якщо менше, – то внаслідок зародження і розвитку тріщини на межі поділу. У дослідженні С.А.Варчені та ін. [138] зазначено, що металеві плівки часто використовують в ролі в'язучого шару для з'єднання різнорідних матеріалів (спаювання), та у зв'язку із цим зазначається, що руйнування тришарових з'єднань типу діелектрик – тонка металева плівка – діелектрик у більшості випадків відбувається адгезійно, тобто, по межі поділу.

І.П.Шацький [1101] розглянув плоску задачу згину у своїй площині безмежної пластинки із абсолютно жорстким включенням, яке має скінченну міцність на згин. З'ясовано, що критичне руйнівне навантаження обернено пропорційне до кубу довжини включення.

**Руйнування з межі фаз у матрицю.** О. Tamate, Н. Sekine та Y. Ozawa [1676] розв'язали плоску задачу для жорсткого включення у матриці, що розтягується однорідним полем на нескінченності уздовж осі включення (для таких включень – це найбільш небезпечна орієнтація). Припускається, що на скінченній ділянці включення зчеплене з матрицею і з кінців областей розтріскування виходять спрямовані всередину матриці мікротріщини однакової довжини. З огляду на симетрію задачі формулюється модельна задача для півплощини, на краю якої (зона зчеплення з включенням) діють невідомі дотичні напруження, а на тріщині, яка входить всередину півплощини, – невідома густина розподілу крайових дислокацій. На основі розв'язку побудованої системи сингулярних інтегральних рівнянь обчислюється швидкість звільнення пружної енергії деформації у залежності від кута  $\alpha$  нахилу тріщини та величини коефіцієнта Пуассона. За максимальним значенням цієї енергії визначено відповідно до енергетичного критерію можливий кут нахилу мікротріщини. Для плоскої деформації та  $\nu \approx 0,4$  отримано  $\alpha \approx 100^\circ$ .

Більш загальне дослідження подібної задачі здійснили Y. Ozawa та Н. Sekine [1545]. На додаток до використаного у вищезгаданій праці критерію максимальної швидкості звільнен-

ня пружної енергії деформації, тут також здійснено обчислення із використанням найпопулярніших критеріїв максимальних окружних напружень ( $\sigma_{\theta\theta}$ -критерію), максимальної густини енергії деформації та найбільших головних напружень. Зіставлення експериментально виміряного кута старту тріщини із розрахунковими даними виявило, що останні три критерії дають близькі результати, що задовільно узгоджуються із експериментом, а ось критерій максимальної швидкості звільнення пружної енергії деформації протирічить отриманим експериментальним результатам.

### 50.3. Пружні гострокутні й тонкі включення

Детально питання руйнування біля пружних гострокутних включень з використанням критеріальних функцій  $\tau_{\max}$  і  $W_{\phi}$  (з огляду на можливість значних пластичних деформацій) вивчене В.В.Панасюком та Л.Т.Бережницьким [698], які вважають за можливе використовувати поряд з класичними характеристиками  $\sigma_{ut}$ ,  $K_{Ic}$  сталі  $K_{0r}$ ,  $K_{0\theta}$  опору зародженню тріщини у напрямках  $r$  і  $\theta$  і використовувати ті чи інші групи критеріїв залежно від співвідношення між пружними властивостями компонент. Аналізуючи особливості руйнування біля пружних включень, Л.Т.Бережницький [60] зробив висновок, що «у випадку включень, близьких до порожнистих чи до абсолютно жорстких, можливе використання методів та понять, добре опрацьованих у математичній теорії тріщин».

Щодо пружних податних вінклерових включень, то у [696] пропонується використати деформаційний критерій. Розвиток цих досліджень містить праця М.М.Стадника та О.Є.Андрейківа [909], де для пружного руйнування тіл із гладкими тонкими включеннями пропонується використовувати першу теорію міцності, а якщо руйнування супроводжується пластичним деформуванням включення, матриці чи обох складових, то другої. Із застосування цих ідей стосовно випадків одного, двох співвісних і компланарних тонких включень еліптичного профілю та відповідних періодичних систем можна ознайомитися у публікаціях [912, 913, 186].

Аналізуючи руйнування композиційних матеріалів, Г.П.Черепанов [1078] теж використовує методику окремого дослідження розвитку тріщин у включенні, у матриці та на межі поділу.

### 50.4. Руйнування тривимірних композицій

Одним із цікавих загальних спостережень є сформульоване S.Endo і K.Kawato [1265] твердження, що межа фаз всередині тіла руйнується, коли нормальне або дотичне напруження на ній досягає граничного значення. P.A.Gradin [1326] стверджує, що якщо межа поділу виходить перпендикулярно на межу тіла, то руйнування найшвидше розпочнеться з відповідної точки поверхні. Існує багато інших умов руйнування композитів. Тому з приводу руйнування матеріалів із включеннями слід також, окрім згаданих вище праць, ознайомитися із літературою з механіки композиційних матеріалів, зокрема [452, 588, 459, 123, 1151].

\* \* \*

Завершуючи цей інформаційний розділ, слід зазначити, що досліджень у галузі теорії тонкостінних включень стосуються оглядові праці Д.В.Грилицького, Й.З.Піскозуба і Г.Т.Сулима [238, 250, 994], Г.Я.Попова [800], Л.Єнча [1387], Т.Мури та ін. [1526, 1533]; їх містять монографії [150, 1096, 25, 625, 801, 802, 870, 922, 95, 103, 439]. Проблематики включень, окрім згаданих праць, більшою чи меншою мірою торкалися також монографії [22, 25, 27, 398, 400, 820, 1528, 1145, 1146, 503, 1527, 1528] та деякі інші.



Автор свідомий того, що згадані у цьому розділі праці все ж лише окреслюють дуже широке коло проблем, методів та окремих задач, які стосуються проблематики включень, передусім тонких, але жодною мірою не вичерпують проблеми цілком. Багато важливих і, можливо, піонерських праць, безсумнівно, мимовільно залишилося поза нашою увагою. Проте головною його метою було привернути увагу дослідників до цього цікавого та важливого розділу механіки деформівного твердого тіла, у якому переплітаються різні її частини (теорія пружності, термо-, електро-, магнітопружності, пластичності, механіка композитів, механіка руйнування та ін.), та окреслити головні магістральні напрями його розвитку.

## БІБЛІОГРАФІЯ

1. Абдурахманов И.М. Влияние тонкого инородного включения на плоское стационарное поле. Минск, 1972. 0,5 а.л. с.–Ред. журн. "Инженерно-физический журнал", 1977, **22**, № 4. Деп. в ВИНТИ № 3479-71 Деп.
2. Абдурахманов И.М., Алибеков Б.Г. О влиянии периодической системы тонких включений на плоское стационарное температурное поле // Инженерно-физический журнал, 1977, **32**, № 3. С. 512–515.
3. Абрамян Б.Л. Об одной контактной задаче для полуплоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 5. С. 4–10.
4. Аветикян В.Е. Контактная задача для упругих клиновидных пластин, соединенных между собой кусочно-однородным полубесконечным включением / Тр. 13 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР (Киев, 24-27 мая 1988). Ч. 2 / Ин-т мех. АН УССР. К., 1988. С. 250–254. Рукопись деп. в ВИНТИ 27 дек. 1988 г., № 9072-В88.
5. Аветикян В.Е. Контактные задачи для клина с включениями и накладками. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ереван, 1987. 17 с.
6. Аветикян В.Е. Об одной задаче для упругих клиновидных пластин, усиленных между собой кусочно-однородным полубесконечным включением / Механика: Межвузовский сб. науч. ст. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1987, № 6. С. 137–144.
7. Авилкин В.И. Построение эффективного приближенного решения в задачах о контакте через тонкое покрытие. Ростов. инж.-строит. ин-т. Ростов-на-Дону, 1983. 13 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 9 сент. 1983 г., № 5155-83 Деп.
8. Агаян К.Л., Григорян Э.К. Контактная задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с произвольно ориентированными конечными стрингерами / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 9.
9. Акбаров С.Д. О напряженном состоянии в бесконечном вязкоупругом теле, армированном одним искривленным слоем наполнителя включением / Тр. 10 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР (Киев, 12–14 июня 1984). Ч. 1 / Ин-т мех. АН УССР. К., 1988. С. 2–7. Рукопись деп. в ВИНТИ 30 июля 1984 г., № 5535-84 Деп.
10. Акопян В.Н. Напряженно-деформированное состояние вязкоупругой клиновидной пластины, усиленной включениями и накладками включениях / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смешанные задачи мех. деформируемого тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 13.
11. Акопян В.Н. Об одной контактной задаче для упругого клина, усиленного жестким включением // Докл. АН АрмССР, 1989, **88**, № 2. С. 77–81.
12. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН Армении, 1995, **48**, № 4. С. 57–65.
13. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2002. № 6. С. 76–92.
14. Александров А.Я., Зиновьев Б.М. Приближенный метод решения плоских и пространственных задач теории упругости для тел с армирующими элементами и разрезами // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 15–25.
15. Александров А.Я., Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Численная реализация метода интегральных уравнений при решении плоских задач теории упругости для ортотропных сплошных тел с разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983, № 3. С. 64–71.
16. Александров А.Я., Олегин И.П. Пространственное напряженное состояние упругой среды, содержащей осесимметричную систему сферических концентраторов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985. № 2. С. 85–92.
17. Александров В.М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Прикладная математика и механика, 1967, **31**, № 6. С. 1117–1131.
18. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Взаимодействие упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости // Прикладная математика и механика, 1978, **42**, № 3. С. 475–485.
19. Александров В.М., Броновец М.А., Коваленко Е.В. Плоские контактные задачи для линейно-деформированного основания с тонким усиливающим покрытием // Прикл. механика, 1988, **24**, № 8. С. 60–67.
20. Александров В.М., Галаджев Р.С., Соловьев А.С. К расчету погрешностей тензоизмерений // Измерительная техника, 1966, № 2. С. 25–27.

21. Александров В.М., Коваленко Е.В. Движение штампа по границе упругой полуплоскости с тонким усиливающим покрытием / *Механика сплошной среды*. Ростов-на-Дону, 1983. С. 13–27.
22. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошной среды со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
23. Александров В.М., Коваленко Е.В., Мхитарян С.М. Об одном методе получения спектральных соотношений для интегральных операторов смешанных задач механики сплошных сред // *Прикладная математика и механика*, 1982, **46**, № 6. С. 1023–1031.
24. Александров В.М., Кучеров В.А. О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости // *Прикладная математика и механика*, 1970, **34**, № 4. С. 641–652.
25. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
26. Александров В.М., Сметанин Б.И. Задачи теории упругости для тел с тонкими концентраторами напряжений / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 1–17.
27. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
28. Александрова Г.П. О влиянии сил поверхностного натяжения на контактную жесткость / *Расчет оболочек и пластин*. Ростов-на-Дону, 1975. С. 202–209.
29. Аллахвердов Б.М., Яшкин А.Г. Использование аналогий при решении задач изгиба пластин // *Изв. вузов. Стр.-во и архит.*, 1987, № 11. С. 38–42.
30. Андрейкив А.Е., Лучко И.И., Гембара Т.В. Методы определения коэффициентов интенсивности напряжений для трещин, ортогональных к арматурным стержням / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 21–23 сент. 1988 г.). Ужгород, 1988. С. 3.
31. Антипов Ю.А. Краевые задачи плоской теории упругости для клиновидной области при наличии включения / *Одес. ун-т. Одесса*, 1982. 28 с. Рукопись деп. В ВИНТИ 22 дек. 1982 г., № 6332-82 Деп.
32. Антипов Ю.А. Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // *Прикл. механика и техническая физика*, 1996, **60**, № 4. С. 669–680.
33. Антипов Ю.А. Решение некоторых задач о концентрации напряжений с помощью задачи Римана с бесконечным индексом / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 129.
34. Антипов Ю.А., Онищук О.В. Задача изгиба пластин с пересекающимися дефектами (решение с помощью задачи Римана с бесконечным индексом) / *Аннот. докл. «6 Всес. съезд по теор. и прикл. мех.»* (Ташкент, 24–30 сент. 1986). Ташкент, 1986. С. 44.
35. Антипов Ю.А., Попов Г.Я., Яцко С.И. Решение задач о концентрации напряжений возле пересекающихся дефектов при помощи задачи Римана с бесконечным индексом // *Прикладная математика и механика*, 1987, **51**, № 3. С. 458–467.
36. Антипов Ю.А., Ситник В.А. Аналитическое решение задач для кусочно-однородной плоскости с разрезом или стрингером / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 24.
37. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
38. Арутюнян Н.Х., Мовчан А.Б., Назаров С.А. Поведение решений задач теории упругости в пограничных областях с параболическими и цилиндрическими включениями или полостями // *Успехи механики*, 1987, **10**, № 4. С. 3–91.
39. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Контактная задача о вдавлении штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием // *Прикладная математика и механика*, 1975, **39**, № 5. С. 857–875.
40. Атаманова А.Ф. Напряженное состояние пластинки с упругим включением в трехмерной постановке / *Мат. физика*. К.: Наук. думка, 1971. Вып. 10. С. 120–124.
41. Атомный механизм разрушения. М., Металлургиздат, 1963. 664 с.
42. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. Изд. 3-е, перераб. М.: Наука, 1970. 304 с.
43. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1980. 247 с.
44. Бакши О.А. О напряженном состоянии мягких прослоек в сварных соединениях при растяжении (сжатии) // *Вопросы сварочного производства*. Тр. ЧПИ. Челябинск, 1965. № 33. С. 5–26.

45. Балан В.Г., Лавренюк В.И. Напряженно-деформированное состояние упругой полуплоскости с прямоугольными включениями. Київ, 1988. 13 с. Рукопись предст. Киев. ун-т. Деп в УкрНИИ-ИНТИ № 873-Ук88. Деп. от 7.04.88 г.
46. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образовавшихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских постановках // Прикладная математика и механика, 1959, **23**, № 4. С. 706–721.
47. Баренблатт Г.И., Христианович С.А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 11. С. 73–86.
48. Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде // Прикладная математика и механика, 1961, **25**, № 1. С. 46–55.
49. Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. О расклинивании хрупких тел // Прикладная математика и механика, 1960, **24**, № 4. С. 667–682.
50. Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. О хрупких трещинах продольного сдвига // Прикладная математика и механика, 1961, **25**, № 6. С. 1110–1119.
51. Бахмат Г.А. Напряженное состояние равномерно нагретой пластинки с жестким включением и трещиной на границе раздела сред при двухосном растяжении / Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1987. № 14. С. 37–39.
52. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.
53. Белов Н.Н., Корнеев А.И., Симоненко В.Г. Исследование влияния прослойки из пористого материала на откольное разрушение металлических плит. Томск. ун-т. Томск, 1985. 29 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 25 дек. 1985 г., № 8859-В.
54. Белокопытова Л.В., Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Сопряженные электрические и механические поля в пьезоупругих телах с разрезами или включениями // Динамика и прочн. машин. Харьков, 1981. Вып. 34. С. 16–21.
55. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
56. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Солдатов М.М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости // Прикладная математика и механика, 1983, **47**, № 5. С. 781–789.
57. Бельченко Г.И., Губенко С.И. Неметаллические включения и качество стали. К.: Тэхника, 1980. 168 с.
58. Беляев В.А., Журавлев Ю.А., Ильясов Р.И. Исследование влияния „непроклеев” на концентрацию напряжений в клеевых соединениях // Концентрация напряжений в элементах авиационных двигателей, 1979, № 1. С. 51–56.
59. Бенько Л.И., Стащук Н.Г. Произвольно ориентированный краевой дефект типа трещины или жесткого включения в жестко защемленной или свободной от напряжений полуплоскости / Материалы Конф. мол. ученых и спец.: Пробл. повыш. качества материалов, приборов и оборуд. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 26–28 сент. 1984). Львов, 1984. С. 7–10. Рукопись деп. в ВИНТИ 17 янв. 1985 г., № 479-85 Деп.
60. Бережницкий Л.Т. О моделировании дефектов в механике / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 32.
61. Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения // Физ.-хим. механика материалов, 1977, **13**, № 2. С. 39–47.
62. Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С., Труш И.И. Диаграммы локального разрушения двухкомпонентных хрупких тел при сложном напряженном нагружении / Тр. Всес. совещ. «Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии» (Киев, 1977). К., 1978. С. 272–285.
63. Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С., Труш И.И. О построении диаграмм локального разрушения для хрупких тел с остроконечными жесткими включениями // Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 5. С. 40–47.
64. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. К.: Наук. думка, 1979. 400 с.
65. Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т. Задача термоупругости для анизотропной пластины с остроконечным анизотропным включением // Физ.-хим. механика материалов, 1985, **21**, № 2. С. 69–76.
66. Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т. Оценка локального напряженно-деформированного состояния вблизи остроконечных упругих включений в анизотропной пластине // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 3. С. 28–32.
67. Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т. Плоская задача для анизотропного тела с остроконечным анизотропным включением // Физ.-хим. механика материалов, 1983, **19**, № 2. С. 63–73.

68. Бережницький Л.Т., Денисюк І.Т. Продольний сдвиг анизотропного тела с остроконечным анизотропным включением // Физ.-хим. механика материалов, 1982, **18**, № 6. С. 58–66.
69. Бережницький Л.Т., Качур П.С., Мазурак Л.П., Ходань Я.И. Антиплоская деформация тела с криволинейным упругим остроконечным включением // Физ.-хим. механика материалов, 1982, **18**, № 3. С. 63–69.
70. Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М. Исследование упругопластических эффектов при разрушении волокнистых композитов // Механика композитных материалов (Рига), 1984, № 5. С. 926–930.
71. Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М. Локальное упругопластическое разрушение одного класса композитов // Физ.-хим. механика материалов, 1984, **20**, № 5. С. 57–64.
72. Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М. Упругопластическая деформация в окрестности жесткого включения // Проблемы прочности, 1984, № 11. С. 62–69.
73. Бережницький Л.Т., Лень М.П. Антиплоская деформация тела с жесткими включениями // Проблемы прочности, 1975, № 8. С. 10–14.
74. Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Садивский В.М. Продольный сдвиг изотропного тела с остроконечным упругим включением // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 5. С. 413–417 (Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Садівський В.М. Поздовжній зсув ізотропного тіла з гострокінцевим пружним включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1977. № 5. С. 413–417).
75. Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. Коэффициенты интенсивности напряжений возле жестких остроугольных включений // Пробл. прочности. 1973. № 7. С. 3–7.
76. Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями // Пробл. прочности, 1973, № 10. С. 8–11.
77. Бережницький Л.Т., Паньков Б.И. Коэффициенты интенсивности напряжений возле дугообразного жесткого включения // Физ.-хим. механика материалов, 1976, **12**, № 2. С. 91–96.
78. Бережницький Л.Т., Саврук М.П., Стащук Н.Г. О взаимодействии линейных жестких включений и трещин // Физ.-хим. механика материалов, 1981, **17**, № 2. С. 70–76.
79. Бережницький Л.Т., Садивский В.М. К теории остроконечных концентраторов напряжений в анизотропных пластинах // Физ.-хим. механика материалов, 1977, **13**, № 3. С. 82–90.
80. Бережницький Л.Т., Садивский В.М. О напряженно-деформированном состоянии вблизи жестких остроугольных включений в однородном анизотропном теле // Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 6. С. 55–62.
81. Бережницький Л.Т., Садивский В.М. Продольный сдвиг анизотропного тела с дефектами типа трещин // Проблемы прочности, 1977, № 12. С. 8–13.
82. Бережницький Л.Т., Садивский В.М. Продольный сдвиг анизотропного тела с остроконечным анизотропным включением // Физ.-хим. мех. материалов. 1982. **18**, № 6. С. 58–66.
83. Бережницький Л.Т., Садивский В.М. Распределение напряжений возле упругих включений с точками возврата на контуре // Физ.-хим. механика материалов, 1976, **12**, № 3. С. 47–54.
84. Бережницький Л.Т., Садивский В.М., Лень М.П. Антиплоская деформация анизотропного тела с жестким пластинчатым включением // Физ.-хим. механика материалов. 1976. **12**, № 6. С. 80–85.
85. Бережницький Л.Т., Стащук Н.Г. Коэффициенты интенсивности напряжений возле трещины на продолжении линейного жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 11. С. 49–53.
86. Бережницький Л.Т., Стащук Н.Г. О развитии трещины в окрестности вершины жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 12. С. 29–33.
87. Бережницький Л.Т., Стащук Н.Г. Плоская перидическая задача теории жестких включений // Физ.-хим. механика материалов, 1982, **18**, № 1. С. 61–69.
88. Бережницький Л.Т., Стащук Н.Г., Громьяк Р.С. К определению критического размера макротрещины, возникающей на продолжении линейного жесткого включения // Проблемы прочности, 1989, № 2. С. 68–71.
89. Бережницький Л.Т., Денисюк І.Т. Інтенсивність напружень в пружному середовищі біля жорсткого еліптичного в плані пластинчатого включення. Повідомлення 1. Математичні основи методу. Приклади / Праці НТШ. Матеріалознавство і механіка матеріалів. **6**. Львів, 2001. С. 84–94.
90. Бережницький Л.Т., Денисюк І.Т. Інтенсивність напружень в пружному середовищі біля жорсткого еліптичного в плані пластинчатого включення. Повідомлення 2. Практичне застосування. Трансформні тіла / Праці НТШ. Матеріалознавство і механіка матеріалів. **6**. Львів, 2001. С. 95–103.
91. Бережницький Л.Т., Денисюк І.Т. Інтенсивність напружень в пружному середовищі біля жорсткого еліптичного в плані пластинчатого включення. Повідомлення 3. Інтенсивність термонапружень поблизу жорстких пластинчатих включень / Праці НТШ. Матеріалознавство і механіка матеріалів. **9**. Львів, 2003. С. 52–60.
92. Бережницький Л.Т., Качур П.С., Мазурак Л.П. До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами // Физ.-хим. механіка матеріалів, 1989, **25**, № 5. С. 28–41.

93. Бережницький Л.Т., Кундрат М.М. Локальне руйнування композиції з жорстким лінійним включенням // Фіз.-хім. мех. матер., 1995, **31**, № 4. С. 60–67.
94. Бережницький Л.Т., Кундрат М.М. Пружнопластична рівновага композиції з жорстким лінійним включенням // Доп. НАН України, 2001, № 1. С. 56–60.
95. Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Сташук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. К.: Наук. думка, 1983. 288 с.
96. Бернар И.И. Влияние дугообразного включения на температурное поле пластинки. Рукопись деп. в ВИНТИ 7 июля 1984 г., № 4736-84 Деп.
97. Бернар И.И. Влияние дугообразного включения на температурное поле пластинки // Инженерно-физический журнал, 1984, **47**, № 6. С. 1024–1025.
98. Бернар И.И. Температурные поля и напряжения в пластинках и цилиндрических телах, обусловленные локальными тепловыми потоками. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Львов, 1988. 16 с.
99. Бернар И.И., Опанасович В.К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности // Прикладная математика и механика, 1983, **47**, № 2. С. 249–256.
100. Бернар И.И., Опанасович В.К. Термоупругость пластинки с тонкостенным упругим включением по дуге окружности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1987, № 3. С. 169–175.
101. Бех О.И., Перехватов В.К. Алгоритм и программа решения плоской контактной задачи теории упругости для неограниченной пластинки с вложенной шайбой из другого материала. Горький, 1979. 30 с.–. Деп. в ВИНТИ № 2751-79 Деп.
102. Биличук С.М. Метод конечных элементов в плоских задачах об отслоившихся включениях / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смешанные задачи мех. деформируемого тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 43.
103. Божидарник В.В. Двовимірні задачі теорії пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл. Львів: Світ, 1998. 352 с.
104. Божидарник В.В., Налобін О.П., Сорокати́й Ю.І., Сулим Г.Т. Асимптотичні властивості напружено-деформованого стану в околі технологічних тріщин стосовно фотопружності // машинознавство, 1998, № 2. С. 2–4.
105. Божидарник В.В., Пискозуб І.З., Сулим Г.Т. Термоупругое равновесие кусочно-однородной среды при наличии зон тепловыделения на границе раздела компонент / Матер. выездного заседания науч. совета АН СССР по трению и смазкам «Современные проблемы контактных взаимодействий». Луцк, 1987. С. 58–59.
106. Божидарник В.В., Пискозуб І.З., Попіна С.Ю., Сулим Г.Т. Граничні теплові потоки в пластинах з стохастичними теплопровідними тріщинами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1991. Вип. 251. С. 9–15.
107. Божидарник В.В., Попіна С.Ю., Сулим Г.Т. Предельные тепловые потоки в пластинах с теплопроводными трещинами / Тез. докл. областн. конф. "Повышение качества и надежности машиностроительной продукции" (Луцк, 12–15 окт. 1989 г.). Луцк, 1989. С. 119–120.
108. Божидарник В.В., Садівський В.М., Шваб'юк В.І. Антиплоска деформація нелінійного тіла з розширеним жорстким включенням // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". 1993. Вип. 271. С. 10–12.
109. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Продольный сдвиг изотропной среды с системой туннельных разрезов // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1990. Вып. 243. С. 10–12.
110. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Вплив теплового потоку на концентрацію напружень біля тонкого теплопасивного включення // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1992. Вип. 266. С. 8–11.
111. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Львів: Світ, 1999, 945 с.
112. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994. 560 с.
113. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Застосування методу функцій стрибка при розв'язуванні задач з теорії пружності для тонкостінних включень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 252. С. 7–12.
114. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Использование экстраполяции по Ричардсону при решении сингулярных интегральных уравнений // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. Вып. 224. С. 98–102.
115. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Концентрація напружень біля тонкого теплопасивного включення // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1992. Вип. 262. С. 10–14.
116. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Концентрація напружень на пружних стрічках при поздовжньому зсуві ізотропного масиву // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. Львів: В-во "Світ", 1990. Вип. 246. С. 11–14.
117. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Метод колокацій розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1990. Вип. 242. С. 8–13.
118. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Механіка крихкого руйнування. К.: УМК ВО, 1989. 95 с.

119. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Нелинейная антиплоская деформация тела с ленточным включением // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1986. Вып. 209. С. 12–16.
120. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Об уточнении уравнений задачи теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1986. Вып. 200. С. 24–28.
121. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Представление однородного поля напряжений на бесконечности с помощью рядов сосредоточенных сил в задачах продольного сдвига // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. Вып. 220. С. 6–8.
122. Божидарник В.В., Сулим Г.Т., Сулим М.В. Упругое равновесие ленточного включения в изотропном массиве под действием сосредоточенных сил и винтовых дислокаций // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1985. Вып. 190. С. 13–16.
123. Божидарник В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Монографія. У 2-х т. Луцьк: Надстир'я, 2007.
124. Божидарник В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. Луцьк: ЛДТУ, 2003. 226 с.
125. Божидарник Віктор, Сулим Георгій, Цап Андрій. Системи компланарних тонких дефектів, перпендикулярних до межі поділу двох ортотропних півпросторів // The Sixth Polish-Ukrainian Conference "Current problems of mechanics of nonhomogeneous media" (Warsaw, 6–10 September 2005). Warszawa: W-wo SGGW, 2005. S. 21–22.
126. Босаков С.В. Плоская задача расчета анкерных плит неглубокого заложения // Прикл. механика, 1986, **22**, № 1. С. 45–52.
127. Босаков С.В. Расчет анкеров с учетом разрыва сплошности упругого основания // Основания, фундаменты и механика грунтов, 1982, № 2. С. 25–27.
128. Босаков С.В. Расчет заглубленных анкерных плит конечной жесткости // Прикл. механика, 1980, **16**. № 3. С. 81–87.
129. Бульбич А.А., Зеленин С.Н., Миронов С.В. Критерий возникновения трещины в твердом теле на включении, испытывающем фазовый переход / Исследования по расчету пластин и оболочек. Ростов-на-Дону, 1986. С. 159–167.
130. Бутвинник И.П. К теории дефектов типа трещин вблизи линии раздела сред // Физ.-хим. механика материалов, 1989, **25**, № 4. С. 102–104.
131. Бутвинник И.П., Бережницкий Л.Т., Похмурский В.И. О порядке сингулярности напряжений в композитах при антиплоской деформации // Физ.-хим. механика материалов, 1983, **19**, № 3. С. 102–103.
132. Вайнберг Д.В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. К.: Изд-во АН УССР, 1952. 420 с.
133. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. Ч. 1. К.: Будивельник, 1970. 435 с.
134. Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я. Дифракция плоской гармонической волны Релея на круговом упругом включении, расположенном в упругой полуплоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки, 1999, **4**. Вип. 4. С. 154–159.
135. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
136. Ванин Г.А. Механика ленточных композиционных материалов // Прикл. механика, 1985, **21**, № 4. С. 24–32.
137. Ванькова А.М. Контактное взаимодействие накладки с упругой полуплоскостью / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 9.
138. Варченя С.А., Маникс Я.Е., Симановский А.А., Ярве Э.В. Анализ прочности при адгезионном разрушении соединений, содержащих тонкие пленки / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 40.
139. Васильев Кирило, Сулим Георгій. Антиплоска задача для двох шарів із довільно орієнтованим включенням // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Т. 2. Львів, 2006. С. 25–27.
140. Веденева Н.Н., Ключников В.Д., Мазинг Р.И. Задача о склейке двух полуплоскостей // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1974, № 1. С. 133–135.
141. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
142. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
143. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. К.: Вища школа, 1978. 182 с.

144. Верюжский Ю.В., Вусатюк А.И., Петренко А.Я., Савицкий В.В. Пакеты прикладных программ "Потенциал" для прочностных исследований конструкций машин и сооружений. К.: Минвуз УССР, 1982. 18 с.
145. Вигдергауз С.Б. Обратная задача трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983, № 2. С. 90–93.
146. Виноград М.И. Включения в стали и ее свойства. М.: Metallurgiya, 1963. 252 с.
147. Витвицкий П.М. Прочность микронеоднородных хрупких тел со статистическим распределением дефектов типа трещин // Физ.-хим. механика материалов, 1968, № 4. С. 413–419.
148. Витвицкий П.М., Квит Р.И. Расчет прочности композитов со стохастически распределенными упругими включениями / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 21–23 сент. 1988 г.). Ужгород, 1988. С. 9.
149. Витвицкий П.М., Кривень В.А. Антиплоская деформация упруго-пластического тела, содержащего призматическое включение // Прикл. механика, 1981, 17, № 8. С. 75–81.
150. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. К.: Наук. думка, 1980. 186 с.
151. Витвицкий П.М., Кривень В.А. Антиплоская пружно-пластична деформація тіла з жорстким включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1979, № 2. С. 104–107.
152. Вишневицкий К.В., Кушнир Р.М. Граничные интегральные уравнения для тела с инородными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1996, 39, № 1. С. 37–41.
153. Власов А.Г. Расчет тел с разрезами методом компенсирующих нагрузок / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 109.
154. Власов В.В., Колесников А.В. О местном напряженном состоянии в полуплоскости, подкрепленной ребром жесткости / Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1979, № 12. С. 165–172.
155. Власов Н.М., Егоров В.С., Колесов В.С., Федик И.И. Аналогия плоской задачи термоупругости с изгибом пластины (обзор) // Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1979. Вып. 10. С. 90–98.
156. Войтович Н.И. Термоупругое равновесие системы цилиндрическая оболочка – стержни – пластина / Вопр. расчёта несущей способности элементов конструкций. Львов. политехн. ин-т. Львов, 1988. С. 11–28. Рукопись деп. в ВИНТИ 8 сент. 1988 г., № 2269-Ук88.
157. Волкова Л.В., Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для продольного сдвига анизотропной среды с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1979, № 2. С. 91–95.
158. Волос В.А. Температурные поля и напряжения в телах с несквозными и сквозными цилиндрическими включениями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Львов, 1982. 21 с.
159. Волчок И.П. Исследование процессов деформации и разрушения литой стали // Физ.-хим. механика материалов, 1976, 12, № 2. С. 88–91.
160. Вольнец Л.Н., Воевода О.Д. Влияние параметров разрыва сплошности на перемещения границы упругой полуплоскости // Acta Geophysica Polonica, 1984, 32, No. 3. P. 259–269.
161. Воробец Б.С. Задача термоупругости для тел с линейными включениями // Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1989, № 237. С. 14–16.
162. Воробец Б.С. Термоупругость тел с линейными включениями / Вопросы расчёта несущей способности элементов конструкций. Львов. политехн. ин-т. Львов, 1988. С. 29–34. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 8 сент. 1988 г., № 2269-Ук88.
163. Вулицкий М.З., Суздальницкий И.Д. Периодическая задача о взаимодействии систем круговых отверстий и стрингеров // Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 2. С. 159–162.
164. Габдулхаев Б.Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. М.: ВИНТИ, 1980. Вып. 18. С. 251–307.
165. Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений I рода // Изв. вузов. Математика. 1973. № 7. С. 12–24.
166. Галаджева М.Р., Сирунян В.Х., Сметанин Б.И. О расклинивании упругой полуплоскости // Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, 27, № 2. С. 38–45.
167. Галазюк В.А. Обмежений розв'язок крайової задачі про напружено-деформований стан пружного тіла з абсолютно жорстким дископодібним включенням нульової товщини // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 12. С. 23–27.
168. Галазюк В.А. Розв'язування задач про напружено-деформований стан пружної пластини з неколовим вирізом // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1985. № 3. С. 20–24.



169. Галати С. Ленточные наполнители // Наполнители для полимерных композиционных материалов. М., 1981. С. 429–468.
170. Ганулич Б.К., Гнып И.П., Похмурский В.И. К вопросу о контактном упрочнении мягких прослоек // Физ.-хим. механика материалов, 1981, **17**, № 3. С. 68–73.
171. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 638 с.
172. Гембара В.М. Условия неидеального теплового контакта пластин, сопряженных в стык тонким промежуточным слоем / Вопросы механики реального твердого тела. К.: Наук. думка, 1964. Вып. 3. С. 76–80.
173. Гиббс Д.В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
174. Гладыш Р.В., Яворский М.С., Волос В.А., Каинский И.Е. Термоупругие напряжения в полупространстве с несквозным включением. Ред. журн. Физ.-хим. механика материалов. Львов, 1989. 28 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 10 ноя. 1989 г., № 6767-В89.
175. Глинский П.М. Остроконечное жесткое включение, перпендикулярное границе раздела двух сред / В кн.: Материалы VII конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 1975). Львов, 1975. С. 30–32. Рукопись деп. в ВИНТИ 9 апр. 1976 г., № 1138-76 Деп.
176. Гольдштейн Р.В., Корельштейн Л.Б. Асимптотический метод решения задач о несквозных вытянутых вырезах и трещинах в упругой пластине при произвольном нагружении М. 1988. С. 3–71. (Препринт / АН СССР. Ин-т пробл. мех.; № 319).
177. Гольцев А.С. Функции влияния для отрезков с постоянным разрывом смещений в плоской задаче термоупругости ортотропной среды // Теоретическая и прикладная механика. Донецк, 2002. Вып. 35. С. 100–106.
178. Гольцев А.С., Стаценко Л.И., Цванг В.А., Шевченко В.П. Метод интегральных уравнений в смешанных задачах теории оболочек с концентраторами линейного типа / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 88.
179. Гольцев А.С., Шевченко В.П. Задачи теплопроводности и термоупругости для оболочек с разрезами / Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. «Эффективные численные методы решения краевых задач мех. тверд. деформируемого тела» (Харьков, 27–29 сент. 1989). Харьков, 1989. С. 135–136.
180. Гольцев А.С., Шевченко В.П. Термоупругость оболочек с термоизолированным разрезом при наличии теплообмена // Прикл. механика, 1985, **21**, № 2. С. 73–78.
181. Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н., Марченко Г.А., Подгорный А.Н. Решение контактных задач теории упругости и пластичности МКЭ / Тез. докл. II Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Днепропетровск, 15–18 сент.). Днепропетровск. С. 46.
182. Горанова И.Н. Концентрация напряжений в плоскости с упругой шайбой при наличии радиальных дефектов. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1985. 18 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 26 ноя. 1985 г., № 2632-Ук85.
183. Горанова И.Н. Концентрация напряжений в плоскости с упругой шайбой при наличии дуговых дефектов. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1987. 16 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 6 янв. 1987 г., № 249-Ук87.
184. Горанова И.Н. Наряженное состояние плоскости с шайбой, ослабленной двумя отслоившимися включениями при гладком контакте. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1987. 10 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 6 янв. 1987 г., № 251-Ук87.
185. Горанова И.Н., Радиолло М.В. Об упругом равновесии плоскости с круговым включением, содержащем радиальные трещины // Прикл. механика, 1989, **25**, № 3. С. 43–48.
186. Горбачевский И.Я. Определение предельной наружки для тела с двумя параллельными трещиноподобными включениями при различных способах нагружения / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 111.
187. Горбачевский И.Я. Антиплоская деформация тела с двумя компланарными тонкими упругими цилиндрическими включениями / Материалы 2 конф. мол. ученых и спец. «Пробл. повыш. качества матер., приборов и оборуд.». Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 21–23 окт. 1986). Львов, 1987. С. 22–25. Рукопись деп. в ВИНТИ 27 апр. 1987 г., № 3007-87 Деп.
188. Горбачевский И.Я., Стадник М.М., Гнідець Б.М. Плоска деформація тіла з жорстким включенням складного контуру // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1996, **32**, № 6. С. 87–92.
189. Гордиенко Р.Н. О разрушении тела с жестким включением / Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск, 1983. С. 81–87. Рукопись деп. в ВИНТИ 16 дек. 1983 г., № 6830-83 Деп.

190. Гордон В.А., Колчин Г.Б., Мажеру В.В. Метод фазовых интегралов в плоской задаче / Математические исследования. Кишинев, 1982. № 70. С. 11–16.
191. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
192. Грибняк С.Т. Точное решение краевой задачи об изгибе бесконечной пластинки, содержащей прямолинейное включение. Одесс. ун-т. Одесса, 1983. 14 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 25 апр. 1983 г., № 353Ук-Д83.
193. Грибняк С.Т., Онищук О.В., Фаршайт П.Г. Решение интегрального уравнения с гладким ядром в классе функций с неинтегрируемыми особенностями. Одесс. ун-т. Одесса, 1984. 36 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 11 июля 1984 г., № 1199Ук-84 Деп.
194. Грибняк С.Т., Попов Г.Я. Изгиб свободно опертых пластин при наличии трещины // Прикл. механика, 1983, **19**, № 11. С. 72–78.
195. Грибняк С.Т., Попов Г.Я. Точное решение задачи об изгибе полосовой пластинки при наличии полубесконечной промежуточной опоры. Одесс. ун-т. Одесса, 1982. 19 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 29 янв. 1982 г., № 403-82 Деп.
196. Грибова В.В., Онищук О.В. Расчет защемленной пластинки с тонким включением методом граничной коллокации / Гидроаэромех. и теория упругости. Днепропетровск, 1985, № 33. С. 71–75.
197. Грибова В.В., Онищук О.В. Решение задач об изгибе пластин с линейными включениями модифицированным методом Треффца / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 97.
198. Грибова В.В., Онищук О.В. Решение задачи об изгибе пластинки с тонким жестким включением методом граничной коллокации. Одесс. ун-т. Одесса, 1983. 20 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 1 дек. 1983 г., № 1351Ук-Д83.
199. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
200. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. К.: Наук. думка, 1981. 544 с.
201. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теорії пластин та оболонок. К.: Либідь, 1993. 232 с.
202. Григорян Э.Х. Задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с конечным стрингером, выходящим на границу раздела сред / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 12–13.
203. Григорян Э.Х. Об одном подходе решения задач для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением // Уч. зап. Ереван. ун-та. Естеств. н., 1985, № 2. С. 35–40.
204. Григорян Э.Х., Манукян Э.А. Об одной задаче для упругой плоскости с частично скрепленным бесконечным упругим включением // Уч. Зап. Ереван. ун-та. Естеств. н., 1981, № 1. С. 51–59.
205. Грилицкий Д.В. Основные граничные задачи теории упругости для неоднородной плоскости, ослабленной разрезами по линии спая / Тез. докл. Всес. совещ. по применению методов ТФКП к задачам матем. физики. Тбилиси, 1961.
206. Грилицкий Д.В., Буйна Е.В., Думанский О.И., Сорокатый Ю.И. Экспериментальное определение коэффициентов интенсивности напряжений в конструкциях с трещинами // Физ.-хим. механика материалов, 1984, **20**, № 1. С. 29–32.
207. Грилицкий Д.В., Драган М.С., Опанасович В.К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1979, № 3. С. 83–88.
208. Грилицкий Д.В., Драган М.С., Опанасович В.К. Температурное поле и термоупругое состояние пластинки с тонкостенным упругим включением // Прикладная математика и механика, 1980, **44**, № 2. С. 338–345.
209. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А. Взаимодействие тонкого упругого включения с трещиной в кусочно-однородной плоскости // Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, **38**, № 3. С. 12–24.
210. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А. Об упругом равновесии кусочно-однородной плоскости с тонким жестким включением, пересекающим линию раздела материалов // Физ.-хим. механика материалов, 1985, **21**, № 2. С. 16–19.
211. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Паук В.И. Давление штампа на полуплоскость с линейным упругим включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1988, **41**, № 6. С. 19–27.
212. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Поддубняк А.П., Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенного упругого включения / Тез. докл. Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Ростов-на-Дону, 21–23 сент. 1977 г.). Ростов-на-Дону, 1977. С. 19–20.

213. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сорокатый Ю.И. Об особенностях напряжений в окрестности торца тонкого упругого включения в кусочно-однородной плоскости // Прикладная математика и механика, 1985, **49**, № 5. С. 864-867.
214. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Полуплоскость с произвольно-ориентированным линейным упругим включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, **33**, № 1. С. 12-20.
215. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением // Прикладная математика и механика, 1979, **43**, № 3. С. 542-549.
216. Грилицкий Д.В., Луцишин Р.М. Вторая основная задача для анизотропной пластинки с круговым изотропным включением // Прикл. механика, 1968, **4**, ип. 10. С. 24-30.
217. Грилицкий Д.В., Луцишин Р.М. Контактные напряжения в пластинке с криволинейными разрезами, кромки которых соприкасаются // Докл. конф. НИИ Маш. М., 1969. С. 40-49.
218. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, , С. 159-165.
219. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Драган М.С. Изгиб плиты с системой тонких упругих включений // Прикл. механика, 1984, **20**, № 9. С. 81-86.
220. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Напряженно-деформированное состояние в пластине, содержащей шайбу произвольной формы и прямолинейное тонкое упругое включение / Тез. докл. Всес. конф. «Совр. пробл. строит. мех. и прочн. летательных аппаратов» (Москва, 19-21 окт. 1983 г.). М.: МАИ, 1983. С. 22.
221. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной плиты с тонким прямолинейным упругим включением // Физ.-хим. механика материалов, 1984, **20**, № 2. С. 77-82.
222. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Напряженное состояние кусочно-однородной тонкой пластины с линейными упругими включениями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1989, № 4. С. 153-161.
223. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Распределение напряжений в пластине с эллиптической шайбой и прямолинейным тонким упругим включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1988, **41**, № 4. С. 41-48.
224. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Упругое состояние пластины с круглой шайбой и прямолинейным тонким упругим включением // Прикладная математика и механика, 1982, **46**, № 6. С. 993-1000.
225. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Упругое состояние пластины с впаиванной круглой шайбой, содержащей систему произвольно расположенных тонких упругих включений / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6-8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 60.
226. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Шацкий И.П. Напряженное состояние пологой оболочки с тонким упругим включением // Тр. XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Ч.2. Таллин: Изд-во Таллин. политехн. ин-та, 1983. С. 23-28.
227. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Шацкий И.П. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с тонким упругим включением / Тез. докл. II Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Днепропетровск, 15-18 сент.). Днепропетровск. С. 105-106.
228. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Шацкий И.П. Пологая оболочка с жестким линейным включением вдоль линии кривизны // Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8. С. 27-30.
229. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Шацкий И.П. Распределение напряжений в окрестности линейного включения в пологой оболочке / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая - 2 июня 1983). Донецк, 1983. С. 29-30.
230. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Шацкий И.П. Распределение напряжений в окрестности линейного включения в пологой оболочке / Теорет. и прикл. механика: Респ. межвед. науч.-техн. сб., 1985. Вып. 16. С. 29-34.
231. Грилицкий Д.В., Осив И.Н. Термоупругая задача для пластинки с эллиптическим включением при неидеальном тепловом контакте // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, № 5. С. 139-146.
232. Грилицкий Д.В., Поддубняк А.П. Кручение двухслойной упругой среды с плоской щелью или жестким включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 1. С. 85-94.
233. Грилицкий Д.В., Попович Б.И. К определению напряженного состояния анизотропной пластинки с упругим включением // Изв. вузов. Строит. и архит., 1970, № 5. С. 50-54.

234. Грилицкий Д.В., Попович Б.И. Основные граничные задачи термоупругости для кусочно-однородной изотропной пластинки с разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1970, № 4. С. 142–149.
235. Грилицкий Д.В., Попович Б.И. Термоупругое состояние кусочно-однородной изотропной пластинки с разрезами вдоль окружности // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1970, № 6. С. 12–23.
236. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными включениями // Прикл. механика, 1975, **11**, № 1. С. 74–81.
237. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // Прикладная математика и механика, 1975, **39**, № 3. С. 520–529.
238. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Тонкие упругие включения в изотропных средах / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 136–137.
239. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 1. С. 41–48.
240. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Термоупругое деформирование ленточного композита / Тез. докл. II Всесоюз. науч.-техн. сем. «Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них» (Львов, сент. 1984 г.). Киев: Наук. думка, 1984. С. 12–13.
241. Грилицкий Д.В. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаєюною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю // Питання механіки і математики. ЛДУ, 1962. Вип. 9. С. 79–86.
242. Грилицкий Д.В. Про деякі випадки пружної рівноваги ізотропної пластинки з впаєюною круглою ізотропною шайбою // Доп. АН УРСР, 1961, № 4. С. 451–453.
243. Грилицкий Д.В. Пружна рівновага безмежної анізотропної пластинки з впаєним абсолютно жорстким еліптичним ядром під дією сили і моменту, прикладених у довільній точці пластинки // Доп. АН УРСР, 1960, №2. С. 164–167.
244. Грилицкий Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов (навч. посібник). Львов: Изд-во «Вища школа» при ЛДУ, 1975. 111 с.
245. Грилицкий Д.В., Луцишин Р.М. Пружна рівновага анізотропної пластинки з впаєюною ізотропною шайбою при наявності розрізу на спаї // Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат., 1969. вип. 4. С. 70–78.
246. Грилицкий Д.В., Осів І.Н. Задачі теплопровідності й термопружності для пластин (навч. посібник). Львов: Изд-во «Вища школа» при ЛДУ, 1974. 120 с.
247. Грилицкий Д.В., Попович Б.І. Контактна задача про пружну взаємодію анізотропної пластинки з круглим ізотропним ядром // Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат., 1971. вип. 5. С. 65–67.
248. Грилицкий Д.В., Попович Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності (навч. посібник). Львов: Изд. «Вища школа» при ЛДУ, 1973. 115 с.
249. Грилицкий Д.В., Сорокати́й Ю.І., Сулим Г.Т. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі для тонкостінних пружних включень по дузі кола // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1979. Вип. 15. С. 69–75.
250. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1987. Вип. 27. С. 3–9.
251. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
252. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
253. Гринфельд М.А. О равновесных ориентациях жестких включений в негидростатических полях упругих напряжений // Докл. АН СССР, 1988, **298**, № 2. С. 333–338.
254. Гринфельд М.А. Условия равновесия на межфазовой границе упругих тел // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1982, № 1. С. 39–47.
255. Гришин В.А., Реут В.В. Напряженное состояние коробчатой оболочки, подкрепленной парой симметричных включений, параллельных ребру оболочки // Прикладная математика и механика, 1995, **59**, № 5. С. 849–852.
256. Гришин В.А., Реут В.В. Задача о напряженном состоянии коробчатой оболочки, ослабленной периодической системой трещин / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 102.
257. Громяк Р.С. О зоне пластичности в окрестности вершины жесткого включения при антиплоской деформации // Физ.-хим. механика материалов, 1979, **15**, № 4. С. 124–126.
258. Громяк Р.С., Денисюк И.Т., Качур П.С. Влияние микроструктуры матрицы на локальное разрушение вблизи жестких пластинчатых включений / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 47.

259. Гудрамович В.С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций К.: Наук. думка, 2005. 223 с.
260. .
261. .
262. —.
263. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. К.: Наук. думка, 1983. 296 с.
264. Гузь А.Н. Об аналогии между линеаризованными и линейными задачами для несжимаемых тел при малых начальных деформациях. Прикл. механика, 1974, **10**, № 11. С. 64–68.
265. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. К.: Вища школа, 1986. 511 с.
266. Гузь А.Н. Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (задачи расклинивания) // Прикл. механика, 1981, **17**, № 5. С. 3–12.
267. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред (обзор) // Прикл. механика, 1987, **23**, № 9. С. 3–29.
268. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. К.: Вища школа, 1989. 352 с.
269. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. К.: Вища школа, 1982. 352 с.
270. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий: 2006. 710 с.
271. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. К.: Вища школа, 1995. 304 с.
272. Гулян К.Г., Мхитарян Г.Г., Мхитарян С.М. О концентрации напряжений возле щелей или тонких включений в неоднородной среде при антиплоской деформации // Докл. АН АрмССР, 1988, **87**, № 5. С. 221–226.
273. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968. 648 с.
274. Гусар Н.Н., Хижняк В.К. К решению задач статики оболочек с абсолютно жестким включением. Донецк. ун-т. Донецк, 1989. 17 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 18 мая 1989 г., № 1276-Ук89.
275. Гусар Н.Н., Хижняк В.К. Контакт оболочки с абсолютно жестким включением. Донецк. ун-т. Донецк, 1989. 17 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 16 марта 1989 г., № 794-Ук89.
276. Гусятников А.Ю. Температурные напряжения в двухслойной полосе при неидеальном тепловом контакте // Мат. исслед. Кишинев, 1982. Вып. 70. С. 20–24.
277. Гучалов С.В. Решение задач теории упругости в тонких областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ленинград, 1985. 13 с..
278. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
279. Делявский М.В., Мазурак Л.П., Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С. Распределение напряжений вблизи остроугольных дефектов // Физ.-хим. механика материалов, 1979, **15**, № 3. С. 46–55.
280. Делявский М.В., Мазурак Л.П., Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С. Распределение напряжений вблизи остроугольных дефектов // Физ.-хим. механика материалов, 1979, **15**, № 6. С. 71–76.
281. Денисюк И.Т. Кручение вала с жесткой эллиптической прослойкой // Физ.-хим. механика материалов, 1985, **21**, № 5. С. 68–71.
282. Денисюк И.Т. Об интенсивности напряжений вблизи остrokонечного ортотропного включения. Луцк. фил. Львов. политехн. ин-та. Луцк, 1989. 21 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 2 янв. 1989 г., № 63-Ук89.
283. Денисюк И.Т. Распределение напряжений около жестких остроугольных включений при равномерном нагреве. Дифференциальные уравнения и их приложения. Львов, 1981. С. 48–51. Рукопись деп. в ВИНТИ 8 февр. 1982 г., № 574-82 Деп.
284. Денисюк И.Т. Распределение температуры, теплового потока и термонапряжений в трансверсально-изотропном теле в окрестности абсолютно жестких включений. Луцк. фил. Львов. политехн. ин-та. Луцк, 1988. 9 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 19 апр. 1988 г., № 961-Ук88.
285. Денисюк И.Т., Садивский В.М. Антиплоская деформация тела с криволинейным упругим включением при наличии сосредоточенных усилий // Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1982. Вып. 169. С. 38–40.
286. Денисюк И.Т., Садивский В.М. О напряженно-деформированном состоянии вблизи жестких включений, обусловленном термообработкой // Физ.-хим. механика материалов, 1983, **19**, № 1. С. 105–106.

287. Денисюк І.Т. Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке // Изв. Рос. АН. Механика твердого тела, 2000, № 4. С. 140–148.
288. Денисюк І.Т. Поздовжній зсув анізотропного тіла з пружними смугами // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1997, **33**, № 1. С. 51–56.
289. Денисюк І.Т. Пружна рівновага тіла з негладким включенням. Луцьк: Ред.-видавничий відділ ЛДТУ, 2004. 220 с.
290. Джишкаріани А.В. К решению сингулярных интегральных уравнений приближенными проекционными методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, **19**, № 5. С. 1149–1161.
291. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
292. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1987. 416 с.
293. Димитриенко И.П., Филипенко А.А. Расчет двухслойных оболочек переменной жесткости с прослойкой, работающей на сдвиг / Тез. докл. II Всес. науч.-техн. семинара «Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них» (Яремча, 5–7 сент. 1984). К.: Наук. думка, 1984. С. 21–22.
294. Дияк І.І., Кухарчук Ю.А., Сулим Г.Т. Дослідження пружної рівноваги плоских тіл непрямим методом граничних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1997. Вип. 47. С. 87–95.
295. Доборджинидзе Л.Г. Нелинейная задача теории упругости о расклинивании пластинки // Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1985, № 3. С. 122–125.
296. Долгих В.Н. О выборе равнопрочной формы сечения армирующей ленты в композиционном материале / Динамика и прочность машин. Харьков. Вып. 29. С. 42–53.
297. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами // Прикл. механика, 1979, **15**, № 4. С. 24–30.
298. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 2. С. 158–164.
299. Драган М.С. Изгиб консольной балки с прямолинейным упругим включением // Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., 1980. Вып. 16. С. 69–75.
300. Драган М.С. Напряженное состояние плиты с системой тонких упругих включений / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая – 2 июня 1983). Донецк, 1983. С. 36.
301. Драган М.С. Температурное поле и термоупругое состояние пластины с системой тонких упругих включений / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 77.
302. Драган М.С., Морозов Н.И. Метод механических квадратур в задачах изгиба пластин с линейными упругими включениями / Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. «Эффективные численные методы решения краевых задач мех. тверд. деформируемого тела» (Харьков, 27–29 сент. 1989). Харьков, 1989. С. 100–101.
303. Драган М.С., Опанасович В.К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением // Прикладная математика и механика, 1979, **43**, № 2. С. 342–348.
304. Драган М.С., Опанасович В.К., Божидарник В.В. Изгиб пластины с периодической системой тонких упругих включений. Луцк, 1988. 6 с. Луцк. филиал Львов. политехн. ин-та. Деп в УкрНИИТИ 15 авг. 1988 г., № 1996-Ук88.
305. Драган М.С., Опанасович В.К., Божидарник В.К. Изгиб и кручение плиты с периодической системой тонких упругих включений / Материалы выездн. заседания науч. совета АН СССР по трению и смазкам "Современные проблемы контактных взаимодействий". Луцк, 1987. С. 65–66.
306. Дудукаленко В.В., Лысач Н.Н. О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 1. С. 103–109.
307. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов, 1979, № 3. С. 387–396.
308. Дэниел И.М. Фотоупругое исследование композитов // Композиционные материалы: В 8-ми т. М.: Мир, 1978. Т. 2. С. 492–552.
309. Евтушенко А.А. Напряженное состояние кусочно-однородной полосы с включением // Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., 1979. Вып. 15. С. 80–83.
310. Евтушенко А.А. Об особенностях напряжений вблизи вершины тонкого линейного включения ортогонально выходящего на прямую линию раздела материалов / Материалы семинара мол. ученых «Неклассические и смешанные задачи мех. деформируем. тела» (Киев21–23 мая 1985). К., 1985. С. 56–61.
311. Евтушенко А.А. Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным тонким упругим включением // Прикладная математика и механика, 1980, **44**, № 5. С. 875–881.

312. Евтушенко А.А., Паук В.И. Влияние неоднородности материала на распределение напряжений вблизи тонкого упругого включения // Прикладная математика и механика, 1989, **53**, № 4. С. 651–657.
313. Евтушенко А.А., Паук В.И. О концентрации напряжений в полуплоскости под штампом и в окрестности тонкого упругого включения // Матер. выездного заседания науч. совета АН СССР по трению и смазкам «Современные проблемы контактных взаимодействий». Луцк, 1987. С. 61–62.
314. Евтушенко А.А., Сорокатый Ю.И. Растяжение составной плоскости с тонким упругим включением, ортогонально выходящим на прямую линию раздела материалов // Прикладная математика и механика, 1988, **52**, № 1. С. 120–125.
315. Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью // Физ.-хим. механика материалов, 1980, **16**, № 6. С. 70–73.
316. Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Концентрация напряжений у вершины жесткого включения на прямой линии раздела материалов полуплоскостей // Физ.-хим. механика материалов, 1985, **21**, № 5. С. 71–74.
317. Елисеев В.Е. Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 3. С. 145–150.
318. Ермолаев Г.В., Синченков М.И. Определение сварочных напряжений в подкрепленной пластине с поперечным швом методом конечных элементов // Тр. Николаев. кораблестроит. ин-та, 1974, вып. 80. С. 26–30.
319. Ерофеев В.П., Тюпышев Ю.А., Тимофеев Б.Т., Воронин А.Я. О механическом поведении косой мягкой прослойки при растяжении (сжатии) в условиях запрещения поперечных смещений соединяемых ею твердых элементов // Вопр. свароч. пр-ва. Челябинск, 1983. С. 29–33.
320. Ефремов В.В. Движение тонких недеформируемых лезвий с постоянной скоростью в упругой среде. ВЦ СОАН СССР. Красноярск, 1985. 31 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 8 июля 1985 г., № 4946-85 Деп.
321. Евтушенко О.О., Опанасович В.К., Сорокатый Ю.И. Аналіз умов на торця тонкого пружного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1991, **27**. № 2. С. 85–90.
322. Жоржколиани Г.Т. О растяжении пластинки с разрезом и стрингером // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1986, **81**, С. 60–64.
323. Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях. М.: Универс. типогр., 1906. 14 с.
324. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений в 7 т. Т.4. Аэродинамика / Под ред. Л.С.Лейбензона, С.А.Христиановича и др. М.-Л., 1949. 652 с.
325. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. М.: Ин-т мех. АН СССР, 1941. 236 с.
326. Задворняк М.І. Поздовжній зсув анізотропного тіла з прямокутним циліндричним включенням // Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1991. Вип. 252. С. 36–38.
327. Зеленцов В.Б. К расчету тонкой панели с жестким включением / Легкие конструкции зданий. Ростов-на-Дону, 1986. С. 43–50.
328. Зимин Б.А. Концентрация напряжений на двух эллипсоидальных включениях в изотропной упругой среде. Л., 1979. 17 с.–Деп. в ВИНТИ 8 авг. 1979 г. № 2934-79 Деп.
329. Зимин Б.А. Метод эквивалентного включения в задаче о неоднородности. Л., 1978. 10 с.–Деп. в ВИНТИ 30 мая 1978, № 1769-79 Деп.
330. Зиновьев Б.М. Исследование скачков напряжений и смещений при действии в упругом изотропном пространстве распределенных диполей. Новосибирск, 1981. С. 11. Деп. в ВИНТИ 26 июня 1981 г. № 3145-81 Деп.
331. Зиновьев Б.М. К вычислению напряжений и смещений при действии разрывных нагрузок. Новосибир. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1982. 10 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 9 ноя. 1982 г., № 552Б-82 Деп.
332. Зиновьев Б.М. К решению задач упругости для плоских анизотропных тел с разрезами методом компенсирующих нагрузок. Новосиб. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1986. 9 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 26 март. 1986 г., № 2006-В.
333. Зиновьев Б.М. Некоторые задачи расчета упругих армированных тел и тел с разрезами. Автореф. дис. ... канд. наук / Новосибирск, 1973. 10 с.
334. Зиновьев Б.М. Некоторые схемы численного решения задач теории упругости методом А.Я.Александрова при известных на границе смещениях. Новосиб. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1982. 13 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 5 окт. 1982 г., № 5063-82 Деп.
335. Зиновьев Б.М. Решение плоских задач теории упругости для тел с криволинейными разрезами методом компенсирующих нагрузок. Новосиб. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1983. 19 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 13 февр. 1984 г., № 858-84 Деп.

336. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Вычисление скачков напряжений в трансверсально-изотропном упругом пространстве при действии распределенных сил. Новосибир. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1981. 7 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 1 дек. 1981 г., № 5432-81 Деп.
337. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. К расчету плоских ортотропных упругих тел с криволинейными разрезами методом интегральных уравнений. Новосибир. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1981. 15 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 12 апр. 1981 г., № 1748-81 Деп.
338. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. К решению пространственных задач теории упругости анизотропного тела методом А.Я.Александрова / Мех. деформируемого тела и расчет транспортных сооружений. Новосибирск, 1984. С. 20–24.
339. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. К учету особенностей при численном решении задач теории упругости // Тр. Новосиб. Ин-та инженеров ж.-д. трансп., 1976 **12**, №11. С 74–84.
340. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Скачки напряжений при действии непрерывно распределенных сил в ортотропной плоскости / Мех. деформируемого тела и расчет транспортных сооружений. Новосибирск, 1982. С. 45–48.
341. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Скачки смещений и напряжений при действии диполей внутри линейно-анизотропного пространства. Новосибир. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1985. 8 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 26 авг. 1985 г., № 6300-85 Деп.
342. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Численное решение плоских задач теории упругости для ортотропных тел. Новосиб. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1981. 24 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 4 июня 1981 г., № 2722-81 Деп.
343. Зиновьев Б.М., Крохмаль Г.А. О погрешностях, связанных с заменой распределенной нагрузки сосредоточенными силами, при расчете армированных тел // Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1975. Вып. 167. С. 129–135.
344. Зленко Г.П., Мешков Ю.Я., Никоненко Д.И. Охрупчивающее действие локализованных структурных концентраторов напряжений // Физ.-хим. механика материалов, 1988, **24**, № 1. С. 65–68.
345. Зозуля В.В. Контакт цилиндрической оболочки с твердым телом через теплопроводный слой // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 10. С. 48–51.
346. Зозуля В.В. Связанная задача о термоупругом контакте пластин через теплопроводный слой // Прикладная математика и механика, 1989, **53**, № 5. С. 791–797.
347. Зозуля В.В. Термоупругий контакт оболочек через теплопроводный слой переменной толщины / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 140.
348. Зозуля В.В., Кантор Б.Я. Связанная задача о термоупругом контакте пластины с твердым телом через теплопроводный слой. Харьк. автомоб.-дор. ин-т. Харьков, 1987. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 5 окт. 1987 г., № 2804-Ук87.
349. Зоненашвили И.А. Некоторые варианты сопряжения составных оболочек со смещенными срединными поверхностями посредством ребра переменного сечения // Сообщ. АН ГССР, 1987, **128**, № 3. С. 501–504.
350. Зоненашвили И.А. Сопряжение оболочек со смешанными срединными поверхностями посредством ребра переменного сечения // Тр. Тбил. ун-та, 1985, **259**. С. 67–76.
351. Зоненашвили И.А. Условия сопряжения пластин с несимметричными ребрами переменной жесткости // Сообщ. АН ГССР, 1988, **130**, № 2. С. 277–280.
352. Зоненашвили И.А., Зиневич А.Г., Капанадзе Г.А. Граничные условия сопряжения пластин с несимметричным ребром переменного сечения, связывающие прогибы и функции напряжений // Сообщ. АН ГССР, 1988, **131**, № 32. С. 497–500.
353. Зоненашвили И.А., Флейшман Н.П. Условия сопряжения оболочек со смещенными срединными поверхностями посредством тонкого ребра переменной жесткости / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 87–88.
354. Зорин И.С., Назаров С.А. О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985, № 3. С. 79–86.
355. Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Взаимодействие трещины и включения в пьезокерамическом полупространстве // Прикл. механика, 1983, **19**, № 12. С. 52–58.
356. Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. К теории линейно армированных композиционных материалов с пьезокерамической матрицей. Учет влияния дефектов матрицы / Аннот. докл. «5-й Всес. съезд по теор. и прикл. мех.» (Алма-Ата, 27мая – 3 июня 1981). Алма-Ата, 1981. С. 169.
357. Иванов В.В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений / Математический анализ. Итоги науки. М.: ВИНТИ, 1963. С. 125–177.



358. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. К.: Наук. думка, 1968. 287 с.
359. Ильина И.И., Силвестров В.В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 3. С. 153–166.
360. Интегральные характеристики в задачах теории упругости / Бабич В.М., Зорин И.С., Иванов М.И., Мовчан А.Б., Назаров С.А. // Препр. ЛОМИ. 1989, № Р6. С. 1–61.
361. Исмаил Х.С., Онищук О.В. Точное решение задачи об изгибе бесконечной пластинки на винклеровском основании при наличии тонкой полубесконечной опоры. Одесс. ун-т. Одесса, 1985. 30 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 2 янв. 1986 г., № 24-Ук86.
362. Йооритс Л.А., Компус В.Ю., Руга Л.И. Возмущения от жесткого включения в поле напряжений плоской задачи // Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1983, № 551. С. 3–10.
363. К вопросу о расчетной прочности составных образцов с мягкой прослойкой при статическом растяжении / Гурьев А.В., Багмутов В.П., Хесин Ю.Д., Бойков Л.В. // Проблемы прочности, 1973, № 1. С. 9–13.
364. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
365. Калекін О.Ю. До розв'язку двовимірних крайових задач для обмеженої області з періодичною системою включень // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 11. С. 1013–1017.
366. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Качан Ю.Б. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами, упругими и жесткими включениями // Теоретическая и прикладная механика. Донецк, 2002. Вып. 35. С. 53–65.
367. Калоеров С.А., Мироненко А.Б. Вязкоупругое состояние пластинки с конечным числом упругих включений // Матер. IV Міжнар. наук. конф., присвяченої пам'яті акад. НАН України О.С.Космодам'янського (Донецьк-Мелекіно, 12–14 червня 2006). Донецьк: Юго-Восток, 2006. С. 67–69.
368. Калоеров С.А., Мироненко А.Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донець., ун-ту. Сер. А, Природн. науки, 2005. Вип. 1. Ч. 1. С. 61–69.
369. Канаун С.К. К задаче о пространственной трещине в анизотропной упругой среде // Прикладная математика и механика, 1981, **45**, № 2. С. 361–370.
370. Канаун С.К. О сингулярных моделях тонкого включения в однородной упругой среде // Прикладная математика и механика, 1984, **48**, № 1. С. 81–91.
371. Канаун С.К. Стационарные поля в однородной среде, возмущенные включением в форме криволинейного стержня // Прикладная математика и механика, 1987, **51**, № 2. С. 293–304.
372. Канаун С.К. Тонкий дефект в однородной упругой среде / Исследования по теор. основам расчета строит. конструкций: Межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ, 1983. С. 75–84.
373. Канаун С.К. Тонкий дефект в однородной упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984, № 3. С. 74–83.
374. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Петрозаводск. ун-т, 1993. 600 с.
375. Кантор Б.Я., Зозуля В.В. Связанная задача о контакте пластины с твердым телом через теплопроводный слой // Докл. АН УССР. Сер. А, 1988, № 4. С. 31–33.
376. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук, 1948, **3**, № 6 (28). С. 89–185.
377. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
378. Караванский О.В. О термомеханическом контакте пластин, соединенных ребром жесткости // Прикл. механика, 1970, **6**, № 7. С. 85–93.
379. Карпенко Л.Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби // Прикладная математика и механика, 1966, **30**, № 3. С. 564–569.
380. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Мир, 1983. 512 с.
381. Касаткин Б.С., Прохоренко В.М., Чертов И.М. Напряжения и деформации при сварке. К.: Вища школа, 1987. 246 с.
382. Катамадзе Р.Г. Об одной новой гранично-контактной задаче теории упругости // Сообщ. АН Груз.ССР, 1980, **97**, № 2. С. 309–312.
383. Качанов Л.М. Дополнения к континуальной теории среды с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 6. С. 138–140.
384. Качур П.С. О механизмах вероятного локального разрушения материала в окрестности упругого включения / Матер. 12 Конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. ма-

- териалов (Львов, 23–25 окт. 1985). Ч. 1. Львов: Физ-мех. ин-т АН УССР, 1986. С. 77–80. Рукопись деп. в ВИНТИ 18 апр. 1986 г., № 2832-B85.
385. Каюк Я.Ф., Середенко В.Н. Континуальная модель межфазной границы в композитных системах // Проблемы прочности, 1984, № 2. С. 67–71.
386. Каюк Я.Ф., Середенко В.Н. Межфазные превращения и механические характеристики композитных материалов // Прикл. механика, 1986, 22, № 5. С. 96–106.
387. Каюк Я.Ф., Середенко В.Н. Механическая модель межфазового слоя в композитных материалах // Прикл. механика, 18, № 3. С. 3–10.
388. Квашина С.С. Определение коэффициентов интенсивности напряжений в концах трещины, находящейся вблизи сварного шва в тонкой пластине // Проблемы прочности. 1974. № 3. С. 51–53.
389. Келли А. Высокопрочные материалы. М.: Мир, 1976. 263 с.
390. Кирилюк В.С. Аналитические решения задач о термонапряженном состоянии изотропной среды, содержащей упругую неоднородность, при различных видах взаимодействий на границе раздела фаз / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 21–23 сент. 1988 г.). Ужгород, 1988. С. 34.
391. Кирилюк В.С. Об оптимальной форме трансверсально-изотропного включения в упругой среде при трехосном растяжении и равномерном нагреве // Теоретическая и прикладная механика. Донецк, 2002. Вып. 35. С. 47–53.
392. Кирилюк В.С. Одна трехмерная обратная задача термоупругости для изотропной среды с упругой неоднородностью // Прикл. механика, 1991, 27, № 1. С. 40–44.
393. Кит Г.С. Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 4. С. 336–340.
394. Кит Г.С., Зашкильняк И.М. О термоупругом состоянии тела с тепловыделяющим включением // Физ.-хим. механика материалов, 1977, 13, № 4. С. 77–82.
395. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Интенсивность напряжений в вершинах теплопроводящей трещины // Физ.-хим. механика материалов, 1982, 18, № 1. С. 57–61.
396. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1983. 280 с.
397. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Смешанная задача термоупругости для плоскости с криволинейными разрезами // Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 3. С. 228–232.
398. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. К.: Наук. думка, 1992. 216 с.
399. Кит Г.С., Подстригач Я.С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением // Физ.-хим. механика материалов, 1966, 2, № 3. С. 247–252.
400. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1989. 283 с.
401. Кит Г.С. Плоская задача термопружності для тіла з тріщинами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1969. № 5. С. 427–431.
402. Кит Г.С., Мартиняк Р.М. Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1999, 42, № 3. С. 3–6.
403. Кит Г.С., Мартиняк Р.М., Мачишин І.М. Контакт пружної півплощини з жорсткою основою, границя якої має прямокутний виступ або западину // Машинознавство, 1999, № 1. С. 3–8.
404. Кит Г.С., Мартиняк Р.М., Монастирський Б.Є. Метод потенціалів у задачах про локальну відсутність контакту // Вісн. Дніпр. ун-ту. Сер.: механіка, 2001. 1. Вип. 4. С. 69–77.
405. Клименко В.А., Любчак В.А. Об эффекте торможения трещин в анизотропных телах путем заклеивания // Динамика и прочн. машин. Харьков, 1987. Вып. 46. С. 111–114.
406. Клименко Ф.Е. Сталобетонные конструкции с внешним полосовым армированием. К.: Будивельник, 1984. 85 с.
407. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инж. сб. ин-та механики АН СССР. 1952. Т. 12.
408. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 208 с.
409. Кобелев Е.А. Изгиб нелинейно-упругих пластин с разрезами и ребрами / Расчет строит. конструкций с учетом физ. нелинейности материала на статич. и динам. нагрузки. Л., 1984. С. 53–59.
410. Кобелев Е.А., Работягова М.Д. Расчет плиты, подкрепленной ребром ограниченной длины при двумерной аппроксимации прогибов обобщенными функциями. Ленингр. инж.-строит. ин-т. Л., 1989. 8 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 29 июня 1989 г., № 4309-B89.
411. Коблик С.Г. Растяжение упругой ортотропной пластины, усиленной решеткой жестких включений // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1987, № 4. С. 185–189.

412. Коваленко Е.В. Динамическая задача о взаимодействии упругого штампа с жидкостью через тонкое покрытие // Прикладная математика и механика, 1981, **45**, № 2. С. 338–347.
413. Коваленко Е.В. Контактные задачи для тел с покрытием (постановка и методы решения) // Изв. АН АрмССР. Механика, 1988, **41**, № 1. С. 40–50.
414. Коваленко Е.В. Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, **32**, № 2. С. 76–82.
415. Коваленко Ю.Ф., Салганик Р.Л. Трещиновидные неоднородности и их влияние на эффективные механические характеристики // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 5. С. 76–86.
416. Ковальчук Б.В. Двовимірна стаціонарна задача теплопровідності для шару з тонким включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 81–86.
417. Козин А.Б. Контактная задача для полубесконечного упругого ребра в полосовой в плане полой оболочке. Одес. ун-т. Одесса, 1984. 7 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 8 окт. 1984 г., № 1654Ук-84 Деп.
418. Козин А.Б. Точное решение задач изгиба полосовых пологих оболочек и пластин с внутренним упругим подкреплением // Краевые задачи. Пермь: Пермск. политехн.ин-т, 1985. С. 110–114.
419. Козин А.Б. Точное решение задачи об изгибе полой цилиндрической оболочки при наличии жесткой промежуточной опоры. Одес. ун-т. Одесса, 1984. 12 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 8 окт. 1984 г., № 1655Ук-84 Деп.
420. Козин А.Б., Онищук О.В. Задача об изгибе квадратной пластинки с пересекающимися включениями. Одес. ун-т. Одесса, 1985. 21 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 18 сент. 1985 г., № 2212Ук-86 Деп.
421. Козин А.Б., Онищук О.В. Изгиб полуполосы при наличии тонкого жесткого включения // Прикл. механика, 1984, **20**, № 9. С. 127–130.
422. Козин А.Б., Онищук О.В. Точное решение задачи об изгибе бесконечной пластины с крестообразным включением / Матер. науч. конф. мол. учен. Одес. гос. ун-та (Одесса, 29–30 марта 1984). Одесса, 1984. С. 41–47. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 15 февр. 1985 г., № 347Ук-85 Деп.
423. Козин А.Б., Папковская О.Б. К решению краевых задач с криволинейными тонкостенными дефектами. ВНИИСтройдормаш. М., 1987. 10 с. Рукопись деп. в ЦНИИТЭстстроймаш 10 дек. 1987 г., № 164-сд87 Деп.
424. Козина Г.А., Козин А.Б. Изгиб пластинки с тонким включением, имеющим нулевую жесткость на кручение / Краевые задачи. Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1983. С. 154–156.
425. Козина Г.А., Козин А.Б. К решению задач для пологих оболочек с тонкостенными дефектами / Краевые задачи. Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1987. С. 113–116.
426. Козина Г.А., Козин А.Б. К решению контактной задачи для жесткой опоры и полосовой защемленной пластины. Одес. ун-т. Одесса, 1988. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 12 апр. 1988 г., № 900–Ук88.
427. Козина Г.А., Козин А.Б. К решению краевых задач об упругом равновесии пластины с тонким включением. Одес. ун-т. Одесса, 1984. 11 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 12 февр. 1985 г., № 316Ук-85 Деп.
428. Козина Г.А., Козин А.Б. О решении одной краевой задачи для гармонического уравнения со скачками на двух пересекающихся отрезках / Краевые задачи. Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1984. С. 113–116.
429. Козина Г.А., Козин А.Б. Разрешающие уравнения статики пологих оболочек с прямолинейными дефектами. Одес. ун-т. Одесса, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 12 июля 1986 г., № 1701-Ук86.
430. Козина Г.А., Козин А.Б. Точное решение задачи об изгибе защемленной полосовой пластины при наличии жесткой опоры. Одес. ун-т. Одесса, 1988. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 11 апр. 1988 г., № 898-Ук88.
431. Козина Г.А., Козин А.Б. Точное решение задачи об изгибе защемленной полосовой пластины при наличии винклеровской опоры. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1987. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 2 февр. 1987 г., № 579-Ук87.
432. Козина Г.А., Козин А.Б., Папковская О.Б. Изгиб квадратной пластины под действием крестообразного штампа. ВНИИСтройдормаш. М., 1987. 10 с. Рукопись деп. в ЦНИИТЭстстроймаш 19 дек. 1987 г., № 165-сд87 Деп.

433. Козина Г.А., Козин А.Б., Папковская О.Б. К решению задач изгиба пластин и пологих оболочек с криволинейными концентраторами напряжений. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1987. 12 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 23 апр. 1987 г., № 1317-Ук87.
434. Козина Г.А., Козин А.Б., Папковская О.Б. К решению краевых задач с криволинейными тонкостенными дефектами. Одес. ун-т. Одесса, 1987. 11 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 23 апр. 1987 г., № 1318-Ук87.
435. Козина Г.А., Козин А.Б., Папковская О.Б. Точное решение задачи об изгибе полосовой ортотропной пластины при наличии винклеровой опоры. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1987. 8 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 23 апр. 1987 г., № 1320-Ук87.
436. Козина Г.А., Папковская О.Б. Контактная задача для полубесконечной упругой балки и ортотропной полосовой пластины. Одес. политехн. ин-т. Одесса, 1987. 9 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 2 февр. 1987 г., № 580-Ук87.
437. Козлов М.М., Лейкин С.Л. Упругие свойства межфазных границ: модули упругости и спонтанные механические характеристики // Биологические мембраны, 1988, **5**, № 7. С. 752–767.
438. Колчин Г.Б., Гусятников А.Ю. Прямой метод решения задач термоупругости для слоистых тел при неидеальном контакте между слоями / Мат. модели, методы решения и оптим. проектиров. гиб. пластин и оболочек. Саратов, 1988. С. 15–17.
439. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка, 1992. 280 с.
440. Коляно Ю.М. Нагрев источниками тепла сопряженных встык ортотропных пластинок с теплообменом // Инженерно-физический журнал, 1969, **17**, № 6. С. 1067–1075.
441. Коляно Ю.М. Нестационарная осесимметричная температурная задача теории упругости тонкой неограниченной пластинки с круговой неоднородностью / Тепловые напряжения в элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1964. Вып. 4. С. 20–33.
442. Коляно Ю.М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел // Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1978. Вып. 7. С. 7–11.
443. Коляно Ю.М. Температурные напряжения в тонких пластинках с подкрепленным краем // Концентрация напряжений. К.: Наук. думка, 1965. Вып. 1. С. 137–146.
444. Коляно Ю.М., Волос В.А. Уравнения термоупругости для неоднородных цилиндрических пластин / Физико-механические поля в деформируемых средах. К.: Наук. думка, 1978. С. 117–125.
445. Коляно Ю.М., Гавур Л.А. Температурные напряжения в сопряженных пластинках // Прикл. механика, 1969, **5**, № 9. С. 40–46.
446. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. К.: Наук. думка, 1983. 288 с.
447. Коляно Ю.М., Кушнир Р.М., Музычук Ю.А. Температурные напряжения в слоистых телах при неидеальном термомеханическом контакте на поверхностях раздела // Прикл. механика. 1986. **22**, № 11. С. 28–36.
448. Коляно Ю.М., Музычук Ю.А. Температурное поле составного тела при смешанных условиях теплового контакта // Инженерно-физический журнал, 1985, **49**, № 5. С. 839–844.
449. Коляно Ю.М., Флейшман Ф.Н. Условия неидеального обобщенного термомеханического контакта пластин / Сопротивление материалов и теория сооружений. К., 1976. Вып. 28. С. 28–34.
450. Коляно Ю.М., Хомякевич Е.П., Гирняк О.Ф. К определению обобщенного температурного поля в телах со стержневыми включениями. Львов. лесотехн. ин-т. Львов, 1988. 6 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 12 авг. 1988 г., № 1955- Ук88.
451. Комогорцев В.Ф., Радиолло М.В. Некоторые плоские задачи концентрации упругих напряжений возле тонкостенных включений / Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости (Ереван, 13–16 ноя. 1979). Ереван, 1979. С. 187–189.
452. Композиционные материалы: В 8-ми т. / Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока – М.: Мир, Машиностроение, 1978. – Пер. с англ. изд.: Composite materials. New York. 1975.
453. Композиционные материалы: В 8-ми т. Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах / Ред. А.Меткалф. М.: Мир, 1978. 440 с.
454. Композиционные материалы: В 8-ми т. Т. 5. Разрушение и усталость / Ред. Л.Браутман. М.: Мир, 1978. 486 с.
455. Копец А.С. Модель тонкого упругого продольного включения в неполой цилиндрической оболочке контакте / Матер. докл. 2-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН

- УССР (Львов, 1–3 окт. 1985). Львов: Ин-т прикл. проблем мех. и мат. АН УССР. Ч. 2. С. 96–101 / Рукопись деп в ВИНТИ 17 фев. 1987 г., № 1089–В87.
456. Копец А.С. Напряженное состояние непологой цилиндрической оболочки с абсолютно жестким линейным поперечным включением / Материалы 2 Конф. мол. ученых и спец.: Пробл. повыш. качества материалов, приборов и оборуд. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 21–26 окт. 1986). Львов, 1986. С. 58–62. Рукопись деп. в ВИНТИ 5 окт. 1987 г., № 7120–В87.
457. Копец А.С. Напряженное состояние непологой цилиндрической оболочки с тонким абсолютно жестким включением вдоль образующей / Материалы Конф. мол. ученых и спец.: Пробл. повыш. качества материалов, приборов и оборуд. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 26–28 сент. 1984). Львов, 1984. С. 66–70. Рукопись деп. в ВИНТИ 17 янв. 1985 г., № 479–85 Деп.
458. Копец А.С. Применение метода обобщенных функций к исследованию класса допустимых решений уравнений линейной теории упругости / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 175.
459. Копьев И.М., Овчинский А.С. Разрушение металлов, армированных волокнами. М.: Наука, 1977. 240 с.
460. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831 с.
461. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. К.: Наук. думка, 1978. 220 с.
462. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. К.–Донецк: Вища школа, 1976. 200 с.
463. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами, выступами. К.: Вища школа, 1975. 228 с.
464. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. К.–Донецк: Вища школа, 1983. 160 с.
465. Кочанов Ю.П., Бугаенко В.В. Об определении усилий и напряжений вдоль ребер жесткости в задачах изгиба пластин // Тр. Николаевского кораблестроит. ин-та, 1977, № 125. С. 3–8.
466. Крайнов А.Ю., Никитин Л.В. Антиплоская деформация упругопластического тела с тонким жестким включением // Физ.-хим. механика материалов, 1984, **20**, № 1. С. 42–45.
467. Красовский А.Я., Калайда В.В., Крамаренко И.В. и др. Трещиностойкость высокопрочных чугунов с шаровидным графитом // Проблемы прочности, 1984, № 8. С. 44–50.
468. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
469. Кривень В.А. Антиплоская упругопластическая деформация тела, содержащего тонкое жесткое пластинчатое включение // Физ.-хим. механика материалов, 1980, № 2. С. 66–70.
470. Кривень В.А. Розвиток дискретно-лінійчастих і континуальних пластичних зон в околі концентраторів напружень. Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук / Львів, 2002. 36 с.
471. Кривий О., Архипенко К. Особливості поля напружень біля тріщин і включень в кусочно-однорідній анізотропній площині // Машинознавство, 2005. № 7. С. 24–27.
472. Кривой А.Ф. Об особенностях применения численных методов в решении задач о дефектах в кусочно-однородной анизотропной плоскости / Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. «Эффективные численные методы решения краевых задач мех. тверд. деформируемого тела» (Харьков, 27–29 сент. 1989). Харьков, 1989. С. 167–168.
473. Кривой А.Ф. Плоские краевые задачи для дифференциальных уравнений анизотропной упругости при наличии дефектов и неоднородностей. Автореф. дис....канд. физ.-мат. наук / Одесса, 1985. 17 с.
474. Кривой А.Ф. Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. 2001, **6**. Вип. 3. Фіз.-мат. науки. С. 108–115.
475. Кривой А.Ф. Фундаментальная матрица сосредоточенных воздействий и задачи концентрации напряжений возле дефектов в кусочно-однородной анизотропной среде / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 1. Одесса, 1989. С. 180.
476. Кривой А.Ф., Попов Г.Я., Радиолло М.В. Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // Прикладная математика и механика, 1986, **50**, № 4. С. 622–632.
477. Кривой А.Ф., Радиолло М.В. Плоская задача о концентрации напряжений возле включения в составной анизотропной среде / Теорет. и прикл. механика: Респ. межвед. науч.-техн. сб., 1985. Вып. 16. С. 70–75.
478. Кривой А.Ф., Радиолло М.В. Фундаментальное решение для составной анизотропной среды и задачи концентрации напряжений возле тонких включений / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая – 2 июня 1983). Донецк, 1983. С. 61–62.

479. Кривой А.Ф., Радиолло М.В. Фундаментальное решение плоской задачи теории упругости для составной анизотропной среды // *Динам. системы*. Киев, 1985. Вып. 4. С. 40–45.
480. Кривой М.В., Радиолло М.В. Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1984, № 3. С. 84–92.
481. Кривцун М.Г. Интегральные уравнения взаимосвязанной задачи термоупругости для бесконечной плоскости с криволинейными трещинами // *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1984, № 9. С. 37–40.
482. Кривцун М.Г., Гримецкий Н.Д. Двумерная контактная задача термоупругости для тела с газозаполненной трещиной. Львов. политехн. ин-т. Львов, 1989. 20 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 14 марта 1989 г., № 769-Ук89.
483. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
484. . В–
485. Криштафович А.А. Умови теплового контакту анізотропних тіл через тонкий анізотропний прошарок // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 1994, **30**, № 6. С. 86–88.
486. Крэйт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 512 с.
487. Ктитарев Д.Н. К решению задач о напряженно-деформированном состоянии сварного соединения // *Перм. политехн. ин-т*, 1975, № 167. С. 60–62.
488. Кулик А.Н., Приходская Е.И. Температурные напряжения в пластинке с инородным тепловыделяющим элементом / *Обобщенные функции в термоупругости*. К., 1989. С. 58–64.
489. Кундрат М.М. Локальное разрушение ортотропной матрицы с линейным включением // *Прикл. механика*, 1996, **32**, № 8. С. 63–71.
490. Кундрат М.М. Моделі і методи прогнозу локального руйнування у пластинчастих елементах конструкцій з тонкими включеннями та підкріпленнями при сталому й циклічному навантаженнях. Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла / Луцьк, 2007. 36 с.
491. Кундрат Н.М. О локальном разрушении в композите / *Тез. докл. I Всес. конф. «Механика разрушения материалов»*. Львов, 1987. С. 131.
492. Кундрат Н.М. Периодическая плоская задача о полосах пластичности около коллинеарных включений // *Физ.-хим. механика материалов*, 1984, **20**, № 1. С. 50–52.
493. Кундрат М.М., Сулим Г.Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях / *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів, 2003. С. 322–324.
494. Кундрат Н.М. Отслоение включения в ортотропной композиции // *Прикл. механика*, 2000, **36**, № 9. С. 123–128.
495. Кундрат Н.М. Упругопластическое равновесие ортотропного композита с системой коллинеарных волокон-включений // *Прикл. механика*, 1997, **33**, № 5. С. 55–59.
496. Кунец Я.И. Осесимметричная задача кручения упругого пространства с тонким упругим включением // *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1985, № 2. С. 36–39.
497. Кунец Я.И. Осесимметричное кручение упругого пространства с тонким упругим включением // *Прикладная математика и механика*, 1987, **51**, № 4. С. 638–645.
498. Кунец Я.И. Осесимметричное кручение упругого бесконечного пространства с тонким упругим включением переменной толщины / *Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур»* (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 123–124.
499. Кунец Я.И. Осесимметричные задачи кручения упругих тел с тонкими упругими включениями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Львов, 1984. 20 с.
500. Кунец Я.И., Поддубняк А.П. Осесимметричные задачи кручения двухслойной упругой среды с упругим дискообразным включением конечной толщины / *Тез. докл. II Всесоюз. науч. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела»* (Днепропетровск, 15–18 сент. 1981 г.). Днепропетровск, 1981. С. 75.
501. Кунець Я.І. Динамічні задачі теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями. Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук / Львів, 2006. 33 с.
502. Кунець Я.І. Пружна рівновага тіла з тонким гострокінцевим м'яким включенням в умовах поздовжнього зсуву // *Мат методи і фіз.-мех поля*, 2004, **47**, № 3. С. 144–148.
503. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 416 с.
504. Кунин И.А., Миренкова Г.Н., Соснина Э.Г. Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде // *Прикладная математики и механика*, 1973, **37**, № 3. С. 524–531.

505. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой сплошной среде // Докл. АН СССР, 1971, **199**, № 3. С. 571–574.
506. Купер Г.А. Микромеханические аспекты разрушения // Композиционные материалы: В 8-ми т. М.: Мир, 1978. Т. 5. С. 440–475.
507. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
508. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
509. Куршин Л.М., Матвеев К.А., Подружин Е.Г. Изгиб подкрепленной пластины // Изв. вузов. Стрво и архит., 1982, № 8. С. 35–38.
510. Куршин Л.М., Суздальнический И.Д. Напряжения в плоскости с заполненной щелью // Прикл. механика, 1973, **9**, № 10. С. 62–68.
511. Кухарський В., Кухарська Н., Савула Я., Мандзак Т. Фізико-математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в середовищах із включеними тонкими шарами // Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту. Тернопіль, 2006, **11**, № 3. С. 145 – 152.
512. Кухарчук Ю., Сулим Г. Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в плоских тілах з тонкими тріщинуватими дефектами // Українсько-польський симп. "Проблеми трансформації в гуманітарній, соціально-економічній та науково-освітній сферах" (Тернопіль, 16–20 червня 1997 р.). Тернопіль, 1997. С. 178–179.
513. Кухарчук Ю., Сулим Г., Шевчук С. Пружна рівновага двовимірних тіл з кутовими точками та тонкими включеннями / Тез. доп. III-го Міжнар. симп. українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 21–23 травня 1997 р.). Львів, 1997. С. 80–81.
514. Кухарчук Ю., Сулим Г., Шевчук С. Пружна рівновага двовимірних тіл з кутовими точками та тонкими включеннями // Машинознавство. 1997. № 1. С. 14–20.
515. Куценко Г.В. Тепловые напряжения в полом эллипсоиде, вызванные стационарным температурным полем / Респ. межвед. сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», 1974. Вып. 14. С. 109–113.
516. Кушнір Р.И., Музычук Ю.А. К определению температурных напряжений в составных пластинках // Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1982. Вып. 16. С. 44–48.
517. Кушнір Р.М., Музычук Ю.А. Уравнения термоупругости составных пластинок при неидеальном термомеханическом контакте Матер. докл. 9-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН УССР (Львов, 10–14 мая, 1983). Львов. Ч. 1. С. 114–117 / Рукопись деп в ВИНТИ 10 янв. 1984 г., № 323–84 Деп.
518. Кушнір Р.М. Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1998. **41**, №1. С. 108–116.
519. Кушнір Р.М. Термопружний стан кусково-однорідної структури з нестационарним фрикційним теплоутворенням // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.–матем., 1999. Вып. 55. С. 127–130.
520. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: Сполом, 2003. 320 с.
521. Лабозин П.Г. К расчету составных ребристых панелей с тонкими внешними слоями / Строит. мех. и расчет сооруж., 1985. № 4. С. 21–24.
522. Лавренюк В.И., Ляхов А.Л. Напряженно-деформированное состояние матрицы с включениями, имеющими форму прямоугольных параллелепипедов и нагруженных на поверхности. Київ, 1987. 19 с.–Рукопись предст. Киев. ун-т. Деп в УкрНИИТИ № 44-Ук. Деп. от 4.01.87 г.
523. Ланглейбен С.В. Изгиб прямоугольной пластинки с эксцентричным жестким включением // Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1988, № 220. С. 69–70.
524. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 735 с.
525. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 208 с.
526. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
527. Ларькин Ю.И. О взаимодействии между коротким ребром и стенкой металлической балки / Строит. констр. и строит. механика. Ч. 1. Саранск, 1977. С. 3–31.
528. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Под общ. ред. А.А.Лебедева. К.: Изд. Дом Ин Юре”, 2003. 689 с.
529. Левин В.М. О концентрации напряжений на включениях в композитных материалах // Прикладная математика и механика, 1977, **41**, № 4. С. 735–743.
530. Левин В.М. О концентрации напряжений на включениях в композитных материалах / 3-й нац. конгрес «Теор., приложна мех.» (Варна, 1977). Кн. 1. София, 1977. С. 489–494.

531. Левченко Н.Б. Касательные напряжения на поверхности волокна в теле с трещиной / Механика стержневых систем и сплошных сред. Ленинград, 1978, № 11. С. 142–145.
532. Лейбфрид Г., Бройер Н. Точечные дефекты в металлах. М.: Мир, 1981. 439 с.
533. Леонов М.Я., Русинко К.Н. Микронапряжения упругого тела // Журнал прикл. мех. и техн. физ., 1963, № 1. С. 104–110.
534. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. –М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
535. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
536. Либовиц Г., Эфтис Дж., Джонс Д. Некоторые недавние теоретические и экспериментальные исследования по механике разрушения // Механика. Новое в зарубежной науке.–20. Механика разрушения. Разрушение конструкций. М.: Мир, 1980. С. 168–202.
537. Литвин О., Попов В. Взаємодія плоских пружних хвиль з жорстким включенням за умови гладкого контакту // машинознавство, 2003. № 9. С. 24–27.
538. Литвиненкова З.Н. Большая антиплоская деформация несжимаемого упругого тела с вырезом и жестким включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985, № 4. С. 136–140.
539. Лібацький Л.Л. Вплив армуючих елементів на критичні зусилля при згині круглої пластини з тріщиною // Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1993, № 269. С. 110–115.
540. Лобода В.В. Применение метода осреднения к расчету плиты, подкрепленной стрингерами // Прикладная математика и механика, 1981, 45, № 5. С. 867–875.
541. Лозинский Д.В. Эффективные упругие характеристики ленточных композитов / Математические методы в механике. М.: МГУ, 1990. С. 123–126.
542. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
543. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
544. Лурье А.И. Эластостатическая задача Робена для трехосного эллипсоида // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1967, № 1. С. 80–83.
545. Луцишин Р.М. О расклинивании трещины в упругой полуплоскости / Мат. методы и физ.-мех. поля. Вып. 10. К.: Наук. думка, 1979. С. 58–62.
546. Луцишин Р.М. Про пружну рівновагу кусочно-неоднорідної пластинки з абсолютно жорсткою прокладкою // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969. Вип. 4. С. 79–84.
547. Любков Б.Я., Ройтбурд А.Л. Напряженное состояние аустенита вблизи образовавшегося кристалла мартенсита // Докл. АН СССР, 1958, 120, № 5. С. 1011–1014.
548. Любков Б.Я., Ройтбурд А.Л. Об энергетических соотношениях при мартенситном превращении // Докл. АН СССР, 1960, 131, № 2. С. 303–305.
549. Ляхов Л.В. О напряженном состоянии упругого полупространства и слоя с абсолютно жесткими включениями / Инж. задачи статики, динам. и устойчивости сооруж. Воронеж, 1985. С. 36–40.
550. Мазинг Р.И. Остаточные напряжения в клеевом слое // Машиноведение, 1982, № 1. С. 113–115.
551. Мазинг Р.И., Ущицкий М.У. О заклеивании трещин // Машиноведение, 1984, № 5. С. 90–94.
552. Мазурак Л.П., Бережницкий Л.Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. К.: Наук. думка, 1990. 256 с.
553. Мазья В.Г., Морозов Н.Ф., Назаров Б.А. Об изменении потенциальной энергии деформации при вариации области вблизи углового концентратора напряжений. Л.: ЛФ ИМаш, 1989. 28 с.
554. Максимук А.В., Щербина Н.Н. О деформативности многослойных цилиндрических оболочек в случае несовершенного контакта слоев / Тез. докл. II Всес. науч.-техн. семинара «Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них» (Яремча, 5–7 сент. 1984). К.: Наук. думка, 1984. С. 35–36.
555. Мальков В.М. Деформация тонкого слоя из малосжимаемого материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1987, № 3. С. 87–93.
556. Марега С. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных пластин с перекрестной системой ребер. Одес. инж.-стр. ин-т. Одесса, 1988. 18 с. Рукопись деп. В УкрНИИТИ 11 мая 1988 г., № 1149-Ук88.
557. Маркузон И.А. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины // Прикладная математика и механика, 1961, 25, № 2. С. 356–361.
558. Мартинович Т.Л., Божидарник В.К. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленням краєм // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1972. Вип. 7. С. 112–118.
559. Мартиняк Р.М. Деформативність і напруженість композитного матеріалу із міжфазовими дефектами / Матер. II Міжнар. симп. "Мех. і фіз. руйнування будів. матер. та конструкцій" (Львів–Дубляни, 7–10 жовт. 1996р.). Львів: В-во "Слово і Комерція", 1996. С. 357–358.



560. Мартиняк Р.М. Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмка, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1990, № 2. С. 91–94.
561. Мартиняк Р.М. Механодифузійна взаємодія тіл з урахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2000, 36. № 2. С. 124–126.
562. Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Монастирський Б.Є. Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2005, 41. № 2. С. 39–44.
563. Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Монастирський Б.Є. Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч.2. Неповний контакт // Фіз.-хім. мех. матеріалів, 2006, 42. № 4. С. 114–120.
564. Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Монастирський Б.Є. Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Мат. методи та фіз.- мех. поля, 2005, 48. № 3. С. 101–109.
565. Мартынович Т.Л. К решению задач о напряженном состоянии в изотропных пластинках с подкрепленным краем // Прикл. механика, 1970, 6, № 9. С. 59–65.
566. Мартынович Т.Л. Об одном эффективном методе решения задач о напряженном состоянии в анизотропных пластинках с подкрепленным краем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 2. С. 110–116.
567. Мартынович Т.Л. Точное решение задачи об изгибе анизотропной пластинки с отверстием // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1977. № 5. С. 168–177.
568. Мартынович Т.Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 6. С. 64–69.
569. Мартынович Т.Л., Божидарник В.В. Об одном методе определения напряженного состояния в анизотропных пластинках с несимметрично подкрепленным краем // Прикл. механика, 1973, 9, № 6. С. 61–67.
570. Мартынович Т.Л., Божидарник В.В., Максимович Ю.М. Влияние эксцентриситета подкрепления края отверстия на напряженное состояние в изотропной пластинке // Механика полимеров, 1974, № 2. С. 285–293.
571. Мартынович Т.Л., Куйбида В.С. Об использовании обобщенных тепловых потенциалов при численном решении нестационарных двумерных задач теплопроводности прямолинейно-анизотропных относительно тепловых свойств тел // Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1987, № 212. С. 68–70.
572. Мартынович Т.Л., Шиндер В.К. Растяжение пьезоэлектрической пластины с жестким прямоугольным включением // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1990. Вып. 243. С. 56–58.
573. Мартынович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. 160 с.
574. Мартыняк Р.М. Исследование термоупругого взаимодействия тел при локальном нарушении контакта, обусловленном подповерхностными факторами / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 11.
575. Мартыняк Р.М. Моделирование термического контакта упругих тел / Матер. докл. 9-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН УССР (Львов, 10–14 мая, 1983). Львов, Ч. 1. С. 114–117 / Рукопись деп. в ВИНТИ 10 янв. 1984 г., № 323–84 Деп.
576. Мартыняк Р.М. Моделирование термического контакта упругих тел.–В кн.: Материалы 9 Конф. мол. учёных Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР (Львов, 10–14 мая, 1982. Ч.1). Львов, 1983. С.–118–121. Рукопись предст. ИПММ АН УССР. Деп. в ВИНТИ 10 янв. 1984 г., № 323–84 Деп.
577. Мартыняк Р.М. Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с тонкостенными включениями при неполном механическом контакте // Прикл. механика, 1986, 22, № 6. С. 82–86.
578. Мартыняк Р.М., Сулим Г.Т. Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости // Мат. методы и физ.-мех. поля. Вып. 15. Киев: Наук. думка, 1982. С. 113–117.
579. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
580. Марчук Н.И. Исследования влияния высоты ребер и способа их подкрепления на напряженно-деформированное состояние оболочки / Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1987. С. 17–19.
581. Матисяк С.Й., Євтушенко О.О., Зеленюк В.М. Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2004, 40, № 4. С. 34–40.

582. Махоркин И.Н. Метод усреднения в термоупругости сферических тел с тонкостенными включениями / XIV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1977. С. 84.
583. Мачишин І.М., Мартиняк Р.М. Вплив зосередженої сили на контакт пружного тіла та жорсткої основи з виїмкою // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1999, **35**, № 6. С. 27–31.
584. Мачишин І.М., Мартиняк Р.М. Зміна зазорів між пружним тілом і нерівною основою під дією зосередженої сили // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2000, **36**, № 6. С. 59–64.
585. Мелкумян С.А., Галоян Г.В. Электроупругое поле пьезокерамической плоскости при жестком включении в ее тонком разрезе. Ереван. политехн. ин-т. Ереван, 1987. 9 с. Рукопись деп в АрмНИИТИ 23 ноя. 1987 г., № 51-Ар87.
586. Мелкумян С.А., Тер-Петросян Г.В. Симметричная задача для ортотропной плоскости с жестким включением в тонком разрезе / Ереван. политехн. ин-т, Ереван, 1988. 9 с. Рукопись деп. в АрмНИИТИ 11 янв. 1988 г., № 6.
587. Методы расчета оболочек: В 5 т. / Отв. ред. А.Н.Гузь. – К.: Наук. думка, 1980–1982.
588. Механика композитов: В 12-ти томах / Под общ. ред. А.Н.Гузя.–К.: Наук. думка, 1993–1995, А.С.К., 1996–2003.
589. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. Панасюка В.В. / Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
590. Механика: Новое в зарубежной науке. Т. 15: Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978. 212 с.
591. Микаэлян В.В. Об одной задаче изгиба упругого прямоугольника с упругим тонким включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1975, **28**, № 2. С. 3–14.
592. Миренкова Г.Н., Соснина Э.Г. Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // Прикладная математика и механика, 1981, **45**, № 1. С. 165–170.
593. Мироненко М.І. Інтегральні перетворення в теорії пружності. Харків: ХДТУБА, 2003. 440 с.
594. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
595. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
596. Михлин С.Г. Плоская задача теории упругости // Труды Сейсмологического ин-та АН СССР. 1935. № 65.
597. Михлин С.Г. Плоская задача теории упругости для неоднородной среды // Труды Сейсмологического ин-та АН СССР. 1935. № 66.
598. Мичуда А.Я. Интегральное уравнение задачи об определении напряженно-деформированного состояния пластины с тонкостенным включением / Материалы 10 конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 12–16 окт. 1981). Львов, 1982. С. 114–116. Рукопись деп. в ВИНТИ 12 апр. 1982 г., № 1948-82 Деп.
599. Мовчан А.А. О влиянии подкрепляющих элементов на коэффициент интенсивности напряжений в вершине острой трещины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 2. С. 113–119.
600. Мовчан А.Б. Напряженно-деформированное состояние вблизи тонкого упругого включения // Вестн. Ленинград. ун-та, 1985, № 15. С. 126–127.
601. Мовчан А.Б. Напряженно-деформированное состояние упругих тел с тонкими включениями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ленинград: ЛГУ им. Жданова, 1986. 13 с.
602. Мовчан А.Б., Морозов Н.Ф., Назаров С.А. О разрушении вблизи пикообразных включений при посадке с натягом / Пластичность и разрушение тверд. тел. М., 1988. С. 137–145.
603. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи пространственного пикообразного включения // Механика композитных материалов, 1985, № 5. С. 792–800.
604. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Асимптотическое поведение напряженно-деформированного состояния вблизи острых включений // Докл. АН СССР, 1986, **290**, № 1. С. 48–51.
605. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Напряженно-деформированное состояние в вершине острого включения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1986, № 3. С. 155–163.
606. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Напряженно-деформированное состояние плоской области с тонким упругим включением конечных размеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1987, № 1. С. 75–83.

607. Мовчан А.Б., Назаров С.А. О показателе сингулярности напряжений в конце острого упругого включения // Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 25.
608. Мовчан А.Б., Назаров С.А., Полякова О.Р. О концентрации напряжений вблизи мягких и жестких пикообразных включений // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1988, № 4. С. 106–113.
609. Мовчан Н.В. Асимптотика собственных чисел пространственной задачи теории упругости для тела с малым включением // Изв. вузов. Математика, 1988, № 1. С. 50–56.
610. Мовчан Н.В., Назаров С.А. О сингулярности напряжений в вершинах конических включений / Динам. сплош. среды (Новосибирск), 1988, № 87. С. 97–105.
611. Мовчан Н.В., Назаров С.А. Разрушение тонких конических включений. Ред. журн. Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрономия. Л., 1988. 16 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 11 ноя. 1988 г., № 8019-В88.
612. Можи Д. Контакт упругих твердых тел с учетом поверхностной энергии / Тр. Междунар. науч. конф. «Трение, износ и смазочн. материалы» (Ташкент, 22–26 мая, 1985). Тез. секц. докл. Т. 1. М., 1985. С. 32–37.
613. Моисеев Н.Г. Краевые задачи плоской теории упругости при наличии дефектов внутри области. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Одесса, 1985. 16 с.
614. Моисеев Н.Г. Плоская задача о концентрации напряжений в неограниченной упругой среде возле крестообразного отслоившегося включения. Одесса, 1983. 25 с.—Рукопись предст. Одес. ун-т. Деп в УкрНИИТИ 13 июля 1983 г. № 742к-Д83.
615. Моисеев Н.Г. Плоская задача о концентрации упругих напряжений возле крестообразного отслоившегося включения / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая – 2 июня 1983). Донецк, 1983. С. 75–76.
616. Моисеев Н.Г., Попов Г.Я. А Плоская задача о концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения / Механика деформируемых тел и конструкций. Школа-семинар по теории упругости и вязкоупругости (Цахкадзор, 22–25 ноябр. 1985 г.). Ереван, 1985. С. 304–319.
617. Мольков В.А., Победря Б.Е. Эффективные характеристики однонаправленного композита с периодической структурой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985, № 2. С. 119–130.
618. Монастирський Б.Є. Вплив заповнювача міжповерхневого просвіту на взаємодію тіл в умовах недосконалого контакту // Прикладні проблеми механіки і математики, 2003. Вип. 1. С. 78–82.
619. Монастирський Б.Є. Осесиметрична контактна задача для півпростору з геометрично збуреною поверхнею // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1999, **35**, № 6. С. 22–26.
620. Монастирський Б.Є., Мартиняк Р.М. Контакт двох півпросторів з кільцевою виїмкою на одному. Ч. 1. Сингулярне інтегральне рівняння // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2003, **39**. № 2. С. 51–57.
621. Монастирський Б.Є., Мартиняк Р.М. Контакт двох півпросторів з кільцевою виїмкою на одному. Ч. 2. Числовий метод і результати // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2003, **39**. № 4. С. 37–41.
622. Монастирський Б.Є., Мартиняк Р.М. Контактна задача для двох півпросторів з круговою виїмкою, частово заповненою стисливою рідиною / Тез. докл. междунар. конф. «Интегральные уравнения и их применения» (Одесса, 29 июня – 29 июля 2005 г.), Одесса, 2005. С. 106.
623. Морарь Г.А. Интегральные уравнения плит на упругом основании при наличии дефектов / Тез. докл. междунар. конф. «Интегральные уравнения и их применения» (Одесса, 29 июня – 29 июля 2005 г.), Одесса, 2005. С. 107.
624. Морарь Г.А. К построению разрывных решений в пространственной теории упругости / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 24.
625. Морарь Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Кишинев: Штиинца, 1990. 130 с.
626. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным включением // Прикладная математика и механика, 1970, **34**, № 3. С. 412–421.
627. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками // Прикладная математика и механика, 1971, **35**, № 1. С. 172–178.
628. Морозов Е.М., Паншин В.Г. Параметры трещиностойкости для трещин с контактирующими берегами / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 25.
629. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
630. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактное взаимодействие оболочечных элементов конструкций. К.: Наук. думка, 1988. 288 с.

631. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. К.: Наук. думка, 1985. 176 с.
632. Моссаковский В.И., Рыбка М.Т. Попытка построения теории прочности для хрупких материалов, основанной на энергетических соображениях Гриффитса // Прикладная математика и механика, 1969, **29**, № 2. С. 291–296.
633. Муки Р., Штернберг Э. Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана) // Труды ASME. Прикладная механика. Сер.Е., 1967, **34**, № 3. С. 233–242.
634. Муки Р., Штернберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине // Труды ASME. Прикладная механика. Сер.Е. 1968, **35**, № 4. С. 124–135.
635. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
636. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
637. Мхитарян С.М. Об одном классе смешанных задач о концентрации напряжений / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 28.
638. Мхитарян С.М., Торосян Ф.С. О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, **31**, № 5. С. 3–19.
639. Назаренко Л.Д., Острик В.И. Изгиб прямоугольной пластинки с тонким криволинейным включением / Динамика и прочность машин. Харьков, 1988. Вып. 44. С. 19–24.
640. Назаров С.А. Асимптотические разложения собственных чисел: Уч. пособие. Л.: ЛГУ, 1987. 109 с.
641. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 117 с.
642. Назаров С.А. Сингулярно возмущенные задачи теории упругости. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук / Ленинград, 1985. 25 с.
643. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
644. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
645. Насонов Ю.Н., Ревяко М.М., Крюковский А.И. Напряженно-деформированное состояние системы оптическая деталь – тонкая полимерная клеевая прослойка // Химия и химические технологии, 1988, № 2. С. 60–65.
646. Насосні штанги та труби з полімерних композитів: проектування, розрахунок та випробування / Б.В.Копей, О.В.Максимук, Н.М.Щербина та ін. Львів: ІППМ НАН України, 2003. 352 с.
647. Некоторые статические и динамические краевые задачи теории упругости и электроупругости для сред с трещинами и упругими включениями / Л.В.Белокопытова, Л.В.Волкова, О.А.Иваненко, В.А.Любчак, Л.А.Фильштинский / Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости (Ереван, 13–16 ноя. 1979). Ереван, 1979. С. 56–58.
648. Немиш Ю.Н., Пелех Б.Л. Об аналогии между теорией изгиба пластин типа С.П.Тимошенко и плоской задачей моментной теории упругости // Прикл. механика, 1969, **5**, № 4. С. 127–132.
649. Несатий И.М. Коэффициенты интенсивности напряжений для некоторых тел с трещинами в случае продольного сдвига // Проблемы прочности, 1986, №5. С. 20–24.
650. Несатый И.М. Продольный сдвиг тел с трещинами под действием сосредоточенных сил // Физ.-хим. механика материалов, 1987, **23**, № 1. С. 78–82.
651. Никитин Л.В. Модификация моделей разрушения применительно к изучению крупномасштабных природных явлений / Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Механика разрушения материалов» (Львов, 1987). Львов, 1987. С. 14.
652. Никитин Л.В., Туманов А.Н. Анализ локального разрушения в армированной жесткими волокнами упругой плоскости / Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории упругости (Ереван, 13–16 ноя. 1979). Ереван, 1979. С. 248–249.
653. Никишков Г.П., Черепанов Г.П. Растяжение упругого пространства с изолированным жестким стержнем // Прикладная математика и механика, 1984, **48**, № 3. С. 460–465.
654. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1982. 364 с.
655. Новацкий В. Теория упругости. М. Мир, 1975. 872 с.
656. Новиков В.Г., Тулинов Б.М. Двойкопериодическая система прямолинейных трещин продольного сдвига в упругом теле // Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1985, **149**, № 1. С. 148–151.

657. Новиков В.Г., Тулинов Б.М. Напряженное состояние плоскости с периодической системой параллельных пар трещин продольного сдвига // Прикладная математика и механика, 1984, **48**, № 5. С. 877–880.
658. Новиков В.У., Бурьян О.Ю. М. Моделирование межфазного слоя а анизотропных композитах // Прикл. физика, 2000. № 1. С. 67–78.
659. Новый способ повышения циклической трещиностойкости деталей конструкций / Г.Н.Никифорчин, О.Н.Романив, Б.И.Андрусив и др. / А.с. 1125266 (СССР). Способ обработки изделий. Оpubл. в Б.И., 1984, № 43.
660. Носова Е.А. Нелинейные краевые задачи круговых цилиндрических оболочек с наведенной неоднородностью материала / Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. «Эффективные численные методы решения краевых задач мех. деформируем. тела» (Харьков, 27–29 сент. 1989 г.). Ч. 2. Харьков, 1989. С. 58–60.
661. Нуллер Б.М., Спасивцева Л.Ф. Об одном классе задач для упругих областей, ослабленных неоднородным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1979, № 2. С. 46–52.
662. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г., Наринский В.И. Деформация прямоугольной полосы из слоистого материала, несжимаемого в поперечном направлении / Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 360–366.
663. Онищук О.В. Неинтегрируемые решения в теории пластин и оболочек / Аннот. докл. «5-й Всес. съезд по теор. и прикл. мех.» (Алма-Ата, 27мая – 3 июня 1981). Алма-Ата, 1981. С. 277.
664. Онищук О.В. Об одном методе решения интегральных уравнений и его применении к задаче об изгибе пластинки с крестообразным включением // Прикладная математика и механика, 1988, **52**, № 2. С. 269–283.
665. Онищук О.В., Попов Г.Я. Неинтегрируемые решения в задачах изгиба пластин (случай отслоившегося включения) / Тр. 13 Всес. конф. по теории пластин и оболочек (Таллин, 1983). Ч. 4. Таллин: ТПИ, 1983. С. 54–59.
666. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 4. С. 141–150.
667. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Задача об изгибе прямоугольной пластинки с линейной опорой, выходящей одним концом на защемленную границу // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1988, № 6. С. 160–168.
668. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // Прикладная математика и механика, 1986, **50**, № 2. С. 293–302.
669. Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 292 с.
670. Онышко Л.И. Фундаментальные решения для бесконечной анизотропной пластины с линейным жестким включением // Физ.-хим. механика материалов. 1982, **18**, № 2. С. 120–124.
671. Опанасович В.К., Бернар И.И. Изгиб плиты с тонкостенным упругим включением по дуге окружности // Прикл. механика, 1984, **20**, № 8. С. 61–68.
672. Опанасович В.К., Божидарник В.В., Драган М.С. Температурное поле пластины с системой линейных включений // Вестн. ЛПИ, 1986. Вып. 204. С. 53–55.
673. Опанасович В.К., Божидарник В.В., Драган М.С. Термоупругое состояние пластины с системой тонких упругих включений // Вестн. ЛПИ, 1986. Вып. 208. С. 56–60.
674. Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоская деформация тела з системою тонких пружних включень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 71–77.
675. Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоская деформация тела з тонкостінним пружним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981. Вип. 17. С. 69–73.
676. Опанасович В.К., Драган М.С. Исследование двумерного температурного поля и термоупругого состояния пластинки с прямолинейным тонкостенным упругим включением / Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости (Ереван, 13–16 ноя. 1979). Ереван, 1979. С. 262–264.
677. Опанасович В.К., Драган М.С. Кручение плиты с прямолинейным тонкостенным включением // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1980. Вып. 16. С. 64–69.
678. Опанасович В.К., Драган М.С. Напряженное состояние пластины с системой тонких упругих включений. Ред. ж. «Физ.-хим. механика материалов» АН УССР. Львов, 1983. 11 с. Рукопись деп. в ВИНТИ № 6155-83 Деп.
679. Опанасович В.К., Драган М.С. Периодическая система параллельных тонких упругих включений в плоскости // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1985. Вып. 23. С. 83–89.

680. Опанасович В.К., Драган М.С., Тисовский Л.О. Напряжения в плоскости, содержащей систему прямолинейных включений // Физ.-хим. механика материалов, 1985, **21**, № 6. С. 21–26.
681. Опанасович В.К., Копець А.С. Про побудову розв'язку задачі для пружної циліндричної оболонки, який має розрив по твірній // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1987. Вип. 27. С. 18–23.
682. Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Коэффициенты интенсивности напряжений в пластине с тонким упругим криволинейным включением / Тез. докл. I «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 139.
683. Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Напряженное состояние кусочно-однородной пластины с линейными упругими включениями / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С.44.
684. Опанасович В.К., Тисовский Л.О. О применении метода сингулярных интегральных уравнений к изучению изгиба кусочно-однородных тонких пластин с линейными включениями / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 21–23 сент. 1988 г.). Ужгород, 1988. С. 60.
685. Осадчук В.А. Метод дисторсий в задачах об упругом равновесии оболочек с разрезами (трещинами) // Мат. методы и физ.-мех. поля. Вып. 10. К.: Наук. думка, 1979. С. 27–50.
686. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. К.: Наук. думка, 1985. 224 с.
687. Осив И.Н., Грилицкий Д.В. Контактная задача об упругом взаимодействии пластинки с эллиптическим включением // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1973, **26**, № 2. С. 18–26.
688. Осів О.П., Сулим Г.Т. Антиплоска деформація ізотропного середовища зі злученими пружними стрічковими включеннями / Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій, 2002, Вип. 5. С. 154–164.
689. Оценка влияния дефектов типа трещин или включений на напряженно-деформированное состояние материалов с покрытиями / Похмурский В.И., Бережницкий Л.Т., Стащук Н.Г., Бутвинник И.П., Бенько Л.И. // Защит. покрытия на материалах. Киев, 1986. Вып. 20. С. 30–33.
690. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від джерела тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1980. Вип. 16. С. 80–87.
691. Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від диполя тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1981. Вип. 17. С. 82–87.
692. Павлов П.А., Никулина Н.Е. Критерии предельного сопротивления хрупкого материала с исходной трещиной при плоском напряженном состоянии // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1973. № 334. С. 12–17.
693. Панасюк В.В. Вибрані праці. У 3 ч. - Ч. 1. 1954–1979 рр. Львів: ФМІ НАН України, 2001. 450 с. Ч. 2. 1971–1990 рр. Львів: ФМІ НАН України, 2002. 720 с. Ч. 3. 1991–2001 рр. Львів: ФМІ НАН України, 2001. 764 с.
694. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. К.: Наук. думка, 1991. 416 с.
695. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Стадник М.М. Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением // Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 7. С. 637–640.
696. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Стадник М.М., Морозович Я.Ю. Предельное равновесие упругопластических тел с тонкими включениями, подвергающихся воздействию силовых и температурных факторов / Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 170–171.
697. Панасюк В.В., Андрейкив О.Є. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 7. С. 636–639.
698. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. Оценка прочности композиций с остроугольными включениями // Механика композитных материалов, 1982, № 3. С. 430–438.
699. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Садивский В.М. Коэффициенты интенсивности и распределение напряжений около остроугольных упругих включений // Докл. АН СССР, 1977, **232**, № 2. С. 304–307.
700. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Труш И.И. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений // Проблемы прочности, 1972, № 7. С. 3–9.
701. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Чапля М.Э. О распределении напряжений и перемещений возле трещины в однородном теле с прямолинейной анизотропией общего вида // Физ.-хим. механика материалов, 1982, **18**, № 4. С. 61–69.
702. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С. Про вплив структури матеріалу на поширення тріщин у процесі розтягу тіла // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1976. № 9. С. 811–816.
703. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С. Про вплив структури матеріалу на локальне руйнування біля гострокінцевих жорстких включень // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 12. С. 1094–1099.

704. Панасюк В.В., Саврук М.П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1992, **29**. № 1. С. 49–68. Бібл. 203.
705. Панасюк В.В., Саврук М.П. Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики, 1984, **7**, № 2. С. 75–115.
706. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наук. думка, 1976. 444 с.
707. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. К.: Наук. думка, 1984. 344 с.
708. Панасюк В.В., Стадник М.М., Горбачевский И.Я. Плоская задача для упругой среды с тонким включением неканонической формы // Докл. АН УССР. Сер. А, 1989, № 9. С. 54–56.
709. Панасюк В.В., Стадник М.М., Горбачевський І.Я. Пружна задача для ізотропного середовища з тонким тунельним включенням складної конфігурації // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1989, **25**, № 5. С. 23–28.
710. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. К.: Наук. думка, 1986. 216 с.
711. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
712. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 471 с.
713. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
714. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
715. Пассос Моргадо А.Х., Пивник Я., Подильчук Ю.Н. Распределение напряжений в бесконечном трансверсально-изотропном теле с жестким эллиптическим включением в равномерном тепловом потоке // Прикл. механика, 1995, **31**, № 11. С. 3–10.
716. Пелех Б.Л. К определению коэффициентов концентрации напряжений около отверстий при изгибе плит // Прикл. механика, 1965, **1**, № 7. С. 139–143.
717. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. К.: Наук. думка, 1975. 199 с.
718. Пелех Б.Л., Флейшман Ф.Н. Влияние тонких межфазных слоев на макроскопические характеристики композиционных материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984, № 3. С. 68–73.
719. Перехватов В.К. К решению плоской задачи теории упругости для неограниченной среды, содержащей сплошное включение из другого материала // Тр. кафедры сопротивл. материалов и теории упругости. Горьков. инж.-строит. ин-т. Горький, 1974. Вып. 70. С. 35–39.
720. Перехватов В.К. Приближенное решение плоской задачи теории упругости для среды с включением из другого материала. Горький, 1980. 52 с.– Рукопись деп. в ВИНТИ № 5408-80 Деп.
721. Перлин П.И. О решении основных задач теории потенциала в теории упругости для некоторых полых и составных тел // Инженерный журнал, 1965, **5**, № 4. С. 657–666.
722. Петрова В.Е. Взаимодействие магистральной трещины с включениями заданной ориентации // Механика композитных материалов (Рига), 1988, № 3. С. 402–409.
723. Петрова В.Е. Краевая трещина в материале с микродефектами / В кн. «Теория операторов в функциональных пространствах и математическое моделирование». Воронеж ун-т, 1988. С. 41–47. Рукопись деп. в ВИНТИ 13 июля. 1988 г., № 5642-В88 Деп.
724. Петухов И.М., Линьков А.М. Механика горных ударов и выбросов. М.: Недра, 1983. 280 с.
725. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. К.: Наук. думка, 1976. 416 с.
726. Пискозуб И.З. Влияние теплоактивного включения на температурное поле в кусочно-однородной пластине с тепловыделением / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 252.
727. Пискозуб И.З. Решение системы СИУ второго рода с разрывными коэффициентами для задачи термоупругого равновесия кусочно-однородной среды с тонкими прослойками / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 54.
728. Пискозуб И.З. Температурное поле в пластине с теплоактивными включениями при наличии теплообмена на боковых поверхностях // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. 1985. Вып. 23. С. 68–72.
729. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Асимптотическое распределение поля напряжений в окрестности концов тонкого дефекта на границе раздела материалов / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций». Ужгород, 1988. С. 70.
730. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Двучленное асимптотическое представление поля напряжений в окрестности торца межфазного упругого включения / Тез. докл. II Всесоюз. симп. по механике разрушения «Трещиностойкость материалов и элементов конструкций» (Житомир, 15–17 окт. 1985 г.). Киев, 1985. Т. 1. С. 81.

731. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Концентрация теплового потока у конца линейного включения в кусочно-однородной плоскости / Тез. докл. XV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций (Канев, 28–30 мая 1980 г.). Киев: Наук. думка, 1980. С. 69.
732. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах теплопроводности для тел с тонкими включениями / Тез. докл. Всесоюз. конф. «Инт. уравнения в прикладном моделировании». К.: Ин-т электродинамики АН УССР, 1983. Т. 1. С. 204–205.
733. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Температурное поле в кусочно-однородных средах с теплоактивными прослойками. Минск, 1984. 14 с.–Ред. журн. «Инженерно-физический журнал». Деп. в ВИНИТИ 5 июля 1984 г. №4735-84 Деп.
734. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Температурные условия взаимодействия среды с тонким включением // Инженерно-физический журнал, 1983, **44**, № 6. С. 977–983.
735. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Термоупругое состояние кусочно-однородной среды с системой тонких прослоек / Тез. докл. Всесоюз. конф. «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов». М.: МАИ, 1983. С. 117.
736. Підстригач Я.С. Вибрані праці. К.: Наук. думка, 1996. 762 с.
737. Підстригач Я.С. Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному включенні у суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1982, № 12. С. 29–31.
738. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1963, № 7. С. 872–874.
739. Підстригач Я.С., Флейшман Н.П., Галазюк В.А. Усталений термопружний стан безмежної пластинки з рухомих параболічним вирізом // Доп. АН УССР. Сер. А, 1972, № 7. С. 655–659.
740. Пискозуб И.З. Вплив тепловіддачі на напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з теплоактивними прошарками / Матер. II Міжнар. симп. "Мех. і фіз. руйнування будів. матер. та конструкцій" (Львів–Дубляни, 7–10 жовт.1996р.). Львів: В-во "Слово і Комерція", 1996. С. 107–108.
741. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1996, **32**, № 4. С. 39–48.
742. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т., Пискозуб Л.Г. Термонапружений стан кусково-однорідного середовища з тонкими міжфазними включеннями / Крайові задачі термомеханіки. Зб. наук. праць. К.: Ін-т мат. НАН України, 1996. Ч. II. С. 64–68.
743. Пискозуб Любов, Сулим Георгій. Дослідження розв'язку задачі теплопроводності для неоднорідного середовища з тонкими дефектами на границі розділу матеріалів // The Sixth Polish-Ukrainian Conference "Current problems of mechanics of nonhomogeneous media" (Warsaw, 6–10 September 2005). Warszawa: W-wo SGGW, 2005. S. 100–101.
744. Пискозуб Любов, Сулим Георгій. Особливість розв'язку задачі теплопроводності для неоднорідного середовища з тонкими неоднорідностями на границі поділу матеріалів // Тези доп. всеукраїнської наук. конф. "Актуальні проблеми механіки (до 100-річчя М.П.Шереметьєва)" (Львів, 5–8 грудня 2005). Львів, 2005. С. 72–73.
745. Плахотный П.И. Взаимное давление двух различных анизотропных полуплоскостей с прямолинейными щелями на линии спая // Прикл. механика, 1970, **6**, № 1. С. 62–68.
746. Пляцко Г.В., Максимович В.Н., Болотюк Д.П. Расчет напряжений с впаянными упругими шайбами // Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1979. Вып. 10. С. 111–116.
747. Побережный О.В., Кит Г.С. Об определении температурного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними // Инженерно-физический журнал, 1968, **15**, № 4. С. 703–709.
748. Повстенко Ю.З. Механика поверхностных явлений в деформируемых твердых телах / Тез. докл. 2 Всес. науч.-техн. семинара «Неклассические пробл. мех. композиц. материалов и конструкций» (Львов, сент. 1984). К., 1984. С. 54–56.
749. Повстенко Ю.З. Неравновесная термодинамика поверхностных явлений в твердых телах // Прикл. механика, 1982, **18**, № 11. С. 100–105.
750. Повстенко Ю.З. О двух возможных подходах при описании свойств тонких промежуточных слоев в композиционных материалах / Базальто-волоконистые композиционные материалы и конструкции. К.: Наук. думка, 1980. С. 136–141.
751. Повстенко Ю.З. Описание поверхностных явлений в упруго поляризующихся твердых телах // Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1983, № 1. С. 117–121.
752. Повстенко Ю.З. Поверхностные термодинамические потенциалы жидкостей и твердых тел // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1982, **18**, № 3. С. 124–126.
753. Повстенко Ю.З. Учет поверхностной энергии в граничных условиях краевых задач механики деформируемых твердых тел / Мат. методы и физ.-мех. поля. Вып. 13. К.: Наук. думка, 1981. С. 15–28.



754. Повстенко Ю.З., Алексеенко В.М. Влияние локального возмущения поверхностного натяжения и химического потенциала на напряженно-деформированное состояние полупространства // Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 10. С. 42–44.
755. Повстенко Ю.З., Алексеенко В.М. Влияние поверхностных явлений на диффузию и напряженное состояние твердого тела с локальной неоднородностью // Физ.-хим. механика материалов, 1984, **20**, № 6. С. 111–114.
756. Повстенко Ю.З., Алексеенко В.М. Осесимметричное напряженное состояние и диффузия примеси в упругом полупространстве при неоднородном поверхностном натяжении // Прикл. механика, 1984, **20**, № 10. С. 40–45.
757. Повстенко Ю.З., Карпинский Б.А. Формула Лапласа и ее обобщения–граничные условия для напряжений в неоднородных структурах // Матер. I Всесоюз. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 178–179.
758. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П. Метод конечных элементов в конкретных задачах термоупругости и термопластичности. Харьков, 1986. 57 с.–(Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; № 176).
759. Поддубняк А.П. Интегральные уравнения задачи кручения упругого тела с тонким дискообразным включением // Прикладная математика и механика, 1986, **50**, № 4. С. 644–650.
760. Поддубняк А.П. Кручение упругой среды с упругой шайбой // Прикл. механика, 1978, **14**, № 11. С. 119–123.
761. Поддубняк А.П., Кунец Я.И. Кручение упругого составного цилиндра со щелью // Прикл. механика, 1988, **24**, № 1. С. 19–24.
762. Поддубняк А.П., Кунец Я.И. Неклассическая задача кручения упругого композита, содержащего тонкостенное включение / Тез. докл. 2 Всес. науч.-техн. семинара «Неклассические пробл. мех. композиц. материалов и конструкций» (Львов, сент. 1984). К., 1984. С. 56–57.
763. Поддубняк А.П., Кунец Я.И. Осесимметричное кручение упругого полупространства с упругой шайбой // Прикл. механика, 1983, **19**, № 7. С. 66–70.
764. Подильчук Ю.Н. О напряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с эллиптическим включением // Прикл. механика, 1997, **33**, № 11. С. 39–45.
765. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикл. механика, 1997, **33**, № 10. С. 3–30.
766. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. К.: Наук. думка, 1979. 240 с.
767. Подильчук Ю.Н., Добrivечер В.В. О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением // Прикл. механика, 1996, **32**, № 1. С. 11–17.
768. Подильчук Ю.Н., Добrivечер В.В. О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением, подверженном действию равномерного теплового потока в плоскости включения // Прикл. механика, 1996, **32**, № 8. С. 31–40.
769. Подильчук Ю.Н., Кирилюк В.С. Термоупругое состояние изотропной среды, содержащей анизотропное эллипсоидальное включение, при идеальном механическом и тепловом контакте // Прикл. механика, 1988, **24**, № 4. С. 13–19.
770. Подильчук Ю.Н., Кириченко А.М. Краевая задача термоупругости в перемещениях для вытянутого сфероида / Вычислительная и прикладная математика. К., 1988. № 64. С. 81–90.
771. Подильчук Ю.Н., Кириченко А.М. Термоупругая краевая задача для вытянутого сфероида при заданных не его границе перемещениях. Киев. ун-т, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 20 авг. 1986 г., № 1966-Ук.
772. Подстригач Я.С. Влияние инородных микровключений на распределение температурных полей и напряжений в упругих телах / Концентрация напряжений. К.: Наук. думка, 1965. Вып. 1. С. 207–218.
773. Подстригач Я.С. О применении операторного метода к выводу основных соотношений теории теплопроводности тонкостенных элементов конструкций / Тепловые напряжения в элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1965. Вып. 5. С. 24–35.
774. Подстригач Я.С. Об одном способе усложнения граничных условий в задачах гидроупругости // Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, **3**, № 3. С. 235–238.
775. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инженерно-физический журнал, 1963, **6**, № 10. С. 129–136.
776. Подстригач Я.С., Воробец Б.С., Чернуха Ю.А. К температурной задаче для тел с включениями // Прикл. механика, 1972, **8**, № 12. С. 80–85.

777. Подстригач Я.С., Кит Г.С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин / Тепловые напряжения в элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1967. Вып. 7. С. 194–201.
778. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К.: Наук. думка, 1972. 308 с.
779. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка, 1976. 310 с.
780. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Уравнения обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями // Докл. АН СССР, 1975, **224**, № 4. С. 794–797.
781. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. К.: Наук. думка, 1981. 344 с.
782. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
783. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых телах. К.: Наук. думка, 1985. 200 с.
784. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А., Войтович Н.И. К определению температурных полей и напряжений в оболочках, сопряженных через стержень / Математические методы в термомеханике. К.: Наук. думка, 1978. С. 3–11.
785. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А., Войтович Н.И. Температурное поле системы сферическая оболочка – стержень – круговая пластина // Проблемы прочности, 1986, № 5. С. 101–106.
786. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К.: Наук. думка, 1978. 344 с.
787. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах // Защитные покрытия на металлах, 1971. Вып. 5. С. 180–185.
788. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Исследование напряженно-деформированного состояния твердых тел и инородными включениями и тонкими покрытиями при изменении температуры // Проблемы прочности, 1970, № 11. С. 37–40.
789. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влиянии инородных включений типа тонких оболочек на температурные поля и напряженно-деформированное состояние упругих тел / Тепловые напряжения в элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1969. Вып. 8. С. 81–87.
790. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и обусловленного им напряженного состояния в твердых телах // Физ.-хим. механика материалов, 1967, **3**, № 5. С. 575–583.
791. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек // Прикл. механика, 1967, **3**, № 6. С. 8–16.
792. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Докл. научн. совещ. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 7. К.: Наук. думка, 1967. С. 227–233.
793. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р., Онуфрик Т.М., Повстенко Ю.З. Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов // Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 2. С. 36–43.
794. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
795. Понятовский В.В. Асимптотическая теория изгиба кривого бруса / В сб. «Исследования по упругости и пластичности». Л.: Изд-во ЛГУ, 1973.
796. Попина С.Ю., Сулим Г.Т. Предельная нагрузка для хрупкого тела с тонкостенным упругим включением // Физ.-хим. механика материалов, 1987, **23**, № 2. С. 115–118.
797. Попов В.Г. Динамическая задача теории упругости для плоскости, содержащей жесткое крестообразное включение // Прикладная математика и механика, 1993, **57**, №1. С. 100–115.
798. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ диффракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН. Мех. деформируемого твердого тела, 1995. № 4. С. 99–109.
799. Попов В.М. К вопросу исследования термического контактного сопротивления // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1976, № 3. С. 170–174.
800. Попов Г.Я. Вклад одесских исследователей в развитие методов решения смешанных задач механики деформируемого тела / Тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989 г.). Одесса, 1989. Т. 2. С. 59–60.
801. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. К.; Одесса: Вища школа, 1982, 168 с.
802. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.

803. Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактнм задачам // Прикладная математика и механика, 1963, **27**, № 5. С. 821–832.
804. Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактнм задачам // Прикладная математика и механика, 1964, **28**, № 3. С. 442–451.
805. Попов Г.Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби // Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 4. С. 540–547.
806. Попов Г.Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактнх задач теории упругости // Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, **14**, № 3. С. 81–96.
807. Попов Г.Я. Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями // Прикладная математика и механика, 1978, **42**, № 1. С. 122–135.
808. Попов Г.Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения // Прикладная математика и механика, 1966, **30**, № 3. С. 551–563.
809. Попов Г.Я. Построение разрывных решений дифференциальных уравнений для слоистой среды с межфазными дефектами // Докл. РАН, 1999. **364**. № 6. С. 759–763.
810. Попов Г.Я., Грибняк С.Т. Об одном способе решения задач механики для слоистых сред // Прикл. механика, 1980, **16**, № 10. С. 68–74.
811. Попов Г.Я., Процеров Ю.С. Изгиб подкрепленных пластин, сцепленных с линейно-деформируемым основанием / Исследования по теории сооружений. М., 1987. С. 109–124.
812. Попов Г.Я., Реут В.В. О характере особенности напряжений в изгибаемых пластинках возле точек пересечения линейных концентраторов / Теорет. и прикл. механика: Респ. межвед. науч.-техн. сб., 1985. Вып. 16. С. 113–117.
813. Попов Г.Я., Реут В.В. О характере особенности напряжений в изгибаемых пластинках возле точек пересечения линейных концентраторов / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая – 2 июня 1983). Донецк, 1983. С. 93–94.
814. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1980, № 4. С. 192–206.
815. Попова Л.К. Концентрация упругих напряжений возле жесткого отслоившегося включения, выходящего на границу полуплоскости / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 157–158.
816. Попова Л.К., Попов В.Г. Численное решение антиплоских задач концентрации упругих напряжений в полуплоскости возле краевых дефектов / Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. «Эффективные числ. методы решения краев. задач мех. тверд. деформируемого тела» (Харьков, 27–29 сент. 1989). Ч. 2. Харьков, 1989. С. 82–83.
817. Попович В.С. Двумерные напряжения в кусочно-однородных бесконечной пластинке и пространстве, обусловленные плоским источником тепла // Термомех. процессы в кусочно-однородн. элементах конструкций. К.: Наук. думка, 1978. С. 31–38.
818. Попович В.С. Температурные напряжения в телах с переменными температурными коэффициентами линейного расширения / Мат. методы в термомеханике. К.: Наук. думка, 1978. С. 127–137.
819. Пороховский В.В., Піддубняк О.. Кручения двояршого пружного пакета жорстким включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976. С. 92–98.
820. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
821. Похмурский В.И., Бережницкий Л.Г., Гнып И.П., Бутвинник И.П., Бенько Л.И. К оценке разрушения плоскости с жестким подкрепляющим элементом / Матер. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» К.: Наук. думка, 1984. С. 221–226.
822. Похмурский В.И., Стащук Н.Г., Бутвинник И.П. К оценке разрушения плоскости с жестким подкрепляющим элементом / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 183.
823. Похмурский В.И., Стащук Н.Г., Бутвинник И.П. К оценке разрушения плоскости с жестким подкрепляющим элементом / Матер. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1986. С. 221–226.
824. Предигер В. Е. Начальная пластическая деформация у конца трещины // К пробл. мех. реал. тверд. тела. Фрунзе, 1984. С. 103–109.
825. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. 493 с.
826. Прохоренко В.М. Напряженное состояние в бесконечной плоскости со швом ограниченной длины // Автоматическая сварка, 1983, № 10. С. 5–9.
827. Прохоренко В.М. Определение коэффициента интенсивности напряжений, обусловленных остаточными напряжениями в сварных соединениях с трещиной // Автоматическая сварка, 1985, № 3. С. 5–10.

828. Прохоренко В.М. Приближенный расчетный метод определения остаточных напряжений при сварке // Автоматическая сварка, 1981, № 10. С. 5–13.
829. Процюк Б.В. Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук / Львів, 2006. 40 с.
830. Процюк Б.В., Синюта В.М. Тривимірна задача термопружності для рівномірно-нагрітого кусково-однорідного півпростору // Мат. методи і фіз.-мат. поля, 2001, **44**, № 1. С. 89–96.
831. Прочность материалов и конструкций / Редкол.: Трощенко (отв. ред.) и др. К.: Академперіодика, 2005. 1088 с.
832. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
833. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
834. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
835. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 200 с.
836. Пухлий В.А. К расчету трехслойных оболочек переменной жесткости с сжимаемым заполнителем // Прикл. механика, 1982, **18**, № 2. С. 54–59.
837. Пыхтеев Г.Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши // Прикладная математика и механика, 1959, **23**, № 6. С. 1074–1082.
838. Пыхтеев Г.Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида. М.: Наука. Сибирское отделение, 1982. 128 с.
839. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. М.: Наука, 1970. 482 с.
840. Рабинович Н.Р., Кескинов Ю.Г., Шурыгин М.Н. Метод расширения в задачах термоупругости для тел с дефектами // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. н., 1983, № 2. С. 37–41.
841. Радиолло М.В. Включение переменной толщины в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1981, № 5. С. 85–93.
842. Радиолло М.В., Свяжин Н.Д. Напряженное состояние упругой полуплоскости при наличии нескольких трещин или жестких включений, выходящих на границу / Тез. докл. Всес. науч. конф. «Смешанные задачи мех. деформируемого тела» (Ростов-на-Дону, сент. 1977). Ч. 2. Ростов-на-Дону, 1977. С. 48–49.
843. Райс С.И. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух сред // Транс. АСМЕ. Прикл. мех. Сер. Е, 1965, **32**, № 2. С. 186–192.
844. Рвачев М.А. О разрыве перемещений в сплошном пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 10. С. 40–41.
845. Репников Л.Н., Горбунов-Посадов М.И. Расчет анкерной плиты, работающей в стадии уплотнения грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов, 1969, № 5. С. 6–8.
846. Реут В.В. Задача о концентрации напряжений в изгибаемой клиновидной пластинке возле системы непересекающихся включений / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 158.
847. Реут В.В. Изгиб клиновидной пластинки, ослабленной абсолютно жестким включением. Одесс. ун-т. Одесса, 1980. 15 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 15 янв. 1981 г., № 235-81 Деп.
848. Рикардс Р.Б., Чате А.К. Упругие свойства композита с анизотропными волокнами // Механика композиционных материалов, 1980, № 1. С. 22–29.
849. Розин Л.А., Терпугов В.Н. Задачи упругого равновесия с одновременными скачками напряжений и перемещений / Тр. науч.-техн. конф. гидротехн. фак. Ленингр. политехн. ин-та Леинград, 1–3 апр. 1981). Ч. 2. Л., 1982. С. 200–213. Рукопись деп. в ВИНТИ 12 окт. 1982 г., № 5137-82 Деп.
850. Ройтбурд А.Л. Внутренние напряжения при фазовых превращениях в твердом состоянии / Проблемы металловедения и физики металлов. Сб. 8. М.: Металлургия, 1964. С.236–268.
851. Романчук О.К. Температурное поле в полупространстве с пластинчатым включением / Обобщенные функции в термоупругости. К., 1980. С. 156–159.
852. Рущицкий Я.Я. Элементы теории смеси. К.: Наук. думка, 1991. 160 с.
853. Рястас Е.Я. О деформации плоскости, ослабленной тонким жестким включением и подходящей к нему трещиной. Ред. ж. «Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрономия. Л., 1983. 13 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 26 авг. 1983 г., № 4700-83 Деп.
854. Савенков В.А. Напряженное состояние ортотропной пластинки с тонкостенным упругим включением // Теор. и прикл. мех. Минск, 1988. Вып. 15. С. 78–81.
855. Савин Г.Н. Основы плоской теории моментной теории упругости (конспект лекций). К.: Киев. ун-т, 1965. 162 с.
856. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. К.: Наук. думка, 1968. 888 с.

857. Савин Г.Н., Грилицкий Д.В. Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром // Прикл. механика, 1965, **1**, ип. 1. С. 5–14.
858. Савин Г.Н., Тульчий В.И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. К.: Наук. думка, 1971. 268 с.
859. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К.: Наук. думка, 1964. 384 с.
860. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
861. Саврук М.П. О плоской задаче термоупругости для тела с термоизолированными трещинами // Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 3. С. 110–112.
862. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух связанных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов, 1988, **24**, № 2. С. 23–28.
863. Садивский В.М. К вопросу об определении коэффициентов интенсивности напряжений возле жестких остроугольных включений в анизотропных материалах / Матеріали другої конф. молодих науковців Західного наукового центру АН УРСР. Секція механіки. (Ужгород, 1975). Ужгород: Ужгородський ун-т, 1975. С. 218–220. Рукопись деп. в ВИНТИ 24 дек. 1976 г., № 4529-76 Деп.
864. Садивский В.М. Коэффициенты интенсивности напряжений возле жестких остроугольных включений в анизотропном теле // Физ.-хим. механика материалов, 1978, **14**, № 2. С. 69–71.
865. Садивский В.М. Приближенный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений в анизотропной пластине возле жестких остроугольных включений / Материалы VII конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 1975). Львов, 1975. С. 173–175. Рукопись деп. в ВИНТИ 9 апр. 1976 г., № 1138-76 Деп.
866. Салганик Р.Л. Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1987, № 3. С. 48–56.
867. Салганик Р.Л. Тонкий упругий слой, испытывающий скачок характеристик, в бесконечном упругом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 2. С. 154–163.
868. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
869. Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние предварительно напряженного армированного прямоугольника // Изв. АН АрмССР. Сер. техн. н., 1973, **26**, № 1. С. 31–38.
870. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
871. Саркисян В.С., Григорян Э.Х. Периодическая контактная задача для упругой полосы с кусочно-однородным упругим бесконечным включением // Уч. зап. Ереван. ун-та. Естеств. н., 1981, № 3. С. 150–158.
872. Сахненко А.М. Жесткое включение вдоль линии соединения двух сред / В кн.: Материалы VII конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 1975). Львов, 1975. С. 179–181. Рукопись деп. в ВИНТИ 9 апр. 1976 г., № 1138-76 Деп.
873. Сахненко А.М. О разрушении двухкомпонентных составных тел с остроугольными дефектами // Материалы 9-й Конф. молод. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов. Львов, 1979. Рукопись деп в ВИНТИ 15 окт. 1979 г., №4423-80 Деп. С. 138–140.
874. Сахненко О.М. Коефіцієнти інтенсивності напружень біля жорсткого включення на границі розділу двох середовищ / Матеріали другої конф. молодих науковців Західного наукового центру АН УРСР. Секція механіки. (Ужгород, 1975). Ужгород: Ужгородський ун-т, 1975. С. 190–192. Рукопись деп. в ВИНТИ 24 дек. 1976 г., № 4529-76 Деп.
875. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
876. Семенов Б.Н. Контакт с трением двух упругих полуплоскостей с жестким включением на границе контакта / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 85.
877. Сенюк М.Н. Пластические зоны возле жесткого включения в условиях плоской деформации / Материалы 10 конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 12–16 окт. 1981). Львов, 1982. С. 144–146. Рукопись деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г., № 1948–83 Деп.
878. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения / Разрушение / Под ред. Г.Либовица. – Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 83–203.
879. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 365 с.
880. Силованюк В.П. К пластическому течению на жестком дисковидном включении в трансверсально-изотропном материале // Физ.-хим. механика материалов, 1987, **23**, № 3. С. 99–102.

881. Силованюк В.П. Розв'язок задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла з плоскою поверхнею розриву // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1987, № 2. С. 63–66.
882. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. Львів: НАН України. ФМІ ім. Г.В.Карпенка, 2000. – 300 с.
883. Силованюк В.П., Горбачевский И.Я. Смешанная задача теории упругости для пространства с тонкими включениями полуплоскости / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 160–161.
884. Силованюк В.П., Сень М.А. Интегральные уравнения задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел с тонкими включениями / Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Владивосток, 1992. С. 112–122.
885. Силованюк В.П., Стадник М.М. Тонкое упругое включение в условиях сдвига // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984, № 6. С. 179–184.
886. Сильвестров В.В. Метод римановых поверхностей в задаче о межфазных трещинах и включениях при наличии сосредоточенных сил // Известия вузов. Математика, 2004, № 7. С. 78–91.
887. Сильвестров В.В. Об интеграле типа Коши и его аналогах в случае счетного множества отрезков // Известия АН Чувашской Республики, 1994, 2. Вып. 1. С. 3–15.
888. Сильвестров В.В., Тимофеева Н.Н. Продольный сдвиг упругого пространства с полубесконечными периодическими массивами трещин и тонких жестких включений // Вестн Казанского государственного технического университета. 1997. № 2. С. 46–49.
889. Сильвестров В.В., Ярдухин А.К. Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит, 2001. С. 301–313.
890. Симоненко И.Д. Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной. I. // Дифференциальные уравнения, 1974, 10, № 2. С. 301–309.
891. Симоненко И.Д. Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной. II. // Дифференциальные уравнения, 1975, 11, № 10. С. 1870–1878.
892. Симоненко И.Д. Об одной предельной задаче теплопроводности в неоднородной среде // Сибирск. матем. журнал, 1975, 16, № 6. С. 1292–1300.
893. Симонов И.В. Трещина границе раздела двух упругих сред при расклинивании // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985, № 3. С. 105–112.
894. Ситник В.А. Точное решение задачи и стрингере на оси симметрии клиновидной составляющей плоскости. Одес. ин-т инж. мор. флота. Одесса, 1987. 11 с. Деп. в ВИНТИ, № 5195-B87.
895. Сметанин Б.И. Об одном интегральном уравнении и его приложении к задачам о тонких отслоившихся включениях в упругих телах // Прикладная математика и механика, 1985, 49, № 5. С. 784–790.
896. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 667 с.
897. Солодовник М.Д. Задача для напряженной однородной упругой пластины с тонким упругим включением / Тез. докл. Всес. науч. конф. «Смешанные задачи мех. деформируемого тела» (Ростов-на-Дону, сент. 1977). Ч. 2. Ростов-на-Дону, 1977. С. 110.
898. Сорокатый Ю.И. Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом фотоупругости / Тез. докл. V Всесоюз. школы и конф. мол. ученых «Механика деформируемого твердого тела» (Куйбышев, 26 июня – 5 июля 1978 г.). Куйбышев: КГУ, 1978. С. 76.
899. Сорокатый Ю.И. Теоретико-экспериментальные исследования напряженного состояния упругих пластин с инородными тонкостенными включениями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Львов, 1985. 18 с.
900. Сорокатый Ю.И. Экспериментальные исследования термоупругого состояния пластины с тонкостенным упругим включением / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 209–210.
901. Сорокатый Ю.И., Белый И.П. Методика фотоупругого исследования концентрации напряжений при частичном отслоении армирующего волокна / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 21–23 сент. 1988 г.). Ужгород, 1988. С. 139–140.

902. Соткилава О.В., Черепанов Г.П. Некоторые задачи неоднородной теории упругости // Прикладная математика и механика, 1974, **38**, № 3. С. 539–550.
903. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах // Под ред. Ю.Мураками. М.: Мир, 1990, т.1, 2. — 1016 с. (Т. 1 – 429 с.; Т. 2 – 566 с.).
904. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовича и И.Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
905. Стадник М.М. Горбачевський І.Я. Гранична рівновага пружної пластини з тонким включенням складної форми / Матер. II Міжнар. симп. "Мех. і фіз. руйнування будів. матер. та конструкцій" (Львів–Дубляни, 7–10 жовт. 1996р.). Львів: В-во "Слово і Комерція", 1996. С. 130–132.
906. Стадник М.М. Горбачевський І.Я. Об одном подходе к определению концентрации напряжений возле тонкого туннельного включения неканонической формы / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 94.
907. Стадник М.М. Кручение толстого кругового цилиндра, содержащего соосное включение // Физ.-хим. механика материалов, 1982, **18**, № 6. С. 107–109.
908. Стадник М.М. Об одном методе приближенного решения трехмерной упругой задачи для тела с тонким включением // Физ.-хим. механика материалов, 1988, **24**, № 1. С. 53–65.
909. Стадник М.М., Андрейкив А.Е. Прочность материалов, содержащих системы тонких включений // Физ.-хим. механика материалов, 1986, **22**, № 1. С. 29–35.
910. Стадник М.М., Горбачевский И.Я. Концентрация напряжений в упругом теле с системой тонких длинных цилиндрических включений // Физ.-хим. механика материалов, 1983, **19**, № 4. С. 88–91.
911. Стадник М.М., Горбачевский И.Я. Определение напряженно-деформированного состояния в теле с системой тонких туннельных включений. Львов, 1986. 52 с. (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т; № 110).
912. Стадник М.М., Горбачевский И.Я. Предельное равновесие тел с тонкими туннельными включениями. Ред. ж. «Физ.-хим. механика материалов» АН УССР. Львов, 1986. 12 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 6 мая 1986 г., № 3257-В.
913. Стадник М.М., Горбачевский И.Я., Головацкий М.И. Локальное разрушение тел, содержащих туннельные включения / Тез. докл. I Всесоюз. симп. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций» (Ужгород, 21–23 сент. 1988 г.). Ужгород, 1988. С. 79–80.
914. Стадник М.М., Морозович Я.Ю. Метод интегральных уравнений в трехмерных термоупругих задачах о концентрации напряжений возле включений / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 163–164.
915. Стадник М.М., Морозович Я.Ю. Термоупругая задача для выпуклого многогранника с системой тонких включений. Сообщение II. Термоупругое равновесие многогранника с включениями // Физ.-хим. механика материалов, 1986, **22**, № 3. С. 89–96.
916. Стадник М.М., Морозович Я.Ю. Термоупругая задача для выпуклого многогранника с системой тонких включений. Сообщение I. Термостатическое состояние // Физ.-хим. механика материалов, 1986, **22**, № 2. С. 39–43.
917. Стадник М.М., Силованюк В.П., Сень М.О. Тонкие пружные включения в трансверсально-изотропному матеріалі // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1991, **27**, № 2. С. 80–85.
918. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Л.П.Хорошун, Б.П.Маслов, Е.Н.Шикула, Л.В.Назаренко / К.: Наук. думка, 1993. 390 с.
919. Стаценко Л.И., Шевченко В.П. Напряженное состояние изотропной оболочки с упругим включением. Теоретич. и прикл. механика. Харьков: Основа, 1990. Вып. 21. С. 76–80.
920. Стащук Н.Г. Два произвольно ориентированных дефекта типа жесткого включения и трещины в упругой плоскости / В кн.: Материалы 9-й Конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 1979). Львов, 1979. С. 162–164. Рукопись деп. в ВИНТИ 15 окт. 1980 г., № 4423-80 Деп.
921. Стащук Н.Г. Действие сосредоточенных силовых факторов в упругой плоскости с прямолинейным жестким включением / В кн.: Материалы 9 Конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 1979). Львов, 1979. С. 165–167. Рукопись деп. в ВИНТИ 15 окт. 1980 г., № 4423-80 Деп.
922. Стащук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. К.: Наук. думка, 1993. 359 с.
923. Стащук Н.Г. К оценке локального поля напряжений, вызванных микродефектами в окрестности макроскопического жесткого включения / Ред. журн. Физ.-хим. мех. матер., Львов, 1988. 37 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 6 июля. 1988 г., № 5422-В88 Деп.

924. Стащук Н.Г. Коэффициенты интенсивности напряжений возле полубесконечных жестких включений в упругой плоскости / В кн.: Материалы 11 Конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 10–13 окт. 1983). Львов, 1983. С. 143–145. Рукопись деп. в ВИНТИ 16 февр. 1984 г., № 931-84 Деп.
925. Стащук Н.Г. Продольный сдвиг изотропного тела с прямолинейным жестким включением // Физ.-хим. механика материалов, 1980, **16**, № 3. С. 78–82.
926. Стащук Н.Г. Раскрытие трещины на границе раздела между матрицей и линейным жестким включением / Тез. докл I Всесоюз. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 149.
927. Стащук Н.Г. Циклически симметрическая система жестких включений в пластинке // Физ.-хим. механика материалов, 1981, **17**, № 1. С. 118–120.
928. Стащук Н.Г., Бенько Л.И. Взаимодействие линейных жестких включений или трещин в упругой полосе с жестким тонкостенным покрытием / В кн.: Материалы 12-й Конф. мол. учёных физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 23–25 окт. 1985). Ч. 2. Львов: Физ.-мех. ин-т АН УССР, 1986. С. 95–96. Рукопись деп. в ВИНТИ 18 апр. 1986 г., № 2833-В Деп.
929. Стащук Н.Г., Бережницкий Л.Т. Некоторые смешанные задачи о развитии трещин возле инородных включений в упругих телах / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 230.
930. Стащук Н.Г., Бонцаревский О.А., Добош У.П. Коэффициенты интенсивности напряжений возле взаимодействующих параллельных сдвинутых и коллинеарных абсолютно жестких включений и трещин в упругой изотропной плоскости / Ред. журн. «Физ.-хим. мех. матер.», Львов, 1987. 13 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 328-В87 Деп.
931. Стащук Н.Г., Бутвинник И.П. Смешанные задачи об упругом равновесии полуплоскости с прикраевыми дефектами типа трещин и включений / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смешанные задачи мех. деформируемого тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 96.
932. Стащук Н.Г., Лотоцкий В.Н. Коэффициенты интенсивности напряжений в плоскости с заполненной щелью // Физ.-хим. механика материалов, 1986, **22**, № 4. С. 119–121.
933. Структура та опір руйнуванню залізобетонних сплавів / Остап О.П., Волчок І.П., Колотилкін О.Б. та ін. / Львів: НАН України. ФМІ, 2001. 272 с.
934. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415 с.
935. Суздальницкий И.Д. Применение интегральных представлений и двоякопериодических функций к упругим и упруго-пластическим задачам для многосвязанных областей. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук / Казань, 1982. 32 с.
936. Суздальницкий И.Д., Дудин А.В. Напряжения в плоскости с периодическим рядом заполненных разрезов / Динамика и прочность авиационных конструкций. Вып. 4. Новосибирск: НГУ НЭТИ, 1978. С. 98–102.
937. Сулим Г. Емісія гвинтових дислокацій з поверхні тонкого дефекту в ізотропний масив / Матер. міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики" (Львів, 25–28 травн. 1998). Львів, 1998. С. 156.
938. Сулим Г. Основи математичної теорії тонких неоднорідностей у термопружних середовищах / Тез. доп. IV Міжнар. конф. з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 19–22 вересня 1995 р.). Тернопіль, 1995. С. 117.
939. Сулим Г. Поздовжній зсув шаруватого середовища зі стрічковими включеннями / Тез. доп. 2-й міжнар. симп. українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 4–6 травня 1995 р.). Львів, 1995. С. 26.
940. Сулим Г. Сила, що діє на крайову дислокацію поблизу тонкого дефекту / Праці НТШ. Львів, 1997. Т. 1. С. 513–519.
941. Сулим Г., Лозинський В., Лозинський Д. Пружні властивості стохастично армованих стрічкових композитів // Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту. Тернопіль, 1997. Вип. 2. С. 34–39.
942. Сулим Г., Опанасович В., Драпака В. Антиплоска деформація тіла з двома компланарними ідентичними жорсткими стрічками // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Львів, 2000. Т. 2. С. 59–63.
943. Сулим Г., Опанасович В., Драпака В. Граничне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для двох вертикально зсунутих ідентичних тріщин у площині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: В-во Львів. нац. ун-ту ім.І.Франка, 1999. Вип. 55. С. 7–10.
944. Сулим Г., Опанасович В., Драпака В. Про антиплоску деформацію тіла з двома паралельними тріщинами різної довжини / Тез. наук. конф. «Мат. і мех. у Львів. ун-ті (історія і сучасність» (Львів, 24–28 лист. 1999). Львів, 1999. С. 29.



945. Сулим Г., Шевчук С. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних шаруватих структур з чужорідними включеннями / Тез. Першого наук. симп. «Сучасні пробл. інженерної механіки» (Луцьк, 10–15 трав. 2000). Луцьк, 2000. С. 29–30.
946. Сулим Г., Шевчук С. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних шаруватих структур з чужорідними включеннями // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка») – Луцьк: Луцький державний технічний університет, 2000, Вип. 7. С. 255–259.
947. Сулим Г., Шевчук С. Вплив анізотропії матеріалів на концентрацію напружень біля краю тонкої стрічки в необмеженому середовищі за поздовжнього зсуву // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій, 2000. Вип. 4. С. 205–213.
948. Сулим Г., Шевчук С. Плоска задача для шаруватого анізотропного середовища зі стрічковими включеннями / Тез. доп. IV-го Міжнар. симп. українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 19–21 трав. 1999 р.). Львів: Кінпатрі ЛТД, 1999. С. 48–49.
949. Сулим Г.Т Система лінійних включень в ізотропному середовищі // Доп. АН УРСР, Сер. А, 1980, № 7. С. 62–65.
950. Сулим Г.Т. Антиплоская деформация изотропной среды с тонкими прослойками под воздействием сил, дислокаций и диполей. Львов, 1985. 20 с. Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 28 янв. 1985 г., № 782–85 Деп.
951. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикладная математика и механика, 1981, 45, № 2. С. 308–318.
952. Сулим Г.Т. Взаємодія дислокацій з тонкими включеннями // машинознавство, 1997, № 3. С. 10–15.
953. Сулим Г.Т. Взаємодія дислокацій з тонкостінними дефектами / Тез. доп. I Міжнар. симп. українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 18–20 травня 1993 р.) / Львів, 1993. С. 72.
954. Сулим Г.Т. Взаимодействие дислокаций с тонкостенными прослойками в изотропной среде / Матер. I Всесоюз. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1986. С. 249–254.
955. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости // Инженерно-физический журнал, 1979, 37, № 6. С. 1124–1130.
956. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине // Физ.-хим. механика материалов, 1981, 17, № 3. С. 64–68.
957. Сулим Г.Т. Емісія гвинтових дислокацій з поверхні тонкого дефекту в ізотропний масив // Мат. методи і фіз.-мех. поля, 1998, 41. Вип. 2. С. 67–75.
958. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика, 1981, 17, № 11. С. 82–89.
959. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений и сила, действующая на дислокацию в окрестности тонкого упругого включения // Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej. Mechanika, 1995, 57. С. 205–212.
960. Сулим Г.Т. Концентрація напружень на тонкостінному включенні в кусково-однорідній площині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1974. Вип. 9. С. 74–80.
961. Сулим Г.Т. Математична теорія плоских неоднорідностей у термопружному середовищі / Матеріали Першого українсько-польського симп. "Змішані задачі механіки неоднорідних структур" (Львів-Шацьк, 14–19 вер. 1995 р.). Львів: Світ, 1997. С. 88–93.
962. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги середовищ з тонкими включеннями (01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла): Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук / Львів, 1995. 40 с.
963. Сулим Г.Т. Періодична задача для системи компланарних тонких стрічок в умовах поздовжнього зсуву // Мат. методи і фіз.-мех. поля, 1997, 40. Вип. 2. С. 91–99.
964. Сулим Г.Т. Поздовжній зсув шаруватих структур з тонкими включеннями / Матеріали доп. III Міжнар. симп. "Некласичні проблеми теорії тонкостінних елем. констр. та фіз.-хім. мех. комп. матер." (Івано-Франківськ, 15–16 лист. 1995 р.). Івано-Франківськ, 1997. Т. 2. С. 122–125.
965. Сулим Г.Т. Построение интегральных уравнений в задачах концентрации напряжений на тонких прослойках / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая–2 июня 1983 г.). Донецк, 1983. С. 108–109.
966. Сулим Г.Т. Применение формулы Сомильяна в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1983. Вып. 18. С. 48–51.
967. Сулим Г.Т. Продольный сдвиг анизотропной среды с ленточными включениями. Львов, 1987. 47 с.–Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 329-B87.
968. Сулим Г.Т. Продольный сдвиг ленточных композитов / Механика неоднородных структур: Тез. докл. / Ред. кол. И.Ф.Образцов, Я.С.Подстригач (отв.ред.) и др. Львов, 1987. Т. 1. С. 264.
969. Сулим Г.Т. Регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1975. Вип. 10. С. 76–79.

970. Сулим Г.Т. Решение двоякопериодических задач упругого равновесия изотропных сред с тонкими неоднородностями / Тез. докл. IV Всесоюз. конф. "Смешанные задачи механики деформируемого тела" (Одесса, 26–29 сент. 1989 г.). Одесса, 1989. Т. 2. С. 101.
971. Сулим Г.Т. Сила, действующая на дислокацию в окрестности тонкостенного дефекта / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 17–19 сент. 1991 г.). Львов, 1991. Т. 2. С. 325.
972. Сулим Г.Т. Сила, що діє на гвинтову дислокацію поблизу тонкого дефекту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1994. Вип. 40. С. 73–78.
973. Сулим Г.Т. Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов, 1985. 15 с.–Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 24 июня 1985 г., № 4487-85 Деп.
974. Сулим Г.Т. Термопружні умови взаємодії середовища з тонкостінним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1979. Вип. 15. С. 85–92.
975. Сулим Г.Т. Упругое равновесие полуплоскости с системой линейных включений // Прикл. механика, 1983, **19**, № 2. С. 96–100.
976. Сулим Г.Т., Божидарник В.В., Сулим М.В. Антиплоская деформация изотропного массива с тонкой прослойкой под действием диполей // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. Вып. 180. С. 115–117.
977. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 5. С. 52–58.
978. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Прикл. механика, 1972, **8**, № 11. С. 58–65.
979. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами // Физ.-хим. механика материалов, 1976, **12**, № 2. С. 103–108.
980. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В., Белокур И.П. Влияние подкрепляющих полуплоскостей на коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещин в полосе // Физ.-хим. механика материалов, 1976, **12**, № 5. С. 70–75.
981. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В., Белокур И.П. Периодическая задача для составной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов, 1977, **13**, № 1. С. 82–86.
982. Сулим Г.Т., Дияк І.І., Кухарчук Ю.А. Дослідження пружної рівноваги плоских тіл непрямым методом граничних елементів / Матер. II Міжнар. симп. "Мех. і фіз. руйнування будів. матер. та конструкцій" (Львів-Дубляни, 7–10 жовт. 1996р.). Львів: В-во "Слово і Комерція", 1996. С. 128–129.
983. Сулим Г.Т., Евтушенко А.А. Концентрация напряжений возле тонкостенного упругого включения в полуплоскости / Тез. докл. Всесоюз. школы и конф. мол. ученых «Мех. деф. твердого тела» (Куйбышев, 26 июня–5 июля 1978 г.). Куйбышев, 1978. С. 76–77.
984. Сулим Г.Т., Лозинський Д.В. Жорсткість тіла, послабленого подвійноперіодичною системою тріщин за антиплоскої деформації // Матер. II Міжнар. симп. "Мех. і фіз. руйнування будів. матер. та конструкцій" (Львів-Дубляни, 7–10 жовт. 1996р.). Львів: В-во "Слово і Комерція", 1996. С. 395–397.
985. Сулим Г.Т., Лозинський Д.В. Пружні властивості стохастично армованих стрічкових композитів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1996. Вип. 43. С. 56–60.
986. Сулим Г.Т., Мартиняк Р.М. Задача порушення контакту при стиску пружних півплощин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1985. Вип. 23. С. 78–82.
987. Сулим Г.Т., Мартыняк Р.М., Мартыняк М.М. Периодическая задача теплопроводности для линейных включений / Тез. докл. XV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций (Канев, 28–30 мая 1980 г.). К.: Наук. думка, 1980. С. 83.
988. Сулим Г.Т., Махоркін М.І. Визначення порядку сингулярності напружень в околі точки сходження трьох клинів // Праці НТШ: Матеріалознавство і механіка матеріалів. 2003, **9**, С. 69–75.
989. Сулим Г.Т., Опанасович В.К., Драпака В.О. Антиплоска деформація тіла з близькими паралельними тріщинами / Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Львів: Каменяр, 1999. Т. 2, Вип. 2. С. 328–332.
990. Сулим Г.Т., Опанасович В.К., Драпака В.О. Одновісний розтяг пластини з прямолінійним тонким пружним включенням з урахуванням пластичних зон на його кінцях / Тези доп. Всеукр. наук. конф. "Актуальні проблеми механіки (до 80-річчя Д.В.Грилицького)" (Львів, 2–5 лист. 2004). С. 38.
991. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Двухкомпонентное асимптотическое представление напряжений в окрестности торцов тонкого межфазного упругого включения / Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Механика разрушения материалов». Львов, 1987. С. 150.
992. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. О термоупругом деформировании кусочно-однородных тел с тонкими дефектами / Тез. докл. Респ. науч. конф. «Диф. и интегр. уравнения и их приложения». Одесса, 1987. Т. 2. С. 105–106.
993. Сулим Г.Т., Пискозуб И.З. Распределение градиентов температуры в окрестности тонкого межфазного теплоактивного включения. Минск, 1986. 17 с.–Ред. журн. «Инженерно-физический журнал». Деп. в ВИНТИ 12 мая 1987 г., № 3396-B87 Деп.

994. Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії (огляд) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 2004, 47, №3. С. 110–125.
995. Сулим Г.Т., Попина С.Ю., Рыбак Я.Т. Прочность хрупких тел со случайным распределением тонкостенных упругих включений. Львов, 1989. 8 с.–Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 23 янв. 1989 г., № 518-В89.
996. Сулим Г.Т., Попина С.Ю. Міцність тіла зі стохастичним розподілом тонких дефектів за антиплоскої деформації / *Матер. II Міжнар. симп. "Мех. і фіз. руйнування будів. матер. та конструкцій"* (Львів–Дубляни, 7–10 жовт. 1996р.). Львів: В-во "Слово і Комерція", 1996. С. 398–401.
997. Сулим Г.Т., Попина С.Ю. Міцність тіла зі стохастичним розподілом тонких дефектів за антиплоскої деформації // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 1997, 33, № 1. С. 118–121.
998. Сулим Г.Т., Рокач И.В. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении. Львов, 1983. 3 с. Материалы 10 Конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 12–16 окт., 1981). Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-83 Деп.
999. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Анализ вариантов условий взаимодействия и торцевых постоянных в антиплоской задаче для однородных изотропных сред с тонкими прослойками. Львов, 1986. 14 с. Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 17 июля 1986 г., № 5210-В86.
1000. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением. Львов, 1982. 20 с. Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15 сент. 1982 г. №4839-82 Деп.
1001. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Поле напряжений и перемещений в антиплоской задаче для среды с тонкостенной прослойкой. Львов, 1982. 20 с. Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15 сент. 1982г. №4838-82 Деп.
1002. Сулим Г.Т., Фльорко М.М. Реалізація методу граничних елементів для задач теорії потенціалу / *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Львів: Каменярь, 1999. Т. 2. Вип. 2. С. 224–228.
1003. Сулим Г.Т., Шевчук С.П. Деформування повздожнім зсувом кусково-однорідного анізотропного середовища зі стрічковим включенням / *Мех. і фіз. руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. Львів: Каменярь, 1998. Вип. 3. С. 212–222.
1004. Сулим Г.Т., Шевчук С.П. Концентрація напружень в околі стрічкових включень у кусково-однорідному анізотропному середовищі / *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Львів: Каменярь, 1999. Т. 2. Вип. 2. С. 220–223.
1005. Сулим Г.Т., Шевчук С.П. Плоска задача для кусково-однорідного анізотропного тіла зі стрічковим пружним включенням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 1999, 35, № 6. С. 7–16.
1006. Сулим Г.Т., Шевчук С.П. Повздожний зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 1998, 41. Вип. 3. С. 90–97.
1007. Сулим Георгій, Драган Михайло, Пастернак Ярослав. Про один метод дослідження пружної рівноваги пластин із включенням / *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Т. 2. Львів, 2006. С. 106–108.
1008. Сулим Георгій, Опанасович Віктор, Драпака Володимир. Граничне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для двох зсунутих по вертикалі ідентичних тріщин у пластині / *Тези доп. Третього українсько-польського симпозиуму "Змішані задачі механіки неоднорідних структур"* (Львів, 6–11 вер. 1999 р.). Львів: ЛДУ, 1999. С. 38.
1009. Сулим Георгій, Шевчук Сава. Антиплоска задача для системи анізотропні півпростір-шар з тонкими включеннями / *Тези доп. Третього українсько-польського симпозиуму "Змішані задачі механіки неоднорідних структур"* (Львів, 6–11 вер. 1999 р.). Львів: ЛДУ, 1999. С. 46.
1010. Сулим Георгій, Шевчук Сава. Напружено-деформований стан анізотропного півпростору з тонким пружним включенням / *Тези доп. всеукраїнської наук. конф. "Актуальні проблеми механіки (до 100-річчя М.П.Шереметьєва)"* (Львів, 5–8 грудня 2005). Львів, 2005. С. 58.
1011. Сулим М.В., Сулим Г.Т. Про міцність зварних з'єднань трубопроводів // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1981. Вип. 17. С. 76–82.
1012. Сулим Г.Т., Кундрат М.М. Гранична рівновага та руйнування в ортотропному тілі з періодичною системою колінеарних тонких стрічкових включень // *Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми механіки"* (до 100-річчя М.П. Шереметьєва). Львів: ЛНУ, 2005. С. 36–37.
1013. Сулим Г.Т., Кундрат М.М. Гранична рівновага та руйнування в ортотропному тілі зі жорстким стрічковим включенням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2006, 42, № 2. С. 69–79.
1014. Сяський А.А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жесткости. Ровен. гос. пед. ин-т. Ровно, 1989. 14 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 19 янв. 1989 г., № 352-Ук89.

1015. Сяський А.А. Об одном методе решения контактных задач изгиба пластин с разомкнутыми ребрами / Тез. докл. Всес. конф. «Совр. пробл. строит. мех. и прочн. летательных аппаратов» (Москва, 19–21 окт. 1983 г.). М.: МАИ, 1983. С. 34–35.
1016. Сяський А.А. Расчет сварных ортотропных сферических оболочек с ребрами жёсткости // Прикл. механика, 1985, **21**, № 1. С. 66–73.
1017. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием // Прикладная математика и механика, 1986, **50**, № 2. С. 247–254.
1018. Сяський А.А., Демчик С.П. Напряженная посадка ортотропной пластинки и изотропного диска с тонким покрытием / Ровен. гос. пед. ин-т. Ровно, 1989. 13 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 12 янв. 1989 г., № 286-Ук89.
1019. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикл. механика, 1983, **19**, № 5. С. 94–99.
1020. Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с инородным дуговым включением // Гидромелиор. и гидротехн. стр-во. Львов, 1984. Вып. 12. С. 115–119.
1021. Теодосиу К. Упругие модули дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.
1022. Тисовский Л.О. Изгиб плиты с круглой шайбой и тонкими упругими прямолинейными включениями // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1984. Вып. 22. С. 64–70.
1023. Тисовский Л.О. Напряженное состояние при изгибе пластины Кирхгофа с криволинейным упругим включением / Тр. 14 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР (Киев, 23–26 мая 1989). Ч. 2 / Ин-т мех. АН УССР. К., 1989. С. 328–332. Рукопись деп. в ВИНТИ 2 авг. 1989 г., № 5165-B89.
1024. Тисовский Л.О. Сингулярные уравнения задачи изгиба тонкой пластины, содержащей систему криволинейных упругих включений / Тр. 13 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР (Киев, 24–27 мая 1988). Ч. 2 / Ин-т мех. АН УССР. К., 1988. Рукопись деп. в ВИНТИ 27 дек. 1988 г., № 9072-B88.
1025. Тисовский Л.О. Упругое равновесие круглого диска, ослабленного системой произвольно расположенных тонких упругих включений / Тез. докл. Респ. симп. «Концентрация напряжений» (Донецк, 31 мая – 2 июня 1983). Донецк, 1983. С. 112–113.
1026. Тихонов В.А. Расчет напряжений возле включений некруговой формы // Тр. Моск. энерг. ин-та, 1974. Вып. 185. С. 66–72.
1027. Тихонов В.А. Структурные напряжения в среде, армированной системой анизотропных волокон некругового сечения // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1975. Вып. 227. С. 96–102.
1028. Торосян Ф.С. О внутреннем контактном взаимодействии кругового диска и кругового кольца, подкрепленного на обводе отверстия тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, **32**, № 1. С. 3–17.
1029. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
1030. Трощенко В.Т., Лебедев А.А., Стрижало В.А. и др. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения. К.: Логос, 200. 571 с.
1031. Трускиновский Л.М. Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР, 1982, **265**, № 2. С. 306–310.
1032. Труш И.И. Некоторые двумерные задачи о предельном равновесии составных тел с дефектами типа трещин. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат наук / Львов, 1973. 14 с.
1033. Труш И.И., Герасимчук Б.В. Коэффициенты интенсивности напряжений для ослабленного трещиной тела с эллиптическим включением // Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1981. Вип. 150. С. 105–106.
1034. Угодчиков А.Г., Длугач М.И., Степанов А.Е. Решение краевых задач теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М.: Высш. школа, 1960. 528 с.
1035. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.
1036. Усов А.В. О некоторых интегральных уравнениях термоупругости для кусочно-однородных тел с дефектами и включениями / Тез. докл. 3 Респ. науч.-техн. конф. «Интегр. уравнения и прикл. моделир.» (Одесса, 15–17 нояб. 1989). Ч. 2. К., 1989. С. 105–116.
1037. Усов А.В. Смешанная задача термоупругости для кусочно-однородных тел с включениями и трещинами / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 116.
1038. Филимонов А.И. Определение полей напряжений в окрестности кругового включения с учетом переходного слоя. Уральск. политехн. ин-т. Свердловск, 1981. 13 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 13 апр. 1981 г., № 1647-81 Деп.

1039. Филиппов Е.Б. Экспериментальное определение контактных усилий при взаимодействии тонкостенных элементов конструкций / Тез. докл. 4 Всес. конф. «Смеш. задачи мех. деформируем. тела» (Одесса, 26–29 сент. 1989). Ч. 2. Одесса, 1989. С. 121.
1040. Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 6. С. 116–124.
1041. Фильштинский Л.А. К теории упругости неоднородных сред с регулярной структурой // Прикладная математика и механика, 1973, **37**, № 2. С. 262–273.
1042. Фильштинский Л.А. Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах: Учеб. пособ. Сумы: СумГУ, 2001. 451 с.
1043. Фильштинский Л.А. Об особенностях поля напряжений в упругой анизотропной полуплоскости с выходящим на границу ребром // Прикл. механика, 1981, **17**, № 10. С. 107–111.
1044. Фильштинский Л.А. Продольный сдвиг в анизотропной среде с разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1978, № 4. С. 68–72.
1045. Фильштинский Л.А., Грингауз М.Г. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала // Прикладная математика и механика, 1975, **39**, № 3. С. 537–546.
1046. Фильштинский Л.А., Любчак В.А. Эффект подкрепления ребрами жесткости анизотропной оболочки с разрезами // Физ.-хим. механика материалов, 1984, **20**, № 1. С. 53–58.
1047. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1970. 800 с.
1048. Фишгойт А.В., Рогов Ю.Е., Матюшкина В.П. Способ определения длины и формы трещины в условиях плоской деформации – А.с.938083, СССР. Заявл.26.12.80, №3225640/25-28, опубл. в Б.И., 1982, №23. МКИ G 01 № 3/08.
1049. Флейшман Н.П., Зоненшвили И.А., Папукашвили А.Р. Пластины с безмоментными ребрами переменного сечения // Сообщ. АН ГССР, 1987, **126**, № 2. С. 277–278.
1050. Флейшман Ф.Н. Уточненные условия сопряжения пластин с тонким промежуточным слоем / Сопротивление материалов и теория сооружений. К., 1979. Вып. 35. С. 77–80.
1051. Фотиева Н.Н., Лыткин В.А. К расчету анкерных плит глубокого заложения // Основания, фундаменты и механика грунтов, 1969, № 5. С. 8–10.
1052. Френчко Ю.С., Ткач М.Д. Антиплоская деформация тела с тонким дугообразным включением // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. К.: Наук. думка, 1978. С. 81–84.
1053. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
1054. Хай М.В. Визначення температурних полів і напружень у тілах з тонкими теплопровідними включеннями // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1984, № 11. С. 48–52.
1055. Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. К.: Наук. думка, 1993. 254 с.
1056. Хай М.В. Интегральные уравнения задачи об определении напряжений в теле с тонким инородным включением // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 3. С. 44–47.
1057. Хай М.В. Определение температурных полей в бесконечном теле с тонкими включениями, обладающими термосопротивлением / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 230.
1058. Хай М.В. Определение температурных полей и напряжений в телах с тонкими теплопроводящими включениями // Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 11. С. 48–53.
1059. Ханнанов Ш.Х. Трещинообразование в кристаллах с включениями // Проблемы прочности, 1974, № 2. С. 58–59.
1060. Хапко Б.С. Температурные напряжения в прямоугольной пластине с распределенными по произвольной кривой источниками тепла / Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1982. Вып. 16. С. 48–52.
1061. Хачикян А.С. Плоская задача теории упругости для прямоугольника с тонкостенным включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, **24**, № 4. С. 55–68.
1062. Хачикян А.С. Равновесие неоднородной упругой плоскости с тонкостенным гибким включением / Аннот. докл. 3-го Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. М., 1968. С. 307.
1063. Хачикян А.С. Равновесие неоднородной упругой плоскости с тонкостенным гибким включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, **21**, № 4. С. 20–22.
1064. Хачикян А.С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, **23**, № 3. С. 14–22.
1065. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с.
1066. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. К.: Наук. думка, 1986. 170 с.
1067. Хома И.Ю. Згин пластини при заданих на контурі кругового отвору переміщеннях // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 4. С. 460–464.

1068. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шишкин П.Г. Приведенные термоупругие характеристики пластинки с включениями // Прикл. механика, 1976, **12**, № 6. С. 34–40.
1069. Хрущ Я.Ф., Делявский М.В., Бережницкий Л.Т. Локальное напряженно-деформированное состояние при изгибе тонких пластин с жесткими остроконечными включениями // Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1978, № 129. С. 21–24.
1070. Хуторянский Н.М. Гранично-контактные интегро-дифференциальные уравнения теории упругости для кусочно-однородных тел / Прикл. пробл. прочности и пластич. Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1981. С. 11–18.
1071. Цагарели И.И. Главная контактная задача эластостатики для кусочно-однородного пространства // Тр. ин-та прикл. мат. Тбил. ун-т, 1988, **23**. С. 149–156.
1072. Чалмерс Б. Теория затвердевания. М.: Металлургия, 1968. 288 с.
1073. Чантурия А.В. Решение задачи для бесконечной области с тонким упругим слоем с закругленными концентраторами. Ин-т горн. мех. АН ГССР. Тбилиси, 1989. 12 с. Рукопись деп. в БИВУ Госплана ГССР 23 мая 1989 г., № 531-Г89.
1074. Чаплыгин С.А. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана). М., 1910.
1075. Черепанов Г.П. Инициирование микротрещин и дислокаций // Прикл. механика, 1987, **23**, № 12. С. 67–81.
1076. Черепанов Г.П. К решению статически неопределимых упругопластических задач в условиях сложного сдвига // Инженерный журнал, 1965, **5**, № 6. С. 1126–1127.
1077. Черепанов Г.П. Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости / Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 502–507.
1078. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
1079. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
1080. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами // Известия АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 1. С. 131–137.
1081. Черепанов Г.П. О проблеме неединственности в теории пластичности // Докл. АН СССР, 1974, **218**, № 4. С. 779–782.
1082. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых телах // Прикладная математика и механика, 1966, **30**, № 1. С. 82–93.
1083. Черепанов Г.П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикладная математика и механика, 1974, **38**, № 6. С. 963–979.
1084. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана и ее приложение к некоторым смешанным задачам теории упругости // Прикладная математика и механика, 1962, **26**, № 5. С. 907–912.
1085. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. М.: Машиностроение, 1977. 224 с.
1086. Черепанов Г.П., Кочаров Р.С., Соткилава О.В. Об одном трещиновидном дефекте в упругой плоскости // Прикл. механика, 1977, **13**, № 2. С. 48–55.
1087. Черепанов Г.П., Кочаров Р.С., Соткилава О.В. Параболическое включение в упругой плоскости // Труды Моск. горн. ин-та, 1975. С. 36–46.
1088. Черепанов Г.П., Кочаров Р.С., Соткилава О.В. Упругая плоскость с параболическим включением // Физ. и хим. процессы горн. произ-ва. М., 1976. С. 151–156.
1089. Чернуха Ю.А., Войтович Н.И. Термонапряженное состояние сопряженных через кольцо круговых пластин // Прикл. механика, 1986, **22**, № 6. С. 75–81.
1090. Чернуха Ю.А., Косарчин В.И. Локальные эффекты в термонапряженной пластине с круговым включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. К.: Наук. думка, 1986. Вып. 23. С. 60–65.
1091. Чернуха Ю.А., Косарчин В.И. Уточнений анализ температурных напряжень у пологій сферичній оболонці з чужорідним включенням // Мат. методи і фіз.-мех. поля, 1995. Вип. 38. С. 109–115.
1092. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
1093. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Концентрация напряжений в окрестности луночного выреза (включения) при нелинейной антиплоской деформации // Теор. и прикл. мех. Донецк: Вища школа, 1985. Вып. 16. С. 140–143.
1094. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
1095. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Трещина продольного сдвига в нелинейно упругом теле // Проблемы прочности. 1983. № 4. С. 62–66.
1096. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 338 с.
1097. Чобанян К.С., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, **20**, № 6. С. 19–29.

1098. Шалюхин Ю.Н. О напряжениях в пластине с вваренной вставкой произвольного сечения / Краткие тез. докл. Конференции по повреждениям и эксплуатационной надёжности судовых конструкций (Владивосток, 13–16 сент. 1972 г.). Владивосток, 1972. С. 141–144.
1099. Шами К. Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела // Композиционные материалы: В 8-ми т. М.: Мир, 1978. Т. 6. С. 42–87.
1100. Шацкий И.П. О сопряженных задачах статики пологих оболочек с линейными дефектами / Тез. докл. I Всес. конф. «Механика неоднородных структур» (Львов, 6–8 сент. 1983 г.). К.: Наук. думка, 1983. С. 237–238.
1101. Шацкий И.П. Об оценке прочности жесткого линейного включения, изгибаемого в упругой плоскости / Материалы 2 конф. мол. ученых и спец. «Пробл. повыш. качества матер., приборов и оборуд.». Секц. моделир. физ.-мех. процессов (Львов, 21–23 окт. 1986). Львов, 1987. С. 118–120. Рукопись деп. в ВИНТИ 5 окт. 1987 г., № 7120-B87.
1102. Шацкий И.П. Пологая цилиндрическая оболочка с жестким линейным включением вдоль образующей. Рукопись деп. в ВИНТИ 11 янв. 1983 г., № 174-83 Деп.
1103. Шацкий И.П., Кундрат А.П. Влияние связанности ленточной арматуры на концентрацию напряжений продольного сдвига // Механика композиционных материалов и конструкций, 2006, **12**. № 2. С. 263–270.
1104. Шацкий И.П. Полога циліндрична оболонка з жорстким включенням вздовж напрямної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1983. Вип. 22. С. 45–49.
1105. Шацкий И.П., Кундрат А.М. Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями // Доп. НАН України, 2004. № 11. С. 55–60.
1106. Шацкий И.П., Кундрат А.М. Антиплоска задача про витягування системи включень із пружної матриці // Машинознавство, 2004. № 7. С. 21–25.
1107. Шацкий И.П., Кундрат А.М. Крайові задачі антиплоскої деформації пружних тіл зі зв'язаними стрічковими включеннями / Тез. докл. междунар. конф. «Интегральные уравнения и их применения» (Одесса, 29 июня – 29 июля 2005 г.), Одесса, 2005. С. 160.
1108. Шацкий И.П., Кундрат А.М. Поздовжній зсув масиву зі взаємонерухомими жорсткими колінеарними включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2004, **40**. № 1. С. 69–73.
1109. Шацкий И.П., Кундрат А.М. Поздовжній зсув пружного простору з паралельними стрічковими включеннями різного розміру // Машинознавство, 2005. № 2. С. 7–12.
1110. Шацкий И.П., Кундрат А.М. Про взаєодію зв'язаних включень / Тез. доп. "6-й Міжнар. симп. українських інженерів-механіків у Львові" (Львів, 21–23 травня 2003 р.). Львів, 2003. С. 49.
1111. Швец Р.Н., Мартыняк Р.М. Интегральные уравнения контактной задачи термоупругости для шероховатых тел // Докл. АН УССР. Сер. А, 1985, № 11. С. 38–42.
1112. Швец Р.Н., Мартыняк Р.М. Контактная задача термоупругости для шероховатых тел с учетом теплопроводности среды в межконтактных зазорах / Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Харьков, 3–6 июня 1985 г.). Харьков, 1985. С. 46–47.
1113. Швец Р.Н., Мартыняк Р.М. Термоупругое взаимодействие компонент кусочно-однородного тела при неполном механическом контакте / Тез. докл. 2 Всес. науч.-техн. семинара «Неклассич. пробл. мех. композиц. материалов и конструкций из них» (Львов, сент. 1984). К., 1984. С. 70–71.
1114. Швец Р.Н., Мартыняк Р.М. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1988, № 27. С. 23–28.
1115. Швець Р.М., Мартиняк Р.М., Криштафович А.А. Неповний механічний контакт двох пружних півплощин із ортотропних матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1990, **26**. № 3. С. 65–69.
1116. Шевчук П.Р. Температурные напряжения в бесконечном пространстве с инородным сферическим включением при однородном тепловом потоке / Вопросы механики реального твердого тела. К.: Наук. думка, 1964. Вып. 3. С. 38–41.
1117. Шевчук С.П. Вплив пружного стрічкового включення на деформацію поверхні анізотропного півпростору за поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2006, **49**, № 3. С. 125–130.
1118. Шереметьев М.П. Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1960. 258 с.
1119. Шерман Д.И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости // Труды Всес. съезда по теор. и прикл. механике. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 405–467.
1120. Шерман Д.И. Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР, 1940, **27**, № 9. С. 907–910.
1121. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезв // Докл. АН СССР, 1940, **27**. № 4. С. 330–334.

1122. Шешко М.А. К численному решению сингулярных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения, 1977, **13**, № 8. С. 1493–1502.
1123. Шешунова Г.Г. Расчет осесимметрично нагруженных оболочек вращения в зоне их сопряжения через упругий шпангоут. Моск. авиац. ин-т. М., 1982. 17 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 31 марта 1983 г., № 1630-83 Деп.
1124. Шлыков Ю.П., Ганин Е.Л., Царевский С.Н. Контактное термическое сопротивление. М.: Энергия, 1977. 328 с.
1125. Шушунов В.В. Расширение области применимости метода компенсирующих нагрузок. Ч. 1. Фундаментальные решения, соответствующие действию сосредоточенных сил в анизотропной плоскости и полуплоскости. Новосиб. ин-т инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1985. 81 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 26 авг. 1985 г., № 6299-85 Деп.
1126. Эберт Л.Дж., Райт П.К. Механические аспекты поверхности раздела // Композиционные материалы: В 8-ми т. М.: Мир, 1978. Т. 1. С. 42–76.
1127. Эриксен Дж. Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1977. 246 с.
1128. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
1129. Юшкевич О.Ю. Вывод операторным методом условий неидеального тормомеханического контакта разнородных тел / Термомех. процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. К., 1978. С. 62–67.
1130. Яновер В.Г. Асимптотика решения стационарной задачи теплопроводности в области, содержащей включение в виде тонкого слоя. Рукопись деп. В ВИНТИ 22 дек. 1978 г., № 329-79 Деп. 42 с.
1131. Яновер В.Г. Нестационарная задача теплопроводности в области, содержащей тонкую прослойку материала, обладающую высокой теплопроводностью. Рукопись деп. В ВИНТИ 22 дек. 1978 г., № 328-79 Деп. 52 с.
1132. Ярдухин А.К. Взаимодействие межфазной трещины с полубесконечным межфазным включением / Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: УП «Техноринт», 2001. С. 510–514.
1133. Ярдухин А.К. Система трещин и отслоившееся включение на линии раздела сред / Тр. 12-й межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи. Ч. 1». Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 2002. С. 221–224.
1134. Ясній П.В. Пластично деформовані матеріали: в тома і тріщинотривкість. Львів: Світ, 1998. 292 с.
1135. A Guide to repair of concrete // Concrete Constructions, 1977, **22**, No. 3. P. 124–163.
1136. Abe Takej. Матеріал, що містить дисперсні еліптичні включення, і пружні деформації полікристалічних матеріалів // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 1977, **43**, No. 365. P. 76–84. Discuss. P. 84–85 (яп. мовою).
1137. Journal of the Mechanics and Physics of Solids–.
1138. Trans ASME. Journal of Applied Mechanics,–.
1139. Agarwal B.D., Bansal R.K. Effect of an interfacial layer on the properties of fibrous composites: a theoretical analysis // Fibre Sci. and Technol., 1979, **12**, No. 2. P. 149–158.
1140. Albright C.E. The fracture toughness of steel-aluminium deformation welds // Weld. J., 1981, **60**, No. 11. P. 207–214.
1141. Allison I.M., Hollaway L.C. Stress in fiber-reinforced materials // Brit. J. Appl. Phys., 1967, **18**, No. 7. P. 979–989.
1142. Allison I.M., Hollaway L.C. The stresses around fibers in brittle matrices // Plastics and Polymers, 1969, **37**, No. 127. P. 57–63.
1143. Amazigo John, Budiansky Bernard. Interaction of particulate and transformation toughening // J. Mech. and Phys. Solids, **36**, No. 5. P. 581–595.
1144. Amenyah W., Schiavone P., Ru C.Q., Mioduchowski A. Interior cracking of a circular inclusion with imperfect interface under thermal loading // Mathematics and Mechanics of Solids, 2001, **6**. No. 5. P. 525–540.
1145. Arias R. Elastic fields of stationary and moving dislocations in finite samples // Phil. Mag. B, 1998. **78**. P. 109–113.
1146. Arin K. A note on the effect of lateral bending stiffness of stringers attached to a plate with a crack // Engineering Fracture Mechanics, 1975, **7**, No. 1. P. 173–179.
1147. Arin K. A plate with a crack, stiffened by a partially debonded stringer // Engineering Fracture Mechanics, 1974, **6**, No. 1. P. 133–140.
1148. Asaro R.J. An image force theorem for a dislocation near a crack in an anisotropic elastic medium // J. Phys. F: Met. Phys., 1975, **5**, No. 12. P. 2249–2255.



1149. Asaro R.J., Hirth J.P., Barnett D.M., Lothe J. A further synthesis of sextic and integral theories for dislocations and line forces in anisotropic media // *Physica Status Solidi B*, 1973, **60**. P. 261–271.
1150. Asaro R.J., Hirth J.P., Lothe J. Stress functions for line defects in anisotropic elastic media // *Scr. met.* 1975, **9**, No. 8. P. 837–840.
1151. ASM Handbook. Vol. 21. Composites. ASM International, 2001. 2605 p. (*ASM Handbook Vol.21* <http://mihd.net/4ivdlt> <http://depositfiles.com/en/files/353348>).
1152. Asundi A., Deng W. Rigid inclusions on the interface between dissimilar anisotropic media // *J. Mech. and Phys. Solids*, 1995, **43**. No. 7. P. 1045–1058.
1153. Atkinson C. Cracks in bimaterial interface – An overview / Proc. 7<sup>th</sup> Int. Conf. Fract. “Adv. Fract. Res.” (ICF7) (Houston, Tex., 20–24 March, 1989). Vol. 4. Oxford, 1989. P. 3053–3061.
1154. Atkinson C. On cracks and screw dislocations pile ups crossing a bimaterial interface // *Journal of Elasticity*, 1973, **3**, No. 1, March. P. 15–22.
1155. Atkinson C. On the stress intensity factors associated with crack interacting with an interface between two elastic media // *Eng. Sci.*, 1975, **13**, No. 5. P. 489–504.
1156. Atkinson C. Some ribbon-like inclusion problems // *International Journal of Engineering Science*, 1973, **11**, No. 2. P. 243–266.
1157. Atkinson C. The interaction between a dislocation and a crack // *International Journal of Fracture Mechanics*, 1966, **2**, No. 4. P. 567–575.
1158. Atkinson C., Avila J. A comparison of exact and model solutions for the initiation of debond fracture // *International Journal of Engineering Science*, 1983, **21**. No. 9. P. 1053–1059.
1159. Atkinson C., Kanninen M.F. A simple representation of crack tip plasticity: the inclined strip yield superdislocation model // *International Journal of Fracture*, 1977, **13**, No. 2. P. 151–163.
1160. Balas J., Sladek J., Sladek V. *Stress Analysis by Boundary Element Methods*. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1989. 689 p.
1161. Ballarini R. A certain mixed boundary value problem for a bimaterial interface // *International Journal of Solids and Structures*, 1995, **32**. No. 3–4. P. 279–289.
1162. Ballarini R. A rigid line inclusion at a bimaterial interface // *Engineering Fracture Mechanics*, 1990, **37**. No. 1. P. 1–5.
1163. Ballarini R. An integral equation approach for rigid line inhomogeneity problems // *Int. J. Fractures*, 1987, **33**, No. 1. P. R23–R26.
1164. Barber J., Triantafyllidis N. Effect of debonding on the stability of fiber-reinforced composites // *Journal of Applied Mechanics*, 1985, **52**. P. 235–237.
1165. Barber J.R. Contact problems involving a cooled punch // *Journal of Elasticity*, 1978, **8**, No. 4. P. 409–423.
1166. Barker R.M., MacLaughlin T.F. Stress concentration near a discontinuity in fibrous composites // *Journal of Composite Materials*, 1971, **5**, Oct. P. 492–503.
1167. Beevers C.E. Some remarks on thermostatic inclusion problems // *Journal of Elasticity*, 1974, **4**, No. 1. P. 83–87.
1168. Benveniste Y. The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents // *Mech. Mat.*, 1985, **4**. P. 197–208.
1169. Benveniste Y., Aboudi J. A continuum model for fiber reinforced materials with debonding // *Int. J. Solids. Struct.*, 1984, **20**. P. 935–951.
1170. Beom H.G. Analysis of a plate containing an elliptic inclusion with eigencurvatures // *Archiv of Applied Mechanics*, 1998, **68**. No. 6. P. 422–432.
1171. Bhargava Raj Rani. A misfitting elastic inclusion in an infinite plane containing a crack // *Journal of Elasticity*, 1977, **7**. No. 2. P. 201–211.
1172. Bhattacharya R.C. On the elastodynamic behaviour of thin bonds // *J. Sound and Vibr.*, 1985, **99**, No. 2. P. 225–234.
1173. Bigoni D., Serkov S.K., Valentini M., Movchan A.B. Asymptotic models of dilute composites with imperfectly bonded inclusions // *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**. P. 3239–3258.
1174. Bland S. The twodimensional oscillating airfoil in a wind tunnel in subsonic flow // *SIAM J. Appl. Math.*, 1970, **18**. P. 830–848.
1175. Bortman Y., Banks-Sills L. An extended weight function method for mixed-mode elastic crack analysis // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1983, **E50**, No. 4a. P. 907–909.
1176. .
1177. Brown E.H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet // *Proc. of the Royal Soc., Math. and Phys. Sci. Ser. A*, 1957, **239**, No. 1218. P. 296–310.

1178. Brussat T.R., Westmann R.A. A Westergaard-type stress function for line inclusion problem // *International Journal of Solids and Structures*, 1975, **11**, No. 6. P. 665–677.
1179. Brussat T.R., Westmann R.A. Interfacial slip around rigid fiber inclusion // *Journal of Composite Materials*, 1974, **8**, No. 4. P. 364–377.
1180. Bifulco H. Scheibe mit endlicher, elastischer Versteifung // *VDI. Forschungsheft*. Dusseldorf: BDI Verlag GMBH, 1961. Vol. 485. P. 5–44.
1181. Bürgel B., Perry A.J., Schreider W.R. On the theory of fiber strengthening // *J. Mech. and Phys. Solids*, 1970, **18**, No. 2. P. 101–114.
1182. Burns S.J. Crack tip dislocation nucleation observation in bulk specimens // *Scr. met.*, 1986, **20**, No. 11. P. 1489–1494.
1183. Bycroft G.N. Forced torsional oscillation of half-space // *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1955–56, **A248**. P. 327–368.
1184. Cahn J.W. Interfacial free energy and interfacial stress: the case of an internal interface in solid // *Acta met.*, 1989, **37**, No. 3. P. 773–776.
1185. Caillerie D. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // *Math. Methods Appl. Sci.*, 1980, **2**, No. 3. P. 251–270.
1186. Carrara A.S., McGarry F.J. Matrix and interface stresses in a discontinuous fiber composite model // *J. of Compos. Mater.*, 1968, **2**, No. 2. P. 222–243.
1187. Castles R.R., Mura T. The analysis of eigenstrains outside of an ellipsoidal inclusion // *Journal of Elasticity*, 1985, **15**, No. 1. P. 27–34.
1188. Chang C.I., Conway H.D., Weaver T.C. The elastic constants and bond stresses for a three-dimensional composite reinforced by discontinuous fibers // *Fibre Sci. and Technol.*, 1972, **5**, No. 2. P. 143–163.
1189. Chang C.S., Conway H.D. A parametric study of complex variable method for analyzing the stresses in an infinite plate containing a rigid rectangular inclusion // *International Journal of Solids and Structures*, 1968, **4**, No. 11. P. 1057–1066.
1190. Chang C.S., Conway H.D. Bond stresses in fiber reinforced composites subjected to uniform tension // *Journal of Composite Materials*, 1968, **2**, No. 2. P. 168–185.
1191. Chang C.S., Conway H.D. Stress analysis of an infinite plate containing an elastic rectangular inclusion // *Acta mech.* 1969. No. 8. P. 160–173.
1192. Chao C.K., Chang R.C. Thermoelastic problem of dissimilar anisotropic solids with a rigid line inclusion // *J Appl Mech*, 1994, **61**. No 4. P. 978–980.
1193. Chao C.K., Chiang T.F. Antiplane interaction of an anisotropic elliptic inclusion with an arbitrarily oriented crack // *International Journal of Fracture*, 1996, **75**. No. 3. P. 229–245.
1194. Chao C.K., Shen M.H. Circular-arc inclusion at isotropic bimaterial interface // *AIAA Journal*, 1995, **33**, No. 2. P. 332–339.
1195. Chen F.C., Young K. Inclusions of arbitrary shape in an elastic medium // *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, No. 7. P. 1412–1416.
1196. Chen H.S., Acrivos A. The solution of the equations of linear elasticity for an infinite region containing two spherical inclusions // *International Journal of Solids and Structures*, 1978, **14**. P. 331–348.
1197. Chen P.E., Nielsen L.E. Mechanical Properties of Tape Composites // *Colloid and Polymer Science*. 1969. No. 235. P. 1174–1181.
1198. Chen S.W. Rigid line inclusions under antiplane deformation and inplane electric field in piezoelectric materials // *Engng. Fract. Mech.*, 1997, **56**, No 2. P. 265274.
1199. Chen T. A slit-like inclusion in an orthotropic piezoelectric solid // *Acta Mechanica*, 1998, **131**, No. 1–2. P. 103–109.
1200. Chen T. The rotation of a rigid ellipsoidal inclusion embedded in an anisotropic piezoelectric medium // *International Journal of Solids and Structures*, 1993, **30**, No. 15. P. 1983–1995.
1201. Chen W.T. Axisymmetric stress field around spheroidal inclusions and cavities in a transversely isotropic material // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1968, **35**. P. 770–773.
1202. Chen W.T. On an elliptic elastic inclusion in an anisotropic medium // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1967, **20**, No. 3. P. 307–313.
1203. Chen W.T. Stress concentration around spheroidal inclusions and cavities in a transversely isotropic material under pure shear // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1970, **37**. P. 85–92.
1204. Chen Y.H., Hahn H.G. The stress singularity coefficient at a finite rigid flat inclusion in an orthotropic plane elastic body // *Engng. Fract. Mech.*, 1993, **44**. No. 3. P. 359–362.
1205. Chen Y.Z. New integral equations in crack or rigid thin inclusion problem of antiplane elasticity and in torsion crack problem // *Acta Mech. Sin.*, 1987, **19**, No. 6. P. 567–570.

1206. Chen Y.Z. Periodic rigid line problem in an infinite plate // *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 1993, **63**, No. 7. P. 464–471.
1207. Chen Y.Z., Chen R.S. Interaction between curved crack and elastic inclusion in an infinite plate // *Archiv of Appl. Mech.*, 1997, **67**, No. 8. P. 566–575.
1208. Cherepanov G.P. Invariant  $\Gamma$ -integrals // *Engineering Fracture Mechanics*, 1981, **14**, No. 1. P. 39–58.
1209. Chiu Y.P. On the internal stresses in a half-plane and a layer containing localized inelastic strains or inclusions // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1980, **47**. P. 313–318.
1210. Cho K., Gent A.N. Internal fracture in an elastomer containing a rigid inclusion // *Journal of Material Science*, 1987, **22**, No. 8. P. 2899–2905.
1211. Choi B.I., Earmme Y.Y. Interactions of spherical precipitates in an anisotropic matrix // *Mech. Mater.*, 1986, **5**. P. 121–136.
1212. Choi H.S., Achenbach J.D. Stress state at neighboring fibers induced by single-fiber interphase defects Achenbach // *International Journal of Solids and Structures*, 1995, **32**, No. 11. P. 1555–1570.
1213. Chou Y.T. On dislocation-boundary interaction in an anisotropic aggregate // *Phys. status solidi*, 1966, **15**, No. 1. P. 123–127.
1214. Chou Y.T., Wang Z.Y. Stress singularity at the tip of a rigid flat inclusion / *Recent Developments in Applied Mathematics* / F.F.Ling, I.G.Tadjabksh, eds. – New York: Resselae Press, Troy, 1983. P. 21–30.
1215. Chu C.C. Arbitrarily oriented cracks in a reinforced sheet // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1985, **52**, No. 1. P. 13–18.
1216. Chu W.L., Conway H.D. A numerical method for computing the stresses around an axisymmetrical inclusion // *Int. J. Mech. Sci.*, 1970, **10**, No. 7. P. 578–588.
1217. Chu W.W.L., Conway H.D. Bond stresses in composites with overlapping fibers // *Int. J. Mech. Sci.*, 1970, **12**, No. 9. P. 761–774.
1218. Chung M.Y., Ting T.C.T. Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole // *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**, No. 23. P. 3343–3361.
1219. Cielecka I., Konieczny S. Równania powłók z inkluzjami wzdłuż linii parametrycznych // *Zeszyty Naukowe WSI w polu. Budownictwo*, 1982, No. 18. S. 49–55.
1220. Cinar A., Erdogan F. The crack and wedging problem for an orthotropic strip // *International Journal of Fracture*, 1983, **23**, No. 2. P. 83–102.
1221. Clements D.L. A crack between dissimilar anisotropic media // *International Journal of Engineering Science*, 1971, **9**, No. 2. P. 257–265.
1222. Clements D.L. A crack in an anisotropic layered material // *Rozprawy inżynierskie*, 1979, **27**, No. 1. S. 171–180.
1223. Clements D.L. A thermoplastic problem for a crack between dissimilar anisotropic media // *International Journal of Solids and Structures*, 1983, **19**, No. 2. P. 121–130.
1224. Clements D.L. Thermal stress in an anisotropic elastic half-space // *SIAM J. Appl. Math.*, 1973, **24**, No. 3. P. 332–337.
1225. Clements D.L., Atkinson C., Rogers C. Antiplane crack problems for an inhomogeneous elastic material // *Acta Mech.*, 1978, **29**, No. 1–4. P. 199–211.
1226. Collins W.D. Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks // *Proc. Roy. Soc.*, 1962, **A266**. P. 359–386.
1227. Comninou M., Dundurs J. On the Barber boundary conditions for thermoelastic contact // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1979, **E46**, No. 12. P. 849–853.
1228. Comninou M., Dundurs J., Barber J.R. Planar Hertz contact with heat conduction // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1981, **E48**, No. 3. P. 549–554.
1229. Conway H.D., Chang C.I. The effective elastic constants and bond stresses for a fiber reinforced elastic sheet // *Fibre Sci. and Technol.*, 1971, **3**, No. 4. P. 249–260.
1230. Conway H.D., Chu W.W., Chang C.I. Effect of bond stresses of partial bond failure of overlapping fibers in a composite material // *Fiber Sci. Tech.*, 1970, **2**. P. 289–308.
1231. Cox H.L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials // *British Journal of Applied Physics*, 1952, **3**, No. 1. P. 72–79.
1232. Crouch S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method // *Int. J. Num. Methods Engng.*, 1976, **10**. P. 301–343.
1233. Dafermos C.M. Solutions for shocks for conservation laws with memory / *Amorphous Plym. and Non-Newtonian Fluids*. New York e.a., 1987. P. 33–55.

1234. Dascalu C., Homentcovschi D. Uniform asymptotic solution for lamellar inhomogeneities in anisotropic elastic solids // *SIAM J. Appl. Math.*, 1999, **60**, No. 1. P. 18–42.
1235. Datta S., Kanwal R.P. Spheroidal rigid inclusion in an elastic medium under torsion // *Journal of Elasticity*, 1980, **10**, No. 4. P. 435–442.
1236. Delale F., Erdogan F. Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or axial part-through crack // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1982, **E49**, No. 1. P. 97–102.
1237. Delameter W. R., Hermann G., Barnett D. M. Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1975, **E42**, No. 1. P. 74–80.
1238. Delhay J.M. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems // *Int. J. Multiphase Flow*, 1974, **1**, No. 3. P. 395–409.
1239. Deng W., Meguid S.A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials // *Trans ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1998, **65**, No 1. P. 76–84.
1240. Dhaliwal Ranjit S. Griffith crack opened by a thin symmetric wedge in an elastic strip // *International Journal of Engineering Science*, 1974, **12**, No. 5. P. 375–386.
1241. Dharma P., Ganti S. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies // *Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**, No. 5. P. 663–671.
1242. Dhawan G.K. Effect of rigid inclusion in Griffith cracks in an infinite transversely isotropic medium // *Acta Mech.*, 1975, **21**, N0 1–2. P. 115–126.
1243. Dhawan G.K. On the torsion of elastic half-space with a penny-shaped inclusion // *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 1975, **6**, No. 3. P. 253–263.
1244. Dhiab A., Mesmacque G., Pluvinage G. Définition d'un critère de rupture ductile en compression // *Méc., matér., élec.*, 1981, No. 380–381. P. 266–279.
1245. Dong C.Y., Lee Kang Yong Numerical analysis of doubly periodic array of cracks/rigid-line inclusions in an infinite isotropic medium using the boundary integral equation method // *Int. J. of Fracture*, 2005, **133**, No. 4. P. 389–405.
1246. Dow N.F. Study of stresses near a discontinuity in a filament-reinforced composite metal // *General Electric Company Report R63 SD 61, AD. 414 673*, 1963. P. 1–42.
1247. Doyum A.B., Gursoy A. An arbitrarily oriented inclusion in a half-space subjected to an inclined surface load // *Engineering Fracture Mechanics*, 1991, **40**, No. 3. P. 609–625.
1248. Duan S., Yazaki H., Nakagawa K. A crack at the interface of an elastic half plane and a rigid body // *Engineering Fracture Mechanics*, 1989, **32**, No. 4. P. 573–580.
1249. Dubas P. Calcul numérique des plaques et des parois minces // *Publ. Inst. de statique appliquée, ETH. Zürich*, 1955. No. 27.
1250. Dundurs J. Analogy between concentrated forces and edge dislocations // *J. Appl. Phys. A.*, 1968, **39**, No. 9. P. 4152–4156.
1251. Dundurs J. Elastic interaction of dislocation with inhomogeneities / *Mathematical theory of dislocation* / Ed. T.Mura. New York: ASME, 1969. P. 70–115.
1252. Dundurs J. On the interaction of a screw dislocation with inhomogeneities / *Recent Advances in Engineering Science*. 1967. Vol. 2. P. 223–233.
1253. Dundurs J., Gangadharan A.C. Edge dislocation near an inclusion with a slipping interface // *J. Mech. and Physics of Solids*, 1969, **17**, No. 6. P. 459–471.
1254. Dundurs J., Hetényi M. The elastic plane with a circular insert, loaded by a radial force // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1961, **E28**, No. 1. P. 103–111.
1255. Dundurs J., Markenscoff X. A Green's function formulation of anticracks and their interaction with load-induced singularities // *Trans. ASME. J Appl Mech.*, 1989, **56**. P. 550–555.
1256. Dundurs J., Mura T. Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1964, **12**. P. 177–189.
1257. Dundurs J., Sendekyj G.P. Behaviour of an edge dislocation near a bimetallic interface // *J. Appl. Phys.*, 1965, **36**, No. 10. P. 3353–3354.
1258. Dundurs J., Sendekyj G.P. Edge dislocation inside a circular inclusion // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, **13**. P. 141–147.
1259. Durelli A.J. Stress concentrations / *Exp. Eval. Stress Concentrat. and Intensity Factors*. The Hague e.a., 1981. P. 55–62.
1260. Durelli A.J., Parks V.J., Feng H.C., Chiang F. Strains and stresses in matrices with inserts // *Mech. of composite materials. Proc. of the fifth symp. on naval structural mech. (Philadelphia, May 8–10, 1967)*. Pergamon Press, 1970. P. 265–336.

1261. Durelli A.J., Parks V.J., Chiang Eu-pen Stresses and strains in reinforced concrete // *J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng.*, 1969, **95**, No. 5. P. 871–887.
1262. Dyson F.W. The potentials of ellipsoid with variable density // *Quart. J. Pure and Appl. Math. Oxford Ser.*, 1891, **25**, No. 99. P. 259–288.
1263. Eldiwany B.H., Wheeler L.T. A three-dimensional inverse problem for inhomogeneities in elastic solids // *Journal of Elasticity*, 1986, **16**, No. 2. P. 201–211.
1264. Eldiwany B.H., Wheeler L.T. On rigid inclusions of minimum stress concentration // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1986, **34**. P. 19–28.
1265. Endo Shuji, Kawata Kozo. Критерій руйнування пружного середовища, що містить пружне сферичне включення // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1977, **43**, No. 369. P. 1620–1626. (яп. мовою).
1266. England A.H. An arc crack around a circular elastic inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1966, **E33**, No. 3. P. 637–640.
1267. Erdogan F. Approximate solution of system of singular integral equations // *SIAM J. Appl. Math.*, 1969, **17**, No. 6. P. 1041–1059.
1268. Erdogan F. Fracture problems in composite materials // *Engineering Fracture Mechanics*, 1972, **4**. P. 811–840.
1269. Erdogan F. On the integral equations of three-dimensional multiple inclusion problems // *Lett. Appl. and Eng. Sci.*, 1973, **1**, No. 4. P. 305–311.
1270. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1965, **E32**. No. 4. P. 829–836.
1271. Erdogan F., Arin K. A half plane and a strip with an arbitrarily located crack // *International Journal of Fracture*, 1975, **11**, No. 2. P. 191–204.
1272. Erdogan F., Biricikoglu V. Two bonded half planes with a crack going through the interface // *International Journal of Engineering Science*, 1973, **11**. No. 7. P. 745–766.
1273. Erdogan F., Gupta G. The stress analysis of multilayered composites with a flaw // *International Journal of Solids and Structures*, 1971, **7**, No. 1. P. 39–61.
1274. Erdogan F., Gupta G.D. On the numerical solution of singular integral equations // *Quart. Appl. Math.*, 1972, **29**, No. 4. P. 525–534.
1275. Erdogan F., Gupta G.D. Stress near a flat inclusion in bonded dissimilar materials // *International Journal of Solids and Structures*, 1972, **8**, No. 4. P. 533–547.
1276. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations // *Mechanics of fracture. V.1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. Co., 1973. P. 368–425.
1277. Erdogan F., Ratwani M. Stress distribution in bonded joints // *Journal of Composite Materials*, 1971, **5**, July. P. 378–393.
1278. Eringen A.C. Interaction of a dislocation with a crack // *J. Appl. Phys. A*, 1983, **54**, No. 12. P. 6811–6821.
1279. Eshelby J.D. Continual theory of defects / *Solid State Physics*. New York, 1956. Vol. 3. 79 p.
1280. Eshelby J.D. Elastic inclusion and inhomogeneities / *Progress in Solid Mechanics* / Ed. Sneddon I.N., Hill R. Amsterdam, North-Holland publ. co., 1961. Vol. 2. P. 88–140.
1281. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // *Proc. Roy. Soc. London*, 1957. **A241**. P. 376–396.
1282. Eshelby J.D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion // *Proc. Roy. Soc. London*, 1959, **A252**. P. 561–569.
1283. Eshelby J.D. The stress on and in a thin inextensible fibre in a stretched elastic medium // *En. Fract. Mech.*, 1982, **16**, No. 3. P. 453–455.
1284. Eshelby J.D., Read W.T., Shockley W. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory // *Acta Metall.*, 1953, **1**. P. 251–259.
1285. Evans A.G. The role of inclusions in the fracture of ceramic materials // *J. Mater. Sci.* 1974, **9**.:P. 1145–1152.
1286. Evans A.G., Hutchinson J.W. The thermomechanical integrity of thin films and multilayers // *Acta Mater.*, 1995, **43**. P. 2507–2530.
1287. Fan H., Keer L.M. Two-dimensional line defects in anisotropic elastic solids // *International Journal of Fracture*, 1993, **62**. P. 25–42.
1288. Feingold A., Mirza S., Malhotra R.N. Photoelastic study of stress concentration in rectangular panels with inserts // *Proc. Int. Symp “Exp. Mech. Res. and Develop.”* (Waterloo, 1972). Waterloo, 1973. P. 821–837.
1289. Fels A., Friedrich K., Hornbogen E. Reinforcement of a brittle epoxy resin by metallic glass ribbon // *J. Mater. Sci. Lett.*, 1984, **3**. P. 569–574.

1290. Fengels W., Troost A. Zur elastoplastischen Beanspruchung eines mit Bar-Kurzfasern verstärkten Aluminium-Werkstoffes bei einachsiger Zugbelastung // *Z. Werkstofftechn.*, 1981, **12**, No. 2. S. 58–71.
1291. Ferrers N.M. On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminate, and elliptic rings of variable densities // *Quart. Pure Appl. Math.*, 1877, **14**, No. 53. P. 1–22.
1292. Florence A.L., Goodier J.N. Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1960, **E27**, No. 4. P. 635–639.
1293. Friedel J. Les dislocations. Paris: Gauthier-Villars, 1956. 214 p.
1294. Fromme J.A., Golberg M.A. Convergence and stability of a collocation method for the generalized air-foil equation // *Appl. Math. and Comput.*, 1981, **8**, No. 2. P. 281–292.
1295. Fromme J.A., Golberg M.A. Numerical solution of a class of integral equations arising in two-dimensional aerodynamics // *J. Optim. Theory and Appl.*, 1978, **24**, No. 1. P. 169–206.
1296. Fujiwara M. Resin-Fiber Load Transfer in Fiber Reinforced Plastics / MIT R67-8, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1967.
1297. Furuhashi R., Mura T. On the equivalent inclusion method and impotent eigenstrains // *Journal of Elasticity*, 1979, **9**, No. 3. P. 263–270.
1298. Ganev P., Christova J., Tazov A. Experimentelle untersushung der oberflächenverformung von einzelnen einschüssen in polymer matrix // *Jugosl. druš. meh. 14 Jugosl. Kongr. rac. i primen. meh. (Portorož, 1978), C. Meh. čvrstog deform tela*, 1968, s. 1. S. 515–522.
1299. Gangadharan A.C., Dundurs J. Edge dislocation near an interface crack in a two-phase material // *Indian J. Technol.*, 1973, **1**, No. 10. P. 410–414.
1300. Gao Cun-fa, Fan Wei-xun. An interface inclusion between two dissimilar piezoelectric materials // *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)* 2001, **22**, No. 1. P. 96–104.
1301. Gao Cun-fa, Fan Wei-xun. An interface inclusion between two dissimilar piezoelectric materials // *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**. No. 1. P. 85–92.
1302. Gao J. A circular inclusion with imperfect interface: Eshelby's tensor and related problems // *Trans. ASME of Applied Mechanics*, 1995, **62**. P. 860–866.
1303. Garg A.C. Stresses near an infinite row of collinear flat inclusions in bonded dissimilar media // *J. Aeronaut. Soc. Indie*, 1977, **29**, No. 1–2. P. 57–61.
1304. Gdoutos E.E. Failure of a composite with a rigid fiber inclusion // *Acta mech.*, 1981, **39**, No. 3–4. P. 251–262.
1305. Gdoutos E.E. Fracture initiation from singular points of rigid inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1980, **47**, No. 4. P. 971–973.
1306. Gdoutos E.E. Fracture mechanics. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1993. XIII+307 p.
1307. Gdoutos E.E. Fracture of composites with rigid inclusions having cuspidal points // *Proc.Int.Conf.Anal.and Exp.Fracture Mech. (Rome, June 23–27, 1980)*. Alphen aan den Rijn-Rockville, Md, 1981. P. 943–958.
1308. Gdoutos E.E. Fracture phenomena in composites with rigid inclusions // *Proc.1-th USA-Greece Symp.Mixed Mode Crack Propag. (Athens, Aug.18–22,1980)*. Alphen aan den Rijn-Rockville, Md, 1981. P. 109–122.
1309. Gdoutos E.E. Isochromatic patterns in a plate with a rigid fibre inclusion // *Fibre Sci. and Technol.*, 1981, **15**, No. 4. P. 299–311.
1310. Gdoutos E.E., Kourounis C.G., Kattis M.A., Zacharopoulos D.A. A partly unbonded rigid fiber inclusion in an infinite matrix // *Proceedings of the 7th European Conference on Fracture (Budapest, Hungary, September 19–24, 1988)*. 1988. P. 223–226.
1311. Ghez R. Equilibre mecanique et de forme de petits cristaux // *Helvetica phys. acta*, 1968, **41**, No. 3. P. 287–309.
1312. Gibbs J.W. On the equilibrium of heterogeneous substances. *Trans. Connecticut Acad / Collected Papers*. New Haven: Yale University Press, 1875–1878. Vol. 3. P. 108–248; P. 343–523 p.(рос. переклад: Гиббс Дж. О равновесии гетерогенных веществ. В кн.- Термодинамика. Статистическая механика.–М.: Наука, 1982. С. 61–344.
1313. Gillen L.M., Hawkes G.A., Hill T.G. Stress transfer in model composites // *J. Aust. Inst. Metals.*, 1969, **14**, No. 4. P. 242–246.
1314. Gladwell G.M.L. The contact problem for a rigid inclusion pressed between two dissimilar elastic half planed // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1981, **48**, No. 1. P. 104–108.
1315. Gladwell G.M.L. The stress intensity factor for a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedle // *Journal of Elasticity*, 1977, **7**, No. 3. P. 325–327.
1316. Goddard J.D. A slender-body theory for interfacial failure in unidirectional fiber-reinforced composite // *Polym. Eng. Sci.*, 1979, **19**, No. 2. P. 125–130.
1317. Gojal D.P. On two-dimensional crack problems of prescribed shape // *Indian J. of Pure and Appl. Math.*, 1973, **4**, No. 4. P. 428–496.

1318. Golberg M.A. A survey of numerical methods for integral equations // *Solut.Meth.Integral Equat.: Theory and Appl.* New York, London, 1979. P. 1–58.
1319. Golberg M.A. *Solution methods of Integral Equation: Theory and Applications.* New York-London: Academic Press, 1979. 350 p.
1320. Golberg M.A., Fromme J.A. On the L2 convergence of collocation for the generalized airfoil equation // *J. Math. Anal. and Appl.*, 1979, **71**, No. 1. P. 271–286.
1321. Goldwasser D.J., Otocka E.P., Kear B.H. The mechanical behavior of polysulfone matrix composites reinforced with amorphous metal ribbon // *Mater. Sci. and Eng.*, 1978, **34**, No. 2. P. 139–146.
1322. Gong S.X., Meguid S.A. A general treatment of the elastic field of an elliptical inhomogeneity under antiplane shear // *Trans. ASME Journal of Applied Mechanics*, 1992, **59**. P. 131–135.
1323. Gong S.X., Meguid S.A. On the elastic fields of an elliptical inhomogeneity under plane deformation // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 1993. **443**, No. 1919. P. 457–471.
1324. Gonte G. Procédés et moyens pour la remise en état des structures d'ouvrages d'art // *Rev. générale des routes et des aerodromes*, 1977, No. 533. P. 41–48.
1325. Goodier J.N. Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flows // *Trans. ASME*, 1933. **55**. P. 39–44.
1326. Gradin Per A. A fracture criterion for edge-bonded bimaterial bodies // *Journal of Composite Materials*, 1982. **16**, No. 6. P. 448–456.
1327. Gregory J.K. Development of a physically based model for microcrack propagation // *Scr. met.*, 1986, **20**, No. 11. P. 1515–1518.
1328. Greif R., Sanders J.L., Jr. The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1965. **E32**, No. 1. P. 59–66.
1329. Gründemann H. Basic relations in the theory of continua / *FMC – Ser. Inst. Mech. Akad. Wiss. DDR*, 1982. **VI**. No. 4. 42 s.
1330. Gupta G.D. An integral equation approach to the semi-infinite strip problem // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1973, **E40**, No. 4. P. 948–954.
1331. Halpin J.C., Thomas R.L. Ribbon reinforcement of composites // *Journal of Composite Materials*, 1968, **2**, No. 4. P. 488–497.
1332. Hao T.H., Wu Y.C. Elastic plane problem of collinear periodical rigid lines // *Engng. Fracture Mech.*, 1989. **33**. No. 4. P. 979–981.
1333. Hao Tian-hu, Cheng Ji-da, Yu Jia-sheng. The antiplane problem of double period non-uniform distribution crack field // *Appl. Math. and Mech.*, 1985, **6**, No. 2. P. 185–190.
1334. Hao Tian-hu. An antiplane problem of double period non-uniform crisscross distribution crack field // *International Journal of Fracture*, 1986, **30**, No. 3. P. 223–227.
1335. Hardiman N.I. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1954, **7**, No. 2. P. 25–43.
1336. Haritos G.K., Keer L.M. Stress analysis for an elastic half space containing an embedded rigid block // *International Journal of Solids and Structures*, 1980, **16**, No. 1. P. 19–40.
1337. Härkengård G., A finite element analysis of elastic-plastic plates containing cavities and inclusions with reference to fatigue crack initiation // *International Journal of Fracture*, 1973, **9**, No. 4. P. 437–447.
1338. Hasebe N., Keer L.M., Nemat-Nasser S. Stress analysis of a kinked crack initiation from a rigid line inclusion. Part I. Formulation // *Mechanics of Materials*, 1984, **3**, No. 2. P. 131–145.
1339. Hasebe N., Nemat-Nasser S., Keer L.M. Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion. Part II: Direction of propagation // *Mechanics of Materials*, 1984, **3**. P. 147–156.
1340. Hasebe N., Takeuchi T. Stress analysis of a semi-infinite plate with a thin rigid body // *International Journal of Engineering Science*, 1985, **23**, No. 5. 531–539.
1341. Hasegawa H., Kisaki M. The stress field caused by a circular cylindrical inclusion in a transversely isotropic elastic solid // *Trans. ASME. Journal of Appl. Mech.*, 2003, **70**, No. 6. P. 825–831.
1342. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber reinforced composites with imperfect interface // *Mechanics of Materials*, 1990, **8**. P. 333–348.
1343. Hayashi K. Singular behavior at the end of a ribbon-like, rigid inclusion embedded in an elastic-plastic material // *Mechanics of Materials*, 1982, **1**, No. 3. P. 203–208.
1344. Hayashi K. Singular stress field at the end of a ribbon-like inclusion in a hardening material under longitudinal shear // *International Journal of Fracture*, 1984, **24**. No. 4. P. R121–R125.
1345. Hayth Adman H., Abdel-Ati Nassar Elsayed. The influence of bonding agents on the thermomechanically induced interfacial stresses in laminated composites // *Fibre Sci. and Technol.*, 1982, **16**, No. 3. P. 157–174.
1346. Head A.K. The dislocation image force in cubic polycrystals // *Phys. status solidi.*, 1965, **10**, No. 2. P. 481–484.

1347. Heise U. Remarks on the choice and on the numerical treatment of integral equations for plane elastostatics // *Innovative Numer. Anal. Eng. Sci. Proc. 2nd Int. Symp. Montreal, 16–20 June 1980, Charlottesville*. 1980. P. 351–359.
1348. Hetényi M., Dundurs J. The elastic plane with a circular insert, loaded by a tangentially directed force // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1962, **E29**, No. 2. P. 362–368.
1349. Hill D.C., Passoja D.E. Understanding the role of inclusions and microstructure in ductile fracture // *Weld. J.*, 1974, **53**, No. 11. P. 481-s – 485-s.
1350. Hill R. Interfacial operators in the mechanics of composite media // *J. Mech. and Phys. Solids*, 1983, **31**, No. 4. P. 347–357.
1351. Hirth J.P., Lothe J. *Theory of dislocations*. Malabar, Florida: Kreiger Publishing Company, 1992. 857 p.
1352. Hirth J.P., Wagoner R.H. Elastic fields of line defects in a cracked body // *International Journal of Solids and Structures*, 1976, **12**, No. 2. P. 117–123.
1353. Hiwley G.C. HAR-mice – new muscle for plastics // *Plastics World*, 1976, **34**, No. 4. P. 36–39.
1354. Hoenig A. Elastic modulus of non-randomly cracked body // *International Journal of Solids and Structures*, 1979, **15**, No. 2. P. 137–154.
1355. Homencovschi D. Uniform asymptotic solution of two-dimensional problems of elasticity for the domain exterior to a thin region // *SIAM J. Appl. Math.*, 1984, **44**, No. 1. P. 1–10.
1356. Homencovschi D., Dascalu C. Uniform asymptotic solution for lamellar inhomogeneities in plane elasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, **48**, No. 1. P. 153–173. Erratum – *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**, No. 4. P. 879–880.
1357. Homulka T.A., Keer L.M. A mathematical solution of a special mixed-boundary value problem of anisotropic elasticity // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1995, **48**, No. 4. P. 636–658.
1358. Honein E., Honein T., Herrmann G. On two circular inclusions in harmonic problems // *Q. Appl. Math.*, 1992, **50**, No. 3. P. 479–499.
1359. Honein T., Herrmann G. On bonded inclusions with circular or straight boundaries in plane elastostatics // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1990, **57**. P. 850–856.
1360. Horii H., Nemat-Nasser S. Elastic fields of interacting inhomogeneities // *International Journal of Solids and Structures*, 1985, **21**, P. 731–745.
1361. Howell G.C., Doyle W.S. The plane stress/strain analysis of non-homogeneous continua by the boundary integral equation method // *Comput. and Struct.*, 1983, **17**, No. 4. P. 603–610.
1362. Hsieh M.C., Hwu Chyanbin Anisotropic elastic plates with holes/cracks/inclusions subjected to out-of-plane bending moments // *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **39**. P. 4905–4925.
1363. Hu S.M. Stress from a parallelepipedic thermal inclusion in a semispace // *J. Appl. Phys.*, 1989, **66**. P. 2741–2743.
1364. Huang Jin H. Analytical predictions for the magnetoelectric coupling in piezomagnetic materials reinforced by piezoelectric ellipsoidal inclusions // *Physical Review*, 1998, **B 58**, No. 1. P. 12–15.
1365. Huang Jin H., Chiu Ya-Hui, Liu Hsien-Kuang Magneto-electro-elastic Eshelby tensors for a piezoelectric-piezomagnetic composite reinforced by ellipsoidal inclusions // *Journal of Applied Physics*, 1998, **83**, No. 10. P. 5364–5370.
1366. Hughes B.P., Fattuhi N.I. Fibre bound strength in cement and concrete // *Mag. Concr. Res.*, 1975, **27**, No. 92. P. 161–166.
1367. Hunter R.W. Stress transfer mechanisms in a single fiber composite material // *J. Austral. Inst. Metals.*, 1973, **18**, No. 4. P. 173–181.
1368. Hurtado J.A., Dundurs J., Mura T. Lamellar inhomogeneities in a uniform stress field // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996, **44**. P. 1–21.
1369. Hussain M.A., Pu S.L. Slip phenomenon for a circular inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1971, **E38**. P. 627–633.
1370. Hussain M.A., Pu S.L., Sadowsky M.A. On the detachment of the ends of microfibrils from the matrix due to tension in the composite // *Journal of Composite Materials*, 1968, **2**, No. 4. P. 414–427.
1371. Hwu Chyanbin, Ting T.C.T. Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1989, **42**, No. 4. P. 553–572.
1372. Hwu Chyanbin, Yen Wen J. On anisotropic elastic inclusions in plane elastostatics // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1993, **60**. P. 626–632.
1373. Ioakimidis N.I., Theocaris P.S. Doubly-periodic array of cracks in an infinite isotropic medium // *Journal of Elasticity*, 1978, **8**, No. 2. P. 157–169.
1374. Ioakimidis N.I., Theocaris P.S. The second fundamental crack problem and the rigid line inclusion problem in plane elasticity // *Acta Mechanica*, 1979, **34**, No. 1–2. P. 51–61.



1375. Iremonger M.J., Wood W.G. Effects of geometry on stresses in discontinuous composite materials // *J. Strain Anal.*, 1969, **4**, No. 2. P. 121–126.
1376. Iremonger M.J., Wood W.G. Plastic flow and failure of discontinuous fibre composite materials // *J. Strain Anal.*, 1970, **5**, No. 3. P. 212–222.
1377. Iremonger M.J., Wood W.G. Stresses in a composite material with a single broken fibre // *J. Strain Anal.*, 1967, **2**, No. 3. P. 239–245.
1378. Irwin L.R., Washington D.C. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1957, **E24**, No. 3. P. 361–364.
1379. Isida M. Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip // *of Applied Mechanics*, 1966, **33**, No. 4. P. 674–675.
1380. Isida M., Tsuru H., Nogushi H. New method of analysis of three dimensional crack problems // *Mem. Fac. Eng. Kyushu Univ.*, 1983, **42**, No. 4. P. 317–334.
1381. Jain D.L., Kanwal R.P. Interior and exterior solution for boundary value problems in composite elastic media // *J. Math. Phys.*, 1982, **23**, No. 8. P. 1433–1443.
1382. James Richard D. A relation between the jump in temperature across a propagating phase boundary and the stability of solid phases // *Journal of Elasticity*, 1983, **13**, No. 4. P. 357–378.
1383. Jaswon M.A., Bhargava R.D. Two-dimensional elastic inclusion problem // *Proc. of Cambridge Philosophical Society*, 1961, **57**, No. 3. P. 669–680.
1384. Javornicky J. Photoelastic analysis of the behavior of curved fibers in composite / *Proc. 4th Int. Conf. "Progr. Sci. and Eng. Compos. (ICCM-IV)"* (Tokyo, Oct. 25–28, 1982). Vol.2. Tokyo, 1982. P. 1859–1866.
1385. Jedidi A., Hirashima K., Mura T. Analytical solutions for anisotropic bimetals under several boundary conditions on the interface // *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 1995, **65**, No. 2. P. 66–75.
1386. Jenkins D.R. Analysis of behavior near cylindrical glass inclusion by scattered-light photoelasticity // *Exper. Mech.*, 1968, **8**, No. 10. P. 467–473.
1387. Jentsch Lothar. Über einige neuere probleme der Elastizitätstheorie stückweise homogener Körper // *FMC-Ser. Inst. Mech. Acad. Wiss. DDR. Repr. Karl-Marx-Stadt. Semin. Fest.*, 1982. No. 2. P. 79–107.
1388. Jiang C.P. The plane problem of collinear rigid lines under arbitrary loads // *Engng. Fract. Mech.*, 1991, **39**, No. 2. P. 299–308.
1389. Jiang Chi-Ping. Longitudinal shear problems of collinear rigid line inclusions in anisotropic materials // *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 1994, **15**, No. 2. P. 155–162.
1390. Johnson W.C. Interaction of a dislocation with a misfitting precipitate // *J. Appl. Phys. A*, 1982, **53**, No. 12. P. 8620–8638.
1391. Johnson W.C., Earmme Y.Y., Lee J.K. Approximation of the strain field associated with an inhomogeneous precipitate. Part 2. Cuboidal inhomogeneity // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1980, **E47**, No. 4. P. 781–788.
1392. Johnson W.C., Earmme Y.Y., Lee J.K. Approximation of the strain field associated with an inhomogeneous precipitate. Part 1. Theory // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1980, **E47**, No. 4. P. 775–780.
1393. Jun S., Jasiuk I. Elastic moduli of two-dimensional composites with sliding inclusions—a comparison of effective medium theories // *International Journal of Solids and Structures*, 1993, **30**. P. 2501–2523.
1394. Kachanov L.M. On the brittle fracture of a thin plastic interlayer in creep conditions / *Mech. Mater. Behav. Daniel C. Drucker Anniv. Vol. Amsterdam e. a.*, 1984. P. 191–199.
1395. Kaczyński A. An approximate scheme for determining the stress concentration around a thin elastic interface inclusion in a bimaterial periodically layered space // *Acta Mechanica*, 2003, **160**. P. 149–159.
1396. Kaczyński A. Rigid sheet-like interface inclusion in an infinite bimaterial periodically layered composite // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1999, **37**, No. 1. P. 81–94.
1397. Kaczyński A., Matysiak S.J. Some two-dimensional interface crack and rigid inclusions problems in microperiodically layered elastic composites // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1997, **35**. P. 751–762.
1398. Kaczyński A., Monastyrskyy B. On the problem of some interface defect filled with a compressible fluid in a periodic stratified medium // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004, **42**. P. 41–57.
1399. Kanaun S.K., Baball Kochekseall S. A numerical method for the solution of thermo- and electro-static problems for a medium with isolated inclusions // *Journal of computational physics*, 2003, **192**, No. 2. P. 471–493.
1400. Kanwal R.P. Boundary value problems of composite media // *Comput. and Struct.*, 1983, **16**, No. 1–4. P. 471–478.

1401. Karihaloo B.L., Viswanathan K. Elastic field of a partially debonded elliptic inhomogeneity in an elastic matrix (plane-strain) // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1985, **E52**. P. 835–840.
1402. Kasano H., Watanabe T., Nakahara I. Singular stress field at the tips of a crack normal to bimaterial of isotropic half planes // *Bull. of JSME*, 1986, **29**, No. 258, December. P. 4043–4049.
1403. Kassir M.K., Sih G.C. Some three-dimensional inclusion problems in elasticity // *International Journal of Solids and Structures*, 1968, **4**. P. 225–241.
1404. Kato A. Application of the Tufftride process to prevention of fracture of cracked steels // *Bull. JSME*, 1985, **28**, No. 241. P. 1348–1353.
1405. Kattis M.A. Partially-bonded rigid inhomogeneities in antiplane deformation // *International Journal of Fracture*, 1994, **66**. No. 4. P. 373–385.
1406. Kattis M.A., Providas E. Inplane deformation of a circular inhomogeneity with imperfect interface // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, **28**, No. 3. P. 213–222.
1407. Kattis M.A., Providas E., Boutalis Y., Kalamkarov A. Antiplane deformation of partially bonded elliptical inclusion // *Theor. and Appl. Fract. Mech.*, 1997, **27**, No. 1. P. 43–51.
1408. Keer L.M. A note on the solutions for two asymmetric boundary-value problems // *International Journal of Solids and Structures*, 1965, **1**. P. 257–263.
1409. Keer L.M. Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut // *Journal of Elasticity*, 1975, **5**, No. 2. P. 89–98.
1410. Keer L.M. Stress analysis for bonded layers // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1974, **E41**, No. 3. P. 679–683.
1411. Keer L.M., Chantaramunykorn K. Stress analysis for a double lap joint // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1975, **E42**, No. 2. P. 353–357.
1412. Kelly A., Davies G.J. The principles of the fibre reinforcement of metals // *Metallurgical Reviews*, 1965, **10**, No. 37. P. 1–77.
1413. Kelly A., Tyson W.R. Fiber-strengthened materials / In: *High-Strengthened Materials*, Chap. 13 (V.F. Zackay, ed.) New York: Wiley, 1965. P. 578–602.
1414. Kelly P., Hills D.A., Nowell D. Curved interface cracks between elastically dissimilar media; with application to the analysis of circular inclusions // *Int. J. Mech. Sci.*, 1994, **36**. No. 3. P. 173–181.
1415. Khachatryan A.G. Theory of structural transformations in solids. John New York: Wiley & Sons, 1983. 574 p.
1416. Kinoshita N., Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media // *Phys. Status Solidi*, 1971, **5**, P. 759–768.
1417. Kirilyuk V.S. On an equally strength joint of isotropic matrix with orthotropic inclusion under triaxial load // *Int. Appl. Mech.*, 2000, **36**. No. 1. P. 95–102.
1418. Knowles J.K., Sternberg Eli. On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics // *Journal of Elasticity*, 1978, **8**, No. 4. P. 329–379.
1419. Ko Yoon Suk, Forsman William C., Dziemianowicz Theodore S. Carbon fiber-reinforced composites: effect of fiber surface in polymer properties // *Polym. Eng. and Sci.*, 1982, **22**, No. 13. P. 805–814.
1420. Koch F. Gemeinsame Forschungsarbeiten der IHK und des ZIS auf dem Gebiet der Festigkeit von Schweißverbindungen // *ZiS-Mitt.*, 1977, **19**, No. 1. S. 40–41.
1421. Kogan L., Hui C.-Y., Molkov V. Stress and induction field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material // *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**. No. 19. P. 2719–2737.
1422. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1955, **8**, No. 2. P. 164–178.
1423. Koizumi T., Takakuda K., Shibuya T., Nishizawa T. An infinite plate with a flaw and subjected to uniform heat flow // *J. Term. Stresses*, 1979, **2**, No. 3–4. P. 341–351.
1424. Konishi Y., Atsumi A. Crack problem of transversely isotropic strip // *International Journal of Engineering Science*, 1973, **11**, No. 1. P. 9–20.
1425. Kondo T. The interaction between two or periodic parallel cracks in an anisotropic medium under longitudinal shear // *Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll.*, 1986, **22**, No. 4. P. 179–187.
1426. Kondo T., Kobayashi M., Sekine H. The flat inclusion problem in bonded dissimilar anisotropic elastic media under longitudinal shear loading // *Acta Mechanica*, 1997, **121**, No. 1–4. P. 131–142.
1427. Kondo T., Kobayashi M., Takagi T. Stress distribution in elastic media containing an arc-shaped rigid inclusion around a circular inclusion under biaxial loading // *Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll.*, 1986, **22**, No. 2. P. 59–71 (яп. мовою).

1428. Kondo T., Kobayashi M., Takagi T. Stress field around a rigid flat inclusion at the interface between two bonded dissimilar media subjected to biaxial loading // Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll., 1985, **21**, No. 2. P. 63–75 (яп. мовою).
1429. Kondo T., Sekine H., Tamate O. Interaction between a thin elastic stiffener and a crack in an anisotropic half-space under longitudinal shear // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 1985, **A51**, No. 465. P. 1367–1374. (яп. мовою).
1430. Kondo T., Sekine H., Tamate O. Longitudinal shear of anisotropic elastic half-space with an elastic flat inclusion // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 1984, **A50**, No. 457. P. 1600–1607. (яп. мовою).
1431. Kondo T., Sekine H., Tamate O.. Longitudinal shear of anisotropic elastic half-space with an elastic flat inclusion // Bull. JSME, 1985, **28**, No. 239. P. 761–768.
1432. Konieczny S., Michalak B. Ciała z cienką warstwą na powierzchni brzegowej // Zesz. Nauk. PŁódz, 1981, No. 370. S. 31–44.
1433. Kossecka E. Surface distributions of double forces // Arch. Mech. Stosowanej, 1971, **23**, No. 3. P. 313–328.
1434. Kouris D. Stress concentration due to the interaction between two imperfectly bonded fibers in a continuous fiber composite // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics, 1993, **E60**. P. 203–206.
1435. Krenk S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kinds // Quart. Appl. Math., 1975, **33**, No. 3. P. 225–232.
1436. Krenk S. On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations // Quart. Appl. Math., 1975, **32**, No. 1. P. 479–484.
1437. Krenk S. The problem of an inclined cracking an elastic strip. Rapp. Afd. baerende konstr. Denm. tekn. hojsk., 1974, No. 50. II. 42 p.
1438. Krstic V.D., Vlajic M.D. Conditions for spontaneous cracking of a brittle matrix due to the presence of thermoelastic stresses // Acta Met., 1983, **31**, No. 1. P. 139–144.
1439. Kuang Zhen-bang. Stress analysis for curved polygonal defects containing cusps only // Acta mechanica Sinica, 1979, No. 2. P. 118–129 (кит. мовою).
1440. Kucharchuk Yu., Sulym G. Stress intensity factors in plane bodies weakened by crack-type defects // J. Theor. and Appl. Mech., 1998, **36**, No. 4. P. 895–903.
1441. Kuharchuk Y.A., Sulym G.T. Finding of stress intensity factors in flat bodies with thin crack-similar defects // The second polish-ukranian conference "Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media" (Warsaw, Sept, 11–13, 1997). Abstracts. Warsaw, 1997. P. 33–35.
1442. aNo. –.
1443. No. –.
1444. No. –.
1445. Kunin I.A. Elastic media with microstructure. II–Three-Dimensional Models. Springer Series in Solid-State Sciences (Vol. 44). Springer-Verlag, New York, 1983. 290 p.
1446. Kunin I.A. Elastic media with microstructure. I–One-dimensional models. Springer Series in Solid-State Sciences (Vol. 26). Springer-Verlag, New York, 1982. 299 p.
1447. Kunin I.A., Gommerstadt B. On elastic crack-inclusion interaction // International Journal of Solids and Structures, 1985, **21**. P. 757–766.
1448. Kurihara T. The behaviour of an edge dislocation in non-homogeneous anisotropic body with crack // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 1972, **52**, No. 12. P. 573–582.
1449. Kushnir R.M. Thermoelasticity of Piecewise-Homogeneous Structures: Method of Investigation Utilizing the Distribution Technique // Thermal Stresses'97: Proc. Second Intern. Symp. on Thermal Stresses and Related Topics (Rochester, USA, June 8–11, 1997).–Rochester, New-York: Rochester Inst. of Technology, 1997. P. 557–560.
1450. Kutta W. Ueber eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Stromung // Sitzungsber. K.Bayer. Akad. Wiss., math.-phys. Kl., 1910. H. 2. S. 1–58.
1451. Lal M. Rigid inclusion in Griffith cracks in a granular solids // International Journal of Engineering Science, 1984, **22**, No. 2. P. 175–185.
1452. Lanchester F.W. Aerodynamics. London, 1907.
1453. Larsson S.G., Härkegard G. On a finite element analysis of crack and inclusion problems in elastic-plastic materials // Comput. and Struct., 1974, **4**, No. 2. P. 239–305.
1454. Laws N. The determination of stress and strain concentrations at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material // Journal of Elasticity, 1977, **7**, No. 1. P. 91–97.
1455. Lee S., Hsu C.C. Thermoelastic stress due to surface parallelepiped inclusions // Journal of Applied Mechanics, 1985, **52**. P. 225–228.
1456. Lee Sanboh, Burns S.J., Li J.C. Image forces and potential energy of a dislocation around a crack tip // Mater. Sci. and Eng., 1986, **83**, No. 1. P. 65–73.

1457. Leissa Arthur W., Clausen William E., Agrawal G.K. Stress and deformation analysis of fibrous composite materials by point matching // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1971, **3**, No. 1. P. 89–101.
1458. Leite L.G.S., Venturini W.S. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft inclusions // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, **29**, No. 3. P. 257–267.
1459. Leo P.H., Iwan J., Alexander D., Sekerka R.F. Elastic fields about a perturbed spherical inclusion // *Acta Metall.*, 1985, **33**. P. 985–989.
1460. Levin V.M., Markov M.G. Elastic properties of inhomogeneous transversely isotropic rocks // *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**, 2. P. 393–408.
1461. Li J.C.M. Computer simulation of dislocations emitted from a crack // *Scr. met.*, 1986, **20**, No. 11. P. 1477–1482.
1462. Li Qianqian Line inclusion in anisotropic elastic solids Ph. D. Thesis. University of Illinois at Chicago, 1988.
1463. Li Qianqian, Ting T.C.T. Line inclusion in anisotropic elastic solids // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1989, **56**, No. 3. P. 556–563.
1464. Li Y., Cui L.S., Xu H.B., Yang D.Z. Constrained phase transformation of a TiNi shape-memory alloy // *Metal. Mat. Trans.*, 2003, **A34**. P. 219–223.
1465. Li Zhonghua, Chen Qiang. Crack-inclusion interaction for mode I crack analyzed by Eshelby equivalent inclusion method // *International Journal of Fracture*, 2002, **118**, No. 1. P. 29–40.
1466. Liang J., Hah J.C., Du S.Y. Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids // *Mech. Res. Commu.*, 1995, **22**, No. 1. P. 43–49.
1467. Lin I.-H., Hirth J.P. Changes in stress intensity with dislocation emission from a crack // *Phil. Mag. Ser. A*, 1984, **50**, No. 6. P. L43–L46.
1468. Lin S.C., Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media (II) // *Phisica Status Solidi. A*, 1973, **15**, No 1. P. 281–285.
1469. Linz P. An analysis of a method for solving singular integral equations // *BIT (sver.)*, 1977, **17**, No. 3. P. 329–337.
1470. List R.D., Silberstein J.P.O. Two-dimensional elastic inclusion problems // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1966, **62**, No. 2. P. 303–311.
1471. Liu X.H., Erdogan F. The crack-inclusion interaction problem // *Eng. Fracture Mech.*, 1986, **23**. P. 821–832.
1472. Liu Xuehui. The crack flat-inclusion interaction problem // *Acta Mech. Solida Sin.*, 1987, No. 3. P. 216–224 (кит. мовою).
1473. Liu Y.J., Nishimura N., Otani Y., Takahashi T., Chen X.L., Munakata H. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 2005, **72**. P. 115–128.
1474. Liu Y.W. Problem on circular-arc crack between dissimilar materials under antiplane concerted forces // *Acta Mechanica Sinica*, 1990, **4**. P. 417–432.
1475. Liu Yijun, Fan Hui. Boundary integral equation formulations for piezoelectric solids containing thin shapes // *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2001, Vol. BETEQ. No. 1. P. 12–19.
1476. Louat N.P. The interaction of cracks and dislocations. I. Screw dislocations // *Proc. 1st Int. Conf. on Fracture. Japan Soc. for the Strength and Fracture of Materials. Sendai*, 1965. P. 117–132.
1477. Low R.D. On the torsion of elastic half spaces with embedded penny-shaped flaws // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1972, **E39**, No. 3. P. 151–155.
1478. Lumb R.F. Defect sizing. The state of the art // *Tolerance Flaws Pressuriz. Components. Conf., London*, 1978. London, 1978. P. 65–76.
1479. Luo Quantian, Tong Liyong. Exact static solutions to piezoelectric smart beams including peel stresses. I: Theoretical formulation // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 4677–4695.
1480. Luo Quantian, Tong Liyong. Exact static solutions to piezoelectric smart beams including peel stresses. II: Numerical results, comparison and discussion // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 4697–4722.
1481. Lyon O., Guillon I., Servant C., Simon J.P. Displacements induced by different nanoprecipitates: a SAXS and WAXS anomalous study on Cu-Ni-Fe and Cu-Ni-Co single crystals // *J. Appl. Cryst.*, 2005, **38**, No. 3. P. 476–487.
1482. Ma Chien-Ching, Lin Ru-Li. Image singularities of Green's functions for isotropic elastic bimetals subjected to concentrated forces and dislocations // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 5253–5277.
1483. Mackerle Jaroslav. Rubber and rubber-like materials, finite-element analyses and simulations: a bibliography (1976–1997) // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 1998, **6**. P. 171–198.

1484. MacLaughlin T.F. Effect of fiber geometry on stress in fiber-reinforced composite materials // *Exper. Mech.*, 1966, **6**, No. 10. P. 481–492.
1485. MacLaughlin T.F., Barker R.M. Effect of modulus ration on stress near a discontinuous fiber // *SESA Paper No. 1826A, Soc. Exp. Stress Anal.*, Westport, Connecticut, 1971.
1486. Maiti M. On the equilibrium of a Griffith crack opened by a rigid inclusion // *SIAM J. Appl. Math.*, 1980, **38**, No. 2. P. 209–214.
1487. Maiti M. On the extension of a crack due to rigid inclusion // *International Journal of Fracture*, 1979, **15**, no 4. P. 389–393.
1488. Maiti M., Maken G.R. Somigliana's method applied to elastic inclusions and dislocations // *Journal of Elasticity*, 1973, **3**, No. 1. P. 45–50.
1489. Maiti M., Paramguru R. Stress distribution due to a crack opened by a semi-infinite wedle // *International Journal of Fracture*, 1982, **18**, No. 1. P. 39–44.
1490. Maiti M., Paramguru R. Stress distribution due to an external crack opened by two rigid inclusions // *Engineering Fracture Mechanics*, 1980, **13**, No. 4. P. 767–773.
1491. Maksimenko V.N., Nedogibchenko G.C. Stress-strain state of a composite anisotropic plate with curvilinear cracks and thin rigid inclusions // *of Applied Mechanics, Tech. Phys.*, 2001, **42**, No. 5. P. 912–917.
1492. Markenscoff X., Dundurs J. Weight functions for rigid line inclusions // *Proc. 7<sup>th</sup> Int. Conf. Fract. "Adv. Fract. Res."* (ICF7) (Houston, Tex., 20–24 March, 1989). Vol. 1. Oxford, 1989. P. 37–39.
1493. Markenscoff X., Ni L. The debonded interface anticrack // *Trans. ASME. Ser. E. J. Apl. Mech.*, 1996, **63**. No. 3. P. 621–627.
1494. Marom G., Arridge R.G.C. Stress concentrations and transverse modes of failure in composites with a soft fibre-matrix interlayer // *Mater. Sci. and Eng.*, 1976, **23**, No. 1. P. 23–32.
1495. Massonet C.E. Numerical use of integral procedures / *Stress analysis. Recent developments in numerical and experimental methods* / Ed. Zienkiewicz O.C., Holister G.S. New York: Wiley, 1965. P. 198–235.
1496. Masubuchi K. Analytical investigation of residual stresses and distortions due to welding // *Welding Journal*, 1960, **39**, No. 12. P. 525-s–537-s.
1497. Masumura R.A., Chou Y.T. Antiplane eigenstrain problem of an elliptic inclusion in an anisotropic half space // *Journal of Applied Mechanics*, 1982, **49**. P. 52–54.
1498. Matthewson M.J. The effect of a thin compliant protective coating on Hertzian contact stresses // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1982, **15**, No. 2. P. 237–249.
1499. Matysiak S., Paszt A. On interaction between a crack and rigid inclusions in an elastic space // *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.*, 1986, **34**, No. 9–10. P. 495–503.
1500. Matysiak S., Olesiak Z. O pewnych wlasnoscjach naprezen w kompozytach lamelkowych // *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1981, **19**, No. 3. P. 397–408.
1501. Maul Johannes. Über eine Randwertaufgabe der elasticitätstheorie in einem inhomogene Medium // *Тр. Тбилис. мат. ин-та АН ГрузССР*, 1976, **52**. С. 111–126 (див. теж Сб. работ по уравнениям математической физики, кн. 6).
1502. McGarry F.J., Fujiwara M. Resin-fiber load transfer in reinforced plastics // *Modern Plastics*, 1968, **45**, No. 7. P. 143–164.
1503. Meco J.J. Torsional oscillation of half-space // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1964, **15**. S. 456–465.
1504. Meguid S.A., Hu G.D. A new finite element for treating plane thermomechanical heterogeneous solids // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **44**, No. 4. P. 567 – 585.
1505. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // *Ingenieur Archiv*, 1932, **3**, No. 2. P. 123–129.
1506. Mesmacque G. Définition d'un paramètre inclusionnaire à partir des théories de la rupture ductile corrélation avec l'énergie de résilience // *Mém. sci. Rév. mét.*, 1979, **76**, No. 7. P. 445–454.
1507. Michlin S.G., Prosdorf S. *Singulare Integraloperatoren*. Berlin: Acad., 1980. 514 p.
1508. Minakuchi Y. Контактні напруження у двох пружних смугах та твердою металевою прокладкою, складених сандвічем // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1982, **A48**, No. 429. P. 652–658 (яп. мовою).
1509. Minakuchi Y., Koizumi T., Shibuya T., Takakuda K. Contact stresses in two elastic slabs and a sandwiched solid-metal flat gasket // *Bull. JSME*, 1982, **25**, No. 207. P. 1359–1365.
1510. Mirza S. Finite-element analysis of rectangular plates with rectangular inserts // *Exp. Mech.*, 1976, **16**, No. 10. P. 392–396.
1511. Mirza S., Ansari K. On stress concentration in rectangular plates having rectangular inserts // *Experimental Mechanics*, 1974, **14**, No. 10. P. 412–416.

1512. Mishuris G.S. Stress singularity near a crack tip terminating at a nonideal interface / *Damage and Failure of Interfaces* / Ed. Rossmannish / Rotterdam: Balkema, 1997. P. 59–66.
1513. Mizuta Y., Lee H.K. A study on applicability of three dimensional elastic analysis by displacement discontinuity method // *Trans. Mining and Met. Assoc.*, 1984, **20**, No. 2. P. 146–154 (яп. мовою).
1514. Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pęknięcia w złożonych stanach obciążeń / Pod red. A. Seweryna. Białystok: W-wo Politechniki Białostockiej, 2004. 280 s.
1515. Mogilewskaja S.G., Crouch S.L. A Galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions with homogeneously imperfect interfaces // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 4723–4746.
1516. Möhring W. Scattering of elastic surface waves by a semi-infinite fluid-filled crack // *Wave Motion*, 1985, **7**, No. 3. P. 263–270.
1517. Monch W., Herminghaus S. Elastic instability of rubber films between solid bodies // *Europhys. Lett.*, 2001, **53**. P. 525–531.
1518. Mori T., Cheng P.C., Kato M., Mura T. Elastic strain energies of precipitates and periodically distributed inclusions in anisotropic media // *Acta met.*, 1978, **26**, No. 9. P. 1435–1441.
1519. Mori T., Koda T., Monzen R., Mura T. Particle blocking in grain boundary sliding and associated internal friction // *Acta Metall.*, 1983, **31**. P. 275–283.
1520. Mori T., Mura T. An inclusion model for crack arrest in fiber reinforced materials // *Mech. Mat.*, 1984, **3**. P. 193–198.
1521. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.*, 1973, **21**. P. 571–574.
1522. Morland L.W. Continuum model of regularly jointed medium // *J. Geophys. Res.*, 1974, **79**. P. 357–362.
1523. Morland L.W. Elastic response of regularly jointed media // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1974, **37**, No. 3. P. 435–446.
1524. Moschovidis Z.A., Mura T. Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1975, **E42**, No. 4. P. 847–852.
1525. Movchan A.B., Movchan N.V. Mathematical modelling of solids with nonregular boundaries. Ser. Mathematical Modeling. VI. 3. CRS Press, 2000 N.W. Corporate Blvd., Boca Raton, 1995. 352 p.
1526. Mura T. Inclusion problem // *Appl. Mech. Rev.*, 1988, **41**. ASME. New York. P. 15–20.
1527. Mura T. Micromechanics of defects in solids. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1982. 494 p.
1528. Mura T. Micromechanics of defects in solids (2<sup>nd</sup> ed.). Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1987. XIV, 587 p.
1529. Mura T., Cheng P.C. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1977, **E44**, No. 4. P. 591–594.
1530. Mura T., Furuhashi R. The elastic inclusion with a sliding interface // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1984, **E51**. P. 308–310.
1531. Mura T., Furuhashi R., Kinoshita N. Some remarks on the equivalent inclusion method / 15-th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech. Abstrs. Toronto, 1980. Vol. 1. P. 40.
1532. Mura T., Lin S.C. Thin inclusion and crack in anisotropic media // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1974, **E41**, N 1. P. 209–214.
1533. Mura T., Shodja H.M., Hirose Y. Inclusion problems // *Appl. Mech. Rev.* 1996, **49**. No. 10/2. P. 118–127.
1534. Narayanan T.V., Erdogan F. Penny-shaped crack in a fiber-reinforced matrix // *International Journal of Solids and Structures*, 1975, **11**, No. 12. P. 1315–1327.
1535. Nemat-Nasser Sia. Multi-inclusion method for finite deformations: exact results and applications // *Materials Science & Engineering*, 2000, **A285**. P. 239–245.
1536. Noda Nao-Aki, Moriyama Yasuhiro. Elastic stress concentration of an ellipsoidal inclusion of revolution in the vicinity of a bimaterial interface // *Journal of Engineering Materials and Technology*, 2004, **126**, No. 3. P. 292–302.
1537. Norbury J. Wheeler A.A. On the penetration of an elastic-plastic material by a slender body // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1987, **40**, No. 4. P. 477–491.
1538. Nowacki W., Olesiak Z.S. Termodyfuzja w ciałach stałych. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1991. 272 s.
1539. Okuno K., Woodhams R.T. Mice reinforced polypropylen // *Polymer Eng. Sci.*, 1975, **15**, No. 4. P. 308–315.
1540. Olesiak Z.S., Yevtushenko A.A. Effect of material nonhomogeneity on stress distribution in the vicinity of a thin elastic inclusion // *Int. Eng. Sci.*, 1989, **27**, No. 2. P. 149–159.

1541. Osiv O., Sulym G. Antiplane deformation of isotropic medium with connected elastic ribbon-like inclusions // Abstracts of the Fourth Polish-Ukrainian Conference "Current Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Media" (Łódź, 4–8 Sept., 2001). Łódź: Technol. Univ. of Łódź, 2001. P. 46.
1542. Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G. Elastic fields of inclusions in nanocomposite solid // *Rev. Adv. Mater. Sci.*, 2005, **9**. P. 17–33.
1543. Owen D.R.J., Holbeche J., Zienkiewicz O.C. Elastic-plastic analysis of fibereinforced materials // *Fibre Sci. and Technol.*, 1969, **1**, No. 3. P. 185–207.
1544. Owen M.J., Dukes R. Failure of glass reinforced plastics under single and repeated loading // *J. Stress. Anal.*, 1967, **2**, N 4. P. 272–279.
1545. Ozawa Y., Sekine H. Criteria for crack initiation into a matrix from the ends of partially debonded surfaces of a flat inclusion // *J. Jap. Soc. Compos. Mater.*, 1984, **10**, No. 4. P. 157–162 (яп. мовою).
1546. Pak Y.E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity // *International Journal of Solids and Structures*, 1992. **29**. P. 2403–2419.
1547. Panasyuk Volodymyr, Sylovanyuk Viktor, Marukha Valerii. Static and cyclic strength of a cracked body which strengthened by injection technologies // *Acta mechanica et automatica*, 2007. **1**. No. 1. P. 85–88.
1548. Parihar K.S., Sowdamini S. Stress distribution in the neighbourhood of Griffith and external cracks under general surface loading // *Engineering Fracture Mechanics*, 1982, **16**, No. 4. P. 539–555.
1549. Parks V.J., Durelli A.J., Chandrashekara K., Chen T.L. Stress distribution around a circular bar, with flat and spherical ends, embedded in a matrix in a triaxial stress field // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1970, **37**, No. 3. P. 578–586.
1550. Patton E.M., Santare M.H. The effect of a rigid elliptical inclusion on a straight crack // *International Journal of Fracture*, 1990, **46**. No. 1. P. 71–79.
1551. Perry A.J. Review cavitation in creep // *J. of Materials Science*, 1974, **6**, No. 6. P. 1016–1039.
1552. Philips Rob. Crystals, defects and microstructures. Modelling across scales. Cambridge University Press, 2001. XXVI+780 p.
1553. Pih H., Bi Q., Chen Y.Y., Ye P. Stress wave propagation in composite models with different fiber end geometries / *Proc. 5 Int. Congr. Exp. Mech. (Montreal, June 10–15, 1984)*. Brookfield Center, Conn., 1984. P. 287–296.
1554. Pih H., Sutliff D.R. Effect of fiber end, fiber orientation and spacing in composite materials / *Proc of the 5<sup>th</sup> Southeastern Conf. on TAM "Development in Theoretical and Appl. Mech."*. Vol. 5. 1971. P. 883–913.
1555. Piva A., Viola E. Biaxial load effects on a crack between dissimilar media // *Engineering Fracture Mechanics*, 1980, **13**, No. 1, P. 143–174.
1556. Pollock J.T., Arthur J. Tensile strength of ribbon reinforced composites // *Mater. Sci. and Eng.*, 1975, **2**, No. 18. P. 209–212.
1557. Prandtl L. Tragflugeltheorie // *Nachr. K. Ges. Wiss. Gottingen. math.-phys. Kl.* 1918. H. 3. S. 451–477.
1558. Prandtl L. Tragflugeltheorie // *Nachr. K. Ges. Wiss. Gottingen. math.-phys. Kl.* 1919. H. 1. S. 107–137.
1559. Prasad P.B.N., Hasebe N., Wang X.F., Shirai Y. Green's functions for a bi-material problem with interfacial elliptical rigid inclusion and applications to crack and thin rigid line problems // *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**, P. 1513–1535.
1560. Przystupa M.A., Courtney T.H. Fracture in equiaxed two phase alloys. Part I. Fracture in alloys with isolated elastic particles // *Met. Trans.*, 1982, **A13**, No. 1. P. 873–879.
1561. Qin Qing-Hua. Thermoelastic solution for elliptic inclusions and application to crack-inclusion problems // *Applied Mathematical Modelling*, 2000, **25**. P. 1–23.
1562. Radaj Dieter, Kandel Walter. Kernspannungen am Last tragenden elastischen Kern // *Forsch. Ingenieurw.*, 1973, **39**, No. 1. S. 1–12.
1563. Radaj Dieter. Bruchmechanische Bewertung von Rissen und andeferen Fehlern in Schweißkonstruktionen im Hinblick auf den Sprödbruch // *Schwiss. und Schneid.*, 1975, **27**, No. 5. P. 168–173.
1564. Rayne D., Gavart A. La morphologie des inclusions des aciers non refondus en relation avec la tolerance au dommage de ses aciers // *Mater. et Techn.*, 1983, **71**, No. 11–12, num.spec. P. 331–338. Discuss., P. 346–349.
1565. Reissner E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet // *Proc. of the National Academy of Sciences*, 1940, **26**. 300–305 p.
1566. Reissner E., Sagoci H.F. Forced torcional oscillation of an elastic half-space. I // *J. Apl., Phys.*, 1944, **15**. P. 652–654.
1567. Remedios N.C., Wood W.G. Stress diffusion from an end loaded reinforcing bar to a plane matrix // *Proc. Inst. Civil Engrs.*, 1969, **42**. P. 397–411.

1568. Remedios N.C., Wood W.G. Stress transfer from a loaded matrix to a single fibre // *Journal of Composite Materials*, 1968, **2**, No. 4. P. 517–520.
1569. Rexer J., Anderson E. Composites with planar reinforcements (flakes, ribbons). A review // *Polym. Eng. and Sci.*, 1979, **19**, No. 1. P. 1–11.
1570. Rice J.R. The line-spring model for surface flaws / *The Surface Crack: Physical Problems and computational solutions* / Ed. J.L. Swedlow. ASME, 1972. P. 171–185.
1571. Rice J.R., Levy N. The part-tough surface crack in an elastic plate // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1972. **E39**, No. 1. P. 185–194.
1572. Rice J.R., Thomson S.R. Ductile versus behaviour of crystals // *Phil. Mag.*, 1974, **29**, No. 1. P. 73–97.
1573. Rivlin T.J. An introduction to the approximation of functions. Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass., 1969. 150 p.
1574. Rizzo F.J., Shippy D.J. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem // *International Journal of Solids and Structures*, 1968, **4**, No. 12. P. 1161–1179.
1575. Robinson N.I. An isotropic elastic medium containing a cylindrical borehole with a rigid plug // *International Journal of Solids and Structures*, 2002. **39**. P. 4889–4904.
1576. Rokhlin S., Hefets M., Rosen M. An elastic interface wave guided by a thin film between two solids // *J. Appl. Phys.*, 1980, **51**, No. 7. P. 3579–3582.
1577. Rosakis A.J., Ravi-Chandar K. On crack-tip stress state: an experimental evaluation of three-dimensional effects // *International Journal of Solids and Structures*, 1986, **22**, No. 2. P. 121–134.
1578. Rose L.R.F. An application of the inclusion analogy for bonded reinforcements // *International Journal of Solids and Structures*, 1981, **17**, No. 8. P. 827–838.
1579. Ru C.Q. A circular inclusion with circumferentially inhomogeneous sliding interface in plane elastostatics // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1998, **65**. P. 30–38.
1580. Ru C.Q. A new method for an inhomogeneity with stepwise graded interphase under thermomechanical loading // *Journal of Elasticity*, 1999, **56**. No. 2. P. 107–127.
1581. Ru C.Q. Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1999, **66**. P. 315–322.
1582. Ru C.Q. Effect of interphase layers on thermal stresses within an elliptical inclusion // *J. Appl. Phys.*, 1998, **84**. P. 4872–4879.
1583. Ru C.Q. Eshelby inclusion of arbitrary shape in an anisotropic plane or half-plane // *Acta Mechanica*, 2003, **160**. No. 3–4. P. 219–234.
1584. Ru C.Q. Eshelby's problem for two-dimensional piezoelectric inclusions of arbitrary shape // *Proc. R. Soc. London*, 2000, **A456**. P. 1051–1068.
1585. Ru C.Q., Schiavone P. A circular inclusion with circumferentially inhomogeneous interface in anti-plane shear // *Proceedings of Royal Soc. London: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1997, **A453**. No. 1967. P. 2551–2572.
1586. Ru C.Q., Schiavone P. On the elliptic inclusion in anti plane shear // *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1996, **1**, No. 3. P. 327–333.
1587. Rui He, Fei Gao. Characteristics of the elastic field of a rigid line inhomogeneity in two-phase isotropic medium // *International Journal of Fracture*, 1991, **47**. No. 2. P. R23–R28.
1588. Sagoci H.F. Forced torsional oscillation of an elastic half-space. II // *J. Appl. Phys.*, 1944, **15**. P. 655–662.
1589. Sahasakmontri K., Horii H., Hasegawa A., Nishino F. Mechanical properties of solids containing a doubly periodic rectangular array of cracks // *Proc. Japan Soc. of Civil Eng.*, 1987, No. 380. P. 151–161.
1590. Santare M.H., Keer L.M. Interaction between an edge dislocation and a rigid elliptical inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1986, **E53**. No. 2. P. 382–385.
1591. Schäfer H. A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond element // *Comput. Math. Appl. Mech. and Eng.*, 1975, **6**, No. 3. P. 335–353.
1592. Szalągowski F. A semi-plane disc clamped at the edge and acted upon a concentrated force // *Bull. Acad. polon. Sci. Sér. Sci. techn.*, 1966, **14**. No. 3. P. 241–244.
1593. Szalągowski F. Action of the concentrated force on an infinite disc through a rigid slit // *Bull. Acad. polon. Sci. Sér. Sci. techn.*, 1965, **13**. No. 6. P. 499–503.
1594. Szalągowski F. Rigid inclusion of two semiplane adjacent discs // *Bull. Acad. polon. Sci. Sér. Sci. techn.*, 1966, **14**. No. 3. P. 235–239.
1595. Schmid Daniel W., Podladchikov Yuri Yu. Analytical solutions for deformable elliptical inclusions in general shear // *Geophysical Journal International*, 2003, **155**, No. 1. P. 269–288.



1596. Schneider G.J., Conway H.D. Effect on fiber geometry and partial debonding on fiber-matrix bond stresses // *J. Composite Materials*, 1969, **3**. P. 116–135.
1597. Schuster D.M., Scala E. The mechanical interaction of sapphire whiskers with a birefringent matrix // *Trans. Metall. Soc. AIME*, 1964, **230**. P. 1635–1640.
1598. Scott D.W., Anderson D.L. The displacement discontinuity method in three dimensions / *Proc. of 3<sup>rd</sup> Int. Semin. "Boundary Elem. Meth."* (Irvine, Calif., July, 1981). Berlin e.a., 1981. P. 153–173.
1599. Sekine H. Discussion of the length limit of an artificial geothermat crack in a hot dry rock on the basis of the two-dimensional theory of thermoelasticity // *Trans. Jap. Soc. Mech. En.*, 1986, **A52**, No. 478. P. 1518–1523 (яп. мовою).
1600. Sekine H. Mechanics of debonding along the surfaces of dispersed flat inclusions in composite materials (A model of debonding along the surface of a flat inclusion) // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1982, **48A**, No. 11 (435). P. 1415–1420.
1601. Sekine H. Thermal stress problem for a ribbon-like inclusion // *Lett. Appl. and Eng. Sci.*, 1977, **5**, No. 1. P. 51–61.
1602. Sekine H. Thermal stresses around a ribbon-like inclusion in a semi-infinite medium under uniform heat flow // *Journal of Elasticity*, 1978, **8**. No. 1. P. 81–95.
1603. Sekine H. Thermoelastic interference between two neighboring ribbon-like inclusions // *Technol. Repts Tohoku Univ.*, 1976, **41**, No. 2. P. 171–184.
1604. Sekine H. Термопружна взаємодія між двома стрічковими включеннями // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1977, **A43**, No. 377. P. 3709–3715 (яп. мовою).
1605. Sekine H., Mura T. Thermal stresses around an elastic ribbonlike inclusion with good thermal conductivity // *Journal of Thermal Stresses*, 1979, **2**. No. 2–4. July–Oct. P. 475–489.
1606. Selvadurai A.P.S. An inclusion at a bi-material elastic interface // *Journal of Engineering Mathematics*, 2000, **37**, No. 1–3. P. 155–170.
1607. Selvadurai A.P.S. Bounds for the elastic stiffness of a rigid penny-shaped inclusion embedded at a bi-material interface // *Research Mechanics*, 1985, **14**. P. 155–163.
1608. Selvadurai A.P.S. Elastic analysis of soil-foundation interaction. Amsterdam e.a., Elsevier, 1979. 543 p.
1609. Selvadurai A.P.S. Elastostatic bounds for the stiffness of an elliptical disc inclusion embedded at a transversely isotropic bi-material interface // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1984, **35**. No. 1. P. 13–23.
1610. Selvadurai A.P.S. Mechanics of a rigid circular disc bonded to a cracked elastic half-space // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 6035–6053.
1611. Selvadurai A.P.S. On the interaction between an elastically embedded rigid inhomogeneity and a laterally placed concentrated force // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1982, **33**. No. 2. P. 241–250.
1612. Selvadurai A.P.S. Rotational stiffness of a rigid elliptical disc inclusion embedded at bi-material elastic interface // *Solid Mech. Arch.*, 1985, **10**. P. 3–16.
1613. –.
1614. Selvadurai A.P.S. The load-deflexion characteristics of a deep rigid anchor in an elastic medium // *Géomechanique*, 1976, **26**. No. 4. P. 603–612.
1615. Selvadurai A.P.S., Au M.C. Generalized displacements of a rigid elliptical anchor embedded at a bi-material geological interface // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1986, **10**, No.6. P. 633–652.
1616. Selvadurai A.P.S., Au M.C. Mechanics of non-linear interfaces / *Proc. Annu. Conf. (Calgary, May 25–27, 1988)*. Vol. 3. Montreal, 1988. P. 320–334.
1617. Selvadurai A.P.S., Singh B.M. The axial displacement of a disc inclusion embedded in a penny-shaped crack // *J. Appl. Math. Phys.*, 1986, **37**. P. 64–77.
1618. Selvadurai A.P.S., Singh B.M. On the expansion of a penny-shaped crack by a rigid circular disc inclusion // *Int. J. Fracture*, 1984, **25**. P. 69–77.
1619. Sendeckyj G.P. Debonding of rigid curvilinear inclusions in longitudinal shear deformation // *Engineering Fracture Mechanics*, 1974, **6**, No. 1. P. 33–45.
1620. Sendeckyj G.P. Elastic inclusion problems in plane elastostatics // *International Journal of Solids and Structures*, 1970, **6**, No. 12. P. 1535–1543.
1621. Sendeckyj G.P. Interaction of cracks with rigid inclusions in longitudinal shear deformation // *International Journal of Fracture*, 1974, **10**, No. 1. P. 45–52.
1622. Sendeckyj P. Multiple circular inclusion problems in longitudinal shear deformation // *Journal of Elasticity*, 1971, **1**, No. 2. P. 83–86.

1623. Seo K., Mura T. The elastic field in a half-space due to ellipsoidal inclusion with uniform dilatational eigenstrains // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1979, **46**. P. 568–572.
1624. Seweryn A. Metody numeryczne w mechanice pękania. Biblioteka Mechaniki Stosowanej, IPPT PAN: Warszawa, 2003. 292 s.
1625. Sharma P., Dasgupta A. Eshelby's problem for a cuboidal inclusion in a micropolar medium / GE Research & Development Center. Technical Information Series, 2001 CRD110, Septembes 2001. Class 1. 7 p.
1626. Sharma P., Ganti S. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**. P. 663–671.
1627. Shavlakadze N. A contact problem of the interaction of a semi-finite inclusion with a plate // *Georgian Mathematical Journal*, 1999, **6**. No. 5. P.489–500.
1628. Shen H. An elliptic inclusion with imperfect interface embedded in an infinite elastic medium. Doctor of Philosophy Thesis. Univ. of Alberta. Edmonton, Alberta, 2000.
1629. Shen H., Schiavone P., Ru C.Q., Mioduchowski A. An elliptical inclusion with imperfect interface in anti-plane shear // *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**. P. 4557–4575.
1630. Shen H., Schiavone P., Ru C.Q., Mioduchowski A. Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity // *Journal of Elasticity*, 2001, **62**. P. 25–46.
1631. Shenoy V., Sharma A. Pattern formation in a thin solid film with interactions // *Physical Review Lett.*, 2001, **86**. P. 119–122.
1632. Sherman D.I. On the problem of plane strain in non-homogeneous media / *Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity*. London-New York-Paris-Los Angeles: Pergamon Press, 1959. P. 3–20.
1633. Shetty D.K., Virkar A.V., Rosenfield A.R., Duckworth W. A „compressed-spring” analogy for residual stress effects on the extension of indenter flaws // *J. Amer. Ceram. Sic.*, 1984, **67**, No. 10. P. C201–C203.
1634. Shibata M., Ono K. Stress concentration due to a prolate spheroidal inclusion // *Journal of Composite Materials*, 1978, **12**, No. 4. P. 132–138.
1635. Shibata M., Ono K. Stress concentration due to an oblate spheroidal inclusion // *Mater. Sci. and Eng.*, 1978, **34**, No. 2. P. 131–137.
1636. Shield T.W., Kim K.S. Beam theory models for thin film segments cohesively bounded to an elastic half-space // *International Journal of Solids and Structures*, 1992, **29**. P. 1085–1103.
1637. Shioiri J., Inoue K. Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials / *Rep. 1-st Soviet-Japanese Symp. on Composite Materials*. Moscow, 1979. P.286–295.
1638. Shiue Sham-Tsong, Lee Sanboh A thermodynamic approach to the interaction between dislocation and crack and its application // *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, 22, No. 6. P. 1105–1115.
1639. Shodja H.M., Pahlevani L., Hamed E. Inclusion problems associated with thin fcc films: Linkage between eigenstrain and inter-atomic potential // *Mechanics of Materials*, 2007, **39**, No. 8. P. 803–818.
1640. Shojødt-Thomsen Jan, Pyrz Ryszard. Inclusion dispersion: effects on stress and effective properties // *XXI ICTAM*, 15–21 August 2004. Warsaw, Poland.
1641. Sih G.C. Heat conduction in the infinite medium with lines of discontinuities // *J. Heat Transfer*, 1965, **87**, No. 2. P. 293–298 (рос. переклад С. 157–162).
1642. Sih G.C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions // *Developments in mechanics*, vol.3, Pt.1. Solid Mech. and Mater. New York-Wiley, 1965. P. 61–79.
1643. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation, and analysis // *Applied Mechanics Reviews*, 2004, **57**, No. 4. P. 251–298.
1644. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification // *Applied Mechanics Reviews*, September 2004, **57**, No. 5. P. 385–439.
1645. Sladek J., Sladek V. Stress concentration coefficient around a three dimensional inclusion in an infinite elastic body // *Acta techn. CSAW*, 1983, **28**, No. 2. P. 240–247.
1646. Smith E. The effect of a non-uniform internal pressure on crack extension in an infinite body // *International Journal of Engineering Science*, 1966, **4**, No. 6. P. 671–679.
1647. Smith E. The extension of two parallel non-coplanar cracks by an applied stress // *International Journal of Engineering Science* 1971, **9**, No. 7–8. P. 631–638.
1648. Smith E. The interaction between dislocations and inhomogeneities–I. // *International Journal of Engineering Science*, 1968, **6**, No. 3. P. 129–143.
1649. Sobelw J.W., Werner F. Zum elastischen Zusammenwirken steifer Rippen mit einer dünnen Platte // *VEB Metalleichtbaukomb. Forschungsinst.*, 1977, **15**, No. 3. S. 33–36.
1650. Srolovitz D.J., Petkovic-Luton R., Luton M.J. Straight dislocation-spherical inclusion interactions: High and low temperature solutions // *Scripta Metall.*, 1984, **18**. P. 1063–1068.

1651. Stagni I., Lizzio R. Shape effects on edge dislocation climb over an elliptical inhomogeneity // *Acta Mech.*, 1984, **54**, P. 87–93.
1652. Stagni L., Lizzio R. Shape effects in the interaction between an edge dislocation and an elliptical inhomogeneity // *Appl. Phys.*, 1983, **A30**, No. 4. P. 217–221.
1653. Stagni L., Lizzio R. The lamellar inclusion problem in plane elasticity // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1986, **37**, No. 4. P. 479–490.
1654. Stang H. A double inclusion model for microcrack arrest in fibre reinforced brittle materials // *J. Mech. and Phys. Solids*, 1987, **35**, No. 3. P. 325–342.
1655. Stroh A.N. A theory of fracture of metals // *Advances in Physics*, 1957, **6**, P. 418–465.
1656. Stroh A.N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // *Phil. Mag.*, 1958, **3**, No. 30. P. 625–646.
1657. Stroh A.N. Steady-state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.*, 1962, **41**, P. 77–103.
1658. Sudak L.J. A circular inclusion with circumferentially inhomogeneous imperfect interface in plane elasticity. Doctor of Philosophy Thesis. Univ. of Alberta. Edmonton, Alberta, 2000.
1659. Sudak L.J., Ru C.Q., Schiavone P., Mioduchowski A. A circular inclusion with inhomogeneously imperfect interface in plane elasticity // *Journal of Elasticity*, 1999, **55**, No. 1. P. 19–41.
1660. Sudak L.J., Ru C.Q., Schiavone P., Mioduchowski A. A circular inclusion with circumferentially inhomogeneous non-slip interface in plane elasticity // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2001, **54**, No. 3. P. 449–468.
1661. Sulym G., Opanasovych V., Drapaka V. Two-axis stretching of a piece-homogeneous isotropic plate with two cracks arallel to a interface // *Abstracts of the Fourth Polish-Ukrainian Conference “Current Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Media”* (Łódź, 4+8 Sept., 2001). Łódź: Technol. Univ. of Łódź, 2001. P. 56.
1662. Sulym G., Shevchuk S. Antiplane problem of anisotropic multilayered medium with thin elastic inclusions under the action of concentrated forces and screw dislocations / *The second polish-ukranian conference "Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media"* (Warsaw, Sept, 11–13, 1997). Abstracts. Warsaw, 1997. P. 57–58.
1663. Sulym G., Shevchuk S. Antiplane problems for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1999, **37**, No. 1. P. 47–63.
1664. Sulym G.T. Jump function method in fracture mechanics / *Fracture mechanics: successes and problems. Collection of Abstracts. Part.1. (ISF-8,Kiev, 8–14.06.1993)*. Lviv, 1993. P. 100–101.
1665. Sumi Naobumi Thermal stresses in a finite rectangular plate with a rigid ribbonlike inclusion // *J. Therm. Stresses*, 1981, **4**, No. 1. P. 83–90.
1666. Sumi Naobumi Thermal stresses in an orthotropic rectangular plate with a rigid ribbonlike inclusion // *Nucl. Eng. and Des.*, 1981, **66**, No. 3. P. 405–411.
1667. Sun Ying-Fei, Peng Yan-Ze Analytic solutions for the problems of an inclusion of arbitrary shape embedded in a half-plane // *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **140**, No. 1. P. 105–113.
1668. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The stress analysis of cracks: Handbook*. – Hellertown, PA: Del Research Corp., 1973, 677 p.
1669. Tamate O. Ribbon-like inclusions in the plate under flexure. Поперечний згин пружної пластини, що містить жорстке стрічкове включення // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1978, **A44**, No. 379. P. 790–797 (яп. мовою).
1670. Tamate O. Two arbitrarily situated ribbon-like inclusions in an elastic plate under out-of-plane bending // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1983, **A49**, No. 445. P. 1095–1103.
1671. Tamate O., Iwasaka N. An arbitrarily oriented crack in a long strip under tension // *Technol. Reports Tohoku Univ.*, 1975, **40**, No. 2. P. 285–297.
1672. Tamate O., Kurihara T. Behaviour of an edge dislocation near a partially bonded bimetallic interface // *International Journal of Fracture Mechanics*, 1970, **6**, No. 4. P. 341–351.
1673. Tamate O., Sekine H. Elastic interaction of a screw dislocation with an interface micro-crack in bimetallic orthotropic media // *Technol. Reports Tohoku Univ.*, 1972, **37**, No. 1. P. 69–85.
1674. Tamate O., Sekine H., Ozawa Y. A criterion for the crack initiation in reinforced composite materials with dispersed flat inclusion // *Trans JSME*, 1982, **A48**, No. 430. P. 713–717. Discuss. 717–718 (яп. мовою).
1675. Tamate O., Sekine H., Ozawa Y. Crack initiation at the sharp edges of dispersed inclusions and the energy release rate // *J. Jap. Soc. Compos. Mater.*, 1983, **9**, No. 3. P. 101–107 (яп. мовою).
1676. Tamate O., Sekine H., Ozawa Y. Crack initiation from the ends of partially debonded surfaces of a flat inclusion // *Acta Mechanica*, 1983, **50**, No. 1–2. P. 59–70.

1677. Tamate O., Sekine H., Ozawa Y. The interaction problem between an elastic circular inclusion and a rigid ribbon like inclusion. // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1982, **A48**, No. 425. P. 21–28 (яп. мовою).
1678. Tamate O., Sekine H., Uchida H. Local intensification of thermal stresses in an infinite medium containing periodic ribbon-like inclusion // *Technol. Repts Tohoku Univ.*, 1979, **44**, No. 2. P. 563–577.
1679. Tamuka Yoshiaki, Nakagiri Akikaru, Maeda Hakioki. Stress analysis of some typical fibre reinforced models // *Technol. Reports Kansai Univ.*, 1975, No. 16. P. 1–10.
1680. Tauchert T.R. Thermal stresses in an orthotropic slab containing a plane flaw // *J. Therm. Stresses*, 1981, **4**, No. 3–4. P. 443–459.
1681. Tegart W.I. The effect of second phases on the mechanical properties of metals and alloys // *Aust. Inst. Met.*, 1970, **17**. P. 47–67.
1682. Thein Wan Plane stress analysis of a scarf joint // *International Journal of Solids and Structures*, 1976, **12**, No. 7. P. 491–500.
1683. Theocaris P.S., Demakos C.B. Antiplane shear crack in an infinite plate with a circular inclusion // *Ing. Arch.*, 1985, **55**. P. 295–306.
1684. Theocaris P.S. Numerical solution of singular integral equations: Methods // *ASCE J. Eng. Mech.*, 1981, **107**, No. 5. P. 733–752.
1685. Theocaris P.S., Bardzokas D. Reinforcement of a cracked plate by a loaded strip-inclusion // *Ing.-Archiv*, 1985, **55**, No. 1. P. 45–56.
1686. Theocaris P.S., Bardzokas D. The influence of a finite stringer on the stress intensities around cracks in plates // *Engineering Fracture Mechanics*, 1981, **14**, No. 3. P. 493–506.
1687. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. On the numerical solution of Cauchy-type singular integral equations and the determination of stress-intensity factors in case of complex singularities // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1977, **28**, No. 6. P. 1085–1098.
1688. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. The inclusion problem in plane elasticity // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1977, **30**, No. 4. P. 437–448.
1689. Theocaris P.S., Paipetis S.A. Constrained zones at singular points of inclusion contours by the method of caustics // *XVII Pol. Solid Mech. Conf., Szczyrk, 1975. Abstracts, S.1*, 1975. P. 212–213.
1690. Theocaris P.S., Paipetis S.A. State of stress around inhomogeneities by the method of caustics // *Fibre Sci. and Technol.*, 1976, **9**, No. 1. P. 19–39.
1691. Theocaris P.S., Prassianakis J. Propagation of cracks from strip inclusions in composite plates under impulsive tensile load // *J. Fibre Sci. and Technol.*, 1982, **17**, No. 4. P. 273–288.
1692. Theocaris P.S., Spyropoulos C.P. Photoelastic determination of Complex Stress Intensity Factors for Slant Cracks Under Biaxial Loading with Higher-Order Term Effects // *Acta mech.*, 1983, **48**. P. 57–70.
1693. Thomson R. Dislocation shielding of cracks and the fracture criterion // *Proc. ICF Int. Symp. Fract. Mech.*, Beijing. Beijing: Utrecht, 1984. P. 1019–1020.
1694. Thomson R., Sinclair J.E. Mechanics of cracks screened by dislocation // *Acta met.*, 1982, **30**, No. 7. P. 1325–1334.
1695. Ting T.C.T. Anatomy of Green's functions for line forces and dislocations in anisotropic media and degenerate materials / *The Jens Lothe Symposium. Vol. Physica Scripta T*, 1992. **44**. P. 137–144.
1696. Ting T.C.T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites // *International Journal of Solids and Structures*, 1986, **22**. No. 9. P. 965–983.
1697. Ting T.C.T. Green's functions for an anisotropic elliptic inclusion under antiplane deformations / *In Anisotropy, Inhomogeneity, & Nonlinearity in Solid Mechanics*, D. F. Parker and A. H. England, eds., Kluwer Acad. Pub., 1995. P. 321–326.
1698. Ting T.C.T. Green's functions for an anisotropic elliptic inclusion under generalized plane strain deformations // *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1996, **49**. No. 1. P. 1–18.
1699. Ting T.C.T. Image singularities of Green's functions for anisotropic elastic half-spaces and bimetals // *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1992, **45**. P. 119–139.
1700. Ting T.C.T. Line forces and dislocations in angularly inhomogeneous anisotropic elastic wedges and spaces // *Q. Appl. Math.*, 1989, **47**. P. 123–128.
1701. Ting T.C.T. Line forces and dislocations in anisotropic elastic composite wedges and spaces // *Physica Status Solidi B*, 1988, **146**. P. 81–90.
1702. Ting T.C.T. Some identities and the structure of Ni in the Stroh formalism of anisotropic elasticity // *Q. Appl. Math.*, 1988, **46**. P. 109–120.
1703. Ting T.C.T. The Stroh formalism and certain invariances in two-dimensional anisotropic elasticity // *Adv. Mech.*, 1992, **22**, No. 2. P. 145–160.
1704. Ting T.C.T., Barnett D.M. Image force on line dislocations in anisotropic elastic half-spaces with a fixed boundary // *Int. J. Solids Structures*, 1993. **30**. P. 313–323.

1705. Ting T.C.T., Hwu C. Sextic formalism in anisotropic elasticity for almost non-semisimple matrix  $N_i$  // *International Journal of Solids and Structures*, 1988, **24**. P. 65–76.
1706. Ting T.C.T., Lee Ven-Gen. The three-dimensional elastostatic Green's function for general anisotropic linear elastic solids // *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1997, **50**. P. 407–426.
1707. Toya M. A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1974, **22**. P. 325–348.
1708. Trantina G.G., Barishpolsky M. Elastic-plastic analysis of small defects-voids and inclusions // *Engineering Fracture Mechanics*, 1984, **20**, No. 1. P. 1–10.
1709. Tremmel F. Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung der Wärmespannungsfeldern // *Österr. Ingenieur Archiv*, 1957, **11**, No. 3.
1710. Tribiňlo R., Walendziuk A. A numerical analysis of stress distribution on the boundary of phases in solid // *Foundation of Civil and Environmental engineering*, 2004. No. 4. P. 65–62.
1711. Tsai Y.M. Indentation of a penny-shaped crack by an oblate spheroidal rigid inclusion in a transversely isotropic medium // *Journal of Applied Mechanics*, 1984, **51**. P. 811–815.
1712. Tsuchida E., Mura T., Dundurs J. The elastic field of an elliptic inclusion with a slipping interface // *Journal of Applied Mechanics*, 1986, **53**. P. 103–107.
1713. Tsuji T., Noda N., Shibuya T., Koizumi T. Torsion problems for bonded bars by an elastic adhesive layer // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. F.*, 1988, **54**, No. 507. P. 2007–2012. Discuss. 2013 (яп. мовою).
1714. Tuzi Ichiro. Photoelastic investigation of the stresses in cemented joints // 3<sup>rd</sup> report Stresses on the butt bonded boundary, *Bull. JSME*, 1975, **18**, No. 123. P. 953–958.
1715. Tweed J. The stress intensity factor of a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedge // *Journal of Elasticity*, 1971, **1**, No. 2. P. 29–35.
1716. Tyson W.R., Davies G.J. A photoelastic study of the shear stresses associated with the transfer of stress during fiber reinforcement // *Br. J. Appl. Phys.*, 1965, **16**, No. 2. P. 199–205.
1717. Vaida R.U., Subramanian K.N. Metallic glass ribbon-reinforced glass-ceramic matrix composites // *Journal of Materials Science*, 1990, **25**, No. 7. P. 3291–3296.
1718. Vandyke P. Stresses in a cylindrical shell with a rigid inclusion // *AIAA Journal*, 1967, **5**, No. 1. P. 125–137.
1719. Venkatasubramanian T.V., Baker T.J. Role of elongated MnS inclusions in hydrogen embrittlement of high-strength steels // *Metal. Sci.*, 1982, **16**, No. 12. P. 543–554.
1720. Viola E., Piva A. Two arc cracks around a circular rigid inclusion // *Meccanica*, 1980, **15**, No. 3. P. 166–176.
1721. Vodička V. Stationary temperature distribution in cylindrical tubes // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 1957, **9**, No. 1. S. 25–33.
1722. Vodička V. Stationary temperature fields in a two-layer plate // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 1957, **9**, No. 1. S. 19–24.
1723. Volpe M., Cleri F. Vibrational models of graphitic fragments and the nucleation of carbon nanotubes // *Journal of Chemical Physics*, 2001, **117**. P. 3308.
1724. Vörös G.M. Thin elastic layers; cemented joints, coats // *Period. Polytechn. Mech. Eng.*, 1974, **18**, No. 2–3. P. 113–121.
1725. Vörös G.M. Variational principle for discontinuous stress-displacement field / 3-й нац. конгрес «Теор., приложна мех.» (Варна, 1977). Кн. 1. София, 1977. С. 344–347.
1726. Wadley H.N.G., Scruby C.B. Elastic wave radiation from cleavage crack extension // *International Journal of Fracture*, 1983, **23**, No. 2. P. 111–128.
1727. Wakashima K., Otsuka M., Umekawa S. Thermal expansions of heterogeneous solids containing aligned ellipsoidal inclusions // *Journal of Composite Materials*, 1974, **8**, No. 4. P. 391–404.
1728. Walpole L.J. Some elastostatic and potential problems for an elliptic disc // *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 1970, **67**, pt. 1. P. 225–235.
- 1729..
1730. Wang C.-Y. 2-Dimensional elastostatic Green's Functions for general anisotropic solids and generalization of Stroh's Formalism // *International Journal of Solids and Structures*, 1994. **31**. P. 2591–2597.
1731. Wang C.-Y. Elastic fields produced by a point source in solids of general anisotropy // *J. Engng. Math.*, 1997. **32**. P. 41–52.
1732. Wang C.-Y., Achenbach J.D. A new look at 2-D time-domain elastodynamic Green's functions for general anisotropic solids // *Wave Motion*, 1992. **16**. P. 389–405.

1733. Wang C.-Y., Achenbach J.D. A new method to obtain 3-D Green's functions for anisotropic solids // *Wave Motion*, 1993, **18**. P. 273–289.
1734. Wang X., Shen Y.-P. Two circular inclusions with inhomogeneous interfaces interacting with a circular Eshelby inclusion in anti-plane shear // *Acta Mechanica*, 2002, **158**. No. 1–2. P. 67–84.
1735. Wang X., Zhong Z. A circular inclusion with a nonuniform interphase layer in anti-plane shear // *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**. No. 4. P. 881–897.
1736. Wang X., Zhong Z. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbonded matrix // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 5895–5911.
1737. Wang X.-F., Hasebe N. Bending of a thin plate containing a rigid inclusion and a crack // *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2000, **24**. P. 145–153.
1738. Wang Xu, Sudak L.J. Interaction of a screw dislocation with an arbitrary shaped elastic inhomogeneity // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 2006, **73**. P. 206–211.
1739. Wang Z.Y., Zhang H.T., Chou Y.T. Characteristics of the elastic field of a rigid line inhomogeneity // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1985, **52**. No. 3. P. 818–822.
1740. Wang Z.Y., Zhang H.T., Chou Y.T. Stress singularity of a rigid line inclusion under antiplane shear loading // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1986, **53**, No 2. P. 459–461.
1741. Warren W.E. The edge dislocation inside an elliptical inclusion // *Mechanics of Materials*, 1983, **2**. No. 4. P. 319–330.
1742. Weertman J., Lin I.-H., Thomson R. Double slip plane crack model // *Acta met.*, 1983, **31**, No. 4. P. 473–482.
1743. Weitsman Y., Sadowsky M.A. Effect of Poisson's ratio of an elastic fiber on force transfer between embedded microfibers // *Int. J. Mech. Sci.*, 1964, **6**. No. 4. P. 241–246.
1744. Wiegardt K. Über das Spalten und Zerreißen Elastischer Körper // *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1907, **55**. P. 60–103.
1745. Willis J.R. Anisotropic elastic inclusion problems // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1964, **17**. P. 157–174.
1746. Willoughby A.A., Pratt P.L., Baker T.J. The effect of inclusion orientation on ductile fracture / *Adv. Fract. Res. Prepr. 5<sup>th</sup> Int Conf. Fract. (Cannes, 1981)*. Vol. 1. Oxford e.a., 1981. P. 179–186.
1747. Wozniak C. Bodies reinforced by thin discrete layers // *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.*, 1975, **23**, No. 4. P. 201–205.
1748. Wozniak C. On the analytical mechanics of slender bodies // *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.*, 1975, **23**, No. 4. P. 193–200.
1749. Wozniak Cz. Bodies reinforced by thin elastic layers // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.*, 1975, **23**, No. 4. P. 201–207.
1750. Wu C.H. A semi-infinite crack penetrating an inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1988, **55**: P. 736–738.
1751. Wu C.H., Chen C.H. A crack in a confocal elliptic inhomogeneity embedded in an infinite medium // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1990, **57**: P. 91–96.
1752. Wu K.C. Generalization of the Stroh formalism to three-dimensional anisotropic elasticity // *Journal of Elasticity*, 1999, **51**. P. 213–225.
1753. Wu K.C. Line inclusion at anisotropic bimaterial interface // *Mechanics of Materials*, 1990, **10**. No. 2. P. 173–182.
1754. Wu L., Du S. A rigid line in a confocal elliptic piezoelectric inhomogeneity embedded in an infinite piezoelectric medium // *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**. No 10. P. 1453–1469.
1755. Wu L., Du S.Y. The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion Part I, II // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1995, **62**. P. 579–584, 585–589.
1756. Wu L., Du S.Y. The elastic field in a half-space with a circular cylindrical inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1996, **63**. P. 925–932.
1757. Wu L.Z. A crack in a confocal elliptic piezoelectric inhomogeneity embedded in an infinite piezoelectric medium // *International Journal of Fracture*, 2000, **104**. P. 1–14.
1758. Wu L.Z., Meng S.H., Du S.Y. A rigid line in a confocal elliptic inhomogeneity embedded in an infinite medium under antiplane shear // *Acta Mechanica Sinica*, 1998, **14**, No. 3. P. 266–273.
1759. Wu X.R., Carlsson J. The generalized weight function method for crack problems with mixed boundary conditions // *J. Mech. and Phys. Solids*, 1983, **31**, No. 6. P. 485–497.

1760. Xiao Z.M., Zhang H.X., Chen B.J. A piezoelectric screw dislocation interacts with interfacial collinear rigid lines in piezoelectric bimetals // *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**, No. 1. P. 255–271.
1761. Xiao Z.M., Zhang H.X., Chen B.J. Microcrack initiation at the tip of a semi-infinite rigid line inhomogeneity in piezoelectric solids // *International Journal of Engineering Science* 2005, **43**. No. 15–16. P. 1223–1233.
1762. Xiaofang, Wang Jianhua, Shen Weiping. The interaction between multiple curved rigid line and antiplane circular inclusion // *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **13**, No. 2. P. 119–124.
1763. Xu Yong Li. Green's function for general disk-crack problems // *International Journal of Solids and Structures*, 1995, **3**, No. 1. P. 63–77.
1764. Yahsi O.S., Shahid M.M. The effect of a stiffener on a cracked plate under bending // *Int. J. Pressure Vessels and Pip.*, 1986, **23**, No. 2. P. 133–148.
1765. Yang H.C., Chou Y.T. Generalized plane problems of elastic inclusions in anisotropic solids // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1976, **E43**, No. 3. P. 424–430.
1766. Yang H.C., Chou Y.T. The  $\langle 111 \rangle$  elliptic inclusion in an anisotropic solid of cubic symmetry // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1982, **E49**, No. 2. P. 353–360.
1767. Yano H., Fukutani S., Watanabe T., Nakajima N., Kieda A. Applications of discrete singularity method in engineering / *Boundary Elem. Proc. 5-th Int. Conf. (Hiroshima, Nov., 1983)*. Berlin e.a., 1983. P. 379–391.
1768. Yewtuszenko A.A., Kaczyński A., Matysiak S.J. The stressed state of a laminated elastic composite with a thin linear inclusion // *J. Appl. Mathematics and Mechanics*, 1995, **59**, No. 4. P. 671–676.
1769. Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A. Effect of a thin surface coating layer on thermal stresses within an elastic half-plane // *Acta Mechanica*, 2006, **185**, No 3–4. P. 227–243.
1770. Yu H.Y., Sanday S.C. Elastic inhomogeneous inclusion and inhomogeneity in bimetals // *Proc. Roy. Soc. London (Proceedings: Mathematical and Physical Sciences)*, 1992. **A439**, No. 1907. P. 659–667.
1771. Yu H.Y., Sanday S.C., Chang C.I. Elastic inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic solids // *Proc. Roy. Soc. London (Proceedings: Mathematical and Physical Sciences)*, 1994. **A444**, No 1920. P. 239–252.
1772. Yu Shou Wen. On the analogues relating plane problems of couple-stress theory and Reissner's plate theory // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 1987, **67**, No. 4. P. 246–247.
1773. Yüksel F. Beitrag zur Vorspannung der Platten durch beliebig verlaufende Spannglieder // *Schweiz. Bauzeitung*, 1973, **91**, No. 49. S. 1196–1199.
1774. Zachary L.W., Rogge T.R. Stresses in adhesive layers with cracks and inclusions / *Develop. Theor. and Appl. Mech. Vol. 9. Proc. 9-th Southeastern Conf. Theor. and Appl. Mech. Nashville, Tenn., 1978*. S.I., s.a. P. 205–214.
1775. Zakora S., Chekhov Val. Stress state of a transversely isotropic spherical shell with a rigid circular inclusion // *International Applied Mechanics*, 2005, **41**, No. 12. P. 1384–1390.
1776. Zhang H.T., Chou Y.T. Antiplane eigenstrain problem of an elliptic inclusion in a two-phase anisotropic medium // *ASME J Appl Mech*, 1985, **52**: 87–90.
1777. Zhang T.-Y., Tong P. Fracture mechanics for a mode II crack in a piezoelectric material // *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**. P. 343–359.
1778. Zhao Y.H., Weng G.J. Effective elastic moduli of ribbon-reinforced composites // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1990, **57**, P. 158–167.
1779. Zheng S.F., Denda M., Weng G.J. Interfacial partial debonding and its influence on the elasticity of a two-phase composite // *Mechanics of Materials*, 2000, **32**. P. 695–709.
1780. Zheng Y.J., Cui L.S., Zhu D., Yang D.Z. The constrained phase transformation of prestressed TiNi fibers embedded in metal matrix smart composite // *Mat. Letters*, 2000, **43**. P. 91–96.
1781. Zhong Z., Meguid S.A. On the eigenstrain problem of a spherical inclusion with an imperfectly bonded interface // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1996, **63**. P. 877–883.
1782. Zhong Z., Sun Q.P. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 5753–5765.
1783. Zhou S.A., Hsieh R.K.T. Elastic monopole modelling of defects in thermoplastic media // *International Journal of Engineering Science*, 1985, **23**, No. 11. P. 1197–1202.

### Додатковий список

- 1\*. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
- 2\*. Божидарник В.В., Сорокатый Ю.И., Налобин А.П. О некоторых свойствах асимптотического распределения напряжений в окрестности вершины трещины // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1985. Вып. 194. С. 6–7.
- 3\*. Божидарник В.В., Садівський В.М. Про напружено-деформований стан композитної пластини з прямолінійним жорстким включенням // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом “Інженерна механіка”), 2005. Вип. 16. С. 7–10.
- 4\*. Григорян Э.Х., Овакимян А.С. Контактная задача для двух полуплоскостей с начальными напряжениями, соединенных полубесконечным включением // Изв. АН АрмССР, 1989, № 3. С. 14–20.
- 5\*. Грилицкий Д.В., Сорокатый Ю.И., Думанский О.И. Экспериментальные методы определения коэффициентов интенсивности напряжений // Матер. VIII Всес. конф. по методу фотоупругости (Таллин, 25–28 сент. 1979 г.). Таллин: АН ЭССР, 1979. Т. 3. С. 146–149.
- 6\*. Грилицький Д.В., Сорокатый Ю.І. Механічні і оптичні методи дослідження напружено-деформованого стану тіл. Львів: ЛДУ, 1984. 59 с.
- 7\*. Демченко Н.Х., Тищенко В.Н. Прикладные теории деформирования слоя на упругом основании / Динамические системы (Киев), 1982, № 1. С. 61–68.
- 8\*. Денисюк И.Т., Садивский В.М. Интенсивность термонапряжений вблизи жесткого стержневого включения // Вестн. ЛПИ. Диф. ур-ния и их приложения, 1984, № 182. С. 57–59.
- 9\*. Жоржолиани Г.Т., Каландия А.И. Влияние стрингера на распределение напряжений около отверстия // Прикладная математики и механика, 1974, **38**, № 1. С. 145–153.
- 10\*. Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластичной прослойки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1962, № 5. С. 63–67.
- 11\*. Кіт Г.С. Метод потенціалів у тривимірних задачах теплопровідності тіл з тонкими включеннями / Крайові задачі термомеханіки. Ч. 1. К.: Ін-т математики НАН України, 1996. С. 154–159.
- 12\*. Кобаяши А. Исследование разрушения поляризационно-оптическим методом // Разрушение: В 7 т. / Под ред. Либовица Г. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 352–411.
- 13\*. Максименко В.Н., Павшок В.Н. Влияние приклеенных ребер жесткости на характеристики остаточной прочности панелей из анизотропных и изотропных материалов // Уч. записки ЦАГИ, 1987, 18, № 2. С. 84–92.
- 14\*. Мартыняк Р.М. Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте // Мат. методы и физ.-мех. поля. К., 1985. Вып. 22. С. 89–92.
- 15\*. Нуллер Б.М. Контактные задачи для полос и прямоугольных пластинок, усиленных стержнями // Прикладная математики и механика, 1975, **39**, № 3. С. 559–564.
- 16\*. Павлычко В.М., Сулим Г.Т. Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. Львов, 1987. 11 с. Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 330-В87.
- 17\*. Панасенко Г.П. Осреднение задачи о контакте двух периодических структур, разделенных тонким прослоем / Прикл. мат. и мат. обеспечение ЭВМ. М., 1979. С. 20–31.
- 18\*. Перлин И.П. К решению плоских задач теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1963, № 5. С. 140–143.
- 19\*. Саркисян В.С., Овсепян Л.О. Об одной контактной задаче для двух анизотропных полуплоскостей, соединяющихся по границам упругой накладкой конечной длины // Докл. АН АрмССР, 1973, **57**, № 4. С. 218–224.
- 20\*. Фрохт М.М. Фотоупругость: В 3-х т. Т.1. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 432 с.
- 21\*. Шерман Д.И. К вопросу о напряженном состоянии весомой полуплоскости с двумя заглубленными круговыми отверстиями // Тр. Ин-та физ. Земли АН СССР, 1959. Т. 3.
- 22\*. Gladwell G.M. On inclusions at a bi-material elastic interface // Journal of Elasticity, 1999, **54**, No. 1. P. 27–41.
- 23\*. Green A.E., Naghdi P.M., Weinwright W.L. A general theory of a Cosserat surface // Arch. Rat. Mech. Anal., 1965, **20**, No. 4. P. 287–308.
- 24\*. Lu Jianfei, Zhang Xiaofang, Wang Jianhua, Shen Weiping. The interaction between multiple curved rigid line and antiplane circular inclusion // Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, **13**, No. 2. P. 119–124.
- 25\*. Kaciewicz M., Matysiak S. On the problem of ribbon-like rigid inclusion in micropolar elastic space // Bull. Acad. polon. Sci. Sér. Sci. techn., 1982, **30**. No. 1–2. P. 11–20.



- 
- 26\*. Levy A.J., Hardikar K. The inclusion pair interaction problem with nonlinear interface // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1999, **47**. P. 1477–1508.
- 27\*. Li Zhongua, Yang Lihong. The application of the Eshelby equivalent inclusion method for unifying modulus and transformation toughening // *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**. P. 5225–5240.
- 28\*. MacLaughlin T.F., Thomas F. A photoelastic analysis of fiber discontinuities in composite materials // *Journal of Composite Material*, 1968, **2**, No. 1. P. 44–55.
- 29\*. Mura T. *Micromechanics of defects in solids* (2<sup>nd</sup> ed.). The Netherlands (The Hague, Dordrecht): Martinus Nijhoff Publ. 1987. 608 p.
- 30\*. Mura T. The elastic field caused by a general ellipsoidal inclusion and the application to martensite formation // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1976, **24**. P. 305–318.
- 31\*. Qian Z.Q., Akisanya A.R., Thompson D.S. Stress behavior at the interface junction of an elastic inclusion // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 2002, **69**. P. 844–852.
- 32\*. Ru C.Q. Surface wrinkling of two mutually attracting elastic thin films due to van der Waals forces // *Journal of Applied Physics*, 2001, **90**, No 12. P. 6098–6104.
- 33\*. Schleiff M. Über Näherungsverfahren zur Lösung einer singulären linearen Integrodifferentialgleichung // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1968, **48**, No. 7. P. 477–486.
- 34\*. Theocaris P.S., Gdoutos E.E. Communication relates to the paper "Limitation of the Westergaard equation for experimental evaluations of stress intensity factors", by W.T.Evans and A.R.Luxmoore, published in 1976, **11**, No. 3, pp. 177–185 // *Journal of Strain Analysis*, 1977, **12**, No. 4. P. 349 – 350.
- 35\*. Wang X., Shen Y.-P. An edge dislocation in a three-phase composite cylinder model with a sliding interface // *Journal of Applied Mechanics*, 2002, **69**, No. 4. P. 527–538.

**СПИСОК СКОРОЧЕНЬ**

АГМПРВ	абсолютно гнучке мало податне на розтяг включення
АГПВ	абсолютно гнучке пружне включення
АЖВ	абсолютно жорстке включення
АЖП	абсолютно жорстка плівка
АПВ	абсолютно податне включення
АТПВ	абсолютно теплопровідне включення
ЗР	збурений розв'язок
КЗР	коригувальний збурений розв'язок
КІГТП	коефіцієнт інтенсивності градієнту температурного поля
КІН	коефіцієнт інтенсивності напружень
КІТП	коефіцієнт інтенсивності температурного потоку
ККН	коефіцієнт концентрації напружень
ЛАР	лінійне алгебричне рівняння
МГІ	метод граничних інтегралів
МДТТ	механіка деформівного твердого тіла
МК	метод колокацій
ММВ	математична модель включення
МОМ	метод ортогональних многочленів
МСЕ	метод скінченних елементів
ОЗР	основний збурений розв'язок
ОМ	основна модель
ОПНН	однорідне поле напружень на нескінченності
ОР	однорідний розв'язок
ПД	плоска деформація
ПМ	плівкова модель
ПНС	плоский напружений стан
ПС	принцип спряження
ПТП	плоске температурне поле
СДД	сила, що діє на дислокацію
СІДР	сингулярне інтегро-диференціальне рівняння
СІР	сингулярне інтегральне рівняння
СЛАР	система лінійних алгебричних рівнянь
ССІДР	система СІДР
ССІР	система СІР
ТІВ	теплоізоване включення
ТН	торцьове напруження
ТП	торцьове переміщення
ТПТ	торцьовий потік тепла
ТС	торцьові сталі
ТФКЗ	теорія функцій комплексної змінної
УВ	умова взаємодії
УКІН	узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень
УПНС	узагальнений плоский напружений стан
УПТП	узагальнене плоске температурне поле
ФМП	фізико-механічне поле
ФС	функція стрибка

## З М І С Т

	<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	3
<b>Р О З Д І Л І</b>		
<b>МЕТОД ФУНКЦІЙ СТИБКА У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ</b> .....		
<b>§ 1.</b>	<b>Метод функцій стрибка</b> .....	<b>7</b>
	1.1. Принцип спряження .....	7
	1.2. Математична модель тонкого дефекту та умови взаємодії включення з середовищем .....	12
	1.3. Поєднання принципу спряження та умов взаємодії у системі сингулярних інтегральних рівнянь .....	15
	1.4. Деякі властивості асимптотичного розподілу напружень в околі вістря тріщини .....	16
	1.5. Асимптотичні властивості напружено-деформованого стану в околі технологічних тріщин у фотопружних вимірюваннях .....	19
<b>§ 2.</b>	<b>Побудова інтегральних рівнянь на основі формули Сомільяно</b> .....	<b>21</b>
	2.1. Загальна схема .....	21
	2.2. Обмежені тіла .....	24
	2.3. Ізотропія .....	24
<b>§ 3.</b>	<b>Сингулярні інтегральні рівняння в теорії тонкостінних включень</b> .....	<b>27</b>
	3.1. Визначення особливості розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь .....	27
	3.2. Наближений розв'язок характеристичного рівняння .....	30
<b>Р О З Д І Л І І</b>		
<b>ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ</b> .....		
<b>§ 4.</b>	<b>Загальний підхід до розв'язування ССІР</b> .....	<b>35</b>
<b>§ 5.</b>	<b>Метод ортогональних многочленів</b> .....	<b>38</b>
	5.1. Метод ортогональних многочленів у розв'язуванні сингулярних інтегральних рівнянь другого роду .....	38
	5.2. Збіжність методу ортогональних многочленів за розв'язування сингулярного інтегрального рівняння першого роду .....	42
	5.3. Основна схема методу ортогональних многочленів для системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду .....	45
<b>§ 6.</b>	<b>Застосування методу ортогональних многочленів до сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Фредгольма типу інтегралів Фур'є</b> ...	<b>49</b>
<b>§ 7.</b>	<b>Метод колокацій</b> .....	<b>51</b>
	7.1. Загальні передумови .....	51
	7.2. Обґрунтування операторного подання .....	52
	7.3. Збіжність методу колокацій .....	54
	7.4. Зв'язок між методами колокацій і механічних квадратур .....	59
	7.5. Базова схема методу колокацій .....	59
	7.6. Тестовий приклад .....	60
<b>§ 8.</b>	<b>Лінійна періодичність</b> .....	<b>61</b>
	8.1. Загальний підхід .....	61

8.2. Метод ортогональних многочленів .....	62
8.3. Застосування методу ортогональних многочленів до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта та ядрами Фредгольма типу інтегралів Фур'є .....	63
8.4. Метод колокацій .....	66
<b>§ 9. Циклічна періодичність .....</b>	<b>66</b>
<b>§ 10. Підсумовування ядер Коші за подвійної періодичності .....</b>	<b>67</b>
<b>§ 11. Подвійна періодичність .....</b>	<b>72</b>
<b>§ 12. Екстраполяція за Річардсоном .....</b>	<b>73</b>
 <b>Р О З Д І Л І І І</b>	
<b>УМОВИ ВЗАЄМОДІЇ .....</b>	<b>79</b>
<b>§ 13. Основні співвідношення двовимірної стаціонарної теорії теплопровідності, пружності та термopружності .....</b>	<b>79</b>
13.1. Теплопровідність .....	79
13.2. Плоска пружність і термopружність для ізотропних матеріалів .....	81
13.3. Антиплоска анізотропія .....	83
13.4. Плоска анізотропія .....	87
13.5. Інтегральні перетворення Фур'є у двовимірній теорії пружності .....	94
<b>§ 14. Температурна взаємодія тонкого теплоактивного включення з матрицею .....</b>	<b>100</b>
<b>§ 15. Умови взаємодії для включення в умовах поздовжнього зсуву .....</b>	<b>105</b>
15.1. Пружне ізотропне включення .....	105
15.2. Анізотропне включення .....	108
15.3. Нелінійні моделі .....	109
<b>§ 16. Термopружна взаємодія тонкого теплоактивного включення з матрицею (плоска задача) .....</b>	<b>109</b>
16.1. Ізотропія матеріалу включення .....	109
16.2. Ортоотропія та викривленість включення .....	113
16.3. Модель згину включення за Кірхгофом .....	119
16.4. Стисливе рідинне включення .....	119
 <b>Р О З Д І Л І І І І</b>	
<b>ПЛОСКЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ТЕПЛОАКТИВНИХ ВКЛЮЧЕНЬ .....</b>	<b>121</b>
<b>§ 17. Постановка задачі .....</b>	<b>121</b>
<b>§ 18. Відсутність тепловіддачі з бічних поверхонь пластин .....</b>	<b>122</b>
18.1. Реалізація методу функцій стрибка .....	122
18.2. Побудова системи інтегральних рівнянь задачі .....	124
18.3. Теплові потоки біля вістря тонкого включення .....	126
18.4. Визначення торцьових потоків тепла .....	129
18.5. Одне включення в однорідній матриці .....	130
18.6. Аналіз прикладів .....	131
<b>§ 19. Узагальнене плоске температурне поле .....</b>	<b>138</b>
19.1. Реалізація методу функцій стрибка .....	138
19.2. Система інтегральних рівнянь задачі .....	140
19.3. Торцьові потоки тепла .....	141
19.4. Числовий аналіз для одного включення .....	142

<b>РОЗДІЛ V</b>	
<b>АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛ ЗІ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ</b> .....	
	<b>145</b>
<b>§ 20. Стрічкові включення в ізотропному середовищі</b> .....	<b>145</b>
20.1. Постановка задачі для стрічкового включення на межі поділу двох середовищ .....	145
20.2. Спряження континуумів різної вимірності .....	146
20.3. Система прямолінійних включень в однорідному ізотропному середовищі .....	148
20.4. Система прямолінійних включень в ізотропному півпросторі .....	149
20.5. Включення криволінійної конфігурації .....	150
20.6. Асимптотичні формули .....	150
20.7. Побудова інтегральних рівнянь .....	152
20.8. Одне включення в однорідній матриці .....	153
20.9. Дія однорідного поля напружень на нескінченності .....	154
20.10. Аналіз варіантів умов взаємодії та апіорних сталих .....	160
<b>§ 21. Зосереджені сили і гвинтові дислокації. Диполі</b> .....	<b>161</b>
21.1. Концентрація напружень від сил і дислокацій .....	161
21.2. Силкові та дислокаційні диполі .....	166
21.3. Антипласка деформація півпростору з тонким дефектом під впливом зосереджених чинників .....	169
<b>§ 22. Включення у шаруватих середовищах</b> .....	<b>175</b>
22.1. Основні співвідношення .....	175
22.2. Стрибки напружень і переміщень на відріжку в однорідній площині та на лінії поділу двох матеріалів .....	176
22.3. Пакет шарів з внутрішніми стрічковими включеннями .....	180
22.4. Пакет шарів з міжфазними включеннями .....	190
22.5. Приклади .....	197
22.6. Побудова однорідних розв'язків (антипласка задача) .....	209
<b>§ 23. Включення у анізотропному середовищі</b> .....	<b>217</b>
23.1. Прямолінійне включення в однорідній матриці .....	217
23.2. Включення на межі поділу матеріалів .....	219
23.3. Асимптотичні вирази .....	221
23.4. Інтегральні рівняння .....	223
23.5. Система викривлених включень в однорідному масиві .....	224
23.6. Одне включення в однорідній матриці .....	230
23.7. Антипласка задача для анізотропного шаруватого середовища з тонкими пружними включеннями .....	242
23.8. Антипласка задача для тріщини, перпендикулярної до межі поділу двох анізотропних півпросторів .....	264
23.9. Моделювання однорідного поля напружень рядами сил .....	268
<b>§ 24. Взаємодія лінійних дефектів</b> .....	<b>271</b>
24.1. П'ять щілин в умовах поздовжнього зсуву .....	271
24.2. Взаємодія тріщини з тонкостінними включеннями .....	273
24.3. Система з п'яти включень .....	275
24.4. Періодичні задачі для тонких дефектів .....	275
24.5. Антипласка деформація тіла з близькими паралельними тріщинами .....	280
24.6. Двоперіодичні задачі для тонких дефектів .....	286
24.7. Антипласка деформація ізотропного середовища зі злученими пружними стрічковими включеннями .....	300

<b>§ 25.</b>	<b>Ефективні характеристики композитів</b> .....	<b>308</b>
	25.1. Представницький елемент композита і задача зведення .....	308
	25.2. Відсутня взаємодія включень .....	312
	25.3. Урахування взаємодії на основі двоперіодичного розв'язку .....	313
	25.4. Стохастичне армування .....	318
<b>§ 26.</b>	<b>Сила, що діє на дислокацію</b> .....	<b>327</b>
<b>§ 27.</b>	<b>Емісія гвинтових дислокацій з поверхні тонкого дефекту</b> .....	<b>332</b>
	27.1. Ізотропний масив .....	332
	27.2. Анізотропний масив .....	338
<b>§ 28.</b>	<b>Нелінійна деформація тіла зі стрічковими включеннями</b> .....	<b>340</b>
<b>§ 29.</b>	<b>Міцність тіла зі стохастичним розподілом тонких дефектів</b> .....	<b>342</b>

## Р О З Д І Л VI

### ПЛОСКІ ЗАДАЧІ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛ

#### ЗІ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

<b>§ 30.</b>	<b>Інтегральні рівняння плоскої задачі для тонких включень в ізотропному середовищі</b> .....	<b>345</b>
	30.1. Постановка плоскої задачі для тонких включень на прямій межі поділу матеріалів .....	345
	30.2. Пружні потенціали .....	346
	30.3. Напруження і переміщення на лінії поділу матеріалів .....	351
	30.4. Напруження і переміщення у довільній точці складеної площини .....	352
	30.5. Система прямолінійних включень в однорідному ізотропному середовищі .....	354
	30.6. Система прямолінійних включень в ізотропному півпросторі .....	356
	30.7. Включення криволінійної конфігурації .....	358
	30.8. Фізична інтерпретація функцій стрибка. Зосереджені сили, дислокації ...	359
	30.9. Побудова інтегральних рівнянь .....	360
<b>§ 31.</b>	<b>Асимптотичні залежності</b> .....	<b>369</b>
	31.1. Міжфазний дефект .....	369
	31.2. Однорідне середовище .....	374
	31.3. Концентрація напружень біля вістря жорсткого включення, перпендикулярного до прямої лінії поділу матеріалів .....	379
<b>§ 32.</b>	<b>Одне включення в однорідній і кусково-однорідній матриці та періодичні задачі для одного включення. Взаємодія дефектів</b> .....	<b>383</b>
	32.1. Однорідне поле напружень на нескінченності .....	383
	32.2. Числовий аналіз узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень для одного пружного включення .....	386
	32.3. Зосереджені сили і крайові дислокації .....	396
	32.4. Силкові та дислокаційні диполі .....	399
	32.5. Порівняння моделей згину тонких пружних включень .....	400
	32.7. Рідинне включення .....	405
	32.8. Включення уздовж дуги кола .....	407
	32.9. Взаємодія включень .....	411
<b>§ 33.</b>	<b>До обґрунтування застосовності методу функцій стрибка</b> .....	<b>420</b>
	33.1. МСЕ-аналіз задачі тонкостінних включень .....	420
	33.2. Інтерпретація КІН та ККН .....	422
<b>§ 34.</b>	<b>Тонкі включення у ізотропних шаруватих середовищах</b> .....	<b>428</b>
	34.1. Основні співвідношення .....	428
	34.2. Стрибок напружень і переміщень на відрізьку в однорідній площині .....	429

34.3.	Стрибок напружень і переміщень на прямій лінії поділу двох матеріалів	433
34.4.	Пакет шарів з внутрішніми тонкими включеннями	437
34.5.	Пакет шарів з тонкими міжфазними включеннями	462
34.6.	Пружна рівновага багатошарового середовища з розрізами	463
<b>§ 35.</b>	<b>Напружено-деформований стан анізотропного середовища з тонкими включеннями</b>	<b>477</b>
35.1.	Постановка задачі про тонке включення на прямій межі поділу матеріалів	477
35.2.	Прямолінійне включення в однорідному середовищі	479
35.3.	Кусково-однорідний матеріал	481
35.4.	Ізотропія матеріалів	483
35.5.	Сингулярні інтегральні рівняння	486
35.6.	Асимптотичні залежності	488
35.7.	Аналіз прикладів	491
35.8.	Визначення напружено-деформованого стану анізотропних шаруватих структур з чужорідними включеннями	494
<b>§ 36.</b>	<b>Сила, що діє в ізотропному середовищі на крайову дислокацію поблизу тонкого дефекту</b>	<b>497</b>
<b>§ 37.</b>	<b>Міцність тіл з тонкими включеннями</b>	<b>502</b>
37.1.	Граничне навантаження для крихкого тіла з тонкостінним пружним включенням	502
37.2.	Міцність тіл з випадковим розподілом тонких включень	506
<b>РОЗДІЛ VII</b>		
<b>ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ</b>		
<b>§ 38.</b>	<b>Концентрація напружень у термопружному тілі з міжфазними включеннями. Плоске температурне поле</b>	<b>511</b>
38.1.	Постановка задачі	511
38.2.	Інтегральні рівняння	512
38.3.	Концентрація напружень біля тонкого теплопасивного включення	518
38.4.	Приклади розрахунку УКІН для кусково-однорідної матриці	521
<b>§ 39.</b>	<b>Задача термопружності в умовах узагальненого плоского температурного поля</b>	<b>528</b>
39.1.	Загальна методика	528
39.2.	Однорідна пластинка з включеннями	530
39.3.	Визначення зусиль і переміщень на торцях включень	534
<b>§ 40.</b>	<b>Граничні теплові потоки у пластинах зі стохастичними теплопровідними тріщинами</b>	<b>537</b>
<b>РОЗДІЛ VIII</b>		
<b>АНАЛІЗ ПРОБЛЕМАТИКИ ВКЛЮЧЕНЬ ТА МЕТОДІВ ЇЇ ВИРІШЕННЯ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА</b>		
<b>§ 41.</b>	<b>Загальні питання теорії включень</b>	<b>541</b>
41.1.	Область застосування теорії тонких включень	541
41.2.	Поверхні поділу матеріалів	544
41.3.	Моделі перехідних шарів	546
41.4.	Основні напрями дослідження задач для тіл з тонкими включеннями	547
<b>§ 42.</b>	<b>Методи аналізу тіл з включеннями довільної форми</b>	<b>548</b>
42.1.	Термінологія	548

42.2. Методи аналізу .....	549
42.3. Деякі специфічні методи та класи пружних і непружних задач .....	558
<b>§ 43. Асимптотичні методи .....</b>	<b>559</b>
43.1. Загальні відомості .....	559
43.2. Зовнішнє асимптотичне розвинення .....	560
43.3. Окремі класи задач .....	560
<b>§ 44. Експериментальні методи .....</b>	<b>562</b>
44.1. Загальний розподіл напружень .....	563
44.2. Аналіз впливу торців .....	564
44.3. Руйнування волокон .....	565
44.4. Визначення КІН .....	565
44.5. Склейка матеріалів .....	566
<b>§ 45. Прямі числові методи .....</b>	<b>566</b>
<b>§ 46. Методи теорії тонкостінних включень .....</b>	<b>569</b>
46.1. Стрибкові зміни полів у механіці деформівного твердого тіла .....	569
46.2. Умови взаємодії .....	574
46.3. Метод особливостей .....	582
<b>§ 47. Задачі теорії тонкостінних включень в ізотропних середовищах .....</b>	<b>584</b>
47.1. Теплопровідність тіл з тонкими включеннями .....	584
47.2. Теорія пружності плескатих включень .....	587
47.3. Плоска задача механічної взаємодії для тіл з тонкими включеннями .....	590
47.4. Антиплоска задача для тіл з тонкими включеннями .....	602
47.5. Згин та кручення пластин з тонкими включеннями .....	605
47.6. Тонкі включення у оболонках .....	609
47.7. Розклинювання матеріалу .....	610
47.8. Термопружність тіл із включеннями .....	612
<b>§ 48. Задачі теорії тонкостінних включень в анізотропних середовищах .....</b>	<b>617</b>
48.1. Плескати включення .....	617
48.2. Плоска задача теорії пружності .....	618
48.3. Антиплоска задача .....	622
48.4. Згин пластин із тонкими включеннями .....	623
48.5. Тонкі включення у оболонках .....	624
48.6. Задачі теплопровідності для тіл з тонкими включеннями .....	624
48.7. Термопружність анізотропних тіл з тонкими включеннями .....	624
<b>§ 49. Тонкі включення у п'єзоелектриках .....</b>	<b>626</b>
<b>§ 50. Руйнування тіл з включеннями .....</b>	<b>627</b>
50.1. Загальні відомості та основні експериментальні факти .....	627
50.2. Абсолютно жорсткі гострокінцеві й тонкі включення .....	628
50.3. Пружні гострокутні й тонкі включення .....	631
50.4. Руйнування тривимірних композицій .....	631
<b>БІБЛІОГРАФІЯ .....</b>	<b>633</b>
<b>СПИСОК СКОРОЧЕНЬ .....</b>	<b>705</b>



**Georhij (Heorhij) T. Sulym**

**BASES OF MATHEMATICAL THEORY  
OF THERMOELASTIC EQUILIBRIUM  
OF DEFORMABLE SOLIDS  
WITH THIN INCLUSIONS**

The present book expounds the bases of the theory of determination of temperature, stress and displacement fields, and also of a limit state of deformable solids with thin inclusions that are influenced by thermal load, tractions and dislocations. In a basis of it lies the method of jump functions developed by the author. Considered are techniques of the usage of the apparatus of complex variable method, integral transformations and Somigliana identity for solving the problems of this class with respect to the anisotropy of thermophysical properties of materials in a full spectrum of an inclusions' material mechanical and thermal properties variation – from absolutely soft, that corresponds to cracks, and absolutely heat conductive to absolutely rigid and thermally isolated. The certain problems, in particular 2D elasticity (plane and antiplane), heat transfer and thermoelasticity of homogeneous and layered (piecewise homogeneous) solids which contain one, several or periodic systems of thin inclusions, are solved. The approaches for study of corresponding stochastic problems are stated. The limit cases, when thermoelastic inclusions turn to cracks or absolutely rigid defects, are investigated in details. The in-depth analysis of bibliography that concerns the subjects of inclusions in deformable solids is carried out.

For specialists in the field of deformable solids and fracture mechanics, applied mathematicians, mechanical engineers, high school teachers, post-graduate students and students of the senior rates.

Pages: 716. Illustrations: 290. Tables: 59. Bibliography: 1818 items.

## CONTENTS

<b>PREFACE</b> .....	3
 <b>CHAPTER I</b>	
<b>METHOD OF JUMP FUNCTIONS FOR ELASTIC PROBLEMS</b> .....	7
§ 1. Method of jump functions .....	7
§ 2. Construction of integral equations on the basis of Somigliana identity .....	21
§ 3. Singular integral equations in the theory of thin-walled inclusions .....	27
 <b>CHAPTER II</b>	
<b>NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS</b> .....	35
§ 4. The general approach for SIES solution .....	35
§ 5. The orthogonal polynomials method .....	38
§ 6. Application of the orthogonal polynomials method for singular integral equations with Fredholm kernels of the Fourier integrals type .....	49
§ 7. The collocation method .....	51
§ 8. Linear periodicity .....	61
§ 9. Cyclic periodicity .....	66
§ 10. Summation of Cauchy kernels for double periodicity .....	67
§ 11. Double periodicity .....	72
§ 12. Richardson's extrapolation .....	73
 <b>CHAPTER III</b>	
<b>INTERACTION CONDITIONS</b> .....	79
§ 13. The basic relations of 2D stationary theory of heat conductivity, elasticity and thermoelasticity .....	79
§ 14. Thermal interaction of thin thermoactive inclusions with a matrix .....	100
§ 15. Interaction conditions for inclusion under antiplane shear .....	105
§ 16. Thermoelastic interaction of thin thermoactive inclusions with a matrix (plane problem) .....	109
 <b>CHAPTER IV</b>	
<b>PLANE TEMPERATURE FIELD IN PIECEWISE HOMOGENEOUS MEDIUM WITH THE SYSTEM OF THIN THERMOACTIVE INCLUSIONS</b> .....	121
§ 17. Formulation of the problem .....	121
§ 18. The absence of heat emission from lateral surfaces of plates .....	122
§ 19. The generalized plane temperature field .....	138
 <b>CHAPTER V</b>	
<b>ANTIPLANE DEFORMATION OF SOLIDS WITH RIBBON LIKE INCLUSIONS</b> .....	145
§ 20. Ribbon like inclusions in isotropic medium .....	145
§ 21. Concentrated forces and screw dislocations. Dipoles .....	161
§ 22. Inclusions in layered medium .....	175
§ 23. Inclusions in anisotropic medium .....	217
§ 24. Interaction of linear defects .....	271
§ 25. Effective properties of composites .....	308

§ 26.	Force acting on a dislocation .....	327
§ 27.	Emission of screw dislocations from a surface of thin defect .....	332
§ 28.	Nonlinear deformation of a solid with ribbon like inclusions .....	340
§ 29.	Strength of a solid with stochastically distributed thin defects .....	342
<b>CHAPTER VI</b>		
<b>PLANE PROBLEMS FOR ELASTIC DEFORMATION OF SOLIDS</b>		
<b>WITH RIBBON LIKE INCLUSIONS .....</b>		
		<b>345</b>
§ 30.	The integral equations for a plane problem for thin inclusions in isotropic medium .....	345
§ 31.	Asymptotic relations .....	369
§ 32.	One inclusion in the homogeneous or piecewise homogeneous matrix and periodic problems for one inclusion. Interaction of defects .....	383
§ 33.	The applicability substantiation of a jump functions method .....	420
§ 34.	Thin inclusions in isotropic layered medium .....	428
§ 35.	The stress/strain state of the anisotropic medium with thin inclusions .....	477
§ 36.	Force in isotropic medium acting the edge dislocation near thin defect .....	497
§ 37.	Strength of solids with thin inclusions .....	502
<b>CHAPTER VII</b>		
<b>THERMOELASTIC STATE OF THE PIECEWISE HOMOGENEOUS</b>		
<b>MEDIUM WITH THE SYSTEM OF THIN INCLUSIONS .....</b>		
		<b>511</b>
§ 38.	The stress concentration in thermoelastic solid with interphase inclusions. A plane temperature field .....	511
§ 39.	Thermoelastic problem in the conditions of generalized plane temperature field .....	528
§ 40.	Limit heat flows in plates with stochastic thermoconductive cracks .....	537
<b>CHAPTER VIII</b>		
<b>THE ANALYSIS OF PROBLEMATIC OF INCLUSIONS</b>		
<b>AND METHODS OF ITS SOLUTION IN MECHANICS OF</b>		
<b>THE DEFORMABLE SOLIDS .....</b>		
		<b>541</b>
§ 41.	The general questions of the inclusions theory .....	541
§ 42.	Methods of the analysis of solids with inclusions of an arbitrary shape .....	548
§ 43.	Asymptotic methods .....	559
§ 44.	Experimental methods .....	562
§ 45.	Direct numeric methods .....	566
§ 46.	Methods of the theory of thin-walled inclusions .....	569
§ 47.	Problems of the theory of thin-walled inclusions in isotropic medium .....	584
§ 48.	Problems of the theory of thin-walled inclusions in anisotropic medium .....	617
§ 49.	Thin inclusions in piezoelectric materials .....	626
§ 50.	Fracture of solids with inclusions .....	627
	<b>REFERENCES .....</b>	<b>633</b>
	<b>THE LIST OF ABBREVIATIONS .....</b>	<b>705</b>

---

## THE AUTHOR

### **Sulym Georhij (Heorhij) Teodorovych**

D.Sc., Professor, the Honored Worker of Ukraine in the field of Education. He is the expert in the field of solid mechanics. He concerns with subjects of the theory of elasticity and thermoelasticity, in particular stress concentration near cracks and thin inhomogeneities, fracture mechanics of materials and structures, the theory of composite materials, the theory of dislocations, engineering science, history of mathematics and mechanics, the Ukrainian scientific terminology etc. He has processed the theory of thin elastic and inelastic inhomogeneities in isotropic and anisotropic thermoelastic medium. He has authored more than 340 scientific works and 16 handbooks, including four monographs and the known handbooks in the co-authorship with V.V. Bozhydarnik “Elements of the theory of elasticity” (Lviv: Svit, 1994. 560 p. In Ukrainian) and “Elements of the theory of plasticity and strength” (Lviv: Svit, 1999. 945 p. In Ukrainian).

He was born on June, 2, 1948 in Lviv. In 1971 he has graduated from the department of mechanics and mathematics of I. Franko state university of Lviv (in mechanics). He studied in postgraduate study of the chair of mechanics.

Sulym G.T. is a vice-president of the Ukrainian Society on Fracture Mechanics, a member of the National Committee of Ukraine on Theoretical and Applied Mechanics, a fellow of the Shevchenko Scientific Society, a member of the European Structural Integrity Society (ESIS).

Наукове видання

СУЛИМ Георгій Теодорович

**ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОЇ  
РІВНОВАГИ ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ  
З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Редактор – Н.П.Долінчук  
Технічний редактор – В.І.Бартошевський  
Видавничий редактор – О.Р.Місьонг  
Комп'ютерне складання – Г.Т.Сулим  
Комп'ютерна верстка – Г.Т.Сулим  
Відповідальний за випуск – В.С.Попович

Підписано до друку 17.08.2007  
Формат 70x100 1/16. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman, Arial. Ум. друк. арк. 41,52  
Наклад 300 прим. Зам. № 11/07

Видавництво  
Наукове товариство ім. Шевченка  
79013, Львів-13, вул. Генерала Чупринки, 21.

Надруковано у  
Дослідно-видавничому центрі НТШ  
79008 Львів, вул. Винниченка, 26.  
Свідоцтво про внесення до  
Державного реєстру суб'єктів видавничої справи  
ДК № 884 від 04.04.2002

## СУЛИМ Георгій Теодорович



Доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений працівник освіти України. Спеціаліст у галузі механіки деформівного твердого тіла. Займається питаннями теорії пружності й термопружності, зокрема концентрації напружень біля тріщин та тонких неоднорідностей, механіки руйнування матеріалів та конструкцій, теорії композиційних матеріалів, теорії дислокацій, машинознавства, історії математики і механіки, української наукової термінології тощо. Опрацював теорію тонких пружних і непружних неоднорідностей в ізотропних та анізотропних термопружних середовищах.

Опублікував більше 340 наукових праць та 16 навчально-методичних видань. У тому числі – чотири монографії та у співавторстві з В.В.Божидарніком відомі навчальні посібники «Елементи теорії пружності» (Львів: Світ, 1994. 560 с.) і «Елементи теорії пластичності та міцності» (Львів: Світ, 1999. 945 с.).

Народився 2 червня 1948 р. у м. Львові, 1971 р. закінчив механіко-математичний факультет Львівського державного університету ім. І.Франка (спеціальність механіка). Навчався в аспірантурі кафедри механіки.

Дійсний член Наукового товариства ім. Шевченка, член Українського товариства з механіки руйнування матеріалів і заступник голови Товариства, член Національного комітету України з теоретичної та прикладної механіки, член Європейського товариства з цілісності конструкцій (ESIS).