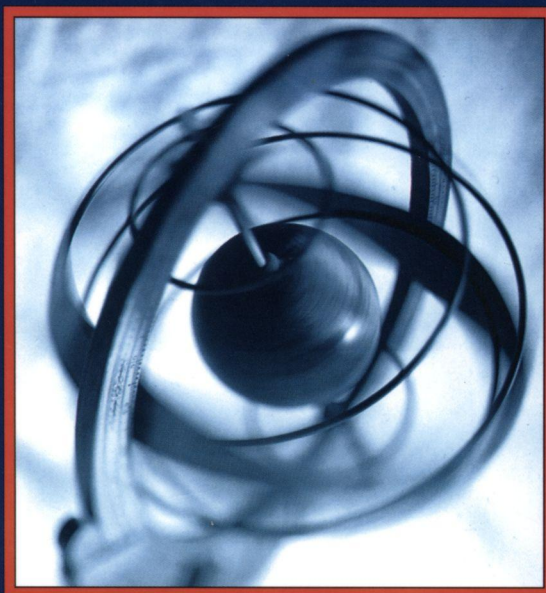


І.Є. ЛОПАТИНСЬКИЙ, І.Р. ЗАЧЕК,
Г.А. ІЛЬЧУК, Б.М. РОМАНИШИН

ФІЗИКА



ФІЗИКА ДЛЯ ІНЖЕНЕРІВ

ПЕРЕДМОВА..... 7**I. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ 9**

§1. Швидкість і прискорення	9
§2. Закони динаміки матеріальної точки .	12
§3. Закон збереження імпульсу.....	14
§4. Центр мас (інерції) механічної системи і закон його руху	15
§5. Робота сили та її вираз через криволінійний інтеграл.....	15
§6. Кінетична енергія механічної системи.....	17
§7. Потенціальна енергія	18
§8. Закон збереження механічної енергії. Дисипація енергії. Закон збереження і перетворення енергії.....	20
§9. Кутова швидкість і кутове прискорення.....	21
§10. Момент сили і момент імпульсу механічної системи. Момент інерції тіла відносно осі	24
§11. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. Кінетична енергія тіла, що обертається	27
§12. Закон збереження моменту імпульсу	28
§13. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань	29
§14. Пружинний, математичний і фізичний маятники.....	31
§15. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття.....	34
§16. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	36
§17. Диференціальне рівняння згаючих коливань і його розв'язання ...	38
§18. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язання. Резонанс	39
§19. Утворення хвиль в пружному середовищі. Поздовжні і поперечні	

хвилі. Рівняння біжучої хвилі.....	42
§20. Енергія хвилі	45
§21. Інтерференція хвиль. Рівняння стоячої хвилі.....	47
§22. Рівняння нерозривності. Рівняння Бернуллі	50
§23. Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності.....	52
§24. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца	53
§25. Поняття одночасності. Відносність довжин і проміжків часу	54
§26. Релятивістський закон додавання швидкостей	55
§27. Елементи релятивістської динаміки. Взаємозв'язок маси і енергії	56

II. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ.....58

§28. Статистичний і термодинамічний методи дослідження. Термодинамічні параметри. Рівноважний стан і процеси...58	
§29. Рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску	60
§30. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне трактування абсолютної температури	62
§31. Розподіл Максвелла молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху	63
§32. Барометрична формула. Розподіл Больцмана частинок у зовнішньому потенціальному полі.....	65
§33. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул....	67
§34. Перший закон термодинаміки. Робота газу при зміні його об'єму	69
§35. Теплоємність. Класична молекулярно-кінетична теорія теплоємностей ідеального газу та її обмеженість	72
§36. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроеесів	74
§37. Адіабатний процес. Політропний процес.....	75

§38. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул	77	ного провідника, конденсатора. Енергія електростатичного поля.	131
§39. Явища перенесення у термодинамічних нерівноважних системах	78	IV. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.....	133
§40. Коловий процес. Теплові двигуни і холодильні машини. Оборотні і необоротні процеси.....	85	§58. Постійний електричний струм	133
§41. Цикл Карно і його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу	87	§59. Класична електронна теорія електропровідності металів і її дослідне обґрунтування. Виведення закону Ома в диференціальній формі із електронних представлень	137
§42. Ентропія. Ентропія ідеального газу .	88	§60. Закон Відемана-Франца. Недоліки класичної електронної теорії провідності металів.....	141
§43. Ентропія і термодинамічна ймовірність	91	§61. Робота виходу електронів з металу. Термоелектронна емісія	143
§44. Другий і третій закони термодинаміки.....	93	§62. Струм в газах.....	146
§45. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса	95	§63. Види самостійного розряду	150
§46. Порівняння ізотерм Ван-дер-Ваальса з експериментальними. Критичний стан	97	§64. Плазма.....	153
§47. Внутрішня енергія реального газу ...	101	V. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	156
III. ЕЛЕКТРОСТАТИКА	103	§65. Магнітне поле. Магнітна індукція.	156
§48. Закон збереження електричного заряду. Електричне поле. Напруженість електричного поля	103	§66. Закон Біо - Савара - Лапласа.....	158
§49. Робота при переміщенні заряду в електростатичному полі. Потенціал електричного поля. Напруженість як градієнт потенціалу	106	§67. Закон Ампера	160
§50. Потік вектора напруженості. Теорема Остроградського-Гаусса	109	§68. Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі. Вихровий характер магнітного поля.....	161
§51. Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів	112	§69. Магнітне поле тороїда і довгого соленоїда.....	163
§52. Типи діелектриків. Електронна і орієнтаційна поляризація	115	§70. Сила Лоренца	164
§53. Електричне поле в речовині. Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику. Електричне зміщення	118	§71. Ефект Холла	166
§54. Сегнетоелектрики.	122	§72. Контур зі струмом в магнітному колі	168
§55. Провідники в електричному полі	124	§73. Магнітний потік. Теорема Остроградського-Гаусса	169
§56. Електроємність відокремленого провідника. Конденсатори	126	§74. Робота при переміщенні провідника і контуру зі струмом у магнітному полі.....	170
§57. Енергія зарядженого відокремле-		§75. Магнітні моменти атомів. Намагніченість. Атом в магнітному полі	172
		§76. Елементарна теорія діа – і парамагнетизму	175
		§77. Магнітне поле в речовині. Закон	

повного струму для магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля.....	178	щілині і на дифракційній ґратці	223
§78. Феромагнетики	180	§97. Дифракція рентгенівського випромінювання.....	229
§79. Явище електромагнітної індукції. Закон Ленца. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея).....	183	§98. Дисперсія світла. Області нормальної і аномальної дисперсії.....	230
§80. Виведення закону електромагнітної індукції із закону збереження енергії, а також на основі електронної теорії	185	§99. Електронна теорія дисперсії світла.....	233
§81. Явище самоіндукції. Індуктивність..	187	§100. Поглинання світла	236
§82. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність	189	§101. Природне і поляризоване світло. Закон Малюса.....	238
§83. Енергія магнітного поля	190	§102. Поляризація світла при відбиванні. Закон Брюстера	241
§84. Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля. Струм зміщення	192	§103. Подвійне променезаломлення	242
§85. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля.....	196	§104. Штучна оптична анізотропія	246
§86. Електричний коливальний контур. Власні електромагнітні коливання.....	197	§105. Обертання площини поляризації.....	249
§87. Основні властивості електромагнітних хвиль	199	§106. Ефект Доплера	251
§88. Енергія електромагнітних хвиль. Потік енергії. Вектор Пойнтінга.....	203	VII. КВАНТОВА ПРИРОДА ВИПРОМІНЮВАННЯ	253
VI. ХВИЛЬОВА ОПТИКА	204	§107. Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа	253
§89. Інтерференція світла. Когерентність та монохроматичність світлових хвиль. Оптична довжина шляху	204	§108. Закон Стефана Больцмана. Закон Віна. Формула Релея-Джінса	256
§90. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел	208	§109. Квантова гіпотеза і формула Планка	259
§91. Інтерференція світла у тонких плівках.....	209	§110. Зовнішній фотоэффект і його закони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоэффекту	261
§92. Практичне застосування інтерференції світла.....	214	§111. Маса та імпульс фотона	264
§93. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля	217	§112. Ефект Комптона і його теорія	267
§94. Метод зон Френеля. Прямолінійне поширення світла.....	219	VIII. ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ ..	270
§95. Дифракція Френеля на круглomu отворі та диску	221	§113. Досліди Резерфорда. Ядерна модель атома	270
§96. Дифракція Фраунгофера на одній		§114. Атом водню і його спектр за теорією Бора.....	272
		§115. Формула де Бройля. Дослідне обґрунтування корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей речовин	277
		§116. Співвідношення невизначеностей як прояв корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей матерії. Обмеженість механічного детермінізму.....	280
		§117. Хвильова функція і її	

статистичний зміст.....	283	§133. Ядерні реакції.....	335
§118. Рівняння Шредінгера. Принцип причинності в квантовій механіці	285	§134. Реакція ядерного поділу. Ланцюгова реакція поділу. Ядерний реактор	340
§119. Рух вільної частинки. Частинка в прямокутній потенціальній ямі. Тунельний ефект	288	§135. Реакція синтезу атомних ядер. Проблема керованих термоядерних реакцій.....	345
§120. Атом водню у квантовій механіці ..	292	§136. Елементарні частинки, їх класифікація і взаємна перетворюваність.....	348
§121. Дослід Штерна і Герлаха. Спін електрона	296	X. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА	351
§122. Принцип Паулі. Розподіл електронів в атомі за станами	298	§137. Поняття про квантові статистики Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака.....	351
§123. Рентгенівські промені.....	300	§138. Розподіл електронів провідності в металі за енергіями. Енергія Фермі.....	353
§124. Поняття про енергетичні рівні молекул. Спектри молекул.....	303	§139. Енергетичні зони в кристалах.....	356
§125. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання.....	308	§140. Розподіл електронів по енергетичних зонах. Валентна зона і зона провідності. Метали, діелектрики і напівпровідники.....	360
§126. Оптичні квантові генератори	311	§141. Власна провідність напівпровідників.....	361
§127. Комбінаційне розсіяння світла	315	§142. Домішкова провідність напівпровідників	364
ІХ. ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА ТА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК.....	318	§143. Р-п перехід і його вольт-амперна характеристика.....	367
§128. Розмір, склад і заряд ядра. Масове і зарядове число.....	318	§144. Люмінесценція твердих тіл.....	372
§129. Дефект маси і енергія зв'язку ядра.....	320	ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	376
§130. Взаємодія нуклонів і поняття про властивості і природу ядерних сил.....	322	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	385
§131. Радіоактивність. Основний закон радіоактивного перетворення атомних ядер.....	325		
§132. Закономірності радіоактивного випромінювання атомних ядер.....	329		

I. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

§1. Швидкість і прискорення

Матеріальна точка, рухаючись, описує деяку лінію в просторі. Ця лінія називається *траєкторією*. Залежно від форми траєкторії рух може бути прямолінійним або криволінійним.

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж довільної криволінійної траєкторії (рис. 1)

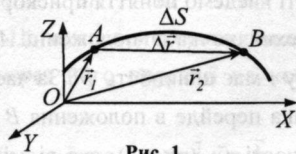


Рис. 1

Положення точки, що рухається вздовж траєкторії будемо задавати радіус-вектором \vec{r} , який проведений в цю точку з точки O , яка прийнята за початок координат. Оскільки декартові координати точки x , y , і z числово збігаються з проекціями вектора \vec{r} на осі координат, то має місце розкладання:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні вектори (орти) вздовж додатних напрямків осей OX , OY , OZ відповідно. Довжина кожного з ортів дорівнює

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Нехай матеріальна точка в момент часу t знаходиться в положенні A з радіус-вектором \vec{r}_1 . Через проміжок часу Δt точка переміститься в положення B з радіус-вектором \vec{r}_2 .

Довжина ділянки траєкторії AB , яка пройдена точкою з моменту початку відліку часу, називається *довжиною шляху* ΔS . Довжина шляху, пройденого матеріальною

точкою, є скалярною функцією часу $\Delta S = \Delta S(t)$.

Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведений з початкового положення рухомої точки в положення її в даний момент часу, називається *вектором переміщення*.

Щоб охарактеризувати рух матеріальної точки, вводять векторну фізичну величину – *швидкість*, яка характеризує не тільки швидкість руху частинки вздовж траєкторії, але й напрямок в якому рухається частинка в кожний момент часу.

Нехай матеріальна точка рухається по якійсь криволінійній траєкторії (рис. 2).

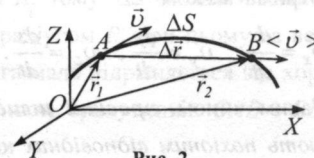


Рис. 2

Вектором середньої швидкості $\langle \vec{v} \rangle$ руху точки в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$ називається відношення приросту $\Delta \vec{r}$ радіус-вектора точки за цей інтервал часу до його величини Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор $\langle \vec{v} \rangle$ напрямлений так само як $\Delta \vec{r}$, тобто вздовж хорди AB .

Якщо у виразі для $\langle \vec{v} \rangle$ перейти до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо вираз для миттєвої швидкості \vec{v} рухомої матеріальної точки в момент проходження її через положення A траєкторії:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Миттєва швидкість \vec{v} – векторна величина, яка дорівнює першій похідній радіус-вектора рухомої точки за часом.

Вектор швидкості \vec{v} напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в сторону руху.

Продиференціюємо за часом вираз для радіус-вектора \vec{r} , враховуючи, що \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – сталі вектори. У результаті отримаємо вираз

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Швидкість можна також подати у вигляді:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

де v_x , v_y , v_z – проекції швидкості на координатні осі. Порівнюючи ці два вирази для \vec{v} , отримаємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким чином, **проекції швидкості дорівнюють похідним відповідних координат за часом.**

Модуль швидкості можна обчислити через проекції швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Числове значення миттєвої швидкості дорівнює першій похідній за часом від $S(t)$:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Якщо вираз $dS = v dt$ проінтегрувати за часом в межах від t до $t + \Delta t$, то отримаємо довжину шляху, який пройдемою точкою за час Δt :

$$S = \int_t^{t+\Delta t} v(t) dt.$$

Довжина шляху, який пройдений точкою за проміжок часу від t_1 до t_2 ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

У випадку нерівномірного руху числове значення миттєвої швидкості стало і

$$S = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v \Delta t.$$

У випадку нерівномірного руху вектор швидкості змінюється і за величиною за напрямком. Для характеристики зміни швидкості введемо поняття прискорення.

Нехай точка в положенні A в момент часу t має швидкість \vec{v} . За час Δt рухома точка перейде в положення B і набуде швидкості \vec{v}_1 (рис. 3), яка відмінна від \vec{v} як за модулем, так і за напрямком $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v}$. Перенесемо вектор \vec{v} в точку B і знайдемо $\Delta \vec{v}$.

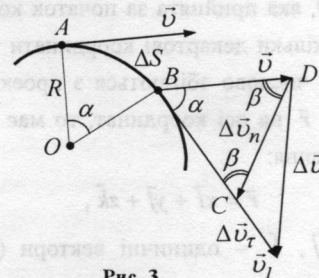


Рис. 3

Середнім прискоренням нерівномірного руху в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$ називається вектор $\langle \vec{a} \rangle$, який дорівнює відношенню приросту $\Delta \vec{v}$ вектора швидкості точки до проміжку часу Δt :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Вектор $\langle \vec{a} \rangle$ збігається за напрямком з вектором зміни швидкості $\Delta \vec{v}$.

Миттєвим прискоренням точки моменту часу t називають векторну величину \vec{a} , яка дорівнює границі середнього прискорення, якщо $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Прискорення точки дорівнює першій похідній від її швидкості \vec{v} за часом.

Диференціюючи за часом співвідношення

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k},$$

отримаємо для прискорення вираз:

$$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}.$$

Це саме прискорення можна виразити через його проекції на координатні осі:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Порівнюючи ці два вирази для прискорення, випливає, що

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Таким чином, **проекції прискорення дорівнюють другим похідним за часом від відповідних координат.**

Розкладемо вектор зміни швидкості $\Delta \vec{v}$ на дві складові: $\Delta \vec{v}_\tau$ і $\Delta \vec{v}_n$ так, щоб $BC=BD=v$. Складова $\Delta \vec{v}_\tau$ визначає зміну швидкості лише за величиною: якщо рух рівномірний, то $v_1=v$ і $\Delta \vec{v}_\tau = 0$. Інша складова $\Delta \vec{v}_n$ існує і при рівномірному русі, очевидно, $\Delta \vec{v}_n = 0$ в тому випадку, якщо рух тіла прямолінійний. Якщо кут $\alpha \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ і вектор $\Delta \vec{v}_n$ стає перпендикулярним вектору швидкості \vec{v} . Таким чином, вектор прискорення можна зобразити у вигляді суми двох взаємно перпендикулярних векторів:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau + \Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} =$$

$$= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Величина \vec{a}_τ називається **тангенціальним прискоренням**, яке характеризує зміну швидкості лише за величиною і напрямлене вздовж дотичної до траєкторії. Числове значення вектора \vec{a}_τ дорівнює:

$$a_\tau = |\vec{a}_\tau| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|.$$

Величина \vec{a}_n називається вектором **нормального прискорення** і характеризує зміну швидкості лише за напрямком. Це прискорення завжди перпендикулярне до напрямку швидкості. Для його обчислення припустимо, що точка B досить близька до точки A , тому ΔS можна вважати дугою кола радіусом R , при цьому за величиною ця дуга мало відрізняється від хорди AB . З подібності трикутників OAB і BDC отримаємо:

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{AB}{R} \quad \text{і} \quad \Delta v_n = \frac{v}{R} AB.$$

Таким чином

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB}{\Delta t} \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

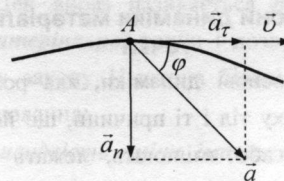


Рис. 4

Отже, повне прискорення \vec{a} матеріальної точки дорівнює векторній сумі її тангенціального і нормального прискорень (рис. 4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Модуль прискорення точки

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2}.$$

Напрямок повного прискорення визначається кутом φ між векторами \vec{a}_τ і \vec{a} .

З рис. 4 видно, що:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Розглянемо рівнозмінний прямолінійний поступальний рух тіла вздовж осі OX .

Оскільки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{const},$$

то

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt \quad \text{і} \quad v_x = v_{x0} + a_x t.$$

Враховуючи, що $v_x = \frac{dx}{dt}$, отримусмо:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t a_x dt = \int_0^t (v_{x0} + a_x t) dt.$$

В результаті залежність від часу координати x будь-якої точки має вигляд:

$$x_t = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Тут x_0 і v_{x0} - значення x і v_x в момент часу $t=0$.

§2. Закони динаміки матеріальної точки

В основі динаміки, яка розглядає закони руху тіл і ті причини, що його викликають або змінюють, лежать закони Ньютона.

Перший закон Ньютона: всяка матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки дія з боку інших тіл не змусить її змінити цей стан.

Перший закон Ньютона називають законом інерції, а властивість тіл зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху без дії на них інших тіл називають

інертністю.

Системи відліку, відносно яких виконується перший закон Ньютона, називаються *інерціальними системами відліку*. Зміст першого закону Ньютона зводиться до двох тверджень:

- 1) всім тілам властива інертність;
- 2) існують інерціальні системи відліку.

Інерціальних систем існує нескінченна множина. Довільна система відліку, яка рухається відносно деякої інерціальної системи прямолінійно і рівномірно, буде також інерціальною.

Інерціальною системою відліку можна вважати систему відліку, зв'язану із Сонцем, - початок координат знаходиться в центрі Сонця, а осі проведено в напрямку певних зірок. Система відліку, яка зв'язана із Землею, строго кажучи, неінерціальна.

Проте здебільшого в практичних задачах ефекти, які зумовлені неінерціальністю земної системи відліку, дуже малі. Тому надалі вважатимемо цю систему відліку інерціальною.

Перш ніж розкривати зміст другого закону Ньютона, зупинимось на поняттях маси і сили.

Фізична величина, яка є мірою інертності матеріальної точки, називається *інертною масою* m_i . Маса тіл теж характеризує здатність його взаємодіяти з іншими тілами згідно з законом всесвітнього тяжіння. В цьому випадку маса є мірою гравітаційної взаємодії і називається *гравітаційною масою* (m_g). В сучасній фізиці з високим ступенем точності встановлено, що $m_i = m_g$, якщо швидкість матеріальної точки набагато менша від швидкості світла у вакуумі.

Маса тіла – скалярна величина і, як

показує дослід, маса – величина адитивна: маса тіла дорівнює сумі мас всіх частинок цього тіла. Відповідно маса довільної механічної системи дорівнює сумі мас всіх матеріальних точок, на які цю систему можна уявно розбити.

Щоб виміряти масу тіла, треба порівняти її з еталоном, який прийнятий за одиницю маси. У повсякденній практиці порівнюють маси тіл на важільних терезах.

Найважливішою характеристикою взаємодій тіл є сила.

Силою називається векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл, внаслідок якої тіло отримує прискорення або змінює свою форму і розміри.

В кожний момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямком у просторі і точкою прикладання.

Точку прикладання сили можна перенести вздовж її напрямку не змінюючи в цілому дії сили на тіло. Але таке перенесення точок прикладання сили змінює розподіл деформацій і сил пружності в реальному тілі.

Другий закон Ньютона встановлює зв'язок між взаємодією тіл і зміною їх поступального руху і тому він є основним законом динаміки поступального руху.

Якщо на одне і те ж тіло діють різні сили, то виявляється, що прискорення, яке набуває тіло, завжди прямо пропорційне величині прикладеної сили:

$$a \sim F \quad (m = \text{const}).$$

При дії одної і тої ж сили на тіла з різними масами їх прискорення буде обернено пропорційними до маси тіл:

$$a \sim \frac{1}{m} \quad (F = \text{const}).$$

Використовуючи ці вирази і врахо-

вуючи, що сила і прискорення векторні величини, отримаємо:

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибору одиниць вимірювання. Отриманий вираз виражає зміст *другого закону Ньютона*:

прискорення, що його набуває тіло, прямо пропорційне до сили, яка діє на нього, і обернено пропорційне до маси цього тіла; за напрямком прискорення збігається із силою.

В системі одиниць *SI* коефіцієнт пропорційності $k=1$ і

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

або, якщо маса є стала величина, то

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

Векторна величина $\vec{P} = m\vec{v}$ називається *імпульсом* (кількістю руху) матеріальної точки. Тоді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Цей вираз називається *рівнянням руху матеріальної точки* і дозволяє дати другому закону Ньютона більш загальне формулювання:

швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює силі, яка діє на точку.

Другий закон Ньютона справедливий лише в інерціальних системах відліку.

При дії на матеріальну точку кількох сил виконується *принцип незалежності дії сил*: якщо на матеріальну точку діють одночасно кілька сил, то кожна з цих сил надає матеріальній точці прискорення, що визначається другим законом

Ньютона так, нібито інших сил не було.

Взаємодія між матеріальними точками (тілами) визначається **третьім законом Ньютона**:

сили взаємодії двох матеріальних точок в інерціальній системі відліку однакої за модулем, напрямлені у протилежні сторони і діють вздовж прямої, що з'єднує ці точки.

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki},$$

де \vec{F}_{ik} – сила, що діє на i -у точку з боку k -ї точки, а \vec{F}_{ki} – сила, що діє на k -у точку з боку i -ї. Сили \vec{F}_{ik} і \vec{F}_{ki} прикладені до різних точок (рис. 5).

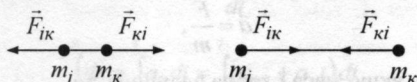


Рис. 5

ШЛЛЕР МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ
(1848-1910)

Зробив внесок у розвиток понять сили і маси. Розрізняв статичне і кінематичне тлумачення сили. Висунув ідею про можливість побудови механіки мас без явного використання поняття сили

§3. Закон збереження імпульсу

Сукупність матеріальних точок (тіл), які розглядаються як єдине ціле, називається **механічною системою**. Сили взаємодії між матеріальними точками механічної системи називаються внутрішніми. Сили, з якими на матеріальні точки системи діють зовнішні тіла називаються зовнішніми. Механічна система, в якій тіла взаємодіють між собою і на яку не діють зовнішні сили, називається **замкненою**.

Розглянемо механічну систему, яка складається із n тіл, маси і швидкості яких дорівнюють відповідно m_1, m_2, \dots, m_n і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Нехай $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожне

з цих тіл, а \vec{F}_{ik} – внутрішня сила, яка діє на i -е тіло з боку k -го.

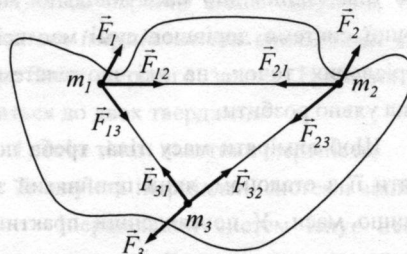


Рис. 6

На рис. 6 наведені рівнодійні зовнішніх сил і внутрішні сили, які діють між тілами механічної системи, що складається, наприклад, із трьох тіл. Запишемо другий закон Ньютона для кожного з n тіл механічної системи:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2,$$

$$\dots$$

$$\frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_n.$$

Додаючи почленно ці рівняння, знаходимо:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{(n-1)n} + \vec{F}_{n(n-1)}) + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

За третім законом Ньютона

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}.$$

Тому

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{і} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F},$$

де \vec{P} – імпульс системи, а \vec{F} – головний вектор зовнішніх сил.

Отже, похідна за часом від імпульсу механічної системи дорівнює головному

вектору зовнішніх сил, що діють на систему.

У випадку замкненої системи

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = 0,$$

тобто

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

Цей вираз є **законом збереження імпульсу**: імпульс замкненої системи зберігається, тобто не змінюється із бігом часу.

Закон збереження імпульсу є наслідком **однорідності простору**, яка полягає в тому, що фізичні властивості і закони руху замкненої системи не залежать від вибору положення початку координат інерціальної системи відліку.

§4. Центр мас (інерції) механічної системи і закон його руху

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок називається точка C , радіус-вектор \vec{r}_C якої дорівнює

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

де $M = \sum_{i=1}^n m_i$ - загальна маса всієї системи,

\vec{r}_i - радіус-вектор i -ї матеріальної точки.

Якщо радіус-вектори \vec{r}_i проведені із центра мас C , то $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0$.

Отже, **центр мас** - це геометрична точка, для якої сума добутків мас всіх матеріальних точок, що утворюють механічну систему, на їх радіус-вектори, які проведені з цієї точки, дорівнює нулю.

Швидкість центра мас

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{P}}{M}.$$

Отже,

$$\vec{P} = M \vec{v}_C,$$

тобто імпульс системи дорівнює добутку величини маси системи на величину швидкості руху її центра мас.

Продиференціювавши це рівняння за часом, отримуємо:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = M \vec{a}_C = \vec{F}.$$

Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, в якій зосереджено всю масу системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору прикладених до системи зовнішніх сил.

§5. Робота сили та її вираз через криволінійний інтеграл

Нехай тіло рухається прямолінійно і на всьому переміщенні $\Delta \vec{r}$ на нього діє стала за величиною і напрямком сила \vec{F} , яка утворює кут α з напрямком переміщення. Дію сили \vec{F} на переміщенні $\Delta \vec{r}$, характеризують величиною, яку називають **роботою**.

Робота A , яка виконана силою \vec{F} , - це фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку сили на переміщення:

$$A = (\vec{F}, \Delta \vec{r}) = FS \cos \alpha,$$

де S - шлях пройдений тілом за час дії сили.

У загальному випадку сила може змінюватись як за модулем, так і за напрямком. При цьому сила \vec{F} може залежати як від координат x, y, z точки прикладання сили, так і від швидкості точки. Якщо розглянути елементарне переміщення $d\vec{r}$, то силу \vec{F} можна вважати сталою, а

рух точки її прикладання – прямолінійним. **Елементарною роботою** dA сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярна величина

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{v}dt) = F \cos \alpha dS = F_S dS,$$
 де $dS = |d\vec{r}|$ - елементарний шлях, α - кут між векторами \vec{F} і $d\vec{r}$, F_S - проекція вектора \vec{F} на напрямок вектора $d\vec{r}$ (рис.7).

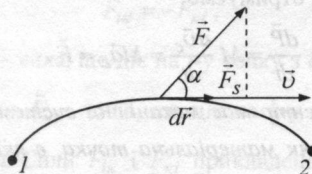


Рис. 7

Якщо вектори \vec{F} і $d\vec{r}$ задані своїми декартовими координатами так, що

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k},$$

то елементарна робота

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

де F_x, F_y, F_z - проекції сили на координатні осі; dx, dy, dz - зміни координат радіус-вектора \vec{r} при переміщенні $d\vec{r}$.

Робота сили на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2 дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт на окремих нескінченно малих ділянках шляху:

$$A = \int_1^2 F dS \cos \alpha = \int_1^2 F_S dS,$$

де F_S - проекція сили F на напрямок переміщення.

Отриманий інтеграл називається криволінійним інтегралом, оскільки він представляє інтеграл від функції F_S вздовж деякої кривої, яка є траєкторією руху. Часто траєкторію позначають літерою L , тоді

$$A = \int_L \vec{F} d\vec{r}.$$

Таким чином робота сили вздовж кривої L дорівнює криволінійному інтегралу від вектора \vec{F} вздовж траєкторії L .

Нехай залежність сили F_S від шляху S зображена графічно (рис. 8). Тоді робота A на шляху від точки 1 до точки 2 числово дорівнює площі фігури, яка обмежена кривою $F_S(S)$, ординатами, які проходять через точки S_1 і S_2 та віссю S .

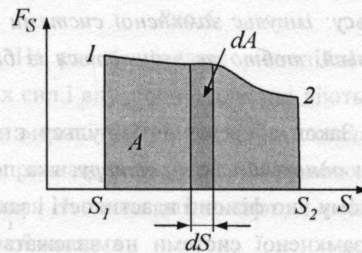


Рис. 8

Сила, що діє на тіло, не виконує роботу, якщо:

- а) тіло перебуває у спокої ($dS=0$);
- б) сила перпендикулярна до напрямку переміщення тіла ($\alpha = 90^\circ$).

Якщо $\alpha < \pi/2$, то робота сили додатна і силу \vec{F} називають рушійною силою. Якщо кут $\pi \geq \alpha > \pi/2$, то робота сили від'ємна і силу \vec{F} називають силою опору.

Якщо на тіло, яке рухається поступально, одночасно діють декілька сил, то робота рівнодійної сили при переміщенні на $d\vec{r}$ дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил:

$$dA = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) d\vec{r} = dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n.$$

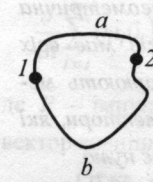


Рис. 9

Сила \vec{F} , що діє на матеріальну точку або на тіло, яке рухається поступально, називається **консервативною або потенціальною**, якщо робота

A_{1-2} , яка виконується цією силою при переміщенні точки (тіла) з одного довільного положення 1 в інше 2, не залежить від того, вздовж якої траєкторії відбулось це переміщення (рис. 9):

$$A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2}.$$

Зміна напрямку руху вздовж траєкторії на протилежний спричинює зміну знака роботи (кут α замінюється на $\pi - \alpha$ і $\cos \alpha$ змінює свій знак). Тому робота консервативної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж замкненої траєкторії L ($1-a-2-b-1$) тотожно дорівнює нулю:

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = 0.$$

Прикладами консервативних сил можуть бути сили тяжіння, гравітаційні сили, сили пружності, сили електростатичної взаємодії між зарядженими тілами.

§6. Кінетична енергія механічної системи

Кінетичною енергією механічної системи називається енергія механічного руху цієї системи.

Сила \vec{F} , яка діє на тіло і викликає його рух, виконує роботу, а енергія рухомого тіла зростає на величину виконаної роботи:

$$dE_k = dA.$$

Використовуючи скалярний запис другого закону Ньютона і помноживши обидві частини на елементарний шлях dS , отримаємо

$$m \frac{dv}{dt} dS = F dS.$$

Оскільки $v = \frac{dS}{dt}$, то

$$dA = F dS = m v dv = dE_k$$

і

$$E_k = \int_0^v m v dv = \frac{m v^2}{2}.$$

Отже, кінетична енергія тіла, що рухається поступально дорівнює половині добутку маси цього тіла на квадрат його швидкості.

Проінтегруємо співвідношення $m v dv = dA$ вздовж деякої траєкторії від точки 1 до точки 2 в яких швидкість тіла v_1 і v_2 відповідно:

$$\int_{v_1}^{v_2} m v dv = \int_1^2 dA.$$

Звідси,

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = A.$$

Отже, зміна кінетичної енергії тіла дорівнює роботі, яка виконується над тілом.

Кінетичній енергії тіла можна надати і такого вигляду:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{(m v)^2}{2m} = \frac{P^2}{2m},$$

де P – імпульс тіла.

Кінетична енергія тіла не може бути від'ємною.

Повна кінетична енергія E_k системи дорівнює сумі кінетичних енергій E_{ki} всіх тіл, що входять до неї:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Кінетична енергія системи залежить від величини мас і швидкостей руху тіл, що входять до неї. При цьому неістотно, як тіло з масою m_i набуло швидкості v_i . Цей висновок можна сформулювати так: **кінетична енергія системи є функцією стану її руху.**

(4) Науково-технічна бібліотека
Національного університету
"Львівська політехніка"

Швидкість \vec{v}_i істотно залежить від вибору системи відліку. В різних інерціальних системах відліку, що рухаються одна відносно одної, швидкість \vec{v}_i i -го тіла системи, а отже, його кінетична енергія системи будуть неоднакові.

Кінетична енергія системи залежить від вибору системи відліку, тобто є величиною відносною.

Якщо в інерціальній системі відліку (і.с.в.) K кінетична енергія системи дорівнює E_K , то в і.с.в. K' , яка рухається відносно K поступально з швидкістю v_c , центра мас системи, то

$$E_K = E'_K + \frac{mv_c^2}{2},$$

де m – маса системи, E_K – кінетична енергія системи відносно і.с.в. K' .

Ця рівність описує **теорему Кюніга**: кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії цієї системи при її русі відносно і.с.в. K' , яка поступально рухається з початком в центрі мас і кінетичної енергії, яку мала би матеріальна точка, що має масу, яка дорівнює масі всієї системи і рухається зі швидкістю її центра мас.

§7. Потенціальна енергія

Потенціальною енергією механічної системи називається енергія, яка залежить від її конфігурації, тобто від взаємного розміщення всіх матеріальних точок системи і характеру консервативних сил, які діють між точками.

Робота A_{12} , що виконується консервативними силами при зміні конфігурації системи, не залежить від того, як здійснюється процес переходу з початкової конфігурації системи (1) в кінцеву (2). Робота

A_{12} повністю визначається початковою і кінцевою конфігураціями системи. Отже, роботу A_{12} можна подати у вигляді різниці значень деякої функції конфігурації системи $E_n(x, y, z)$, яка називається потенціальною енергією системи:

$$A_{12} = E_{n1} - E_{n2} = -(E_{n2} - E_{n1}).$$

Робота потенціальних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи. Відповідно елементарна робота консервативних сил при малій зміні конфігурації системи

$$dA = -dE_n, \text{ або } (\vec{F}, d\vec{r}) = -dE_n.$$

Звідси потенціальна енергія

$$E_n = -\int \vec{F} d\vec{r} + C,$$

де C – стала інтегрування, тобто потенціальна енергія визначається з точністю до деякої довільної сталої. Це не відбивається на фізичних законах, оскільки в них входить або різниця потенціальних енергій двох конфігурацій системи, або похідна E_n за просторовими координатами. В кожній задачі для отримання однозначної залежності потенціальної енергії системи від її конфігурації вибирають нульову конфігурацію, в якій потенціальну енергію системи вважають такою, що дорівнює нулеві.

Якщо відомий вираз функції $E_n(x, y, z)$, то можна знайти силу, що діє на матеріальну точку. Розглянемо переміщення точки паралельно осі Ox на dx . Таке переміщення супроводжується виконанням над точкою роботи $dA = F_x dx$. Та сама робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії: $dA = -dE_n$. Прирівнявши обидва вирази для роботи, отримаємо:

$$F_x dx = -dE_n.$$

Звідси

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x} \quad (y=const, z=const).$$

Тут ураховано те, що похідна відносно x обчислюється при умові, що координати y і z залишаються сталими.

Для компонент сил вздовж осей OY і OZ отримують аналогічні вирази. Отже,

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}$$

або

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k}\right).$$

Вектор

$$\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k},$$

який побудований за допомогою скалярної функції E_n , називається градієнтом функції E_n і позначається $grad E_n$. Напрямок вектора $grad E_n$ збігається з напрямком осі l , вздовж якої потенціальна енергія зростає з найбільшою швидкістю.

Отже, сила, що діє на матеріальну точку в потенціальному полі, дорівнює взятому із знаком мінус градієнту потенціальної енергії цієї точки:

$$\vec{F} = -grad E_n.$$

1. Потенціальна енергія матеріальної точки в однорідному силовому полі.

Поле називається однорідним, якщо сила \vec{F} , яка діє на матеріальну точку з боку поля, однакова у всіх точках поля. Нехай ця сила напрямлена вздовж осі OZ , тобто $\vec{F} = F_z \vec{k}$, де \vec{k} – орт осі OZ (рис. 10). Проекція F_z сили \vec{F} на вісь OZ не залежить від координати z матеріальної точки.



Рис. 10

Знайдемо потенціальну енергію матеріальної точки:

$$dE_n = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -F_z dz.$$

Звідси

$$E_n(z) - E_n(0) = -\int_0^z F_z dz = -F_z z,$$

де $E_n(0)$ – значення потенціальної енергії матеріальної точки на рівні $z=0$.

Наприклад, для тіла масою m , що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння біля поверхні Землі,

$$F_z = -mg$$

(\vec{g} – прискорення вільного падіння) і потенціальна енергія

$$E_n(h) = mgh,$$

де h – висота тіла над поверхнею Землі, а початок відліку енергії E_n вибрано так, що біля поверхні Землі $E_n=0$.

2. Потенціальна енергія матеріальної точки в полі центральних сил.

Сили, що діють на матеріальну точку, називаються **центральними**, якщо вони напрямлені вздовж прямих, що проходять через одну і ту саму нерухому точку – центр сил і залежать лише від відстані r до центра сил (рис. 11):

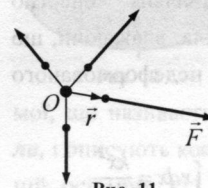


Рис. 11

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тут \vec{r} – радіус-вектор, який проведений з центра сил в точку поля, яка розглядається, $F_r(r)$ – проекція сили \vec{F} на напрямок вектора \vec{r} . Для сил відштовхування $F_r(r) > 0$, а для сил притягання $F_r(r) < 0$.

Знайдемо потенціальну енергію матеріальної точки:

$$dE_n = -dA = -F_r(r)dr,$$

$$E_n(r) - E_n(\infty) = -\int_{\infty}^r F_r(r)dr.$$

За початок відліку потенціальної енергії в даному випадку приймають енергію матеріальної точки, що знаходиться нескінченно далеко від центра сил, тобто вважають $E_n(\infty) = 0$ і

$$E_n(r) = -\int_{\infty}^r F_r(r)dr = \int_r^{\infty} F_r(r)dr.$$

3. Потенціальна енергія пружнодеформованого тіла

Під час деформації пружного тіла в ньому виникають внутрішні сили, які перешкоджають деформації тіла і називаються силами пружності. У разі поздовжнього розтягу або стиску тіла (наприклад, пружини вздовж осі OX) сила пружності

$$\vec{F} = -kx\vec{i},$$

де k – коефіцієнт пружності, який характеризує пружні властивості тіла; $x\vec{i}$ – вектор деформації (\vec{i} – орт вздовж осі OX).

Знайдемо потенціальну енергію пружнодеформованого тіла, вважаючи, що вона дорівнює нулю у недеформованого тіла, тобто при $x = 0$:

$$dE_n = kx dx, \quad E_n = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}.$$

§8. Закон збереження механічної енергії. Дисипація енергії. Закон збереження і перетворення енергії

Розглянемо систему матеріальних точок, маси яких m_1, m_2, \dots, m_n , що рухаються із швидкостями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Нехай F'_1, F'_2, \dots, F'_n – рівнодійні внутрішніх консервативних сил, що діють на кожну з цих точок, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – рівнодійні зовніш-

ніх сил, які теж вважаємо консервативними. Вважатимемо, що на матеріальні точки діють ще і зовнішні неконсервативні сили; рівнодійні цих сил, що діють на кожну з матеріальних точок, позначимо $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$.

Зміна кінетичної енергії

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

при малому переміщенні $d\vec{r}_i$ точок дорівнює сумі робіт, виконаних при цьому всіма силами:

$$dE_k = \sum_{i=1}^n dA_i^{F'} + \sum_{i=1}^n dA_i^F + \sum_{i=1}^n dA_i^f = d(A^{F'} + A^F) + dA^f,$$

де $d(A^{F'} + A^F)$ – суми елементарних робіт виконаних над матеріальними точками системи всіма консервативними силами, а dA^f – зовнішніми неконсервативними силами.

Стан системи матеріальних точок визначається і їх конфігурацією. Зміна потенціальної енергії системи дорівнює роботі консервативних сил. При малій зміні конфігурації системи

$$-dE_n = d(A^{F'} + A^F).$$

Із виразів для dE_k і dE_n маємо

$$dE_k = -dE_n + dA^f, \quad d(E_k + E_n) = dA^f.$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії системи називається її повною механічною енергією

$$E = E_k + E_n.$$

У разі переходу системи із стану 1 в який-небудь стан 2

$$\int_1^2 dE = \int_1^2 d(E_k + E_n) = A_{12},$$

тобто зміна повної механічної енергії системи при переході з одного стану в інший дорівнює роботі, яка виконана при цьому зовнішніми неконсервативними силами.

Якщо зовнішні неконсервативні сили відсутні, то

$$d(E_K + E_n) = 0 \text{ і } E_K + E_n = E = \text{const.}$$

Це рівняння виражає закон *збереження механічної енергії: в системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом.*

Закон збереження механічної енергії пов'язаний з *однорідністю часу*. Ця властивість виявляється в тому, що закони руху замкненої системи не залежать від вибору початку відліку часу.

Механічні системи, на тіла яких діють лише консервативні сили, називаються *консервативними*.

Існує ще один вид систем – *дисипативні системи*, в яких механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші форми енергії. Цей процес називається дисипацією енергії. Усі процеси в природі є дисипативними.

При „зникненні” механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Перетворення енергії під час її дисипації відбувається у відповідності із *законом збереження енергії*:

Енергія не виникає і не зникає, а тільки передається від одного тіла до іншого або перетворюється з одного виду в інший в еквівалентних кількостях.

В цьому і полягає фізична суть закону збереження і перетворення енергії – суть незнищенності матерії та її руху.

положення про те, що матерія не виникає, не руйнується, а зберігається: „Першу матерію не можна ніколи ні створити, ні зруйнувати, також ні збільшити, ні зменшити, і ту, яку створено на початку світу, і якою і в якій кількості створена, такою залишається досі й буде залишатися назавжди.”

А це є ніщо інше, як формулювання універсального філософського принципу збереження матерії. В ньому визначається не тільки кількісне, але й якісне збереження матерії, чого не було у висновках попередніх натурфілософів.

Першою та основною властивістю фізичного тіла Ф. Прокопович вважав рух, оскільки ним можна обґрунтувати усі явища природи. Пов'язував рух тіл з простором і часом, відкидав можливість існування тіл поза простором і часом.

§9. Кутова швидкість і кутове прискорення

Розглянемо обертання *абсолютно твердого тіла* – тіла, відстань між будь-якими двома точками якого стала, які б не були сили, що діють на нього.

Обертанням абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі називається

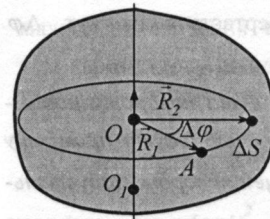


Рис. 12

такий його рух, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, перпендикулярних до нерухомої прямої, що називається *віссю обертання тіла*, і описують кола, центри яких лежать на цій осі (рис. 12). Обертання навколо осі OO_1 тіла можна здійснити, закріпивши нерухомо дві його точки O і O_1 .

Положення в просторі такого тіла визначається значенням кута повороту навколо осі обертання із деякого умовно вибраного початкового положення цього тіла. Обертання навколо нерухомої осі здійснюють ротори турбін, електричних генераторів і двигунів, колісні вали двигунів внутрішнього згоряння і т. д.

Обертанням абсолютно твердого

ПРОКОПОВИЧ ФЕОФАН
(1677-1736)

Сформулював (1708р.) загальне філософське

тіла навколо нерухомої точки – центра обертання – називається рух тіла, яке закріплене в одній нерухомій точці. Такий рух абсолютно твердого тіла в кожний момент часу можна розглядати як обертання навколо нерухомої осі, що проходить через центр обертання і називається **миттєвою віссю обертання тіла**. Положення миттєвої осі відносно нерухомої системи відліку, а також самого тіла з плином часу може змінюватися. Для однозначного задання положення такого тіла в просторі потрібно задати значення трьох незалежних координат.

Нехай точка A тіла рухається по колу зі швидкістю \vec{v} . Положення точки в момент часу t визначається радіус-вектором \vec{R}_1 , а в момент часу $t + \Delta t$ - радіус-вектором \vec{R}_2 ($|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = R$). За час Δt радіус-вектор повертається на кут $\Delta\varphi$ (рис. 12).

Відношення кута повороту радіус-вектора рухомої точки $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt , за який цей поворот відбувається, називається **середньою кутовою швидкістю точки**:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Мірою переміщення всього тіла за малий проміжок часу dt служить вектор $d\vec{\varphi}$ елементарного повороту тіла. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ дорівнює куту повороту тіла і напрямлений вздовж осі обертання за правилом правого гвинта: з кінця вектора $d\vec{\varphi}$ поворот тіла відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 13)

Вектори, напрямки яких зв'язуються з напрямком обертання, називаються псевдовекторами. Ці вектори не мають

певних точок прикладання: вони можуть відкладатися з довільної точки осі обертання.

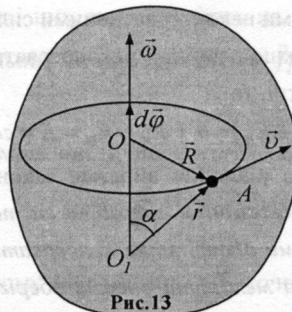


Рис.13

Кінематичною характеристикою напрямку і швидкості обертання тіла є **кутова швидкість**.

Кутовою швидкістю називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній кута повороту тіла за часом:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений вздовж осі обертання так, що з його кінця обертання видно проти руху стрілки годинника (рис. 13).

Вектор $\vec{\omega}$ визначає положення осі обертання, напрямок і швидкість обертання тіла.

Лінійна швидкість точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

З цього рівняння і рис. 13 випливає, що вектор лінійної швидкості \vec{v} дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ на радіус-вектор \vec{R} :

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

Якщо положення точки тіла що обертається визначається радіус-вектором \vec{r} , який проведений з будь-якої точки O_1 осі OO_1 обертання тіла (рис.13), то векторний добуток $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ збігається за напрямком з вектором \vec{v} і має модуль, який дорівнює

$\omega r \sin \alpha = \omega R$. Отже,

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Якщо за час t тіло здійснює N обертів, то час, протягом якого обертове тіло

здійснює один повний оберт $T = \frac{t}{N}$, називається **періодом обертання**. З іншого боку, тіло, яке рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω , за час T повертається на кут $\varphi = 2\pi$. Тому

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Кількість обертів за одиницю часу називається **частотою обертання**:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \omega = 2\pi n.$$

Вектор $\vec{\omega}$ може змінюватися як за рахунок зміни швидкості обертання тіла навколо осі (в такому разі він змінюється за величиною), так і за рахунок повернення осі обертання в просторі (в такому разі він змінюється за напрямком). Зміна вектора кутової швидкості з часом характеризується кутовим прискоренням.

Середнім кутовим прискоренням $\langle \vec{\varepsilon} \rangle$ називається фізична величина, яка дорівнює відношенню зміни кутової швидкості $\Delta\vec{\omega}$ до проміжку часу Δt , за який ця зміна відбулася:

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Миттєвим кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon}$ називається границя середнього кутового прискорення:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Отже, кутове прискорення дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості. Кутове прискорення, як і кутова швидкість, є псевдовектором.

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі зміна вектора $\vec{\omega}$ зумовлюється тільки зміною його числового значення і

$$\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлений вздовж осі обертання (рис. 14): у той самий бік, що й $\vec{\omega}$, при прискореному обертанні $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0 \right)$ і в протилежний бік – при сповільненому обертанні $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0 \right)$.

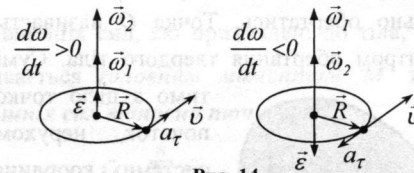


Рис. 14

Визначимо тангенціальне і нормальне прискорення точки A обертового тіла через кутову швидкість і кутове прискорення:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

При рівнозмінному ($\varepsilon = \text{const}$) обертанні із виразу $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ отримемо:

$$d\omega = \varepsilon dt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt \quad \text{і} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

де ω_0 - кутова швидкість при $t=0$.

Проінтегрувавши вираз

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

отримемо:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) \varepsilon dt, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

§10. Момент сили і момент імпульсу механічної системи. Момент інерції тіла відносно осі

Усяке тіло можна умовно поділити на таку кількість n малих частин, щоб розміри їх були малі порівняно з розмірами всього тіла. Отже, тіло завжди можна розглядати як систему з n матеріальних точок, причому маса m тіла дорівнює сумі мас

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Розглянемо закономірності руху твердого тіла, закріпленого в одній нерухомій точці O , навколо якої тіло може вільно обертатись. Точка O називається центром обертання твердого тіла. Сумі-

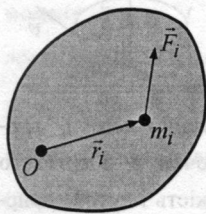


Рис. 15

тимо з цією точкою початок нерухомої системи координат. Тоді положення i -ої точки в просторі повністю визначається радіус-вектором \vec{r}_i , який проведений з центра O в цю точку (рис. 15). Позначимо \vec{F}_i – рівнодійну всіх зовнішніх сил, які прикладені до i -ої точки.

Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, яка приводить до зміни обертального руху тіла, введемо поняття моменту сили і моменту імпульсу.

Моментом сили \vec{F}_i відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r}_i , який проведений з точки O в точку прикладання сили, на силу \vec{F}_i :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Вектор \vec{M}_i напрямлений перпенди-

кулярно до площини векторів \vec{r}_i і \vec{F}_i (рис. 16).

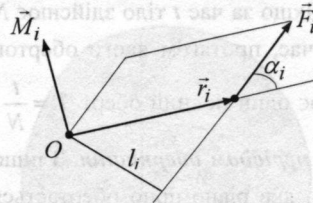


Рис. 16

Модуль моменту сили

$$M_i = F_i r_i \sin \alpha_i = F_i l_i,$$

де α_i – кут між \vec{r}_i і \vec{F}_i , а $l_i = r_i \sin \alpha_i$ – плече сили – довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на лінію дії сили \vec{F}_i .

Момент сили \vec{M}_i характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої він береться. Коли тіло може обертатися відносно точки O довільно, під дією сили тіло повертається навколо осі, яка перпендикулярна до площини, в якій лежать сила і точка O , тобто навколо осі, що збігається з напрямком моменту сили відносно даної точки.

Моментом сили відносно нерухомої осі OZ називається скалярна величина M_{iz} , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{M}_i моменту сили, який визначений відносно довільної точки O даної осі OZ (рис. 17).

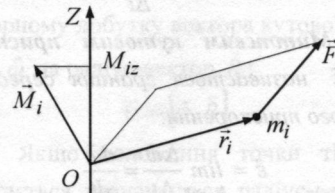


Рис. 17

Значення моменту M_{iz} не залежить від вибору положення точки O на осі OZ .

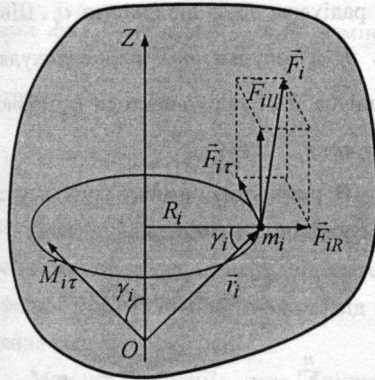


Рис. 18

Розкладемо вектор сили \vec{F}_i , що діє на точку m_i , на три взаємно перпендикулярні складові (рис. 18): $\vec{F}_{i||}$ – паралельну до осі OZ , \vec{F}_{iR} – перпендикулярну до осі OZ , і таку, що діє вздовж прямої, яка проходить через вісь, і $\vec{F}_{i\tau}$ – перпендикулярну до площини, яка проходить через вісь OZ і точку прикладання сили \vec{F}_i . Складова $\vec{F}_{i\tau}$ напрямлена по дотичній до кола радіусом R_i з центром на осі OZ . Момент сили \vec{F}_i відносно точки O дорівнює сумі моментів складових:

$$\vec{M}_i = \vec{M}_{i||} + \vec{M}_{iR} + \vec{M}_{i\tau}.$$

Вектори $\vec{M}_{i||}$ і \vec{M}_{iR} перпендикулярні до осі OZ , тому їх проекції на вісь OZ дорівнюють нулю. Момент $M_{i\tau} = r_i F_{i\tau}$ утворює з віссю OZ кут γ_i і $\cos \gamma_i = \frac{R_i}{r_i}$.

Момент складової $\vec{F}_{i\tau}$ відносно осі OZ дорівнює:

$$M_{i\tau z} = M_{i\tau} \cos \gamma_i = r_i F_{i\tau} \cdot \frac{R_i}{r_i} = F_{i\tau} R_i.$$

Отже, момент сили \vec{F}_i відносно осі OZ дорівнює

$$M_{i\tau z} = F_{i\tau} R_i.$$

Таким чином, сила \vec{F}_{iR} , напрямком якої перетинає вісь OZ , не може викликати обертання навколо цієї осі, вона спроможна викликати її тиск на підшипники, в яких вона закріплена. Також сила $\vec{F}_{i||}$, яка паралельна до осі OZ , не викличе відносно неї обертання. Момент сили відносно осі створюється лише тією складовою сили, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі і не перетинає цю вісь. Момент сили відносно осі характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї осі.

Векторна сума моментів \vec{M}_i всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла, називається **головним моментом \vec{M} зовнішніх сил відносно точки O** :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Головний момент (результуючий момент) відносно нерухомої осі OZ системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно цієї осі:

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n R_i F_{i\tau}.$$

Моментом імпульсу \vec{L}_i матеріальної точки відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r}_i матеріальної точки, який проведений з точки O , на імпульс цієї матеріальної точки $m_i \vec{v}_i$ (рис.19):

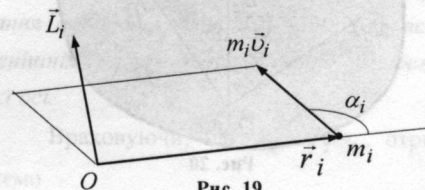


Рис. 19

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Модуль вектора моменту імпульсу

$$L_i = r_i m_i v_i \sin \alpha_i.$$

Векторна сума моментів імпульсу \vec{L}_i всіх матеріальних точок тіла називається *моментом \vec{L} імпульсу тіла відносно точки O* :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Моментом імпульсу тіла відносно нерухомої осі називається скалярна величина L_z , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу тіла відносно довільної точки O на осі OZ .

Значення моменту імпульсу L_z не залежить від положення точки O на осі OZ .

Знайдемо вираз для моменту L_z імпульсу тіла відносно осі обертання. Проекція результуючого вектора на деяку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цю вісь усіх складових векторів:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz}.$$

Розглянемо обертання абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі OZ , орт \vec{k} якої збігається з напрямком кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла (рис. 20). При цьому $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, де $\omega_z = \omega > 0$.

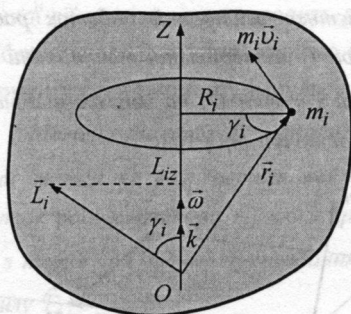


Рис. 20

При обертанні тіла навколо осі OZ матеріальна точка масою m_i рухається по

колу радіусом R_i із швидкістю \vec{v}_i . Швидкість \vec{v}_i й імпульс $m_i \vec{v}_i$ перпендикулярні до радіуса R_i , і радіус-вектора \vec{r}_i , причому $R_i = r_i \cos \gamma_i$.

В результаті момент імпульсу тіла відносно осі OZ

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n L_{iz} = \sum_{i=1}^n L_i \cos \gamma_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i \cos \gamma_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i R_i. \end{aligned}$$

Швидкість i -ої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ з кутовою швидкістю ω_z , дорівнює:

$$v_i = \omega_z R_i.$$

$$\text{Отже, } L_z = \omega_z \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

Сума добутків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх відстаней до осі OZ називається моментом інерції тіла відносно цієї осі:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

Отже, $L_z = J_z \omega_z$.

Момент імпульсу тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї самої осі на кутову швидкість обертання навколо цієї осі.

Ми ввели поняття моменту інерції, розглядаючи обертання твердого тіла. Однак момент інерції існує безвідносно до обертання. Всяке тіло, незалежно від того, чи обертається воно, чи знаходиться в стані спокою, має момент інерції відносно довільної осі.

Щоб обчислити момент інерції тіла, його поділяють на нескінченно велику кількість нескінченно малих елементів з

масами dm . Тому суму $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ замінімо інтегралом:

$$J = \int_0^m R^2 dm,$$

де R - відстань від елемента dm до осі OZ . Момент інерції тіла залежить від матеріалу, форми і розмірів тіла, а також від розміщення тіла відносно осі.

Момент інерції тіла відносно довільної осі можна розрахувати, використавши **теорему Штейнера**: момент інер-

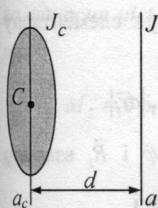


Рис. 21

ції J_a тіла відносно довільної осі a дорівнює сумі моменту інерції J_c тіла відносно паралельної до неї осі a_c , що проходить че-

рез центр мас C тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані d між цими осями (рис. 21): $J_a = J_c + md^2$.

§11. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. Кінетична енергія тіла, що обертається

Розглянемо обертання абсолютно твердого тіла, яке закріплене в одній нерухомій точці O .

Щоб отримати співвідношення між моментом імпульсу і моментом сили, продиференціюємо за часом правий і лівий бік виразу

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Тоді отримуємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right].$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$, то

$$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i \vec{v}_i \right] = [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] = 0.$$

Враховуючи, що

$$\sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{M},$$

отримуємо рівняння, що визначає закон зміни моменту імпульсу

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

де \vec{L} - момент імпульсу тіла відносно точки O , а \vec{M} - головний момент зовнішніх сил відносно точки O .

Швидкість зміни моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої точки, дорівнює головному моменту відносно цієї точки всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла.

Спроєкуємо вектори рівняння

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ на довільну вісь Z , що проходить через точку O . Тоді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

де L_z і M_z - проєкції на вісь OZ обертання тіла векторів моменту імпульсу тіла і результуючого моменту зовнішніх сил відносно точки O . Це рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ .

Отже, швидкість зміни моменту імпульсу тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно цієї осі.

Враховуючи, що $L_z = J_z \omega_z$, отримуємо

$$\frac{d(J_z \omega_z)}{dt} = M_z.$$

Якщо тіло абсолютно тверде, то його момент інерції J_z не залежить від часу.

Тому

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \quad \text{і} \quad J_z \varepsilon_z = M_z,$$

де $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$ – проекція вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на вісь обертання OZ . Звідси кутове прискорення твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі OZ , прямо пропорційне до головного моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне до моменту інерції тіла відносно тієї самої осі.

Отже, момент інерції тіла є його мірою інертності при обертальному русі.

Момент M_z зовнішніх сил вважається додатним, якщо ці сили спричиняють збільшення кутової швидкості обертання тіла ($\varepsilon > 0$). Якщо $M_z = 0$, то $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = 0$ і кутова швидкість твердого тіла стала.

Кінетична енергія тіла, що рухається довільно, дорівнює сумі кінетичних енергій всіх n матеріальних точок, на які це тіло можна умовно поділити:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі OZ з кутовою швидкістю ω , то

$$v_i = \omega R_i,$$

де R_i – відстань від цієї точки до осі обертання. Отже,

$$E_k^{об} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Якщо тверде тіло рухається поступально з швидкістю v і одночасно оберта-

ється з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр інерції, то його кінетична енергія

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}.$$

Знайдемо роботу, яку виконує зовнішня сила при обертанні твердого тіла. За малий час dt точка масою m_i (рис. 18) здійснює переміщення

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = [\vec{\omega}, \vec{R}_i] dt = [d\vec{\varphi}, \vec{R}_i],$$

де $d\vec{\varphi}$ – вектор елементарного повороту тіла за час dt . При цьому сила \vec{F}_i , яка прикладена до тіла, виконує елементарну роботу

$$dA_i = (\vec{F}_i, d\vec{r}_i) = F_{i\tau} |d\vec{r}_i|.$$

Оскільки вектори $d\vec{\varphi}$ і \vec{R}_i взаємно ортогональні, то $|d\vec{r}_i| = R_i d\varphi$ і

$$dA_i = \vec{F}_{i\tau} R_i d\varphi = M_{i\tau z} d\varphi = (\vec{M}_i d\vec{\varphi}).$$

Елементарна робота, яка виконується зовнішньою силою при обертанні тіла,

$$dA = \sum_{i=1}^n dA_i = M_z d\varphi.$$

§12. Закон збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу випливає із закону зміни моменту імпульсу тіла, закріпленого в нерухомій точці, і полягає в такому:

якщо головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки, прикладених до тіла, тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї точки з плином часу не змінюється.

Якщо $\vec{M} = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ і $\vec{L} = const$.

Цей закон справедливий і для системи тіл. На замкнену систему тіл зовнішні

сили взагалі не діють. Тому результуючий момент цих сил відносно будь-якої нерухокої точки тотожно дорівнює нулю. Отже, момент імпульсу замкненої системи тіл відносно будь-якої нерухокої точки сталий у часі.

З рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухокої осі OZ , випливає **закон збереження моменту імпульсу тіла відносно цієї осі**:

якщо момент зовнішніх сил відносно нерухокої осі обертання тіла тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї осі не змінюється під час руху:

$$M_z = 0 \text{ і } \frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = \text{const},$$

або

$$J_z \omega_z = \text{const},$$

де ω_z – кутова швидкість тіла, J_z – його момент інерції відносно осі обертання.

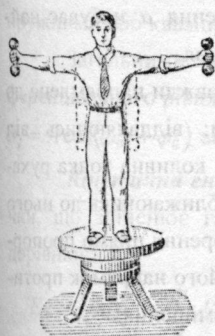


Рис. 22

Отримане співвідношення наочно ілюструється за допомогою лави Жуковського – круглої платформи, яка може обертатися з малим тертям відносно вертикальної осі (рис. 22). Якщо гантелі наближаються до осі обертання, то момент інерції системи зменшується, а кутова швидкість збільшується; при віддаленні гантелей від осі обертання кутова швидкість обертання зменшується ($I_2 > I_1$; $\omega_2 < \omega_1$).

Закон збереження моменту імпульсу – фундаментальний закон природи. Він зв'язаний з певними властивостями симет-

рії простору – його ізотропністю, тобто з інваріантністю фізичних законів відносно вибору напрямку осей координат системи відліку.

§13. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань

Коливанням називається всякий рух або зміна стану тіла, що характеризується тим чи іншим ступенем повторюваності в часі значень фізичних величин, які визначають цей рух або стан тіла.

Коливання називаються **періодичними**, якщо значення фізичних величин, які змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові проміжки часу. Найпростішим типом періодичних коливань є так звані **гармонічні коливання** – коливання, при яких значення фізичної величини змінюється з часом за законом косинуса (синуса).

Коливання називаються **вільними або власними**, якщо вони здійснюються за рахунок енергії, яка була надана, за відсутності в наступному зовнішніх періодичних впливів на коливну систему.

Нехай матеріальна точка здійснює вільні гармонічні коливання вздовж осі координат Ox біля положення рівноваги, яке прийняте за початок координат. Тоді залежність координати x від часу t задається рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

тут x – зміщення коливної точки; A – амплітуда коливання ($A = x_{max}$); ω_0 – власна циклічна частота; φ_0 – початкова фаза коливань в момент часу $t = 0$; $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань в момент часу t .

Найменший проміжок часу T , після проходження якого повторюються значен-

ня всіх фізичних величин, що характеризують коливання, називається **періодом коливання**. За час T здійснюється одне повне коливання і фаза коливань отримує приріст 2π , тобто

$$\omega_0(t+T) + \varphi_0 = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi.$$

Звідси

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частотою коливань називається кількість повних коливань, що здійснюються за одиницю часу:

$$\nu = \frac{N}{t},$$

де N – кількість коливань, виконаних за час t . Частота коливань – величина, яка обернена до періоду коливань:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклічна частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Отже, циклічна частота дорівнює кількості повних коливань, що здійснюються за 2π с.

Колівальний процес характеризується швидкістю і прискоренням колівної точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= v_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^2 x,$$

де $v_0 = A\omega_0$ – амплітуда швидкості, $a_0 = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення. Зміщення, швидкість і прискорення точки, що гармонічно коливається, є періодичними

функціями часу з однаковими циклічною частотою ω_0 і періодом T . Фаза швидкості відрізняється від фази зміщення на $\frac{\pi}{2}$, а фаза прискорення відрізняється від фази зміщення на π (рис. 23).

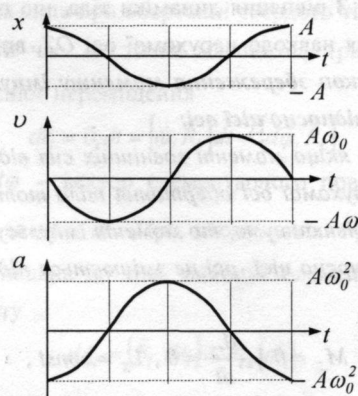


Рис. 23

В моменти часу, коли $x = 0$, швидкість v набуває найбільшого значення, коли ж x досягає максимального від'ємного значення, то прискорення a набуває найбільше додатне значення.

Прискорення завжди напрямлене до положення рівноваги: віддаляючись від положення рівноваги, колівна точка рухається сповільнено, наближаючись до нього – прискорено. Прискорення прямо пропорційне до зміщення, а його напрямок протилежний до напрямку зміщення.

Другий закон Ньютона дає змогу в загальному вигляді записати зв'язок між силою і прискоренням для вільних гармонічних коливань матеріальної точки з масою m :

$$F_x = m a_x = -m A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= -m \omega_0^2 x = -k x.$$

Сила, що діє на колівну матеріальну точку прямо пропорційна до зміщення і завжди напрямлена до положення рівноваги.

ги. Тому її називають повертальною силою. Фаза сили F збігається з фазою прискорення.

Прикладом сил, що задовольняють співвідношення $F = -kx$, є пружні сили. Сили F , що мають іншу природу, ніж пружні сили, але також задовольняють умову $F = -kx$, називаються квазіпружними, а $k = m\omega_0^2$ – коефіцієнтом квазіпружної сили.

Для вільних гармонічних коливань вздовж осі Ox прискорення $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Тоді

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

і

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Це диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань, збуджених пружними або квазіпружними силами.

Загальними розв'язками цього диференціального рівняння є функції:

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ або } x_2 = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0').$$

Кінетична енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання, дорівнює:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \end{aligned}$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання під дією квазіпружної сили, дорівнює:

$$\begin{aligned} E_n &= -\int_0^x F_x dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \\ &= \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)].$$

Кінетична і потенціальна енергії здійснюють гармонічні коливання з циклічною частотою $2\omega_0$ і амплітудою

$$\frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 \text{ біля середнього значення}$$

$$\frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2.$$

Повна механічна енергія коливної точки:

$$E = E_k + E_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2.$$

Графіки залежностей E_k , E_n і E від часу t для випадку $\varphi_0 = 0$ наведено на рис. 24.

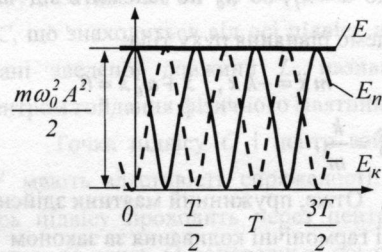


Рис. 24

Квазіпружна сила є консервативною. Тому повна енергія гармонічного коливання залишається сталою. У процесі коливання відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. В момент найбільшого відхилення точки від положення рівноваги повна енергія складається лише з потенціальної енергії. При проходженні точки через положення рівноваги повна енергія складається лише з кінетичної енергії, яка в цей момент є максимальною.

§14. Пружинний, математичний і фізичний маятники

Пружинний маятник – це тіло масою m , яке підвішене на невагомій абсо-

лютно пружній пружині і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $\vec{F} = -k\vec{x}$, де k – коефіцієнт пружності, який у випадку пружини називається жорсткістю (рис. 25). На тіло діє і сила тяжіння $m\vec{g}$.

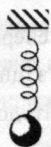


Рис. 25

Запишемо основне рівняння динаміки для цього випадку:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg = -k(x - x_0),$$

де $x_0 = \frac{mg}{k}$ – статична деформація пружини під дією сили тяжіння mg .

Позначимо $x_1 = x - x_0$ і, враховуючи, що $\ddot{x} = \ddot{x}_1$, бо x_0 не залежить від часу, знайдемо рівняння руху тіла:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Отже, пружинний маятник здійснює вільні гармонічні коливання за законом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

з власною циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Період коливань T не залежить від амплітуди A .

Ця формула справедлива для пружних коливань в межах, в яких виконується закон Гука, та коли маса пружини мала порівняно з масою тіла.

Потенціальна енергія пружинного маятника дорівнює:

$$E_n = \frac{kx^2}{2},$$

а кінетична:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Математичним маятником називається матеріальна точка, яка підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці. На практиці математичним маятником можна вважати важке тіло, яке підвішене на легенькій нитці, довжина якої набагато більша, ніж розміри тіла (рис. 26). Якщо відхилити

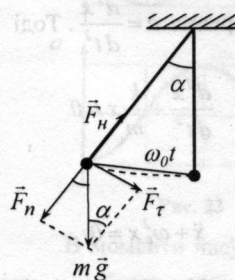


Рис. 26

маятник з положення рівноваги так, щоб нитка утворювала кут α з вертикаллю, то він почне коливатися у вертикальній площині під дією сили тяжіння $m\vec{g}$.

Сила, що повертає математичний маятник у положення рівноваги, є складовою його сили тяжіння mg :

$$F_\tau = -mg \sin \alpha.$$

Складова \vec{F}_n зрівноважується силою натягу нитки \vec{F}_n .

Для малих кутів відхилення $\sin \alpha$ можна замінити кутом α , а дугу, вздовж якої рухається маятник, можна вважати відрізком прямої. Силу що повертає маятник до положення рівноваги, можна вважати квазіпружною силою:

$$F_\tau = -\frac{mg}{l} x = -kx.$$

Отже, малі коливання математичного маятника – гармонічні.

Період цих коливань дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Період малих коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань.

Математичний маятник зберігає площину, в якій він коливається.

Спостереження над коливаннями маятників використовуються для визначення прискорення g сили тяжіння.

Фізичний маятник — абсолютно тверде тіло, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі O , яка не проходить через його центр мас C (рис. 27).

Нехай маятник відхилено з положення рівноваги на невеликий кут α .



Рис. 27 Складова сили тяжіння маятника \vec{F}_n , напрямлена вздовж осі OO' , зрівноважується реакцією осі O . Складова F_t , яка перпендикулярна до OC , намагається повернути маятник у положення рівноваги.

Відповідно до рівняння динаміки обертального руху твердого тіла момент M обертальної сили F_t можна записати у вигляді:

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_t l = -mgl \sin\alpha \approx -mgl\alpha,$$

де J - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку O , l - відстань між точкою підвісу і центром мас маятника, $\sin\alpha \approx \alpha$ відповідає малим коливанням маятника. Тоді

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0 \text{ або } \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Позначивши

$$\frac{mgl}{J} = \omega_0^2,$$

отримаємо рівняння

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Розв'язок цього рівняння такий:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При малих коливаннях фізичний маятник здійснює гармонічні коливання з частотою ω_0 і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

де $L = \frac{J}{ml}$ - зведена довжина фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC , що знаходиться від осі підвісу на відстані зведеної довжини L , називається центром гойдання фізичного маятника.

Точка підвісу O і центр гойдання O' мають властивість спряженості: якщо вісь підвісу проходить через центр гойдання, то точка O попередньої осі підвісу стане новим центром гойдання і період гойдання фізичного маятника не зміниться.

За теоремою Штейнера маємо:

$$J = J_c + ml^2,$$

де J_c - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас. Отже,

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_c}{ml} + l, \text{ тому } L > l.$$

Порівнюючи формули

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ і } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

бачимо, що якщо зведена довжина L фізичного маятника дорівнює довжині l математичного маятника, то їх періоди коли-

вань однакові.

Отже, *зведена довжина фізичного маятника* – це довжина такого математичного маятника, період коливання якого дорівнює періоду коливань даного фізичного маятника.

Формулу для періоду T математичного маятника можна отримати з виразу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

якщо розглядати математичний маятник як окремих випадок фізичного, в якому вся маса зосереджена в центрі мас C на віддалі L від підвісу, що дорівнює довжині l нитки математичного маятника. Тоді $J = ml^2$ і

маємо $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. В загальному випадку

період коливань математичного маятника визначається формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{l^2}{2^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{l^2}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right)},$$

де α - максимальний кут відхилення маятника.

ГЛІБОВИЦЬКИЙ КЛИМ
(1875-1907)

В 1895 р. написав роботу „Права руху маятника” (на основі теорії еліптичних функцій) в якій розглянув закони коливання матеріальної точки масою $m=l$, що є підвішеною на нитці сталої довжини l . Отримав вираз для періоду коливань, дослідив зміну координати z точки з часом.

§15. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття

Перш ніж розглядати додавання коливальних рухів, спинимось на способі зображення коливань за допомогою обертового вектора амплітуди.

Для цього із довільної точки O , яка вибрана на осі X , під кутом φ_0 , що дорівнює початковій фазі коливань, відкладемо

вектор \vec{A} , модуль якого дорівнює амплітуді A коливання (рис. 28).

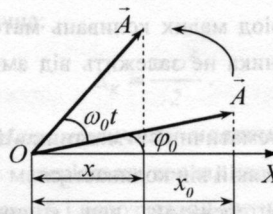


Рис. 28

Проекція вектора \vec{A} на вісь OX дорівнює зміщенню x_0 у момент початку відліку часу ($t = 0$):

$$x_0 = A \cos \varphi_0.$$

Обертатимемо вектор амплітуди навколо осі O , яка перпендикулярна до площини рисунка, з кутовою швидкістю ω_0 . За проміжок часу t вектор амплітуди повертається на кут $\omega_0 t$. Проекція вектора \vec{A} в цьому положенні на вісь OX дорівнює:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

За час T , що дорівнює періоду коливань, вектор амплітуди повертається на кут 2π , а проекція його кінця зробить одне повне коливання навколо положення рівноваги O , отже, обертовий вектор амплітуди повністю характеризує гармонічне коливання.

Нехай точка бере участь у двох гармонічних коливаннях однакової частоти, які напрямлені вздовж однієї прямої:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

Ці коливання зручно додати, користуючись методом обертового вектора амплітуди. Для цього відкладемо з точки O під кутом φ_{01} вектор амплітуди \vec{A}_1 , а під кутом φ_{02} - вектор амплітуди \vec{A}_2 (рис. 29).

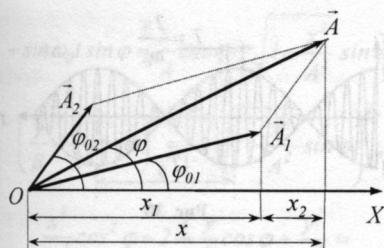


Рис. 29

Оскільки вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 обертаються з однаковою кутовою швидкістю, то різниця фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ між ними постійна. Оскільки сума проєкцій двох векторів на одну вісь дорівнює проєкції на ту саму вісь вектора, який є їх сумою, то результуюче коливання можна подати вектором амплітуди \vec{A} , що дорівнює сумі векторів \vec{A}_1 і \vec{A}_2 :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

і який обертається навколо точки O з тією самою кутовою швидкістю ω_0 , що й вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 . Результуюче коливання описується рівнянням

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де A – амплітуда результуючого коливання, а φ – його початкова фаза.

Застосовуючи теорему косинусів до одного з трикутників, на які паралелограм розбивається діагоналлю, з рис. 29 видно, що

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Амплітуда A результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ коливань, що додаються. Можливі значення A лежать в межах

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_2 - A_1|.$$

Розглянемо кілька окремих випад-

ків.

$$1). \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm 2m\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Тоді $\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 1$ і $A = A_1 + A_2$.

$$2). \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm(2m+1)\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Тоді $\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = -1$ і $A = |A_1 - A_2|$.

Розглянемо аналітичний метод знаходження результуючого коливання в деяких простих випадках:

а) частоти і фази коливань, що додаються, однакові, амплітуди різні:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) +$$

$$+ A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = (A_1 + A_2) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплітуда результуючого коливання A_p дорівнює сумі амплітуд коливань, що додаються.

б) частоти і амплітуди однакові, фази відрізняються на φ :

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_0 t + A \cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= 2 A \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left(\omega_0 t + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Амплітуда результуючого коливання

$$A_p = 2 A \cos \frac{\varphi}{2}$$

менша суми амплітуд, що додаються; зокрема, якщо $\varphi = \pi$, то $A_p = 0$.

Якщо частоти коливань x_1 і x_2 неоднакові, то вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 будуть обертатися з різною швидкістю. В цьому випадку результуючий вектор \vec{A} пульсує за величиною і обертається зі змінною швидкістю. Результуючим рухом буде в цьому випадку не гармонічне коливання, а деякий складний коливний процес.

Особливий інтерес становить випадок, коли два гармонічні коливання однакового напрямку, що додаються, мало від-

різняються за частотою.

Періодичні зміни амплітуди коливання, які виникають при додаванні двох гармонічних коливань одного напрямку з близькими частотами, називаються **биттями**.

Нехай амплітуди коливань

$$A_1 = A_2 = A, \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0,$$

а частоти дорівнюють

$$\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega \text{ і } \Delta\omega \ll \omega_0.$$

Тоді рівняння коливань матимуть вигляд:

$$x_1 = A \cos \omega_0 t, \quad x_2 = A \cos(\omega_0 t + \Delta\omega t).$$

Додаючи ці вирази і застосовуючи тригонометричну формулу для суми косинусів, отримуємо:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega_0 t.$$

Отриманий вираз є добуток двох коливань. Оскільки $\Delta\omega \ll \omega_0$, то множник $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ майже не зміниться, коли множник $\cos \omega_0 t$ здійснює кілька повних коливань. Тому результуюче коливання x можна розглядати як гармонічне з частотою ω_0 й амплітудою

$$A_\delta = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|.$$

Частота зміни A_δ удвоє більша від частоти зміни косинуса (оскільки береться за модулем). Частота биття дорівнює різниці частот коливань, що додаються, тобто

$$\omega_\delta = \Delta\omega. \text{ Період биття } T_\delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Суцільні лінії на рис. 30 дають графік результуючого коливання у випадку

$$\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10, \text{ і графік амплітуди } A_\delta.$$

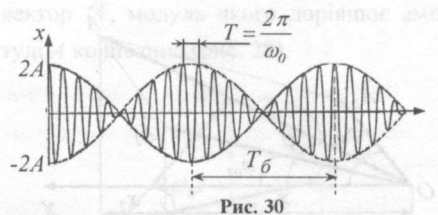


Рис. 30

§16. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка C одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях з однаковою частотою у двох взаємно перпендикулярних напрямках як вздовж осі X , так і вздовж осі Y (рис. 31).

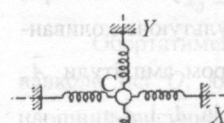


Рис. 31

Якщо збудити обидва коливання, матеріальна точка буде рухатись вздовж деякої криволінійної траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань.

Виберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань матимуть такий вигляд:

$$x = A \cos \omega_0 t, \quad y = B \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

де φ - різниця фаз обох коливань.

Ці вирази - параметрична форма рівняння траєкторії, вздовж якої рухається точка, що бере участь в обох коливаннях. Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, треба виключити з цих рівнянь параметр t . Проведемо наступні перетворення:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega_0 t, \quad \sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \omega_0 t \cos \varphi -$$

$$-\sin \omega_0 t \sin \varphi = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi;$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi\right)^2 = \left(-\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \\ = -\frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

В результаті отримаємо

$$\frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi.$$

Це рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей OX і OY . Орієнтація еліпса і величини його півосей залежать від амплітуд OA і OB і різниці фаз φ .

Розглянемо частинні випадки.

1). $\varphi = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

Тоді $\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0;$

звідси $y = \frac{B}{A}x.$

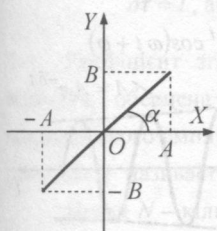


Рис. 32

Результуюче коливання є гармонічним вздовж прямої з частотою ω і амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 32).

Пряма утворює з

віссю X кут $\alpha = \arctg \frac{B}{A}.$

2). $\varphi = \pm(2m+1)\pi, (m = 0, 1, 2, \dots)$

У цьому випадку

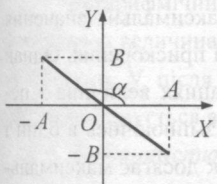


Рис. 33

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0;$$

$$y = -\frac{B}{A}x.$$

Результуючий рух – це гармонічне коливання вздовж прямої $y = -\frac{B}{A}x$ (рис. 33).

3). $\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

В результаті $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$

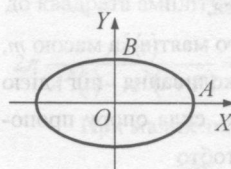


Рис. 34

Це рівняння еліпса, осі якого збігаються з осями координат, а його півосі дорівнюють відповідним амплітудам (рис. 34).

Якщо $A=B$, то еліпс вироджується в коло. Випадки

$$\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{і} \quad \varphi = -(2m+1)\frac{\pi}{2}$$

відрізняються напрямком руху по еліпсу чи колу.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань, що додаються, різні, то замкнена траєкторія результуючого коливання досить складна.

Замкнені траєкторії, що кресляться точкою, яка здійснює одночасно два взаємно перпендикулярні коливання, називаються фігурами *Лиссажу*. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, що додаються (рис. 35).

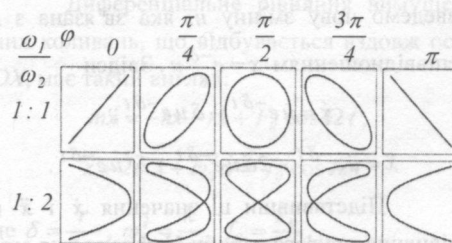


Рис. 35

§17. Диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язання

Усі реальні коливальні системи є дисипативними. Енергія механічних коливань такої системи поступово витрачається на роботу проти сил опору, тому вільні коливання завжди згасаючі - їх амплітуда поступово зменшується.

Для пружинного маятника масою m , що здійснює малі коливання під дією пружної сили $F = -kx$, сила опору пропорційна до швидкості, тобто

$$F_{op} = -r v = -r \dot{x}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

де r - коефіцієнт опору.

Другий закон Ньютона для згасаючих коливань має наступний вигляд:

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x}, \quad \ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Введемо позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\delta,$$

де δ - коефіцієнт згасання, а ω_0 - власна частота з якою здійснювались би вільні коливання за відсутності опору середовища.

Тоді другий закон Ньютона можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння введемо нову змінну u , яка зв'язана з x співвідношенням $x = e^{-\delta t} u$. Звідси

$$\dot{x} = \dot{u} e^{-\delta t} - \delta u e^{-\delta t},$$

$$\ddot{x} = \ddot{u} e^{-\delta t} - 2\delta \dot{u} e^{-\delta t} + \delta^2 u e^{-\delta t}.$$

Підставивши ці значення \dot{x} і \ddot{x} у рівняння другого закону Ньютона для згасаючих коливань і скорочуючи всі доданки на множник $e^{-\delta t}$, отримуємо

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0.$$

Нехай опір середовища малий і $\omega_0^2 > \delta^2$. Тоді можна ввести позначення

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0.$$

В результаті отримуємо рівняння

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

розв'язок якого має такий вигляд

$$u = A_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

де A_0 і φ - сталі, які визначаємо з початкових умов. Отже,

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

де $A = A_0 e^{-\delta t}$ - амплітуда згасаючих коливань, а A_0 - початкова амплітуда. Амплітуда згасаючих коливань зменшується з плином часу і тим скоріше, чим більший коефіцієнт опору і чим менша маса m коливного тіла.

Величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ називається власною циклічною частотою коливань дисипативної системи. Графік залежності x від часу наведений на рис. 36.

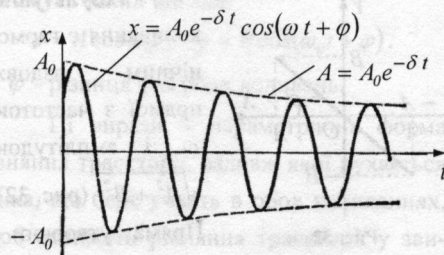


Рис. 36

Згасаючі коливання - неперіодичні коливання, бо в них ніколи не повторюються, наприклад, максимальні значення зміщення, швидкості і прискорення. Однак при згасаючих коливаннях величина x перетворюється в нуль, змінюючись в один і той самий бік, а також досягає максимальних і мінімальних значень через однакові

проміжки часу:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}$$

Величину T тому називають періодом згасаючих коливань.

Якщо $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що йдуть одне за одним через проміжок часу T , то відношення

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}$$

називається **декрементом згасання**, а його натуральний логарифм

$$\varepsilon = \ln D = \delta T$$

– **логарифмічний декремент згасання**.

Позначимо τ проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів. Тоді

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+\tau)}} = e^{\delta\tau} = e.$$

Звідси

$$\delta\tau = 1, \text{ або } \delta = \frac{1}{\tau}.$$

Коефіцієнт згасання δ є фізична величина, обернена до проміжку часу, протягом якого амплітуда зменшується в e разів. Час τ називається часом релаксації.

Нехай N – кількість коливань, після яких амплітуда коливань зменшується в e разів. Тоді

$$\tau = NT, \quad \varepsilon = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Логарифмічний декремент згасання ε є фізична величина, обернена до кількості коливань N , після закінчення яких амплітуда зменшується в e разів.

Добротністю коливальної системи називається величина Q , яка дорівнює

добутку 2π на відношення енергії $E(t)$ коливальної системи в довільний момент часу t до зменшення цієї енергії за проміжок часу від t до $t+T$:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

Оскільки енергія $E(t)$ пропорційна до квадрата амплітуди коливань, то

$$2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\varepsilon}}.$$

При малих значеннях ε ($\varepsilon \ll 1$)

$$e^{-2\varepsilon} \approx 1 - 2\varepsilon$$

і

$$Q = \frac{\pi}{\varepsilon} = \pi N = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{r} \sqrt{km}.$$

Тут враховано, що при $\varepsilon \ll 1$ $\omega \approx \omega_0$ і умовний період T згасаючих коливань практично дорівнює періоду T_0 вільних коливань.

§18. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язання. Резонанс

Розглянемо коливання, що їх здійснює система, якщо на неї, крім пружної сили kx і сили опору $r\dot{x}$, діє ще додаткова періодична сила F , яку називатимемо **вимушуючою силою** і яка змінюється за гармонічним законом

$$F = F_0 \cos \Omega t.$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань, що відбувається вздовж осі Ox , має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t,$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t,$$

$$\text{де } \delta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань дорівнює

ное сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$x_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ і частинного розв'язку $x = A \cos(\Omega t - \varphi)$ неоднорідного рівняння. Доданок x_1 відіграє помітну роль лише на початковій стадії процесу виникнення коливань (рис. 37). З часом внаслідок експоненціального множника $e^{-\delta t}$ роль доданка x_1 зменшується, амплітуда вимушених коливань зростає, доки не досягне значення A .

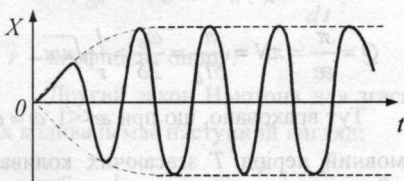


Рис. 37

Отже, усталені вимушені коливання системи, які виникають під дією сили F , також є гармонічними, тобто

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi),$$

причому їх циклічна частота дорівнює циклічній частоті вимушуючої сили.

Задача полягає в знаходженні амплітуди A і початкової фази φ .

Знайдемо \dot{x} і \ddot{x} :

$$\dot{x} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = A\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi) = A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi).$$

Підставивши вирази для \ddot{x} , \dot{x} , і x у диференціальне рівняння вимушених коливань, отримаємо

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + A2\delta\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t - \varphi) = f_0 \cos \Omega t.$$

З цього рівняння видно, що амплітуда A і фаза φ повинні мати такі значен-

ня, щоб гармонічне коливання $f_0 \cos \Omega t$ дорівнювало сумі трьох гармонічних коливань, що знаходяться в лівій частині рівняння.

Введемо позначення

$$A_1 = A\Omega^2, \quad A_2 = A2\delta\Omega, \quad A_3 = A\omega_0^2, \quad A_4 = f_0.$$

Тоді

$$A_1 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + A_2 \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A_3 \cos(\Omega t - \varphi) = A_4 \cos \Omega t.$$

Щоб додати ці коливання, використаємо метод векторних діаграм. Відкладемо під кутом φ до осі OX за годинниковою стрілкою вектор \vec{A}_3 , потім під кутом $\frac{\pi}{2}$ відносно вектора \vec{A}_3 проти годинникової стрілки побудуємо вектор \vec{A}_2 і вектор \vec{A}_1 , який повернутий на кут π відносно вектора \vec{A}_3 . Додавши три вектори \vec{A}_1 , \vec{A}_2 , \vec{A}_3 , отримаємо вектор \vec{A}_4 (рис. 38).

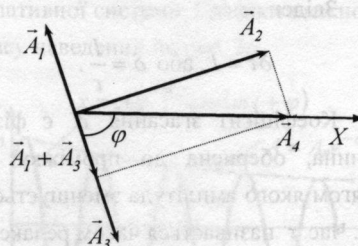


Рис. 38

З рис. 38 видно, що

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2,$$

і, відповідно,

$$f_0^2 = A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + A^2(2\delta\Omega)^2.$$

Звідси

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}.$$

Амплітуда усталених вимушених коливань прямо пропорційна до амплітуди

вимушуючої сили F_0 , обернено пропорційна до маси m системи і зменшується із збільшенням коефіцієнта загасання.

Із рис. 38 можна отримати значення φ - зсув фаз між зміщенням і вимушуючою силою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Якщо F_0 , m і δ сталі, то амплітуда усталених вимушених коливань залежить тільки від співвідношення між циклічними частотами вимушуючої сили (Ω) і вільних коливань системи (ω_0).

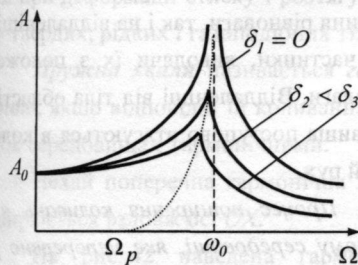


Рис. 39

Розглянемо залежність амплітуди A вимушених коливань від частоти Ω і побудуємо криві $A = f(\Omega)$ (рис. 39) при різних значеннях коефіцієнта згасання δ . Чим менше δ , тим вище і правіше лежить максимум кривої. Якщо $\Omega = 0$, то

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

в такому разі коливання не здійснюються, а відхилення A_0 називається статичною амплітудою. При $\Omega \rightarrow \infty$ всі криві асимптотично прямують до нуля. Якщо загасання немає ($\delta = 0$), то амплітуда коливань A зростає із зростанням циклічної частоти Ω вимушуючої сили і при $\Omega = \omega_0$ стає нескінченно великою.

Якщо є згасання ($\delta \neq 0$), то амплі-

туда досягає максимального значення, коли вираз $\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right]$, що є в знаменнику співвідношення для A , досягає мінімуму. Це відбувається, коли

$$\frac{d}{d\Omega} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right] = 0.$$

Виконуючи диференціювання, отримуємо

$$-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\delta^2\Omega = 0.$$

Це рівняння має два розв'язки:

$$\Omega = 0, \quad \Omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Розв'язок $\Omega = 0$ відповідає максимуму знаменника виразу для A . Із інших двох розв'язків лише додатний має фізичний сенс.

Отже, **резонансна частота** – частота, при якій амплітуда A коливань досягає максимального значення, – має такий вигляд.

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушуючої сили до частоти Ω_p називається **резонансом**.

Для консервативної системи ($\delta = 0$) $\Omega_p = \omega_0$, а для дисипативної системи Ω_p трохи менша від власної частоти ω_0 системи.

Підставивши Ω_p у вираз для амплітуди A , отримаємо вираз для амплітуди при резонансі:

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{[\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2)]^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \\ &= \frac{\frac{F_0}{m}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}. \end{aligned}$$

При малому згасанні ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) амплітуда при резонансі приблизно дорівнює

$$A_p = \frac{F_0}{2\delta\omega_0 m} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{F_0}{m\omega_0^2} = Q \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

де Q – добротність коливної системи. Отже, добротність характеризує резонансні властивості коливної системи: чим більше значення Q , тим більше A_p .

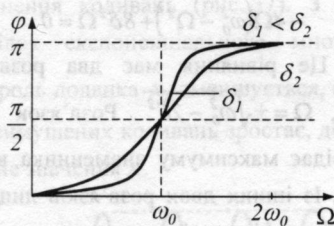


Рис. 40

З виразу $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ видно, що у випадку $\delta = 0$ зміщення коливної системи і вимушуюча сила мають однакові фази; у всіх інших випадках $\varphi \neq 0$. Залежність φ від Ω при різних значеннях δ наведена на рис. 40. При $\Omega = 0$ $\varphi = 0$, при $\Omega = \omega_0$ незалежно від значення δ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто вимушуюча сила випереджує за фазою зміщення на $\frac{\pi}{2}$. При подальшому збільшенні Ω зсув фаз зростає і при $\Omega \gg \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, тобто фаза зміщень коливальної системи майже протилежна до фази зовнішньої вимушуючої сили.

ТИМОШЕНКО СТЕПАН ПРОКОПОВИЧ
(1878-1972)

Опублікував наукову працю „До питання про явища резонансу у валах”, в якій ідею наближеного розрахунку частот коливань застосував для розрахунку вала з кількома дисками по довжині.

§19. Утворення хвиль в пружному середовищі. Поздовжні і поперечні хвилі. Рівняння біжучої хвилі

Розглянемо *пружне середовище*, між частинками якого існують сили взаємодії, що перешкоджають тому або іншому виду його деформації. Тіло, яке коливається в пружному середовищі, періодично діє на прилеглі до нього частинки середовища, виводячи їх з положення рівноваги і змушуючи здійснювати вимушені коливання. При цьому середовище поблизу тіла деформується і в ньому виникають пружні сили. Ці сили діють як на прилеглі до тіла частинки, намагаючись повернути їх у положення рівноваги, так і на віддаленіші від тіла частинки, виводячи їх з положення рівноваги. Віддаленіші від тіла області середовища поступово втягуються в коливальний рух.

Процес поширення коливань в суцільному середовищі, яке неперервно розподілене в просторі і має пружні властивості, називається механічним хвильовим процесом, або механічною хвилею.

При поширенні хвилі частинки середовища не рухаються разом з хвилею, а коливаються біля своїх положень рівноваги. *Основна властивість всіх хвиль є перенесення енергії без перенесення речовини.*

Пружними (або механічними) хвилями називаються механічні збурення, що поширюються у пружному середовищі. Пружні хвилі бувають поперечні і поздовжні.

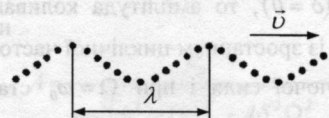


Рис. 41а

У *поперечних* хвилях частинки се-

редовища коливаються в площинах, які перпендикулярні до напрямку поширення хвилі (рис. 41а). Поперечні хвилі можуть поширюватись в середовищі, в якому виникають пружні сили при деформації зсуву, тобто лише у твердих тілах.

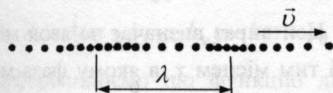


Рис. 41б

У *поздовжніх* хвилях частинки коливаються в напрямку поширення хвилі (рис. 41б). Ці хвилі можуть поширюватись в середовищах, в яких виникають пружні сили при деформації стиску і розтягу, тобто у твердих, рідких і газоподібних тілах.

Пружна хвиля називається *гармонічною*, якщо відповідні їй коливання частинок середовища є гармонічними.

Нехай поперечна гармонічна хвиля поширюється вздовж осі OX .

На рис. 42 наведена гармонічна хвиля (поперечна або поздовжня), яка поширюється вздовж осі OX зі швидкістю v , тобто наведена залежність зміщень ξ всіх частинок середовища, що беруть участь у хвильовому процесі, від відстані x цих частинок від джерела коливань O для якогось фіксованого моменту часу.

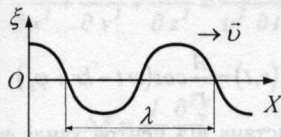


Рис. 42

Відстань між найближчими частинками, що коливаються однаковим чином, називається *довжиною хвилі* λ . Довжина хвилі дорівнює тій відстані, на яку поширюється певна фаза коливань за період:

$$\lambda = vT \quad \text{і} \quad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

Нехай точка, від якої йдуть коливання, коливається в суцільному середовищі. Коливання поширюються від центра у всі боки.

Поверхня, до якої доходять коливання в деякий момент часу, називається фронтом хвилі.

Фронт хвилі – це поверхня, яка відокремлює частину простору, уже залучену у хвильовий процес, від області, в якій коливання ще не виникли.

Поверхня, в якій всі частинки коливаються з однаковими фазами, називається хвильовою.

Хвильову поверхню можна провести через довільну точку простору, який охоплений хвильовим процесом. Отже, хвильових поверхонь існує нескінченна множина, а хвильовий фронт в кожний момент часу лише один. Хвильові поверхні залишаються нерухомими, а хвильовий фронт весь час переміщується.

Хвильові поверхні можуть бути довільної форми.

Хвиля називається плоскою, якщо її хвильові поверхні мають вигляд площин, які паралельні до площини, що проходить через джерело хвиль.

Хвиля називається сферичною, якщо її хвильові поверхні мають вигляд концентричних сфер. Центр цих сфер називається центром хвилі.

Напрямки, в яких поширюються коливання, називаються *променями*. В ізотропному середовищі промені перпендикулярні до фронту хвилі.

Поширення в пружному середовищі механічних збурень, збуджених джерелом хвиль, пов'язане з перенесенням хвилями енергії. Тому такі хвилі називаються *біжучими хвилями*.

Рівнянням хвилі називається вираз, який описує зміщення коливної частинки як функцію її рівноважних координат x, y, z і часу t .

Розглянемо плоску хвилю, яка поширюється вздовж осі OX і збуджується в площині $x=0$

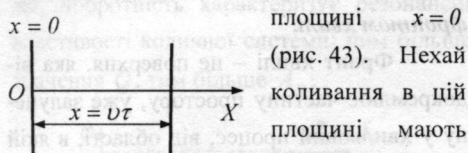


Рис. 43

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Знайдемо вигляд рівняння коливань частинок у площині, що відповідає довільному значенню x . Для того, щоб пройти шлях від площини $x=0$ до цієї площини, хвилі потрібен час $\tau = \frac{x}{v}$, де v – швидкість поширення хвилі. Отже, коливання частинок, що лежать у площині x , будуть запізнюватись на час τ від коливань частинок в площині $x=0$, тобто матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right) = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{vT} x + \varphi_0\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0\right). \end{aligned}$$

Введемо величину, яка називається **хвильовим числом**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Тоді **рівняння біжучої плоскої хвилі**, що поширюється вздовж осі OX , має такий вигляд:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де A – амплітуда коливань, яка називається амплітудою хвилі; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклічна частота хвилі; φ_0 – початкова фаза коливань в

площині $x=0$. Величина $\Phi = \omega t - kx + \varphi_0$ дорівнює фазі коливань в довільній площині з координатою x і називається фазою плоскої хвилі.

Зафіксуємо певне значення фази:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}.$$

Цей вираз визначає зв'язок між часом t і тим місцем x , в якому фаза має зафіксоване значення. Величина $\frac{dx}{dt}$ дає швидкість, з якою переміщається дане значення фази. Продиференціюємо вираз для фази:

$$\omega dt - k dx = 0.$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = v.$$

Отже, швидкість v поширення хвилі є ніщо інше, як швидкість переміщення фази хвилі і її називають **фазовою швидкістю**.

Якщо плоска хвиля поширюється в довільному напрямку, то рівняння хвилі

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{k} = k\vec{n}$ – вектор, який дорівнює за модулем хвильовому числу і має напрям нормалі до хвильової поверхні.

У випадку сферичної хвилі рівняння хвилі

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

де r – відстань від центра хвилі до точки середовища, яка розглядається. У випадку сферичної хвилі навіть у середовищі, яке не поглинає енергію, амплітуда коливань не залишається постійною, а зменшується з відстанню за законом $\frac{A}{r}$. Це співвідношення справедливе лише для r , що значно більші за розміри джерела.

Рівняння довільної хвилі є розв'язком *рівняння*, яке називається *хвильовим*.

Для виведення цього рівняння використаємо рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0).$$

Продиференціюємо цю функцію двічі за кожною змінною:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -k_z^2 \xi.$$

Додамо похідні:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi.$$

Зіставимо цю суму з похідною за часом і врахуємо, що $\omega^2 = v^2 k^2$. Отже, поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується *хвильовим рівнянням* – диференціальним рівнянням в частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

або

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де v – фазова швидкість, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

Остроградський Михайло Васильович
(1801-1862)

Розв'язав у 1826 р. задачу поширення хвиль на поверхні води.

§20. Енергія хвилі

Нехай в деякому середовищі поширюється в додатному напрямку осі Ox плоска хвиля $\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.

Визначимо зміну енергії малого об'єму dV пружного середовища, пов'язану з поширенням у середовищі плоскої хвилі. Оскільки об'єм dV дуже малий, то можна вважати, що всі частинки середовища, які містяться в цьому об'ємі, коливаються в одній фазі, так що їх швидкості однакові і $v = \frac{d\xi}{dt}$. Тому кінетична енергія об'єму dV , яка пов'язана з коливальним рухом,

$$dE_k = \frac{v^2}{2} dm = \frac{\rho v^2}{2} dV = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Визначаючи роботу деформації об'єму dV середовища під час хвильового руху, можна показати, що потенціальна енергія dE_n об'єму dV середовища дорівнює його кінетичній енергії:

$$dE_n = dE_k = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Повна механічна енергія коливального руху об'єму dV дорівнює

$$dE = dE_k + dE_n = \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Об'ємна густина енергії хвиль у пружному середовищі

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. В одній і тій же точці густина енергії змінюється з часом за законом квадрату синуса. Середнє значення квадрата синуса дорівнює

$\frac{1}{2}$. Відповідно середнє за часом значення об'ємної густини енергій в кожній точці середовища дорівнює:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.$$

Поширення хвиль у пружному середовищі нерозривно пов'язане з процесом передавання енергії від одних ділянок середовища до інших. Саме тому при хвильовому русі об'ємна густина енергії w коливань у кожній точці середовища змінюється в часі.

Об'ємна густина енергії

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 [1 - \cos 2(\omega t - kx + \varphi_0)].$$

Швидкість u поширення енергії хвилі дорівнює швидкості переміщення в просторі поверхні, яка відповідає максимальному значенню об'ємної густини енергії w . Рівняння поверхні $w = w_{max}$ має вигляд:

$$2(\omega t - kx + \varphi_0) = \pi.$$

Продиференціюємо цей вираз

$$\omega dt - k dx = 0.$$

Звідси швидкість переміщення поверхні

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Отже, швидкість поширення енергії хвилі збігається з фазовою швидкістю хвилі.

Для характеристики процесу перенесення енергії хвилями введемо поняття про потік енергії.

Потоком енергії Φ_E крізь якунебудь поверхню площею S називається фізична величина, яка числово дорівнює кількості енергії dE , яка передається че-

рез цю поверхню за одиницю часу:

$$\Phi_E = \frac{dE}{dt}.$$

Знайдемо потік енергії хвилі, що рухається з фазовою швидкістю \vec{v} , через

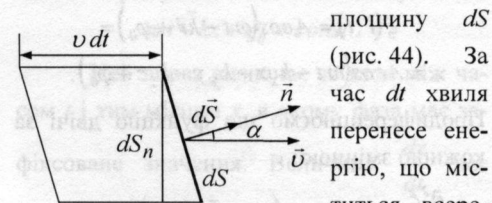


Рис. 44

циліндра, об'єм якого

$$dV = v dt dS \cos \alpha = v dt dS_n.$$

Тоді $dE = w dV = w v dt dS_n$ і потік енергії $\Phi_E = w v dS_n = w(\vec{v}, d\vec{S})$, де w – об'ємна густина енергії хвилі, $d\vec{S} = \vec{n} dS$ – вектор площини dS .

Для характеристики потоку енергії в різних точках простору вводиться векторна величина \vec{j} , яка називається густиною потоку енергії.

Густина потоку енергії – векторна величина, яка напрямлена у бік поширення хвилі і числово дорівнює потоку енергії $d\Phi_E$ крізь одиницю площі dS поверхні, яка розташована перпендикулярно до напрямку поширення хвилі:

$$\vec{j} = \frac{d\Phi_E}{dS_n} = \frac{dE}{dt dS_n} = w \vec{v}.$$

Оскільки швидкість \vec{v} – це вектор, модуль якого дорівнює фазовій швидкості хвилі, а напрямок збігається з напрямком поширення хвилі (і перенесення енергії), то

$$\vec{j} = w \vec{v}.$$

Вектор густини потоку енергії хвилі, який називається вектором Умова, дорівнює добутку вектора швидкості поши-

рення енергії хвилі на величину її об'ємної густини.

Вектор \vec{j} в різних точках простору має неоднакові значення, а в даній точці простору змінюється з часом за законом квадрата синуса. Середнє значення вектора Умова:

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle \omega \rangle \vec{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}.$$

Знаючи \vec{j} у всіх точках довільної поверхні S , можна обчислити потік енергії через цю поверхню:

$$\Phi_E = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Скалярна величина I , яка дорівнює модулю середнього значення вектора Умова, називається **інтенсивністю хвилі**:

$$I = \langle |\vec{j}| \rangle.$$

Інтенсивність хвилі числово дорівнює енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі:

$$I = v \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2.$$

Інтенсивність синусоїдальної хвилі пропорційна до квадрата її амплітуди.

**§21. Інтерференція хвиль.
Рівняння стоячої хвилі**

Якщо в середовищі є декілька джерел коливань, то хвилі, які поширюються від них, йдуть незалежно одна від одної і після взаємного перетину розходяться далі так, ніби такої зустрічі і не було. Це положення називається **принципом суперпозиції**.

В місцях зустрічі хвиль коливання середовища, які викликані кожною з хвиль, складаються одне з одним. Результат додавання (результуюча хвиля) зале-

жить від співвідношення фаз, періодів і амплітуд хвиль, що накладаються. Узгоджене проходження в часі і просторі декількох коливань або хвильових процесів пов'язується з поняттям когерентності.

Дві хвилі називаються **когерентними**, якщо мають однакову частоту і різниця їх фаз залишається сталою в часі.

Інтерференцією хвиль називається явище, яке відбувається при накладанні двох або кількох когерентних хвиль, при якому має місце стійке в часі їх взаємне підсилення в одних точках простору і ослаблення в інших в залежності від співвідношення між фазами цих хвиль.

Розглянемо накладання двох когерентних косинусоїдальних сферичних хвиль, які збуджуються точковими джерелами S_1 і S_2 (рис. 45):

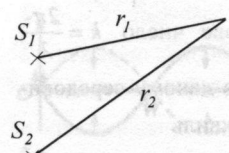


Рис. 45

$$\xi_1 = \frac{A_1}{r_1} \cos(\omega t - \kappa r_1 + \varphi_1) = \frac{A_1}{r_1} \cos \Phi_1,$$

$$\xi_2 = \frac{A_2}{r_2} \cos(\omega t - \kappa r_2 + \varphi_2) = \frac{A_2}{r_2} \cos \Phi_2.$$

Амплітуда A результуючої хвилі в точці M дорівнює

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos[\kappa(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Оскільки для когерентних джерел різниця початкових фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = const$, то результат інтерференції двох хвиль в різних точках залежить від величини $\Delta_2 = r_2 - r_1$, яка називається **геометричною різницею ходу** хвиль.

У точках, де

$\kappa(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2m\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$,
спостерігається **інтерференційний максимум**: амплітуда результуючого коливання

$$A = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2}.$$

В точках, де

$$\begin{aligned} \kappa(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) = \\ = \pm(2m + 1)\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

спостерігається **інтерференційний мінімум**: амплітуда результуючого коливання

$$A = \left| \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} \right|.$$

m – порядок інтерференційного максимуму або мінімуму.

Оскільки хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ – довжина хвилі в даному середовищі, то при різниці ходу хвиль

$$\Delta_2 = \pm 2m \frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \lambda$$

амплітуда результуючого коливання максимальна. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то ця умова набирає вигляду

$$\Delta_2 = \pm 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Амплітуда результуючого коливання мінімальна в усіх точках, для яких

$$\Delta_2 = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \lambda.$$

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то ця умова набирає вигляду

$$\Delta_2 = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

При інтерференції хвиль їхня енергія механічно не підсумовується. Інтерференція хвиль призводить до перерозподілу енергії коливань між сусідніми областями середовища.

На рис. 46 наведені дві системи хвиль, які інтерферують; гребені хвиль зображені суцільними лініями, западини – пунктирними.

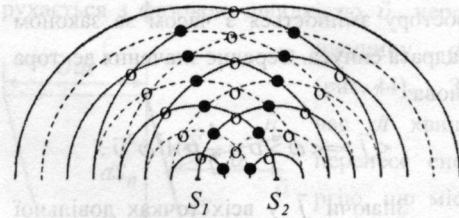


Рис. 46

У місцях перетину двох гребенів або двох западин розміщені максимуми коливань (о), в місцях перетину гребенів і западин розміщені мінімуми (•).

Особливим випадком інтерференції є стоячі хвилі.

Стоячі хвилі – це хвилі, які утворюються при накладанні двох біжучих хвиль, що поширюються назустріч одна одній з однаковими частотами і амплітудами.

Нехай дві плоскі хвилі поширюються назустріч одна одній вздовж осі OX в середовищі без згасання. Рівняння цих хвиль

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi),$$

де φ – різниця фаз хвиль у точці $x = 0$ (рис. 47).

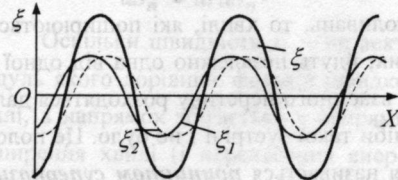


Рис. 47

Додавши ці рівняння і враховуючи, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, отримаємо **рівняння стоячої хвилі**:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Множник $\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ показує, що в точках середовища виникає коливання з тією самою ж частотою ω , що і коливання зустрічних хвиль

Множник $2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)$, який не залежить від часу, виражає амплітуду A_{cm} результуючих хвиль, точніше – амплітуда як величина позитивна дорівнює абсолютному значенню цього множника:

$$A_{cm} = \left| 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \right|.$$

Амплітуда результуючого коливання залежить від координати x , що визначає положення точок середовища.

У точках середовища, де

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = \pm m\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

амплітуда A_{cm} досягає максимального значення $2A$. Точки, в яких A_{cm} максимальна, називаються **пучностями стоячої хвилі**.

У точках середовища, де

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$A_{cm} = 0$. Ці точки називаються **вузлами стоячої хвилі**. Точки середовища, що знаходяться у вузлах, не коливаються. Виберемо початок відліку x так, щоб φ дорівнювало нулю. Тоді координати пучностей

$$x_n = \pm m \frac{\lambda}{2},$$

а вузлів

$$x_n = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Відстань між двома сусідніми пучностями отримаємо, якщо знайдемо різницю двох значень x_n для двох послідовних значень m :

$$x_n(m+1) - x_n(m) = \left[(m+1) \frac{\lambda}{2} - m \frac{\lambda}{2} \right] = \frac{\lambda}{2},$$

тобто відстань між сусідніми пучностями дорівнює половині довжини тих хвиль, в результаті інтерференції яких утворюється дана стояча хвиля.

Відстані вузла від найближчої пучності дорівнює:

$$x_n - x_n = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} - m \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

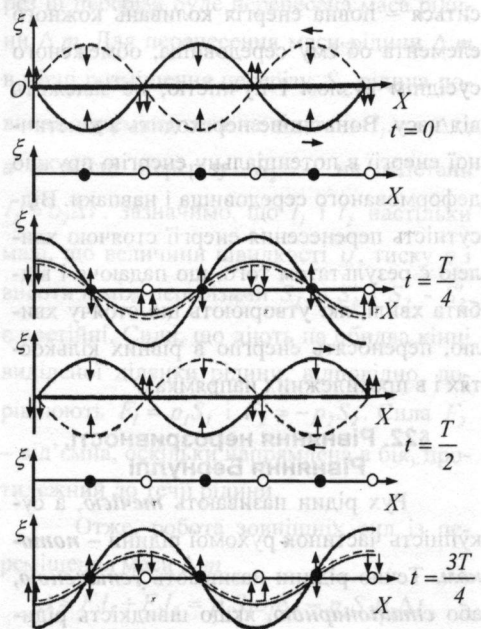


Рис. 48

На рис. 48 наведено характер руху частинок середовища при встановленні в ньому поперечної стоячої хвилі через проміжки часу $\frac{T}{4}$. Стрілками показано напрямки руху частинок, які викликані тією

чи іншою хвилею. Світлими кружечками на рис. 48 позначені пучності, а темними – вузли.

Отже, в стоячій хвилі є ряд нерухомих вузлових точок, які розміщені на відстані півхвилі одна від одної. Частинки між вузлами коливаються з різними амплітудами, від нуля у вузлі до подвійної амплітуди у пучності. Всі частинки одночасно проходять через положення рівноваги і одночасно досягають максимальних відхилень, отже, коливаються в однакових фазах. В суміжному інтервалі між вузлами характер коливань такий самий, але фаза протилежна.

У стоячій хвилі енергія не переноситься – повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусіднім вузлом і пучністю, не залежить від часу. Вона лише переходить з кінетичної енергії в потенціальну енергію пружно деформованого середовища і навпаки. Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є результатом того, що падаюча і відбита хвилі, які утворюють цю стоячу хвилю, переносять енергію в рівних кількостях і в протилежних напрямках.

§22. Рівняння нерозривності. Рівняння Бернуллі

Рух рідин називають *течією*, а сукупність частинок рухомої рідини – *поток*. Течію рідини називають *усталеною*, або *стаціонарною*, якщо швидкість рідини у кожній точці простору, який займає рідина, не змінюється з часом.

Рух рідин зображають за допомогою *ліній течії*, які проводять так, що дотичні до них збігаються за напрямком з векторами швидкостей рідини у відповідних точках простору. Лінії течії вказують не тільки напрямок швидкостей, а й дають

зможу зробити висновок про величину швидкості частинок в даному місці.

Зображаючи потік, лінії течії проводять так, щоб їх густина, тобто кількість ліній, які пронизують одиницю площі поверхні, що проведена в потоці перпендикулярно до лінії течії, числово дорівнювала б швидкості частинок потоку в даному перерізі.

*Поверхню, утворену лініями течії, проведеними через усі точки малого замкнутого контуру, називають **трубкою течії**. Частину рідини, обмежену трубкою течії, називають **струменем**.*

При стаціонарній течії частинки рухаються так, що кожна з них весь час залишається в межах певної струмени.

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що в кожному її перерізі швидкість можна вважати постійною (рис. 49). Виберемо довільно два перерізи, площі яких дорівнюють S_1 і S_2 і перпендикулярні до напрямку швидкості, відповідно, \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . За одиницю часу через переріз S_1 протече об'єм рідини, який дорівнює $S_1 v_1$, а через переріз S_2 - $S_2 v_2$. Якщо рідина нестискувальна ($\rho = const$, де ρ - густина рідини), то за одиницю часу через перерізи S_1 і S_2 протечуть однакові об'єми рідини:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

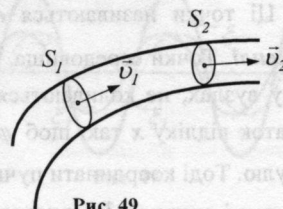


Рис. 49

Для нестискувальної рідини добуток площі довільного поперечного перерізу на швидкість течії в цьому перерізі має

чи іншою хвилею. Світлими кружечками на рис. 48 позначені пучності, а темними – вузли.

Отже, в стоячій хвилі є ряд нерухомих вузлових точок, які розміщені на відстані півхвилі одна від одної. Частинки між вузлами коливаються з різними амплітудами, від нуля у вузлі до подвійної амплітуди у пучності. Всі частинки одночасно проходять через положення рівноваги і одночасно досягають максимальних відхилень, отже, коливаються в однакових фазах. В суміжному інтервалі між вузлами характер коливань такий самий, але фаза протилежна.

У стоячій хвилі енергія не переноситься – повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусіднім вузлом і пучністю, не залежить від часу. Вона лише переходить з кінетичної енергії в потенціальну енергію пружно деформованого середовища і навпаки. Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є результатом того, що падаюча і відбита хвилі, які утворюють цю стоячу хвилю, переносять енергію в рівних кількостях і в протилежних напрямках.

§22. Рівняння нерозривності. Рівняння Бернуллі

Рух рідин називають *течією*, а сукупність частинок рухомої рідини – *поток*. Течію рідини називають *усталеною*, або *стаціонарною*, якщо швидкість рідини у кожній точці простору, який займає рідина, не змінюється з часом.

Рух рідин зображають за допомогою *ліній течії*, які проводять так, що дотичні до них збігаються за напрямком з векторами швидкостей рідини у відповідних точках простору. Лінії течії вказують не тільки напрямком швидкостей, а й дають

змогу зробити висновок про величину швидкості частинок в даному місці.

Зображаючи потік, лінії течії проводять так, щоб їх густина, тобто кількість ліній, які пронизують одиницю площі поверхні, що проведена в потоці перпендикулярно до лінії течії, числово дорівнювала б швидкості частинок потоку в даному перерізі.

*Поверхню, утворену лініями течії, проведеними через усі точки малого замкненого контуру, називають **трубкою течії**. Частину рідини, обмежену трубкою течії, називають **струменем**.*

При стаціонарній течії частинки рухаються так, що кожна з них весь час залишається в межах певної струмини.

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що в кожному її перерізі швидкість можна вважати постійною (рис. 49). Виберемо довільно два перерізи, площі яких дорівнюють S_1 і S_2 і перпендикулярні до напрямку швидкості, відповідно, \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . За одиницю часу через переріз S_1 протече об'єм рідини, який дорівнює $S_1 v_1$, а через переріз S_2 - $S_2 v_2$. Якщо рідина нестискувальна ($\rho = const$, де ρ - густина рідини), то за одиницю часу через перерізи S_1 і S_2 протечуть однакові об'єми рідини:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

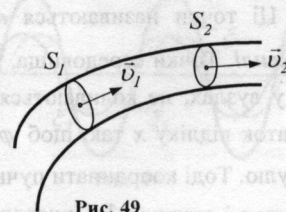


Рис. 49

Для нестискувальної рідини добуток площі довільного поперечного перерізу на швидкість течії в цьому перерізі має

однакове значення:

$$Sv = \text{const}.$$

Це співвідношення називається **рівнянням нерозривності струменя**.

З цього рівняння випливає, що під час стаціонарної течії швидкості руху частинок рідини через два довільних перерізи трубки обернено пропорційні площам цих перерізів. Найбільша швидкість рідини спостерігається у найвужчому місці трубки, а найменша – у найширшому.

Нехай по нахиленій трубці течії змінного перерізу рухається ідеальна рідина – рідина, в якій немає внутрішнього тертя – в напрямку зліва направо (рис. 50).

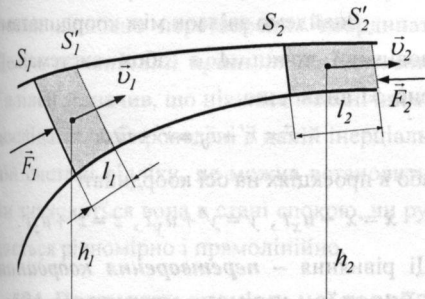


Рис. 50

Умовно виділимо область трубки, обмежену перерізами S_1 і S_2 . Нехай в місці перерізу S_1 швидкість рідини \vec{v}_1 , тиск p_1 і висота, на якій розміщений цей переріз, h_1 . Аналогічно в місці перерізу S_2 швидкість рідини \vec{v}_2 , тиск p_2 і висота перерізу h_2 .

Визначимо зміну повної енергії, яка відбувається в цій області між перерізами S_1 і S_2 за час Δt . За цей час маса рідини між перерізами S_1 і S'_1 втікає в область, а маса що знаходиться між S_2 і S'_2 , втікає з неї. Величина зміни повної енергії, яка є сумою кінетичної і потенціальної енергій маси Δm рідини, дорівнює різниці повних

енергій мас, які витікають і втікають,

$$(\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m):$$

$$\Delta E = (E_{k_2} + E_{n_2}) - (E_{k_1} + E_{n_1}) = \left(\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right).$$

За законом збереження енергії енергія ΔE дорівнює роботі зовнішніх сил, що переміщують масу Δm рідини від перерізу S_1 до перерізу S_2 :

$$\Delta E = A.$$

Робота A дорівнює роботі, яка виконується при переміщенні всієї ділянки рідини, що знаходиться між перерізами S_1 і S_2 протягом такого часу Δt , за який через ці перерізи буде перенесена маса рідини Δm . Для перенесення маси рідини Δm в місці розміщення перерізу S_1 рідина повинна переміститися на відстань $l_1 = v_1 \Delta t$, а в місці перерізу S_2 – на відстань $l_2 = v_2 \Delta t$. Зазначимо, що l_1 і l_2 настільки малі, що величини швидкості v , тиску p і висоти h між перерізами $S_1 - S'_1$ і $S_2 - S'_2$ є постійні. Сили, що діють на обидва кінці виділеної ділянки рідини, відповідно, дорівнюють $F_1 = p_1 S_1$ і $F_2 = -p_2 S_2$. Сила F_2 – від'ємна, оскільки напрямлена в бік, протилежний до течії рідини.

Отже, робота зовнішніх сил із переміщення маси Δm

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

За законом нерозривності струменя

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V.$$

В результаті

$$A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V.$$

Враховуючи, що $\Delta E = A$, отримуємо

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V =$$

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1.$$

Оскільки густина рідини $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$, то отримуємо

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1.$$

Оскільки перерізи S_1 і S_2 вибрані довільно, тому

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const.$$

Це співвідношення називається **рівнянням Бернуллі**. Величина p називається статичним тиском, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ — динамічним тиском, а величина $\rho g h$ — гідростатичним тиском.

Рівняння Бернуллі можна сформулювати так: в стаціонарному потоці ідеальної нестискувальної рідини сума статичного, динамічного і гідростатичного тисків є сталою у довільному поперечному перерізі потоку.

Для трубки течії, яка розміщена горизонтально ($h_1 = h_2$), рівняння Бернуллі має такий вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const,$$

де $\frac{\rho v^2}{2} + p$ називається повним тиском.

Із рівняння Бернуллі для горизонтальної трубки течії і рівняння нерозривності струменя видно, що при течії рідини в горизонтальній трубці, що має різні перерізи, швидкість рідини більша в місцях звуження трубки, а тиск більший в місцях, де площа поперечного перерізу трубки більша. Це твердження називається **законом Бернуллі**.

§23. Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності

Розглянемо інерціальну нерухому систему K і систему K' , яка рухається відносно K рівномірно і прямолінійно із швидкістю \vec{u} (рис. 51) і $\vec{r}_0 = \vec{u}t$. Відлік часу почнемо з моменту, коли початки координат обох систем збігаються.

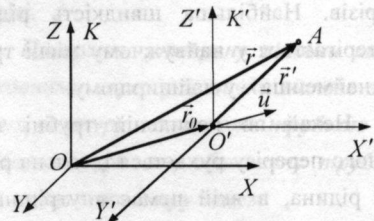


Рис. 51

Знайдемо зв'язок між координатами довільної точки A в обох системах. З рис. 51 видно, що

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t,$$

або в проєкціях на осі координат:

$$x = x' + u_x t, \quad y = y' + u_y t, \quad z = z' + u_z t.$$

Ці рівняння — **перетворення координат Галілея**.

У випадку, коли система K' рухається зі швидкістю \vec{u} вздовж додатного напрямку осі OX системи K , перетворення Галілея мають вигляд

$$x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z'.$$

У класичній механіці передбачається, що хід часу не залежить від відносного руху систем відліку: $t = t'$.

Записані вище співвідношення мають місце лише в класичній механіці ($u \ll c$).

Отримаємо правило додавання швидкостей в класичній механіці:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

Прискорення в системі відліку K

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'.$$

Сила \vec{F} , що діє на частинку в системі K , збігається з силою \vec{F}' , що діє на частинку в системі K' : $\vec{F} = \vec{F}'$. Це пов'язано з тим, що сила залежить від відстані між даною частинкою і частинками, які діють на неї або їх відносними швидкостями руху, а вони в ньютонівській механіці вважаються однаковими у всіх інерціальних системах. Маса також однакова у всіх системах.

Отже, рівняння динаміки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тобто є інваріантними відносно перетворення координат. Це і є *механічний принцип відносності*. Галілей зазначив, що ніякими механічними дослідженнями, які проведені в даній інерціальній системі відліку, не можна встановити, чи знаходиться вона в стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно.

§24. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца

Спеціальна теорія відносності є сучасною фізичною теорією простору і часу. Спеціальну теорію відносності називають релятивістською теорією, а явища, що описуються цією теорією, - релятивістськими ефектами, які проявляються при швидкостях руху тіл, близьких за величиною до швидкості світла у вакуумі c . Релятивістською механікою називається механіка рухів з релятивістськими швидкостями, яка ґрунтується на спеціальній теорії відносності.

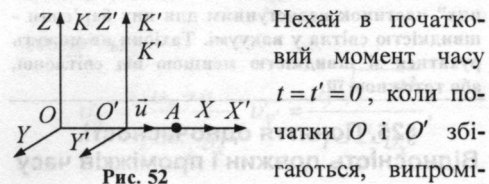
В основі спеціальної теорії відносності лежать два постулати Ейнштейна.

I. Принцип відносності: ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні), які

проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, чи знаходиться ця система в стані спокою чи рухається рівномірно і прямолінійно: всі закони природи інваріантні відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

II. Принцип інваріантності швидкості світла: швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача і однакова у всіх інерціальних системах відліку.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку: K і K' , яка рухається відносно K вздовж осі OX з швидкістю \vec{u} (рис. 52).



$$x = ct,$$

то в системі K' координата світлового імпульсу в момент досягнення точки A

$$x' = ct'. \quad x' - x = c(t' - t).$$

Оскільки $x' \neq x$, тому що система K' переміщається відносно до системи K , то $t' \neq t$. В результаті відлік часу має відносний характер.

Ейнштейн показав, що в теорії відносності перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої описується *перетвореннями Лоренца*:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$\beta = \frac{u}{c}.$$

Перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея, якщо $u \ll c$.

КОРДИШ ЛЕОН ЙОСИПОВИЧ
(1878-1932)

Опублікував в 1910 р. свою першу роботу по теорії відносності, в якій розглядаються перетворення Лоренца і дається елементарний вивід формул Ейнштейна.

БЛАНЮК ОЛЕКСА
(нар. 1926 р.)

Обґрунтував у 1962 р., гіпотезу про те, що існування швидших від світла об'єктів - тахіонів - не суперечить теорії відносності.

Світ тахіонів відділений від світу „звичайних“ частинок недоступним для них бар'єром - швидкістю світла у вакуумі. Тахіони не можуть рухатися зі швидкістю меншою від світлової, або тотожною їй.

§25. Поняття одночасності. Відносність довжин і проміжків часу

Нехай в системі K в точках з координатами x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 відбуваються дві події. В системі K' , яка рухається відносно K з швидкістю \vec{u} вздовж осі OX , цим подіям відповідають координати x'_1 і x'_2 в моменти часу t'_1 і t'_2 (рис. 52). Якщо події в системі K відбуваються в одній точці ($x_1 = x_2$) і є одночасними ($t_1 = t_2$), то згідно з перетвореннями Лоренца

$$x'_1 = x'_2 \text{ і } t'_1 = t'_2,$$

тобто ці події є одночасними і такими, що просторово збігаються для довільної інерціальної системи відліку.

Якщо події в системі K просторово розділені ($x_1 \neq x_2$), але одночасні ($t_1 = t_2$), то в системі K'

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$x'_1 = x'_2, \quad t'_1 \neq t'_2.$$

Отже, в системі K' ці події, залишаючись просторово розділеними, виявляються і неодночасними.

Знак різниці $t'_2 - t'_1$ визначається знаком виразу $u(x_1 - x_2)$, тому в різних точках системи K' (при різних u) різниця $t'_2 - t'_1$ буде неоднаковою за величиною і за знаком.

Нехай в деякій точці, яка нерухома в системі K , відбувається подія, тривалість якої $\tau = t_2 - t_1$. Тривалість цієї події в системі K'

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

або

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отже, $\tau < \tau'$ і тривалість події, що відбувається в деякій точці, найменша в тій інерціальній системі відліку, відносно якої ця точка нерухома.

Отже, годинники, які рухаються відносно інерціальної системи відліку, йдуть повільніше від нерухомих годинників.

Нехай деяке тіло (наприклад, стрижень) розміщене вздовж осі OX' , рухається разом з системою відліку K' і має в цій системі довжину $l_0 = x'_2 - x'_1$, де x'_1 і x'_2 - координати початку і кінця стрижня, які не змінюються з часом t' . Визначимо довжину стрижня в системі K , відносно якої він рухається з швидкістю u . Для цього треба виміряти координати його кінців x_1 і x_2 в

системі K в один і той самий момент часу t :

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

тобто

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Отже, довжина стрижня, яка виміряна в системі, відносно якої він рухається, є меншою від довжини, виміряної в системі, відносно якої стрижень знаходиться у стані спокою.

Поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і однакові у всіх інерціальних системах відліку.

§26. Релятивістський закон додавання швидкостей

Розглянемо рух матеріальної точки в системі K' , яка рухається відносно системи K із швидкістю u . Якщо в системі K рух точки в кожний момент часу t визначається координатами x, y, z , а в системі K' в момент часу t' — координатами x', y', z' , то

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$$

є проєкціями вектора швидкості точки відносно систем K і K' на відповідні координатні осі. Використаємо перетворення Лоренца

$$dx = \frac{dx' + u dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

Розділимо перші три рівності на четверту:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u dt'}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

$$\frac{dy}{dt} = dy' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{dy'}{dt'} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

$$\frac{dz}{dt} = dz' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{dz'}{dt'} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

В результаті отримуємо формули перетворення швидкостей при переході від однієї системи відліку до іншої:

$$v_x = \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_{x'}}, \quad v_y = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_{x'}}$$

$$v_z = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_{x'}}$$

Аналогічно

$$v'_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

Якщо матеріальна точка рухається паралельно до осі X , то швидкість v відносно системи K збігається з v_x , а швидкість v' відносно K' — з $v'_{x'}$. Тоді

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}}, \quad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{v'u}{c^2}}$$

Якщо швидкості v, v' і u малі порівняно з швидкістю c , то

$$v = v' + u, \quad v' = v - u.$$

Якщо $v' = c$, то

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{cu}{c^2}} = \frac{c + u}{c + \frac{u}{c}} = c.$$

Нехай $v' = u = c$.

$$v = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c.$$

При додаванні довільних швидкостей їх сума не може перевищити швидкості світла c у вакуумі.

§27. Елементи релятивістської динаміки. Взаємозв'язок маси і енергії

Другий закон Ньютона для матеріальної точки

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}),$$

в якому маса m точки вважається сталою і однаковою у всіх інерціальних системах відліку, виявляється не інваріантним по відношенню до перетворення Лоренца. Отже, цей закон не може служити основою релятивістської динаміки.

У релятивістській механіці, як і в ньютонівській, імпульс \vec{p} матеріальної точки пропорційний до її маси m і збігається за напрямком з швидкістю \vec{v} цієї точки. Проте, на відміну від ньютонівської механіки, імпульс матеріальної точки є нелінійною функцією її швидкості:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивістська маса, а

m_0 – маса спокою матеріальної точки, тобто маса, яка виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої матеріальна точка знаходиться в стані спокою.

Основний закон релятивістської динаміки: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює силі \vec{F} , що діє на цю точку, тобто

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right) = \vec{F}.$$

Елементарна робота сили \vec{F} на малому переміщенні $d\vec{r}$ точки її прикладення дорівнює:

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{v} dt) = (\vec{v}, d\vec{p}) =$$

$$= \vec{v} \cdot \left\{ \frac{m_0 d\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v} \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right\} = \frac{m_0 d \left(\frac{v^2}{2} \right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} =$$

(тут враховано, що $\vec{v} d\vec{v} = d(v^2/2)$)

$$= \frac{m_0 c^2 d \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = c^2 d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Приріст кінетичної енергії dE_K матеріальної точки дорівнює роботі dA :

$$dE_K = c^2 d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = c^2 dm.$$

Інтегруючи отримане співвідношення, маємо:

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + C.$$

При $v = 0$, $E_K = 0$ і $C = -m_0 c^2$.

Отже, релятивістський вираз для кінетичної енергії частинки має вигляд:

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = mc^2 - m_0 c^2.$$

При $v \ll c$, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ розкладемо в ряд, обмежившись членами другого порядку малості:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}$$

Тоді

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2}$$

Ейнштейн узагальнив положення $dE_k = c^2 dm$, передбачивши, що воно справедливе не лише для кінетичної енергії матеріальної точки, але і для повної енергії, а саме: довільна зміна маси Δm супроводжується зміною повної енергії матеріальної точки:

$$\Delta E = c^2 \Delta m.$$

Звідси Ейнштейн отримав універсальну залежність між повною енергією тіла E і його масою m :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Це рівняння виражає **закон взаємозв'язку маси і енергії**.

Знайдемо релятивістську залежність між повною енергією й імпульсом частинки:

$$E^2 = m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

і

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Якщо тіло нерухоме, то

$$E_0 = m_0 c^2,$$

де E_0 – енергія спокою тіла.

II. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ

§28. Статистичний і термодинамічний методи дослідження.

Термодинамічні параметри. Рівноважний стан і процеси

Молекулярна фізика і термодинаміка – розділи фізики, в яких вивчаються макроскопічні процеси в тілах, що зв'язані з великою кількістю атомів і молекул, з яких складаються тіла.

Для дослідження цих процесів використовують два методи: *статистичний (молекулярно-кінетичний) і термодинамічний*.

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини в різних агрегатних станах – твердому, рідкому та газоподібному, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень про те, що всі тіла складаються з атомів і молекул, які перебувають у неперервному тепловому русі.

Безпосереднім дослідним підтвердженням справедливості молекулярно-кінетичної теорії є дифузія, броунівський рух.

Молекулярно-кінетична теорія має на меті пояснити властивості тіл, що безпосередньо спостерігаються на досліді (тиск, температуру тощо), як сумарний ефект дії молекул.

Властивості величезного скупчення молекул, що утворюють тіло, підлягають особливим статистичним закономірностям і їх можна вивчити за допомогою *статистичного методу*, який ґрунтується на тому, що властивості макроскопічної системи визначаються властивостями частинок системи, особливостями їх руху і усередненими значеннями динамічних характеристик цих частинок (швидкості, енергії

тощо).

Існує певний якісний і кількісний зв'язок між властивостями сукупності молекул і середніми значеннями тих фізичних властивостей, які характеризують поведінку та властивості кожної молекули окремо. Наприклад, температура газу пов'язана із середнім значенням кінетичної енергії молекул. Для встановлення цього зв'язку не потрібно точно знати положення або швидкість кожної молекули, а досить знати їх ймовірні значення.

Введення середніх значень величин у молекулярній фізиці зумовлене не лише тим, що не можна стежити за рухом кожної молекули окремо через велику їх кількість, а й тим, що сукупність величезної кількості молекул дає нові властивості, яких немає в кожній молекули окремо і підлягає новим статистичним законам. У сучасній фізиці статистичний метод використовується у формі класичної і квантової статистик.

Термодинаміка – розділ фізики, що вивчає загальні властивості макроскопічних систем, що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, і процеси переходу між цими станами.

На основі *термодинамічного методу* вивчаються умови перетворення енергії з одного виду в інший і ті самі перетворення з кількісного боку. В основі термодинаміки лежать три експериментально встановлені закони, які називають першим, другим і третім законами термодинаміки. Термодинаміка не досліджує мікроскопічної будови речовини, механізм явищ, а лише встановлює зв'язок між макроскопічними властивостями речовини.

Термодинамічною системою називається всяка фізична система, яка складається з великого числа частинок – атомів, молекул, які здійснюють неупорядкований тепловий рух і, взаємодіючи між собою, обмінюються енергією.

Стан системи задається **термодинамічними параметрами** – сукупністю фізичних величин, що характеризують властивості термодинамічної системи.

Найважливіші параметри стану хімічно однорідної системи – об'єм V , тиск p і температура T . Між цими трьома основними параметрами стану існує зв'язок, що називається рівнянням стану:

$$f(V, p, T) = 0.$$

Стан термодинамічної системи називається **стаціонарним**, якщо значення всіх термодинамічних параметрів системи не змінюються з часом. Стаціонарний стан системи називається **рівноважним**, якщо його незмінність у часі не зумовлена перебігом яких-небудь процесів у тілах, які зовнішні відносно системи.

Для газу, який знаходиться в якійсь посудині, рівноважним є стан, в якому температура, тиск і густина в межах об'єму газу всюди однакові.

Будь-яка зміна в термодинамічній системі, яка зв'язана із зміною хоча би одного з його термодинамічних параметрів, називається **термодинамічним процесом**.

Рівноважними називаються такі процеси, під час яких зміна стану тіла відбувається дуже повільно, фактично нескінченно повільно, і при цих процесах система проходить неперервний ряд нескінченно близьких рівноважних термодинамічних станів.

Усі реальні процеси відбуваються із

скінченою швидкістю і тому нерівноважні.

У молекулярно-кінетичній теорії газів користуються **моделлю ідеального газу**, що задовольняє такі умови:

- власний об'єм молекул газу нехтовно малий порівняно з об'ємом посудини;
- між молекулами газу відсутні сили взаємодії;
- зіткнення молекул газу між собою і з стінками посудини абсолютно пружні.

Модель ідеального газу можна використати, вивчаючи реальні гази, оскільки вони при умовах, близьких до нормальних, а також при низьких тисках і високих температурах близькі за своїми властивостями до ідеального газу.

Дослідним шляхом було встановлено цілий ряд законів, які описують поведінку ідеальних газів.

Закон Бойля-Маріотта: для даної маси газу при сталій температурі добуток тиску газу на його об'єм є величина стала:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{або} \quad pV = \text{const}.$$

Процес, що протікає при сталій температурі, називається **ізотермічним**.

Закон Гей-Люсаака: об'єм даної маси газу при сталому тиску змінюється лінійно з температурою:

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

де V_0 - об'єм при 0°C , t - температура за шкалою Цельсія, $\beta = \frac{1}{273,15} \text{K}^{-1}$ - коефіцієнт.

Процес, що протікає при сталому тиску, називається **ізобарним**.

Закон Шарля: тиск даної маси газу при сталому об'ємі змінюється лінійно з температурою:

$$p = p_0(1 + \alpha t)$$

де p_0 - тиск газу при 0°C .

Процес, який протікає при сталому об'ємі, називається *ізохорним*.

Вводячи термодинамічну температуру $T = t + \frac{I}{\beta}$, законам Гей-Люсаака і Шарля можна надати такий вигляд:

$$V = V_0(1 + \beta t) = V_0 \left[1 + \beta \left(T - \frac{I}{\beta} \right) \right] = V_0 \beta T,$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) = p_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{I}{\alpha} \right) \right] = p_0 \alpha T$$

або у випадку ізобарного процесу

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{V}{T} = \text{const},$$

і ізохорного процесу

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{p}{T} = \text{const}.$$

У молекулярній фізиці вводиться одиниця кількості речовини *моль*. Один моль – кількість речовини, яка вміщує стільки структурних елементів, скільки є атомів у $0,012 \text{ кг}$ ізотопу вуглецю ^{12}C .

В одному молі різних речовин міститься одна і та ж число молекул, яка називається *сталою Авогадро*:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Закон Авогадро: молі різних газів при однакових температурі і тиску займають однакові об'єми.

При нормальних умовах

$$\left(T = 273,15 \text{ K}, \quad p = 1,0132 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right)$$

один моль будь-якого газу займає об'єм $22,415 \text{ м}^3$.

Закон Дальтона тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків її компонент.

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

де p_1, p_2, \dots, p_n парціальні тиски – це тиск компоненти газу коли б він один займав

увесь об'єм, який займає вся суміш.

Рівняння Клапейрона: для деякої маси газу при довільній зміні об'єму й температури тиск змінюватиметься так, що відношення добутку тиску на об'єм до абсолютної температури дорівнюватиме деякій сталій величині:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{pV}{T} = B = \text{const}.$$

Рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$\frac{pV_\mu}{T} = R$$

де V_μ об'єм моля газу (молярний об'єм),

$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала.

Для довільної маси газу m рівняння Клапейрона-Менделєєва має такий вигляд:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad pV = \nu RT,$$

де μ – молярна маса газу, ν – число молів газу.

§29. Рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії пов'язує параметри стану газу з характеристиками руху його молекул, тобто встановлює залежність між тиском і об'ємом газу та кінетичною енергією поступального руху його молекул.

Тиск газу в посудині є результатом зіткнення молекул газу із стінками посудини. Тиск газу є макроскопічним проявом руху молекул.

Розглянемо однорідний газ, який поміщений в посудину кубічної форми. Напрямо осі системи відліку вздовж ребер куба (рис. 53). Нехай певна молекула M рухається в посудині зі швидкістю \vec{v} .

Швидкість \vec{v} можна розкласти на три складові вздовж координатних осей:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z.$$

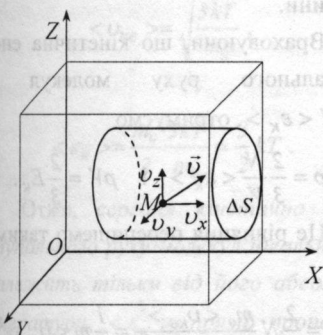


Рис. 53

Виділимо на стінці посудини елементарну площадку ΔS , яка перпендикулярна до осі OX . При кожному зіткненні молекула передає площадці імпульс $2m_0v_x$, де m_0 – маса молекули. За час Δt площадки досягнуть лише ті молекули, які знаходяться в об'ємі циліндра з основою ΔS і висотою $v_x \Delta t$. Кількість цих молекул дорівнює $n\Delta S v_x \Delta t$, де n – кількість молекул в одиниці об'єму газу. З них тільки половина потрапляє на площадку ΔS . Решта через повну безладність молекулярних рухів рухається не до стінки, а від неї. За час Δt об площадку ΔS ударяються $N_x = \frac{1}{2} n \Delta S \Delta t v_x$ молекул газу.

Нехай з кількості n молекул, що є в одиниці об'єму, n_i молекул має швидкість v_{ix} , де $i = 1, 2, \dots, l$ так що

$$\sum_{i=1}^l n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_l = n.$$

Тоді кількість ударів молекул в площадку ΔS за час Δt дорівнюватиме:

$$N_{1x} = \frac{1}{2} n_1 \Delta S \Delta t v_{1x}, \quad N_{2x} = \frac{1}{2} n_2 \Delta S \Delta t v_{2x}, \dots,$$

$$N_{lx} = \frac{1}{2} n_l \Delta S \Delta t v_{lx}.$$

При зіткненні з площадкою ці молекули передають їй імпульс:

$$\Delta P_{1x} = 2m_0 v_{1x} N_{1x} = m_0 n_1 v_{1x}^2 \Delta S \Delta t,$$

$$\Delta P_{2x} = 2m_0 v_{2x} N_{2x} = m_0 n_2 v_{2x}^2 \Delta S \Delta t,$$

...

$$\Delta P_{lx} = 2m_0 v_{lx} N_{lx} = m_0 n_l v_{lx}^2 \Delta S \Delta t.$$

Загальний імпульс, переданий всіма молекулами площадки,

$$\begin{aligned} \Delta P_x &= \Delta P_{1x} + \Delta P_{2x} + \dots + \Delta P_{lx} = \\ &= m_0 \Delta S \Delta t (n_1 v_{1x}^2 + n_2 v_{2x}^2 + \dots + n_l v_{lx}^2). \end{aligned}$$

Тиск газу на площадку ΔS

$$p_x = \frac{F_x}{\Delta S} = \frac{\Delta P_x}{\Delta S \Delta t} = m_0 \sum_{i=1}^l n_i v_{ix}^2,$$

де враховано, що імпульс сили дорівнює зміні імпульсу молекул:

$$F_x \Delta t = \Delta P_x.$$

Так само тиск на будь-яку площадку, яка перпендикулярна до осей Y і Z , визначається рівностями:

$$p_y = m_0 \sum_{i=1}^l n_i v_{iy}^2, \quad p_z = m_0 \sum_{i=1}^l n_i v_{iz}^2.$$

Зважаючи на цілковиту хаотичність рухів молекул, тиск газу в будь-якому напрямку повинен бути однаковий, тобто

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Додамо почленно рівняння для p_x , p_y і p_z :

$$p_x + p_y + p_z = 3p = m_0 \sum_{i=1}^l n_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2).$$

Через те, що

$$v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 = v_i^2, \quad \text{то} \quad 3p = m_0 \sum_{i=1}^l n_i v_i^2.$$

Величина $\sum_{i=1}^l n_i v_i^2$ – це сума квадратів

тів швидкостей усіх молекул в одиниці об'єму газу. При великій кількості молекул немає потреби знати значення квадрата швидкості кожної молекули. Тому знайдемо середнє значення цієї величини. За визначенням

$$\langle v \rangle^2 = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{n}.$$

Величина

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{\sum_i n_i v_i^2}{n}}$$

називається *середньою квадратичною швидкістю*.

В результаті тиск газу

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Це рівняння називається *основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску*.

Отриману формулу перепишемо у вигляді:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle,$$

де $\langle \varepsilon_k \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули газу.

Тиск ідеального газу дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії молекул одиниці об'єму газу.

Оскільки густина газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = nm_0,$$

то тиск ідеального газу

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Звідси

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

Ця формула показує, що середню

квадратичну швидкість можна обчислити, користуючись даними вимірювань суто макроскопічних величин – тиску газу і його густини.

Враховуючи, що кінетична енергія поступального руху молекул газу $E_k = N \langle \varepsilon_k \rangle$, отримуємо

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle \varepsilon_k \rangle \quad \text{і} \quad pV = \frac{2}{3} E_k.$$

Це рівняння перепишемо таким чином:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

де $m = Nm_0$ – маса газу.

Для одного моля газу $m = \mu$ і $V = V_\mu$. Тоді

$$pV_\mu = \frac{1}{3} \mu \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

З іншого боку, за рівнянням Клапейрона-Менделєєва

$$pV_\mu = RT.$$

Отже,

$$RT = \frac{1}{3} \mu \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 \quad \text{і} \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Оскільки

$$\mu = m_0 N_A, \quad R = k N_A,$$

де k – стала Больцмана, то

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

З рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$p = \frac{RT}{V_\mu} = \frac{k N_A T}{V_\mu} = knT.$$

§30. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне трактування абсолютної температури

Знайдемо вираз для середньої кінетичної енергії поступального руху молекули ідеального газу:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{E_k}{N} = \frac{m_0}{2} \langle v_{кв} \rangle^2.$$

Оскільки

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

то

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0}{2} \frac{3kT}{m_0} = \frac{3}{2} kT.$$

Отже, середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу залежить тільки від його абсолютної температури, $\langle \varepsilon_k \rangle$ прямо пропорційна до T .

На рис. 54 зображено залежність

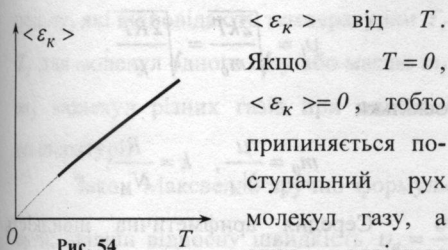


Рис. 54

$\langle \varepsilon_k \rangle$ від T .
Якщо $T = 0$,
 $\langle \varepsilon_k \rangle = 0$, тобто
припиняється по-
ступальний рух
молекул газу, а
отже, дорівнює

нулю і його тиск.

Отже, абсолютна температура є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул.

Однак в області температур, близьких до абсолютного нуля, поведінка молекул описується не класичними законами, а законами квантової механіки.

§31. Розподіл Максвелла молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху

Завдяки безладним рухам молекул і завдяки взаємним зіткненням молекул під час цього руху кожна молекула зокрема може змінювати свою швидкість як за величиною, так і за напрямком. Тому в газі будуть як швидкі, так і повільні молекули. Але, хоча швидкості окремих молекул змінюються, властивості газу у стані термо-

динамічної рівноваги загалом при цьому не змінюються: параметри системи залишаються сталими. Зумовлено це тим, що швидкості газових молекул підлягають певному закону, тобто, незважаючи на повну хаотичність молекулярних рухів, розподіл молекул за швидкостями виявляється не випадковим, а цілком визначеним. До того ж він є однозначним і єдино можливим.

Дж. Максвелл теоретично розв'язав задачу про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями поступального руху. Він встановив закон, що дає змогу визначити, яка кількість молекул dn із загальної кількості n молекул ідеального газу в одиниці об'єму мають при даній температурі швидкості, які лежать в інтервалі від v до $v + dv$. Дж. Максвелл вважав, що газ складається з великої кількості n однакових молекул, температура в усіх частинах посудини з газом теж однакова і відсутні зовнішні дії на газ.

Якщо розбити діапазон швидкостей молекул на нескінченно малі інтервали, які дорівнюють dv , то на кожний інтервал швидкості припадатиме деяка кількість молекул $dn(v)$, що мають швидкість в інтервалі dv .

Закон Максвелла описується деякою функцією $f(v)$, що називається функцією розподілу молекул за швидкостями руху. Ця функція визначає відносну кількість молекул $\frac{dn(v)}{n}$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$, тобто

$$\frac{dn(v)}{n} = f(v)dv, \text{ звідси } f(v) = \frac{dn(v)}{ndv}.$$

Добуток $f(v)dv = \frac{dn(v)}{n}$ – це ймовірність того, що величина швидкості окремої молекули знаходиться між v і $v + dv$.

Застосовуючи методи теорії ймовірності, Максвелл знайшов функцію $f(v)$ у такому вигляді:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

Конкретний вигляд функції залежить від роду газу (m_0) і від параметра стану (T). Графік функції $f(v)$ наведений на рис. 55. Функція $f(v)$ починається від нуля, досягає максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля. Крива несиметрична відносно максимального значення $f(v)$. Відносна кількість молекул $\frac{dn(v)}{n}$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$, числово дорівнює площі заштрихованої ділянки на рис. 55.

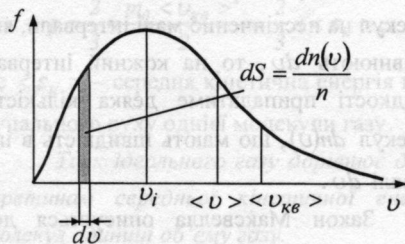


Рис. 55

Вся площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, числово дорівнює числу молекул, швидкості яких мають різні значення від 0 до ∞ . Оскільки цю умову задовольняють всі n молекул, то площа, що розглядається, дорівнює одиниці:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

Швидкість, при якій $f(v)$ макси-

мальна, називається **найімовірнішою швидкістю** v_i . Для знаходження v_i використаємо умову максимуму функції $f(v)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) \Big|_{v=v_{iM}} &= 0 \\ &= \left[2v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} - v^2 \frac{2v m_0}{2kT} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right] = 0 \\ &= 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \Big|_{v=v_{iM}} = 0. \end{aligned}$$

Звідси,

$$v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

оскільки

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}, \quad k = \frac{R}{N_A}.$$

Середня арифметична швидкість молекул $\langle v \rangle$ визначається за формулою

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Підставляючи сюди $f(v)$ й інтегруючи, отримаємо

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

Отже, є три швидкості, які характеризують стан газу (рис. 55):

найімовірніша

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \approx 1,41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}};$$

середня арифметична

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1,13 v_{iM} \approx 1,60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}};$$

середня квадратична

$$\langle v_{kv} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,22 v_{iM} \approx 1,73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

При збільшенні температури (або зменшенні маси молекул) максимум кривої $f(v)$ зміщується у бік більших швидкостей, а його абсолютна величина зменшується, причому площа, яка охоплена кривою $f(v)$ і віссю v , залишається незмінною (рис. 56).

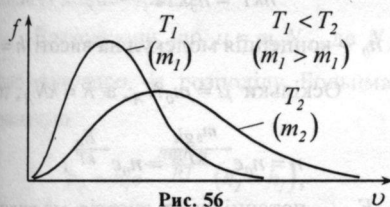


Рис. 56

На рис. 56 наведено дві криві розподілу, які відповідають температурам T_1 і T_2 для молекул одного газу або масам m_1 і m_2 молекул різних газів при однаковій температурі.

Закон Максвелла зручно формулювати, ввівши відносну швидкість $v_g = \frac{v}{v_i}$, де v – дана швидкість, а v_i – найімовірніша швидкість для молекул даного газу при даній температурі.

Розподіл, який визначає кількість молекул, відносні швидкості яких лежать в межах від v_g до $v_g + dv_g$, має такий вигляд:

$$dn(v_g) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-v_g^2} v_g^2 dv_g = f(v_g) n dv_g.$$

Знайдемо середню відносну швидкість молекул ідеального газу:

$$\langle v_g \rangle = \int_0^{\infty} v_g f(v_g) dv_g = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{2} \langle v \rangle,$$

де $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість.

Виходячи із розподілу молекул за швидкостями

$$dn(v) = 4\pi n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv,$$

можна знайти розподіл молекул за значеннями кінетичної енергії поступального руху. Для цього перейдемо від змінної v до

змінної $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$. Звідси

$$v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}} \quad \text{і} \quad dv = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m_0\varepsilon}}.$$

Підставимо ці вирази у $dn(v)$. У результаті отримуємо співвідношення, яке визначає кількість молекул, кінетична енергія поступального руху яких має значення, які лежать в межах від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$\begin{aligned} dn(\varepsilon) &= \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \\ &= f(\varepsilon) n d\varepsilon. \end{aligned}$$

§32. Барометрична формула. Розподіл Больцмана частинок у зовнішньому потенціальному полі

Якщо на молекули не діють зовнішні сили, то вони рівномірно розподіляються по об'єму посудини. Однак молекули будь-якого газу завжди перебувають в полі сил тяжіння Землі. Якби не було тяжіння, то атмосферне повітря розсіялося б по всьому Всесвіту. А якби не було теплового руху молекул атмосферного повітря, то всі вони впали б на Землю. Тяжіння і тепловий рух приводять до стаціонарного стану газу, при якому його тиск і концентрація зменшуються з висотою.

Рис. 57

ня. Якщо тиск газу на висоті h дорівнює p (рис. 57), то на висоті $h+dh$ він дорівнює $p+dp$, причому при $dh>0$ $dp<0$, оскільки тиск з висотою зменшується.

Різниця тиску p і $p+dp$ числово дорівнює вазі газу, що знаходиться в об'ємі циліндра заввишки dh , а площа основи якого дорівнює одиниці:

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

де ρ – густина газу на висоті h .

Використаємо рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Звідси, густина газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Тоді

$$-dp = \frac{\mu g p}{RT} dh \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Вважаючи $T = const$ й інтегруючи по тиску від p_0 до p , а по висоті від 0 до h , отримуємо

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h,$$

звідси

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h}, \quad h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Ці формули називаються **барометричними формулами**. Із них можна зробити висновок, що тиск газу зменшується із висотою експоненціально і тим швидше, чим важчий газ (чим більше μ) і чим нижча температура (рис. 58).

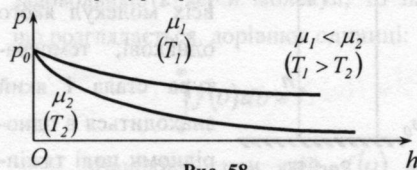


Рис. 58

Барометрична формула дозволяє знайти співвідношення між концентраціями газу на різній висоті. Використаємо рівняння стану ідеального газу у вигляді $p = nkT$, де n – концентрація молекул газу. При $T = const$ отримуємо

$$nkT = n_0 kT e^{-\frac{\mu g}{RT} h},$$

де n_0 – концепція молекул на висоті $h = 0$.

Оскільки $\mu = m_0 N_A$, а $R = k N_A$, то

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}},$$

де E_n – потенціальна енергія молекул в полі тяжіння.

Із збільшенням висоти концентрація молекул газу зменшується за експоненціальним законом (рис. 59). При високих температурах кількість молекул n незначно зменшується з висотою і при $T \rightarrow \infty$ $n \rightarrow n_0$, тобто підвищення температури викликає вирівнювання концентрації газу за висотою.

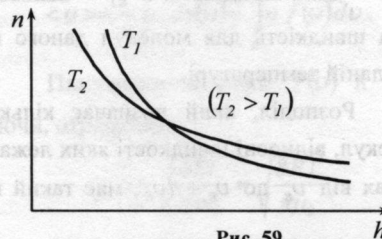


Рис. 59

При $T \rightarrow 0K$ $n \rightarrow 0$, тобто всі молекули під дією сили тяжіння опускаються на дно посудини.

Больцман довів, що співвідношення

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

справедливе не тільки у випадку потенціального поля сил земного тяжіння, але і в довільному потенціальному полі сил для сукупності довільних однакових частинок, що знаходяться у стані хаотичного тепло-

вого руху. Тому вираз

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

називається *розподілом Больцмана* у зовнішньому потенціальному полі.

Із цього виразу видно, що чим менша потенціальна енергія молекул, тим більша їх концентрація.

Враховуючи, що $\mu = m_0 N_A$, де N_A - число Авогадро, із розподілу Больцмана отримуємо

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{mgN_A}{RT}(h_2 - h_1)},$$

де n_1 і n_2 - концентрація молекул на рівнях h_1 і h_2 . Цей вираз закону Больцмана можна використати для експериментального визначення числа Авогадро N_A :

$$N_A = \frac{RT}{mg(h_2 - h_1)} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

Однак молекул газу у мікроскоп не видно. Ж. Перрен досліджував розподіл за висотою посудини найдрібніших частинок емульсії смоли гумігуту у воді. Зерна емульсії мали форму кульок діаметром близько десятих часток мікрона, їх було видно у мікроскоп.

В отриманій формулі для N_A потрібно врахувати виштовхувальні сили, які діють на частинки емульсії з боку води, тобто маса

$$m = m_1 - m_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_2),$$

де m_1 - маса частинки, m_2 - маса води, яка витіснена частинкою, r - радіус частинки, ρ - густина частинки, ρ_2 - густина води. Отже,

$$N_A = \frac{3RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{4\pi r^3 (\rho_2 - \rho_1) g (h_2 - h_1)}.$$

З подібних дослідів Ж. Перрен виз-

начив, що $N_A = 6,5 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

§33. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул

Для того, щоб визначити енергію, яка припадає на всі рухи молекул, необхідно ввести поняття про число ступенів вільності.

Числом ступенів вільності називають найменше число координат, які необхідно задати для того, щоб повністю визначити положення тіла у просторі, або кількість незалежних рухів, які може виконувати тіло.

Матеріальна точка, що довільно рухається у просторі, має три ступені вільності (x, y, z). Якщо ця точка рухається по деякій поверхні або вздовж певної кривої, то вона відповідно має два або один ступені вільності.

Абсолютно тверде тіло має 6 ступенів вільності. Щоб визначити його положення в просторі, треба задати три координати (x, y, z) (3 ступені вільності поступального руху) центра мас C тіла (рис. 60);

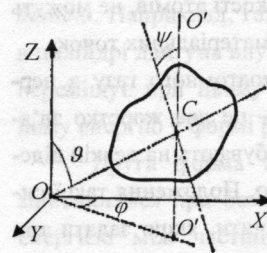


Рис. 60

два кути θ і φ , які визначають положення в просторі певної осі ($O'O'$), яка проходить через центр мас і яку-небудь іншу фіксовану точку тіла і необхідно задати кут ψ , що визначає напрямок другої зв'язаної з тілом осі, яка перпендикулярна до першої (θ, φ, ψ - 3 ступені вільності обертального руху).

Якщо тіло не абсолютно тверде і його частини можуть зміщуватись одна

відносно одної, то необхідно ввести ще додаткові ступені вільності коливального руху.

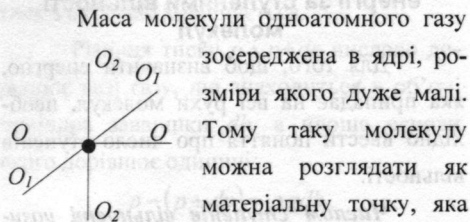


Рис. 61

Маса молекули одноатомного газу зосереджена в ядрі, розміри якого дуже малі. Тому таку молекулу можна розглядати як матеріальну точку, яка має три ступені вільності поступального руху (рис. 61).

Внаслідок хаотичного теплового руху всі напрямки швидкості молекул рівноймовірні. Кінетичні енергії руху молекул вздовж координатних осей OX , OY , і OZ в середньому однакові. Отже, в стані теплової рівноваги на кожен поступальний ступінь вільності молекули припадає одна і та ж середня кінетична енергія. Оскільки

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT, \text{ то } \langle \varepsilon_{k1} \rangle = \frac{1}{3} \langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Молекули, що складаються з двох, трьох і більшої кількості атомів, не можуть бути уподібнені до матеріальних точок.

Молекула двоатомного газу в першому наближенні – це два жорстко зв'язані атоми, що перебувають на деякій відстані один від одного. Положення такої системи можна визначити, якщо задати три координати центра мас системи (рис. 62) і два кути ϑ і φ , які визначають напрямок у просторі осі системи.

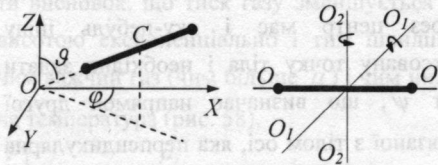


Рис. 62

Рис. 63

Отже, три ступені вільності будуть поступальними, а два – обертальними нав-

коло осей O_1-O_1 і O_2-O_2 (рис. 63). Обертання навколо третьої осі $O-O$ розглядати не треба, бо момент інерції атомів відносно цієї осі дуже малий.

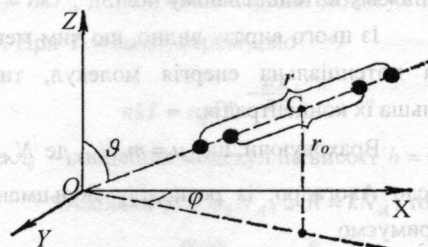


Рис. 64

Якщо два атоми зв'язані не жорстким зв'язком, а пружним, то $i = 6$. Положення системи в цьому випадку можна визначити, якщо задати три координати центра мас, два кути ϑ і φ і відстань між атомами r (рис. 64). Зміна r відповідає коливанням в системі, внаслідок чого цей ступінь вільності називається коливним.

Триатомна і багатоатомні нелінійні молекули (рис. 65) мають 6 ступенів вільності – 3 поступальних і 3 обертальних.

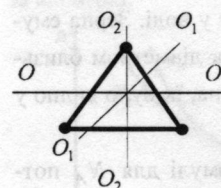


Рис. 65

Жорсткого зв'язку між атомами не існує. Тому для реальних молекул необхідно враховувати також ступені вільності коливального руху.

У класичній статистичній фізиці виводиться закон Больцмана про рівномірний розподіл енергій за ступенями вільності молекул:

для статистичної системи, що перебуває у стані термодинамічної рівноваги, на кожен поступальний і обертальний ступінь вільності припадає в середньому кінетична енергія, що дорівнює $\frac{kT}{2}$,

а на кожний коливальний ступінь вільності – в середньому енергія kT .

Коливальний ступінь має вдвоє більшу енергію тому, що на нього припадає не лише кінетична енергія, як у разі поступального і обертального руху, але і потенціальна енергія, причому середні значення кінетичної і потенціальної енергій однакові:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \langle \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Таким чином, середня енергія молекули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де $i = i_{\text{пост.}} + i_{\text{об}} + 2i_{\text{кол}}$.

Важливою характеристикою термодинамічної системи є її **внутрішня енергія** U – енергія хаотичного (теплого) руху мікрочастинок системи (молекул, атомів, електронів, ядер і тощо) і енергія взаємодії цих частинок.

До внутрішньої енергії не належать кінетична енергія системи як цілого і потенціальна енергія системи у зовнішніх полях.

Внутрішня енергія – однозначна функція термодинамічного стану системи, тобто в кожному стані система має цілком визначене значення внутрішньої енергії.

В ідеальному газі немає сил взаємодії між молекулами, а, отже, дорівнює нулю взаємна потенціальна енергія молекул. Тому для моля ідеального газу внутрішня енергія дорівнює сумі кінетичних енергій N_A молекул:

$$U_\mu = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT.$$

Якщо є $\nu = \frac{m}{\mu}$ молів газу, то його внутрішня енергія

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Внутрішня енергія ідеального газу залежить від кількості ступенів вільності молекул і абсолютної температури газу.

§34. Перший закон термодинаміки. Робота газу при зміні його об'єму

Розглянемо термодинамічну систему, для якої механічна енергія не змінюється, а змінюється лише її внутрішня енергія. В термодинаміці беруться до уваги дві форми передавання енергії від одного тіла до іншого, а, отже, і зміни внутрішньої енергії системи.

Перша з них зводиться до того, що енергія впорядкованого руху одного тіла переходить в енергію впорядкованого руху іншого тіла або його частин. Це може відбуватись під час взаємодії макроскопічних тіл, розміри яких у багато разів більші за розміри окремих атомів або молекул. Таку форму передавання енергії називають **роботою**. Наприклад, газ, що розширюється в циліндрі двигуна внутрішнього згорання, переміщує при цьому поршень і передає йому енергію у формі роботи.

Друга форма передавання енергії здійснюється при безпосередньому обміні енергією між частинками взаємодіючих тіл, що рухаються хаотично. За рахунку переданої тілу енергії підсилюється невпорядкований рух його частинок, тобто збільшується внутрішня енергія тіла. Таку форму передавання енергії в термодинаміці називають **теплотою**. Так, наприклад, при дотику холодного тіла і гарячого молекули другого тіла, які швидко рухаються, стикаються з молекулами першого тіла, що рухається повільніше, і передають їм частину своєї кінетичної енергії. Внаслідок

цього внутрішня енергія першого тіла збільшується, другого – зменшується, а їх температури вирівнюються.

Теплота подібно до роботи є формою передавання енергії, а зовсім не видом енергії. Тілу треба надати різних кількостей теплоти, щоб перевести його з одного стану в інший, залежно від того, через які проміжні стани воно при цьому проходить. Це означає, що теплота, на відміну від енергії, не є функцією стану.

Робота і теплота мають ту спільну властивість, що вони існують лише в процесі передавання енергії, а їх числові значення істотно залежать від виду цього процесу.

Проте між теплою і роботою існує глибока якісна відмінність. Теплота і робота є нерівноцінними формами передавання енергії впорядкованого руху. Виконання роботи над системою може безпосередньо привести до збільшення будь-якого виду енергії системи (кінетичної, потенціальної, внутрішньої).

Надання системі (або тілу) теплоти, тобто збільшення енергії хаотичного теплового руху її частинок безпосередньо приводить тільки до збільшення внутрішньої енергії. Для того, щоб при підведенні до системи теплоти зросла енергія інших видів, крім внутрішньої, необхідно хоч би частково перетворити хаотичний рух частинок в упорядкований або перетворити теплоту в роботу.

Теплота і робота тісно пов'язані між собою. Обидві ці форми передавання енергії переходять одна в одну і в реальних умовах супроводять одна одну. Так, наприклад, при нагріванні металевого стрижня не тільки збільшується його внутрішня енергія, а відбувається також роз-

ширення стрижня і, отже, виконується робота розширення. Досліди показали, що теплота перетворюється в роботу, або робота в теплоту завжди в точно відповідних кількостях, незалежно від способу перетворення.

Отже, можна говорити про дві форми передачі енергії від одних тіл до інших: у формі роботи і у формі теплоти. Енергія механічного руху може перетворюватись в енергію теплового руху і навпаки. При цих перетвореннях має бути дотримано закону збереження і перетворення енергії, чим, по суті, застосовним до термодинамічних процесів і є перший закон термодинаміки, який сформульований в результаті узагальнення дослідних даних.

Допустимо, що деяка система (газ, що знаходиться в циліндрі під поршнем), маючи внутрішню енергію U_1 , отримала деяку кількість теплоти Q і, перейшовши в новий стан, що характеризується внутрішньою енергією U_2 , виконала роботу A проти зовнішніх сил. Кількість теплоти вважається додатною, коли вона підводиться до системи, а робота – позитивною, коли система виконує її проти зовнішніх сил.

Дослід показує, що відповідно до закону збереження енергії при довільному способі переходу системи з першого стану у другий зміна внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ дорівнюватиме різниці між кількістю теплоти Q , отриманою системою, і роботою A , яка виконана системою проти зовнішніх сил:

$$\Delta U = Q - A, \text{ або } Q = \Delta U + A.$$

Це рівняння є математичним виразом **першого закону термодинаміки**:

теплота, надана системі, витрача-

ється на збільшення її внутрішньої енергії і на виконання системою роботи проти зовнішніх сил.

Вираз для першого закону термодинаміки для нескінченно малої зміни стану системи матиме вигляд:

$$dQ = dU + dA$$

або в коректнішій формі

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

де dU – нескінченно мала зміна внутрішньої енергії системи, δA – нескінченно мала робота, δQ – нескінченно мала кількість теплоти. У цьому виразі dU є повним диференціалом, а δA і δQ не є повними диференціалами, а функціоналами і залежать від вигляду функції, що описує перехід з одного стану в другий.

Дуже важливим є випадок, коли система – це періодично діюча машина, в якій газ, пара або інше “робоче тіло” внаслідок деякого процесу повертається до початкового стану. У цьому разі

$$\Delta U = 0 \text{ і } A = Q.$$

Робота, що виконується машиною за один цикл, дорівнює підведеній зовні теплоті Q . Цей висновок дає змогу сформулювати **перший закон термодинаміки** так:

неможливо побудувати періодично діючий двигун, який виконував би роботу без підведення енергії ззовні або виконував би роботу більшу, ніж кількість переданої йому ззовні енергії (вічний двигун першого роду неможливий).

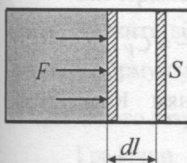


Рис. 66

Знайдемо роботу, яка виконується газом при зміні його об'єму. Нехай газ знаходиться в циліндричній посудині з

поршнем (рис 66).

Якщо газ, розширюючись, переміщує поршень на нескінченно малу відстань dl , то він виконує над ним роботу

$$\delta A = Fdl = pSdl = pdV,$$

де S – площа поршня, $Sdl = dV$ – зміна об'єму газу.

Повну роботу A , яка виконана газом при зміні його об'єму від V_1 до V_2 , знайдемо інтегруванням:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

Результат інтегрування визначається характером залежності між тиском і об'ємом газу.

Зобразимо графічно залежність тиску від об'єму (рис. 67). При збільшенні об'єму на dV виконана газом робота дорівнює pdV , тобто вона числово дорівнює площі, яка заштрихована на рис. 67. Повна робота, що виконується газом при розширенні від об'єму V_1 до V_2 визначається площею, яка обмежена віссю абсцис, кривою $p = f(V)$ і прямими V_1 і V_2 .

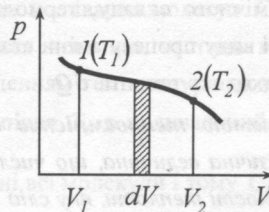


Рис. 67

Величина роботи A залежить не тільки від початкового і кінцевого станів тіла, а й від того, яким є термодинамічний процес, тобто вздовж якої кривої відбувається зміна стану.

Якщо процес відбувався вздовж замкненої кривої і газ повернувся до початкового стану, то повна робота, виконана

газом, не дорівнює нулю.

ПУЛЮЙ ІВАН
(1845–1918)

Запропонував в 1875 р. апарат для визначення механічного еквівалента теплоти, який відзначався високою точністю вимірювання. За його допомогою отримав значення $J=(425,2 \pm 5,4)$ кжм/ккал, яке збігається з результатом Джоуля $J=(427,9)$ кжм/ккал.

ШЛЛЕР МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ
(1848–1910)

Показав, що поняття кількості тепла може бути переведене з основних понять в допоміжне, другорядне

§35. Теплоємність. Класична молекулярно-кінетична теорія теплоємностей ідеального газу та її обмеженість

Для характеристики теплових властивостей газу, як і будь-якого іншого тіла, користуються особливою величиною — *теплоємністю*.

Теплоємністю тіла називається фізична величина, яка числово дорівнює кількості теплоти, яку потрібно надати тілу, щоб підвищити його температуру на один кельвін:

$$C_T = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Значення C_T залежить від маси тіла, його хімічного складу, термодинамічного стану і виду процесу зміни стану тіла, в якому надходить теплота δQ .

Питома теплоємність c називається фізична величина, що числово дорівнює кількості теплоти, яку слід надати одиниці маси цієї речовини для підвищення її температури на 1К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Молярною теплоємністю C називається фізична величина, яка числово дорівнює кількості теплоти, яку треба надати одному молю речовини для підвищення його температури на 1К:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT},$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ — кількість молей газу.

Між молярною теплоємністю C і питомою теплоємністю c існує співвідношення: $C = \mu c$.

Оскільки величина теплоємності газу залежить від умов, при яких йому надається кількість теплоти, то, зокрема, розрізняють теплоємність при сталому об'ємі C_V і теплоємність при сталому тиску C_P . В першому випадку нагрівання газу відбувається при сталому об'ємі, а в другому — при сталому тиску.

Якщо нагрівають газ, то згідно з першим законом термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

а для одного моля газу

$$C dT = dU_\mu + p dV_\mu.$$

Якщо газ нагрівається при сталому об'ємі, то надана газу теплота йде лише на збільшення його внутрішньої енергії:

$$C_V = \frac{dU_\mu}{dT}.$$

Якщо газ нагрівається при сталому тиску, то

$$C_P = \frac{dU_\mu}{dT} + \frac{p dV_\mu}{dT} = C_V + p \frac{dV_\mu}{dT}.$$

Тут враховано, що $\frac{dU_\mu}{dT}$ не залежить від виду процесу, оскільки внутрішня енергія ідеального газу не залежить ні від p , ні від V , а визначається лише температураю. Тому завжди $\frac{dU_\mu}{dT} = C_V$.

Згідно з рівнянням Клапейрона-Менделєєва

$$V_\mu = \frac{RT}{p} \quad \text{і} \quad \frac{dV_\mu}{dT} = \frac{R}{p}.$$

В результаті

$$C_p = C_V + R.$$

Отриманий вираз називається **рівнянням Майєра**. Воно вказує на те, що C_p завжди більше від C_V на величину універсальної газової сталої. Це пояснюється тим, що під час нагрівання газу при сталому тиску потрібна додаткова кількість теплоти на виконання роботи розширення газу.

Оскільки

$$dU_\mu = \frac{i}{2} R dT,$$

то

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad \text{і} \quad C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R.$$

Кожний газ характеризується величиною

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{2} \quad \text{і} \quad \gamma = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}.$$

Звідси

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Отримані вирази для C_V і C_p добре збігаються з експериментом для одноатомних і багатьох двоатомних газів при кімнатній температурі (H_2, N_2, O_2). Однак у Cl_2 $C_V \approx \frac{6}{2} R$, що неможливо пояснити. У триатомних газів спостерігаються систематичні відхилення від теорії.

Експеримент показав, що теплоємність залежить від температури. Водночас згідно з формулами для C_V і C_p вона стала для даного газу.

Графічно залежність теплоємності

C_V водню від температури показано на рис. 68. При низьких температурах до температури T_1 $C_V = \frac{3}{2} R$.

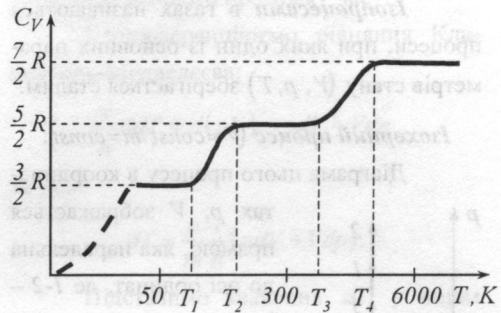


Рис. 68

Це означає, що молекули газу перебувають лише в поступальному русі, тобто мають три ступені вільності. З підвищенням температури до T_2 внаслідок обертання деяких молекул газу число ступенів вільності зростає, що відповідає зростанню теплоємності. При температурах від T_2 до T_3 усі молекули обертаються і $C_V = \frac{5}{2} R$.

При вищих температурах від T_3 до T_4 до перших двох видів руху молекул додаються також коливання молекул. Спочатку коливається невелика частина молекул, і з підвищенням температури ця частина зростає і після T_4 в коливальний рух будуть залучені всі молекули і тому $C_V = \frac{7}{2} R$.

Причина розбіжності теорії і експерименту для температурної залежності C_V полягає в тому, що закон про рівномірний розподіл енергій між всіма ступенями вільності молекул не є абсолютним, а лише наближено застосовується для найпростіших газів, що перебувають при не дуже низьких температурах.

Лише квантова теорія дає змогу по-

яснити температурну залежність теплоємності.

§36. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів

Ізопроцесами в газах називаються процеси, при яких один із основних параметрів стану (V, p, T) зберігається сталим.

Ізохорний процес ($V = \text{const}, m = \text{const}$).

Діаграма цього процесу в координатах p, V зображається прямою, яка паралельна до осі ординат, де 1-2 – ізохорне нагрівання, а 1-3 – ізохорне охолодження (рис. 69).

При ізохорному процесі газ не виконує роботи над зовнішніми тілами: $\delta A = p dV = 0$.

Отже, з першого закону термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$ для ізохорного процесу випливає, що $\delta Q = dU$. Оскільки

$$dU_{\mu} = C_V dT,$$

то для довільної маси газу

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Ізобарний процес ($p = \text{const}, m = \text{const}$).

Діаграма цього процесу в координатах p, V зображається прямою, яка паралельна до осі V (рис. 70). 1-2 – ізобарний процес розширення, 1-3 – ізобарний стиск.

Робота, яку виконує газ при ізобарному розширенні від об'єму V_1 до V_2 , дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),$$

де використано рівняння Клапейрона-Менделєєва.

При ізобарному процесі при наданні газу масою m кількості теплоти

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_p dT$$

його внутрішня енергія зростає на величину

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Газ виконує роботу

$$\delta A = p dV = \frac{m}{\mu} R dT.$$

Ізотермічний процес ($T = \text{const}, m = \text{const}$).

Діаграма цього процесу в координатах p, V є гіперболою. 1-3 – ізотермічний стиск, 1-2 – ізотермічне розширення (рис. 71).

Робота газу при ізотермічному розширенні:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \end{aligned}$$

При $T = \text{const}$ внутрішня енергія ідеального газу не змінюється, тобто

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT = 0 \quad \text{і} \quad \delta Q = \delta A,$$

тобто вся кількість теплоти, надана газу, витрачається на виконання ним роботи проти зовнішніх сил:

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Робота розширення газу ($V_2 > V_1$) додатна. У випадку стиску газу (процес 1-3) робота A , що виконується газом,

від'ємна, водночас зовнішні сили виконують додатну роботу $A' = -A$. При цьому $Q < 0$, тобто теплота від газу відводиться.

**§37. Адіабатний процес.
Політропний процес**

Адіабатний – це такий процес, який відбувається без обміну теплою ($\delta Q = 0$) між термодинамічною системою і оточуючим середовищем.

Розглянемо, при яких умовах можна реально здійснити адіабатний процес. Можливо в трьох випадках здійснити процес, який буде адіабатним.

В *першому* випадку необхідна адіабатна оболонка, теплопровідність якої дорівнює нулю. Такою оболонкою може служити посудина Дьюара. В такій посудині з подвійними посрібленими стінками, з простору між якими відкачано повітря, передачі теплоти через стінки практично не буде.

Другий випадок адіабатних процесів – це процеси, що відбуваються дуже швидко. При швидкому стиску газу затрачається робота δA , в наслідок чого збільшується внутрішня енергія dU , що викликає підвищення температури. При підвищенні температури деяка кількість теплоти δQ повинна бути передана навколишньому середовищі, що знаходиться при нижчій температурі, але процес теплопередачі є доволі інертним, тому при швидкому стиску теплота не встигає поширитись з даного об'єму.

Третій випадок – це процеси, що відбуваються в дуже великих об'ємах газу, наприклад, в атмосфері. Якщо в атмосфері відбудеться зменшення тиску – розрідження, яке виникає внаслідок атмосферної діяльності, то кількість теплоти, яка повинна

бути передана із навколишнього простору для того, щоб вирівняти температуру, яка понизилась внаслідок адіабатного розширення, просто не встигне поширитись упродовж значного проміжку часу.

Продиференціюємо рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$\frac{m}{\mu} R dT = d(pV) = pdV + Vdp.$$

Звідси

$$dT = \frac{\mu}{m} \frac{1}{R} (pdV + Vdp).$$

Підставимо значення dT у вираз для першого закону термодинаміки:

$$pdV = -\frac{m}{\mu} C_V dT \quad \text{і} \quad pdV = -\frac{C_V}{R} (pdV + Vdp).$$

Оскільки $R = C_p - C_V$, то

$$(C_p - C_V)pdV = -C_VpdV - C_VVdp,$$

$$C_p pdV + C_VVdp = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{C_V pV}, \right.$$

$$\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0, \quad \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0,$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ – показник адіабати, або коефі-

цієнт Пуассона.

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\gamma \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = 0, \quad \ln V^\gamma + \ln p = \ln const,$$

Отже,

$$pV^\gamma = const \quad \text{або} \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Цей вираз називається **рівнянням Пуассона**.

Для переходу до змінних T, V виключимо з рівняння Пуассона за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва тиск:

$$p = \frac{mRT}{\mu V}, \quad \text{тоді} \quad \frac{mRT}{\mu V} V^\gamma = const.$$

Звідси,

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{і} \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Оскільки об'єм

$$V = \frac{mRT}{\mu p},$$

то, підставивши цей вираз в рівняння Пуассона, отримуємо:

$$p \left(\frac{mRT}{\mu p} \right)^\gamma = \left(\frac{mR}{\mu} \right)^\gamma T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

Отже,

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} \quad \text{і} \quad T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}.$$

Побудуємо графіки рівнянь:

1). $pV^\gamma = \text{const}$ (адіабата),

$pV = \text{const}$ (ізотерма) (рис. 72).

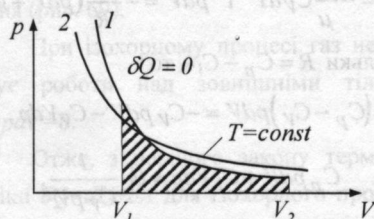


Рис. 72

Диференціюючи рівняння

$pV = \text{const}$, отримуємо $p dV + V dp = 0$, звідси для ізотерми маємо

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}.$$

Диференціюючи рівняння

$pV^\gamma = \text{const}$, маємо $p\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0$.

Звідси

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Отже, тангенс кута нахилу адіабати в γ разів більший, ніж в ізотерми. Це пояснюється тим, що при адіабатному стиску 1-3 тиск газу збільшується не лише внаслідок зменшення його об'єму, як при ізотермічному стиску, але і підвищенням температури. При адіабатному розширенні газу 1-2 його температура знижується і

тому тиск зменшується швидше, ніж при ізотермічному розширенні.

Розрахуємо роботу, яку виконує газ при адіабатному процесі 1-2. Вона вимірюється числово площею, заштрихованою на рис. 72. Якщо газ адіабатно розширюється від об'єму V_1 до V_2 , то його температура зменшується від T_1 до T_2 і робота розширення ідеального газу

$$A = -\frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2).$$

Оскільки, як показано під час розгляду теплоємності ідеального газу,

$$C_V = \frac{R}{\gamma-1},$$

то

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Якщо використати рівняння адіабатного процесу у змінних T , V і T , p , отримуємо

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Тоді роботу газу при адіабатному процесі можна записати в такому вигляді:

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right].$$

Робота, яка виконується газом при адіабатному розширенні 1-2, менша, ніж при ізотермічному. Це пояснюється тим, що при адіабатному розширенні відбувається охолодження газу, тоді як при ізотермічному – температура підтримується постійною за рахунок припливу зовні екви-

валентної кількості теплоти.

Ізотермічний і адіабатний процеси є ідеальними, які на практиці здійснити неможливо, до них можна лише наближатися. Ізотермічний процес повинен відбуватися нескінченно повільно; адіабатний процес може протікати з скінченою швидкістю, але в адіабатній оболонці, що має теплопровідність, яка рівна нулю. А це практично здійснити неможливо.

В природі відбуваються реальні процеси, які є проміжними між адіабатними і ізотермічними. Такі процеси називаються **політропними**.

Політропним називається процес, при якому теплоємність тіла залишається сталою, тобто

$$\delta Q = C dT,$$

де $C = \text{const}$.

Знайдемо рівняння політропи для ідеального газу. Запишемо рівняння першого закону термодинаміки:

$$C dT = C_V dT + p dV_\mu.$$

Виключимо з цього рівняння T . Для цього продиференціюємо вираз $pV_\mu = RT$:

$$p dV_\mu + V_\mu dp = R dT.$$

Звідси

$$dT = \frac{1}{R} (p dV_\mu + V_\mu dp).$$

Підставимо dT у вираз для першого закону термодинаміки. Враховуючи, що, $R = C_p - C_V$, отримуємо

$$(C - C_V)(p dV_\mu + V_\mu dp) = (C_p - C_V) p dV_\mu,$$

$$(C - C_p) p dV_\mu +$$

$$+ (C - C_V) V_\mu dp = 0 \left| \cdot \frac{1}{(C - C_V) p dV_\mu}, \right.$$

$$n \frac{dV_\mu}{V_\mu} + \frac{dp}{p} = 0,$$

де $n = \frac{(C - C_p)}{(C - C_V)}$ - показник політропи.

Проінтегрувавши отриманий вираз, отримаємо:

$$\ln V_\mu^n + \ln p = \ln \text{const} \quad \text{і} \quad p V_\mu^n = \text{const}.$$

Це рівняння і є шуканим рівнянням політропи ідеального газу.

При $C = 0$, $n = \gamma$ із рівняння $p V_\mu^n = \text{const}$

отримуємо рівняння адіабати;

при $C = \infty$, $n = 1$ - рівняння ізотерми;

при $C = C_p$, $n = 0$ - рівняння ізобари;

при $C = C_V$, $n = \pm \infty$ - рівняння ізохори.

Отже, всі ізопроекти в газах є частинними випадками політропного процесу.

§38. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул

Молекули газу, перебуваючи в стані хаотичного теплового руху, безперервно стикаються одна з одною. Зіткненням молекул називається процес взаємодії між молекулами, внаслідок якого молекули змінюють напрямок свого руху.

Мінімальна відстань, на яку зближуються при зіткненні центри двох молекул, називається **ефективним діаметром** d молекули (рис. 73).

Величина $\sigma = \pi d^2$ називається ефективним перерізом молекули. Ефектив-

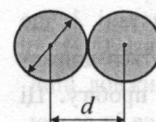


Рис. 73

ний діаметр молекул залежить від їх енергії, а отже, значить і від температури. З підвищенням температури ефективний діаметр молекул зменшується. Величина d залежить і від хімічної природи газу.

Обчислимо середнє число зіткнень під час руху молекули в однорідному газі за одиницю часу. Припустимо, що одна

молекула рухається із середньою арифметичною швидкістю $\langle v \rangle$, а всі інші молекули нерухомі (рис. 74).

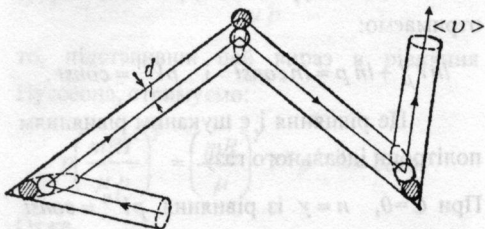


Рис. 74

Під час руху молекула стикатиметься з усіма молекулами газу, центри яких віддалені від траєкторії руху її центра на відстанях, що менші або дорівнюють d . За одиницю часу молекула зіткнеться з усіма молекулами, центри яких лежать всередині циліндра завдовжки $\langle v \rangle$ і радіусом основи d . Якщо n - концентрація молекул, то середнє число $\langle z \rangle$ зіткнень молекули за одиницю часу дорівнюватиме:

$$\langle z \rangle = \pi d^2 \langle v \rangle n.$$

Якщо врахувати рух інших молекул, в цю формулу ввійде відносна швидкість молекул $\langle v_g \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$.

Отже, середнє число зіткнень за одиницю часу

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Між двома послідовними зіткненнями молекули рухаються прямолінійно і рівномірно і проходять при цьому деякі відстані λ , що мають називаються довжинами вільного пробігу. Ці відстані можуть бути різними (рис. 75). Тому введемо поняття про **середню довжину вільного пробігу** $\langle \lambda \rangle$ - середню відстань, яку молекула проходить без зіткнення, тобто

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n}{n},$$

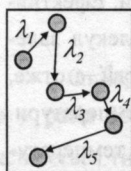


Рис. 75

де n - кількість зіткнень.

Середня довжина вільного пробігу є характеристикою всієї сукупності молекул газу при даних значеннях тиску p і температури T . Середній шлях, що проходить молекула за одиницю часу, числово дорівнює середній арифметичній швидкості $\langle v \rangle$ і якщо за одиницю часу молекула стикається з іншими молекулами $\langle z \rangle$ разів, то середня довжина вільного пробігу

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Оскільки $p = nkT$, то $\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$.

При сталій температурі середня довжина вільного пробігу є обернено пропорційною до тиску, тобто

$$\langle \lambda \rangle p_1 = \langle \lambda \rangle p_2 = \langle \lambda \rangle p_3.$$

Приведемо значення довжини вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ молекул повітря при 0°C і різних тисках:

p , мм.рт.ст	760	1	10^{-2}	10^{-4}
$\langle \lambda \rangle$, м	$6,5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0,5

§39. Явища перенесення у термодинамічно нерівноважних системах

Невпорядкованість теплового руху молекул газу, безперервні зіткнення між ними приводять до постійного перемішування частинок і зміни їх швидкостей і енергій.

Якщо в газі існує просторова неоднорідність густини, температури або швидкості впорядкованого переміщення окремих шарів газу, то тепловий рух молекул вирівнює ці неоднорідності. При цьому в газі відбуваються особливі процеси, об'єднані загальною назвою **явищ перенесення**. До цих явищ належать **дифузія, теплопровідність і внутрішнє тертя**.

1. Дифузія у газах

Процес дифузії полягає у вирівнюванні густини концентрації або складу суміші газів в об'ємі.

Якщо дифузія зводиться лише до вирівнювання густини, то в ньому беруть участь односторонні молекули, тобто тут переноситься маса однієї речовини. Таку дифузію називають *самодифузією*.

Якщо у процесі дифузії відбувається вирівнювання складу газу по всьому об'ємі, то зустрічаємося з явищем, яке називається просто *дифузією*. Тут маса однієї речовини переноситься в середовище іншої. Отже, у цьому випадку дифузія полягає в тому, що кожна з компонент суміші переходить з тих частин об'єму газу, де її концентрація є більшою, туди, де вона є меншою.

Переміщення однієї або іншої компоненти суміші, або ж групи молекул односторонньої речовини під дією різниці концентрації або густини називається *дифузійним потоком*. Дифузійний потік визначається кількістю дифузної речовини, яка за одиницю часу проходить через одиницю площі, що перпендикулярна до напрямку дифузії.

Перемішування молекул внаслідок їх теплового руху приводить до вирівнювання густини газу по всьому об'єму. Для того щоб існувало неперервне, незалежне від часу (стаціонарне) перенесення газу потрібна зовнішня дія. Вона повинна підтримувати незмінний розподіл густини за об'ємом газу і нейтралізувати вирівнювання густини внаслідок процесу дифузії.

Нехай газ міститься у посудині, яка має форму куба, з площею граней S і довжиною ребер l .

Об'єм, який займає газ, дорівнює

об'ємові посудини, тобто $V = Sl = S \langle v \rangle t$, де $\langle v \rangle$ – середня швидкість молекул. У цьому об'ємі буде $N = n \langle v \rangle St$ молекул, де n – кількість молекул в одиниці об'єму.

Рух молекул у газі є однаково ймовірним у всіх напрямках, тобто в напрямку Ox , Oy і Oz буде рухатись $\frac{1}{3}N$ молекул.

Нехай напрямок дифузійного потоку збігається є віссю Ox . Тоді в заданому напрямку Ox рухатиметься $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}N$ молекул і у від'ємному $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}N$ молекул. Отже, в напрямку перебігу дифузії рухатиметься $\frac{1}{6}n \langle v \rangle St$ молекул. При цьому переноситься маса речовини

$$M = \frac{1}{6}n \langle v \rangle St m.$$

Однак це б відбувалося, коли густина газу ρ була би сталою у всьому об'ємі. Але $\rho = \rho(x)$ і $n = n(x)$. Тому за час t через поверхню S переноситься зліва направо і справа наліво різна кількість молекул:

$$M_1 = \frac{1}{6}n_1 \langle v \rangle St m, \quad M_2 = \frac{1}{6}n_2 \langle v \rangle St m.$$

Отже, загальна маса, яка переноситься через площадку S , дорівнюватиме

$$M = M_1 - M_2 = \frac{1}{6} \langle v \rangle St m (n_1 - n_2).$$

На відстанях, які дорівнюють середній довжині вільного пробігу, не змінюються ні величина, ні напрямок швидкості

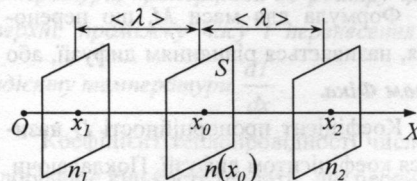
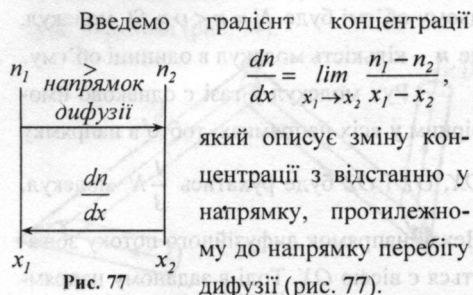


Рис. 76

молекул і з двох боків площадки S буде n_1 і n_2 молекул (рис 76).



Через те, що $\frac{dn}{dx}$ є різниця концентрації, яка припадає на одиницю довжини, то на відстані $2 \langle \lambda \rangle$ вона дорівнює:

$$n_1 - n_2 = -2 \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx}$$

Таким чином

$$M = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx} S t m.$$

Оскільки густина газу $\rho = nm$ і

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{m} \frac{d\rho}{dx},$$

то отримуємо

$$M = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{d\rho}{dx} S t = -D \frac{d\rho}{dx} S t,$$

де

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle.$$

Маса газу M , що переноситься завдяки дифузії через поверхню S , яка перпендикулярна до напрямку Ox , в якому зменшується густина, пропорційна до розміру цієї поверхні, проміжку часу t перенесення і градієнта густини $\frac{d\rho}{dx}$.

Формула для маси M , що переноситься, називається рівнянням дифузії, або **законом Фіка**.

Коефіцієнт пропорційності D називається коефіцієнтом дифузії. Покладаючи

$$S = l m^2, \quad t = l c, \quad \frac{d\rho}{dx} = -l \frac{\kappa z}{m^4},$$

отримаємо $M=D$, тобто коефіцієнт дифузії числово дорівнює масі газу, що переноситься через поверхню $S = l m^2$ за $l c$ при

$$\left| \frac{d\rho}{dx} \right| = l \frac{\kappa z}{m^4}.$$

Оскільки

$$\langle \lambda \rangle \sim \frac{l}{\rho}, \quad \langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

то D залежить від сорту газу (μ) і його стану (p і T):

$$D \sim \frac{l}{\rho} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Незважаючи на велику швидкість хаотичного руху газових молекул, дифузія відбувається повільно. Це пояснюється тим, що внаслідок численних зіткнень між молекулами вони проходять шлях значно більший, ніж відстань по прямій між двома точками в газі.

У разі взаємодифузії двох газів рівняння дифузії залишається справедливим, а коефіцієнт взаємодифузії

$$D_6 = \frac{D_1 n_1 + D_2 n_2}{n_1 + n_2},$$

де n_1, n_2 – концентрації молекул першого і другого газів.

2. Теплопровідність газів

Теплопровідність має місце, коли існує різниця температур, яка викликана будь-якими зовнішніми причинами. Виникнення потоку тепла в газі називається теплопровідністю. Молекули газу в різних місцях його об'єму мають різні середні кінетичні енергії. Тому при хаотичному тепловому русі молекул відбувається перенесення енергії. Молекули, що потрапили з нагрітих частин газу в холодніші, віддають

надлишок своєї енергії навколишнім частинкам. Навпаки, молекули, що повільно рухаються, потрапляючи з холодних частин в тепліші, збільшують свою енергію за рахунок зіткнень з молекулами, що мають більші швидкості.

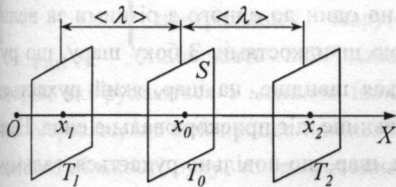


Рис. 78

Нехай в деякому об'ємі газу температура T зменшується в напрямку OX (рис. 78). Позначимо через T_1 і T_2 значення температури на відстанях $\langle \lambda \rangle$ від поверхні S , причому $T_1 > T_2$. Оскільки кінетична енергія газової молекули

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2} kT, \text{ то } \langle \varepsilon_{k1} \rangle > \langle \varepsilon_{k2} \rangle.$$

Тому в напрямку зменшення температури буде відбуватися перенесення енергії, а, отже, і кількості теплоти Q , оскільки внутрішня енергія газу складається з кінетичної енергії його молекул.

Зліва направо рухатиметься кількість молекул, яка дорівнює

$$N_1 = \frac{1}{6} nS \langle v \rangle t,$$

а справа наліво

$$N_2 = \frac{1}{6} nS \langle v \rangle t.$$

Відповідно при цьому буде переноситися кількість теплоти

$$Q_1 = N_1 \langle \varepsilon_{k1} \rangle = \langle \varepsilon_{k1} \rangle \frac{1}{6} nS \langle v \rangle t,$$

$$Q_2 = N_2 \langle \varepsilon_{k2} \rangle = \langle \varepsilon_{k2} \rangle \frac{1}{6} nS \langle v \rangle t.$$

Загальна кількість теплоти, яка буде переноситися при теплопровідності, дорів-

нюватиме

$$Q = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{6} nS \langle v \rangle t (\langle \varepsilon_{k1} \rangle - \langle \varepsilon_{k2} \rangle).$$

Середня енергія молекули дорівнює

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = C_V \frac{1}{N_A} T.$$

Тому

$$Q = \frac{1}{6} nS \langle v \rangle t \frac{C_V}{N_A} (T_1 - T_2).$$

Якщо градієнт температури

$$\frac{dT}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$$

поблизу площадки S , то

$$T_1 - T_2 = -2 \langle \lambda \rangle \frac{dT}{dx},$$

бо $\frac{dT}{dx}$ – зміна температури на одиницю

довжини. Знак „-“ показує, що зростанню x відповідає спадання T . Звідси

$$Q = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{C_V}{N_A} \frac{dT}{dx} S t,$$

а коефіцієнт теплопровідності

$$\kappa = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{C_V}{N_A} = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle n \frac{\mu C_V}{N_A} =$$

$$= \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle n m_0 c_V = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_V.$$

Отже,

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} S t.$$

Отриманий вираз називається законом **теплопровідності Фур'є**.

Кількість теплоти Q , яка переноситься через поверхню S , перпендикулярну до напрямку OX , в якому зменшується температура, пропорційна до розміру цієї поверхні, проміжку часу t перенесення і

градієнту температури $\frac{dT}{dx}$.

Коефіцієнт теплопровідності числово дорівнює кількості теплоти, що перено-

ситься через поверхню в 1 м^2 за 1 с при градієнті температури $1\frac{\text{К}}{\text{м}}$.

Оскільки середня довжина вільного пробігу $\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{\rho}$, а густина газу $\rho \sim p$, то добуток $\langle \lambda \rangle \rho$ не залежить від тиску. Тому коефіцієнт теплопровідності α не залежить від тиску.

Однак у сильно розріджених газах, які знаходяться в посудині, α може виявитися залежним від тиску. Будемо розріджувати газ, що знаходиться в кубічній посудині з ребром a . При цьому $\langle \lambda \rangle$ буде збільшуватися, а ρ – зменшуватися. Тому добуток $\langle \lambda \rangle \rho$, а, отже, і α залишаться сталим.

Понизимо тиск до такого ступеня, що $\langle \lambda \rangle$ дорівнюватиме a . Тоді при подальшому розрідженні ρ буде зменшуватися, а $a \langle \lambda \rangle$ уже не зможе збільшуватися. Тому добуток $\langle \lambda \rangle \rho$ і α будуть тепер зменшуватися разом із зменшенням тиску.

Якщо $\langle \lambda \rangle \leq a$, то α не залежить від тиску p , якщо $\langle \lambda \rangle \sim a$, то $\alpha \sim p$.

Введемо поняття густини **потoku тепла**. Під густиною потоку тепла розуміють кількість теплоти, яка переноситься через одиницю площі за одиницю часу.

$$q = -\alpha \frac{dT}{dx}.$$

Напрямок потоку тепла збігається з напрямком падіння температури. Тепло тече в напрямку зростаючого значення x . Потік тепла спрямований так, щоб зменшувати наявний градієнт температури, який його викликав.

У стаціонарних умовах кількість тепла Q , що проходить за одиницю часу через газ, дорівнює потужності джерела

енергії, за рахунок якого підтримується заданий градієнт температури.

3. Внутрішнє тертя у газах

Явище внутрішнього тертя пов'язано з виникненням сил тертя між шарами газу або рідини, що переміщуються паралельно один до одного з різними за величиною швидкостями. З боку шару, що рухається швидше, на шар, який рухається повільніше, діє прискорювальна сила. Навпаки, шар, що повільно рухається, гальмує шари газу, які рухаються швидше. Сили тертя, які при цьому виникають, направлені вздовж дотичної до поверхні зіткнення шарів.

З погляду кінетичної теорії газів причиною внутрішнього тертя є накладання впорядкованого руху шарів газу з різними швидкостями на хаотичний тепловий рух молекул, інтенсивність якого залежить від температури. Завдяки тепловому руху молекули переходять з шару, що рухається з швидкістю \vec{u}_2 у шар, який рухається з швидкістю \vec{u}_1 . При цьому молекули переносять імпульс $m\vec{u}$ свого впорядкованого руху.

Якщо різниця швидкостей руху різних шарів газу зовнішніми силами підтримується сталою, то і потік імпульсу від шару до шару буде сталим (стаціонарним), причому цей потік буде спрямований уздовж спадання швидкості. З таким випадком зустрічаємось при повільній течії газу (або рідини) між двома пластинами або у трубі під впливом сталої зовнішньої різниці тисків, спрямованої вздовж руху.

Коли газ тече вздовж труби, то швидкості різних шарів розподілені так, як показано на рис. 79. Найбільша швидкість спостерігається в середній частині труби,

що прилягає до осі, у міру наближення до стінок швидкість зменшується, а шар, що

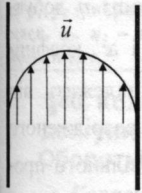


Рис. 79

безпосередньо прилягає до стінок труби, перебуває у спокої. При такій течії імпульс переноситься від центрального шару, де швидкість найбільша, до шарів, які рухаються з меншою швидкістю. Через те, що цей процес пов'язаний зі зміною кількості руху, то газ поводить себе так, як коли б на нього діяла якась сила (сила внутрішнього тертя).

Кількісно перенесення імпульсу можна описати так само, як перенесення енергії у процесі теплопровідності.

Розглянемо площадку S , паралельну швидкості течії газу і перпендикулярну до осі OX (рис. 80). Нехай $\vec{u}_1 > \vec{u}_2$. Завдяки обміну молекулами між обома шарами газу (обмін відбувається завдяки тепловим рухам) ця різниця зменшується.

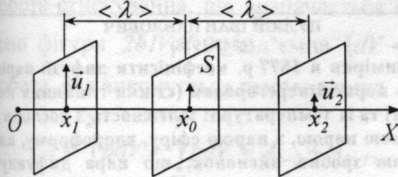


Рис. 80

Молекули праворуч від S замінюються іншими молекулами, які надійшли зліва і мають більший імпульс. У разі зіткнення цих молекул з молекулами, що були до цього праворуч від S , більша швидкість течії розподілиться між усіма молекулами праворуч, після чого швидкість течії цього шару, а отже, й імпульс стануть більшими. Водночас швидкість й імпульс шару газу, який знаходиться ліворуч від S , зменшуються.

Отже, обмін молекулами, зумовле-

ний тепловими рухами, приводить до вирівнювання швидкостей течії різних шарів газу. Таким є механізм перенесення імпульсу в напрямку осі OX від одного шару газу, який тече, до другого.

Величина потоку імпульсу P , який переноситься за одиницю часу через одиницю площі площадку S , визначається різницею імпульсів P_1 і P_2 , які переносяться молекулами, що перетинають площадку S зліва і справа відповідно.

Зліва направо рухатиметься кількість молекул, яка дорівнює

$$N_1 = \frac{1}{6} n S \langle v \rangle t,$$

а справа наліво

$$N_2 = \frac{1}{6} n S \langle v \rangle t.$$

Припускаємо, що всі молекули рухаються з однаковою тепловою швидкістю $\langle v \rangle$. Через площадку S протікатимуть лише ті молекули, які перебувають на відстані $< \lambda >$. Молекули, завдяки наявності в них теплової швидкості $\langle v \rangle$, мають імпульс $m \langle v \rangle$. Цей імпульс не розглядається. А мова йде про той імпульс $m \vec{u}$, який мають молекули завдяки тому, що вся маса газу рухається поступально.

Молекули, які рухаються зліва направо, переносять імпульс

$$P_1 = \frac{1}{6} n S \langle v \rangle t m u_1.$$

Відповідно, молекули, які рухаються справа наліво, переносять імпульс

$$P_2 = \frac{1}{6} n S \langle v \rangle t m u_2.$$

Повна зміна імпульсу молекул

$$P = P_1 - P_2 = \frac{1}{6} n S \langle v \rangle t m (u_1 - u_2).$$

Якщо градієнт швидкості

$$\frac{dv}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2}$$

поблизу площадки S , то

$$u_1 - u_2 = -2 \langle \lambda \rangle \frac{du}{dx},$$

оскільки $\frac{du}{dx}$ – зміна швидкості на одиницю довжини. Знак „-” показує, що зростанню x відповідає спадання u . Звідси

$$P = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho \frac{du}{dx} S t,$$

де $\rho = m n$. Оскільки зміна імпульсу дорівнює імпульсу діючої сили, то $P = Ft$, де F – сила взаємодії між шарами газу, що діє у поверхні їх дотику:

$$F t = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho \frac{du}{dx} S t,$$

або

$$F = \eta \left| \frac{du}{dx} \right| S.$$

Це рівняння внутрішнього тертя, або **закон Ньютона**.

Сила внутрішнього тертя, що виникає у площині дотику двох шарів газу, що ковзають один відносно одного, пропорційна до площі їх дотику S і градієнта швидкості $\frac{du}{dx}$.

Коефіцієнт пропорційності η називається коефіцієнтом внутрішнього тертя або динамічною в'язкістю:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho.$$

Приймаючи $S = l m^2$, $\frac{dv}{dx} = -l c^{-1}$,

маємо $F = \eta$, тобто коефіцієнт в'язкості числово дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на $l m^2$ поверхні дотику шарів газу, що рухається паралельно при граді-

єнті швидкості $l c^{-1}$, $[\eta] = l \frac{кг}{м \cdot с}$.

Внаслідок пропорційності η добутку $\langle \lambda \rangle \rho$ виходить, що, як і α , коефіцієнт внутрішнього тертя не залежить від тиску, за винятком сильно розрідженого газу, коли середня довжина вільного пробігу молекул стає більшою від розмірів посудини.

Поряд з динамічною в'язкістю η використовується також кінематична в'язкість σ , яка визначається як динамічна в'язкість, поділена на густину: $\sigma = \frac{\eta}{\rho}$.

Між коефіцієнтами перенесення існують такі співвідношення:

$$\eta = \rho D, \quad \alpha = c_V \eta, \quad \alpha = D c_V \rho.$$

Наявність цього зв'язку між коефіцієнтами процесів перенесення обумовлена однаковістю фізичної природи процесів перенесення і тим, що всі вони описуються однаковими рівняннями.

ПУЛЮЙ ІВАН ПАВЛОВИЧ
(1845-1918)

Виміряв в 1877 р. коефіцієнти дифузії парів через пористі перегородки (стілки глиняних посудин) та їх температурні залежності. З дослідів з водяною парою, з парою ефіру, хлороформу, алкоголю зробив висновок, що пара дифундує крізь пористі стінки у відношенні, оберненому до квадратних коренів їх густин.

Виконав вперше в 1874 р. найбільш систематичніше дослідження коефіцієнта внутрішнього тертя для різних газів. Досліджував повітря, вуглекислий газ, водень, пари води, спирту, бензолу, ацетону, ефіру.

Показав, що з підвищенням температури η зростає за законом $\eta = \eta_0 (1 + a t)^n$, $2/3 < n < 3/4$.

Довів, що значення коефіцієнта в'язкості суміші газів, які хімічно не взаємодіють між собою, лежить між значеннями коефіцієнтів внутрішнього тертя компонент. Визначив експериментально, що гази з більшою молекулярною вагою мають за рівних кількостей більший вплив на коефіцієнт внутрішнього тертя суміші газів.

Одержав для коефіцієнта внутрішнього тертя співвідношення

$$\eta = \frac{\eta_1 \sqrt{p_1 + \mu_2 / \mu_1 \cdot p_2}}{p_1 + \left[(\eta_1 / \eta_2) \cdot (\mu_2 / \mu_1)^{3/4} \cdot p_2 \right]^{2/3}}$$

де p_1, p_2 – парціальні тиски, μ_1, μ_2 – молекулярні маси, η_1, η_2 – коефіцієнти внутрішнього тертя компонент.

§40. Коловий процес. Теплові двигуни і холодильні машини. Оборотні і необоротні процеси

Коловим процесом (циклом) називається процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у вихідний стан.

На діаграмі процесів цикл зображається замкненою кривою.

Тіло, яке здійснює коловий процес і обмінюється енергією з іншими тілами, називається робочим тілом. Звичайно таким тілом є газ.

Цикл, який виконує ідеальний газ, можна розбити на процеси розширення (1-2) і стисання (2-1) газу (рис. 81). Робота розширення, яка визначається площею фігури 1a2V₂V₁1, додатна ($dV > 0$), робота стискування, що визначається площею фігури 2b1V₁V₂2, від’ємна ($dV < 0$). Робота, яка виконується газом за цикл

$$A = \int_{1a}^2 pdV + \int_{2b}^1 pdV = A_{1-2} + A_{2-1},$$

визначається затемненою площею, що охоплюється кривою 1a2b1.

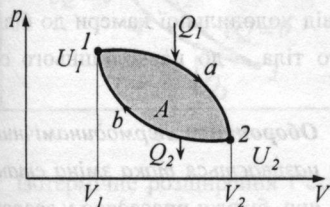


Рис. 81

Якщо за цикл виконується додатна робота $A > 0$ (цикл виконується за годинниковою стрілкою), то він називається **прямим**.

При прямому циклі робочому тілу, надається кількість теплоти Q_1 і тіло виконує роботу розширення A_{1-2} . Внутрішня енергія змінюється на величину $\Delta U = U_2 - U_1$, де U_1 і U_2 – внутрішня енергія тіла в стані 1 і 2, відповідно. Потім тіло стискається, над ним виконується робота $A'_{2-1} = -A_{2-1}$, яка менша, ніж A_{1-2} , і від нього забирається кількість теплоти Q_2 , яка менша Q_1 . Внутрішня енергія змінюється на величину $-\Delta U$. Робота стискування виконується за рахунок використання частини роботи, виконаної при розширенні робочого тіла, наприклад, за рахунок кінетичної енергії маховика, що почав обертатись при розширенні робочого тіла. За першим законом термодинаміки для процесу розширення $Q_1 = \Delta U + A_{1-2}$, для процесу стисання: $-Q_2 = -\Delta U - A_{2-1}$.

Якщо ці рівняння додати, то отримаємо $Q_1 - Q_2 = A_{1-2} - A_{2-1} = A$.

Після закінчення циклу тіло повертається в свій початковий стан, внутрішня енергія тіла не змінюється. Тому робота циклу може виконуватись лише за рахунок зовнішніх джерел, що підводять до тіла теплоту.

Прямий цикл використовується в **тепловому двигуні**, в якому робоче тіло отримує енергію у формі теплоти від зовнішніх джерел і частину її віддає у формі роботи. Тепловий двигун складається з трьох частин: нагрівник, робоче тіло, холодильник (рис. 82). Від термостата з вищою температурою T_1 , який називається нагрівником, за цикл



Рис. 82.

відбирається кількість теплоти Q_1 , а термостату з нижчою температурою T_2 , який називається холодильником, за цикл передається кількість теплоти Q_2 і виконується робота $A = Q_1 - Q_2$.

Тепловий двигун характеризується коефіцієнтом корисної дії η , який дорівнює відношенню роботи A , яка виконана тілом за цикл роботи, до кількості теплоти Q_1 , що отримало тіло від нагрівника:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Температура газу при його стискуванні повинна бути нижча, ніж при розширенні. Тоді тиск газу у всіх проміжних станах при стиску буде менший, ніж при розширенні, і буде виконано умову $A_{1-2} > A_{2-1}$, необхідну при виконанні двигуном корисної роботи.

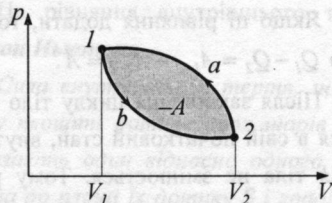


Рис. 83

Якщо здійснити цикл проти годинникової стрілки, то виконана робочим тілом робота буде та сама за абсолютною величиною, але від'ємна (рис. 83):

$$A_1 = \int_{1b}^2 pdV + \int_{2a}^1 pdV = - \left[\int_{2b}^1 pdV + \int_{1a}^2 pdV \right] = -A.$$

Такий процес називається **зворотним**.

Зворотний цикл використовується в **холодильних машинах** - періодично діючих установках, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з вищою температурою (рис. 84).

Така машина забирає за цикл від ті-

ла з температурою T_2 кількість теплоти

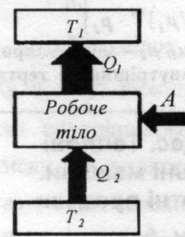


Рис. 84

Q_2 і віддає тілу при температурі T_1 кількість теплоти Q_1 . Над машиною за цикл повинна бути виконана робота A . Кількість відданої теплоти Q_1 дорівнює сумі отриманої кількості теплоти Q_2

і роботи, яку виконали зовнішні сили:

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Отже, чистий результат циклу полягає в тому, що тіло з меншою температурою, від якого забирається певна кількість теплоти, охолоджується, а тіло з вищою температурою, якому віддається теплота, нагрівається.

Ефективність холодильної машини характеризується її холодильним коефіцієнтом, який дорівнює відношенню віднятої кількості теплоти Q_2 до роботи, яка затрачується на приведення машини в роботу:

$$\eta_{х.м.} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Робочим тілом в холодильній машині слугують пари рідин, які легко киплять: аміак, фреон і ін. Енергія підводиться до машини від електричної мережі. За рахунок цієї енергії відбувається перехід теплоти від холодильної камери до більш нагрітого тіла - до навколишнього середовища.

Оборотним термодинамічним процесом називається така зміна стану системи, яка, будучи проведена у зворотному напрямку, повертає її в початковий стан так, щоб система пройшла через ті самі проміжні стани, що і у прямому процесі, але у зворотній послідовності, а стан тіл

поза системою залишився незмінним.

Процеси, які не задовольняють цим вимогам оборотності, називаються **необоротними**.

Будь-який рівноважний процес є оборотним.

Оборотні процеси – це до деякої міри ідеалізація реальних процесів. Всі реальні процеси є необоротними.

§41. Цикл Карно і його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу

Розглянемо коловий процес, в результаті якого тепло, відняте від якогось тіла, можна перетворити в роботу і притому якнайкраще.

Карно довів теорему: із всіх періодично діючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів і холодильників, найбільший коефіцієнт корисної дії (ККД) мають оборотні машини; при цьому ККД оборотних машин, що працюють при однакових температурах нагрівачів і холодильників, дорівнюють один одному і не залежать від природи робочого тіла.

Цикл Карно складається з двох ізо- терм і двох адіабат (рис. 85).

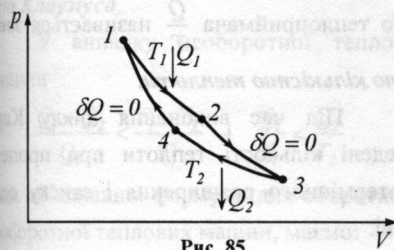


Рис. 85

Ізотермічне розширення і стиск за- дані відповідно, кривими 1-2 і 3-4, адіабат- не розширення і стиск – кривими 2-3 і 4-1. Для виконання циклу Карно необхідні термостат з температурою T_1 (нагрівник) і термостат з температурою T_2 (холодиль-

ник), причому $T_1 > T_2$. При проходженні адіабатних ділянок циклу система повинна бути термоізолюваною від навколишнього середовища.

Визначимо ККД циклу Карно. При ізотермічному процесі $\Delta U = 0$ і робота розширення газу A_{12} дорівнює кількості теп- лоти Q_1 , що отримав газ від нагрівника:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1.$$

При адіабатному розширенні робота виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії:

$$A_{23} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

При ізотермічному стисканні газу виконується робота A_{34} і газ віддає холо- дильнику кількість теплоти Q_2 :

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2.$$

Робота адіабатного стискання:

$$A_{41} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

В результаті колового циклу вико- нується робота

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

Термічний ККД циклу Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Використаємо рівняння адіабат 2-3 і 4-1:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1};$$

$$\frac{T_1 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_4^{\gamma-1}}.$$

Звідси

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тоді,

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}} =$$

$$= \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Отже, ККД циклу Карно визначається лише температурами нагрівача і холодильника.

Для підвищення ККД необхідно збільшити різницю температур нагрівача і холодильника. Наприклад, при $T_1 = 250\text{K}$ і $T_2 = 200\text{K}$ $\eta = 0,2$. Якщо ж температура нагрівача зростає до $T_1 = 400\text{K}$, тобто різниця температур збільшиться на 150K , то $\eta = 0,5$.

Довільна реальна машина втрачає деяку кількість теплоти через теплообмін з навколишнім середовищем, що знаходиться при нижчій температурі. Позначимо цю втрату теплоти Q_3 . Крім того, на подолання сил тертя, які існують у всякій реальній машині, тратиться деяка кількість теплоти Q_4 .

Отже, робота реальної машини

$$A = Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = Q_1 - Q_2',$$

де

$$Q_2' = Q_2 + Q_3 + Q_4.$$

Формула коефіцієнта корисної дії реальної теплової машини має вигляд:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

З виразу ККД машини, що працює за циклом Карно отримуємо

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2};$$

Згідно з теоремою Карно, ККД оборотного циклу Карно не залежить від природи робочого тіла. Звідси і відношення $\frac{Q_1}{Q_2}$ не залежить від природи робочого тіла.

Оскільки відношення температур $\frac{T_1}{T_2}$ вимірюється відношенням теплоти, то $\frac{Q_1}{Q_2}$

можна використати для встановлення шкали температур, яка не залежить від термометричного тіла.

§42. Ентропія.

Ентропія ідеального газу

Формулу коефіцієнта корисної дії ідеальної теплової машини, що працює за циклом Карно,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

приведемо до вигляду

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{і} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Відношення кількості переданої теплоти до температури теплодавача або теплоприймача $\frac{Q}{T}$ називається *зведеною кількістю теплоти*.

Під час виконання циклу Карно зведені кількості теплоти при процесах ізотермічного розширення і стиску однакові.

Розглянемо деякий оборотний цикл $1anb1$. Проведемо ряд нескінченно близьких адіабат, які перетинають лінії прямого $1an$ і зворотного $nb1$ переходів (рис. 86).

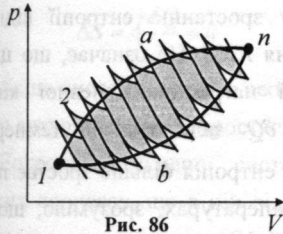


Рис. 86

Кожну з ліній $1an$ і $nb1$ можна вважати такою, що складається з ряду нескінченно близьких ізотерм, на яких робоче тіло одержує від ряду нагрівників, що знаходяться при температурах T_{a1}, T_{a2}, \dots кількості теплоти $\delta Q_{a1}, \delta Q_{a2}, \dots$ і віддає ряду холодильників, що знаходяться при температурах T_{b1}, T_{b2}, \dots , кількості теплоти $\delta Q_{b1}, \delta Q_{b2}, \dots$. До кожного циклу застосуємо формулу про рівність зведених кількостей теплоти:

$$\frac{\delta Q_{a1}}{T_{a1}} = \frac{\delta Q_{b1}}{T_{b1}}, \frac{\delta Q_{a2}}{T_{a2}} = \frac{\delta Q_{b2}}{T_{b2}}, \dots$$

і додамо отримані вирази:

$$\sum_i \frac{\delta Q_{ai}}{T_{ai}} = \sum_i \frac{\delta Q_{bi}}{T_{bi}}$$

Звідси сума зведених кількостей теплоти не залежить від шляху переходу.

Це положення називається **теоремою Клаузіуса**.

У випадку необоротної теплової машини

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{і} \quad \frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}$$

Тоді, об'єднавши формули для оборотної і необоротної теплових машин, маємо:

$$\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Умовимося кількість теплоти, яка віддана тілу нагрівником, вважати додатною, а кількість теплоти, віддану тілом холодильнику, – від'ємною. Тоді

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0,$$

причому „ = ” – відповідає оборотним переходам, а „ < ” – необоротним.

В загальному вигляді

$$\sum \frac{Q}{T} \leq 0.$$

При неперервній зміні стану тіла можна вважати, що воно входить в теплообмін з неперервним рядом нагрівників і холодильників. Кожен з цих нагрівників і холодильників віддає робочому тілу або отримує від нього нескінченно малі кількості теплоти δQ . Тоді сума

$$\sum \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

перетворюється в інтеграл

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0.$$

Це співвідношення називається **рівністю (нерівністю) Клаузіуса**.

Розглянемо оборотний цикл $1anb1$ (рис. 86). Запишемо рівність Клаузіуса у вигляді суми двох інтегралів:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1a}^n \frac{\delta Q}{T} + \int_{nb}^1 \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Звідси,

$$\int_{1a}^n \frac{\delta Q}{T} = - \int_{nb}^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_{1b}^n \frac{\delta Q}{T}.$$

Незалежність інтегралу $\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ від виду оборотного переходу між станами 1 і 2 означає, що цей інтеграл виражає зміну деякої функції стану тіла. Підінтегральний вираз $\frac{\delta Q}{T}$ є повним диференціалом деякої функції, яка визначається лише станом системи і не залежить від виду процесу, в ході якого система прийшла в цей стан.

Отже,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS.$$

Функція стану, диференціал якої є

$$\frac{\delta Q}{T}, \text{ називається ентропією } S.$$

Згідно з визначенням зміна ентропії при оборотному процесі

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Ця формула визначає ентропію лише з точністю до адитивної сталої, тобто початок відліку ентропії довільний.

Кожний стан тіла характеризується певним значенням ентропії S , яка є повним диференціалом.

Ентропія – адитивна функція стану системи: ентропія системи дорівнює сумі ентропій всіх тіл, що входять в систему.

Розглянемо фізичний зміст ентропії.

Аналізуючи роботу машини, яка працює за циклом Карно, доходимо висновку, що ККД залежить від температури нагрівника. Наприклад, при однаковій температурі холодильників T_2 , але при різних температурах нагрівників T_1 і T_1' , причому $T_1 > T_1'$, отримаємо

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T_1'},$$

тобто $\eta_1 > \eta_2$.

Це означає, що при високій температурі передачі кількості теплоти робочому тілу ефективність теплової машини зростає, тобто більша кількість переданої теплоти перетворюється в роботу. З іншого боку, зміна ентропії залежить від температури. При вищій температурі нагрівника зростання ентропії буде меншим, ніж при низькій, оскільки температура входить у знаменник виразу для ентропії. Отже,

більшому зростанню ентропії відповідає зменшення ККД. Це означає, що цінність переданої нагрівником певної кількості теплоти δQ залежить від температури. Оскільки ентропія більше зростає при низьких температурах, зрозуміло, що великому зростанню ентропії відповідає мала цінність нагрівника.

Отже, ентропію можна розглядати як міру знецінення енергії тіла.

Ентропія – міра теплової непрацездатності тіла.

Розглянемо цикл $lanbl$, частина якого lan необоротна, вона здійснюється нерівноважним процесом, а частина nbl оборотна, виконується рівноважним процесом. Тоді на основі

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0,$$

$$\int_{\text{необ}}^n \frac{\delta Q}{T} + \int_{\text{об}}^l \frac{\delta Q}{T} < 0; \quad \int_{\text{необ}}^n \frac{\delta Q}{T} < \int_{\text{об}}^l \frac{\delta Q}{T},$$

тобто інтеграл від $\frac{dQ}{T}$ по необоротному шляху завжди менший від інтеграла по оборотному шляху між тими ж станами. Але

$$\int_{\text{об}}^n \frac{\delta Q}{T} = S_n - S_l; \quad \int_{\text{необ}}^n \frac{\delta Q}{T} < S_n - S_l.$$

При необоротному процесі

$$\int_{\text{необ}} \frac{\delta Q}{T}$$

менший від зміни ентропії в даному процесі.

Тоді,

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Для оборотного рівноважного циклу зміна ентропії

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Якщо система виконує необоротний цикл, то ентропія системи зростає: $\Delta S > 0$.

Ентропія замкненої системи при будь-яких процесах, що в ній відбуваються, не може зменшуватися: $\Delta S \geq 0$.

Знайдемо зміну ентропії у процесах ідеального газу:

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{1}{T} (dU + pdV) = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{T} \left(\frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} \right) = \\ &= \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \end{aligned}$$

Зміна ентропії $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ ідеального газу при переході його із стану 1 у стан 2 не залежить від виду процесу переходу $1 \rightarrow 2$.

При адіабатному процесі

$$\delta Q = 0 \text{ і } \Delta S \geq 0.$$

Для оборотного адіабатного процесу зміна ентропії дорівнює 0, для необоротного $S_2 > S_1$ – ентропія тіла зростає.

Оборотний адіабатний процес – ізоентропічний процес.

При ізотермічному процесі

$$T_1 = T_2 \text{ і } \Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1},$$

при ізохоричному процесі

$$V_1 = V_2 \text{ і } \Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Розглянемо, як змінюється ентропія при деяких термодинамічних процесах.

На нагрівання тіла від температури T_1 до температури T_2 витрачається кількість теплоти

$$\delta Q = mc dT.$$

Тоді

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

В процесі теплообміну кількість теплоти δQ переходить від тіла з більш високою температурою T_1 до тіла з більш низькою температурою T_2 . Ентропія системи, що складається з цих двох тіл змінюється на величину

$$\Delta S = \delta Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \delta Q.$$

Оскільки $T_1 > T_2$, то ентропія при теплообміні зростає.

§43. Ентропія і термодинамічна ймовірність

З молекулярно-кінетичної теорії випливає, що кожному стану тіла (наприклад, газу) відповідає певний розподіл його молекул за об'ємом і певний розподіл молекул за швидкостями.

№ розподілу	комірки			№ розподілу	комірки		
	I	II	III		I	II	III
1	abc	-	-	16	c	-	ab
2	-	abc	-	17	-	c	ab
3	-	-	abc	18	b	-	ac
4	ab	c	-	19	-	b	ac
5	ab	-	c	20	a	-	bc
6	ac	b	-	21	-	a	bc
7	ac	-	b	22	a	b	c
8	bc	a	-	23	a	c	b
9	bc	-	a	24	b	a	c
10	c	ab	-	25	b	c	a
11	-	ab	c	26	c	a	b
12	b	ac	-	27	c	b	a
13	-	ac	b				
14	a	bc	-				
15	-	bc	a				

Рис. 87

Припустимо, що в посудині перебувають лише три „мічені” молекули газу a ,

b , і c , які рухаються з однаковою швидкістю, а весь об'єм посудини поділено на три рівні частини I, II, III (рис. 87).

Різні стани газу розрізняються лише за розподілом молекул a , b , і c , по трьох комірках об'єму. Всього можливі 27 різних розподілів. Молекули газу рухаються хаотично. Якби ми спостерігали довгий час τ за можливими розподілами молекул a , b , і c , то виявили би, що в середньому всі 27 розподілів зустрічаються однаково часто. Вони рівноймовірні. Під ймовірністю w даного розподілу розуміють границю

$$w = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Delta\tau}{\tau},$$

де $\Delta\tau$ – частина всього часу τ спостереження за розподілом частинок у системі, протягом якого відбувається даний розподіл.

Ймовірність w кожного з 27 розподілів однакова і тому дорівнює $1/27$.

Ймовірність розподілу w , що обчислюється за вище написаним рівнянням, відмінна від ймовірності термодинамічного стану системи, який відповідає цьому розподілу. Річ у тому, що в однорідному газі всі молекули однакові. Тому всі стани, що відповідають однаковим числам молекул у кожній комірці, будуть тотожними незалежно від того, які саме молекули газу знаходяться в кожній комірці. Ймовірність стану 4, 6 або 8 дорівнює $3/27$, а 22-27 – $6/27$.

Отже, ймовірність будь-якого стану тіла W більша від ймовірності w окремого розподілу в P разів $W = w \cdot P$, де P – термодинамічна ймовірність стану.

Термодинамічна ймовірність будь-якого стану тіла або системи дорівнює числу найрізноманітніших мікророзподілів

частинок за координатами і швидкостями, які відповідають даному термодинамічному стану ($P \geq 1$).

Найбільшу термодинамічну ймовірність має рівномірний розподіл, вона може здійснюватися найбільшою кількістю способів.

Больцман встановив зв'язок між ентропією S системи і термодинамічною ймовірністю P її стану

$$S = k \ln P + \text{const},$$

де k – стала Больцмана. Це співвідношення називається *формулою Больцмана*.

Отже, *ентропія визначається логарифмом числа мікророзподілів частинок, за допомогою якого може бути реалізований даний макростан*.

Ентропія може розглядатися як міра ймовірності стану термодинамічної системи. Формула Больцмана дає змогу дати ентропії таке статистичне тлумачення: *ентропія є мірою неупорядкованості системи*.

Ентропія досягає найбільшого значення при найбільш ймовірному стані системи. Найбільш ймовірним є стан термодинамічної рівноваги, в такому стані механічна система має мінімальну потенціальну енергію. Отже, максимум ентропії відповідає стану рівноваги ізольованої системи.

Згідно із уявленнями термодинаміки процеси в замкненій системі йдуть в бік зростання ентропії до максимуму. Якщо ентропію трактувати статистично, то це означає, що процеси в замкненій системі йдуть в напрямку збільшення кількості мікростанів, доки ймовірність станів не стане максимальною.

§44. Другий і третій закони термодинаміки

Перший закон термодинаміки, який встановив кількісний зв'язок між теплою, роботою і внутрішньою енергією системи, не дозволяє визначити напрямок протікання термодинамічних процесів.

Другий закон термодинаміки якраз вказує на напрямок теплових процесів, що відбуваються в природі.

Згідно із *Клаузіусом*, який дав одне з перших формулювань другого закону,

теплота ніколи не може переходити сама собою від тіл з нижчою температурою до тіл з вищою температурою.

Це означає, що для такого переходу теплоти потрібна затрата роботи зовнішнього джерела, що здійснюється в холодильній машині.

Фізичний зміст другого закону найбільш зрозуміло розкривається у формулюванні *Планка*:

неможливо побудувати таку періодично діючу теплову машину, яка, отримавши ззовні деяку кількість теплоти при довільній температурі, цілком перетворювала би її в механічну роботу і при цьому поверталась би точно у вихідний стан.

Отже, в довільній тепловій машині перетворюється в роботу лише частина отриманої від нагрівника кількість теплоти, тобто $A = Q_1 - Q_2$. Теплота Q_2 не використовується в машині і розсіюється в навколишньому середовищі. Величина Q_2 завжди досить велика, тому коефіцієнт корисної дії теплової машини

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

завжди значно менший від одиниці.

Із формули *ККД* теплової машини,

що працює за циклом Карно,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

випливає, що Q_2 дорівнювала би нулеві лише в тому випадку, якби температуру робочого тіла можна було би довести до температури абсолютного нуля, яку повинен мати холодильник. *ККД* реальних теплових машин завжди менший від одиниці.

Вираз для *ККД* теплової машини, яка працює за циклом *Карно*, теж є одним з формулювань другого закону:

коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини визначається лише температурами нагрівника і холодильника.

Кельвін сформулював другий закон термодинаміки в такому вигляді:

неможливо побудувати теплову машину, яка виконувала би роботу за рахунок теплоти найбільш холодного з тіл, що є в системі.

Такою машиною могла би бути машина, яка перетворювала б в роботу теплоту води в океані. Якби відніманням теплоти і перетворенням її в роботу вдалось би понизити температуру всієї океанської води лише на $0,1\text{K}$, то можна було би проводити в рух усі машини і верстати на земній кулі упродовж 1500 років. Така машина була би еквівалентна вічному двигуну, тому її називають вічним двигуном другого роду, на відміну від вічного двигуна першого роду, який повинен створювати роботу з нічого, без затрати енергії.

Вічний двигун першого роду протирічить закону збереження енергії; вічний двигун другого роду не протирічить закону збереження енергії, але він протирічить другому закону термодинаміки.

Другий закон термодинаміки вказує

на необоротність процесу перетворення однієї форми передачі енергії – роботи – у другу форму передачі енергії – теплоту. Він стверджує, що процес переходу впорядкованого руху тіла як цілого в неупорядкований рух його частинок є необоротним. Упорядкований рух може переходити в неупорядкований без будь-яких додаткових процесів, як це відбувається, наприклад, при внутрішньому терті. Перехід же неупорядкованого руху частинок у впорядкований рух тіл можливий лише при умові, що він супроводжується будь-яким компенсуючим процесом.

Оскільки реальні процеси не оборотні, то всі процеси в замкненій системі ведуть до збільшення її ентропії. Цей принцип лежить в основі **формулювання другого закону термодинаміки:**

можливі лише такі процеси, що відбуваються в макроскопічній замкненій системі, які ведуть до збільшення її ентропії.

Формула Больцмана дозволяє дати таке статистичне тлумачення **другому закону термодинаміки:**

термодинамічна ймовірність стану ізольованої системи при всіх процесах, що в ній відбуваються не може зменшуватися.

Отже, при всякому процесі, що відбувається в ізольованій системі, зміна термодинамічної ймовірності її стану ΔP додатна або дорівнює нулю:

$$\Delta P = P_2 - P_1 \geq 0.$$

У випадку оборотного процесу $\Delta P = 0$, тобто термодинамічна ймовірність P не змінюється, а у випадку необоротного процесу $\Delta P > 0$ і P зростає.

Отже, другий закон термодинаміки

є законом статистичним, тобто можливі процеси в ізольованій системі, які приводять не до збільшення, а до зменшення ентропії, не лише для явищ мікросвіту, але і для звичайних макроскопічних явищ; правда, ймовірність таких процесів в наших земних умовах дуже мала.

З багатьох дослідів, що проводились при низьких температурах, можна зробити висновок, який сформулював Нернст у такому вигляді:

при абсолютному нулі температури будь-які зміни стану відбуваються без зміни ентропії:

$$\lim_{T=0} (S_2 - S_1) = 0.$$

Тут мова йде не про абсолютне значення ентропії, а про її зміну. Інтегруючи вираз для ентропії, ми не можемо визначити сталої інтегрування.

Згідно з Планком, ентропія будь-якого конденсованого тіла зі зменшення його температури до абсолютного нуля прямує до певного сталого значення незалежно від індивідуальних властивостей тіла. Або можна стверджувати, що ентропія всіх тіл при абсолютному нулі набирає однакового значення – вона дорівнює нулю. Отже **теорему Нернста – третій закон термодинаміки** можна сформулювати так:

при абсолютному нулі ентропія дорівнює нулю:

$$\lim_{T=0} S = 0.$$

Третій закон термодинаміки заперечує можливість досягнення абсолютного нуля. Справді, всі процеси, які протікають з теплопередачею, супроводжуються зміною ентропії. Це означає, що при $S = \text{const}$ процес з теплопередачею не

можливий, тобто при $T = 0$ система більше не віддає теплоти, тобто не охолоджується.

Отже, не можна створити машину, яка здатна взяти всю теплоту від тіла, тобто охолодити його до абсолютного нуля.

§45. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Модель ідеального газу, яка використовується в молекулярно-кінетичній теорії газів, дає змогу описувати поведінку розріджених газів при достатньо високих температурах і низьких тисках. Виводячи рівняння стану ідеального газу, нехтують при цьому розмірами молекул і їх взаємодію одна з одною.

Підвищення тиску приводить до зменшення середньої відстані між молекулами, і тому потрібно враховувати об'єм молекул і взаємодію між ними.

Розглядаючи реальні гази – гази, властивості яких залежать від взаємодії молекул, треба враховувати сили міжмолекулярної взаємодії. Вони проявляються на відстані $\leq 10^{-9}$ м і швидко зменшуються при збільшенні відстані між молекулами. Такі сили – короткосяжні.

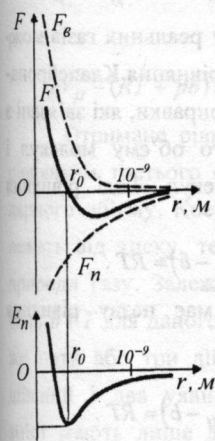


Рис. 88

Між молекулами одночасно діють сили притягання і сили відштовхування. На відстані $r = r_0$ результуюча сила $F = 0$. Відстань r_0 відповідає рівноважній відстані між молекулами, на якій би вони знаходились за відсут-

ності теплового руху. Якщо $r < r_0$, то переважають сили відштовхування ($F > 0$), якщо $r > r_0$ – сили притягання ($F < 0$) (рис. 88).

Елементарна робота dA сили F при збільшенні відстані між молекулами на dr виконується за рахунок зменшення взаємної потенціальної енергії молекул: $dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = -dE_n$. Якщо молекули знаходяться на відстані, коли молекулярні сили не діють ($r \rightarrow \infty$), то $E_n = 0$. При зближенні молекул проявляються сили притягання, які виконують додатну роботу. Потенціальна енергія взаємодії зменшується, досягаючи мінімуму при $r = r_0$. Якщо $r < r_0$, то із зменшенням r сили відштовхування ($F > 0$) різко зростають і робота, яка виконується проти цих сил, від'ємна ($dA = (\vec{F}, d\vec{r}) < 0$). Потенціальна енергія також різко зростає і стає додатною. Отже, система із двох молекул, що взаємодіють між собою, у стані стійкої рівноваги ($r = r_0$) характеризується мінімальною потенціальною енергією.

Механізм співударяння молекул реальних газів не містить прямого пружного удару, як це приймалось при розгляді молекул ідеального газу. Взаємодія реальних молекул відбувається на відстані, і молекули не наближаються до дотику.

Радіус молекул більшості газів порядку 10^{-8} см, отже, об'єм молекули порядку $4 \cdot 10^{-24}$ см³. В одному см³ газу при нормальних умовах міститься $2,68 \cdot 10^{19}$ молекул. Отже, власний об'єм всіх молекул в 1 см³ при нормальних умовах $\sim 1,2 \cdot 10^{-4}$ см³, тобто $\sim 0,0001$ від об'єму,

зайнятого газом. При тиску 500 МПа об'єм молекул становить уже половину всього об'єму газу.

Отже, для реальних газів необхідно враховувати розміри молекул і їх взаємодію одна з одною, тому модель ідеального газу і рівняння Клапейрона-Менделєєва $pV_\mu = RT$ (для моля газу), яке описує ідеальний газ, для реальних газів непридатне.

1. Врахування власного об'єму молекул

Наявність сил відштовхування, які протидіють проникненню в зайнятий молекулою об'єм інших молекул, зводиться до того, що фактично вільний об'єм, в якому можуть рухатись молекули реального газу, буде не V_μ , а $V_\mu - b$, де b - об'єм, що „заборонений” для руху молекул.

Дві молекули можуть наблизитися на відстань не меншу, ніж сума їх радіусів ($d = r + r$), (рис. 89). Тому b пропорційна об'єму сфери, яка описана радіусом d , і кількості молекул, які співударяються:

$b = kN_A \frac{4}{3} \pi d^3 = kN_A 8 \frac{4}{3} \pi r^3 = 8kN_A V_0$,
де N_A - число Авогадро, V_0 - об'єм одної молекули.

Прийmemo коефіцієнт $k = \frac{1}{2}$, оскільки ймовірність одночасного зіткнення трьох і більшого числа молекул при звичайних густинах газів дуже мала. Тому можна обмежитися зіткненням тільки двох молекул. Тоді,

$$b = 4N_A V_0.$$

2. Врахування притягання молекул

Дія сил притягання між молекулами

реального газу приводить до появи додаткового тиску на газ, що називається **внутрішнім тиском**.

Для обчислення значення поправки p' розглянемо молярний об'єм газу V_μ (рис. 90), в якому подумки виділимо площину - стінку, по обидві сторони якої знаходиться газ.

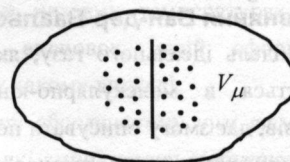


Рис. 90

Сила f , що діє в бік стінки на одну молекулу, що знаходиться перед стінкою, пропорційна до тиску n молекул в одиниці об'єму, що знаходиться за стінкою:

$$f = c_1 n.$$

Увесь додатковий тиск p' , що діє на газ і на виділену в ньому стінку, пропорційний до сили f , що діє на одну молекулу в бік стінки, і числу молекул в одиниці об'єму перед стінкою, тобто n :

$$p' = C_2 f n = C_1 C_2 n^2.$$

Оскільки

$$n = \frac{N_A}{V_\mu}, \text{ то } p' = C_1 C_2 \frac{N_A}{V_\mu^2} = \frac{a}{V_\mu^2}.$$

Рівняння стану реальних газів можна отримати, якщо в рівняння Клапейрона-Менделєєва ввести поправки, які зв'язані з врахуванням власного об'єму молекул і сил притягання молекул. Тоді рівняння стану набере вигляду:

$$(p + p')(V_\mu - b) = RT.$$

Це рівняння має назву рівняння

Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right) (V_\mu - b) = RT.$$

Для довільної маси m газу

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \frac{m^2}{\mu^2}\right) \left(V - b \frac{m}{\mu}\right) = \frac{m}{\mu} RT.$$

a і b – сталі для кожного газу величини, що визначаються дослідно (записуються рівняння Ван-дер-Ваальса для двох відомих з досліду станів газу і розв'язуються відносно a і b).

Виводячи рівняння Ван-дер-Ваальса, було допущено ряд спрощень, тому воно досить наближене. При малих тисках p і високих температурах T об'єм V_μ стає великим і $b \leq V_\mu$, $p' \leq p$ і рівняння Ван-дер-Ваальса в даному випадку збігається з рівнянням Клапейрона-Менделєєва.

§46. Порівняння ізоterm Ван-дер-Ваальса з експериментальними. Критичний стан

Для дослідження поведінки реального газу розглянемо ізоterm Ван-дер-Ваальса для одного моля, які визначаються рівнянням:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT.$$

Перетворимо це рівняння до вигляду:

$$pV_\mu - pb + \frac{a}{V_\mu} - \frac{ab}{V_\mu^2} = RT$$

$$pV_\mu^3 - (RT + pb)V_\mu^2 + aV_\mu - ab = 0.$$

Отримане рівняння є алгебраїчним рівнянням третього ступеня відносно молярного об'єму. Коефіцієнти рівняння залежать від тиску, температури і хімічної природи газу. Залежно від числових значень p і T для даного газу це рівняння може мати або три дійсні корені або один дійсний і два уявні, причому фізичний зміст мають лише дійсні додатні корені.

Ізоtermи газу, які описуються рівнянням Ван-дер-Ваальса, мають вигляд, наведений на рис. 91, де $T_1 < T_2 < T_k < T_3$.

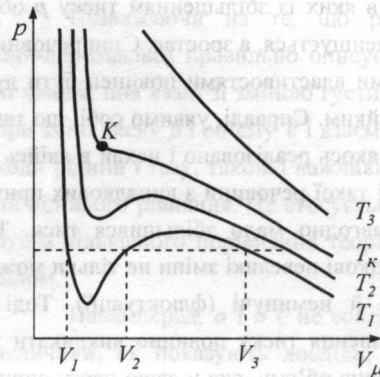


Рис. 91

При температурах $T < T_k$ є область станів, де кожному значенню тиску відповідають три точки ізоtermи й ізоtermа має хвилястоподібну ділянку. При підвищенні температури ці три точки зближуються і при $T = T_k$ зливаються в одну точку K , яка є точкою перегину ізоtermи. Дотична до ізоtermи в точці K паралельна до осі абсцис. При температурах $T > T_k$ ізоtermи Ван-дер-Ваальса близькі до ізоtermи ідеального газу.

Розглянемо ізоtermи при $T < T_k$ (рис. 92). На ділянках 1–3 і 5–7 при зменшенні об'єму V зростає тиск p , що відповідає експерименту. Частина ізоtermи 1–2 відповідає газоподібному стану, а частина 6–7 – рідині.

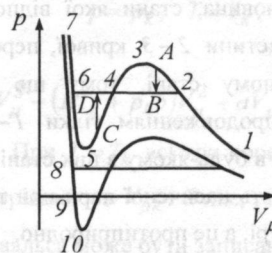


Рис. 92

На ділянці 3–5 стискання речовини приводить до зменшення тиску p . У природі немає і не може бути таких речовин, в яких із збільшенням тиску p об'єм не зменшується, а зростає. Стан речовини з такими властивостями повинен бути дуже нестійким. Справді, уявимо собі, що такий стан якось реалізовано і нехай в якійсь частині такої речовини з випадкових причин як завгодно мало збільшився тиск. Такі випадкові невеликі зміни не тільки можливі, а й неминучі (флюктуації). Тоді це збільшення тиску повинно викликати збільшення об'єму, яке у свою чергу спричинить ще значніше збільшення тиску і т.д., доки речовина не перейде до стану, що відповідає точці 3, починаючи з якого, залежність об'єму від тиску стає якісно нормальною.

Як завгодно мале випадкове зменшення тиску p викликає довільний перехід речовини до стану, якому відповідає точка 5.

Експериментальна ізотерма матиме вигляд ламаної лінії 1–2–6–7.

У станах, що відповідають горизонтальній ділянці 2–6, спостерігається рівновага рідкої і газоподібної фази речовини.

Речовина в газоподібному стані при $T < T_k$ називається парою, а пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається *насиченою*.

Речовина, стани якої відповідають точкам частини 2–3 кривої, перебуває в газоподібному стані, тому що частина 2–3 є продовженням гілки 1–2. Але тиск пари в будь-якому з цих станів вищий за пружність насиченої пари при тій самій температурі, а це протиприродно.

Стани 2–3 речовини спостеріга-

ються при швидкому охолодженні закритої посудини з повітрям, що містить у собі водяну пару. Треба ретельно очистити повітря від слідів пилу і щоб у ньому не було електричних зарядів. У цих умовах, незважаючи на охолодження, а отже, і зменшення тиску насиченої водяної пари, вона досить довгий час не конденсується, залишаючись в газоподібному стані. Така пара називається *перенасиченою*. Стани 2–3 є нестійкими: достатньо, наприклад, в стані A попадання пилінки в пару, щоб вся речовина розпалась на дві фази і перейшла в стан B на прямій 2–4–6. Стани 2–3 називаються *метастабільними*.

Точки на частині ізотерми 6–5 відповідають станам рідини, тому що частина 6–5 є продовженням гілки 7–6. Ці стани речовини називають *перегрітою рідиною*. Це рідина, яка зберігається при тисках менших, ніж тиск насиченої пари за даної температури. Стан перегрітої рідини досягається так. Береться дуже чиста рідина без домішок і мікроскопічних бульбашок повітря в об'ємі, що займає рідина. Це досягається тривалим кипінням рідини. Якщо приготувати таким чином рідину нагрівати, то при досягненні умов переходу від рідкого стану в газоподібний такий перехід не спостерігається. Параметри речовини T, p відповідають його знаходженню в газоподібному стані, але він існує у вигляді рідини. Якщо в перегріту рідину кинути піщинку, то відбувається швидкий перехід певної частини рідини із рідкого стану в газоподібний по всьому об'єму, який супроводжується бурхливим кипінням рідини. Тиск газу над рідиною зростає до тиску, що відповідає ділянці 2–4–6 (перехід $C \rightarrow D$ на рис. 92). Ста-

ни 6–5 – *метастабільні*.

При досить низьких температурах нижня частина ізотерми Ван-дер-Ваальса перетинає вісь V_μ і переходить в область від’ємних тисків. Речовина при від’ємному тиску знаходиться у стані не стиску, а розтягу. Ділянка 8–9 на нижній ізотермі (рис. 92) відповідає перегрітій, а ділянка 9–10 – *розтягнутій рідині*.

З рівняння стану Ван-дер-Ваальса не можна визначити положення горизонтальної частини

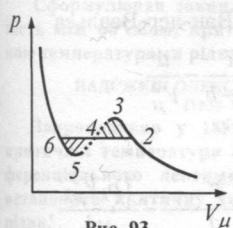


Рис. 93

дослідної кривої відносно максимуму і мінімуму кривої Ван-дер-Ваальса (рис. 93). Це означає, що не

можна визначити величину рівноважного тиску насиченої пари при даній температурі. Як показав Максвелл, якщо уявити собі перехід від стану 6 до стану 2, то незалежно від того, як він відбувається, вздовж однофазної кривої 6–5–4–3–2, чи вздовж двофазної прямої 6–4–2, він повинен супроводжуватися однією і тією ж роботою. Площа під кривою 6–5–4–3–2 повинна дорівнювати площі під прямою 6–4–2, оскільки робота на діаграмі pV дорівнює площі під відповідними діаграмами. Звідси, пряма розташована так, щоб площі заштрихованих областей дорівнювали одна одній.

Висновки, які отримуємо з аналізу рівняння Ван-дер-Ваальса, були підтверджені дослідями Ендрюса, що вивчав ізотермічне стискання вуглекислого газу. Отримані результати з експериментальних (Ендрюс) і теоретичних (Ван-дер-Ваальса) ізотерм відрізняються лише тим, що пере-

творенню газу в рідину в першому випадку відповідають горизонтальні ділянки, а у другому – хвилеподібні.

Незважаючи на те, що рівняння Ван-дер-Ваальса правильно описує основні явища, пов’язані зі зміною густини газів при зміні тиску p і об’єму V і взаємні переходи рідини і газу, також і важливі відступи від цього рівняння. Це стосується передусім кількісного порівняння теорії з дослідом.

Насамперед, a і b є не зовсім сталі величини, як показують досліди, а вони залежать від температури.

Можна підібрати a і b так, щоб при якійсь температурі T теоретична і дослідна ізотерми зійшлися. Але тоді ізотерми для інших температур не збігатимуться.

При підвищенні температури серед ізотерм з хвилеподібними ділянками є одна, що не має таких ділянок. Така ізотерма називається *критичною*, а температура T_k – критичною. При цій температурі зникає різниця між різними станами речовини і коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює нулю. Відповідні T_k об’єм $V_{\mu k}$ і тиск p_k називаються *критичними*. Стан з критичними параметрами $p_k, V_{\mu k}, T_k$ називається *критичним станом*.

Знайдемо критичні параметри. Якщо

$$p = p_k, \quad T = T_k,$$

то

$$p_k V_\mu^3 - (RT_k + p_k b) V_\mu^2 + a V_\mu - ab = 0.$$

При $T = T_k$ всі три корені збігаються і дорівнюють $V_{\mu k}$. Отже, рівняння Ван-дер-Ваальса може бути записане у вигляді:

$$p_k (V_\mu - V_{\mu k})^3 = 0,$$

або

$$p_k V_\mu^3 - 3p_k V_{\mu k} V_\mu^2 + 3p_k V_{\mu k}^2 V_\mu - p_k V_{\mu k}^3 = 0.$$

Отримані вище два вирази рівняння Ван-дер-Ваальса тотожні і в них повинні бути рівні коефіцієнти при однакових степенях. Тому

$$3p_k V_{\mu k} = RT_k + p_k b,$$

$$3p_k V_{\mu k}^2 = a, \quad p_k V_{\mu k}^3 = ab.$$

Поділивши третє рівняння на друге, отримуємо вираз для $V_{\mu k}$. Якщо підставити отриманий вираз для $V_{\mu k}$ у третє рівняння, маємо вираз для p_k . Тоді з першого рівняння, враховуючи вирази для p_k і $V_{\mu k}$, отримаємо співвідношення для T_k . В результаті

$$V_{\mu k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

Отже, критичні величини T_k , $V_{\mu k}$, p_k безпосередньо виражаються через Ван-дер-Ваальсівські поправки a і b .

Якщо через крайні точки горизонтальних ділянок сімейства Ван-дер-Ваальсівських ізотерм провести лінії, то одержимо криву, що обмежує область двофазних станів речовини (рис. 94).

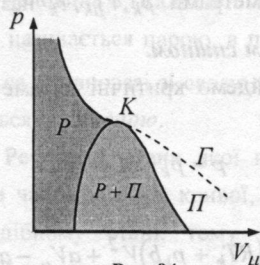


Рис. 94

Пара відрізняється від інших газоподібних станів тим, що при ізотермічному стиску відбувається процес зрідження.

Газ, який знаходиться в стані при температурі, що вища за критичну, не мо-

же бути перетворений в рідину ні при якому тиску.

Рівняння Ван-дер-Ваальса має той недолік, що воно змінюється від речовини до речовини, оскільки до нього належать параметри a і b , які залежать від природи речовини. Але a і b і R можна виключити, виразивши їх через критичні параметри:

$$R = \frac{8 p_k V_{\mu k}}{3 T_k}, \quad b = \frac{1}{3} V_{\mu k},$$

$$a = 27b^2 p_k = 3p_k V_{\mu k}^2.$$

Тоді рівняння Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2}$$

набуває вигляду:

$$p = \frac{8 p_k V_{\mu k}}{3 T_k} \frac{T}{V_\mu - \frac{1}{3} V_{\mu k}} - \frac{3 p_k V_{\mu k}^2}{V_\mu^2},$$

або

$$\frac{p}{p_k} = 8 \frac{T}{T_k} \frac{V_{\mu k}}{3V_\mu - V_{\mu k}} - 3 \frac{V_{\mu k}^2}{V_\mu^2},$$

Звідси

$$\frac{p}{p_k} + 3 \frac{V_{\mu k}^2}{V_\mu^2} = 8 \frac{T}{T_k} \frac{1}{3 \frac{V_\mu}{V_{\mu k}} - 1},$$

або

$$\left[\frac{p}{p_k} + 3 \left(\frac{V_{\mu k}}{V_\mu} \right)^2 \right] \left(3 \frac{V_\mu}{V_{\mu k}} - 1 \right) = 8 \frac{T}{T_k}.$$

Введемо зведені параметри, під якими розуміємо відношення змінної величини даного параметра до його критичного значення, а саме:

$$\theta = \frac{T}{T_k} \text{ — зведена температура,}$$

$$\pi = \frac{p}{p_k} \text{ — зведений тиск,}$$

$$\omega = \frac{V_\mu}{V_{\mu k}} - \text{зведений об'єм.}$$

В результаті отримуємо *зведене рівняння Ван-дер-Ваальса*

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\theta.$$

АВЕНАРИУС МИХАЙЛО ПЕТРОВИЧ
(1835-1895)

Виконав найбільш широкі та систематичні дослідження критичних параметрів цілої низки речовин. Показав, що за критичної температури питомий об'єм рідини не дорівнює питомому об'єму пари.

Сформулював закон, що відображає залежність між об'ємом, критичною і спостережуваною температурами рідини.

НАДЕЖКІН ОЛЕКСАНДР ІВАНОВИЧ
(1858-1886)

Запропонував у 1885 р. метод визначення критичної температури води за допомогою диференціального денсиметра, який дає змогу встановити критичну температуру непрозорих рідин.

§47. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія реального газу дорівнює сумі кінетичної енергії E_k теплового руху його молекул і потенціальної енергії E_n міжмолекулярної взаємодії. Потенціальна енергія реального газу, який описується рівнянням Ван-дер-Ваальса, зумовлена лише силами притягання між молекулами, які приводять до виникнення внутрішнього тиску на газ

$$p' = \frac{a}{V_\mu^2}.$$

Робота, яка затрачається для подолання сил притягання, що діють між молекулами газу, або проти внутрішнього тиску, йде на збільшення потенціальної енергії системи:

$$dA = p'dV_\mu = dE_n, \text{ або } \int dE_n = \int \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu.$$

Звідси

$$E_n = -\frac{a}{V_\mu}.$$

Знак „-“ означає, що молекулярні сили, які створюють внутрішній тиск p' , є силами притягання.

З достатнім ступенем точності можна вважати, що кінетична енергія E_k для одного моля реального газу дорівнює кінетичній енергії ідеального газу, що перебуває при тій самій температурі. Внутрішня енергія U_{id} ідеального газу дорівнює тільки кінетичній енергії хаотичного руху молекул. Тому

$$E_k = U_{id} = \int_0^T dU_{id} = \int_0^T C_V dT = C_V T.$$

Тоді внутрішня енергія одного моля реального газу:

$$U_\mu = C_V T - \frac{a}{V_\mu}$$

і вона росте із збільшенням температури та об'єму газу.

Якщо газ розширюється без теплообміну з навколишнім середовищем ($\delta Q = 0$) і не виконує зовнішньої роботи ($\delta A = 0$), то на основі першого закону термодинаміки $\delta Q = ((U_2 - U_1) + \delta A)$, отримуємо, що $U_1 = U_2$.

При адіабатному розширенні без виконання зовнішньої роботи внутрішня енергія газу не міняється.

Для ідеального газу $U_1 = U_2$ означає рівність температур ($T_1 = T_2$), тобто при адіабатному розширенні ідеального газу у вакуумі його температура не змінюється.

Для реального газу:

$$U_1 = C_V T_1 - \frac{a}{V_1} \text{ і } U_2 = C_V T_2 - \frac{a}{V_2}.$$

З умови $U_1 = U_2$ отримуємо

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Оскільки $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2$, тобто реальний газ при адіабатному розширенні у вакуум охолоджується. При адіабатному стиску реальний газ нагріватиметься.

же бути нерозворений в рідині ці при якості му тиску. м'я'юо йназодий - $\frac{1}{V_1}$

Рівняння Ван-дер-Ваальса. В результаті отримано загальне рівняння для розрідженого газу, яке можна записати в наступному вигляді: $\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$

Висновки. Рівняння Ван-дер-Ваальса є рівнянням стану, яке враховує взаємодії між молекулами газу. Воно є більш точним, ніж рівняння ідеального газу, і дозволяє описувати поведінку реального газу в ширшому діапазоні температур і тисків.

Висновки. Рівняння Ван-дер-Ваальса є рівнянням стану, яке враховує взаємодії між молекулами газу. Воно є більш точним, ніж рівняння ідеального газу, і дозволяє описувати поведінку реального газу в ширшому діапазоні температур і тисків.

§47. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія реального газу складається з енергії поступального руху молекул і потенціальної енергії їх взаємодій. Потенціальна енергія реального газу, яка виникає внаслідок взаємодій між молекулами, які приваблює до виникнення

$$U = \frac{3}{2} NkT - \frac{N^2 a}{V}$$

Всяма інтеграл під час процесу, який відбувається при постійній температурі, для подолання потенціальної енергії, яку необхідно подолати, щоб газ змінив свій стан. Ця енергія може бути використана для виконання роботи.

$$dU = \frac{3}{2} Nk dT - \frac{2Na}{V^2} dV$$

Звідси

III. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

§48. Закон збереження електричного заряду. Електричне поле.

Напруженість електричного поля

Електростатика – це розділ фізики, в якому розглядають взаємодії і властивості електричних зарядів, що нерухомі в тій системі координат, в якій ці заряди вивчають.

У природі існує два види електричних зарядів – *позитивні і негативні*. Довмивились вважати позитивним заряд, що виникає, наприклад, на склі, яке натирають шовком, а негативним – на бурштині, який натирають хутром. Однойменно заряджені тіла відштовхуються одне від одного, а різнойменно заряджені притягуються. Знак заряду, який виникає на тілі внаслідок електризації тертям, залежить не тільки від хімічного складу цього тіла, а й від того, з яким іншим тілом воно стикається при терті.

При електризації тіл тертям завжди одночасно електризуються обидва тіла, причому одне з них дістає позитивний заряд, а друге – негативний. Позитивний заряд першого тіла за величиною завжди точно дорівнює негативному заряду другого, якщо до електризації обидва тіла не були заряджені. Численними експериментами було встановлено **закон збереження електричних зарядів**:

в ізольованій системі алгебраїчна сума електричних зарядів залишається незмінною. Заряди можуть лише передаватися від одного тіла даної системи до іншого або змищуватись всередині даного тіла.

Електричні заряди можуть зникати і виникати знову, але завжди зникають або

виникають два електричні заряди протилежних знаків.

В 1909 р. Р.Мілікен встановив кратність електричного заряду деякому елементарному заряду e :

$$q = \pm N \cdot e, \text{ де } N=1, 2, 3\dots$$

Було виявлено, що цей елементарний заряд має величину $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ш. Кулон в 1785 р. експериментально за допомогою крутильних терезів встановив основний закон взаємодії нерухомих точкових електричних зарядів.

Точковим називається заряд, який зосереджений на тілі, лінійні розміри якого малі порівняно з відстанню до інших заряджених тіл, з якими він взаємодіє.

Закон Кулона: сила електростатичної взаємодії між двома точковими електричними зарядами у вакуумі прямо пропорційна до добутку величин зарядів і обернено пропорційна до квадрата відстані між ними:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Сили, які діють на заряди, є **центральними**, тобто вони напрямлені вздовж прямої, що з'єднує заряди.

Закон Кулона можна записати у векторній формі. Якщо \vec{r}_{12} – радіус-вектор, що з'єднує заряд q_1 із зарядом q_2 (рис. 95) і $|\vec{r}_{12}| = r$, тоді

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}.$$

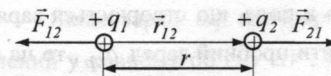


Рис. 95

У системі CI для зарядів у вакуумі

коефіцієнт k у формулі закону Кулона записують у формі

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Нм}^2}$ – електрична стала, і, отже, $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$.

Множник 4π у виразі $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ від-

биває сферичну симетрію електростатичного поля точкового заряду, оскільки величина 4π числово дорівнює повному тілесному куту в стерadiansах.

Простір, у якому перебуває електричний заряд, характеризується певними фізичними властивостями і називається електричним полем.

Електричне поле – це специфічний вид матерії, який існує навколо електричних зарядів і за допомогою якого передається електрична взаємодія.

Воно проявляє себе в тому, що поміщений в нього електричний заряд виявляється під дією сили, яка пропорційна до величини заряду. Якщо електричне поле створюється нерухомими електричними зарядами, то таке поле називається *електростатичним*.

Для виявлення і дослідного вивчення електростатичного поля використовуються *пробний заряд* $q_{пр}$. Це одиничний позитивний точковий заряд, який не бере участі у створенні поля і не спотворює досліджуване поле, тобто не спричинює перерозподілу зарядів, які утворюють поле. Якщо в поле, що створюється зарядом q помістити пробний заряд $q_{пр}$, то на нього діє сила \vec{F} , яка пропорційна до величи-

ни $q_{пр}$. Тому ця сила не може бути характеристикою самого поля.

Але величина, яка дорівнює відношенню $\frac{\vec{F}}{q_{пр}} = const$, може служити *силовою характеристикою поля*.

Векторна величина $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}$ називається *напруженістю електричного поля*.

Напруженість електричного поля

числово дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний пробний заряд в даній точці поля.

За напрямком вектора напруженості \vec{E} беруть напрямок сили, з якою поле діє на пробний позитивний заряд, вміщений у певну точку поля (рис. 96).

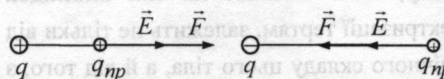


Рис. 96

У системі СІ одиниця напруженості електричного поля 1 Н/Кл – це напруженість такого поля, яке діє з силою 1 Н на точковий заряд 1 Кл .

Електричні поля зображують за допомогою *ліній напруженості*, які проводять так, щоб дотичні до цих ліній в кожній точці збігалися з напрямками вектора \vec{E} (рис. 97).

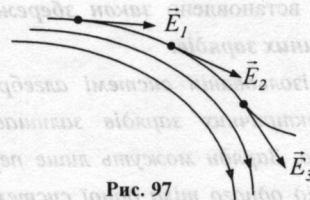


Рис. 97

Лінії напруженості мають початок і кінець або йдуть у нескінченність чи з нескінченності, вони напрямлені від позитивного заряду до негативного, тобто вихо-

дять з позитивного заряду, а входять у негативний заряд. Лінії напруженості ніколи не перетинаються. Ці лінії проводять з такою густиною, щоб кількість ліній, які пронизують одиничну площу, перпендикулярну до вектора напруженості, числово дорівнювала величині напруженості електричного поля в місці розміщення площини. Приклади графічного зображення електричних полів за допомогою ліній напруженості показано на рис. 98.

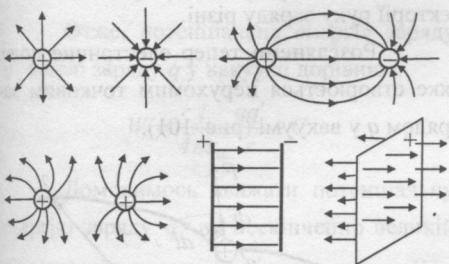


Рис. 98

Поле, у всіх точках якого величина і напрям вектора напруженості незмінні, називається *однорідним*.

Воно утворюється між зарядженими площинами, якщо вони паралельні і нескінченно великі. Однорідне поле зображують паралельними лініями напруженості, що мають однакову густину.

Якщо поле створено системою N нерухомих зарядів, то результуюча сила, яка діє на пробний заряд зі сторони системи зарядів, дорівнює векторній сумі сил, з якими окремі заряди діють на пробний.

Напруженість поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів системи зокрема:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q_{пр}} = \frac{\vec{F}_1}{q_{пр}} + \dots + \frac{\vec{F}_N}{q_{пр}},$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N.$$

Це твердження називають *принципом незалежності дії* електричних полів, або *принципом суперпозиції полів*.

Виходячи із закону Кулона, напруженість поля точкового заряду у вакуумі на відстані r від заряду:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}_{12}.$$

Звідси видно, що поле точкового заряду – центрально симетричне.

Принцип суперпозиції дає можливість обчислювати напруженість поля будь-якої системи зарядів. Подумки поділяючи, наприклад, заряджене тіло скінченних розмірів на точкові заряди, знаходимо складові напруженості в певній точці, створені окремими елементами зарядженого тіла. Потім, згідно з принципом суперпозиції, визначаємо результуючу напруженість.

Нерухомі електричні заряди розміщуються в просторі або дискретно в окремих точках, або неперервно – вздовж якоїсь лінії, на поверхні якого-небудь тіла або в якомусь об'ємі. Якщо заряд неперервно розподілений вздовж лінії, то можна ввести *лінійну густину електричних зарядів*

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl},$$

де Δq - заряд ділянки лінії завдовжки Δl .

Неперервний розподіл заряду по якійсь поверхні характеризується *поверхневою густиною зарядів*

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

де Δq - заряд ділянки поверхні, площа якої становить ΔS .

Якщо заряд Δq неперервно розподілений у певному об'ємі ΔV , то введемо *об'ємну густину зарядів*

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

Електричним диполем називається система з двох однакових за величинами і протилежних за знаком електричних зарядів $+q$ і $-q$, відстань між якими мала порівняно з відстанню до точок поля, які розглядаються (рис. 99).

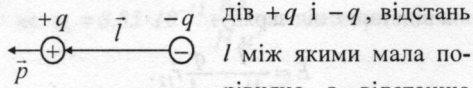


Рис. 99

Плечем диполя називається вектор \vec{l} , напрямлений вздовж осі диполя від негативного заряду до позитивного; він числово дорівнює відстані між ними. Добуток позитивного заряду диполя q на плече \vec{l} називається електричним моментом диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

Вектор \vec{p} за напрямком збігається з плечем диполя \vec{l} .

§49. Робота при переміщенні заряду в електростатичному полі. Потенціал електричного поля. Напруженість як градієнт потенціалу

Обчислимо роботу сил електростатичного поля при переміщенні точкового заряду в однорідному полі, яке створене двома скінченими паралельними зарядженими площинами, розміри яких значно більші, ніж відстань d між ними. Нехай позитивний заряд q переміщається силою поля $F=qE$ з точок 1, 2 і 3 в точку 4 (рис. 100).

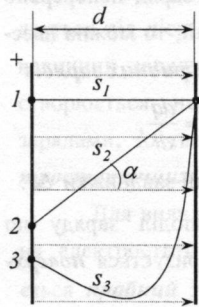


Рис. 100

Робота сил поля

$$A_{14} = Fs_1 = qEd.$$

Якщо заряд переміщається з точки 2 в точку 4, то робота

$$A_{24} = Fs_2 \cos \alpha = qEd.$$

Підрахуємо тепер роботу переміщення заряду q із точки 3 в точку 4. Розіб'ємо криву s_3 на n ділянок, кожна з яких можна з великою точністю взяти за пряму. Тоді

$$A_{34} = \sum_{i=1}^n Fs_i \cos \alpha_i = F \sum_{i=1}^n d_i = Fd = qEd.$$

Отже, робота при переміщенні заряду у трьох випадках однакова, хоча траєкторії руху заряду різні.

Розглянемо тепер електричне поле, яке створюється нерухомим точковим зарядом q у вакуумі (рис. 101).

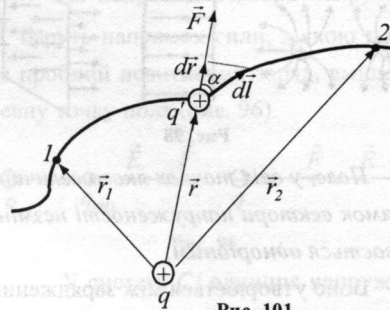


Рис. 101

Нехай в електростатичному полі заряду q вздовж довільної траєкторії переміщується точковий заряд q' під дією сили \vec{F} з точки 1, що перебуває на відстані r_1 від джерела поля в точку 2 на відстані r_2 від нього. Робота сили \vec{F} на елементарному переміщенні $d\vec{l}$ дорівнює:

$$dA = Fdl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{dr}{r^2}.$$

Робота при переміщенні заряду q' з точки 1 в точку 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right).$$

Ця робота не залежить від траєкторії переміщення, а визначається лише початковим (1) і кінцевим (2) положенням заряду. Отже, *електростатичне поле* точкового заряду ϵ *потенціальним*, а електростатичні сили – консервативними.

Оскільки робота консервативних сил виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії, то

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_2} = W_1 - W_2.$$

Отже, потенціальна енергія заряду q' в полі заряду q у вакуумі дорівнює:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + C.$$

Домовимось вважати потенціальну енергію заряду q' на нескінченно великій відстані від заряду q рівною нулю. При $r \rightarrow \infty$ $W=0$ і $C=0$. Тому потенціальна енергія заряду q' , що перебуває на відстані r від точкового заряду q , дорівнює

$$W = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Якщо заряди q' та q однойменні, то потенціальна енергія їхньої взаємодії (відштовхування) додатна і зростає при зближенні цих зарядів (рис. 102). У випадку взаємного притягання різноіменних зарядів потенціальна енергія їхньої взаємодії від'ємна і зменшується при наближенні одного із зарядів до іншого.

Потенціальна енергія W заряду q' , що перебуває в полі точкових зарядів q_1, q_2, \dots, q_n , дорівнює сумі його потенціальних енергій W у полях, що створюються

кожним зарядом зокрема:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = q' \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i},$$

де r_i – відстань від заряду q_i до заряду q' .

Величина $\varphi = \frac{W}{q'}$ є однакою для всіх зарядів в даній точці поля і називається потенціалом поля.

Потенціалом φ будь-якої точки електростатичного поля називають фізичну величину, яка числово дорівнює потенціальній енергії одиничного позитивного заряду, поміщеного в цю точку.

Одиниця потенціалу – вольт. $1В$ – це потенціал такої точки поля, в якій заряд величиною $1Кл$ володіє потенціальною енергією в $1Дж$.

Потенціал поля, створеного одним точковим зарядом q у вакуумі, дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Роботу, яку виконують електростатичні сили при переміщенні заряду q' від точки 1 до точки 2 електростатичного поля, можна записати так:

$$A = W_1 - W_2 = q'(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де φ_1 та φ_2 – потенціали електростатичного поля в точках 1 та 2.

Якщо з точки з потенціалом φ_1 заряд q' віддаляється в нескінченність ($\varphi_2 = 0$), то робота сили поля буде дорівнювати $A_\infty = q'\varphi_1$. Звідси

$$\varphi_1 = \frac{A_\infty}{q'}.$$

Потенціал даної точки електростатичного поля – це така фізична величина, яка числово дорівнює роботі, яку виконують зовнішні сили (проти сил елек-

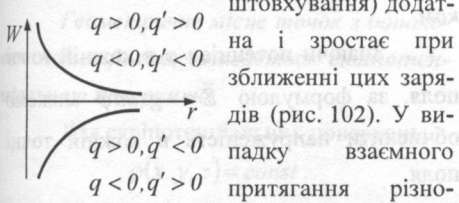
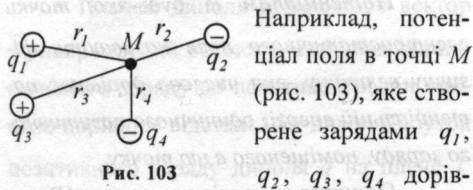


Рис. 102

тростатичного поля) при переміщенні одиничного позитивного заряду з нескінченності в дану точку поля.

Потенціал поля, яке створюється системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним із зарядів зокрема:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}.$$



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} - \frac{q_4}{r_4} \right).$$

Електричне поле можна описати або за допомогою векторної величини \vec{E} , або за допомогою скалярної величини φ . Очевидно, що між цими величинами повинен існувати зв'язок.

Нехай в електростатичному полі знаходиться заряд q . Робота при переміщенні цього заряду вздовж осі OX між двома нескінченно близькими точками дорівнює:

$$dA = Fdx = qE_x dx.$$

З іншого боку, елементарна робота при переміщенні заряду q в електростатичному полі виражається через потенціали цього поля:

$$dA = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = -q d\varphi.$$

Тоді, прирівнявши елементарні роботи, отримуємо:

$$E_x dx = -d\varphi, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Знак „-“ означає, що під дією сил електричного поля додатній заряд перемі-

щується в бік зменшення потенціалу.

Аналогічні міркування можна поширити і на напрямки переміщень вздовж осей OY і OZ :

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Отже, ми знайшли E_x, E_y та E_z – компоненти вектора напруженості E :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

Це рівняння можна переписати так:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

У векторному аналізі градієнтом скалярної величини φ називається така векторна величина, для якої справедливий запис:

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Отже,

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi.$$

Знак „-“ вказує на те, що вектор \vec{E} напруженості поля напрямлений в бік найшвидшого зменшення потенціалу. Напруженість в якій-небудь точці електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу в цій точці, взятому з оберненим знаком.

Знаючи потенціал φ в кожній точці поля, за формулою $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ можемо обчислити напруженість в кожній точці поля.

Можна розв'язати і обернену задачу, тобто знаючи напруженість поля в кожній точці поля, можна знайти різницю потенціалів між двома довільними точками.

Робота при переміщенні заряду з точки 1 в 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{l},$$

але, з іншого боку,

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Звідси

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Інтеграл можна брати вздовж довільної лінії, яка з'єднує точки 1 та 2, оскільки електростатичне поле є консервативне.

При обході по замкненому контуру заряд потрапляє в кінцеву точку поля, яка збігається з початковою і $\varphi_2 = \varphi_1$, отже

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

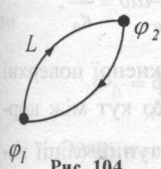


Рис. 104

Цей інтеграл називають циркуляцією вектора напруженості вздовж замкненого контуру (рис. 104).

Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж замкненого контуру дорівнює нулю.

Векторне поле \vec{E} називається потенціальним, якщо циркуляція вектора \vec{E} вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю.

Геометричне місце точок з однаковим потенціалом називається **еквіпотенціальною поверхнею**.

Для еквіпотенціальних поверхонь:

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

При переміщенні по еквіпотенціальній поверхні на відрізок dl потенціал не змінюється, а, отже, і робота

$$\begin{aligned} A_{12} &= q(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 q(\vec{E}, d\vec{l}) = \\ &= q \int_1^2 Edl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$Edl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Оскільки

$$E \neq 0; dl \neq 0, \text{ то } \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

В результаті кут між E та dl дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Вектор \vec{E} напруженості електричного поля в кожній точці напрямлений перпендикулярно до еквіпотенціальної поверхні.

Еквіпотенціальні поверхні точкового заряду – це сферичні оболонки навколо нього (рис. 105) ($\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4$).

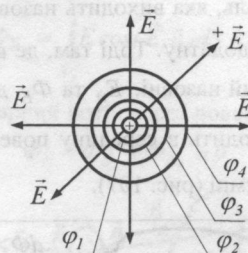


Рис. 105

§50. Потік вектора напруженості. Теорема Остроградського-Гаусса

Основне завдання електростатики полягає в тому, щоб за заданим розподілом у просторі і величиною електричних зарядів знайти величину і напрямок вектора напруженості \vec{E} в кожній точці поля. Використання принципу суперпозиції для обчислення електричних полів пов'язано із значними математичними труднощами. Значно простіший метод розрахунку полів ґрунтується на використанні теореми Остроградського-Гаусса.

Нехай в однорідному електричному

полі ($\vec{E} = const$) проведена довільна площина dS . Одиничний вектор \vec{n} нормалі до площини складає з

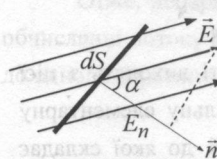


Рис. 106

вектором \vec{E} кут α (рис. 106).

Потоком вектора напруженості будемо називати величину

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha \quad \text{або} \quad d\Phi_E = E_n dS = (\vec{E}, d\vec{S}),$$

де E_n – проекція вектора \vec{E} на напрямок вектора нормалі, а вектор $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

Повний потік вектора напруженості через довільну поверхню S буде

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S E \cos \alpha dS.$$

Знак потоку залежить від вибору напрямку нормалі. Для замкнених поверхонь нормаль, яка виходить назовні, приймається за додатну. Тоді там, де вектор \vec{E} напрямлений назовні, E_n та Φ_E додатні, а коли \vec{E} входить в середину поверхні, E_n та Φ_E від'ємні (рис. 107).

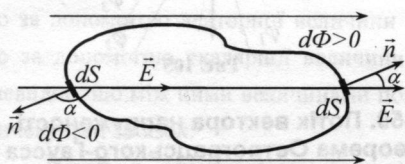


Рис. 107

Для замкнених поверхонь

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}).$$

Нехай навколо точкового заряду $+q$ який знаходиться у вакуумі, описано довільну замкнену поверхню S (рис. 108).

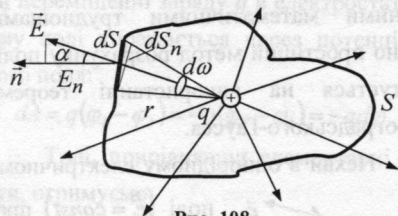


Рис. 108

Лінії напруженості виходять з цієї поверхні. Виділимо довільну елементарну площадку dS , нормаль \vec{n} до якої складає кут α з вектором \vec{E} . Спроекуємо еле-

мент dS поверхні S на поверхню радіуса r з центром в місці знаходження заряду q . Тоді

$$dS_n = dS \cos \alpha.$$

Елементарний потік

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= E \cos \alpha dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS_n = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega, \end{aligned}$$

а $d\omega$ – тілесний кут, під яким елементарну площадку dS видно з точкового заряду q .

Провівши інтегрування по куту, отримаємо

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Якщо всередині замкненої поверхні буде негативний заряд q , то кут між нормаллю і вектором \vec{E} буде тупий (лінії напруженості входять всередину замкненої поверхні). Отже, $\cos \alpha < 0$. Тоді $d\Phi_E < 0$. Це означає, що потік через замкнену поверхню $\Phi_E < 0$.

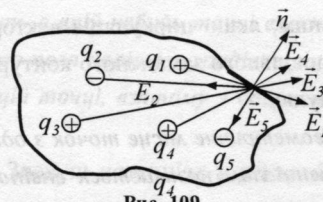


Рис. 109

Нехай всередині замкненої поверхні S буде N позитивних і негативних зарядів (рис. 109). За принципом суперпозиції напруженість \vec{E} поля, що створюється всіма зарядами, дорівнює сумі напруженостей \vec{E}_i , що створюється кожним зарядом зок-

рема і $\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$. Тому проекція вектора \vec{E}

на напрямок нормалі до площадки dS дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх

векторів \vec{E}_i на цей напрямок:

$$E_n = \sum_{i=1}^N E_{in}.$$

Потік вектора напруженості результуючого поля через довільну замкнену поверхню S , що охоплює заряди q_1, q_2, \dots, q_n , дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^n E_{in} \right) dS = \sum_{i=1}^n \oint_S E_{in} dS.$$

Оскільки

$$\oint_S E_{in} dS = \frac{q_i}{\epsilon_0},$$

то

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i.$$

Отже, потік вектора напруженості у вакуумі через довільну замкнену поверхню, яка охоплює електричні заряди, дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділений на електричну сталу ϵ_0 .

Це твердження називається **теоремою Остроградського-Гауса**.

Наприклад, для системи зарядів, які наведені на рис. 109, потік напруженості

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5).$$

тут $q_2 < 0$ і $q_5 < 0$.

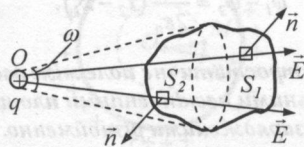


Рис. 110

Якщо замкнена поверхня S не охоплює заряд q (рис. 110), то дотична до поверхні S кінчна поверхня з вершиною у точці O поділяє поверхню S на дві частини: S_1 і S_2 . Потік напруженості через по-

верхню S дорівнює алгебраїчній сумі потоків:

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2}.$$

Потоки Φ_{E_1} і Φ_{E_2} дорівнюють один одному за абсолютною величиною, тому що поверхні S_1 і S_2 видно з точки O під тим самим тілесним кутом ω . Оскільки для всіх елементів поверхні S_1 кути між векторами \vec{E} і зовнішніми нормальними \vec{n} гострі, а для поверхні S_2 ці кути тупі, то

$$\Phi_{E_1} = \int_{S_1} E \cos(\vec{E}, \vec{n}) dS > 0,$$

$$\Phi_{E_2} = \int_{S_2} E \cos(\vec{E}, \vec{n}) dS < 0.$$

Тому сумарний потік через поверхню S

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} = 0.$$

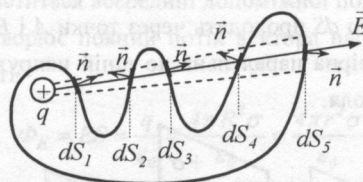


Рис. 111

Нехай заряд q знаходиться всередині замкненої поверхні S і лінії напруженості перетинають цю поверхню кілька разів (рис. 111). Елементарний потік напруженості через площадки $dS_1 \dots dS_S$ дорівнює

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= d\Phi_{E_1} + d\Phi_{E_2} + d\Phi_{E_3} + \\ &+ d\Phi_{E_4} + d\Phi_{E_5} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega + \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega \end{aligned}$$

Отже, непарне число перетинів при обчисленні потоку напруженості зводиться до одного перетину.

§51. Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів

За допомогою теореми Остроградського-Гаусса в окремих випадках набагато простіше, ніж за формулами для напруженості \vec{E} точкового заряду та принципу суперпозиції, знаходити напруженість електричних полів.

Розглянемо декілька прикладів.

I. Електростатичне поле у вакуумі нескінченної зарядженої площини.

Нехай площина P заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду $+\sigma$ (рис. 112). Для визначення напруженості поля у будь-якій точці A проведемо через цю точку і симетричну їй точку B дві площини, які паралельні до площини P . Побудуємо нескінченно вузький циліндр, основи якого dS проходять через точки A і B , а його твірна паралельна до ліній напруженості поля.

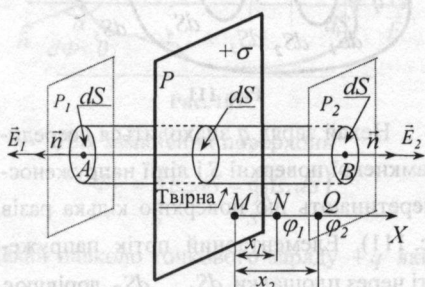


Рис. 112

З рис. 112 видно, що потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює сумі потоків через основи циліндра, тому що потік через бічну поверхню дорівнює нулю (лінії напруженості ковзають вздовж бічної поверхні). Оскільки напрямки векторів \vec{E}_1 та \vec{E}_2 збігаються з напрямками нормалей, то потоки через основи dS будуть більші від нуля і числово рівні, оскільки площини P_1 та P_2

знаходяться на однаковій віддалі ($\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$). Отже, потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює:

$$d\Phi_E = E_1 dS + E_2 dS = 2EdS.$$

Згідно з теоремою Остроградського-Гаусса

$$d\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS.$$

Порівнюючи ці два вирази, отримуємо

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Оскільки напруженість поля E не залежить від довжини циліндра, то електричне поле рівномірно зарядженої площини однорідне.

Знайдемо різницю потенціалів між двома точками Q і N цього поля, що лежать на відстанях x_2 та x_1 від площини P . Оскільки,

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}, \text{ то } d\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx.$$

Проінтегруємо це рівняння по x в межах від x_1 до x_2 . Позначимо потенціали в точках Q і N через φ_2 та φ_1 . Тоді:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1);$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

II. Електростатичне поле між двома паралельними нескінченними площинами, зарядженими різноманерно.

Нехай маємо дві нескінченні, різноманерно заряджені площини, але з однаковими поверхневими густинами зарядів $+\sigma$ та $-\sigma$ (рис. 113).

З рис. 113 видно, що зліва від площини P_1 та справа від площини P_2 напруженості поля взаємно знищуються, оскільки

ки вони напрямлені в протилежні сторони.

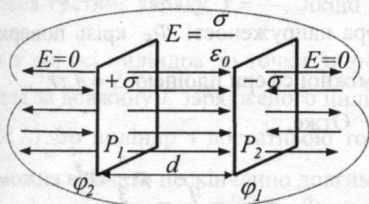


Рис. 113

Між площинами напруженості полів мають однакові напрямки і тому тут результуюча напруженість E дорівнює сумі напруженостей E_1 та E_2 , створених обома площинами:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Електричне поле двох різнойменно заряджених площин локалізоване в об'ємі між цими площинами і є однорідним.

Знайдемо різницю потенціалів між площинами: $d\varphi = -Edx$. Проінтегрувавши це рівняння по x від $x=0$ до $x=d$ (де d - відстань між площинами), отримаємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

III. Електростатичне поле зарядженої сфери

Якщо на поверхні сфери радіуса R рівномірно розподілено заряд q (рис. 114),



Рис. 114

то поверхнева густина заряду дорівнює

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Розглянемо всередині сфери деяку точку M на відстані r від її центра. З центра O проведемо допоміжну поверхню теж у вигляді

сфери радіуса r . За теоремою Остроградського-Гаусса обчислимо потік ліній напруженості Φ_E крізь цю поверхню:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Оскільки всередині допоміжної поверхні радіуса $r < R$ немає зарядів, то $q = 0$ і $\Phi_E = 0$, то напруженість поля

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2}$$

$$E_{r < R} = 0.$$

Всередині зарядженої сфери електричного поля немає.

Для точок, які лежать зовні біля самої поверхні сфери, можна вважати, що $r = R$. Тоді допоміжна поверхня - сфера радіуса r охоплює заряджену сферу. Заряд q міститься всередині допоміжної поверхні і створює повний потік вектора напруженості:

$$\Phi_E = ES = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^2 \sigma}{\epsilon_0}.$$

Тоді

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2} = \frac{4\pi r^2 \sigma}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Для точок, що знаходяться на значній віддалі від поверхні зарядженої сфери ($r > R$), маємо

$$E = \frac{\Phi_E}{S} = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}.$$

Графік залежності $E = f(r)$ напруженості електричного поля E зарядженої сфери від відстані r між її центром і

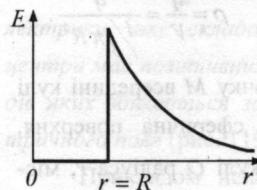


Рис. 115

точкою, в якій визначають напруженість, подано на рис. 115.

Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстані r_1 і r_2 від центра сфери ($r_1 > R$, $r_2 > R$), дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Якщо прийняти $r_1 = r$ і $r_2 = \infty$, то потенціал поля поза сферичною поверхнею

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

У випадку $r_1 = R$, а $r_2 = \infty$, поверхня зарядженої сфери отримує потенціал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}.$$

Оскільки всередині сфери електричного поля немає ($E = 0$), то для переміщення одиниці заряду з поверхні в будь-яку точку всередині сфери роботу проти сил поля виконувати не потрібно. Тому потенціал точок усередині зарядженої сфери дорівнює потенціалу її поверхні.

IV. Електростатичне поле зарядженої кулі.



Рис. 116

Якщо куля радіуса R (рис. 116) має рівномірно розподілений заряд q , то об'ємна густина заряду

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Розглянемо точку M всередині кулі ($r < R$). Допоміжна сферична поверхня, проведена з центра кулі O радіуса r , містить заряд

$$q' = \rho V' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Тільки цей заряд q' створює потік вектора напруженості Φ_E крізь поверхню допоміжної сфери площею $S = 4\pi r^2$.

Отже,

$$\Phi_E = ES = \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}.$$

Звідси

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

У точці, що лежить поза кулею на відстані r від її центра ($r > R$), напруженість обчислюється за формулою напруженості поля точкового заряду $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, що розміщений в центрі кулі.

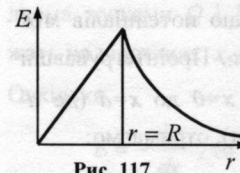


Рис. 117

На рис. 117 наведено графік залежності E від r для рівномірно зарядженої кулі.

Різниця потенціалів між двома точками поля всередині кулі дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned}$$

Різниця потенціалів між центром кулі ($r_1 = 0$) і її поверхнею ($r_2 = R$)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

V. Електростатичне поле нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра.

Розглянемо циліндр радіуса R і довжиною L , на якому знаходиться заряд q , який рівномірно розподілений на його поверхні вздовж всієї довжини L (рис. 118).

Лінійна густина заряду $\tau = \frac{q}{L}$. Якщо відстань r від осі циліндра до точки M значно менша за довжину L зарядженого циліндра ($r \ll L$), то циліндр з достатньою точністю можна вважати нескінченно довгим.

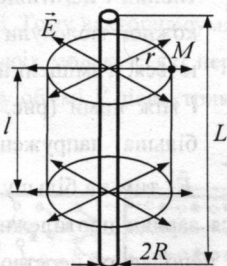


Рис. 118

Виділимо довільну ділянку циліндра довжиною l і охопимо її допоміжною поверхнею у вигляді циліндра радіуса r . Ця поверхня охоплює заряд q' , який дорівнює:

$$q' = \tau l.$$

Оскільки лінії вектора напруженості \vec{E} нормальні до поверхні зарядженого тіла в кожній його точці, то потік Φ_E пронизує лише бічну поверхню допоміжного циліндра.

Отже,

$$E = \frac{\Phi_E}{S} = \frac{q'}{\epsilon_0 S} = \frac{q'}{\epsilon_0 2\pi r l} = \frac{\tau l}{\epsilon_0 2\pi r l}.$$

Звідси

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Поле циліндра є неоднорідним. Різниця потенціалів між двома точками поля, що лежать на відстані r_1 і r_2 від осі зарядженого провідника, дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

§52. Типи діелектриків. Електронна і орієнтаційна поляризація

Діелектриками (або ізоляторами) називаються речовини, нездатні проводити електричний струм.

У природі ідеальних ізоляторів не існує, вони проводять струм в 10^{15} - 10^{20} разів гірше, ніж провідники.

Питомий опір діелектриків становить $\rho \approx 10^{15}$ Ом·м. У діелектриках немає вільних електричних зарядів (електронів), як в металах або інших провідниках.

Кожна молекула (або атом) діелектрика має позитивно заряджені ядра і негативно заряджені електрони, які рухаються навколо ядер. Позитивні заряди всіх ядер дорівнюють абсолютній величині заряду всіх електронів, а тому молекула речовини загалом електрично нейтральна.

Вивчаючи електричні властивості діелектриків, молекули діелектриків можна зобразити як систему, що складається з двох точкових зарядів.

Замінімо всі позитивні заряди ядер молекули одним сумарним зарядом $+q$, що перебуває в центрі мас позитивних зарядів, а всі негативні заряди – одним сумарним негативним зарядом $-q$, що перебуває в центрі маси негативних зарядів. Тоді молекулу діелектрика можна розглядати як диполь, який складається із зарядів $+q$ і $-q$. Діелектрики поділяються на три типи.

1. Неполлярні діелектрики – це діелектрики, які складаються з молекул, центри мас позитивних і негативних зарядів яких збігаються за відсутності електричного поля (рис. 119).

Прикладом неполярних діелектриків є газу N_2 , H_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 . Молекули таких діелектриків називаються *не-*

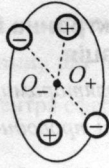


Рис. 119

полярними. Дипольний момент таких молекул за відсутності зовнішнього електричного поля дорівнює нулю.

II. Полярні діелектрики – це діелектрики, в яких центри мас позитивних і негативних зарядів не збігаються, тобто мають асиметричну будову (рис. 120).



Рис. 120

До полярних діелектриків належать гази SO_2 , H_2S , NH_3 та ін., рідини – вода H_2O , соляна кислота HCl , бензол C_6H_6 тощо.

Молекули таких діелектриків називають **полярними**. Ці молекули за відсутності зовнішнього поля мають дипольні моменти $\vec{p}_0 = q\vec{l}$. Їх називають жорсткими диполями.

III. Іонні діелектрики – це речовини, молекули яких мають іонну будову.

Прикладом таких діелектриків є $NaCl$, KCl та інші.

Іонні кристали є просторовими ґратками з правильним чергуванням іонів різних знаків (рис. 121). У цих кристалах

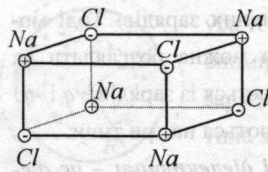


Рис. 121

не можна виділити окремі молекули. Іонні кристали необхідно розглядати як систему

вміщених одна в одну іонних підґраток. У цих діелектриках кожна пара сусідніх різноіменних іонів подібна до диполя.

Розглянемо, що відбувається з діелектриками при внесенні їх в однорідне електричне поле.

I. Неполарні діелектрики. Електронна поляризація.

Сили, з якими електричне поле діє на позитивні і негативні заряди молекул, направлені протилежно і тому розсувають їх. В електричному полі центри мас позитивних і негативних зарядів

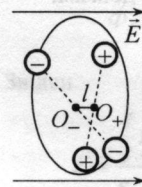


Рис. 122

кожної молекули не збігаються, а зміщені на відстань l між ними (рис. 122). Чим більша напруженість поля \vec{E} , тим на більшу відстань l

розсуваються заряди протилежних знаків. Молекула з неполярної перетворюється в полярну з дипольним моментом \vec{p} . Оскільки $l \sim E$, а $p = ql$, то $p \sim E$, або $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$, β – поляризованість окремої молекули діелектрика. Величина β має неоднакові значення для атомів і молекул різних речовин. Поляризованість β характеризує здатність електронів в атомі або в молекулі зміщуватись під дією сил електричного поля.

Дипольні моменти \vec{p} молекул неполярних діелектриків називають індукованими або квазіпружними.

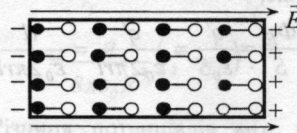


Рис. 123

При внесенні неполярного діелектрика в електричне поле всі індуковані дипольні моменти розміщуються ланцюжками вздовж ліній напруженості \vec{E} (рис. 123), де \bullet – негативні заряди, а \circ – позитивні. Внаслідок цього грані діелектрика набувають різноіменних зарядів – діелектрик поляризується. Такого роду поляризація діелектрика називається **електронною**.

II. Полярні діелектрики. Дипольна, або орієнтаційна поляризація.

Якщо діелектрик з полярними молекулами не перебуває у зовнішньому електричному полі, то внаслідок хаотичного теплового руху молекул вектори їхніх дипольних моментів орієнтовані хаотично (рис. 124а). Тому векторна сума дипольних моментів всіх молекул, які перебувають у довільному об'ємі V діелектрика, дорівнює нулю.

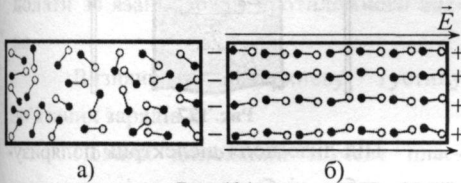


Рис. 124

Якщо діелектрик з полярними молекулами внести в електричне поле, то під дією поля полярні молекули діелектрика намагаються повернутись так, щоб вектори їх дипольних моментів збігалися з напрямком вектора напруженості поля \vec{E} (рис. 124б). Але тепловий рух молекул хаотично розкидає диполі і заважає орієнтації всіх векторів \vec{p} (дипольних моментів) вздовж поля. Внаслідок спільної дії цих двох факторів в діелектрику переважає орієнтація дипольних моментів молекул вздовж поля. Ця орієнтація буде тим повнішою, чим сильніше електричне поле в діелектрику і чим слабший тепловий рух молекул, тобто чим нижча температура. Цей процес називають *орієнтаційною поляризацією* діелектрика.

III. Іонні діелектрики. Іонна поляризація.

У кристалічних діелектриках, які мають кубічні кристалічні ґратки ($NaCl$, KCl , NaI та інші) під дією електричного поля всі позитивні іони зміщуються в на-

прямку напруженості поля \vec{E} , а всі негативні іони – в протилежному напрямку (рис. 125). При цьому в кожній одиниці об'єму кристала перебуває однакова кількість позитивних і негативних іонів, а на кожній з двох протилежних граней кристала, перпендикулярних до вектора напруженості електричного поля, містяться іони якого-небудь одного знака. Такий вид поляризації називають *іонною поляризацією*.

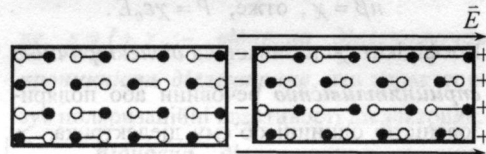


Рис. 125

Заряди, які виникають на гранях діелектрика, не вільні, вони зв'язані з атомами та молекулами речовини.

Явище обмеженого зміщення зарядів в атомах і молекулах або напрямленої орієнтації дипольних моментів жорстких молекул в зовнішньому електричному полі, внаслідок якого на поверхні діелектрика виникають зв'язані електричні заряди, називається поляризацією діелектриків.

Ступінь поляризації діелектрика характеризується вектором поляризації, або поляризованістю.

Вектором поляризації називають границю відношення електричного моменту деякого об'єму діелектрика до цього об'єму, коли об'єм прямує до нуля:

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{V},$$

де \vec{p}_i – дипольний момент i -го диполя, n – кількість диполів, які знаходяться в об'ємі V . Отже, вектор \vec{P} є дипольним моментом одиниці об'єму діелектрика, який виникає при його поляризації.

Для однорідного діелектрика, який перебуває в однорідному електричному полі, справедлива рівність:

$$\vec{P} = n\vec{p},$$

де n – кількість молекул в одиниці об'єму, \vec{p} – дипольний момент молекули.

Оскільки

$$\vec{p} = \beta\epsilon_0\vec{E}, \text{ то } \vec{P} = n\beta\epsilon_0\vec{E}.$$

Позначимо

$$n\beta = \chi, \text{ отже, } \vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}.$$

Коефіцієнт χ називається *діелектричною сприйнятливістю* речовини або поляризованістю одиниці об'єму діелектрика. χ – величина безрозмірна ($\chi \approx 80$ для води, $\chi \approx 25$ для спиртів).

На рис. 126 подано залежність діелектричної сприйнятливості χ від $\frac{1}{T}$ у

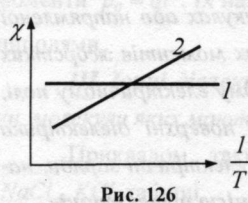


Рис. 126

випадку неполярних (1) і полярних (2) молекул. Поляризація неполярних діелектриків не залежить

від температури ($\chi = const$). Для полярних діелектриків, як показав Дебай,

$$\chi = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}.$$

При нагріванні полярного діелектрика діелектрична сприйнятливість зменшується.

§53. Електричне поле в речовині. Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику. Електричне зміщення

Для встановлення кількісних закономірностей поля в діелектрику внесемо в однорідне зовнішнє електростатичне поле, яке створюється двома нескінченними па-

ралельними різнойменно зарядженими пластинами, пластину з однорідного діелектрика (рис. 127).

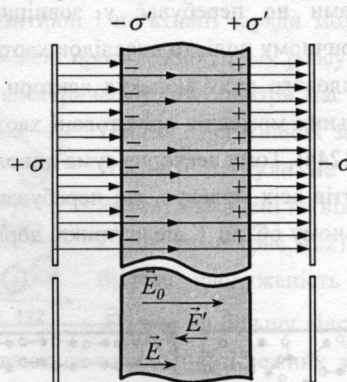


Рис. 127

Під дією поля діелектрик поляризується, тобто відбувається зміщення зарядів. Внаслідок цього на правій грані діелектрика буде надлишок позитивного заряду з поверхневою густиною $+\sigma'$, на лівій – від'ємного заряду з поверхневою густиною $-\sigma'$. Ці некомпенсовані заряди, що появляються внаслідок поляризації діелектрика, називаються зв'язаними. Оскільки їх поверхнева густина σ' менша від густини σ вільних зарядів площин, то не все поле \vec{E}_0 компенсується зарядами діелектрика: на границі діелектрика відбувається розрив ліній напруженості зовнішнього електричного поля. Отже, поляризація діелектрика викликає зменшення в ньому поля порівняно з початковим зовнішнім полем. Поза діелектриком $\vec{E} = \vec{E}_0$. Поява зв'язаних зарядів приводить до виникнення електричного поля \vec{E}' , яке ослаблює \vec{E}_0 . Результуюче поле всередині діелектрика:

$$E = E_0 - E'.$$

Оскільки поля E_0 і E' створені двома нескінченними зарядженими пло-

щинами, то

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{і} \quad E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}.$$

Тому результуюче поле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}.$$

Отже, напруженість поля при наявності діелектрика обчислюється за такою ж формулою, як і для вакууму з тією лише відмінністю, що до вільних зарядів треба додати зв'язані заряди протилежного знака.

Визначимо поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' .

Повний дипольний момент пластинки діелектрика $P_V = PV = PSd$, де S – площа грані пластинки, d – її товщина. З іншого боку, $P_V = q'd = \sigma'Sd$. Тоді, $PSd = \sigma'Sd$, і $\sigma' = P$, тобто **поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' дорівнює модулю вектора поляризації P .**

В загальному випадку, якщо зовнішнє електричне поле \vec{E}_0 утворює кут α з поверхнею діелектрика, то

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

де P_n – проекція вектора поляризації на напрямок нормалі поверхні. Для правої

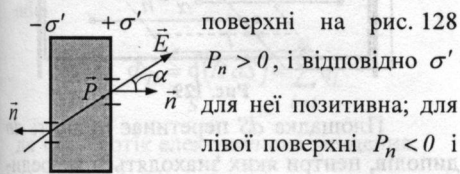


Рис. 128

поверхні на рис. 128 для неї позитивна; для лівої поверхні $P_n < 0$ і відповідно σ' для неї негативна. Оскільки

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad \text{то} \quad \sigma' = \chi \epsilon_0 E_n,$$

де E_n – нормальна складова напруженості поля всередині діелектрика. В тих місцях, де лінії напруженості виходять із діелектрика ($E_n > 0$), на поверхні будуть пози-

тивні зв'язані заряди, там же, де лінії напруженості входять в діелектрик ($E_n < 0$), появляються негативні поверхневі заряди.

Оскільки

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad \text{а} \quad \sigma' = P = \chi \epsilon_0 E,$$

$$E = E_0 - \chi E.$$

Звідси напруженість поля в середовищі

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon},$$

де $\epsilon = 1 + \chi$ – **відносна діелектрична проникність діелектрика**, яка характеризує поляризаційні властивості діелектрика.

Відносна діелектрична проникність діелектрика дорівнює його діелектричній сприйнятливості, збільшеній на одиницю і показує, у скільки разів напруженість E_0 електричного поля, утвореного зарядами у вакуумі, більша, ніж напруженість E поля цих зарядів у діелектрику.

Величини χ і ϵ – безрозмірні і для вакууму $\chi = 0$, $\epsilon = 1$.

Якщо відносна діелектрична проникність діелектрика дорівнює ϵ , то

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}.$$

З іншого боку,

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

Прирівнюючи праві сторони, отримуємо

$$\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} \quad \text{і} \quad \sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma.$$

За цією формулою можна обчислити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів, а, отже, і вектор поляризації \vec{P} , бо поверхневу густину σ вільних зарядів можна визначити експериментально.

Всі отримані в попередніх параграфах формули, які описують електричні по-

ля і взаємодії електричних зарядів у вакуумі, залишаються справедливими і якщо ці явища спостерігаються в однорідному ізо- тропному діелектрику. Тільки у формули, що містять електричну сталу ϵ_0 , треба ввести відносну діелектричну проникність ϵ як співмножник при ϵ_0 :

$$\text{закон Кулона} - F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2},$$

напруженість електричного поля точ- кового заряду $- E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2},$

потенціал електричного поля точково- го заряду $-\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$

Напруженість електричного поля залежить від властивостей середовища: нормальна складова напруженості поля при переході з вакууму в середовище зменшується в ϵ разів. На границі двох діелектриків нормальні складові \vec{E} обер- нено пропорційні до ϵ , тобто вектор на- пруженості при переході через границю ді- електриків стрибкоподібно змінюється, створюючи тим самим незручності при ро- зрахунку електричних полів.

У §50 було розглянуто теорему Ост- роградського-Гаусса для потоку вектора напруженості електричного поля у ваку- умі:

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i,$$

де q_i - вільні заряди.

Узагальнимо цю теорему для випад- ку електричного поля у діелектрику, в якому поле створюється як вільними, так і зв'язаними зарядами. Тому

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^N q_i + q' \right),$$

де q' - зв'язані заряди.

Це співвідношення не можна вико- ристати для розрахунку електричного поля \vec{E} в діелектрику, оскільки це поле зале- жить від величини зв'язаних зарядів, які у свою чергу визначаються полем \vec{E} .

Нехай шар однорідного неполярно- го діелектрика розміщений між двома нес- кінченими паралельними площинами, зар- ядженими з поверхневими густинами вільних зарядів $+\sigma$ і $-\sigma$ (рис. 129). В ді- електрику індуються диполі (• - негативні заряди, ○ - позитивні заряди), електричні моменти яких паралельні до \vec{E} . Виберемо малу ділянку dS поверхні S , яка охоплює як вільні, так і зв'язані заряди. Молекули- диполі електрично нейтральні. Тому внесок в q' роблять лише ті диполі, які пере- тинаються поверхнею S . Вектор \vec{E} в ме- жах площадки dS всюди однаковий і ут- ворює кут α із зовнішньою нормаллю \vec{n} .

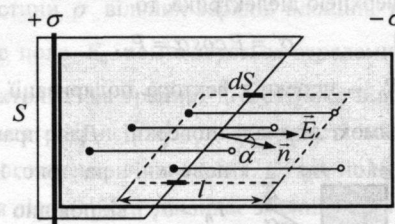


Рис. 129

Площадка dS перетинає лише ті dn диполів, центри яких знаходяться всереди- ні, показаного на рис. 129 штриховою ліні- єю, косою циліндра з основою площею dS і твірною, довжина якої дорівнює довжині l молекули-диполя:

$$dn = ndV = nldS \cos \alpha,$$

де n - концентрація молекул діелектрика. Поверхнею S охоплюються негативні за-

ряди диполів і їх величина

$$dq' = -qdn = -nqldS \cos \alpha = -npdS \cos \alpha = -(\vec{P} d\vec{S}),$$

а $\vec{P} = n\vec{p}$ - вектор поляризації діелектрика.

Отже, величина зв'язаних зарядів рівна

$$q' = -\oint_S (\vec{P} d\vec{S}).$$

В результаті,

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q - \oint_S (\vec{P} d\vec{S}) \right)$$

або

$$\oint_S \epsilon_0 (\vec{E} d\vec{S}) + \oint_S (\vec{P} d\vec{S}) = q.$$

В обох інтегралах, що стоять зліва, інтегрування проводиться по одній і тій же замкненій поверхні S . Тому

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q.$$

Вектор $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ називається **електричним зміщенням**.

В результаті рівняння, яке виражає **теорему Остроградського-Гаусса для електричного поля в середовищі**, можна записати у вигляді:

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q$$

або

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \sum_{i=1}^N q_i.$$

де Φ_D - потік електричного зміщення.

Згідно з цією теоремою **потік електричного зміщення електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що охоплюються цією поверхнею**.

Вектор поляризації \vec{P} пропорційний до напруженості поля в діелектрику.

Отже,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$$

З чим можна зв'язати вектор електричного зміщення? Зв'язані заряди появляються в діелектрику при наявності зовнішнього електричного поля, що створюється системою вільних зарядів, тобто в діелектрику на поле вільних зарядів накладеться додаткове поле зв'язаних зарядів.

Результуюче поле в діелектрику описує вектор напруженості \vec{E} і тому він залежить від властивостей діелектрика.

Вектор \vec{D} від середовища не залежить і описує електростатичне поле, що створюється вільними зарядами. Зв'язані заряди, що виникають в діелектрику, викликають перерозподіл вільних зарядів. Тому вектор \vec{D} характеризує електростатичне поле, що створюється вільними зарядами (тобто у вакуумі), але при такому їх розподілі в просторі, який є при наявності діелектрика.

Вектор \vec{D} не залежить від властивостей середовища тоді, коли поле створюється зарядженими провідниками в однорідному, ізотропному і безмежному середовищі.

Лінії вектора \vec{E} можуть починатися і закінчуватися як на вільних, так і зв'язаних зарядах, а лінії вектора \vec{D} - лише на вільних зарядах. Через області поля, де знаходяться зв'язані заряди, лінії вектора \vec{D} проходять, не перетинаючись.

ОСТРОГРАДСЬКИЙ МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ
(1801-1862)

Вивів математичну теорему для векторного поля довільної природи:

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV; \text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Гаусс отримав цю теорему стосовно до електростатичного поля:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

КОСОНОВ ЙОСИП ЙОСИПОВИЧ
(1866-1922)

Розробив метод вимірювання діелектричної проникності неполярних рідин для сантиметрового діапазону хвиль.

ШЕСТОПАЛОВ ВІКТОР ПЕТРОВИЧ
(нар. 1923 р.)

Використав (1959 р.) для вимірювання діелектричної проникності речовини спіральний хвильовід. Отримав формули для ϵ у випадку, коли спіраль повністю занурена в рідину. Вимірювання діелектричної проникності на частоті 600 МГц дали для бензину, ефіру, хлорбензолу такі результати: 1,87; 4,28; 5,7. Для плексигласу, вініласту, скла $\epsilon=2,3$; 8 в дециметровому діапазоні.

БУРАК ЯРОСЛАВ ЙОСИПОВИЧ
(нар. 1931 р.)

Отримав (1966 р.) рівняння електропружності ізотропного діелектрика в електростатичному полі.

§54. Сегнетоелектрики.

Сегнетоелектриками називаються кристалічні діелектрики, які володіють в певному інтервалі температур самочинною (спонтанною) поляризацією, яка досить сильно змінюється під впливом зовнішніх впливів – електричного поля, деформацій, температури.

Кристаліграфічна модифікація, в якій сегнетоелектрик поляризований ($P_S \neq 0$), називається сегнетоелектричною фазою, а модифікація в якій $P_S = 0$ - парелектричною фазою. При зміні температури відбувається перехід, що називається фазовим переходом, із сегнето- в парелектричну фазу. Температура, при якій кристал зазнає фазового переходу, називається точкою Кюрі T_C . Деякі кристали, зокрема сегнетова сіль, мають дві точки

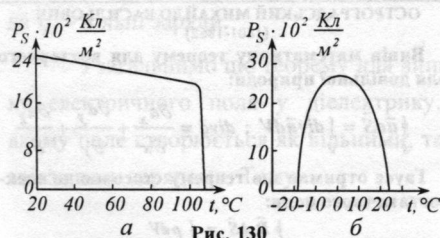


Рис. 130

Кюрі. Температурна залежність спонтанної поляризації $BaTiO_3$ наведена на рис. 130а, а сегнетової солі – на рис. 130б.

Сегнетоелектричні фазові переходи є оборотними, тобто можуть відбуватися в обох напрямках. Це означає, що як від нагрівання кристала спонтанна поляризація зникає при певній температурі, то й від охолодження вона виникає в ньому при тій самій температурі.

Характерна особливість сегнетоелектриків полягає в тому, що у певному температурному інтервалі різко зростає відносна діелектрична проникність.

Як видно з рис. 131, відносна діелектрична проникність ϵ тригліцинсульфату при збільшенні температури зростає, досягаючи максимального значення $\epsilon \approx 2500$ при $t_c = 49^\circ C$. Після наступного нагрівання ϵ зменшується.

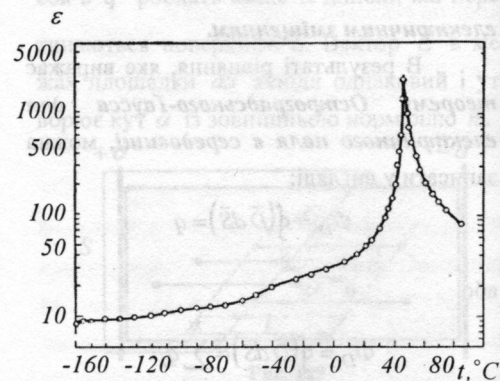


Рис. 131

Відносна діелектрична проникність ϵ і діелектрична сприйнятливість χ сегнетоелектриків залежить від напруженості електричного поля в речовинах.

На рис. 132а наведено залежність діелектричної проникності від напруженості поля для сегнетоелектриків. Як видно, ця залежність не є лінійною. Тому для сегнетоелектриків немає прямої пропорційно-

сті між векторами електричного зміщення \vec{D} , поляризації \vec{P} і напруженістю електричного поля \vec{E} .

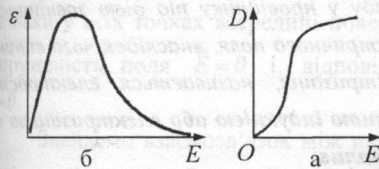


Рис. 132

При не дуже сильних полях в сегнетоелектриках електричне зміщення \vec{D} залежить від напруженості поля \vec{E} нелінійно (рис. 132б). Нелінійне зростання D із збільшенням E замінюється лінійним лише при дуже великих значеннях E .

Для сегнетоелектриків характерне явище діелектричного гістерезису, яке полягає у відставанні змін вектора поляризації \vec{P} від змін вектора напруженості \vec{E} електричного поля (рис. 133).

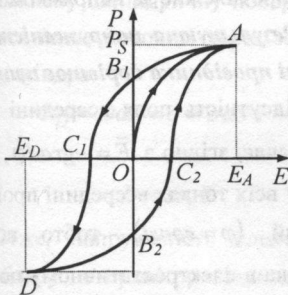


Рис. 133

Якщо неполяризований сегнетоелектрик помістити в електричне поле і збільшувати напруженість поля E , то викликана цим полем поляризація зростає вздовж кривої OA , яка називається основною кривою поляризації сегнетоелектрика. E_A - напруженість поля, при якій досягається величина спонтанної поляризації P_S .

При зменшенні поля E поляризація зменшується не вздовж кривої AO , а вздовж кривої AB_1 , причому в точці B_1

зовнішнє поле відсутнє, але сегнетоелектрик поляризований. При зміні напрямку зовнішнього поля вектор поляризації зменшується до нуля в точці C_1 , а потім, змінивши свій напрямок, зростає за величиною вздовж кривої C_1D . Наступна зміна зовнішнього поля від E_D до E_A супроводжується зміною вектора поляризації вздовж кривої DB_2C_2A . В точках B_1 і B_2 спостерігається **залишкова поляризація**. Величина напруженості поля в точках C_1 і C_2 , при якій поляризація сегнетоелектрика дорівнює нулю, називається **коерцитивною силою**.

При періодичній зміні поляризації сегнетоелектрика на подолання тертя під час повертання електричних моментів витрачається електрична енергія, яка йде на нагрівання сегнетоелектрика. Площа петлі гістерезису пропорційна до електричної енергії, що перетворюється у внутрішню енергію в одиниці об'єму сегнетоелектрика за один цикл.

Характерною особливістю сегнетоелектриків є те, що паралельна орієнтація дипольних моментів елементарних комірок має місце тільки в невеликих областях кристалу – **доменах**. Доменами називають сукупності спонтаннополяризованих елементарних комірок з паралельним розміщенням дипольних моментів. Домени в

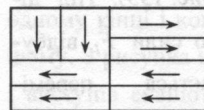


Рис. 134

кристалі сегнетоелектрика орієнтовані хаотично, тобто мають різні напрямки спонтанної поляризації (рис. 134). Тому різні ділянки граней сегнетоелектричних кристалів мають неоднакову макроскопічну поляризацію.

За відсутності поля області спон-

танної поляризації розміщуються так, що електричні дипольні моменти різних доменів компенсують один одного і середня поляризація сегнетоелектрика дорівнює нулю.

Якщо внести кристал сегнетоелектрика у зовнішнє поле, відбувається переорієнтація електричних моментів доменів і весь кристал стає поляризованим.

СТАСЮК ІГОР ВАСИЛЬОВИЧ
(нар. 1938 р.)

На основі моделі протонного впорядкування розрахував і дослідив вільну енергію і деякі динамічні властивості сегнетоелектриків і антисегнетоелектриків KH_2PO_4 типу.

Розвинув теорію, яка дала змогу з єдиної точки зору описати електрооптичний і п'єзооптичний ефекти, електрогірацію та п'єзогірацію, дав пояснення мікроскопічного механізму цих явищ в сегнетоелектричних кристалах.

ВЛОХ ОРЕСТ ГРИГОРОВИЧ
(нар. 1934 р.)

Провів експериментальні дослідження явища електрогірації в сегнетоелектриках (тригліцинульфат, сегнетова сіль, дигідросульфат калію та ін.) у взаємозв'язку з фазовими переходами і електрооптичним ефектом.

§55. Провідники в електричному полі

Характерною особливістю провідників є наявність у них вільних носіїв заряду. В металах це електрони провідності (вільні електрони). Якщо провідник помістити в зовнішнє електростатичне поле



Рис. 135

$\vec{E}_{зовн}$, то на кожен вільний заряд діє сила $\vec{F}_1 = q\vec{E}_{зовн}$ (рис. 135). Під дією сили \vec{F}_1 відбувається переміщення вільних носіїв заряду і внаслідок цього електричні заряди перерозподіляються: на одній грані провідника буде надлишок вільних електронів, які заряджають її негативно, на іншій виникає їх

нестача, і ця грань заряджається позитивно.

Явище перерозподілу вільних носіїв заряду у провіднику під дією зовнішнього електричного поля, внаслідок чого виникає електризація, називається **електростатичною індукцією або електризацією через вплив**.

Індуковані на гранях заряди створюють всередині провідника внутрішнє електростатичне поле $\vec{E}_{вн}$, яке діє на вільні електрони із силою $\vec{F}_2 = q\vec{E}_{вн}$. Переміщення вільних зарядів у провіднику припиняється, коли $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Тоді

$$q(\vec{E}_{зовн} + \vec{E}_{вн}) = 0.$$

Оскільки $q \neq 0$, то

$$\vec{E}_{зовн} + \vec{E}_{вн} = 0, \quad \text{і} \quad \vec{E}_{вн} = -\vec{E}_{зовн}.$$

Внутрішнє поле дорівнює за величиною і протилежне за напрямком зовнішньому. **Результуюча напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю.**

Відсутність поля всередині провідника означає, згідно з $\vec{E} = -grad\phi$, що потенціал у всіх точках всередині провідника однаковий ($\phi = const$), тобто поверхня провідника в електростатичному полі є екіпотенціальною.

Звідси вектор напруженості поля на зовнішній поверхні провідника спрямований вздовж нормалі до кожної точки її поверхні.

Якщо провіднику надати деякий заряд q , то нескомпенсовані заряди розміщуються лише на поверхні провідника. Для пояснення цього факту проведемо всередині провідника довільну замкнену поверхню S , яка обмежує деякий внутрішній об'єм провідника. За теоремою Остро-

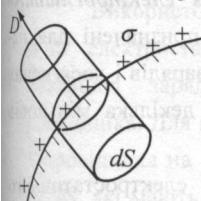
радського-Гаусса сумарний заряд цього об'єму дорівнює:

$$q = \Phi_D = \oint (\vec{D}, d\vec{S}) = D_n dS = 0,$$

оскільки у всіх точках всередині поверхні напруженість поля $\vec{E} = 0$ і, відповідно, $D = 0$.

Знайдемо взаємозв'язок між напруженістю E поля поблизу поверхні зарядженого провідника і поверхневою густиною σ зарядів на її поверхні.

Для цього розглянемо замкнену по-



верхню у вигляді циліндра з основою dS , вісь якого орієнтована вздовж вектора \vec{D} (рис. 136), і застосуємо теорему

Рис. 136

Остроградського-Гаусса. Оскільки поле всередині провідника відсутнє, потік \vec{D} через замкнену циліндричну поверхню визначається лише потоком через зовнішню основу циліндра:

$$\Phi_D = D dS = q = \sigma dS.$$

Звідси

$$\sigma = D = \varepsilon \varepsilon_0 E$$

Отже, напруженість електричного поля поблизу поверхні провідника довільної форми дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

де ε - відносна діелектрична проникність середовища, в якому знаходиться провідник.

Дослідження розподілу зарядів на провідниках довільної форми можна провести за допомогою сітки Кольбе - гнучкої металевої сітки, до якої по обидві сторони приклеєні легкі паперові смужки. Вона встановлюється на ізолюючих підставках,

а сітці надається певний заряд.

Кут відхилення паперових смужок на сітці залежить від величини заряду. На прямій сітці всі смужки відхиляються на однаковий кут, що свідчить про рівномірний розподіл заряду на поверхні площини сітки.

При наданні сітці форми циліндра відхиляються тільки ті смужки, які розміщені на зовнішній поверхні циліндра. Якщо ж різні ділянки сітки мають неоднакову кривину, то кут відхилення смужок також буде різним. Це означає, що поверхнева густина заряду на різних ділянках тіла довільної форми неоднакова.

Виявляється, що поверхнева густина заряду на ділянці поверхні провідника обернено пропорційна до радіуса кривизни цієї ділянки:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

А оскільки

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}, \text{ то } E \sim \frac{1}{R}$$

тобто біля ділянок провідника з великою кривиною напруженість поля максимальна.

На рис. 137 наведено вигляд ліній напруженості (штрихові лінії) і еквіпотенціальних поверхонь (суцільні лінії) поля позитивно зарядженого провідника циліндричної форми з конічним виступом на одному кінці і конічною западиною на іншому. З рисунка видно, що поблизу вістря і виступів еквіпотенціальні поверхні найсильніше зближені, відповідно і поверхнева густина вільних зарядів на цих ділянках провідника більша, ніж на інших поверхнях тіла. В області конічної западини напруженість поля мінімальна.

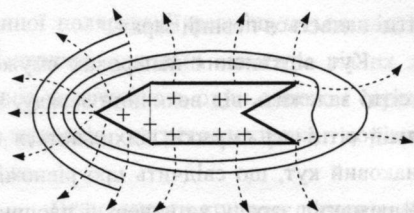


Рис. 137

Значна величина напруженості поля поблизу гострого виступу на зарядженому провіднику приводить до явища, відомого під назвою „електричний вітер”. В атмосферному повітрі завжди є невелика кількість позитивних іонів і вільних електронів, що виникають під впливом космічних променів, випромінювання радіоактивних речовин тощо. В сильному електричному полі поблизу вістря електрони рухаються з великою швидкістю і, стикаючись з молекулами повітря, іонізують їх. Отже, виникає все більша кількість позитивних рухомих зарядів, які утворюють „електричний вітер”.

Існування „електричного вітру” супроводжується розрядженням наелектризованого тіла, бо до нього рухаються під дією електричного поля заряди протилежного до знака зарядів наелектризованого тіла. Тому це явище біля провідів високовольтних ліній електропередач є шкідливим, оскільки спричиняє втрати заряду.

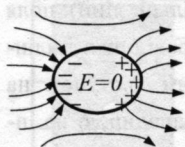


Рис. 138

Нейтральний провідник, внесений в електростатичне поле, розриває частину ліній напруженості; вони закінчуються на від'ємних індукованих зарядах і знову починаються на додатних (рис. 138) і перпендикулярні до поверхні провідника, оскільки при такій умові індуковані заряди не будуть рухатися вздовж поверхні провідника.

У стані рівноваги всередині провідника заряди відсутні, тому створення в середині нього порожнини не впливає на конфігурацію розміщення зарядів і тим самим на електростатичне поле. Всередині порожнини поле відсутнє. На цьому ґрунтується *електростатичний захист* – екранування тіл від впливу зовнішніх електростатичних полів.

Властивість зарядів розміщатися на зовнішній поверхні провідника використовується для створення *електростатичних генераторів*, які призначені для нагромадження великих зарядів і досягнення різниці потенціалів в декілька мільйонів вольт.

Винахідником електростатичного генератора є американський фізик Ван-де-Грааф. Використовуються ці генератори у високовольтних прискорювачах заряджених частинок.

ВАЛЬТЕР АНТОН КАРЛОВИЧ
(1905-1965)

Під керівництвом А.Вальтера в 1937 р. завершено будівництво унікального і найбільшого в Європі прискорювача ван де Граафа на енергію частинок 3.5 MeV з конденсатором відкритого типу, який успішно експлуатувався до 1956 р.

В 1953 р. був запущений прецизійний прискорювач ван де Граафа під тиском на енергію електронів 4 MeV з рекордною монохроматичністю прискореного пучка за енергіями 0.02% .

§56. Електроємність відокремленого провідника. Конденсатори

Відокремленим називається провідник, який знаходиться настільки далеко від інших тіл, що впливом їх електричних полів можна знехтувати.

Якщо надати відокремленому провіднику, який знаходиться в однорідному, ізотропному середовищі з відносною діелектричною проникністю ϵ деякий заряд q , то цей заряд розподілиться на поверхні провідника з різною поверхневою густи-

ною σ . Характер розподілу зарядів залежить лише від форми провідника. Кожна нова порція зарядів, які надають провіднику, розподіляються на його поверхні подібно до попередньої. Тому поверхнева густина зарядів σ в кожній точці поверхні провідника пропорційна його заряду q :

$$\sigma = k q$$

де $k = f(x, y, z)$ - функція координат точки, що залежить від форми і розмірів провідника.

Використовуючи принцип суперпозиції електростатичних полів, знайдемо потенціал зарядженого відокремленого провідника. Для цього поділимо поверхню S провідника на нескінченно малі елементи dS , які мають точковий заряд σdS . Інтегруючи по всій замкнутій поверхні S провідника вираз для потенціалу $d\varphi$ точкового заряду, отримуємо

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_S \frac{kdS}{r}$$

де r - відстань від малого елемента dS провідника до якої-небудь фіксованої точки на поверхні провідника, в якій визначається потенціал φ . Вибір цієї точки довільний, оскільки поверхня провідника еквіпотенціальна. Інтеграл залежить лише від форми і розмірів провідника і тому потенціал φ відокремленого провідника прямо пропорційний його заряду q , тобто

$$\varphi = \frac{q}{C},$$

де $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \int_S \frac{kdS}{r}$ - електрична ємність.

Електроємність відокремленого провідника числово дорівнює електричному заряду, який треба надати цьому провіднику, щоб потенціал змінився на одини-

цю.

Електроємність відокремленого провідника залежить від його форми і розмірів, причому геометрично подібні провідники мають ємності, прямо пропорційні до їхніх лінійних розмірів.

Електроємність прямо пропорційна до діелектричної проникності середовища.

Електроємність не залежить ні від матеріалу провідника, ні від його агрегатного стану, ні від форми і розмірів можливих порожнин всередині нього. Це пов'язано з тим, що надлишкові заряди розподілені тільки на зовнішній поверхні провідника. Електроємність не залежить також від заряду провідника та його потенціалу.

Одиниця ємності - фарада:

1 фарада - це ємність такого провідника, потенціал якого змінюється на *1 В* при наданні йому заряду в *1 Кл*.

Оскільки потенціал відокремленої кулі радіусом R , яка має заряд q дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

то ємність кулі

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

1 фарада - це ємність провідника у формі кулі, радіус якої

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ км}; \quad \frac{R}{R_{\text{землі}}} \approx 1406.$$

Для того, щоб провідник мав велику ємність, він повинен мати дуже великі розміри. На практиці, однак, необхідні пристрої, які мають здатність при малих розмірах і невеликих відносно навколишніх тіл потенціалах нагромаджувати значні за величиною заряди. Ці пристрої - **конденсатори**.

Конденсатор складається з двох провідників, які розділені діелектриком.

Щоби на ємність конденсатора не впливали навколишні тіла, провідникам надають таку форму, щоб поле, яке створюється зарядами, було зосереджено у вузькому проміжку між обкладками конденсатора.

Оскільки поле зосереджене всередині конденсатора, то лінії напруженості починаються на одній обкладці і закінчуються на іншій і тому вільні заряди, що виникають на різних обкладках, є однако-вими за модулем різнойменними зарядами.

Ємність конденсатора – фізична величина, що числово дорівнює відношенню величини заряду q , нагромадженого у конденсаторі, до різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між його обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Залежно від форми обкладок конденсатори поділяються на плоскі, циліндричні і сферичні.

I. Плоский конденсатор.

Якщо обкладки конденсатора мають форму паралельних між собою пластин, то його називають плоским (рис. 139). Площа пластин конденсатора S і якщо лінійні розміри пластин великі порівняно з d , то електричне поле між пластинами можна вважати еквівалентним полю між двома нескінченними площинами, які заряджені різнойменно і поверхневі густини яких дорівнюють $+\sigma$ і $-\sigma$. Крім того, відстань d повинна бути настільки малою, щоб порушення однорідності поля поблизу його країв можна було не брати до уваги.

Напруженість електричного поля і різниця потенціалів між обкладками конденсатора в цьому випадку дорівнюють:

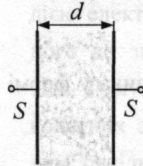


Рис. 139

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} d,$$

де ϵ – відносна діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами.

Отже, ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

Ємність конденсатора, який має шаруватий діелектрик (рис. 140), визначають за формулою:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_3}{\epsilon_3}}.$$

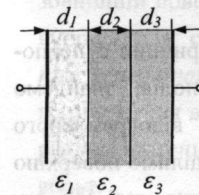


Рис. 140

II. Циліндричний конденсатор.

Циліндричний конденсатор утворюють дві металеві трубки різних радіусів,

вставлені одна в одну аксіально, тобто так, що їх осі збігаються, і розділені шаром діелектрика (рис. 141). Поза конденсатором поля, створені

внутрішньою і зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Поле створюється між обкладками тільки зарядом циліндра радіусом r_1 , оскільки заряд зовнішнього циліндра всередині конденсатора не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками циліндричного конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon L} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тоді ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Якщо шар діелектрика $d = r_2 - r_1$ дуже тонкий, то

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_1 + d}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{r_1} \right) \approx \frac{d}{r_1}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 L r_1}{d}$$

Але $2\pi r_1 L = S$ площа обкладки циліндричного конденсатора. В результаті

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$$

Коли обкладки циліндричного конденсатора розділені дуже тонким шаром діелектрика, його електроємність з достатньою точністю можна обчислити за формулою плоского конденсатора.

III. Сферичний конденсатор.

Обкладки такого конденсатора – це дві концентричні провідні сфери з радіусами r_1 і r_2 , розділені тонким шаром діелектрика завтовшки d

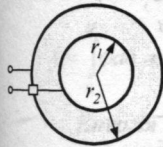


Рис. 142

(рис. 142) і $d = r_2 - r_1$. Поля поза конденсатором, створені внутрішньою та зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Поле між обкладками створюється зарядом q кулі радіусом r_1 , а заряд $-q$ зовнішньої кулі всередині цієї кулі не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками конденсатора дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Тоді електроємність сферичного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} =$$

$$= \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Якщо товщина шару діелектрика d мала, то можна вважати $r_2 \approx r_1$. Тоді

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 4\pi r_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

де $S = 4\pi r_1^2$ - площа обкладки конденсатора.

Коли сферичний конденсатор має дуже тонкий шар діелектрика, його електроємність можна обчислювати за формулою ємності плоского конденсатора.

Конденсатор характеризується не лише електроємністю, а й „пробивною напругою” – різницею потенціалів між його обкладками, при якій може відбутися пробій, тобто електричний розряд через шар діелектрика в конденсаторі. Величина пробивної напруги залежить від властивостей діелектрика, його товщини і форми обкладок.

Для збільшення ємності і варіювання її можливих значень конденсатори з'єднують в батареї.

Паралельне з'єднання конденсаторів.

Щоб отримати велику електроємність, кілька конденсаторів з'єднують в батарею так, щоб всі позитивно заряджені обкладки мали один спільний електрод, а заряджені негативно – інший (рис. 143). Таке з'єднання називається *паралельним*. При цьому кілька конденсаторів немовби замінюють одним, у якого площа обкладок дорівнює сумі площ обкладок складових конденсаторів.

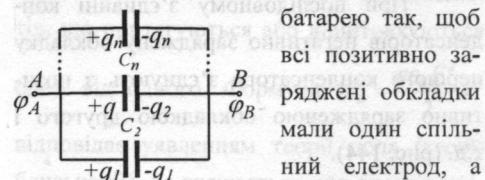


Рис. 143

Різниця потенціалів між обкладками всіх конденсаторів C_1, C_2, C_n , неза-

ленно від ємності, однакова і дорівнює різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U$. При цьому на кожному з них містяться заряди:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad \dots, \quad q_n = C_n U.$$

Заряд всієї батареї розподіляється між обкладками конденсатора так, що

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n,$$

або

$$q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U.$$

Крім того, заряд q батареї можна виразити через її електроємність $C_{нар}$ та напругу на її клеммах:

$$q = C_{нар} U.$$

Прирівнюючи два вирази для заряду q , отримуємо

$$C_{нар} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Якщо батарея складається з n однакових паралельно з'єднаних конденсаторів ємністю C кожен, то її електроємність

$$C_{нар} = Cn.$$

З'єднувати паралельно доцільно такі конденсатори, у яких однакова робоча напруга.

Послідовне з'єднання конденсаторів.

При послідовному з'єднанні конденсаторів негативно заряджену обкладку першого конденсатора з'єднують з позитивно зарядженою обкладкою другого і т.д. (рис. 144).

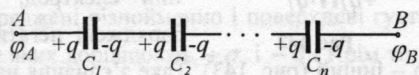


Рис. 144

Якщо на батарею подати напругу $U = \varphi_A - \varphi_B$, то до такої різниці потенціалів зарядяться тільки крайні обкладки першого і останнього конденсатора, причому

$$U = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n).$$

Провідник, що з'єднує негативно заряджену обкладку першого та позитивно заряджену обкладку другого конденсатора, можна розглядати разом з обкладками як одне провідне тіло. Внаслідок явища електростатичної індукції вільні заряди цього тіла під дією поля прикладеної напруги перерозподіляються так, що на одній обкладці з'являється негативний заряд $-q$, а на іншій – позитивний $+q$. Тому можна зробити висновок, що заряди на всіх послідовно з'єднаних конденсаторах, незалежно від їх ємності, однакові і дорівнюють заряду всієї батареї, тобто

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n.$$

Ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів

$$C_{нос} = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B},$$

звідки

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C_{нос}}.$$

Для першого конденсатора $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1}$,

для другого $\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2}$ і т.д. Тоді

$$\frac{q}{C_{нос}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n}.$$

Після скорочення на q отримуємо формулу для обчислення електроємності батареї послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$\frac{1}{C_{нос}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Якщо послідовно з'єднано n однакових конденсаторів з ємністю C кожен, то

$$C_{\text{нос}} = \frac{C}{n}.$$

Послідовно з'єднують конденсатори для підвищення робочої напруги, яку можна подати на батарею конденсаторів.

§57. Енергія зарядженого відокремленого провідника, конденсатора.

Енергія електростатичного поля.

Нехай в однорідному ізотропному середовищі знаходиться відокремлений провідник, заряд якого q , потенціал φ і електроємність C . Для збільшення заряду цього провідника на dq , треба перенести цей заряд з нескінченності до поверхні провідника. При цьому треба виконати роботу проти сил електростатичного поля, яка дорівнює

$$dA = \varphi dq.$$

Щоб зарядити провідник від нульового заряду до q , треба виконати роботу

$$A = \int_0^q \varphi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Енергія зарядженого провідника числово дорівнює тій роботі, яку треба виконати, щоб зарядити цей провідник, тобто

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Під час зарядження конденсатора витрачається робота із перенесення електричних зарядів з однієї обкладки на іншу. Енергію зарядженого конденсатора визначають за формулою:

$$W_e = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів між обкладками конденсатора.

Енергію зарядженого конденсатора можна визначити через величини, які ха-

рактеризують електричне поле в проміжку між обкладками плоского конденсатора. Для цього у формулу

$$W_e = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}$$

підставимо значення C і $\Delta\varphi$:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \quad \Delta\varphi = Ed.$$

Тоді

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Отже, енергія конденсатора виражається через величину, яка характеризує електростатичне поле – напруженість поля \vec{E} .

Електростатичне поле як одна з форм матерії існує в часі і просторі. Енергія є однією з характеристик стану матерії. Тому енергія нерозривно пов'язана з її матеріальним носієм – електричним полем. Енергія електричного поля локалізована у просторі, де існує це поле.

Вираз $W_e = \frac{q\Delta\varphi}{2}$ відповідає положенням теорії далекодії, де W_e розглядається як потенціальна енергія заряджених тіл, що притягуються або відштовхуються один від одного. Формула $W_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$ відповідає уявленню теорії поля (теорії близькодії), де вважається, що енергія, подібно до речовини, розподілена у просторі з *об'ємною густиною*

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

В ізотропному діелектрику напрямки векторів \vec{E} і \vec{D} співпадають. Тому

$$w_e = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}.$$

Враховуючи, що електричне зміщення $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, отримуємо для w_e наступний вираз:

$$w_e = \frac{\vec{E}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}.$$

Перший доданок відповідає густині енергії поля \vec{E} у вакуумі. Другий доданок – це густина енергії, яка витрачається на поляризацію діелектрика.

Дослідження неоднорідних електричних полів, утворених довільними зарядженими тілами, показали, що для них формула $W_e = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 V$ незастосовна, бо

$E \neq const$, а вираз для w_e визначає об'ємну густину енергії в кожній точці будь-якого електричного поля.

У випадку неоднорідного електричного поля енергія dw_e нескінченно малого об'єму dV поля дорівнює

$$dw_e = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 dV.$$

Інтегруючи dw_e по всьому об'єму V поля, знаходимо повну енергію W_e електростатичного поля:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \int_V E^2 dV.$$

IV. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

§58. Постійний електричний струм

В *електродинаміці* розглядаються явища і процеси, що зв'язані з рухом електричних зарядів або макроскопічних заряджених тіл. Одним з найважливіших понять електродинаміки є поняття про електричний струм.

Електричним струмом називають всякий упорядкований рух електричних зарядів.

Електричний струм, який виникає у провіднику внаслідок того, що в ньому створюється електричне поле, називається *струмом провідності*.

Якщо перенесення електричних зарядів здійснюється при переміщенні у просторі зарядженого макроскопічного тіла, то виникає струм, що називається *конвекційним*.

Для появи й існування електричного струму треба, щоб виконувалися дві умови:

перша – наявність у даному середовищі вільних електричних зарядів – носіїв струму. Такими зарядами в металах є електрони провідності; у рідинах (електролітах) – позитивні та негативні іони; у газах – позитивні іони й електрони; в напівпровідниках – електрони і дірки;

друга – на електричні заряди необхідно, щоб діяла сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Отже, в даному середовищі повинно існувати електричне поле, енергія якого витрачалась би на переміщення електричних зарядів.

Щоб струм був тривалим, енергія електричного поля повинна весь час поповнюватись, тобто потрібен такий пристрій, в якому би певний вид енергії безпе-

речно перетворювався в енергію електричного поля. Такий пристрій називається *джерелом електрорушійної сили*, або джерелом струму.

За напрямком електричного струму умовно приймають напрямок руху позитивних електричних зарядів.

Кількісною мірою електричного струму служить *сила (величина) струму* – скалярна фізична величина, яка числово дорівнює електричному заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Якщо сила струму і його напрямок з часом не змінюються, то струм називається постійним. Тоді

$$dq = Idt, \quad q = I \int_0^t dt.$$

Звідси

$$I = \frac{q}{t}$$

Щоб струм був постійний, треба, щоб в кожній частині провідника заряди не нагромаджувались і не зникали. Тому коло постійного струму повинно бути замкненим.

Для характеристики розподілу електричного струму по перерізу провідника вводять вектор *густини струму* \vec{j} .

Вектор \vec{j} напрямлений вздовж напрямку струму і числово дорівнює силі струму, який проходить через одиницю площі перерізу провідника, який проведений перпендикулярно до напрямку струму:

$$j = \frac{dI}{dS}$$

Повна сила струму у провіднику

$$I = \oint_S (\vec{j} d\vec{S}).$$

Виразимо силу і густину струму через середню швидкість $\langle \vec{u} \rangle$ впорядкованого руху зарядів у провіднику. За час dt через поперечний переріз S переноситься заряд $dq = nedV = ne \langle u \rangle S dt$. Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} = ne \langle u \rangle S,$$

отже, густина струму:

$$\vec{j} = ne \langle \vec{u} \rangle.$$

У джерелі ЕРС на носії струму повинні діяти сили неелектростатичного походження, які називаються *сторонніми*.

Ці сили можуть бути обумовлені хімічними процесами в гальванічних елементах і акумуляторах; дифузією носіїв струму в неоднорідному середовищі; електричними полями, які створюються магнітними полями, що змінюються з часом. Сторонні сили в генераторах, виникають за рахунок механічної енергії обертання ротора генератора.

Сторонні сили, переміщаючи електричні заряди, виконують роботу.

Фізична величина, що числово дорівнює роботі, яка виконується сторонніми силами під час переміщення одиничного позитивного заряду, називається *електрорушійною силою* (ЕРС), що діє в колі:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q}.$$

Стороння сила \vec{F}_{cm} , що діє на заряд q , дорівнює:

$$\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm}.$$

Робота сторонніх сил над зарядом q на замкненій ділянці кола дорівнює

$$A = \oint_L (\vec{F}_{cm} d\vec{l}) = \oint_L (q\vec{E}_{cm} d\vec{l}).$$

Тоді

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{E}_{cm} d\vec{l}).$$

ЕРС, що діє в замкненому колі, визначається циркуляцією вектора напруженості сторонніх сил.

ЕРС, яка діє на ділянці 1-2, дорівнює:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Результуюча сила, що діє в колі на заряд q :

$$\vec{F} = \vec{F}_{cm} + \vec{F}_e = q(\vec{E}_{cm} + \vec{E}).$$

Робота, яка виконується результуючою силою над зарядом q на ділянці 1-2, дорівнює

$$\begin{aligned} A_{12} &= q \int_1^2 (\vec{E}_{cm} d\vec{l}) + q \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) = \\ &= q\mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Напругою U_{12} на ділянці 1-2 називається фізична величина, що визначається роботою, яка виконується сумарним полем електростатичних і сторонніх сил при переміщенні одиничного позитивного заряду на даній ділянці кола. Отже,

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Поняття напруги є узагальненням поняття різниці потенціалів: напруга на кінцях ділянки кола дорівнює різниці потенціалів в тому випадку, якщо на цій ділянці не прикладена ЕРС.

Ділянка кола, на якій на носії струму діють сторонні сили, називається *неоднорідною*. Ділянка кола, на якій не діють сторонні сили, називається *однорідною*. Для однорідної ділянки кола

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Німецький фізик Ом експеримен-

тально встановив, що

сила струму I , що тече по однорідному металевому провіднику, пропорційна до напруги U на кінцях провідника:

$$I = \frac{U}{R},$$

де R – електричний опір провідника. Це рівняння виражає **закон Ома для однорідної ділянки кола**.

Одиниця опору – Ом: Ом – опір такого провідника, в якому при напрузі 1 В тече струм силою 1 А .

Величина $G = \frac{1}{R}$ – електрична провідність провідника.

Опір провідника залежить від його розмірів і форми, а також від матеріалу, з якого виготовлений провідник.

Для однорідного провідника опір R прямо пропорційний до його довжини l і обернено пропорційний до площі його поперечного перерізу S :

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір.

Подамо закон Ома для однорідної ділянки кола у диференціальній формі:

$$\frac{U}{l} = \rho \frac{I}{S}; \quad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l} = \sigma \frac{U}{l},$$

де $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – питома електрична провідність.

Оскільки

$$\frac{U}{l} = E; \quad \frac{I}{S} = j,$$

то

$$j = \sigma E.$$

В ізотропному провіднику носії струму в кожній точці рухаються в напрямку вектора \vec{E} . Напрямки \vec{j} та \vec{E} збігаються. Тому

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Отримане співвідношення виражає **закон Ома для однорідної ділянки кола в диференціальній формі**.

Закон Ома в диференціальній формі зв'язує густину струму в кожній точці всередині провідника з напруженістю електричного поля в тій самій точці.

Оскільки напрямлений рух носіїв заряду створюється електричним полем у провіднику, то можна вважати, що середня швидкість $\langle \vec{u} \rangle$ напрямленого руху зарядів прямо пропорційна до напруженості \vec{E} поля в провіднику:

$$\langle \vec{u} \rangle \approx \vec{E}, \quad \text{або} \quad \langle \vec{u} \rangle = u_q \vec{E},$$

де u_q – рухливість носіїв заряду.

Рухливість носіїв заряду числово дорівнює швидкості напрямленого руху, якої вони набувають під дією електричного поля у провіднику з одиничною напруженістю.

Тоді формулу для густини струму можна записати у вигляді

$$\vec{j} = ne u_q \vec{E}.$$

Порівнюючи цю формулу з виразом $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, отримуємо

$$\sigma = en u_q.$$

Отже, **питома електропровідність металів** прямо пропорційна до концентрації вільних електронів та їх рухливості.

На неоднорідній ділянці кола на носії струму діють, крім електростатичних сил $\vec{F}_e = q\vec{E}$, сторонні сили $\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm}$. Тому середня швидкість впорядкованого руху носіїв $\langle \vec{u} \rangle$ буде пропорційна до сумарної сили $q(\vec{E} + \vec{E}_{cm})$. Відповідно густині струму буде пропорційна до суми на-

пруженостей $\vec{E} + \vec{E}_{cm}$:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{cm}) = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}_{cm}).$$

Це співвідношення є математичним виразом в *диференціальній формі закону Ома для неоднорідної ділянки кола*.

Помножимо скалярно обидві частини виразу для закону Ома на вектор $d\vec{l}$, який числово дорівнює довжині dl елемента провідника і напрямлений вздовж вектора густини струму:

$$(\vec{j} d\vec{l})_{\rho} = (\vec{E} d\vec{l}) + (\vec{E}_{cm} d\vec{l}).$$

Оскільки вектори \vec{j} та $d\vec{l}$ збігаються за напрямком, то $(\vec{j} d\vec{l}) = j dl$. Величина густини струму $j = \frac{I}{S}$. Отже,

$$I \rho \frac{dl}{S} = (\vec{E} d\vec{l}) + (\vec{E}_{cm} d\vec{l}).$$

Інтегруючи вздовж довжини ділянки кола 1-2 і враховуючи, що сила струму по всіх перерізах кола однакова, отримуємо

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}_{cm} d\vec{l}).$$

Як було показано вище,

$$\int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \int_1^2 (\vec{E}_{cm} d\vec{l}) = \mathcal{E}_{12},$$

а інтеграл $\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{12}$ - опір ділянки кола

1-2. Для однорідного провідника

$$R_{12} = \rho \frac{l_{12}}{S},$$

де l_{12} - довжина провідника між перерізами 1-2. Отже,

$$I R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Поділивши на R_{12} , отримаємо математичний вираз *закону Ома для неоднорідної ділянки кола*:

рідної ділянки кола:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}} = \frac{U_{12}}{R_{12}}.$$

Силу струму треба розглядати як алгебраїчну величину. Якщо струм тече по ділянці кола від перерізу 1 до перерізу 2, то $I > 0$, якщо струм тече в протилежному напрямку, то $I < 0$.

$EPC \mathcal{E}_{12}$ є теж величиною алгебраїчною. У випадку, коли EPC сприяє руху позитивних носіїв струму у напрямку 1-2, то $\mathcal{E}_{12} > 0$, якщо EPC перешкоджає руху позитивних носіїв у цьому напрямку, то $\mathcal{E}_{12} < 0$ (рис. 145).

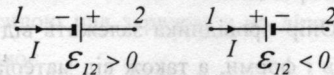


Рис. 145

Якщо електричне коло замкнене, то точки 1 і 2 збігаються, тому $\varphi_1 = \varphi_2$ і $R_{12} = R$, де R - загальний опір кола.

Тому закон Ома для замкненого кола має такий вигляд:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

де \mathcal{E} - алгебраїчна сума всіх електрорушійних сил, прикладених у цьому колі.

Нехай замкнене електричне коло складається із джерела струму з $EPC \mathcal{E}$ і внутрішнім опором r і зовнішньої частини, яка має опір $R_{зов}$. Тоді

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{зов} + r}.$$

Якщо коло розімкнуте, то

$$\mathcal{E}_{12} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Це означає, що EPC , прикладена до розімкненого кола, дорівнює різниці потенціалів на кінцях цього кола.

Розглянемо однорідний провідник, до якого прикладена напруга U . За час dt

через переріз провідника переноситься заряд $dq = Idt$. Оскільки струм представляє переміщення заряду dq під дією електричного поля, то робота струму

$$dA = dqU = IUdt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Потужність струму:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Якщо струм проходить по нерухомому металевому провіднику, то вся робота струму йде на його нагрівання і за законом збереження енергії

$$dQ = dA.$$

Тоді закон *Джоуля-Ленца* має вигляд

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Виділимо в провіднику елементарний циліндричний об'єм $dV = dSdl$, опір якого $R = \rho \frac{dl}{dS}$, а за законом Джоуля-Ленца за час dt в цьому об'ємі виділиться теплота

$$dQ = I^2 R dt = (j dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt.$$

Кількість теплоти, що виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму, називається *густиною теплової потужності струму*:

$$w = \frac{dQ}{dV dt}.$$

Отже,

$$w = \rho j^2.$$

Оскільки

$$j = \sigma E, \text{ а } \rho = \frac{1}{\sigma},$$

то

$$w = jE = \sigma E^2.$$

Це закон *Джоуля-Ленца в диференціальній формі*.

ТОВСТЮК КОРНІЙ ДЕНИСОВИЧ

(нар. 1922р.)

На основі інтеркалювання шаруватих структур вперше створив акумулятори та конденсатори нового покоління. Вони відрізняються від хімічних тим, що в останніх заряджається поверхня, в той час як в нових заряджається весь об'єм.

ХРУЦОВ П.Д.

(1849-1909)

Провів в 1889-90 рр. досить точні дослідження з визначення *ЕРС* гальванічних елементів і їхньої вільної енергії.

БОРОВИК ЄВГЕН СТАНІСЛАВОВИЧ

(1915-1966)

Відкрив порушення закону Ома у металі (вісмуті) при великій густині струму.

СМАКУЛА ОЛЕКСАНДР

(1900-1983)

В 1927 р. написав роботу "Помір питомого опору плинного воздуха", в якій дав опис запропонованого пристрою для вимірювання опору рідкого повітря, вивів формулу для розрахунку і отримав значення $\rho = 1,2.1018 \text{ Ом.см}$. Провів перевірку закону Ома.

§59. Класична електронна теорія електропровідності металів і її дослідне обґрунтування. Виведення закону Ома в диференціальній формі із електронних представлень

Численні експерименти, виконані різними вченими в XIX ст., дали багатий матеріал для створення науково обґрунтованої теорії електричної провідності металів.

Перші досліди із з'ясування механізму електропровідності металів виконав Е.Рікке. В електричне коло постійного струму було увімкнено три послідовно з'єднані циліндри з хімічно чистих алюмінію і міді, які щільно притискувались один до одного (рис. 146). Через коло протягом року пропускали електричний струм. За весь час через циліндри пройшов електричний заряд, що дорівнює $3,5 \cdot 10^6 \text{ Кл}$.

Проте ніяких ознак перенесення речовини (Cu, Al) не було виявлено. Це було експериментальним доказом того, що іони

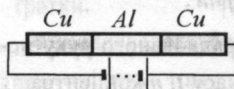


Рис. 146

в металах не беруть участі в перенесенні електрики, а перенесення заряду в металах здійснюється частинками, які є однаковими для усіх металів. Такими частинками можуть бути електрони.

Для вивчення природи носіїв струму в металі Г. Лоренц запропонував такий дослід.

Металевий стрижень C рухався поступально з швидкістю v_0 (рис. 147). Внаслідок взаємодії з

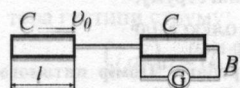


Рис. 147

кристалічною ґраткою носії струму в провіднику теж рухались з швидкістю v_0 . Стрижень різко

гальмувався і в момент гальмування замикався нерухомим металевим провідником B на гальванометр. Носії струму, які не зв'язані жорстко з кристалічною ґраткою, продовжували рухатись за інерцією доти, доки взаємодія з іонами ґратки не зупинить їх. У замкненому колі проходив короткочасний струм, який можна виявити за допомогою гальванометра G . За напрямком струму визначають знак рухомих зарядів. Цей дослід дав змогу визначити питомий заряд $\frac{q}{m}$; де q - заряд носія струму, m - його маса.

За законом Джоуля-Ленца робота, яка виконується струмом I за час dt в колі з опором R , дорівнює

$$dA = I^2 R dt.$$

Густина струму в стрижні дорівнює

$$j = |q|nu,$$

де u - швидкість впорядкованого руху носіїв заряду в момент часу t , n концентрація носіїв заряду, а сила струму в стрижні і у всьому колі

$$I = |q|nuS,$$

Тоді, робота, яку виконує струм

$$dA = IRIdt = |q|nuSRIdt = |q|nuSR dQ,$$

де $dQ = I dt$ - заряд, який пройшов через гальванометр за час dt .

Ця робота виконується за рахунок зменшення кінетичної енергії впорядкованого руху носіїв струму в стрижні C :

$$dA = -Nd \left(\frac{mu^2}{2} \right) = -nSmdu,$$

де $nS = N$ кількість носіїв струму в стрижні з площею поперечного перерізу S . Отже,

$$|q|nuSR dQ = -nSmdu.$$

Звідси

$$\frac{|q|}{m} dQ = -\frac{l}{R} du.$$

Проінтегруємо ліву і праву частину цієї рівності:

$$\frac{|q|}{m} \int_0^Q dQ = -\frac{l}{R} \int_{v_0}^0 du, \quad \frac{|q|}{m} Q = \frac{l}{R} v_0.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{|q|}{m} = \frac{l v_0}{QR},$$

де Q - повний заряд, що пройшов через гальванометр при гальмуванні стрижня.

Л. Мандельштам і Н. Папалексі виконали такий дослід. Вони взяли котушку з намотаним на неї дротом, кінці якої були з'єднані з нерухою телефонною трубою. При швидких крутильних коливаннях котушки навколо її осі в колі виникав змінний струм, що викликав тріск в телефонній трубці. Цей дослід підтвердив наявність носіїв струму в дроті. Проте він не дав змоги визначити напрямок струму і знак заряду.

Т. Стюарт і Р. Толмен удосконалили цей дослід, замінивши телефон чутли-

вим гальванометром. Дослід показав, що носії струму заряджені негативно. Відношення $\frac{q}{m}$ виявилось близьким до питомого заряду електрона.

Отже, було експериментально доведено, що носіями струму в металах насправді є електрони.

Класичну електронну теорію провідності металів створив П. Друде, а розвинув у своїх працях Г. Лоренц.

Класична електронна теорія провідності металів, яка створена П. Друде і Г. Лоренцом, ґрунтується на таких фундаментальних положеннях:

- усі метали мають кристалічну будову. У вузлах кристалічної ґратки розміщуються іони металу;
- простір між вузлами кристалічної ґратки заповнений електронним газом, який утворюється валентними електронами, що порівняно слабо зв'язані з атомними ядрами і відриваються від атомів при утворенні кристалічної ґратки, вільні електрони рухаються хаотично між іонами металу;
- в середньому кожен атом металу втрачає один електрон і концентрація електронів провідності в металах дорівнює кількості атомів в одиниці об'єму металу. Концентрацію носіїв заряду в металах можна обчислити за формулою

$$n = \frac{N_A}{\mu} \rho,$$

де ρ - густина металу, μ - його молярна маса. Для міді

$$\mu = 63,6 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}, \quad \rho = 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \text{і}$$

$$n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3};$$

- до електронного газу в металах засто-

совані всі закони молекулярно-кінетичної теорії газів, тобто електронний газ розглядається як ідеальний газ.

Під час руху електрони стикаються з іонами кристалічної ґратки металу. Середня довжина вільного пробігу електронів $\langle \lambda \rangle$ за порядком величини дорівнює періоду кристалічної ґратки, тобто 10^{-10} м .

За теорією Друде-Лоренца електрони мають таку ж енергію теплового руху, як і молекули одноатомного газу. Середня швидкість теплового руху електронів

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

$$(\text{при } T=300 \text{ К, } \langle v \rangle = 1,08 \cdot 10^5 \text{ м/с}).$$

Тепловий рух електронів, який є хаотичним, не може привести до виникнення струму.

При дії зовнішнього електричного поля в металевому провіднику, крім теплового руху електронів, виникає й впорядкований рух, тобто електричний струм. Середню швидкість $\langle u \rangle$ впорядкованого руху електронів можна оцінити на основі формули $j = ne \langle u \rangle$.

Для міді допустима густина струму

$$j = 10^7 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}, \quad n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тоді

$$\langle u \rangle \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

Отже, $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$. Незначна величина $\langle u \rangle$ пояснюється досить частими зіткненнями електронів з іонами кристалічної ґратки.

Здавалось би, отриманий результат протирічить тому відомому факту, що швидкість поширення електричного струму величезна і дорівнює швидкості світла c . Швидкість c є швидкістю поширення

електромагнітного поля вздовж провідника.

Рух електронів під дією зовнішнього електричного поля виникає на всій довжині дроту практично одночасно з подачею сигналу.

Найважливішим завданням класичної електронної теорії провідності металів є теоретичне виведення основних законів електричного струму, які були встановлені на досліді.

Закон Ома

На електрон в металевому провіднику, в якому існує стале електричне поле напруженістю E , з боку поля діє сила $F = eE$ і він отримує прискорення

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$

За час вільного пробігу електрони рухаються рівноприскорено, набуваючи до кінця вільного пробігу швидкість

$$u_{max} = \frac{eE}{m} \langle t \rangle,$$

де $\langle t \rangle$ – середній час між двома послідовними зіткненнями електронів з іонами ґратки.

Згідно з теорією Друде в кінці вільного пробігу електрон, стикаючись з іонами ґратки, віддає їм енергію, швидкість впорядкованого руху стає нульовою. Отже,

$$\langle u \rangle = \frac{u_{max} + 0}{2} = \frac{eE}{2m} \langle t \rangle.$$

Класична теорія не враховує розподіл електронів за швидкостями, тому $\langle t \rangle$ визначається довжиною вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ і середньою швидкістю руху електронів відносно кристалічної ґратки провідника, яка дорівнює $\langle v \rangle + \langle u \rangle$:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle + \langle u \rangle}.$$

Але $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$, і $\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}$.

Тоді

$$\langle u \rangle = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою $\langle u \rangle = u_e E$, де u_e – рухливість носіїв заряду, знаходимо

$$u_e = \frac{e \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Отже, рухливість носіїв заряду залежить від їх питомого заряду $\frac{e}{m}$, середньої довжини вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ та швидкості, що характеризує хаотичний рух носіїв заряду в провіднику.

Густина струму в металевому провіднику

$$j = ne \langle u \rangle \quad \text{і} \quad j = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E.$$

Величину $\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}$ називають питомою електропровідністю, а обернену до неї величину $\frac{1}{\sigma} = \rho$ – питомим опором провідника. Отже,

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E.$$

Ця формула виражає **закон Ома для густини струму**: густина струму в провіднику дорівнює добутку питомої електропровідності провідника на напруженість електричного поля.

Вектори \vec{E} і \vec{j} мають той самий напрямок. Тому закон Ома можна записати також у векторній формі:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

Розглянемо межі застосування закону Ома. Як видно з формули

$$\vec{j} = eti\vec{E},$$

закон Ома справджується, коли добуток ni залишається сталим, тобто не залежить від напруженості поля \vec{E} . Якщо ж електричне поле настільки велике, що воно змінює концентрацію n або надає електронам на довжині вільного пробігу додаткової швидкості, яка за величиною наближається до середньої швидкості теплового руху, то тоді закон Ома не матиме місця, тобто порушиться лінійність між \vec{j} та \vec{E} . Для металів відхилення від закону Ома настає при дуже великих напруженостях порядку $10^8 \frac{B}{M}$.

Закон Джоуля - Ленца

Розглянемо перетворення енергії, що відбувається при зіткненні електронів провідності з вузлами кристалічної ґратки.

До кінця вільного пробігу електрон під дією поля отримує додаткову кінетичну енергію

$$\langle E_k \rangle = \frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{m e^2 E^2 \langle t \rangle^2}{2 m^2} = \frac{e^2 \langle \lambda \rangle^2}{2 m \langle v \rangle^2} E^2.$$

При співударі електрона з іоном ця енергія повністю передається ґратці і йде на збільшення внутрішньої енергії металу, тобто на його нагрівання.

За одиницю часу електрон стикається з вузлами ґратки в середньому $\langle z \rangle$ разів:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}.$$

За одиницю часу в одиниці об'єму металу відбувається $n \langle z \rangle$ зіткнень, де n - концентрація електронів, і ґратці передається енергія

$$w = n \langle z \rangle \langle E_k \rangle,$$

яка йде на нагрівання провідника, w - густина теплової потужності струму.

Підставивши в це рівняння вираз для $\langle E_k \rangle$, отримаємо:

$$w = n \frac{\langle v \rangle e^2 \langle \lambda \rangle^2}{\langle \lambda \rangle 2 m \langle v \rangle^2} E^2 = \frac{n e^2 \langle \lambda \rangle}{2 m \langle v \rangle} E^2.$$

Оскільки $\frac{n e^2 \langle \lambda \rangle}{2 m \langle v \rangle} = \sigma$, тоді

$$w = \sigma E^2.$$

Ця формула для обчислення густини теплової потужності електричного струму отримана теоретично на основі уявлень класичної електронної теорії. Вона є математичним виразом *закону Джоуля-Ленца в диференціальній формі*.

КОРДИШ ЛЕОН ЙОСИПОВИЧ
(1878-1932)

Розробляв в 1924-1926 рр. теорію електропровідності. Електричний струм розглядався з точки зору стаціонарного електромагнітного процесу як сукупність послідовних процесів іонізації і відновлення атомів провідника. Основною теорією є положення про виникнення в результаті нейтралізації іонів електромагнітної хвилі, яка дає односторонність зсувів електронів і яка поширюється зі швидкістю світла. При цьому електричний опір пояснюється зв'язуванням вільних електронів додатними іонами у вузлах кристалічної ґратки провідника.

МАЛИНОВСЬКИЙ АНДРІЙ ЕДУАРДОВИЧ
(1884-1937)

Працював над питаннями електронної теорії провідності металів. Довів неспроможність класичної теорії щодо розрахунку взаємодії вільних електронів і позитивних іонів у металах, представив свою інтерпретацію цієї взаємодії. Дав уточнення до теорії дослідів Толмена і Стюарта з приводу визначення питомого заряду електронів. Спростував точку зору Лоренца про інертність електронів провідності.

§60. Закон Відемана-Франца.

Недоліки класичної електронної теорії провідності металів

У 1853 році німецькі вчені Відеман і Франц на основі експериментів встановили закон, згідно з яким:

для всіх металів при одній і тій самій температурі відношення коефіцієнта теплопровідності κ до коефіцієнта питомої електропровідності σ є величиною сталою:

$$\frac{\alpha}{\sigma} = C.$$

Оскільки величини α та σ залежать від температури (неявно, а через середню арифметичну швидкість та швидкість теплового руху), то наступні дослідження Лоренца довели, що

$$\frac{\alpha}{\sigma} = C_1 T.$$

Відомо, що теплопровідність металів переважно здійснюється за рахунок руху вільних електронів. Електронний газ в металах подібний до одноатомного ідеального газу. Тому згідно з молекулярно-кінетичною теорією коефіцієнт теплопровідності становитиме

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho c_V = \\ &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle mn \frac{3}{2} \frac{R}{mN_A}, \end{aligned}$$

звідси

$$\alpha = \frac{1}{2} kn \langle \lambda \rangle \langle v \rangle,$$

де n – концентрація вільних електронів,

$$k = \frac{R}{N_A} \text{ – стала Больцмана.}$$

Оскільки питома електропровідність

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle},$$

тоді

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{kn \langle \lambda \rangle \langle v \rangle 2m \langle v \rangle}{2ne^2 \langle \lambda \rangle} = \frac{k}{e^2} m \langle v \rangle^2.$$

Середня кінетична енергія однієї молекули ідеального газу дорівнює

$$\langle \epsilon_k \rangle = \frac{m \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

де $\langle v_{кв} \rangle$ – середня квадратична швидкість.

Якщо знехтувати, як це зробив Друде, відмінністю між середньою швид-

кістю $\langle v \rangle$ теплового руху і їхньою середньою квадратичною швидкістю $\langle v_{кв} \rangle$, тобто припустити, що

$$m \langle v \rangle^2 = m \langle v_{кв} \rangle^2 = 3kT,$$

тоді

$$\frac{\alpha}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T.$$

Отже,

$$C_1 = 3 \frac{k^2}{e^2} \quad \text{і} \quad C_1 = 2,23 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{К}^2}.$$

Це значення добре узгоджується з дослідними даними.

Але це узгодження класичної електронної теорії з експериментом виявилось випадковим. Друде вважав, що всі електрони мають однакову швидкість теплового руху. Лоренц вдосконалив теорію Друде, застосувавши до електронного газу статистику Максвелла, тобто розподіл молекул за швидкостями. Виявилось, що в цьому разі

$$\frac{\alpha}{\sigma} = 2 \frac{k^2}{e^2} T.$$

Коефіцієнт $C_1 = 2 \frac{k^2}{e^2}$ згідно з теорією Лоренца гірше узгоджується з дослідними даними, ніж результат Друде $C_1 = 3 \frac{k^2}{e^2}$.

Виявляється, що уточнена класична електронна теорія, яка враховує статистичні властивості електронного газу в металах, гірше узгоджується з дослідними даними, ніж теорія Друде.

Спроби застосувати класичну електронну теорію Друде-Лоренца для пояснення ряду закономірностей електрики і теплових явищ, які спостерігаються на досліді, не завжди приводили до позитивних результатів. Нездатність класичної

електронної теорії пояснити деякі закони і явища свідчать про її обмеженість. Розглянемо кілька таких прикладів.

I. Молярна теплоємність металу $C_{мет}$

Згідно з класичною електронною теорією молярна теплоємність $C_{мет}$ металу дорівнює сумі молярної теплоємності кристалічної ґратки $C_{зр}$ і молярної теплоємності $C_{ел}$ електронного газу, який може розглядатися як одноатомний ідеальний газ:

$$C_{мет} = C_{зр} + C_{ел}.$$

Іони, що утворюють кристалічну ґратку металу, здійснюють коливання біля вузлів ґратки. Кожний іон має три коливальні ступені вільності, на які в середньому припадає енергія $3kT$. Внутрішня енергія моля іонів

$$U_{зр} = 3N_A kT = 3RT.$$

Отже,

$$C_{зр} = \frac{dU_{зр}}{dT} = 3R.$$

Молярна теплоємність електронного газу як ідеального

$$C_{ел} = \frac{3}{2}R.$$

Отже, молярна теплоємність металів

$$C_{мет} = C_{зр} + C_{ел} = 3R + \frac{3}{2}R = \frac{9}{2}R.$$

Але експериментальні дані показують, що теплоємність металів, так само, як і теплоємність твердих діелектриків, близька до $3R$. Отримали неочікуване і незрозуміле явище практичної відсутності теплоємності в електронного газу.

II. Температурна залежність опору

Експериментально встановлено, що в досить широкому інтервалі температур пи-

томий опір $\rho \sim T$ або $\sigma \sim \frac{1}{T}$. Відомо, що

$$\rho = \frac{l}{\sigma}, \text{ а } \sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle},$$

крім того, $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, а добуток $n \langle \lambda \rangle$ від температури не залежить. Отже, $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, а звідси випливає, що $\rho \sim \sqrt{T}$, що суперечить дослідним даним.

III. Оцінка середньої довжини вільного пробігу електронів в металах

Щоб за формулою $\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}$

отримати значення σ , яке збігається з дослідними, треба прийняти $\langle \lambda \rangle$ значно більшими від періоду кристалічної ґратки, тобто допустити, що електрон проходить без співударянь з іонами ґратки сотні міжвузлових відстаней. Таке припущення не відповідає класичній теорії Друде-Лоренца.

Згадані розбіжності теорії з дослідом можна пояснити тим, що рух електронів в металах не підлягає законам класичної механіки.

Однак класична електронна теорія не втратила свого значення, оскільки при високих температурах вона дає правильні якісні результати і є наочною.

§61 Робота виходу електронів з металу. Термоелектронна емісія

Електрони провідності в металі весь час перебувають в хаотичному тепловому русі. Та обставина, що вільні електрони утримуються всередині металу, вказує на те, що в поверхневому шарі металу виникає затримуюче електричне поле, яке перешкоджає електронам виходити з металу в навколишній вакуум. Щоб покинути метал, електрон повинен виконати деяку ро-

боту, яка називається *роботою виходу*.

Одна із причин виникнення роботи виходу полягає в наступному. Якщо при тепловому русі електрон вилетить з металу, то він індукує на його поверхні заряд, який називається зарядом дзеркального відображення. Між електроном і цим зарядом виникає сила притягання, що називається силою електричного зображення і яка намагається повернути електрон назад в метал.

Друга причина зумовлена тим, що біля поверхні металу у вакуумі існує „електронна хмарка”, яка заряджена негативно (рис. 148). Розміри цієї хмарки одного порядку з розмірами атомів (10^{-10} м). При цьому метал, охоплений негативною електронною хмаринкою, відносно вакууму заряджений позитивно (рис. 148). Позитивний потенціал внутрішньої частини металу відносно вакууму називається внутрішнім потенціалом $\Delta\varphi$.

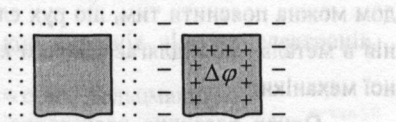


Рис. 148

Потенціальну енергію W вільних електронів $-e$ у вакуумі вважають такою, що дорівнює нулю (бо $\varphi = 0$). Тоді всередині металу з позитивним внутрішнім потенціалом $\Delta\varphi$ потенціальна енергія електронів провідності від’ємна:

$$W = (-e)\Delta\varphi = -e\Delta\varphi.$$

Отже, вільні електрони в металах знаходяться в „потенціальній ямі з плоским дном” (рис. 149). Дно є плоским через те, що поверхневий подвійний шар утворює електричне поле, подібне до поля плоского конденсатора.

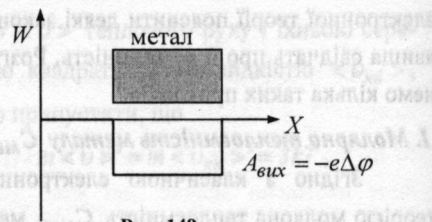


Рис. 149

Для виходу електрона з металу у вакуум треба подолати потенціальний бар’єр – поле подвійного поверхневого шару. Це потребує додаткової енергії, яка має бути не меншою за глибину потенціальної ями.

Роботою виходу називається величина $A_{вих}$, що дорівнює тій найменшій додатковій енергії, яку потрібно передати електрону провідності в металі для його виходу у вакуум.

Отже, числово робота виходу дорівнює:

$$A_{вих} = e\Delta\varphi.$$

Якщо електрону в металі надати додаткової енергії, його кінетична енергія зростає. Умову виходу електрона з металу можна записати так:

$$\frac{mv_n^2}{2} \geq e\Delta\varphi,$$

де v_n - проекція швидкості електрона на нормаль до поверхні металу.

Додаткову енергію електрони провідності можуть отримати при освітленні металу (зовнішній фотоефект), нагріванні (термоелектронна емісія), під дією сильного електричного поля (автоелектронна емісія), при бомбардуванні поверхні металу потоком електронів у вакуумі (вторинна електронна емісія).

Робота виходу залежить від хімічної природи металу і стану його поверхні. Забруднення, залишки вологи тощо змінюють величину роботи.

Підібравши певним чином покриття

боту, яка називається *роботою виходу*.

Одна із причин виникнення роботи виходу полягає в наступному. Якщо при тепловому русі електрон вилетить з металу, то він індукує на його поверхні заряд, який називається зарядом дзеркального відображення. Між електроном і цим зарядом виникає сила притягання, що називається силою електричного зображення і яка намагається повернути електрон назад в метал.

Друга причина зумовлена тим, що біля поверхні металу у вакуумі існує „електронна хмарка”, яка заряджена негативно (рис. 148). Розміри цієї хмарки одного порядку з розмірами атомів (10^{-10} м). При цьому метал, охоплений негативною електронною хмаринкою, відносно вакууму заряджений позитивно (рис. 148). Позитивний потенціал внутрішньої частини металу відносно вакууму називається внутрішнім потенціалом $\Delta\varphi$.

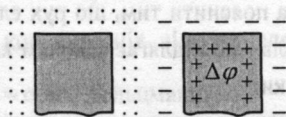


Рис. 148

Потенціальну енергію W вільних електронів $-e$ у вакуумі вважають такою, що дорівнює нулю (бо $\varphi = 0$). Тоді всередині металу з позитивним внутрішнім потенціалом $\Delta\varphi$ потенціальна енергія електронів провідності від’ємна:

$$W = (-e)\Delta\varphi = -e\Delta\varphi.$$

Отже, вільні електрони в металах знаходяться в „потенціальній ямі з плоским дном” (рис. 149). Дно є плоским через те, що поверхневий подвійний шар утворює електричне поле, подібне до поля плоского конденсатора.

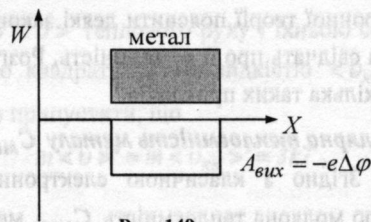


Рис. 149

Для виходу електрона з металу у вакуум треба подолати потенціальний бар’єр – поле подвійного поверхневого шару. Це потребує додаткової енергії, яка має бути не меншою за глибину потенціальної ями.

Роботою виходу називається величина $A_{вих}$, що дорівнює тій найменшій додатковій енергії, яку потрібно передати електрону провідності в металі для його виходу у вакуум.

Отже, числово робота виходу дорівнює:

$$A_{вих} = e\Delta\varphi.$$

Якщо електрону в металі надати додаткової енергії, його кінетична енергія зростає. Умову виходу електрона з металу можна записати так:

$$\frac{m v_n^2}{2} \geq e\Delta\varphi,$$

де v_n - проекція швидкості електрона на нормаль до поверхні металу.

Додаткову енергію електрони провідності можуть отримати при освітленні металу (зовнішній фотоефект), нагріванні (термоелектронна емісія), під дією сильного електричного поля (автоелектронна емісія), при бомбардуванні поверхні металу потоком електронів у вакуумі (вторинна електронна емісія).

Робота виходу залежить від хімічної природи металу і стану його поверхні. Забруднення, залишки вологи тощо змінюють величину роботи.

Підібравши певним чином покриття

поверхні, можна значно зменшити $A_{\text{вих}}$. Якщо на поверхню вольфраму $A_{\text{вих}} = 4,5eV$ нанести шар оксиду лужноземельного металу (Ca, Ba), то робота виходу зменшується до $2eV$.

Емісія – це вихід електронів з металу під дією зовнішніх факторів.

Явище термоелектронної емісії полягає в тому, що нагріті метали випускають електрони.

Електрон провідності може вилетіти з будь-якого металу тоді, коли його кінетична енергія перевищує роботу виходу електрона з металу.

Внаслідок термоелектронної емісії виникає термоелектронний струм.

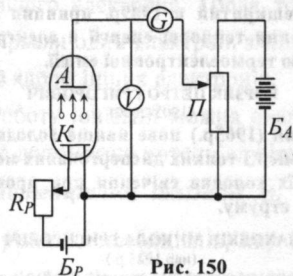


Рис. 150

Явище термоелектронної емісії на практиці можна спостерігати за допомогою вакуумної лампи-діода, в яку впаяно два електроди - катод K і анод A (рис. 150). Катод нагрівається електричним струмом від батареї розжарювання B_p . Регулюючи за допомогою реостата R_p силу струму розжарювання, можна змінювати температуру катода. Від батареї на електроди подається напруга U_a , величину якої можна змінювати за допомогою потенціометра Π і вимірювати вольтметром V . Термоелектронний струм I_a вимірюється гальванометром G .

Сила термоелектронного струму I_a

залежить від напруги U_a , яка прикладена між катодом та анодом, температури катода і матеріалу, з якого виготовлений катод.

На рис. 151 подано залежність термоелектронного струму I_a від напруги U_a при різних температурах катода. Ця крива називається **вольт-амперною характеристикою діода**. При малих значеннях U_a криві при різних температурах збігаються.

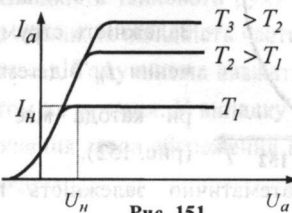


Рис. 151

При невеликих анодних напругах сила струму спочатку повільно зростає з підвищенням напруги. Це пояснюється тим, що при невеликих значеннях U_a не всі електрони, які вийшли з катода, досягають анода. Частина електронів між катодом і анодом утворює електронну хмаринку (просторовий заряд), яка перешкоджає руху до анода електронів, які знову вилетіли з катода. Із збільшенням напруги U_a електронна хмаринка поступово розсіюється і струм I_a зростає. При $U_a = U_n$ зростання струму припиняється. Це пов'язано з тим, що кількість електронів, які долітають до анода за одиницю часу, дорівнює кількості електронів, що вилітають за той самий час з катода.

Максимальний термоелектронний струм, можливий при даній температурі катода, називають **струмом насичення** I_n .

При малих значеннях $U_a \ll U_n$ залежність термоелектронного струму від анодної напруги описується законом Богуславського-Ленгмюра

$$I_a = BU_a^{3/2},$$

де B – коефіцієнт, який залежить від форми електродів та їх взаємного розміщення.

Якщо позначити через N загальну кількість електронів, що вилітають з катода при даній температурі за одиницю часу, то силу струму насичення I_H можна визначити за формулою

$$I_H = Ne.$$

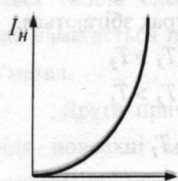


Рис. 152 T (рис. 152).

Залежність струму насичення I_H від температури катода має вигляд

Математично залежність густини струму насичення описується за класичною електронною теорією **формулою Річардсона**:

$$j_H = A\sqrt{T}e^{-\frac{e\Delta\phi}{kT}},$$

де $A = ne\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}$, тут e , m , n – відповідно заряд, маса та концентрація електронів в металі, k – стала Больцмана.

Отже, за класичною електронною теорією коефіцієнт A залежить від концентрації електронів n і для різних металів є неоднаковим.

За квантовою теорією густина струму насичення визначається **формулою Річардсона-Дешимена**:

$$j_H = BT^2e^{-\frac{e\Delta\phi}{kT}},$$

де

$$B = \frac{4\pi e m k^2}{h^3} \approx 120 \frac{A}{\text{см}^2 \text{K}}.$$

Отже, стала B є однаковою для всіх металів. Проте таке B не виявлене у жодного з металів. Розбіжності пояснюються тим, що в теоретичних розрахунках вико-

ристовується модель ідеального електронного газу.

Обидві теорії правильно передають експоненціальну залежність густини струму j_H від температури. Множники $T^{1/2}$ і T^2 відіграють другорядну роль, оскільки показникова функція змінюється значно сильніше за степеневу.

МОРГУЛІС НАУМ ДАВИДОВИЧ
(1904-1976)

Встановив у 1946 р., що на роботу виходу термоелектронів із напівпровідникового катода впливає не лише прикладене зовнішнє прискорююче електричне поле, але й поверхневий заряд.

Провів всесторонні дослідження фізичних процесів, що відбуваються в діоді з термоемісійним катодом при наявності парів цезію. Показав, що такий діод може бути перетворений в ефективний генератор електроенергії. В результаті був відкритий в 1949р. принцип прямого перетворення теплової енергії в електричну за допомогою термоелектронної емісії.

БОРЗЯК ПЕТРО ГРИГОРОВИЧ
(1903-2000)

Відкрив (1965р.) нове явище холодної електронної емісії з тонких диспергованих металевих плівок і їх холодне свічення при проходженні через них струму.

НАХОДКІН МИКОЛА ГРИГОРОВИЧ
(нар. 1925 р.)

Дослідив основні кінетичні особливості збудження електронів у вторинній електронній емісії.

§62. Струм в газах

Гази складаються з електрично нейтральних атомів і молекул і не мають вільних зарядів (електронів та іонів), які здатні під дією електричного поля рухатись впорядковано. Отже, при нормальних умовах гази є ізоляторами. Це підтверджують досліди із зарядженими ізольованими провідниками в сухому повітрі: їх заряд майже не змінюється протягом тривалого часу. Газ стає провідником, якщо частина його молекул іонізується.

Іонізацією газу називається явище відривання електронів від молекул газу, що приводить до утворення в газі вільних

електронів та позитивних іонів і зумовлює його електропровідність.

Атоми і молекули газу – це стійкі системи заряджених частинок. Тому для іонізації атома або молекули треба виконати роботу проти сил взаємодії між електроном, що виривається, та іншими частинками атома. Цю роботу називають **роботою іонізації** A_i . Величина роботи іонізації залежить від хімічної природи газу і енергетичного стану електрона в атомі або молекулі, з яких він виривається. Найслабше зв'язані з ядром зовнішні (валентні) електрони атома. Через те, щоб вирвати валентний електрон з атома, треба виконати меншу роботу, ніж для виривання будь-якого іншого електрона. Після того як з атома вирвали один електрон, зміцнюється зв'язок з ядром інших електронів.

Роботу іонізації можна охарактеризувати за допомогою потенціалу іонізації.

Потенціалом іонізації φ_i називають ту різницю потенціалів, яку повинен пройти електрон у прискорювальному електричному полі, щоб збільшення його енергії дорівнювало роботі іонізації:

$$\varphi_i = \frac{A_i}{e}.$$

Іонізація газу може відбуватись під впливом різних зовнішніх факторів:

- 1) сильного нагрівання газу,
- 2) рентгенівського проміння,
- 3) радіоактивного випромінювання (α , β , γ - частинки),
- 4) ультрафіолетового випромінювання.

Іонізація газу під впливом рухомих електронів або іонів називається **ударною іонізацією**. Якщо кінетична енергія частинки мала, то її зіткнення з атомами газу нагадує пружний удар, і це приводить ли-

ше до нагрівання газу.

Якщо енергія частинки досить велика, то зіткнення з атомами стають непружними і викликають іонізацію атома (вибивання електрона). Частинка ніби проникає в атом і вибиває з нього електрон.

Визначимо, яку мінімальну кінетичну енергію повинна мати іонізуюча частинка, щоб відбулася ударна іонізація газу.

Швидкість теплового руху молекул набагато менша за швидкість частинок, що іонізують газ. Тому можна вважати, що до удару атом не рухався. У випадку непружного зіткнення закон збереження імпульсу має вигляд:

$$m\nu = (m + M)u,$$

де m і M - маси іонізуючої частинки і атома, ν - швидкість частинки, а u - швидкість частинки і атома після удару. Швидкість електрона, який вибитий з атома, наближено вважаємо також u .

Початкова кінетична енергія частинки витрачається при ударі на роботу іонізації A_i і на те, щоб частинці і атому надати кінетичну енергію, яка відповідає їхній швидкості u після удару:

$$\frac{m\nu^2}{2} = A_i + \frac{(m + M)u^2}{2}.$$

Із закону збереження імпульсу

$$u = \frac{m\nu}{m + M}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{m\nu^2}{2} &= A_i + \frac{m + M}{2} \frac{m^2\nu^2}{(m + M)^2} = \\ &= A_i + \frac{m\nu^2}{2} \frac{m}{m + M}; \quad \frac{m\nu^2}{2} \left(1 - \frac{m}{m + M}\right) = A_i. \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{m\nu^2}{2} = A_i \frac{m + M}{M} = A_i \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Частина вільних електронів в іонізованому газі захоплюється нейтральними молекулами, які при цьому перетворюються на негативно заряджені іони. Отже, електропровідність іонізованого газу є мішаною: носіями електричного заряду в газах можуть бути вільні електрони та позитивні і негативно заряджені іони.

Переважно, при іонізації газів кількість додатних іонів дорівнює сумі електронів і негативних іонів

$$n_+ = n_e + n_-.$$

Тому загалом навіть іонізований газ залишається електрично нейтральним. Ступінь іонізації визначається співвідношенням

$$\alpha = \frac{n_+}{n_0}.$$

де n_0 - концентрація нейтральних молекул

Ступінь іонізації газів залежить від температури, тиску (через концентрацію незаряджених частинок) та енергії іонізації і описується рівнянням Саха:

$$\alpha = \frac{n_+}{n_0} \approx \frac{T^{3/4}}{n_0^2} e^{-\frac{A_i}{kT}}.$$

Носії заряду в іонізованому газі, як і нейтральні молекули, перебувають у неперервному хаотичному русі. При цьому відбуваються зіткнення між собою частинок, заряди яких мають протилежні знаки, та їх поєднання з утворенням нейтральних молекул газу. Цей процес називається **рекомбінацією іонів**.

Якщо іонізатор діє в газі тривалий час, то **між процесами іонізації та рекомбінації іонів встановлюється динамічна рівновага**. Це означає, що кількість пар носіїв заряду, створюваних іонізатором в одиниці об'єму газу протягом однієї

секунди, дорівнює кількості нейтральних молекул, які утворюються в цьому об'ємі за той самий час внаслідок рекомбінації іонів.

Рекомбінація іонів супроводжується виділенням енергії у вигляді квантів випромінювання відповідної довжини хвилі. Це випромінювання частково розсіюється та витрачається на збудження молекул газу. Отже, рекомбінаційні процеси, що відбуваються в іонізованому газі, супроводжуються світінням газу.

Процес проходження електричного струму через газ називають газовим розрядом.

Несамостійним газовим розрядом називається електричний струм, що зумовлений електропровідністю газу, якої він набуває в наслідок неперервної дії іонізатора.

Несамостійний газовий розряд зникає відразу після припинення дії іонізатора, якщо швидкість електронів недостатня для іонізації газу.

Щоб дослідити залежність сили струму I при газовому розряді від напруги

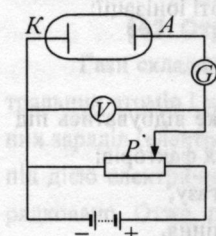


Рис. 153

U між електродами, використаємо установку, схема якої наведена на рис. 153. Напругу, яка прикладена до електродів A і K , можна регулювати за допомогою потенціометра.

Значення напруги U і сили струму I вимірюють за допомогою вольтметра V і чутливого гальванометра G . Газ в трубці іонізують за допомогою іонізатора, наприклад, рентгенівським промінням. Інтенсивність іонізатора залишається незмінною. Вольт-амперна характеристика газо-

вого розряду показана на рис. 154.

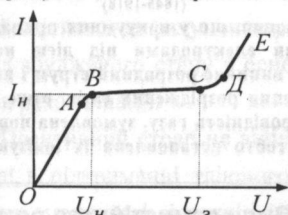


Рис. 154

На ділянці OA сила струму зростає пропорційно до напруги і, відповідно виконується закон Ома:

$$\vec{j} = en_0(u_{+q} + u_{-q})\vec{E},$$

де n_0 - кількість пар іонів в одиниці об'єму; u_{+q} , u_{-q} - рухливість позитивних і негативних іонів газу.

У несамостійному розряді поповнення іонів цілком залежить від потужності зовнішнього джерела іонізації, тому лише при невеликих напругах можна вважати, що кількість пар іонів в одиниці об'єму $n_0 = const$. При збільшенні напруги концентрація іонів зменшується і тому лінійна залежність сили струму від напруги порушується (ділянка AB). Із збільшенням напруги U сила струму зростає все повільніше.

Починаючи з деякого значення напруги U_n , сила струму залишається незмінною, незважаючи на подальше зростання напруги (BC). Це зв'язано з тим, що при напругах, більших за U_n , швидкість іонів досягає великих значень, і всі іони, що виникли в газі, на шляху до електродів не встигають рекомбінувати в нейтральні молекули. Максимальна сила струму I_n при даній інтенсивності іонізатора називається **струмом насичення**, причому $I_n = eN_0$, N_0 - кількість пар одновалентних іонів, що утворюються в об'ємі газу

під дією іонізатора за одну секунду.

Для будь-якої точки кривої OC при вимкненні іонізатора струм негайно припиняється.

Підвищуючи напругу U між електродами газорозрядної трубки, можна здійснити перехід від несамостійного газового розряду в самостійний. Цей перехід називають електричним пробоем газу, а відповідну напругу $U = U_3$ - напругою запалювання, або напругою пробую. При напругах більших, за U_3 , струм значно зростає (ділянки CD і DE).

Самостійним газовим розрядом називається електричний розряд в газах, що зберігається з припиненням дії зовнішнього іонізатора.

Щоб утворився самостійний газовий розряд, треба, щоб внаслідок самого розряду в газі безперервно утворювались вільні електричні заряди. Основним джерелом для їх виникнення є **ударна іонізація молекул газу**. При досить великому значенні напруги електрони, які виникають під дією зовнішнього іонізатора, настільки сильно прискорюються електричним полем, що, стикаючись з молекулами газу, іонізують, їх. При цьому утворюються вторинні електрони та іони, які також прискорюються електричним полем і вже самі іонізують нові молекули газу. У процесі іонізації беруть участь як електрони, так і додатні іони. Процес наростає лавиноподібно і він є причиною збільшення електричного струму (область CD).

Щоб розряд був самостійним, утворення тільки електронних та іонних лавин є необхідною, але недостатньою умовою. Необхідно також, щоб при вимкненому зовнішньому іонізаторі в газі відтворюва-

лись нові електрони замість тих, які перейшли на анод. Ці електрони вибиваються з поверхні катода позитивними іонами, які рухаються до катода під дією електричного поля. Явище вибивання електрона з поверхні катода називається *вторинною електронною емісією*. Крім того, іони й електрони, енергія яких недостатня для ударної іонізації, можуть при зіткненнях з молекулами приводити їх у збуджений стан. Збуджені молекули переходять потім у нормальний стан, випромінюючи фотон. Молекула газу, поглинаючи фотон, іонізується. Така *іонізація* називається *фотонною*. Безпосередню фотоіонізацію здатне викликати ультрафіолетове випромінювання. Енергія фотона видимого світла недостатня для відщеплення електрона від молекули. Але видиме випромінювання може обумовити так звану *ступенева фотоіонізацію*. Цей процес відбувається в два етапи. На першому етапі фотон переводить молекулу у збуджений стан, на другому – відбувається іонізація молекули за рахунок її співудару з іншою молекулою. Фотон, потрапляючи на катод, може вибивати з нього електрон (зовнішній фотоефект), який потім викличе ударну іонізацію нейтральної молекули. При великих напругах між електродами і позитивні іони набувають енергії, яка достатня для іонізації молекул газу, і до катода будуть рухатись іонні лавини. Коли виникають, крім електронних лавин, ще й іонні, сила струму збільшується уже практично без зростання напруги U (ділянка DE).

Напруга запалювання U_z залежить від хімічної природи газу, матеріалу катода, тиску газу і віддалі між електродами трубки.

ПУЛОЙ ІВАН ПАВЛОВИЧ
(1845-1918)

Встановив, що у вакуумних приладах з ізолюваними електродами під дією невидимих променів виникає розрядний струм і викликане ним свічення розріджених газів, отже, була виявлена провідність газу, зумовлена новими променями, тобто встановлена їх іонізуюча здатність.

§63. Види самостійного розряду

1. Тліючий розряд

Тліючий розряд спостерігається в газах при низьких тисках (порядку кількох десятків міліметрів ртутного стовпа).

Основними частинами тліючого розряду є (рис. 155):

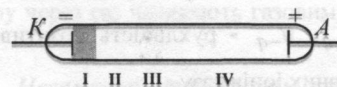


Рис. 155

I – катодний темний простір;

II – різко відділене від катодного простору тліюче свічення, яке поступово переходить в область III;

III – область фарадеевого темного простору;

IV – додатний позитивний стовп – стовп газу, який світиться і який визначає оптичні властивості газу.

Області I-II-III утворюють катодну частину розряду.

В області I відбувається сильне прискорення позитивних іонів, які вибивають електрони з катода, і електронів, які вилетіли з катода.

В області II електрони спричинюють інтенсивну ударну іонізацію молекул газу і втрачають свою енергію. Тут утворюються позитивні іони, необхідні для того, щоб підтримувати розряд. Тліюче свічення в цій області є результатом рекомбінації електронів та іонів.

Область III – це область, куди не долітають швидкі електрони.

Область IV – стовп іонізованого газу, який світиться за рахунок переходу молекул із збудженого стану в основний і за рахунок рекомбінації.

Позитивний стовп не відіграє істотної ролі в підтриманні тліючого розряду, тому при зменшенні відстані між електродами трубки довжина позитивного стовпа скорочується і він може зникнути зовсім.

Довжина катодного темного простору I при зближенні електродів не змінюється. Якщо електроди наблизити так, що відстань між ними стане меншою, ніж довжина катодного темного простору, то тліючий розряд у газі зникне. Досліди показують, що довжина катодного темного простору обернено пропорційна до тиску газу. При досить низьких тисках електрони, вибиті з катода позитивними іонами, проходять газ майже без зіткнень з його молекулами.

Тліючий розряд використовують в лампах денного світла, стабілізаторах напруги, катодному розпиленні матеріалів, рекламних газорозрядних трубках.

2. Іскровий розряд

Якщо в газі при нормальному тиску утворити електричне поле з напруженістю, не меншою за пробивне значення (для повітря $3 \cdot 10^6 \frac{В}{м}$), то між електродами виникає самостійний електричний розряд, який називається іскровим.

У природних умовах іскровий розряд спостерігається у вигляді блискавки.

Іскровий розряд має вигляд пучка яскравих зигзагоподібних розгалужених тонких ниток (рис. 156), які пронизують розрядний проміжок, швидко гаснуть і замінюються новими. Ці нитки називаються іскровими каналами. Вони починаються як

від позитивного, так і від негативного електродів, а також від довільної точки між ними.



Рис. 156

Внаслідок проходження імпульсу через канал іскри в каналі виділяється велика кількість енергії. Виділення енергії супроводжується стрибкоподібним збільшенням тиску в оточуючому газі і утворенням циліндричної ударної хвилі, температура на фронті якої $\approx 10^4 K$. Виникненням ударних хвиль пояснюються звукові ефекти, що супроводжують іскровий розряд: потріскування при слабких розрядах і грім у разі блискавки.

Зупинимось на механізмі іскрового розряду. Нехай напруженість поля є такою, що електрон, який вилетів за рахунок якого-небудь процесу із катода, отримує на шляху вільного пробігу енергію, яка достатня для іонізації. Тому відбувається розмноження електронів – виникає лавина. Якщо поблизу катода зародилась електронна лавина, то на її шляху відбувається іонізація і збудження молекул і атомів газу, які світяться і називаються **стримерами**. Розвиваючись, окремі електронні лавини доганяють одна одну і, зливаючись разом, утворюють хороший провідний місток із стримерів. По цьому містку в наступний момент часу поширюється потужний потік електронів, що утворює канал іскрового розряду. В стримерах електричний струм поширюється з швидкістю електромагнітних хвиль.

При малій довжині розрядного проміжку іскровий розряд викликає специфічне руйнування анода. Це явище ви-

користують в електроіскровому методі різання, свердління та інших видах точної обробки металу. Іскровий проміжок застосовують як запобіжник від перенапруг в електричних лініях передач (наприклад, у телефонних лініях).

3. Коронний розряд

Коронний розряд виникає при нормальному тиску в газі, що знаходиться в дуже неоднорідному електричному полі, наприклад, поблизу ліній проводів високої напруги. При коронному розряді іонізація і світіння газу відбуваються лише поблизу електрода з малим радіусом кривини. Свічення має вигляд корони, що оточує електрод.

Якщо корона виникає навколо негативного електрода, то вона називається негативною. В протилежному випадку корона називається позитивною.

У випадку негативної корони позитивні іони, що прискорені неоднорідним полем, вибивають із катода електрони, які викликають іонізацію і збудження молекул в коронуючому шарі. В зовнішній області корони поле недостатнє для того, щоб надати електронам енергію, яка необхідна для іонізації або збудження молекул. Електрони, що потрапили в цю область, дрейфують під дією поля до анода. Частина електронів захоплюється молекулами, внаслідок чого утворюються негативні іони. Струм у зовнішній області зумовлюється лише негативними носіями-електронами і негативними іонами. У цій області розряд має самостійний характер.

У позитивній короні електронні лавини зароджуються біля зовнішньої границі корони. Електрони виникають внаслідок фотоіонізації, яка викликана випромінюванням коронуючого шару. Ці електро-

ни рухаються до анода, який коронує. Носіями струму у зовнішній області корони є позитивні іони, які дрейфують під дією поля до катода.

У лініях високовольтних передач коронний розряд спричиняє шкідливі витоки струму і втрати електричної енергії. Щоб зменшити коронування, проводи високовольтних ліній беруть досить великого діаметра, а їхні поверхні виготовляють гладкими.

4. Дуговий розряд

Дуговий розряд можна отримати від джерела низької напруги. Для цього електроди наближають до дотику. В місці дотику вони дуже розжарюються електричним струмом за рахунок великого опору, після чого їх розводять, отримуючи яскраву електричну дугу.

Електрична дуга є однією з форм газового розряду, який відбувається при великій густині струму і порівняно невеликій напрузі між електродами (порядку кількох десятків вольт). Встановлено, що основною причиною дугового розряду є інтенсивне випромінювання термоелектронів розжареним катодом і термічна іонізація молекул, яка обумовлена високою температурою у міжелектродному проміжку. Завдяки цьому електричний опір газового проміжку між електродами дуги порівняно малий. При атмосферному тиску температура катода досягає 3000°C . Електрони, бомбардуючи анод, утворюють у ньому кратер і нагрівають його. Температура кратера при великих тисках повітря досягає $6000-7000^{\circ}\text{C}$. Температура газу в каналі електричної дуги становить $5000-7000^{\circ}\text{C}$.

Сила струму в дузі може досягати значень порядку 10^3-10^4 А при напрузі в

декілька десятків вольт.

При зростанні розрядного струму опір дуги зменшується внаслідок збільшення термоелектронної емісії з катода й іонізації газу в розрядному проміжку. При цьому опір зменшується більше, ніж зростає струм.

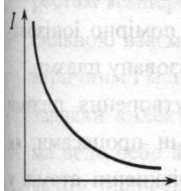


Рис. 157

Внаслідок цього із збільшенням струму I напруга на розрядному проміжку не зростає, а зменшується. Тому вольт-амперну характеристику дугового розряду (рис. 157) називають падаючою.

Дуговий розряд використовують як джерело світла, для зварювання і різання металів, в дугових печах для виплавки сталі, чавуну, отримання карбіду кальцію, оксиду азоту.

ПУЛОЙ ІВАН ПАВЛОВИЧ
(1845-1918)

Встановив, що місцем утворення катодних променів, які при значному тиску викликають світіння газу, а при низькому – світіння скляних стінок та електродів, є катод. Стверджуючи, що катодні промені – це негативно заряджені частинки електродів, Пулой наблизився до правильного розуміння їх природи (як пучка електронів). Сконструював газорозрядні трубки різних типів.

ГРУЗИНЦЕВ ОЛЕКСІЙ ПЕТРОВИЧ
(1851-1919)

Автор праці “Експериментальні дослідження дії променів радіо на розрядний потенціал”, яка виконана у 1901-1902рр. і була одною з перших у вивченні дії радіоактивного випромінювання на іскровий розряд.

Описано дослідні методи спостереження іскрового розряду за наявності та відсутності радіації, врахування впливу зовнішніх факторів (вологості та тиску повітря), інтерполяцій та визначення точності результатів.

БЕНАРДОС МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ
(1842-1905)

Розробив спосіб електричного зварювання металів, використавши електричну дугу, що виникає між вугільним електродом з іншого провідника і оброблюваним металевим виробом.

ШВЕДОВ ФЕДІР НИКИФОРОВИЧ
(1840-1905)

Запропонував (1905 р.) першу кількісну теорію самостійного (іскрового) розряду. В роботі

„Балістична теорія іскрового розряду” з’ясовано механізм виникнення іскри та вплив різних факторів на цей процес; досліджено властивості іскри при різних значеннях напруженості електричного поля або розрядного потенціалу; виведено основне рівняння теорії та проведено його обґрунтування експериментальними даними.

РОЖАНСЬКИЙ ДМИТРО АПОЛІНАРІЙОВИЧ
(1882-1936)

Глибоко вивчив процеси, що відбуваються в іскрі при високочастотному коливальному розряді конденсатора, розкрив природу іскрового розряду.

§64. Плазма

Плазмою називається квазінейтральний іонізований газ, тобто частково або повністю іонізований газ, в якому об’ємна густина позитивних ρ_+ і негативних ρ_- зарядів практично однакова за абсолютною величиною:

$$\rho_+ = |\rho_-| \text{ або } \rho_+ + \rho_- = 0.$$

Внаслідок теплового руху іонів і електронів миттєві значення ρ_+ і ρ_- здійснюють неперервні коливання. Тому іонізований газ можна вважати плазмою, якщо його об’єм V у багато разів більший від об’ємів D^3 областей газу, в яких можливі помітні випадкові відхилення від нуля суми позитивних і негативних зарядів, що зумовлені тепловим рухом іонів і електронів: $V \gg D^3$, де D – характерний розмір, який називається *дебаївським радіусом екранування*.

Дебаївський радіус екранування залежить від температури T плазми, зарядів і концентрації електронів та іонів. Найпростіша ізотермічна плазма складається із електронів і однозарядних іонів. Оскільки плазма квазінейтральна, то концентрації електронів та іонів однакові і дорівнюють n_0 . Для такої плазми дебаївський радіус екранування

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 e^2}}.$$

У плазмі довільна частинка Q (додатний іон або електрон) оточена переважно частинками, заряди яких протилежні за знаком заряду частинки Q . Ці заряди зменшують (екранують) поле частинки Q в плазмі. Потенціал φ поля точкового заряду q в плазмі визначається співвідношенням

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{D}},$$

де r – відстань від заряду q . Якщо заряджена частинка A плазми знаходилась би у вакуумі, то потенціал φ_0 її електричного поля дорівнював

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отже, потенціал φ поля зменшується із віддаллю r значно швидше, ніж φ_0 у вакуумі. Наближено можна вважати, що на відстанях $r > D$ електричне поле в плазмі повністю екранується.

Плазма називається ідеальною або газовою, якщо потенціальна енергія кулонівської взаємодії двох частинок плазми, що знаходяться на середній відстані $\langle r \rangle = n_0^{-\frac{1}{3}}$, мала порівняно з їх кінетичною енергією теплового руху:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle} = \frac{e^2 n_0^{\frac{1}{3}}}{4\pi\epsilon_0} \ll kT.$$

Ця умова виконується, якщо в плазмі число N_D частинок одного знака (N_D – дебаївське число), що знаходиться всередині сфери радіуса D , досить велике:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi D^3 n_0 \gg 1.$$

Термодинамічні властивості ідеальної плазми описуються рівнянням, що опи-

сує ідеальний газ:

$$p = n_0 kT.$$

Ступенем іонізації плазми α називається відношення кількості іонізованих атомів до їх загальної кількості в плазмі.

Залежно від ступеня іонізації розрізняють слабоіонізовану плазму, помірно іонізовану плазму і повністю іонізовану плазму.

Іонізація газу і утворення плазми може викликатись такими процесами, як термічна іонізація при зіткненні атомів у досить сильно нагрітому газі; ударна іонізація зарядженими частинками; фотоіонізація.

Якщо середні енергії теплового руху різних видів частинок (електронів, іонів і атомів) неоднакові, то така термодинамічна невірноважена плазма називається неізотермічною плазмою.

Таку плазму не можна охарактеризувати за допомогою одного певного значення температури. У такому разі електронний газ характеризується температурою T_e , а іони – температурою T_i . Ці температури можуть істотно відрізнятись. Залежно від значення іонної температури розрізняють низькотемпературну плазму ($T_i < 10^5 \text{ K}$) і високотемпературну плазму ($T_i > 10^7 \text{ K}$).

Для неізотермічної плазми з однозарядними іонами концентрації електронів та іонів однакові, а дебаївський радіус екранування

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT_i}{n_0 e^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)}}.$$

Плазма характеризується такими основними властивостями:

- високим ступенем іонізації газу;

- однаковими об'ємними густинами позитивних і негативних зарядів;
- незалежністю питомої електричної провідності повністю іонізованої плазми від густини плазми і збільшенням з ростом температури пропорційно $T^{3/2}$;
- сильною взаємодією із зовнішніми електричним і магнітним полями;
- завдяки колективним взаємодіям плазма веде себе як пружне середовище, в якому збуджуються і поширюються різні коливання і хвилі.

У стані плазми знаходиться більшість речовин Всесвіту – зірки, зоряні атмосфери, галактичні туманності і міжзоряне середовище. В навколосезному просторі слабоіонізована плазма знаходиться в радіаційних поясах та іоносфері Землі. З процесами, що відбуваються в цій плазмі, пов'язані такі явища, як магнітні бурі, порушення далекого радіозв'язку і полярні сяйва.

V. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§65. Магнітне поле. Магнітна індукція.

Досліди показали, що навколо провідників зі струмом і постійних магнітів існує *магнітне поле*, яке можна виявити за силовою дією, якою воно впливає на інші провідники зі струмом або постійні магніти.

Якщо підвісити заряджену кульку на нитці коло магнітної стрілки, то не помітимо будь-якої дії з боку нерухомих електричних зарядів кульки на магнітну стрілку. У свою чергу, магнітне поле стрілки не діє на заряджену кульку. Отже, нерухомі електричні заряди не створюють магнітного поля і постійне магнітне поле не діє на нерухомі електричні заряди.

А якщо пропустити постійний струм I через провідник, то магнітна стрілка повернеться навколо своєї осі так, щоб стати перпендикулярно до провідника зі струмом (рис. 158).

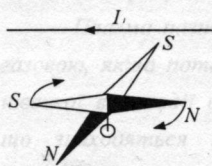


Рис. 158

Це явище відкрив Ерстед. Він виявив, що напрямок повороту північного полюсу стрілки змінюється

на протилежний, якщо змінити напрямок струму в провіднику.

Струм у провіднику - впорядкований рух електричних зарядів. Навколо всякого рухомого заряду існує магнітне поле. При цьому матеріал провідника і характер його провідності, а також процеси, що відбуваються в ньому, ніякої ролі не відіграють.

Отже, навколо будь-якого рухомого заряду, чи то буде електрон, іон або заряджене тіло, крім електричного поля, існує

також і магнітне поле.

Електричне поле діє як на рухомі, так і на нерухомі електричні заряди. Магнітне поле діє лише на рухомі в цьому полі електричні заряди.

Щоб охарактеризувати магнітне поле, треба розглянути його дію на певний струм. Розглянемо замкнений плоский контур зі струмом, розміри якого малі порівняно з відстанню до струмів, що утворюють поле. За позитивний напрямок нормалі приймається напрямок поступального руху свердлика, головка якого обертається в напрямку струму, що тече в контурі (рис. 159).

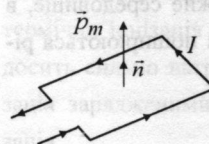


Рис. 159

Контур зі струмом характеризується *магнітним моментом* \vec{P}_m , який дорівнює добутку сили струму I , що протікає у контурі, на площу поверхні контуру S :

$$\vec{P}_m = I S \vec{n},$$

де \vec{n} одиничний вектор нормалі до поверхні рамки. Напрямок вектора \vec{P}_m збігається з напрямком позитивної нормалі рамки.

Контур зі струмом в магнітному полі повертається, набуваючи рівноважного положення і його позитивна нормаль розміщується вздовж осі стрілки в напрямку від її магнітного полюса (рис. 160).

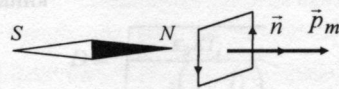


Рис. 160

Контуром зі струмом можна скористатись і для кількісного опису магнітного поля. На контур в магнітному полі діє пара сил. Обертальний момент сил M за-

лежить від властивостей контуру:

$$M \sim p_m.$$

Якщо контур зі струмом повернути на 90° від рівноважного положення, то на нього буде діяти максимальний обертальний момент M_{max} .

Якщо в дане місце магнітного поля поміщати контури з різними магнітними моментами, то на них діятимуть різні обертальні моменти, але відношення M_{max}/p_m для всіх контурів однакове і служить кількісною характеристикою магнітного поля:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}.$$

Магнітна індукція \vec{B} в даному місці магнітного поля визначається максимальним обертальним моментом, що діє на контур з одиничним магнітним моментом.

Одиниця магнітної індукції – тесла: 1 Тл – магнітна індукція такого магнітного поля, в якому на рамку з магнітним моментом $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ діє максимальний момент сили $1 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

За напрямком магнітної індукції \vec{B} приймається напрямком магнітного моменту контуру p_m , який знаходиться в рівноважному положенні у цьому полі.

Для графічного зображення магнітних полів зручно користуватись лініями магнітної індукції.

Лініями магнітної індукції називають такі лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком вектора \vec{B} в цих точках поля.

Напрямок ліній індукції магнітного поля струму визначається за правилом свердлика: якщо вкручувати свердлик за напрямком руху струму в провіднику, то

напрямок руху його рукоятки покаже напрям ліній магнітної індукції.

Лінії магнітної індукції можна спостерігати за допомогою дрібних металевих ошурків, які в магнітному полі поводять себе, як маленькі магнітні стрілки.

Вигляд ліній магнітної індукції простих магнітних полів показаний на рис. 161.

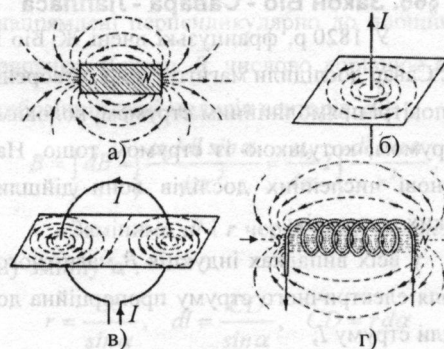


Рис. 161

Лінії магнітної індукції охоплюють провідник зі струмом, який створює поле. Поблизу провідника лінії лежать в площині, що перпендикулярна до провідника.

Лінії індукції магнітного поля ні в яких точках не можуть обриватися, вони завжди замкнені. Лінії індукцій постійного магніту (рис. 161а) виходять із його північного полюса і входять у південний.

Магнітне поле соленоїда, тобто довгої котушки зі струмом (рис. 161г), подібне до магнітного поля штабового магніту. Північний полюс магніту збігається з тим кінцем соленоїда, з якого струм у витках тече проти годинникової стрілки. Магнітне поле колового струму (рис. 161в), який є одним витком соленоїда, подібне на поле дуже короткого штабового магніту, що розташований в центрі витка, так щоб його вісь була перпендикулярна до площини

витка.

Пильчиков Микола Дмитрович
(1857-1908)

Заклав основи теорії аномалій геомагнетизму і вперше науково обґрунтував наявність „щонайбагатших покладів залізної руди” в межах Курської магнітної аномалії.

Жмудський Олександр Захарович
(нар. 1910 р.)

Відкрив наявність магнітних полів у мільярди ерстед, які створюються швидкими електронами на відстанях, що менші атомних.

§66. Закон Біо - Савара - Лапласа

У 1820 р. французькі вчені Ж. Біо і Ф. Савар дослідили магнітні поля, створені в повітрі прямолінійним струмом, коловим струмом, котушкою із струмом тощо. На основі численних дослідів вони дійшли таких висновків:

- у всіх випадках індукція B магнітного поля електричного струму пропорційна до сили струму I ;
- магнітна індукція залежить від форми і розмірів провідника зі струмом;
- магнітна індукція B у будь-якій точці поля залежить від розташування цієї точки відносно провідника зі струмом.

Біо і Савар намагалися знайти загальний закон, який дав би змогу обчислити магнітну індукцію в кожній точці поля, створеного електричним струмом, що протікає по провіднику будь-якої форми. Однак зробити це їм не вдалося. Розв'язав це завдання П. Лаплас.

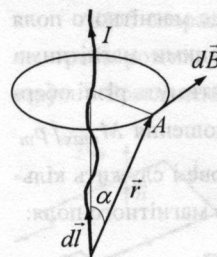
Лаплас узагальнив результати експериментів Біо і Савара у вигляді диференціального закону, який називається законом **Біо - Савара - Лапласа**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3},$$

де $d\vec{l}$ – вектор, що числово дорівнює довжині dl елемента провідника і збігається за напрямком з напрямком електричного струму, \vec{r} – радіус-вектор, проведений від

елемента провідника dl до точки поля A , що розглядається (рис. 162), μ_0 – магнітна стала.

Отже, модуль індукції $d\vec{B}$ магнітного поля малого елемента dl провідника зі струмом прямо пропорційний до сили струму I , довжини елемента dl провідника, обернено пропорційний до квадрата відстані r від елемента провідника до розглядуваної точки поля, а також



залежить від кута α між напрямками струму і радіус-вектора \vec{r} (рис. 162):

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Напрямок вектора $d\vec{B}$ перпендикулярний до $d\vec{l}$ і \vec{r} , тобто перпендикулярний до площини, в якій вони лежать, і збігається з дотичною до лінії магнітної індукції. Напрямок $d\vec{B}$ визначається з векторного добутку $[d\vec{l} \vec{r}]$ і може бути знайдений за правилом свердлика.

Закон Біо-Савара-Лапласа дає змогу розрахувати індукцію магнітного поля електричного струму, що проходить по провіднику скінченних розмірів і будь-якої форми.

Дослід показує, що для магнітного поля справедливий **принцип суперпозиції**:

магнітна індукція поля, яке створено декількома струмами або рухомими зарядами, дорівнює векторній сумі індукцій магнітних полів, що створені кожним струмом або рухомими зарядом окремо.

Відповідно до принципу суперпозиції магнітна індукція \vec{B} у будь-якій точ-

ці магнітного поля провідника зі струмом I дорівнює векторній сумі індукцій $\Delta \vec{B}_i$ елементарних магнітних полів, створених окремими ділянками Δl_i цього провідника:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{B}_i.$$

Необмежено збільшуючи кількість ділянок n і переходячи до границі при n , що прямує до нескінченності, можна замінити суму інтегралом:

$$\vec{B} = \int d\vec{B},$$

Отже, магнітна індукція поля, яке створене у вакуумі струмом I , що тече по провіднику скінченної довжини і довільної форми, дорівнює

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Розрахунок характеристик магнітного поля за наведеними формулами в загальному випадку досить складний. Однак, якщо розподіл струму має певну симетрію, то застосування закону Біо-Савара-Лапласа разом з принципом суперпозиції дає змогу досить просто розрахувати магнітну індукцію конкретних полів.

1. Магнітне поле прямолінійного провідника зі струмом.

Розглянемо **прямий провідник** довільної довжини, по

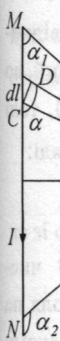


Рис. 163

якому проходить струм силою I , наприклад згори вниз (рис. 163). Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа вектор магнітної індукції $d\vec{B}$ поля у вакуумі, створеного в точці A

елементом dl провідника зі струмом I , числово дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} .

У точці A , яка знаходиться на відстані R від осі провідника, всі вектори $d\vec{B}$, які характеризують магнітні поля, створені окремими ділянками цього провідника, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка. Вектор \vec{B} числово дорівнює алгебраїчній сумі модулів векторів $d\vec{B}$:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}.$$

Замінімо dl і r через одну незалежну змінну α :

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{CD}{\sin \alpha}, \quad CD = r d\alpha.$$

Тоді:

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

У результаті індукція магнітного поля прямолінійного провідника MN у точці A дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R d\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \frac{R^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Якщо провідник MN нескінченно довгий, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$.

Отже, магнітна індукція нескінченно довгого провідника зі струмом дорівнює ($\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$),

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

2. Магнітне поле колового струму.

Знайдемо індукцію магнітного поля в центрі O , **колового струму** радіусом R ,

по якому протікає струм I (рис. 164):

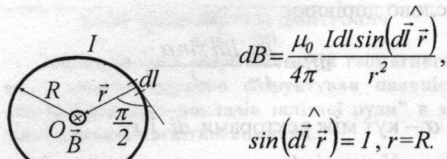


Рис. 164

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin(\widehat{dl \vec{r}})}{4\pi r^2},$$

$$\sin(\widehat{dl \vec{r}}) = I, r = R.$$

Тоді

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}.$$

Усі вектори $d\vec{B}$ магнітних полів, які створені в точці O різними ділянками $d\vec{l}$ колового струму, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка „від нас”. Тоді:

$$B = \int_0^{2\pi R} dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R.$$

Отже, магнітна індукція поля колового струму дорівнює:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

§67. Закон Ампера

На провідники зі струмом, що знаходяться в магнітному полі, діють **сили Ампера**.

Узагальнюючи результати дослідження дії магнітного поля на різні провідники зі струмом, Ампер встановив, що

сила $d\vec{F}$, з якою магнітне поле діє на елемент довжини dl провідника зі струмом, що знаходиться в магнітному полі, прямо пропорційна до сили струму I в провіднику і до векторного добутку елемента довжини $d\vec{l}$ на магнітну індукцію \vec{B} :

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}].$$

Це співвідношення називається **законом Ампера**.

Напрямок сили $d\vec{F}$ можна знайти за правилом векторного добутку і за правилом лівої руки: якщо долоню лівої руки поставити так, щоб у неї входили лінії ма-

гнітної індукції, а чотири витягнуті пальці спрямувати в напрямку електричного струму в провіднику, то відставлений на 90° великий палець покаже напрямок сили, що діє на провідник з боку поля. Це правило зручне, коли елемент провідника зі струмом перпендикулярний до напрямку магнітного поля.

В загальному випадку для визначення напрямку сили Ампера $d\vec{F}$ слід скористатись правилом векторного добутку: вектор $d\vec{F}$ напрямлений перпендикулярно до площини, утвореної векторами $d\vec{l}$ і \vec{B} так, щоб з кінця вектора $d\vec{F}$ обертання від вектора $d\vec{l}$ до вектора \vec{B} найкоротшим шляхом відбувалося проти годинникової стрілки (рис. 165).

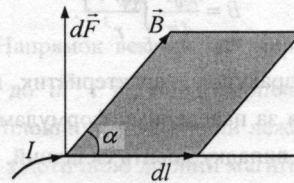


Рис. 165

Модуль сили Ампера розраховується за формулою

$$dF = IB dl \sin \alpha,$$

де α - кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{B} .

Закон Ампера дає змогу визначити іншим способом, ніж раніше, фізичний зміст магнітної індукції \vec{B} .

Припустимо, що елемент провідника dl із струмом I перпендикулярний до напрямку магнітного поля ($\sin \alpha = 1$), тоді закон Ампера можна записати у вигляді:

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF_{max}}{dl}.$$

Звідси, **магнітна індукція \vec{B}** числово дорівнює силі, що діє з боку поля на одиницю довжини провідника, по якому

протікає електричний струм одиничної сили і який розташовано перпендикулярно до напрямку магнітного поля.

Отже, *магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля.*

Використовуючи закон Ампера, розраховуємо силу взаємодії між двома прямими нескінченно довгими провідниками зі струмами I_1 і I_2 , які розміщені паралельно один до одного на відстані R . Кожен із провідників створює магнітне поле, яке діє згідно закону Ампера на другий провідник. Якщо електричні струми I_1 і I_2 однакового напрямку, то провідники притягуються один до одного (рис. 166а), а якщо напрямки струмів взаємно протилежні, то провідники відштовхуються один від одного (рис. 166б).

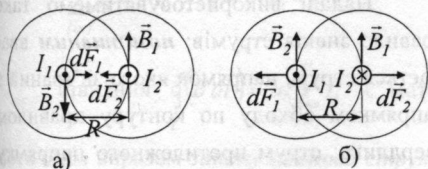


Рис. 166

За законом Ампера на елемент $d\vec{l}$ провідника зі струмом I_2 діє сила $d\vec{F}_2$, яка числово дорівнює:

$$dF_2 = I_2 B_1 dl \sin \alpha,$$

де $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R}$ - магнітна індукція поля, створеного струмом I_1 , враховуючи, що кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{B}_1 - прямий, отримуємо:

$$d\vec{F}_2 = |d\vec{F}_2| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

Відповідно на ділянку dl провідника зі струмом I_1 діє сила $d\vec{F}_1$, модуль якої:

$$d\vec{F}_1 = |d\vec{F}_1| = I_1 B_2 dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

Отже, для сил $d\vec{F}_1$ і $d\vec{F}_2$ можна написати загальну формулу:

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

§68. Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі. Вихровий характер магнітного поля.

Введемо циркуляцію вектора магнітної індукції. Циркуляцією вектора \vec{B} по замкненому контуру називається інтеграл

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl,$$

де $d\vec{l}$ - вектор елемента довжини контуру, напрямлений вздовж обходу контуру, $B_l = B \cos \alpha$ - проекція вектора \vec{B} на дотичну до контуру, α - кут між векторами \vec{B} і $d\vec{l}$.

Розглянемо магнітне поле нескінченного прямолінійного провідника зі струмом I , що знаходиться у вакуумі (рис. 167).

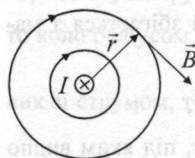


Рис. 167

Лінії магнітної індукції цього поля є кола, площини яких перпендикулярні до провідника, а центри лежать на осі провідника.

Знайдемо циркуляцію вектора \vec{B} вздовж кола радіуса r . У всіх точках кола вектор \vec{B} числово дорівнює $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}$ і напрямлений по дотичній до кола, тому $\cos \alpha = 1$.

Тоді

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0}{2\pi r} I dl = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I.$$

Звідси можна зробити два висновки:

1. *Магнітне поле прямолінійного струму - вихрове поле, бо циркуляція вектора \vec{B} вздовж лінії індукції не дорівнює 0;*

2. Циркуляція вектора \vec{B} магнітної індукції поля прямолінійного струму однакова вздовж будь-якої лінії індукції і дорівнює $\mu_0 I$.

Цю формулу можна використати до замкнутого контуру L довільної форми, який охоплює нескінченно довгий прямолінійний провідник зі струмом I (рис. 168).

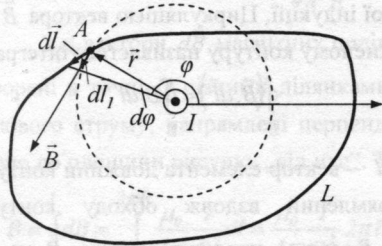


Рис. 168

У точці A контуру L вектор індукції \vec{B} перпендикулярний до радіус-вектора \vec{r} . Проекція $d\vec{l}$ на напрямок вектора \vec{B} дорівнює $dl_1 = dl \cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}})$ і збігається з малою дугою кола радіуса r :

$$dl_1 = r d\varphi,$$

де $d\varphi$ – центральний кут, під яким видно dl елемент контуру L з центром кола. Тоді

$$B dl \cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi.$$

Інтегруючи вздовж всього замкнутого контуру L і враховуючи, що при цьому кут φ змінюється від 0 до 2π , знаходимо

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \oint_L B dl \cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

Якщо контур L_1 не охоплює провідник зі струмом (рис. 169), то

$$\oint_{L_1} B dl \cos \alpha = \int_{1a}^2 B dl \cos \alpha + \int_{2b}^1 B dl \cos \alpha =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = 0.$$

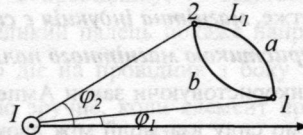


Рис. 169

У всіх випадках, які розглядались вище, кут α гострий, тобто з кінця вектора густини струму \vec{j} , напрямленого по осі провідника в бік струму, обхід по контуру L відбувається проти годинникової стрілки. При протилежному напрямку обходу контуру L або при протилежному напрямку струму в провіднику отримуємо

$$\oint_L B dl \cos \alpha = -\mu_0 I.$$

Надалі використовуватимемо таке правило знаків струмів: **позитивним** вважається струм, напрямком якого зв'язаний з напрямком обходу по контуру правилом свердлика; струм протилежного напрямку вважається **негативним**.

На практиці магнітне поле, переважно, створюється кількома провідниками, по яких проходять струми I_1, I_2, I_3 тощо. На основі принципу суперпозиції магнітна індукція \vec{B} результуючого поля дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

Тоді

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L \sum_{i=1}^n B_i dl \cos \alpha = \sum_{i=1}^n \oint_L B_i dl \cos \alpha.$$

Кожен з інтегралів, що стоїть під знаком суми, дорівнює або $\mu_0 I$, якщо струм охоплюється контуром, або 0 , якщо струм не охоплюється контуром. Отже,

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

де n – кількість провідників зі струмами, що охоплюються контуром L довільної форми. Кожний струм враховується стільки разів, скільки разів він охоплюється контуром.

Наприклад, для системи струмів, зображених на рис. 170, алгебраїчна сума струмів

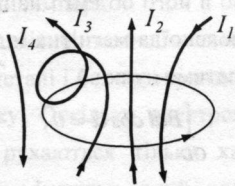


Рис. 170

$$\sum_{i=1}^n I_i = -I_1 + I_2 + 2 \cdot I_3 - 0 \cdot I_4.$$

Рівняння $\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$ є мате-

матичним виразом **закона повного струму** для струмів провідності:

циркуляція вектора \vec{B} по довільному замкненому контуру дорівнює добутку магнітної сталої μ_0 на алгебраїчну суму струмів, що охоплюються цим контуром.

Отриманий вираз закону повного струму справедливий лише для **магнітного поля у вакуумі**, оскільки для поля у речовині слід враховувати молекулярні струми.

§69. Магнітне поле тороїда і довгого соленоїда

Закон повного струму

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

можна використати для розрахунку магнітних полів тороїда і довгого соленоїда.

Тороїдом називають кільцеву катушку, витки якої намотано на осердя, що має форму тора (рис. 171а). Лінії магнітної індукції поля тороїда повинні мати форму кіл, центри яких лежать на прямій, що проходить через центр тороїда і перпендикулярна до площини рисунка.

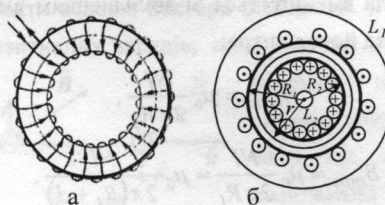


Рис. 171

Циркуляція вектора \vec{B} вздовж кола радіусом r дорівнює (рис. 171б):

$$\oint_L B dl \cos \alpha = B \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r B.$$

Позначимо кількість витків обмотки тороїда N , а струм у ній - I . Якщо $r < R_2$, то коло радіусом r (L_2) не охоплює провідник зі струмом, тому $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ і за законом

повного струму $\oint_L B dl \cos \alpha = 2\pi r B = 0$, тобто $B = 0$.

Якщо $r > R_1$, то коло радіусом r (L_1) охоплює $2N$ провідників зі струмом I . В N з них струм іде в одному напрямку, а в інших N провідниках – у зворотному. Тому алгебраїчна сума струмів у всіх провідниках дорівнює нулю. Й із закону повного струму $2\pi r B = 0$ і $B = 0$.

Отже, поза тороїдом магнітного поля нема. Воно цілком локалізується всередині об'єму тороїда ($R_2 < r < R_1$). Коло радіусом r , яке лежить всередині тороїда, охоплює N провідників, струми в яких дорівнюють I і однаково напрямлені. Тому

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 NI.$$

Отже,

$$2\pi Br = \mu_0 NI \quad \text{і} \quad B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}.$$

Магнітна індукція поля всередині тороїда зменшується зі збільшенням відстані від його центра:

$$B_{max} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R_2},$$

$$B_{min} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R_1} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi(R_2 + d)},$$

де d – діаметр тора.

Індукція на основній лінії тороїда

$$r = R_{cp} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

дорівнює

$$B_{cp} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R_{cp}} = \mu_0 nI,$$

де n – кількість витків на одиницю довжини середньої лінії тороїда.

Розглянемо магнітну індукцію поля всередині *соленоїда* (рис. 172) – циліндричної котушки, яка складається з великої кількості витків, рівномірно намотаних на загальне осердя. Розглянемо соленоїд завдовжки l , що має N витків, по якому тече струм.

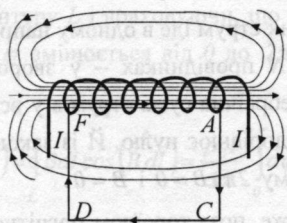


Рис. 172

Циркуляція вектора \vec{B} вздовж контуру у вигляді прямокутника $ACDF$, в якому сторона CD дуже віддалена від соленоїда і який охоплює всі N витків соленоїда,

дорівнює

$$\oint_{ACDFA} B dl \cos \alpha = \mu_0 NI.$$

Інтеграл вздовж контуру $ACDA$ можна подати у вигляді чотирьох інтегралів:

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \int_{DF} B dl \cos \alpha + \int_{FA} B dl \cos \alpha + \int_{AC} B dl \cos \alpha + \int_{CD} B dl \cos \alpha.$$

Магнітне поле соленоїда практично локалізовано в його об'ємі і на великій відстані від соленоїда магнітна індукція поля дорівнюватиме нулю:

$$\int_{CD} B dl \cos \alpha = 0,$$

А також

$$\int_{DF} B dl \cos \alpha = \int_{AC} B dl \cos \alpha = 0,$$

тому що $\cos \alpha = 0$. Тоді

$$\oint_L B dl \cos \alpha \approx \int_{FA} B dl \cos \alpha.$$

Вектори магнітної індукції в усіх точках всередині довгого соленоїда однакові, тобто числово рівні і мають однакові напрямки. Таке магнітне поле називається *однорідним*. Крім того, напрямки вектора індукції та переміщення збігаються, тому $\cos \alpha = 1$. Отже,

$$\oint_{FA} B dl = B \int_0^l dl = Bl = \mu_0 IN.$$

В результаті магнітна індукція поля всередині соленоїда у вакуумі дорівнює:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI,$$

де n – число витків на одиницю довжини соленоїда.

§70. Сила Лоренца

Виникнення макроскопічної сили Ампера, що діє на провідник із струмом у

магнітному полі, можна пояснити так. При проходженні струму носії заряду в провіднику рухаються напрямлено. Тому магнітне поле відхиляє їх в один бік. При цьому вони стикаються з кристалічною ґраткою металу і передають їй певний імпульс, якого набули під дією магнітного поля. Макроскопічним результатом елементарних процесів зіткнення окремих носіїв заряду з кристалічною ґраткою провідника є виникнення сили Ампера.

Магнітне поле діє на вільні електрони в металі і без електричного струму в провіднику. Оскільки електрони в цьому випадку рухаються тільки хаотично, то сумарний імпульс, який вони надають кристалічній ґратці провідника, дорівнює нулю і провідник залишається нерухомим.

Для обчислення сили, що діє на рухомий заряд в магнітному полі, розглянемо елемент провідника dl зі струмом I у магнітному полі з індукцією \vec{B} . На цей елемент діє сила Ампера $dF = B I dl \sin \alpha$. Якщо елемент dl містить dN вільних носіїв заряду, то сила F_L , що припадає на один електрон, дорівнює:

$$F_L = \frac{dF}{dN},$$

де F_L – сила Лоренца.

Кількість носіїв заряду dN в елементі провідника dl запишемо через їх концентрацію n та об'єм dV елемента: $dN = n dV = n S dl$, S – площа поперечного перерізу провідника. Тоді

$$F_L = \frac{B I dl \sin \alpha}{n S dl} = \frac{B I}{n S} \sin \alpha = \frac{B j \sin \alpha}{n}.$$

Оскільки за електронною теорією $j = neu$, то $F_L = Beu \sin \alpha$, або $\vec{F}_L = e[\vec{u} \vec{B}]$, де α – кут між векторами \vec{u} і \vec{B} .

В загальному випадку

$$\vec{F}_L = q[\vec{u} \vec{B}].$$

Напрямок сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку або правилом лівої руки: якщо долоню лівої руки розмістити так, щоб в неї входив вектор \vec{B} , а чотири витягнуті пальці спрямувати вздовж вектора швидкості \vec{u} руху позитивних зарядів, то відігнутий на 90° великий палець покаже напрямок сили, що діє на позитивний заряд.

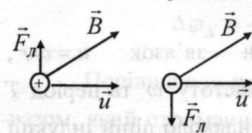


Рис. 173

На негативний заряд сила діє в протилежному напрямку (рис. 173).

Отже, магнітне поле не діє на електричні заряди, що не рухаються.

Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості руху зарядженої частинки, тому вона змінює лише напрямок цієї швидкості, не змінюючи її модуля. Отже, сила Лоренца роботи не виконує і кінетична енергія частинки при русі в магнітному полі не змінюється.

Якщо на рухомий електричний заряд, крім магнітного поля з індукцією \vec{B} , діє і електричне поле з напруженістю \vec{E} , то результуюча сила \vec{F} , яка прикладена до заряду:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u} \vec{B}].$$

Це формула Лоренца.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі зі швидкістю \vec{u} вздовж ліній магнітної індукції або в протилежний бік до напрямку магнітної індукції, то $\alpha = 0$, або $\alpha = \pi$. У такому разі $F_L = 0$, магнітне поле на частинку не діє і вона рухається рівномірно і прямолінійно.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі з швидкістю \vec{u} перпен-

дикулярно до вектора \vec{B} , то сила Лоренца є стала за модулем і нормальна до траєкторії частинки. Частинка рухатиметься по колу, бо сила Лоренца за другим законом Ньютона буде створювати доцентрове прискорення. Отже,

$$quB = \frac{mu^2}{r}. \text{ Звідси } r = \frac{mu}{qB},$$

де r - радіус кола.

Використавши зв'язок $u = \omega r$, знайдемо циклічну частоту ω та період T обертання частинки навколо лінії індукції в магнітному полі:

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{q}{m} B, \quad T = \frac{2\pi r}{u} = \frac{2\pi m}{Bq}.$$

Період обертання частинки в однорідному магнітному полі не залежить від її швидкості (при $u \ll c$). На цьому ґрунтується дія циклічних прискорювачів заряджених частинок.

Якщо швидкість \vec{u} зарядженої частинки напрямлена під кутом α до вектора \vec{B} (рис. 174), то її рух можна подати у вигляді суперпозиції:

- 1) рівномірного прямолінійного руху вздовж поля з швидкістю $u_{\parallel} = u \cos \alpha$;
- 2) рівномірного руху з швидкістю $u_{\perp} = u \sin \alpha$ вздовж кола, яке перпендикулярне до поля. Радіус кола $r = \frac{mu \sin \alpha}{qB}$.

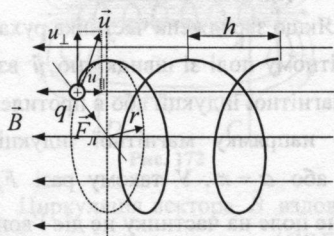


Рис. 174

В результаті складання обох рухів виникає рух вздовж спіралі, вісь якої пара-

лельна до магнітного поля. Крок гвинтової лінії

$$h = u_{\parallel} T = uT \cos \alpha = \frac{2\pi mu \cos \alpha}{qB}.$$

Напрямок, в якому закручується спіраль, залежить від знака заряду частинки.

ПУЛЮЙ ІВАН
(1845-1918)

Вперше довів, що дія магнітного поля на катодні промені є тої самої природи, що й його дія на електричні струми, які проходять у твердих провідниках, тому описуються тими самими законами. Це стало можливим завдяки тому, що йому вдалося встановити напрямок руху частинок у трубках і знак їх електричного заряду. За Пулюєм, відхилення катодних променів магнітом – це результат дії магнітного поля на елементарні струми, тобто на окремі рухомі заряджені частинки. Фактично це ідея „сили Лоренца”, сформульована тільки якісно.

§71. Ефект Холла

В 1879 р. Е. Холл здійснив наступний експеримент. Він пропускав електричний струм I через золоту пластинку у вигляді паралелепіпеда і вимірював різницю потенціалів $\Delta\phi$ між точками C і D на верхній і нижній гранях (рис. 175).

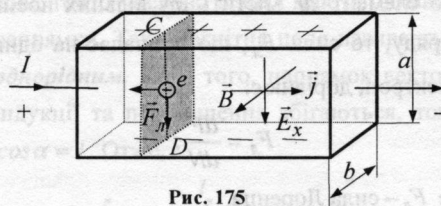


Рис. 175

Ці точки лежать у одному і тому поперечному перерізі пластинки. Тому виявилось, що $\Delta\phi = 0$. Коли пластинку зі струмом Холл помістив в однорідне магнітне поле, лінії магнітної індукції якого перпендикулярні до бічних граней пластинки, то було встановлено, що різниця потенціалів $\Delta\phi = \phi_C - \phi_D \neq 0$ і вона прямопропорційна силі струму I , магнітній індукції поля B і обернено пропорційна ширині пластинки, тобто

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_D = R_X \frac{IB}{b},$$

де R_X - коефіцієнт пропорційності і названий *сталю Холла*. А явище, яке експериментально виявив Холл, дістало назву *ефект Холла*.

Наступні дослідження показали, що ефект Холла спостерігається в усіх провідниках і напівпровідниках. Зміна напрямку струму або напрямку магнітного поля на протилежний викликає зміну різниці потенціалів $\Delta\varphi$.

Розглянемо, як можна пояснити ефект Холла. Помістимо металеву пластинку зі струмом густиною \vec{j} в магнітне поле з індукцією \vec{B} , лінії індукції якого перпендикулярні до \vec{j} . На електрони діє сила Лоренца, яка напрямлена вниз і дорівнює: $F_L = Bev$. Тому на нижній границі пластинки збиратиметься некомпенсований негативний заряд і вона заряджатиметься негативно, а на верхній границі пластинки виникатиме нестача негативних зарядів і вона заряджатиметься позитивно. Внаслідок цього між краями пластинки виникає додаткове поперечне електричне поле, напрямлене зверху вниз. Розглянемо момент динамічної рівноваги, коли сили F_L і F_X , з якими діють на електрони магнітне поле та холлівське електричне поле, стануть рівними (ця рівність настає вже через 10^{-12} с після замикання кола):

$$F_L = F_X, \quad euB = eE_X,$$

звідси

$$E_X = uB.$$

Невідому швидкість u напрямлено-го руху виразимо через густину струму j :

$$j = neu, \quad u = \frac{j}{en}.$$

Тоді

$$E_X = \frac{Bj}{ne}.$$

Помножимо ліву частину виразу на ab , а праву на S :

$$E_X ab = \frac{Bj}{ne} S.$$

Оскільки $E_X a = \Delta\varphi_X$, а $jS = I$, то

$$\Delta\varphi_X = \frac{I}{ne} \frac{BI}{b}.$$

Порівнюючи цей вираз для $\Delta\varphi$ з виразом, який отриманий на основі експерименту, отримуємо що стала Холла обернено пропорційна до добутку заряду електрона e на їх концентрацію n :

$$R_X = \frac{1}{ne}.$$

За вимірними значеннями сталої Холла можна:

1) *визначити концентрацію носіїв струму*, якщо характер провідності і заряд носіїв струму відомі, а саме

$$n = \frac{I}{qR_X}.$$

Так, для одновалентних металів виявилось, що концентрація електронів провідності збігається з концентрацією атомів.

Оскільки за електронною теорією питомою електропровідність речовини обчислюють за формулою

$$\sigma = neu_q,$$

де u_q - рухливість носіїв заряду, то

$$\sigma = \frac{I}{R_X} u_q, \quad \text{і } u_q = R_X \sigma,$$

тобто добуток $R_X \sigma$ визначає рухливість носіїв заряду.

2) *зробити висновок про природу провідності напівпровідників*, оскільки знак сталої Холла збігається із знаком заряду q

носіїв струму. При електронній провідності $R_X < 0$, а при дірковій $R_X > 0$. Якщо в напівпровіднику водночас існують обидва типи провідності, то за знаком R_X можна судити про те, який з них переважає.

3) оцінити величину $\langle \lambda \rangle$ середньої довжини вільного пробігу електронів:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\sigma 2m \langle v \rangle}{ne^2} = \frac{2m \langle v \rangle \sigma R_X}{e}$$

де σ - питома електропровідність провідника, $\langle v \rangle$ - середня швидкість теплового руху електронів у провіднику. Виявилось, що середня довжина вільного пробігу електронів $\langle \lambda \rangle \sim 10^{-8}$ м, що на два порядки перевищує міжвузлові відстані в металі.

БОРОВИК ЄВГЕН СТАНІСЛАВОВИЧ
(1915-1966)

Розробив новий метод одночасного вимірювання ефекту Холла і магнітоопору. На основі цього методу виконав значні роботи по дослідженню гальваномагнітних явищ у металах. Вивчав ефект Холла в берилію і алюмінію при низьких температурах.

КОМАР АНТОН ПАНТЕЛЕЙМОНОВИЧ
(нар. 1904)

Відкрив у впорядкованих сплавах явище зміни знаку сталої Холла.

УКРАЇНСЬКИЙ ІВАН ІВАНОВИЧ
(1943-1997)

Автор піонерських праць з теорії квантового ефекту Холла.

§72. Контур зі струмом в магнітному колі

Розглянемо поведінку в магнітному полі замкнених провідників зі струмом. Помістимо в однорідне магнітне поле електромагніту провідник, який зігнутий у вигляді прямокутної рамки A , що підвішена на пружній нитці C (рис. 176).

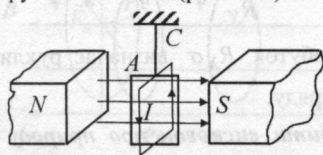


Рис. 176

При відсутності струму в рамці, во-

на перебуває в стані байдужої рівноваги.

Якщо пропускати постійний електричний струм через рамку, то вона повертається навколо осі нитки C так, що її площина розташовується перпендикулярно до вектора \vec{B} магнітної індукції поля. Рамка із струмом завжди встановлюється у зовнішньому однорідному магнітному полі в тому положенні, при якому власний магнітний момент \vec{p}_m рамки збігається з напрямком \vec{B} . З кінця цього вектора ми бачимо, що струм у рамці тече проти ходу стрілки годинника.

Знайдемо вираз для моменту сил, що діють на прямокутну рамку 1-2-3-4 зі

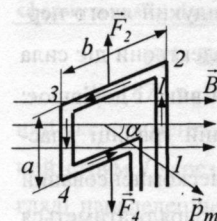


Рис. 177

струмом I , яка знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор магнітної індукції \vec{B} якого утворює кут α з вектором \vec{p}_m власного маг-

нітного моменту рамки (рис. 177). Сторони рамки 2-3 і 4-1 лежать у площинах, паралельних до індукції зовнішнього магнітного поля \vec{B} .

Сили \vec{F}_2 і \vec{F}_4 , які діють на ці прямолінійні провідники, за законом Ампера дорівнюють

$$F_2 = F_4 = IbB \sin(\hat{b} \vec{B}) = \\ = IbB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = IbB \cos \alpha.$$

Сили \vec{F}_2 і \vec{F}_4 напрямлені вздовж вертикальної осі рамки у протилежні боки. Вони деформують рамку у вертикальному напрямку.

Сторони рамки 1-2 і 3-4 перпендикулярні до вектора \vec{B} магнітної індукції

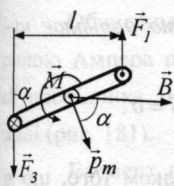


Рис. 178

поля (рис. 178). Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_3 , які прикладені до прямолінійних провідників 1-2 і 3-4, числово дорівнюють:

$$F_1 = F_3 = IaB \sin(\hat{a} \vec{B}) = IaB \sin \frac{\pi}{2} = IaB.$$

Результуючий обертальний момент M , який діє на рамку, дорівнює моменту пари сил

$$\vec{F}_1 \text{ і } \vec{F}_3 = -\vec{F}_1, \text{ тобто } M = F_1 l,$$

де $l = b \sin \alpha$. Тоді

$$M = IabB \sin \alpha = ISB \sin \alpha =$$

$$= p_m B \sin \alpha = p_m B \sin(\hat{p}_m \vec{B}),$$

де $S = ab$ – площа рамки, $IS = p_m$ – числове значення вектора магнітного моменту рамки зі струмом.

Обертання рамки під дією пари сил \vec{F}_1 і \vec{F}_3 відбувається навколо вертикальної осі, яка перпендикулярна як до вектора \vec{B} , так і до вектора \vec{p}_m . Вектор \vec{M} напрямлений до спостерігача перпендикулярно до площини рисунка.

Вектор обертального моменту \vec{M} , який діє на рамку зі струмом у магнітному полі, дорівнює векторному добутку магнітного моменту \vec{p}_m рамки на магнітну індукцію \vec{B} зовнішнього поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}].$$

Якщо магнітний момент \vec{p}_m конуру паралельний або антипаралельний до напрямку зовнішнього поля ($\vec{B}(\sin \alpha = 0)$), то обертальний момент \vec{M} дорівнює нулю і контур перебуває в рівновазі.

Стійким є тільки таке положення контуру, коли вектори \vec{p}_m і \vec{B} паралельні

один до одного.

Розглянемо вплив неоднорідного магнітного поля на поведінку плоского контуру зі струмом (рис. 179). Припустимо, що і магнітна індукція поля змінюється в напрямку осі OX , тобто

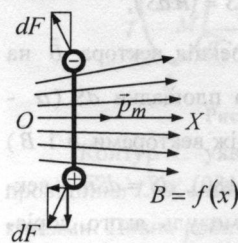


Рис. 179

$B_x = B(x)$ і в цьому напрямку існує градієнт індукції

$$\text{grad } \vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dx},$$

який напрямлений у бік зростання величини \vec{B} . Плоский контур вміщено в однорідне поле так, що його магнітний момент \vec{p}_m напрямлено вздовж осі OX . Розглянемо два елементи контуру dl , які лежать на кінцях його вертикального діаметра. Лінії вектора \vec{B} в цих місцях утворюють з вектором \vec{p}_m кут α . Сили $d\vec{F}$, які діють на розглядувані елементи dl , напрямлені під таким самим кутом α до площини контуру. Розкладаючи кожен із сил $d\vec{F}$ на дві складові: dF_S – в площині контуру та dF_n – паралельну до нормалі площини контуру, знаходимо, що:

в неоднорідному магнітному полі, крім сил, що деформують контур, виникають сили, які переміщують його в область поля з більшою магнітною індукцією:

$$F = (\vec{p}_m \text{ grad } \vec{B}) = p_m \frac{dB}{dx} \cos \alpha.$$

§73. Магнітний потік. Теорема Остроградського-Гаусса

Потоком вектора магнітної індукції (магнітним потоком) через площадку dS називається скалярна фізична величина, яка дорівнює добутку проекції B_n вектора

\vec{B} на напрямок нормалі \vec{n} до площадки dS і величини цієї площадки:

$$d\Phi_B = B_n dS = (\vec{B} \cdot d\vec{S}),$$

де $B_n = B \cos \alpha$ - проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі до площадки dS (α -

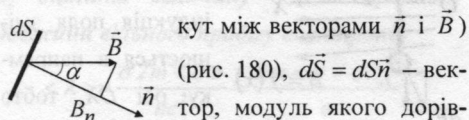


Рис. 180

кут між векторами \vec{n} і \vec{B}) (рис. 180), $d\vec{S} = dS\vec{n}$ - вектор, модуль якого дорівнює dS , а напрямок збігається з нормаллю \vec{n} до площадки dS .

Потік вектора \vec{B} може бути як позитивним, так і негативним залежно від знаку $\cos \alpha$ (визначається вибором позитивного напрямку нормалі \vec{n}).

Потік вектора магнітної індукції \vec{B} через довільну поверхню S дорівнює

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}).$$

Для однорідного поля і плоскої поверхні, розміщеної перпендикулярно до вектора \vec{B} , $B_n = B = \text{const}$ і $\Phi_B = BS$.

Розрахуємо потік вектора \vec{B} через переріз соленоїда. Всередині соленоїда індукція однорідного поля у вакуумі дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

Магнітний потік через один виток соленоїда площею S :

$$\Phi_1 = BS.$$

Повний магнітний потік через соленоїд, який називається потокозчепленням ψ , дорівнює:

$$\psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S.$$

В електродинаміці доводиться **теорема Остроградського-Гаусса для магнітного поля: магнітний потік крізь**

довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \oint_S B_n dS = 0.$$

Ця теорема є наслідком того, що в природі нема магнітних „зарядів” і лінії індукції будь-якого магнітного поля є замкненими кривими.

Покажемо справедливість теореми Остроградського-Гаусса на простому прикладі. Розглянемо магнітне поле нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом I . За замкнену поверхню S візьмемо поверхню прямого колового циліндра, вісь якого збігається з віссю провідника.

Лінії індукції магнітного поля прямолінійного струму є концентричними колами, центри яких лежать на осі провідника, а площини перпендикулярні до нього. Тому лінії індукції не перетинають ні бічної поверхні циліндра, ні його основ. Отже, в будь-якій точці поверхні циліндра проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі \vec{n} до поверхні $D_n = 0$ і $\oint_S B_n dS = 0$.

§74. Робота при переміщенні провідника і контуру зі струмом у магнітному полі

На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера. Якщо провідник не закріплено, то під впливом сили Ампера він переміщуватиметься у магнітному полі.

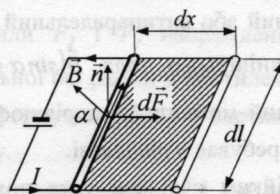


Рис. 181

Обчислимо роботу dA , виконану силою Ампера при переміщенні елемента dl провідника зі струмом I у магнітному полі (рис. 181).

Елемент провідника переміщується в напрямку сили $d\vec{F}$, яка діє на нього на відстані dx . Робота dA дорівнює

$$dA = dFdx.$$

За законом Ампера

$$dF = IBdl \sin \alpha.$$

Тоді

$$dA = IB \sin \alpha dl dx.$$

Сила $d\vec{F}$ і переміщення $d\vec{x}$ напрямлені перпендикулярно до елемента провідника $d\vec{l}$. Добуток $dl dx = dS$ – площа поверхні, яка описана елементом провідника dl при його переміщенні на dx .

З рис. 181 видно, що $B \sin \alpha = B_n$ – проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі \vec{n} до площини dS .

Добуток $B_n dS = d\Phi_B$ – магнітний потік крізь поверхню dS . Тоді

$$dA = IB_n dS = Id\Phi_B.$$

Вважаючи силу струму сталою і, інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$A = I\Phi_B.$$

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі провідника, струм в якому постійний, дорівнює добутку сили струму на величину магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час свого руху.

Знайдемо вираз для роботи, яку виконують сили Ампера при переміщенні в магнітному полі замкнутого контуру, по якому проходить постійний струм I .

Нехай внаслідок нескінченно малого переміщення контур C зайняв положення C' (рис. 182).

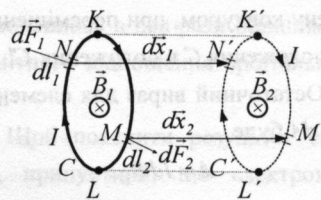


Рис. 182

Контур C уявно розіб'ємо на два провідники LNK і KML , які з'єднані своїми кінцями. Повна робота dA , виконана силами Ампера при переміщенні контуру, дорівнює алгебраїчній сумі робіт переміщення провідників $LNK(dA_1)$ і $KML(dA_2)$, тобто $dA = dA_1 + dA_2$.

Припустимо, що вектор \vec{B} магнітної індукції напрямлений перпендикулярно до площини рисунка і в початковому положенні контуру дорівнює B_1 , а в кінцевому – B_2 , причому $B_2 > B_1$.

Сила Ампера $d\vec{F}_2$, що діє на довільний елемент dl_2 , провідника KML утворює гострий кут з напрямком його переміщення $d\vec{x}_2$ і виконує позитивну роботу.

Сила $d\vec{F}_1$, що діє на елемент dl_1 провідника LNK , утворює з напрямком його переміщення $d\vec{x}_1$ тупий кут і виконує негативну роботу, тому роботи dA_1 і dA_2 переміщення провідників LNK і KML мають різні знаки. Щоб отримати абсолютні значення роботи dA_1 і dA_2 , треба продиференціювати вираз $A = I\Phi_B$. Тому

$$dA = dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{B_1} + Id\Phi_{B_2} = I(d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1}),$$

де $d\Phi_{B_1}$ – магнітний потік крізь поверхню $LNK K'N'L'$; $d\Phi_{B_2}$ – крізь поверхню $LMK K'M'L'$; $d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1} = d\Phi_B$ – зміна магнітного потоку, що пронизує поверхню,

обмежену контуром, при переміщенні контуру з положення C в положення C' .

Остаточний вираз для елементарної роботи dA буде

$$A = Id\Phi_B.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо роботу A , яку виконує сила Ампера при будь-якому переміщенні контуру в магнітному полі

$$A = I\Delta\Phi_B.$$

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі замкненого контура, по якому проходить постійний струм, дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Розглянемо кілька прикладів.

1. Замкнений жорсткий ($S = \text{const}$) провідник поступально переміщується в магнітному полі так, що його площина залишається перпендикулярно до вектора \vec{B} . При цьому робота A , яка виконана при переміщенні провідника з деякого початкового в кінцеве положення, дорівнює

$$A = I(\Phi_{B_2} - \Phi_{B_1}).$$

Оскільки вектор \vec{B} перпендикулярний до площини замкненого провідника, то

$$\Phi_{B_2} = B_2 S, \quad \Phi_{B_1} = B_1 S,$$

де S – площа поверхні, яка охоплена провідником. Тоді

$$A = IS(B_2 - B_1) = p_m(B_2 - B_1),$$

де p_m – магнітний момент струму

Якщо поле однорідне, тобто

$$B_2 = B_1, \quad \text{то } A = 0.$$

2. Виймання замкненого провідника з струмом з магнітного поля. Якщо через контур, що охоплений замкненим струмом

I , проходив магнітний потік Φ_{B_1} , то при вийманні провідника зміна магнітного потоку дорівнюватиме

$$\Delta\Phi_B = \Phi_{B_2} - \Phi_{B_1} = -\Phi_{B_1}.$$

Тоді

$$A = -I\Phi_{B_1} = -p_m B.$$

3. Повертання замкненого провідника зі струмом в однорідному магнітному полі.

Розглянемо провідник у вигляді кільця площею S . Припустимо, що спочатку площина контуру провідника перпендикулярна до вектора магнітної індукції і через контур проходить максимальний магнітний потік Φ_B . Якщо повернути провідник навколо діаметра кільця на кут 90° , то площина контуру розміститься паралельно вектору \vec{B} і жодна з них не пронизуватиме його. Отже,

$$\Phi_{B_1} = \Phi_B, \quad \Phi_{B_2} = 0.$$

Тоді

$$A = -I\Phi_B = -p_m B.$$

При повертанні рамки на кут 180° її кінцеве і початкове положення відрізнятимуться лише напрямком вектора \vec{B} відносно вектора магнітного моменту контуру \vec{p}_m і $\Phi_{B_1} = \Phi_B$, $\Phi_{B_2} = -\Phi_B$. Тоді

$$A = -2p_m B = -2I\Phi_B.$$

§75. Магнітні моменти атомів.

Намагніченість.

Атом в магнітному полі

Розглянемо процеси, що відбуваються в речовині під впливом зовнішнього магнітного поля на атоми і молекули речовини. В будь-якій речовині, вміщеній у зовнішнє магнітне поле, виникає особливий стан намагніченості і створюється внутрішнє магнітне поле.

Розглянемо причини цього явища з

погляду будови атомів і молекул, поклавши в основу гіпотезу Ампера, згідно з якою в будь-якому тілі існують мікроскопічні струми, обумовлені рухом електронів в атомах і молекулах.

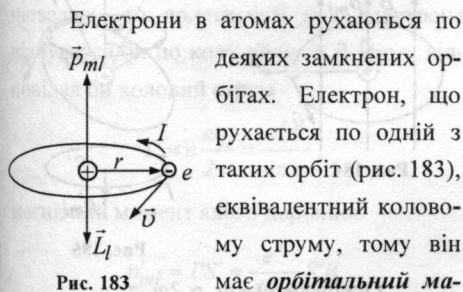


Рис. 183

Електрони в атомах рухаються по деяких замкнених орбітах. Електрон, що рухається по одній з таких орбіт (рис. 183), еквівалентний коловому струму, тому він має **орбітальний магнітний момент** $\vec{p}_{ml} = IS\vec{n}$, модуль якого $p_{ml} = IS$, де S – площа орбіти електрона: $S = \pi r^2$.

Вектор \vec{p}_m напрямлений в той самий бік, що й індукція магнітного поля в центрі колового струму I . Кількість оборотів електронів в секунду $\nu = \frac{v}{2\pi r}$. Тоді сила струму

$$I = e\nu = \frac{ev}{2\pi r} \quad \text{і} \quad p_{ml} = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$

З іншого боку, кожний електрон, що рівномірно рухається по орбіті, має **орбітальний механічний момент імпульсу**, який числово дорівнює $L_l = mvr$. Тоді

$$\frac{p_{ml}}{L_l} = \frac{e}{2m}.$$

Вектори p_{ml} і \vec{L}_l напрямлені у взаємно протилежні сторони. Тому

$$\vec{p}_{ml} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l, \quad \vec{p}_{ml} = -g\vec{L}_l,$$

де $g_l = \frac{e}{2m}$ – гіромагнітне відношення орбітальних моментів.

Гіромагнітне відношення, яке експериментально визначили Ейнштейн і де

Гааз, виявилось в два рази більшим від гіромагнітного відношення орбітальних моментів.

Щоб пояснити результат експерименту, припустили, що електрон, крім орбітальних моментів \vec{p}_{ml} і \vec{L}_l , має **власний механічний момент імпульсу** \vec{L}_s , що називається **спіном електрона**. Спін є невід'ємною властивістю електрона, подібно до того, як заряд e і маса m . Спін електрона виявляється в багатьох експериментальних фактах. Спіну електрона \vec{L}_s відповідає власний (спіновий) магнітний момент \vec{p}_{ms} , який дорівнює:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s\vec{L}_s = -\frac{e}{m}\vec{L}_s$$

де g_s – гіромагнітне відношення спінових моментів.

Магнітний момент електрона складається з його орбітального і спінового магнітних моментів. Відповідно магнітний момент атома дорівнює сумі магнітних моментів електронів, що входять до складу атома, і магнітного моменту ядра, який значно менший від моментів електрона. Тому магнітним моментом ядра, як правило, нехтують. Отже,

$$\vec{P}_{ma} = \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{mli} + \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{msi},$$

де Z – атомний номер хімічного елемента.

За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти орієнтовані хаотично, внаслідок чого сумарний магнітний момент речовини дорівнює нулю і результуюча магнітна індукція поля, яке створене мікроскопічними струмами, дорівнює нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля магнітні моменти орієнтуються в певному напрямку і виникає внутрішнє

магнітне поле, сумарний магнітний момент відмінний від нуля і речовина намагнічується.

Для кількісного опису намагнічування магнетиків введемо векторну величину – *намагніченість* \vec{J} , яка числово дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mai},$$

де N – кількість атомів (молекул), що знаходяться в об'ємі V , \vec{p}_{mai} – магнітний момент i -го атома (молекули). Об'єм V повинен бути настільки малим, щоб в його межах магнітне поле можна вважати однорідним.

Розглянемо вплив зовнішнього магнітного поля \vec{B} на рух електронів в атомах речовини.

Нехай навколо ядра атома рівномірно рухається по коловій орбіті електрон. Якщо магнітне поле відсутнє, то кулонівська сила є доцентровою і

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mu_0^2}{r} = m\omega_0^2 r,$$

де u_0 – лінійна швидкість електрона, ω_0 – кутова швидкість, r – радіус орбіти.

В однорідному магнітному полі, лінії індукції якого перпендикулярні до площини орбіти електрона, на кожен електрон діятиме ще сила Лоренца

$$F_L = euB = e\omega rB$$

де ω – кутова швидкість при наявності магнітного поля (рис. 184)

Тепер

$$\begin{aligned} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - e\omega rB &= m\omega^2 r, \\ m r(\omega^2 - \omega_0^2) &= -e\omega rB, \end{aligned}$$

$$(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = -\frac{e}{m} B \omega.$$

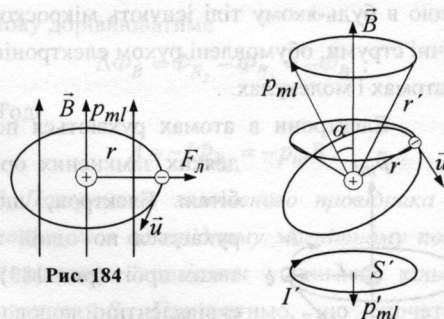


Рис. 184

Рис. 185

Оскільки $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$, то

$$\omega_L = \omega - \omega_0 = -\frac{e}{m} B.$$

Отже, магнітне поле викликає зміну кутової швидкості обертання електрона по орбіті.

У випадку, коли \vec{B} не перпендикулярне площині орбіти, то дія поля полягає у збудженні процесії орбіти навколо поля (рис. 185). Магнітний момент електрона \vec{p}_{ml} описує конус навколо \vec{B} . В цьому випадку кутова швидкість ω_L такої процесії теж виражається формулою

$$\omega_L = -\frac{e}{m} B.$$

Кутова швидкість ω_L називається *кутовою швидкістю прецесії Лармора*. Вона є однаковою для всіх електронів атома, і не залежить від кута нахилу орбіти α відносно вектора \vec{B} , ні від радіуса орбіти або швидкості електрона.

Теорема Лармора: єдиним наслідком впливу магнітного поля на орбіту електрона в атомі є прецесія орбіти і вектора \vec{p}_{ml} з кутовою швидкістю ω_L навколо осі, що проходить через ядро атома і паралельна вектору \vec{B} індукції магнітного

поля.

Прецесія орбіти обумовлює додатковий рух електрона навколо напрямку поля. Якщо б відстань r електрона від осі, що проходить через центр орбіти, не змінювалась, то додатковий рух електрона відбувався би по колу радіуса r . Йому відповідав би коловий струм

$$I' = e \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B}{4\pi m},$$

магнітний момент якого дорівнює

$$p'_{ml} = I'S' = \frac{e^2}{4\pi m} S'B$$

і напрямлений в сторону, протилежну до вектора \vec{B} :

$$\vec{p}'_{ml} = -\frac{e^2}{4\pi m} S'\vec{B}.$$

Магнітний момент \vec{p}'_{ml} називається індукованим магнітним моментом.

Розрахунок показує, що $S' = \frac{2}{3}\pi r^2$.

В результаті отримуємо середнє значення індукованого магнітного моменту одного електрона:

$$\langle p'_{ml} \rangle = \frac{e^2 B}{6m} r^2.$$

При отриманні виразу для $\langle p'_{ml} \rangle$ передбачалось, що електрони рухаються по колових орбітах. В загальному випадку, наприклад для еліптичної орбіти, потрібно замість r^2 у виразі для $\langle p'_{ml} \rangle$ брати $\langle r^2 \rangle$, тобто середній квадрат відстані електрона від ядра.

Індукований магнітний момент атома дорівнює сумі індукованих моментів електронів, що входять до складу атома:

$$p'_{ma} = \sum_{i=1}^Z \langle p'_{ml} \rangle = \frac{e^2 B}{6m} \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle.$$

Прецесія Лармора виникає у всіх без винятку речовинах.

§76. Елементарна теорія діа - і парамагнетизму

Досліди і теорія показують, що всі речовини, які поміщені в магнітне поле, набувають магнітних властивостей, тобто намагнічуються і тому деякою мірою змінюють зовнішнє поле.

При цьому виявляється, що одні речовини послаблюють зовнішнє поле, а інші – підсилюють його; перші називаються *діамагнетиками*, другі – *парамагнетиками*. Більшість речовин належить до діамагнетиків.

Діамагнетиками називають речовини, магнітні моменти атомів або молекул яких дорівнюють нулю, коли немає зовнішнього магнітного поля.

В цих речовинах спінові та орбітальні магнітні моменти електронів взаємно скомпенсовані.

До діамагнетиків належать інертні гази He, Ne, Ar, Kr, Xe , а також такі речовини, як $H_2O, C, Cu, Zn, Ag, Sb, Hg, Pb, Bi$, багато органічних сполук тощо.

Для пояснення природи діамагнетизму розглянемо вплив магнітного поля на рух електронів в атомах речовини.

Коли внести діамагнетик у зовнішнє магнітне поле, у кожному його атомі індукується магнітний момент \vec{P}'_{ma} , який напрямлений протилежно до вектора \vec{B} магнітної індукції поля. В межах малого об'єму V ізотропного діамагнетика вектори \vec{P}'_{ma} всіх N атомів (молекул) однакові. Вони пропорційні до вектора \vec{B} і протилежні йому за напрямком. Тому вектор намагнічування дорівнює:

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \frac{N\bar{P}'_{ma}}{V} = n\bar{P}'_{ma} = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle}{6m} \bar{B} = \\ &= \chi \frac{\bar{B}}{\mu_0},\end{aligned}$$

де n – концентрація атомів (молекул), χ – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи речовини:

$$\chi = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle}{6m\mu_0}.$$

Коефіцієнт χ називається **магнітною сприйнятливістю** речовини. Як видно, для всіх діаманетиків $\chi < 0$ і за величиною $|\chi| \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$, тобто $|\chi| \ll 1$. Тому діаманітний ефект малопомітний, цей ефект виникає у всіх речовинах, які внесені у магнітне поле.

Стрижень з діаманітного матеріалу намагнічується в напрямку, протилежному до напрямку зовнішнього магнітного поля. Тому в неоднорідному магнітному полі діаманетик виштовхується в область слабшого поля і встановлюється так, щоб його вісь була перпендикулярна до вектора магнітної індукції \bar{B} поля.

Якщо векторна сума орбітальних магнітних моментів усіх електронів атома або молекули не дорівнює нулю, то атом загалом має деякий магнітний момент \bar{P}'_{ma} . Такі атоми (молекули) називаються парамагнітними, а речовини, що складаються з них - парамагнетиками.

До парамагнетиків належать речовини, атоми яких мають незабудовану до кінця зовнішню електронну підоболонку: Mg, Al, Ca, Cr, Mn, Pt, кисень атомарний і молекулярний, солі заліза, кобальту, нікелю, рідкісноземельних елементів тощо.

За відсутності зовнішнього магнітного поля парамагнетик ненамагнічений, оскільки внаслідок теплового руху власні магнітні моменти атомів орієнтовані хаотично ($J = 0$).

Розглянемо, що станеться при внесенні парамагнетика в однорідне магнітне поле, магнітна індукція якого дорівнює \bar{B} .

Кожен електрон атома парамагнітного тіла бере участь у двох рухах: орбітальному і прецесійному. Згідно з теоремою Лармора, всі магнітні моменти електронів атома і результуючий магнітний момент атома прецесують навколо напрямку \bar{B} з однаковою кутовою швидкістю ω_L .

Тепловий рух атомів парамагнетика і їх зіткнення спричинюють поступове згасання прецесії магнітних моментів атомів, а також зменшення кутів між напрямками \bar{P}'_{ma} і \bar{B} . Отже, незважаючи на утворюване тепловим рухом „розкидання” атомів, цей рух водночас сприяє переважній орієнтації магнітних атомів у напрямку зовнішнього магнітного поля, оскільки саме по собі магнітне поле може спричинювати лише процесію \bar{P}'_{ma} навколо напрямку \bar{B} .

Магнітний момент \bar{P}'_{ma} окремого атома має величину $\sim 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$, але сукупна дія магнітних моментів усіх атомів, що містяться в одиниці об'єму речовини приводить до ефекту намагнічування, що значно перевищує діаманітний ефект. Тому парамагнетик намагнічується „за полем”, тобто в напрямку магнітної індукції \bar{B} зовнішнього магнітного поля.

Класичну теорію парамагнетизму розвинув П. Ланжевен, який розглянув за-

дачу про поведінку молекулярних струмів в однорідному магнітному полі.

Орієнтуюча дія магнітного поля на атом залежить від магнітного моменту атома і від магнітної індукції \vec{B} поля. „**Розкидаюча**” дія теплового руху визначається величиною kT , пропорційною до середньої теплової енергії однієї частинки. Виявилось, що результуюча дія двох протилежних факторів залежить від відношення

$$\alpha = \frac{P_{ma}B}{kT}.$$

Ланжевєн знайшов залежність намагніченості J парамагнетика від параметра α :

$$J = nP_{ma}L(\alpha),$$

де $L(\alpha)$ - класична функція Ланжевєна, яка має вигляд:

$$L(\alpha) = \left\{ \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Якщо $\alpha \ll 1$, то $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$; якщо $\alpha \gg 1$, тоді $L(\alpha) \rightarrow 1$.

При $T \approx 300\text{K}$ умова $\alpha = 1$ може справджуватися лише в дуже сильних магнітних полях.

У дуже сильних магнітних полях або при дуже низьких температурах, коли більша частина векторів \vec{P}_m „орієнтована” вздовж напрямку індукції магнітного поля, спостерігається **явище насиченості**: намагніченість не залежить від \vec{B} .

Далеко від області насиченості $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$, тоді

$$\vec{J} = \frac{nP_{ma}^2\mu_0}{3kT} \vec{B} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

Магнітна сприйнятливість парамаг-

нітних речовин $\chi = \frac{nP_{ma}^2\mu_0}{3kT}$. Отже $\chi > 0$ і значення $\chi \sim 10^{-3} - 10^{-5}$.

Макроскопічно парамагнетизм виявляється в тому, що парамагнетики втягуються в неоднорідне магнітне поле, а в однорідному полі парамагнітний стрижень орієнтується паралельно до лінії індукції магнітного поля.

При нагріванні парамагнетика, який внесений у зовнішнє магнітне поле, тепловий рух атомів зростатиме і руйнуватиме ту орієнтацію елементарних магнітних моментів частини атомів, яка встановилася під дією зовнішнього поля. Отже, магнітна сприйнятливість парамагнетиків χ як величина, що характеризує з макроскопічного погляду магнітні властивості речовини, повинна залежати від T :

$$\chi = \frac{C}{T},$$

де $C = \frac{n\mu_0 P_{ma}^2}{3k}$ - стала Кюрі.

Це співвідношення виражає **закон Кюрі**: *магнітна сприйнятливість парамагнетика обернено пропорційна до його термодинамічної температури.*

ШУБНИКОВ ЛЕВ ВАСИЛЬОВИЧ
(1901-1945)

Показав (1934 р.), що в надпровідному стані магнітна індукція металу дорівнює нулю, тобто дав прямий обґрунтований доказ ідеального діаманетизму надпровідників.

ЛАЗАРЄВ БОРИС ГЕОРГІЙОВИЧ
(1906-2001)

Виконав в кінці 30-х років важливі експериментальні дослідження магнітних властивостей металів при низьких і особливо наднизьких температурах. Цими дослідженнями було встановлено, що періодична залежність магнітної сприйнятливості від зовнішнього магнітного поля є аномалією не тільки вісмуту, але й великої групи металів.

**§77. Магнітне поле в речовині.
Закон повного струму для
магнітного поля в речовині.
Напруженість магнітного поля**

При вивченні магнітного поля в речовині (магнетику) розрізняють два типи струмів: макроструми і мікроструми. Макрострумами називають електричні струми провідності, а також конвекційні струми, які зв'язані з рухом заряджених макроскопічних тіл. Мікрострумами, або молекулярними струмами, називаються струми, які обумовлені рухом електронів в атомах, іонах і молекулах.

Магнітне поле в речовині складається з двох полів: зовнішнього поля \vec{B}_0 , яке створюється макрострумами, і внутрішнього поля $\vec{B}_{вн}$, яке створюється молекулярними струмами.

Вектор \vec{B} магнітної індукції результуючого магнітного поля в речовині дорівнює векторній сумі магнітних індукцій зовнішнього і внутрішнього полів:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{вн}.$$

Вектор \vec{B} залежить від магнітних властивостей речовини.

Для опису поля $\vec{B}_{вн}$, що створюється молекулярними струмами, розглянемо

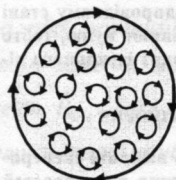


Рис. 186

однорідний ізотропний діамagnetик у вигляді колового циліндра перерізом S і довжиною l , який внесений у однорідне зовнішнє магнітне

поле з індукцією \vec{B}_0 (рис. 186).

Внутрішнє поле, що виникає в діамagnetику, буде напрямлене протилежно зовнішньому. При цьому площини всіх молекулярних струмів розташовуються

перпендикулярно до напрямку зовнішнього поля \vec{B}_0 так, щоб вектори їхніх магнітних моментів \vec{p}_m були антипаралельні до вектора \vec{B}_0 .

На внутрішніх ділянках будь-якого перерізу S циліндра молекулярні струми сусідніх атомів напрямлені назустріч один одному і взаємно компенсуються (рис. 186). Нескомпенсованими будуть лише молекулярні струми, які виходять на бічну поверхню циліндра.

Струми, які проходять по бічній поверхні циліндра, подібні до струму в соленоїді. Вони утворюють всередині циліндра поле, магнітну індукцію якого $\vec{B}_{вн}$ можна обчислити за допомогою формули для магнітного поля всередині довгого соленоїда:

$$B_{вн} = \mu_0 \frac{N}{l} I_{мол}^{(l)} = \mu_0 n I_{мол}^{(l)} = \mu_0 I_{мол}^{(n)},$$

де $I_{мол}^{(l)}$ - величина молекулярного струму одного кільця, n - кількість кільцевих струмів $I_{мол}^{(l)}$, що припадають на одиницю довжини циліндра, $I_{мол}^{(n)} = n I_{мол}^{(l)}$ - величина молекулярного струму одиниці довжини циліндра.

Магнітний момент циліндра-соленоїда, об'єм якого $V = lS$, дорівнює

$$P_m = I_{мол}^{(n)} S = n I_{мол}^{(l)} S = n I_{мол}^{(l)} l S = I_{мол}^{(n)} V.$$

Звідси намагніченість магнетика

$$J = \frac{P_m}{V} = I_{мол}^{(n)},$$

а магнітна індукція $B_{вн}$ дорівнює:

$$B_{вн} = \mu_0 I_{мол}^{(n)} = \mu_0 J.$$

Вектори $\vec{B}_{вн}$ і \vec{J} мають однакові напрямки, тому

$$\vec{B}_{вн} = \mu_0 \vec{J}.$$

Закон повного струму для магнітного поля в речовині (теорема про циркуляцію вектора \vec{B}) є узагальненням закону повного струму для магнітного поля у вакуумі:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \oint_L \vec{B}_L dl = \mu_0 \left(\sum_i I_i + \sum I_{\text{мол}} \right),$$

де $\sum_i I_i$ і $\sum I_{\text{мол}}$ – відповідно, алгебраїчні суми сил макрострумів (струмів провідності) і мікрострумів (молекулярних струмів), що охоплюються заданим контуром.

Обчислюючи циркуляцію вектора \vec{B} в магнетиках, стикаємося з такою трудністю: для того, щоб визначити циркуляцію вектора \vec{B} , треба знати силу не лише макроскопічних струмів, але також і молекулярних струмів. Сила ж молекулярних струмів у свою чергу залежить від значення вектора \vec{B} . Щоб обійти це затруднення, можна знайти таку допоміжну величину, циркуляція якої визначається лише силою макроскопічних струмів.

Щоб встановити вигляд цієї допоміжної величини, виразимо силу молекулярних струмів $I_{\text{мол}}$ через намагніченість.

Для цього розглянемо однорідний ізотропний діамagnetик, який має форму колового циліндра завдовжки l , що поміщений в зовнішнє магнітне поле (рис. 187).

Виберемо контур L у вигляді прямокутника $ACDF$ сторони CD , DF , DA якого лежать поза магнетиком, а сторона AC паралельна до напрямку магнітного поля і вектору намагніченості \vec{J} (рис. 187).

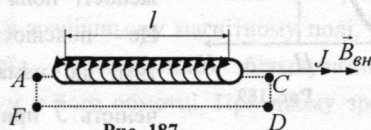


Рис. 187

В усіх точках контуру L , які лежать поза магнетиком $J = 0$. У точках прямої AC вектори \vec{J} і $d\vec{l}$ паралельні, причому $J = \text{const}$. Тому

$$\oint_L (\vec{J} d\vec{l}) = \int_L J dl = J l.$$

Вектор \vec{J} числово дорівнює сумі молекулярних струмів, що припадають на одиницю довжини магнетика. Отже, $J l$ дорівнює сумі молекулярних струмів, що припадають на всю довжину l магнетика, тобто охоплених замкненим контуром L :

$$\oint_L (\vec{J} d\vec{l}) = J l = \sum I_{\text{мол}}.$$

Цей результат не залежить ні від форми контуру L , ні від форми і природи магнетика, ні від того, однорідне магнітне поле чи ні.

Тоді закон повного струму для магнітного поля в речовині можна записати у вигляді

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i + \mu_0 \oint_L (\vec{J} d\vec{l})$$

і

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_i I_i.$$

Вираз в дужках $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ і є шу-

кана допоміжна величина, циркуляція якої визначається лише макроскопічними струмами і

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \sum_i I_i.$$

Вектор \vec{H} називається **напруженістю магнітного поля**.

Отримана формула виражає теорему про циркуляцію вектора \vec{H} (закон повного струму для магнітного поля в середовищі):

циркуляція вектора напруженості магнітного поля по деякому контуру дорівнює алгебраїчній сумі макроскопічних струмів, що охоплюються цим контуром.

Напруженість магнітного поля \vec{H} є аналогом електричного зміщення \vec{D} .

У вакуумі $\vec{J} = 0$, тому

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \text{ і } \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Як показують досліди, в несильних полях намагніченість \vec{J} прямо пропорційна до напруженості поля \vec{H} , що викликає намагнічення, тобто

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

де χ - магнітна сприйнятливість речовини. Тоді

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

звідки

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}.$$

Безрозмірна величина $\mu = 1 + \chi$ називається *відносною магнітною проникністю* речовини.

Оскільки магнітна сприйнятливість діамagnetиків $\chi \sim (10^{-6} \div 10^{-5})$, то відносна магнітна проникність цих магнетиків $\mu < 1$, а сприйнятливість парамагнетиків $\chi \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$, то їх проникність незначно більша від одиниці, тобто $\mu > 1$.

Вираз для напруженості поля можна записати у вигляді

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}.$$

Отже, напруженість магнітного поля \vec{H} - це вектор, що має той же напрям, що і вектор \vec{B} , але в $\mu\mu_0$ разів менший за

модулем.

§78. Феромагнетики

У дев'яти чистих хімічних елементів, а саме залізі (Fe), нікелі (Ni), кобальті (Co) і ланоганидах - гадолінію, тербію, диспрозію, гольмію, ербію (Er) і тулію (Tu) та їх численних сплавах виявлено властивість миттю намагнічуватися навіть у слабких магнітних полях. Усі вони утворюють групу сильномагнітних речовин - **феромагнетиків**. Феромагнетики підсилюють зовнішнє поле в сотні і тисячі разів.

Експериментальне вивчення феромагнетиків було розпочате **О.Г.Столетовим**. Він дослідив залежність намагніченості заліза від напруженості магнітного поля.

На рис. 188 показано залежність намагніченості J заліза від напруженості H магнітного поля.

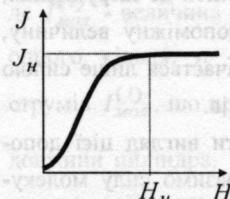


Рис. 188

Починаючи з деякого числового значення намагніченість залишається сталою і дорівнює J_n . Це явище Столетов назвав **магнітним насиченням**.

На рис. 189 зображено криву залежності магнітної індукції B від H . При $H > H_n$ магнітна індукція $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$

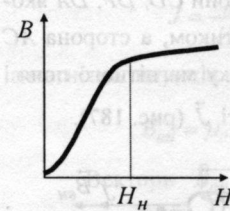


Рис. 189

зростає за лінійним законом залежно від напруженості поля \vec{H} . Це пояснюється тим, що намагніченість \vec{J} при цій напруженості поля вже не змінюється і

вектор магнітної індукції \vec{B} залежить лише від напруженості \vec{H} .

Відносна магнітна проникність μ феромагнетика спочатку швидко зростає із збільшенням H , досягає максимуму і потім спадає, прямує до одиниці при сильних намагнічуючих полях

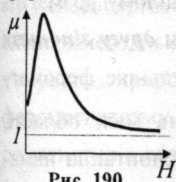


Рис. 190

(рис. 190). Це пов'язано з тим, що

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu_0 H + J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{\mu_0 H}.$$

Тому при $J = J_n = const$ із зростанням H відношення $\frac{J}{H} \rightarrow 0$, а $\mu \rightarrow 1$.

О. Столетов вивчив явище намагнічування феромагнетика у змінному за величиною і напрямком зовнішньому магнітному полі.

Залежність намагніченості J від напруженості поля H визначається передісторією намагнічення феромагнетика (рис. 191).

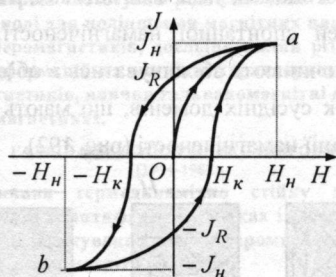


Рис. 191

Це явище називається **магнітним гістерезисом**.

Помістимо стрижень з феромагнетика, який після виготовлення ні разу не був у зовнішньому магнітному полі, у соленоїд і монотонно збільшуватимемо струм у його обмотці. При цьому зростатиме напруженість H поля та намагнічення

J стрижня (крива Oa), при напруженості поля H_n намагнічення досягає насичення J_n .

Якщо поступово зменшувати струм в обмотці соленоїда, то зменшується напруженість H поля соленоїда і намагнічення J стрижня. Але крива $J(H)$ вже не збігається з первинною кривою намагнічення Oa . В той момент, коли намагнічуюче поле $H = 0$, у феромагнітного стрижня спостерігатиметься залишкове намагнічення J_R .

Після зміни на клеммах соленоїда полярності джерела і монотонного збільшення струму виникає магнітне поле, яке напрямлене протилежно до залишкового намагнічення, і стрижень розмагнічується. Та напруженість H_k поля, яка потрібна, щоб повністю розмагнітити попередньо намагнічений стержень, називається **коерцитивною напруженістю** (коерцитивною силою).

При подальшому збільшенні магнітного поля, протилежного початковому, намагнічення стрижня знову досягає намагнічення насичення - J_n при $H = -H_n$. Повертаючись поступово до напруженості магнітного поля H_n , дістанемо замкнену криву, яка називається **петлею гістерезису**.

Коерцитивна сила характеризує властивість феромагнетика зберігати намагніченість. Матеріали з великою коерцитивною напруженістю дають широку петлю гістерезису і називаються „твердими” магнітними матеріалами. З них виготовляють постійні магніти.

„М'які” магнітні матеріали мають малу коерцитивну силу і дають вузьку

петлю гістерезису. Ці матеріали використовують для виготовлення осердь трансформаторів. Перемагнічення феромагнетика пов'язане з повертанням областей спонтанного намагнічення. Робота, необхідна для цього, здійснюється за рахунок енергії зовнішнього магнітного поля. Кількість тепла, яке виділяється під час перемагнічування, пропорційна до площі петлі гістерезису.

В експериментах із залізом П. Кюрі встановив, що при певній температурі воно втрачає властивість феромагнетика і переходить в парамагнітний стан. Цю температуру називають точкою Кюрі.

Залежність магнітної сприйнятливості феромагнетиків від абсолютної температури T речовини у феромагнітному стані наближено описується законом Кюрі:

$$\chi = C(T_c - T)^{-\gamma},$$

де $\gamma \neq 1$ і набуває різних значень у різних температурних інтервалах. Наприклад, при температурах T , близьких до точки фазового переходу T_c , $\gamma = \frac{4}{3}$.

Магнітна сприйнятливості феромагнетика в парамагнітній фазі змінюється за законом Кюрі-Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}.$$

Перехід речовини з феромагнітного стану в парамагнітний не супроводжується виділенням або поглинанням тепла.

Класична теорія феромагнетизму була розроблена П. Вейсом. В основу цієї теорії покладено дві гіпотези. **Перша гіпотеза** полягає в тому, що в певній області температур (від $T = 0$ до $T = T_c$) феромагнетикам властива спонтанна намагніченість, яка не залежить від наявності зов-

нішнього магнітного поля. Проте досліді показали, що у разі відсутності зовнішнього магнітного поля, якщо не брати до уваги явище магнітного гістерезису, будь-яке феромагнітне тіло буде в цілому розмагнічене. Це примусило ввести **другу гіпотезу** про те, що при $T < T_c$ будь-яке феромагнітне тіло розділяється на малі області, яким властива однорідна спонтанна намагніченість. Такі області називаються **доменами**. Лінійні розміри доменів досягають $10^{-2} - 10^{-3}$ см. Межі доменів (доменні стінки) не слід уявляти у вигляді геометричних площин. Фактично це області, що охоплюють сотні атомних шарів, в яких напрямки намагнічення змінюється монотонно.

Коли зовнішнього магнітного поля немає, вектори магнітних моментів окремих доменів орієнтуються в просторі хаотично, так що результуючий магнітний момент усього тіла дорівнює нулю. Зовнішнє магнітне поле, яке діє на феромагнетика, орієнтує магнітні моменти не окремих частинок як у парамагнетиках, а цілих областей спонтанної намагніченості, домени починають збільшуватись в об'ємі за рахунок сусідніх доменів, що мають інші орієнтації намагніченості (рис. 192).

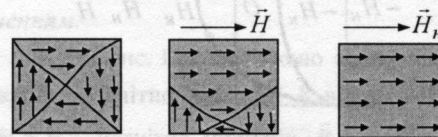


Рис. 192

При досить сильному полі H_n всі домени повертаються в напрямку поля і феромагнетик намагнічується до насичення.

Класична теорія феромагнетизму дала змогу пояснити існування магнітного насичення, яке полягає в тому, що вектори

магнітних моментів в усіх областях спонтанної намагніченості встановлюються паралельно до зовнішнього магнітного поля. Подальший розвиток теорії феромагнетизму Гейзенбергом і Френкелем, а також ряд експериментальних фактів дозволили з'ясувати природу елементарних носіїв феромагнетизму. Магнітні властивості феромагнетиків визначаються *спіновими магнітними моментами електронів*.

Феромагнітні властивості можуть мати лише кристалічні речовини, в атомах яких недобудовані внутрішні електронні оболонки з некомпенсованими спінами. У цих кристалах можуть виникати сили, які примушують спінові магнітні моменти електронів орієнтуватися паралельно один до одного, що і призводить до виникнення областей спонтанного намагнічення. Ці сили, що називаються *обмінними силами*, мають квантову природу - вони зумовлені хвильовими властивостями електронів.

КЛЮЧАРЬОВ ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ
(нар. 1910 р.)

Вперше застосував відпалювання в магнітному полі для поліпшення магнітних властивостей феромагнетиків, дослідив вплив різних видів деформацій на магнітні характеристики феромагнетиків, вивчив гальваномагнітні явища у феромагнетиках.

ГАЛКІН ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСАНДРОВИЧ
(1914-1982)

Виявив термодинамічно стійку доменну структуру в антиферомагнетиках і ефект незворотного індуктування нових феромагнетних станів сильним магнітним полем.

АХІЄЗЕР ОЛЕКСАНДР ІЛІЧ
(1911-2000)

Запропонував (1975-1976 рр.) мікроскопічне пояснення антиферомагнетизму металів на основі моделі колективізованих електронів.

БАР'ЯХТАР ВІКТОР ГРИГОРОВИЧ
(нар. 1930 р.)

Розробив теорію релаксаційних, високочастотних процесів і явищ перенесення у феромагнетиках і у антиферомагнетиках.

Виконав дослідження з динаміки циліндричних магнітних доменів. Передбачив утворення доменної структури в околі фазових переходів I роду.

СРЕМЕНКО ВІКТОР ВАЛЕНТИНОВИЧ
(нар. 1932 р.)

Відкрив проміжний стан в антиферомагнетних і феромагнетних кристалах в околі орієнтаційних фазових переходів I роду, індукованих зовнішнім магнітним полем. Практичне значення відкритого явища полягає у можливості використання його для побудови нових елементів пам'яті з високою густиною інформації, що записується.

§79. Явище електромагнітної індукції. Закон Ленца. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея)

Після відкриття Ерстеда, в якому було доведено, що навколо провідників із струмом існує магнітне поле, природно було поставити питання про можливість утворення електричного струму у провідниках за допомогою магнітного поля. Це питання розв'язав М. Фарадей, який в 1831 р. показав, що в замкненому провіднику виникає електричний струм при будь-яких змінах магнітного потоку через поверхню, охоплену цим провідником.

Явище виникнення електрорушійної сили при зміні магнітного потоку, що пронизує поверхню, яка охоплена провідним, контуром, називається електромагнітною індукцією.

Струм, що виникає у провідниках при електромагнітній індукції, називається індукційним.

Виникнення індукційного струму завжди пов'язане із зміною магнітного потоку через поверхню, яку охоплює провідник. Ці зміни можуть відбуватися з різних причин, зокрема через:

- переміщення постійного магніту відносно нерухомого провідника;
- переміщення контуру відносно нерухомого магніту;
- замикання та розмикання струму в обмотці нерухомого електромагніту, розміщеного поблизу провідника;

- відносне переміщення контуру і електромагніту;
- зміну магнітної індукції поля електромагніту (виймання осердя при сталому струмі в обмотці або зміну струму реостатом);
- зміну комутатором напрямку струму в обмотці електромагніту;
- постійний рух контуру в неоднорідному магнітному полі;
- обертальний рух контуру в однорідному магнітному полі.

Отже, індукційний струм в замкненому провідному контурі виникає тільки тоді, коли змінюється магнітний потік, який проходить через площу, охоплену контуром.

Фарадей встановив, що напрямок індукційного струму в провіднику залежить від характеру зміни (збільшення чи зменшення) магнітного потоку ($\Delta\Phi > 0$ чи $\Delta\Phi < 0$) через його контур. Якщо при внесенні постійного магніту в котушку стрілка гальванометра відхиляється в один бік, то при вийманні магніту вона відхиляється в протилежний бік.

Загальне правило, за допомогою якого можна визначити напрямок індукційного струму в замкненому провіднику, сформулював Е.Х. Ленц:

індукційний струм у замкненому провіднику завжди має такий напрямок, що створений цим струмом власний магнітний потік протидіє тим змінам зовнішнього магнітного потоку, які збуджують індукційний струм.

Використовуючи закон Ленца для визначення напрямку індукційного струму, треба:

- 1) знайти причину, яка створює індукцій-

ний струм;

2) вважаючи, що індукційний струм протидіє цій причині, знайти напрямок його магнітного поля;

3) визначити напрямок індукційного струму за напрямком його магнітного поля.

Із закону Ленца можна встановити, що енергія індукційного струму у провіднику утворюється за рахунок тієї енергії, яка витрачається на подолання протидії магнітного поля індукційного струму.

Завдяки явищу електромагнітної індукції можна перетворити механічну енергію в електричну, а також передавати електричну енергію з одного кола в інше.

Якщо індукційний струм виникає у прямому провіднику, який є ділянкою замкненого кола і рухається в зовнішньому магнітному полі перпендикулярно до лінії індукції, напрямок струму можна визначити за **правилом правої руки**: праву руку треба помістити в магнітному полі так, щоб лінії напруженості входили в долоню, а відставлений під прямим кутом великий палець збігався з напрямом переміщення провідника, тоді чотири витягнуті пальці вкажуть напрямок індукційного струму в цьому провіднику.

Індукційний струм I_i у замкненому провіднику з опором R виникає під дією \mathcal{E}_i , яку можна виразити за законом Ома

$$\mathcal{E}_i = I_i R.$$

Оскільки та сама ЕРС у провідниках з різним опором створює неоднакові струми, то для кількісної характеристики явища електромагнітної індукції зручніше користуватися величиною \mathcal{E}_i , а не силою індукційного струму I_i .

Дослідження Фарадея індукційного струму в контурах різної форми і розмірів

показали, що \mathcal{E}_i електромагнітної індукції в контурі пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку Φ_B через поверхню, обмежену цим контуром (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_i = k \frac{d\Phi_B}{dt}$$

\mathcal{E}_i електромагнітної індукції в контурі вважають позитивною, якщо магнітний момент \vec{p}_m відповідного їй індукційного струму утворює гострий кут з лініями магнітної індукції того поля, яке наводить цей струм (рис. 193).

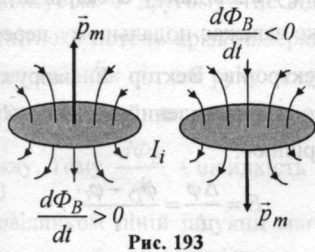


Рис. 193

Тоді для випадку, зображеного на рисунку ліворуч, $\mathcal{E}_i < 0$, а для зображеного праворуч – $\mathcal{E}_i > 0$. В системі СІ $k = -1$ і

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Знак „-” є математичним виразом правила Ленца.

Ця формула, яка об’єднує закони Фарадея і Ленца, є математичним виразом основного закону електромагнітної індукції:

електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкненому контурі числово дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Якщо \mathcal{E}_i індукції виникає при зміні магнітного потоку, який пронизує котушку з N витків, то її величина буде відповідно в N разів більшою, ніж для од-

ного витка, тобто

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d\psi}{dt}$$

На основі закону електромагнітної індукції можна означити одиницю магнітного потоку вебер: 1 Вб – це такий магнітний потік, при зменшенні якого до нуля протягом 1 с в колі, яке він пронизував, виникає \mathcal{E}_i індукції в 1 В .

§80. Виведення закону електромагнітної індукції із закону збереження енергії, а також на основі електронної теорії

Німецький фізик Гельмгольц показав, що основний закон електромагнітної індукції – закон Фарадея – є наслідком закону збереження енергії.

Помістимо в однорідне магнітне поле з індукцією \vec{B} провідник завдовжки l з опором R , який є ділянкою замкненого кола $CDKL$ (рис. 194).

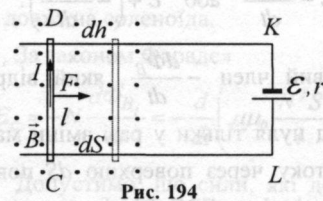


Рис. 194

Опором з’єднувальних провідників DK , KL і LC нехтуємо. Провідник DC рухається без тертя по ділянках DK і LC .

Джерело постійного струму з \mathcal{E}_i і внутрішнім опором r створює в замкненому колі струм I :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

При цьому на провідник l діє сила Ампера $F = BIl$, внаслідок чого провідник переміщуватиметься прискорено і за час dt пройде шлях dh . При проходженні струму I в замкненому колі $CDKL$ протягом часу dt відбуваються такі процеси:

а) виконується робота на подолання електричного опору $(R+r)$ кола:

$$dA_1 = I^2(R+r)dt;$$

б) виконується механічна робота при переміщенні провідника на шляху dh :

$$dA_2 = Fdh = IBldh = IBdS = Id\Phi_B.$$

За законом збереження енергії сума робіт dA_1 і dA_2 повинна дорівнювати повній роботі джерела струму $dA = \mathcal{E}Idt$, тобто

$$I^2(R+r)dt + Id\Phi_B = \mathcal{E}Idt.$$

Звідси

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt}}{R+r}.$$

Ця формула виражає закон Ома для замкнутого кола, яке поміщене в магнітне поле. Роль діючої ЕРС в такому колі відіграє вираз

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt} \text{ або } \mathcal{E} + \left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right).$$

Додатковий член $-\frac{d\Phi_B}{dt}$, який відрізняється від нуля тільки у разі зміни магнітного потоку через поверхню dS повинен мати розмірність ЕРС. Він і визначає ЕРС індукції \mathcal{E}_i :

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

ЕРС електромагнітної індукції виникає не тільки в замкнутому контурі, а й на відрізку провідника, який, рухаючись перетинає лінії індукції магнітного поля.

Для спрощення вважатимемо, що

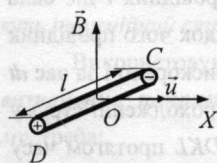


Рис. 195

відрізок прямолінійного металевого провідника DC завдовжки l рухається із сталою швидкістю \vec{u} перпендикулярно до вектора \vec{B} магнітної індукції (рис. 195). На електроні провідності металу діє сила Лоренца

кiстю \vec{u} перпендикулярно до вектора \vec{B} магнітної індукції (рис. 195). На електроні провідності металу діє сила Лоренца

$$\vec{F}_n = -e[(\vec{u} + \vec{u}')\vec{B}],$$

де \vec{u}' - швидкість впорядкованого руху електронів вздовж провідника. Ця швидкість зумовлена дотичною до провідника складовою сили Лоренца $\vec{F}'_n = -e[\vec{u}\vec{B}]$ і напрямлена від D до C . Вона відмінна від нуля лише на початку руху провідника, оскільки впорядкований рух електронів уздовж провідника від D до C викликає виникнення у провіднику електростатичного поля, яке заважає подальшому перерозподілу електронів. Вектор \vec{E} напруженості цього поля напрямлений від D до C і числово дорівнює:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\varphi_D - \varphi_C}{l}.$$

Сила $e\vec{E}$, що діє на електрон з боку електричного поля, протилежна за напрямком до сили Лоренца. Якщо числові значення цих сил дорівнюють одне одному, то подальший рух електронів в провіднику припиниться.

Тому для рівноважного стану ($u' = 0$) маємо $eE = euB$ або $\frac{\Delta\varphi}{l} = uB$.

За законом Ома для розімкнутого кола ($I = 0$) $\Delta\varphi = \varphi_D - \varphi_C = -\mathcal{E}$, де \mathcal{E} - електрорушійна сила, яка виникла у провіднику DC . Оскільки на ділянці DC гальванічних елементів, або інших джерел струму немає, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i$. Тоді

$$\mathcal{E}_i = -Bul.$$

Тому що швидкість u руху провідника вздовж Ox дорівнює $\frac{dx}{dt}$, то

$$\mathcal{E}_i = -Bl \frac{dx}{dt} = -B \frac{dS}{dt},$$

де $dS = ldx$ – площа поверхні, яку описує провідник під час руху за час dt .

Оскільки $BdS = d\Phi_B$ – магнітний потік через цю поверхню, то,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Зміст правої частини рівняння для контуру і відрізка провідника різний. У першому випадку $\frac{d\Phi_B}{dt}$ – швидкість зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром. У другому – це відношення магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час руху за дуже малий проміжок часу, до величини dt цього проміжку. Тому $\frac{d\Phi_B}{dt}$ – швидкість перетину провідником ліній індукції магнітного поля.

§81. Явище самоіндукції. Індуктивність

Згідно із закону Фарадея, електроорушійна сила індукції \mathcal{E}_i виникає при будь-яких змінах магнітного потоку Φ_B через поверхню, охоплену провідним контуром, незалежно від природи цього потоку і рівна

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Під час проходження по контуру непостійного струму власний магнітний потік змінюється і в контурі теж наводиться ЕРС індукції.

Явище виникнення в контурі ЕРС індукції при змінах власного магнітного потоку, пов'язаних із зміною струму в цьому контурі, називається *самоіндукцією*. Електроорушійна сила в цьому випадку

називається ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_c .

Отже, самоіндукція – це окремий випадок загального явища електрорушійної індукції.

Розглянемо соленоїд, що має N витків, по яких проходить струм I від зовнішнього джерела. Цей струм створює в соленоїді магнітне поле, яке зосереджене в його об'ємі і це поле можна вважати однорідним. Нехай весь об'єм магнітного поля соленоїда заповнений однорідною речовиною з відносною магнітною проникністю μ . Якщо змінювати струм в соленоїді, то власний магнітний потік Φ_B , який пронизує його поперечний переріз, теж змінюватиметься. Магнітний потік Φ_B крізь площу S , що обмежена одним витком, дорівнює

$$\Phi_{B_i} = BS = \mu\mu_0 nSI = \mu\mu_0 \frac{NS}{l} I,$$

де l – довжина соленоїда.

За законом Фарадея

$$\mathcal{E}_c = -N \frac{d\Phi_{B_i}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I \right).$$

Допустимо, що сили, які деформують соленоїд, дуже малі і тому l і S залишаються сталими. Якщо всередині соленоїда знаходиться феромагнітне осердя, то магнітний потік Φ_B змінюється не лише внаслідок зміни сили струму I , але і від зміни μ . Позначимо

$$\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = L.$$

Тоді

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}.$$

Якщо магнітна проникність середовища μ не змінюється, то

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

ЕРС самоіндукції прямо пропорційна швидкості зміни сили струму в контурі.

Параметр L характеризує індивідуальні властивості контуру. Його називають *коефіцієнтом індуктивності*, або просто *індуктивністю* контуру.

Індуктивність контуру залежить від форми контуру, його розмірів та відносної магнітної проникності середовища, в якому він знаходиться.

З виразів для *ЕРС* самоіндукції, а саме

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{та} \quad \mathcal{E}_c = -N \frac{d\Phi_{B_1}}{dt} = -\frac{d\psi_c}{dt},$$

де ψ_c - потокозчеплення самоіндукції, отримусмо, що

$$LdI = d\psi_c.$$

Після інтегрування ця рівність має вигляд:

$$LI = \psi_c.$$

Отже, *індуктивністю* замкнутого контуру називається скалярна величина L , яка дорівнює відношенню потокозчеплення самоіндукції контуру ψ_c до сили струму I в цьому контурі:

$$L = \frac{\psi_c}{I}.$$

Одиниця індуктивності – генрі ($Gн$): $1 Gн$ – індуктивність такого контуру, потокозчеплення самоіндукції якого при струмі $1 A$ дорівнює $1 Вб$.

Формулу $\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}$ можна використати для провідників довільної форми, якщо знайти потокозчеплення $\psi_c = LI$, яке зв'язане з цим провідником при силі струму I .

У виразі для *ЕРС* самоіндукції знак

„-“, зумовлений правилом Ленца, показує, що наявність індуктивності контура приводить до сповільнення зміни струму в ньому. Тобто індуктивність контуру є мірою його інертності відносно зміни струму.

Якщо струм з часом збільшується, то $\frac{dI}{dt} > 0$ і, $\mathcal{E}_c < 0$, тобто струм самоіндукції напрямлений назустріч струму, який зумовлений зовнішнім джерелом і гальмує його зростання. Якщо струм з часом зменшується, то $\frac{dI}{dt} < 0$, і $\mathcal{E}_c > 0$, тобто індукційний струм має такий напрямок, як і спадний струм в контурі, і сповільнює його зменшення.

Явище самоіндукції найбільш яскраво проявляється у виникненні так званих *екстраструмів замикання та екстраструмів розмикання* в колах, що містять котушки з великою індуктивністю.

Знайдемо закон зміни струму в колі, індуктивність якого L , а електричний опір – R , під час вмикання в це коло і вимикання з нього джерела *ЕРС* \mathcal{E} . Сила струму I дорівнює

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R},$$

де \mathcal{E} - алгебраїчна сума *ЕРС* джерел струму, ввімкнених в коло, а \mathcal{E}_i - *ЕРС* індукції. Якщо зовнішнє магнітне поле постійне, то індукційні явища в нерухомому колі зумовлені лише явищем самоіндукції, тому

$$I = \frac{\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Розділимо змінні в цьому рівнянні:

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L}.$$

Звідси

$$\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L}$$

Вважаючи \mathcal{E} , R та L сталими та інтегруючи, дістанемо

$$-\ln(\mathcal{E} - IR) = \frac{R}{L}t + \ln C,$$

де C - довільна стала інтегрування.

Потенціюючи дане рівняння, маємо

$$\mathcal{E} - IR = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

В початковий момент часу $t = 0$ сила струму дорівнює I_0 . Тоді

$$\mathcal{E} - I_0R = C.$$

В результаті

$$\mathcal{E} - IR = (\mathcal{E} - I_0R)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Звідси знайдемо вираз для сили струму:

$$IR = I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} + \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$$

і

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Для випадку вмикання джерела ЕРС початковий струм $I_0 = 0$ і отримуємо вираз для екстраструму замикання

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Струм у колі поступово збільшується від нуля при $t = 0$ до значення $\frac{\mathcal{E}}{R}$, яке

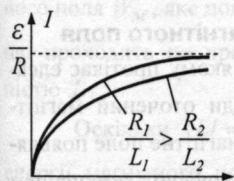


Рис. 196

відповідає величині постійного струму (рис. 196). Зростання струму відбувається тим швидше, чим більше відношення $\frac{R}{L}$.

Для випадку вимикання джерела ЕРС $\mathcal{E} = 0$, і екстраструм розмикання змінюється за законом

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Струм у колі поступово зменшується від початкового значення I_0 до нуля за експоненціальним законом (рис. 197).

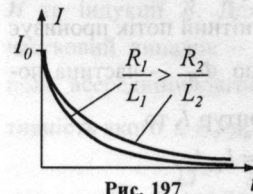


Рис. 197

Струм зменшується тим швидше, чим більше значення $\frac{R}{L}$, тобто чим більший опір кола і чим менша його індуктивність.

§82. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність

Якщо два контури розміщені так, що магнітний потік, який створюється струмом в одному з них, хоч частково пронизує другий контур, то такі контури індуктивно пов'язані між собою і між ними виникає **взаємодукція**.

Розглянемо два нерухомі контури, індуктивності яких L_1 і L_2 , що розміщені досить близько один від одного (рис. 198). Якщо в контурі 1 тече струм I_1 , то магнітний потік, що створюється цим струмом, пропорційний до I_1 .

Позначимо $\Phi_{B_{12}}$ ту частину потоку, яка пронизує контур 2. Тоді

$$\Phi_{B_{12}} = L_{12}I_1,$$

де L_{12} - коефіцієнт пропорційності.

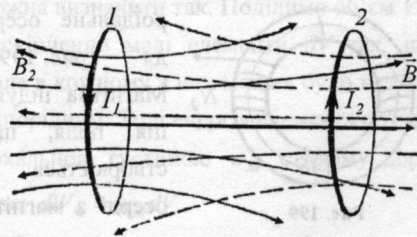


Рис. 198

Якщо струм I_1 змінюється, то в контурі 1 індукція ЕРС \mathcal{E}_{i2} , яка за законом

Фарадея дорівнює швидкості зміни магнітного потоку $\Phi_{B_{12}}$:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{B_{12}}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогічно, при протіканні в контурі 2 струму I_2 магнітний потік пронизує перший контур. Якщо $\Phi_{B_{21}}$ - частина потоку, що пронизує контур 1, то

$$\Phi_{B_{21}} = L_{21} I_2.$$

Якщо струм I_2 змінюється, то в контурі 1 індукується ЕРС \mathcal{E}_{i1} :

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{B_{21}}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}.$$

Контури 1 і 2 називаються зв'язаними. Коефіцієнти L_{12} і L_{21} називаються взаємною індуктивністю контурів.

Вони є мірою магнітного індуктивно зв'язку між двома контурами і характеризують їх здатність збуджувати ЕРС індукції в одному з них при зміні струму в другому.

Розрахунки показують, що

$$L_{12} = L_{21}.$$

Коефіцієнти L_{12} і L_{21} залежать від геометричної форми, розмірів, взаємного розміщення контурів і від магнітної проникності середовища, яке оточує контури.

Розрахуємо взаємну індуктивність двох котушок, які намотані на спільне то-

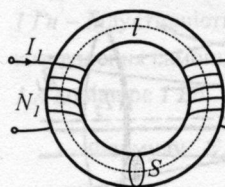


Рис. 199

роїдальне осердя (рис. 199). Магнітна індукція поля, що створюється в осерді з магнітною проникністю μ , струмом силою I_1 в першій котушці з кількістю витків N_1 , дорівнює:

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l},$$

де l - довжина осердя по середній лінії.

Магнітний потік через один виток другої котушки

$$\Phi_{B_2} = B_1 S = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} S.$$

Тоді потокозчеплення через вторинну обмотку, що має N_2 витків,

$$\psi_2 = \Phi_{B_2} N_2 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Потокозчеплення ψ_2 створюється струмом I_1 , тому отримуємо

$$L_{12} = \frac{\psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Якщо обчислити потокозчеплення, що створюється котушкою 2 через котушку 1, коли по котушці 2 проходить струм I_2 , то отримуємо

$$L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Отже,

$$L_{12} = L_{21}.$$

Оскільки індуктивність контурів

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \quad \text{і} \quad L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} S,$$

то коефіцієнти взаємної індукції

$$L_{12} = L_{21} = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

§83. Енергія магнітного поля

Провідник, по якому протікає електричний струм, завжди оточений магнітним полем, причому магнітне поле появляється і зникає разом з появою і зникненням струму. Отже, частина енергії струму йде на створення магнітного поля.

Енергія магнітного поля дорівнює роботі, яка затрачається струмом на створення цього поля.

Обчислимо енергію магнітного поля струму у випадку ізотропного середовища, в якому зв'язок індукції з напруженістю поля в ньому лінійний. Для цього розглянемо соленоїд з N витків, який має індуктивність L . Якщо за час dt струм у соленоїді зростає на величину dI , то при цьому змінюється і його власний магнітний потік відповідно на величину $d\Phi_B$. Якщо в момент часу t сила струму в соленоїді була I , то при зміні магнітного потоку на величину $d\Phi_B$, джерелом струму виконується додаткова робота dA :

$$dA = Id\Phi_B.$$

Оскільки соленоїд залишається нерухомим, то ця елементарна робота dA пов'язана із зміною енергії соленоїда, яка зумовлена наявністю в ньому магнітного поля, на величину dW_M :

$$dW_M = dA \quad \text{і} \quad dW_M = Id\Phi_B.$$

Оскільки $d\Phi_B = LI$, то $dW_M = LI dI$.

Інтегруючи цей вираз, знаходимо

$$\int_0^{W_M} dW_M = \int_0^I LI dI; \quad W_M = \frac{LI^2}{2}.$$

Це та енергія, яку було затрачено джерелом струму на утворення в соленоїді магнітного поля. За законом збереження енергії ця енергія дорівнює енергії магнітного поля W_M , яке пов'язане зі струмом I , що проходить по провіднику з індуктивністю L .

Оскільки $LI = \psi_c$, то вираз для енергії магнітного поля контуру зі струмом можна записати в такому вигляді:

$$W_M = \frac{\psi_c I}{2}.$$

Дослідження властивостей змінних магнітних полів було доказом того, що

енергія магнітного поля локалізована у просторі.

Енергію магнітного поля струму можна визначити через характеристики цього поля - значення його напруженості H та індукції B . Для цього розглянемо частковий випадок - однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда, індуктивність якого $L = \mu\mu_0 n^2 V$. Тоді

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V.$$

Магнітна індукція поля в середині довгого соленоїда $B = \mu\mu_0 In$. Звідси

$$In = \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

Тоді

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{B^2}{(\mu\mu_0)^2} V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} V.$$

Оскільки $B = \mu\mu_0 H$, то

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 V = \frac{1}{2} BHV.$$

Магнітне поле соленоїда однорідне і зосереджене всередині соленоїда, а енергія поля розподілена в ньому з об'ємною густиною w_M , яка дорівнює

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

У випадку неоднорідного магнітного поля його енергію в деякому об'ємі V можна визначити так. Поділимо об'єм V на нескінченно малі елементи dV так, щоб поле в кожному з них можна було вважати однорідним. Тоді енергія елемента об'єму з локальною густиною w_M в ньому дорівнює: $dW_M = w_M dV$.

Інтегруючи цей вираз по всьому об'єму поля V , отримаємо формулу для обчислення енергії неоднорідного поля:

$$W_M = \int_V w_M dV = \int_V \frac{BH}{2} dV.$$

§84. Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля. Струм зміщення

У 60-х роках XIX століття Д. Максвелл, взявши за основу ідеї Фарадея про електричне і магнітне поле, узагальнив закони, виведені експериментально, і розробив завершену теорію єдиного електромагнітного поля, яке утворюється довільною системою зарядів і струмів.

Теорія Максвелла є *феноменологічною теорією* електромагнітного поля. Це означає, що у цій теорії не розглядається внутрішній механізм явищ, які відбуваються в середовищі і викликають появу електричних і магнітних полів.

Електричні і магнітні властивості середовища характеризуються у теорії Максвелла трьома величинами: відносною діелектричною проникністю ϵ , відносною магнітною проникністю μ і питомою електропровідністю σ . В теорії Максвелла не досліджується залежність ϵ , μ , σ від властивостей середовища, фізичний зміст тих явищ, які відбуваються у ньому при поляризації і намагнічуванні.

Теорія Максвелла є *макроскопічною теорією* електромагнітного поля. У ній розглядаються електричні і магнітні поля, які утворюються в об'ємах набагато більших, ніж об'єми окремих атомів і молекул. Крім того, припускається, що відстані від джерел полів до розглядуваних точок у багато разів більші від розмірів молекул.

У теорії Максвелла розглядаються усереднені електричні і магнітні поля, причому усереднення відповідних мікро-

полів виконується для інтервалів часу, значно більших від періодів обертання або коливання електричних зарядів і для ділянок поля, об'єми яких у багато разів більші від об'ємів атомів і молекул.

Теорія Максвелла є *теорією близькодії*, згідно з якою електричні і магнітні взаємодії здійснюються за допомогою електричних і магнітних полів і у яких вони поширюються із скінченною швидкістю.

Максвелл узагальнив закон електромагнітної індукції для замкненого нерухомого провідного контуру, що знаходиться у змінному магнітному полі.

Із закону Фарадея $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ можна зробити висновок, що будь-яка зміна магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром, приводить до виникнення *ЕРС* індукції і внаслідок цього виникає індукційний електричний струм.

Виникнення *ЕРС* індукції можливо і в нерухомому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі.

Однак *ЕРС* в контурі виникає лише тоді, коли в ньому на носії струму діють сторонні сили – сили неелектростатичного походження. Тому виникає питання про природу сторонніх сил в даному випадку.

Досліди показують, що ці сторонні сили не зв'язані ні з тепловими, ні з хімічними процесами в контурі. Їх не можна пояснити силами Лоренца, оскільки вони не діють на нерухомі заряди.

Тому для пояснення явища електромагнітної індукції в нерухомих провідниках Максвелл висунув гіпотезу:

змінне магнітне поле збуджує в навколишньому просторі вихрове непотенціальне (тобто неелектростатичне) електричне поле, яке і є причиною виникнення

індукційного струму в контурі.

Якщо \vec{E}_B - напруженість цього індукованого електричного поля, то відповідно до означення електрорушійної сили

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{E}_B d\vec{l}).$$

Магнітний потік Φ_B через поверхню, що обмежена контуром, може змінюватись завдяки зміні форми контуру та його розміщення у магнітному полі, а також внаслідок залежності магнітної індукції \vec{B} від часу. Для нерухомого контуру потрібно врахувати залежність магнітної індукції лише від часу і тому замість $\frac{d\Phi_B}{dt}$ треба брати частинну похідну $\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}$. Тому ЕРС індукції в нерухомому провіднику дорівнює

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}.$$

Оскільки

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B} d\vec{S}),$$

$$\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right),$$

$$\mathcal{E}_i = -\int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right).$$

Отже, циркуляція напруженості \vec{E}_B індукованого поля вздовж замкненого контуру L дорівнює

$$\oint_L (\vec{E}_B d\vec{l}) = -\int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right).$$

Тут $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, де \vec{n} - одиничний вектор нормалі до малого елемента dS поверхні S , яка натягнута на замкнений контур L .

Отже, змінне магнітне поле створює

в провідному замкненому контурі вихрове електричне поле, оскільки

$$\oint_L (\vec{E}_B d\vec{l}) \neq 0.$$

Циркуляція ж вектора електростатичного поля по довільному замкненому контурі дорівнює нулеві:

$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = \oint_L E_{q1} dl = 0.$$

Максвелл припустив, що змінне магнітне поле у будь-якій точці простору створює вихрове електричне поле незалежно від того, чи міститься у цій точці провідник, чи ні.

Отже, циркуляція вектора $\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q$ напруженості електричного поля по довільному нерухомому замкненому контурі, подумки проведеному в змінному електричному полі, дорівнює взятому з протилежним знаком потоку вектора $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ через поверхню S , яка натягнута на цей контур.

Якщо в контурі L , за яким обчислюється циркуляція вектора напруженості електричного поля, крім ЕРС електромагнітної індукції, ще є й інші ЕРС - $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, то загальна ЕРС дорівнює їх алгебраїчній сумі

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k.$$

Тому в загальному випадку

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = -\int_S \left(\frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} \right) + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k.$$

Явище виникнення у просторі вихрового електричного поля під впливом змінного магнітного поля було використано для створення індукційного прискорювача електронів - **бетатрона**.

Максвелл узагальнив закон повного струму

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \sum_i I_i.$$

Він припустив, що, крім струмів, зв'язаних з впорядкованим рухом зарядів, джерелом виникнення магнітного поля є також змінне електричне поле.

За теоремою Остроградського-Гауса потік вектора електричного зміщення через довільну замкнену поверхню S дорівнює

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q,$$

де q - алгебраїчна сума електричних зарядів, що охоплені замкненою поверхнею. Продиференціюємо цей вираз за часом

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S (\vec{D} d\vec{S}).$$

Якщо поверхня S нерухома і не деформується, то зміна в часі потоку зміщення через поверхню S зумовлюється лише зміною електричного зміщення \vec{D} з бігом часу. Тому повну похідну можна замінити частинною похідною по часу і диференціювання внести під знак інтеграла

$$\frac{dq}{dt} = I = \oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \right) = \oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою, яка зв'язує силу струму I в провіднику і густину \vec{j} струму провідності, а саме

$$I = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = \int_S j_n dS,$$

бачимо, що $\frac{\partial D_n}{\partial t}$ має розмірність густини струму.

Максвелл запропонував назвати ви-

раз $\frac{\partial D_n}{\partial t}$ *густиною струму зміщення*:

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Густина струму зміщення в даній точці дорівнює швидкості зміни вектора електричного зміщення в цій точці.

Струмом зміщення через довільну поверхню S називають фізичну величину, яка дорівнює потоку вектора густини струму зміщення крізь цю поверхню

$$I_{зм} = \int_S j_{змn} dS = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}.$$

Ввівши уявлення про струм зміщення, Максвелл зробив висновок про те, що кола будь-яких непостійних струмів замкнені так само, як і кола постійного струму. Замкненість таких кіл забезпечується струмами зміщення, які „проходять” у тих ділянках, де немає провідників, наприклад, між обкладинками конденсатора під час його заряджання або розряджання.

На рис. 200 зображені вектори густини струмів зміщення і вигляд ліній індукції їхніх магнітних полів: *а* - при заряджанні конденсатора (посилення електричного поля); *б* - при розряджанні конденсатора (ослаблення електричного поля).

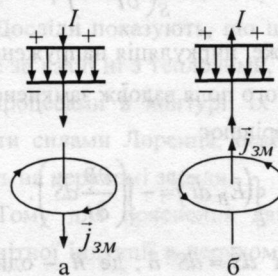


Рис. 200

За Максвеллом струм зміщення, як і звичайні струми провідності, є джерелом виникнення вихрового магнітного поля, циркуляція напруженості \vec{H} якого по за-

мкненому контуру не дорівнює нулю.

В діелектрику вектор зміщення \vec{D} складається з двох доданків: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, де \vec{E} - напруженість електростатичного поля, \vec{P} - вектор поляризації, який характеризує дійсне зміщення електричних зарядів у неполярних молекулах і поворот полярних молекул, що містяться в одиниці об'єму діелектрика.

Густина струму зміщення в діелектрику

$$\vec{j}_{зм} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

де $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - густина струму зміщення у вакуумі, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - густина струму поляризації, що обумовлений зміщенням або поворотом зарядів в діелектрику.

Струм зміщення у вакуумі не виділяє тепла. Густина цього струму тим більша, чим більша швидкість зміни напруженості електричного поля

В загальному випадку струми провідності і зміщення в просторі не розділені, вони знаходяться в одному і тому самому об'ємі. Максвелл ввів поняття **повного струму**, що дорівнює сумі струмів провідності і конвекційних, а також струму зміщення. Густина повного струму

$$\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \vec{j}_{зм} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Повний струм в колах змінного струму завжди замкнений.

Максвелл узагальнив закон повного струму, ввівши в його праву частину повний струм $I_{повн} = \int_S (\vec{j}_{повн} d\vec{S})$, що охоплюється замкненим контуром L .

Узагальнений закон повного струму має вигляд

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Циркуляція вектора напруженості \vec{H} магнітного поля вздовж замкненого контура L дорівнює повному струму, що пронизує поверхню, обмежену цим контуром.

Якщо струмів провідності, конвекційних струмів і всіх ЕРС, крім ЕРС електромагнітної індукції, немає то отримуємо такі рівняння

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \quad \oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}.$$

Порівнюючи ці рівняння, можна зробити такі висновки:

а) між електричним і магнітним полями існує взаємний зв'язок: зміна в часі магнітного поля веде до появи електричного поля, а змінне електричне поле є джерелом вихрового магнітного поля;

б) знаки при швидкостях зміни потоків магнітної індукції і електричного зміщення різні, причому напрямки $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ і

\vec{H} утворюють „правогвинтову” систему (рис. 201а), у той час як напрямки $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ і \vec{E} утворюють „лівогвинтову” систему (рис. 201б).

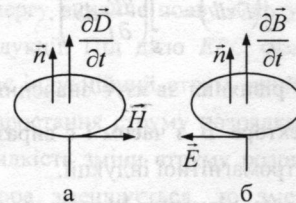


Рис. 201

Різниця в знаках правих частин цих рівнянь відповідає вимогам закону збере-

ження енергії і закону Ленца. Ця різниця в знаках є необхідною умовою існування стійкого електромагнітного поля.

§85. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля

Відкриття струму зміщення дозволило Максвелду створити єдину теорію електричних і магнітних явищ. Ця теорія пояснила всі відомі того часу експериментальні факти і передбачила ряд нових явищ, існування яких підтвердилось пізніше.

Рівняння Максвелла пов'язують зміни основних характеристик електромагнітного поля - векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} в даному матеріальному середовищі з розподілом у ньому електричних зарядів і струмів.

Середовище в рівняннях Максвелла враховується феноменологічно, тобто без розкриття внутрішнього механізму взаємодії речовин з полем.

В основі теорії Максвелла лежать чотири рівняння.

I. Електричне поле може бути як потенціальним (\vec{E}_q), так і вихровим (\vec{E}_B). Тому напруженість сумарного поля $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$. Оскільки циркуляція вектора \vec{E}_q вздовж довільного замкненого контура дорівнює нулю, то циркуляція вектора \vec{E} сумарного поля

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right).$$

Це рівняння зв'язує значення \vec{E} із зміною вектора \vec{B} з часом і є виразом закону електромагнітної індукції.

Перше рівняння Максвелла вказує на те, що джерелами електричного поля можуть бути не тільки електричні заряди,

але і змінні з часом магнітні поля.

II. Узагальнена теорема про циркуляцію вектора \vec{H} :

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Це рівняння показує, що магнітні поля можуть збуджуватись або рухомими зарядами, або змінними електричними полями.

III. Теорема Остроградського-Гауса для потоку вектора електричного зміщення \vec{D} крізь довільну замкнену поверхню S , що охоплює сумарний заряд q :

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q.$$

Якщо заряд розподілений всередині замкненої поверхні з об'ємною густиною ρ , то

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV.$$

IV. Теорема Остроградського-Гауса для магнітного потоку крізь довільну замкнену поверхню S :

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0.$$

Отже, повна система рівнянь Максвелла в інтегральній формі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \oint_L (\vec{E} d\vec{l}) &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, & \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) &= \int_V \rho dV, \\ \oint_L (\vec{H} d\vec{l}) &= \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, & \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) &= 0. \end{aligned}$$

Величини, що входять в рівняння Максвелла, не є незалежними і між ними є такий зв'язок:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Зазначимо, що до першого та четвертого рівняння Максвелла входять лише

основні характеристики поля \vec{E} і \vec{B} , а в друге і третє – лише допоміжні величини \vec{D} і \vec{H} .

Рівняння Максвелла несиметричні відносно полів. Це зв'язано з тим, що в природі існують електричні заряди, а нема магнітних.

Для стаціонарних полів ($E = const$ і $B = const$) рівняння Максвелла мають такий вигляд:

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{l}) = 0, \quad \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q,$$

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I, \quad \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0.$$

В даному випадку електричні і магнітні поля існують незалежно одне від одного.

За допомогою рівняння Максвелла для електромагнітного поля можна знайти співвідношення між тангенціальними і нормальними складовими векторів \vec{E} , \vec{D} і \vec{B} , \vec{H} на межі поділу двох різнорідних діелектриків. Якщо на межі поділу відсутні вільні заряди і струми провідності, то для тангенціальних складових – проєкцій векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} на дотичну площину – мають місце такі співвідношення:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau},$$

а для нормальних складових – проєкцій векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , на спільну нормаль до межі поділу двох середовищ:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad B_{1n} = B_{2n},$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

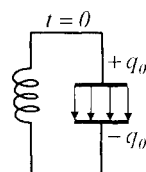
де ε_1 , μ_1 , ε_2 , μ_2 - відносні діелектричні і

магнітні проникності відповідно першого і другого середовищ.

§86. Електричний коливальний контур. Власні електромагнітні коливання

Розглянемо електромагнітні коливання, при яких періодично змінюються електричні величини, а саме заряд, сила струму, енергія електричного і магнітного полів. Для збудження і підтримування електромагнітних коливань потрібні певні системи, найпростішою з яких є **коливальний контур** — коло, що складається з з'єднаних послідовно котушки індуктивності L , конденсатора ємності C і резистора опором R .

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого малий ($R = 0$). Для збудження коливань в контурі конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладкам заряди $\pm q_0$ (рис. 202). Тоді в початковий



момент $t = 0$ між обкладками конденсатора виникає електричне поле, енергія якого $W_{ел0} = \frac{1}{2C} q_0^2$. Якщо

замкнути конденсатор на котушку, то він почне розряджатися і в контурі потече струм I , який з часом зростає. Цей струм створить в котушці магнітне поле, що також зростає і в свою чергу викличе появу в котушці E_{PC} самоіндукції. Під дією E_{PC} самоіндукції виникає індукційний струм, який сповільнює наростання струму розрядки. Оскільки швидкість зміни струму розрядки конденсатора зменшується, то зменшується E_{PC} самоіндукції і струм розрядки наростає. В результаті енергія електричного по-

Рис. 202

ля буде зменшуватися, а магнітного поля котушки - зростати. Оскільки ($R = 0$), то згідно із законом збереження енергії повна енергія

$$W = \frac{1}{2C} q_0^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)_0^2 = const.$$

Тому в момент $t = \frac{1}{4} T$, коли кон-

денсатор розрядиться, (рис. 203), енергія електричного поля дорівнює нулю, а енергія магнітного поля і

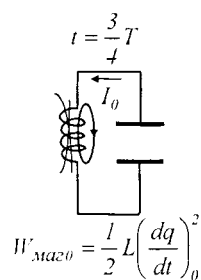


Рис. 203

струм досягають максимального значення, відповідно $W_{маг0}$ і I_0 . З цього моменту струм в контурі починає зменшуватися і почне зменшуватися магнітне поле котушки, і в ній індукується струм, який тече в тому самому напрямку, що і струм розрядки конденсатора.

Конденсатор почне перезаряджатися, виникне електричне поле, що прагне зменшити струм, який зрештою буде дорівнювати нулю, а заряд на обкладках конденсатора досягне максимуму. Далі ті самі процеси почнуть протікати в зворотному напрямку (рис. 204) і система прийде у початковий стан.

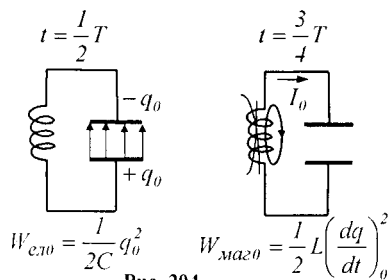


Рис. 204

Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядження і заряд-

ження конденсатора. Якщо би втрати енергії не було, то в контурі здійснювались би періодичні незгасаючі коливання.

В контурі виникають коливання, які супроводжуються перетвореннями енергії електричного і магнітного полів. Такі коливання називаються електромагнітними.

Згідно з другим правилом Кірхгофа для довільного контуру, що містить котушку індуктивністю L , конденсатор ємністю C і резистор опором R , $IR + U = \mathcal{E}_c$,

де IR - спад напруги на резисторі, $U = \frac{q}{C}$

- напруга на конденсаторі, $\mathcal{E}_c = -L \frac{dl}{dt}$ -

\mathcal{E}_{PC} самоіндукції, отже,

$$L \frac{dl}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0.$$

Оскільки

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \text{і} \quad \frac{dl}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}, \text{ то}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Якщо зовнішні \mathcal{E}_{PC} відсутні, то коливання будуть вільні. А якщо $R = 0$, то вільні коливання в контурі будуть гармонічними. Диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду q в контурі:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

де $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - власна частота контуру.

Звідси

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де q_0 - амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою ω_0 .

Період власних коливань, які вини-

кають в контурі,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Це співвідношення називають *формулою Томсона*.

Сила струму в коливальному контурі змінюється за законом

$$i = -q_0\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

де $I_0 = \omega_0 q_0$ - амплітуда сили струму.

Упродовж першої половини періоду струм іде в одному напрямку, а протягом другої половини – в протилежному.

Напруга на конденсаторі

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $U_0 = \frac{q_0}{C}$ - амплітуда напруги.

Коливання струму i випереджують за фазою коливання заряду q на $\frac{\pi}{2}$, тобто коли струм досягає максимального значення, заряд і напруга дорівнюють нулю і навпаки.

Оскільки

$$U_0 = \frac{q_0}{C} \quad \text{і} \quad I_0 = \omega_0 q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}, \text{ то}$$

$$U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величину $\sqrt{\frac{L}{C}}$ називають *хвильовим опором* контуру.

§87. Основні властивості електромагнітних хвиль

Згідно з теорією Максвелла змінне електричне і магнітне поле тісно взаємозв'язане, вони утворюють єдине електромагнітне поле.

Джерелами електромагнітного поля служать різні змінні струми: змінний

струм у провідниках, коливальний рух іонів, електронів й інших заряджених частинок.

Простою системою, яка еквівалентна змінному струму, є електричний диполь з моментом, що гармонічно змінюється. В початковий момент заряди $+q$ і $-q$ такого диполя суміщені один з одним і тому електричний момент $p = 0$ (рис. 205).

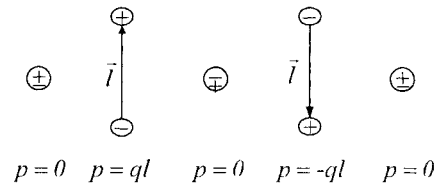


Рис. 205

Через чверть періоду заряди розходяться на максимальну відстань l , момент диполя максимальний і $p = ql$. Через півперіод заряди знову сходяться ($p = 0$), а потім через $t = \frac{3}{4}T$ розходяться в протилежні сторони на відстань l і $p = -ql$. Потім процес періодично повторюється.

Змінне електричне поле, яке виникає під час руху зарядів, породжує змінне магнітне поле, а змінне магнітне поле створює змінне електричне поле. Ці вторинні змінні поля мають вихровий характер. Отже, у просторі, який оточує заряди, виникає послідовність взаємних перетворень електричних і магнітних полів, що поширюються від точки до точки. Цей процес буде періодичним у часі і просторі і, отже, є хвилею.

Електромагнітні хвилі – це сукупність електричного та магнітного полів, напруженості яких змінюються з часом за періодичним законом і які поширюються в просторі з кінцевою швидкістю окремо від зарядів.

Джерелом електромагнітних хвиль може бути і коливальний контур. Щоб випромінювання відіграло помітну роль, необхідно здійснити перехід від закритого коливального контуру, в якому електричне поле зосереджене між обкладками конденсатора, а магнітне - всередині котушки індуктивності, до відкритого коливального контуру (вібратор Герца), що має вигляд двох стрижнів, розділених іскровими проміжками. У відкритому контурі змінне електричне поле заповнює простір, що оточує контур, що істотно підвищує інтенсивність електромагнітного випромінювання.

З рівнянь Максвелла

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \right), \quad \oint_L (E d\vec{l}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right)$$

можна отримати рівняння плоскої електромагнітної хвилі.

Припустимо, що в тому місці, де збуджується електромагнітне поле, вектор \vec{E} весь час залишається паралельним до координатної осі OZ , тоді $E = E_z$, $E_x = E_y = 0$, а вектор \vec{H} паралельний до координатної осі OY і $H = H_y$, $H_x = H_z = 0$.

Оскільки в рівняннях Максвелла контури L можуть бути довільної форми і розмірів, то для першого з рівнянь виберемо елементарний контур $Oabc$, що лежить в площині XOY , а для другого – контур $Odef$, що лежить в площині XOZ (рис. 206).

Вектори \vec{E} і \vec{H} є функціями координат і часу, тому їх значення в різних місцях контурів будуть різними. Наприклад, якщо в точці O вектор \vec{E} має значення

E_z , то в точці a з координатою dx його значення дорівнюватиме:

$$E_z + \frac{\partial E_z}{\partial x} dx,$$

де частинна похідна $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ характеризує швидкість зміни E_z в напрямку осі OX .

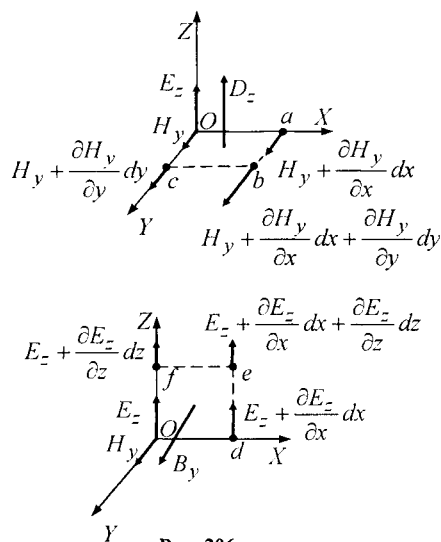


Рис. 206

Розрахуємо $\oint_L (\vec{H} d\vec{l})$. На ділянках

Oa і bc добуток $\vec{H} d\vec{l} = 0$, оскільки вектор \vec{H} перпендикулярний до Oa і bc . Для ділянок ab і Oc помножимо довжину кожної з цих ділянок dy на середнє значення вектора \vec{H} в межах цих ділянок; оскільки на ділянці cO вектор \vec{H} напрямлений проти обходу, то отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) + \right. \\ & \left. \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) \right] dy - \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) + H_y \right] dy = \frac{\partial D_z}{\partial t} dx dy, \end{aligned}$$

де $dx dy$ – площа, яка охоплена контуром.

Тоді

$$H_y dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy dy - H_y dy -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy dy = \frac{\partial D_z}{\partial t} dx dy.$$

Звідси

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Аналогічний розрахунок для другого рівняння і контуру *Odef* дає такий результат

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Розрахуємо частинні похідні за часом від $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ і за координатою x від $\frac{\partial E_z}{\partial t}$, вважаючи ϵ і μ сталими величинами.

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t}.$$

Звідси отримуємо *хвильове рівняння для E_z* :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Аналогічно, беручи частинні похідні по координаті x від $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ і по часу від $\frac{\partial E_z}{\partial x}$, отримуємо *хвильове рівняння для H_y* :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}.$$

Отже, змінне електромагнітне поле поширюється в просторі у вигляді електромагнітної хвилі.

Фазова швидкість електромагнітних хвиль визначається виразом

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ - електродинамічна стала.

Для вакууму $\mu = \epsilon = 1$ і $v = c$.

Оскільки $\epsilon \mu > 1$, то швидкість поширення електромагнітних хвиль у речовині завжди менша, ніж у вакуумі.

Величина $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ і збігається зі швидкістю світла у вакуумі. Це привело Максвелла до думки про електромагнітну природу світла.

З рівнянь Максвелла випливає висновок про те, що вектори \vec{E} і \vec{H} електромагнітної хвилі завжди взаємно перпендикулярні. Крім того, вони лежать у площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, тобто до вектора швидкості хвилі. Отже, електромагнітні хвилі є *поперечними*. Взаємна орієнтація трійки векторів \vec{E} , \vec{H} , і \vec{v} задовольняє таке правило: з кінця вектора \vec{v} обертання від \vec{E} до \vec{H} вздовж найкоротшої дуги виглядає таким, що відбувається проти руху стрілки годинника (рис. 207).

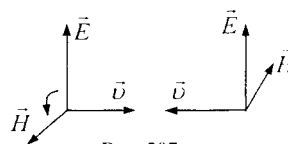


Рис. 207

Інакше кажучи, вектор \vec{v} за напрямком збігається з векторним добутком \vec{E} та \vec{H} :

$$\vec{v} = \frac{v}{EH} [\vec{E} \vec{H}].$$

Розв'язками отриманих хвильових рівнянь є функції

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}),$$

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{02}),$$

де ω - циклічна частота хвилі, k - хвильо-

ве число, яке дорівнює $\frac{\omega}{v}$, φ_{01} , φ_{02} - початкові фази коливань в точках з координатою $x = 0$.

Підставимо ці функції в рівняння

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{і} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

В результаті

$$\begin{aligned} E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}) &= \\ = -\mu_0 \mu H_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}), \\ H_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}) &= \\ = -\varepsilon_0 \varepsilon E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}). \end{aligned}$$

Для того, щоб ці рівняння задовольнялись, необхідним є рівність початкових фаз φ_{01} і φ_{02} і повинні виконуватися співвідношення

$$kE_0 = -\mu_0 \mu \omega H_0, \quad -\varepsilon_0 \varepsilon \omega E_0 = -kH_0.$$

Перемножимо обидві частини цих виразів, в результаті отримаємо:

$$-k\omega\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 = -k\omega\mu_0\mu H_0^2 \quad \text{і} \quad \varepsilon_0\varepsilon E_0^2 = \mu_0\mu H_0^2.$$

Отже, коливання електричного і магнітного векторів у електромагнітній хвилі відбувається з однаковою фазою ($\varphi_{01} = \varphi_{02}$) - вони одночасно досягають максимальних значень і одночасно перетворюються в нуль, а амплітуди цих векторів зв'язані співвідношенням

$$E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu}.$$

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі у векторній формі має вигляд

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx).$$

Косинусоїдальна або синусоїдальна електромагнітна хвиля називається монохроматичною хвилею.

В кожній точці електромагнітного поля монохроматичної хвилі проєкції векторів \vec{E} та \vec{H} на осі координат інерціальної системи відліку здійснюють гар-

монічні коливання однакової частоти $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, яка називається частотою хвилі.

На рис. 208 наведені вектори \vec{E} і \vec{H} поля плоскої монохроматичної хвилі в один і той самий момент часу. У фіксованій точці простору вектори \vec{E} і \vec{H} змінюються з часом за гармонічним законом.

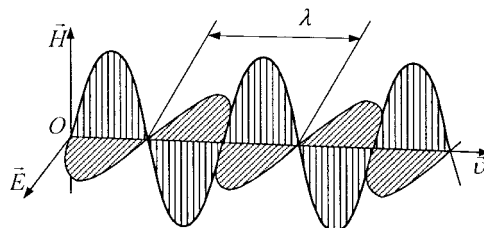


Рис. 208

Вони одночасно збільшуються від нуля, потім через $\frac{1}{4}T$ досягають найбільшого значення. Ще через $\frac{1}{4}T$ обидва вектори одночасно дорівнюють нулю. Потім знову обидва вектори досягають максимального значення, але протилежного за напрямком, ніж півперіоду тому. І через час, який дорівнює періоду коливання векторів, знову стають нульовими. Така зміна векторів \vec{E} і \vec{H} відбувається у всіх точках простору, але зі зсувом за фазою, що визначається відстанню між точками, яка відрахована вздовж осі Ox .

Площина, яка проходить через вектор \vec{E} і вектор швидкості \vec{v} , називається **площиною поляризації хвилі**.

Довжина λ , період T , частота ν і швидкість поширення електромагнітної хвилі зв'язані між собою співвідношеннями

$$\lambda = \nu T = \frac{v}{\nu}.$$

§88. Енергія електромагнітних хвиль. Потік енергії. Вектор Пойнтінга

Електромагнітне поле має енергію. Тому поширення електромагнітних хвиль пов'язане з перенесенням енергії в полі, подібно до того, як поширення пружних хвиль у речовині пов'язане з перенесенням механічної енергії.

Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин і електричного, і магнітних полів:

$$w = w_{el} + w_M = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Враховуючи вираз

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2,$$

отримасмо, що густина енергії електричного і магнітного полів в кожен момент часу однакова, тобто $w_{el} = w_M$. Тому

$$w = 2w_{el} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH.$$

У випадку плоскої лінійно-поляризованої монохроматичної хвилі, що поширюється вздовж додатного напрямку осі Ox , напруженість поля

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx).$$

Відповідно об'ємна густина енергії цієї хвилі $w = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$. Значення w в кожній точці поля періодично змінюється з частотою $\frac{\omega}{\pi}$ в границях від 0 до $w_{max} = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$. Середнє значення w за період пропорційне до квадрата амплітуди напруженості поля:

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} w dt = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(k\omega t - kx) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2. \end{aligned}$$

Помноживши густину енергії w на

швидкість v поширення хвилі в середовищі, отримуємо модуль густини потоку енергії.

Модуль густини потоку енергії числово дорівнює енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу через одиницю площі поверхні, що розміщена перпендикулярно до напрямку поширення хвилі:

$$P = wv = EH.$$

Оскільки вектори \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні і утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему, то напрямком вектора $[\vec{E}\vec{H}]$ збігається з напрямком переносу енергії, а модуль цього вектора дорівнює EH . Отже, вектор густини потоку енергії електромагнітної хвилі, який називається *вектором Пойнтінга*, дорівнює: $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$.

Потік Φ електромагнітної енергії через деяку поверхню S можна знайти за допомогою інтегрування:

$$\Phi = \int_S (\vec{P} \cdot d\vec{S}).$$

Інтенсивність електромагнітної хвилі I дорівнює модулю середнього значення вектора Пойнтінга за проміжок часу, який дорівнює періоду T повного коливання:

$$I = \langle \vec{P} \rangle = \langle [\vec{E}\vec{H}] \rangle = \frac{1}{T} \left| \int_0^T [\vec{E}\vec{H}] dt \right|.$$

Інтенсивність біжучої монохроматичної хвилі $I = \langle w \rangle v$.

Інтенсивність плоскої лінійно-поляризованої монохроматичної біжучої хвилі прямо пропорційна до квадрата амплітуди E_0 коливань вектора \vec{E} поля хвилі:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2.$$

VI. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

**§89. Інтерференція світла.
Когерентність та монохроматичність
світлових хвиль.**

Оптична довжина шляху

Для пояснення світлових явищ у фізиці використовується теорія світла - хвильова і корпускулярна. Згідно хвильової (електромагнітної) теорії світлове випромінювання – це електромагнітні хвилі, довжина яких лежить в межах від 0,38 до 0,77 мкм. Згідно з корпускулярної (фотонної) теорії світлове випромінювання – це потік особливих частинок – фотонів, які мають енергію, масу і імпульс.

Інтерференцією світла називається перерозподіл інтенсивності світла в просторі внаслідок накладання двох або кількох когерентних хвиль, в результаті чого в одних місцях виникають максимуми, а в інших мінімуми інтенсивності.

Хвилі називаються когерентними, якщо вони мають однакову частоту і в точках накладання – сталу різницю фаз.

Отже, якщо хвилі когерентні, то спостерігається самоузгоджений перебіг в часі і просторі декількох хвильових процесів. Цю умову задовольняють хвилі однієї строго визначеної частоти – **монохроматичні хвилі**.

З повсякденного досліду відомо, що при накладанні світла від двох незалежних джерел не вдається спостерігати явища інтерференції. Таким чином, хвилі, які випромінюються незалежними джерелами світла, некогерентні. Цей результат є наслідком того, що жодне джерело не випромінює точно монохроматичного світла.

Випромінювання світла відбувається в процесі переходу атомів із збудженого

стану в нормальний. Процес випромінювання скінченний і триває дуже короткий час ($\tau \approx 10^{-8} \text{ c}$). Через деякий час атом знову може збудитися і почати випромінювати світлові хвилі, але уже з іншою початковою фазою. Оскільки різниця фаз між випромінюванням двох таких незалежних атомів змінюється при кожному новому акті випромінювання, то хвилі, що спонтанно випромінюються атомами будь-якого джерела світла, некогерентні. Отже, хвилі, що випромінюються атомами, лише протягом інтервалу часу $\tau \approx 10^{-8} \text{ c}$ мають приблизно сталу амплітуду і фазу коливань, тоді як за великий проміжок часу і амплітуда, і фази змінюються.

Переривчасте випромінювання світла атомами у вигляді окремих короткочасних імпульсів називається **хвильовим цугом**.

Кожний хвильовий цуг має обмежену довжину в просторі. Наприклад, довжина цугу хвиль, які поширюються у вакуумі вздовж осі OX , дорівнює $\Delta x = c \tau = 3 \text{ м}$. Залежно від довжини світлової хвилі цуг вміщає від 10^6 до 10^8 довжин хвиль.

Хвильовий цуг не є строго монохроматичною хвилею і його можна представити у вигляді неперервної послідовності монохроматичних хвиль з частотами від $\omega - \frac{1}{2} \Delta \omega$ до $\omega + \frac{1}{2} \Delta \omega$, де ω – циклічна частота коливань джерела хвильового цугу. Величина $\Delta \omega$ залежить від довжини Δx цугу і характеру зміни амплітуди хвилі на довжині цугу. Можна показати, що

$$\Delta \omega \geq \frac{1}{\tau} \quad \text{або} \quad \Delta x \Delta \omega \geq c .$$

Оскільки хвильове число $k = \frac{\omega}{c}$, то $\Delta\omega = c\Delta k$ і має місце співвідношення

$$\Delta x \Delta k \geq 1.$$

Отже, чим більший час τ випромінювання цугу, тим він ближчий за своїми властивостями монохроматичної хвилі з циклічною частотою ω і хвильовим числом k :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta\omega = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \Delta\omega = 0.$$

Для характеристики когерентних властивостей хвиль введемо поняття часу когерентності.

Часом когерентності *немонохроматичної хвилі називається інтервал часу $\tau_{\text{ког}}$, протягом якого різниця фаз коливань, що відповідають хвилям з циклічними частотами $\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega$ і $\omega - \frac{1}{2}\Delta\omega$, змінюється на 2π :*

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Циклічна частота ω зв'язана з довжиною хвилі у вакуумі λ_0 співвідношенням $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$. Звідси $\Delta\omega = \frac{2\pi c \Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$ (знак мінус ми опускаємо). Тоді

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda_0^2}{c \Delta\lambda_0}.$$

Відстань $l_{\text{ког}}$, на яку поширюється хвиля з циклічною частотою ω за час когерентності, називається довжиною когерентності або довжиною цугу, що відповідає немонахроматичній хвилі, яка розглядається:

$$l_{\text{ког}} = c \tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}.$$

Для видимого сонячного спектру

$$\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-14} \text{ с}, \quad l_{\text{ког}} \approx 10^{-6} \text{ м}.$$

Дві світлові хвилі при накладанні здатні інтерферувати, якщо коливання, які вони збуджують в певній точці, відповідають одному і тому хвильовому цугу випромінювання джерела, тобто якщо

$$dn = \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{або} \quad |r_2 - r_1| < l_{\text{ког}},$$

де $r_2 - r_1$ — різниця ходу хвиль, що накладаються.

Для спостереження інтерференції світла при великих різницях ходу $r_2 - r_1$ необхідно, щоб світло мало великий час когерентності, тобто щоб воно мало високий ступінь монохроматичності.

Когерентність коливань, які здійснюються в одній і тій самій точці простору, що визначається ступенем монохроматичності хвилі, називається часовою когерентністю.

Поряд з часовою когерентністю, що визначається часом когерентності, для опису когерентних властивостей хвиль у площині, перпендикулярній до напрямку їх поширення, вводиться **просторовою когерентністю**.

Когерентність коливань, що відбуваються в один і той же момент часу в різних точках площини, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі, називається просторовою когерентністю.

Для отримання інтерференційних смуг від двох джерел світла недостатньо, щоб ці джерела склалися з попарно когерентних точкових джерел. Навіть у випадку строго монохроматичного світла необхідно, щоб розміри джерел не перевищували певної межі, що залежить від взаємного розміщення та відстані між ними, а також від положення екрана, який призна-

чений для спостереження інтерференційних смуг.

Просторово-когерентними називаються два джерела, розміри і взаємне розміщення яких при необхідному ступені монохроматичності світла дозволяють спостерігати інтерференційні смуги.

Довжиною просторової когерентності або радіусом когерентності називається відстань між двома точками перпендикулярної до напрямку поширення хвилі поверхні, між якими випадкова зміна різниці фаз досягає значення рівного π . На відстані $r_{\text{ког}}$ можна спостерігати явище інтерференції. Отже, просторова когерентність визначається радіусом когерентності.

Радіус когерентності

$$r_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\varphi},$$

де λ - довжина світлових хвиль, φ - кутовий розмір джерела.

Коливання в двох точках, які знаходяться на відстані, меншій від $r_{\text{ког}}$, будуть приблизно когерентними.

Розглянемо тепер інтерференцію світла.

Для отримання когерентних світлових хвиль застосовують метод розділення хвилі, що випромінюється одним джерелом, на дві частини, які після проходження різних оптичних шляхів накладаються одна на одну і в результаті спостерігається інтерференційна картина.

Нехай розділення на дві когерентні хвилі відбувається в певній точці O (рис. 209). До

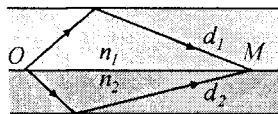


Рис. 209

точки M , в якій спостерігається інтерференційна картина, одна хвиля в середовищі з

показником заломлення n_1 , пройшла шлях d_1 , друга – в середовищі з показником заломлення n_2 – шлях d_2 .

Перша хвиля викличе в точці M гармонічні коливання

$$E_1 = E_{01} \cos \left[\omega \left(t - \frac{d_1}{v_1} \right) + \varphi_{01} \right],$$

а друга

$$E_2 = E_{02} \cos \left[\omega \left(t - \frac{d_2}{v_2} \right) + \varphi_{02} \right],$$

де $v_1 = \frac{c}{n_1}$, $v_2 = \frac{c}{n_2}$ – фазова швидкість першої та другої хвиль.

Оскільки в точці M додаються два гармонічні коливання однакового періоду, що відбуваються в однаковому напрямку, то результуюче коливання буде також гармонічним з тим самим періодом і в тому самому напрямку, тобто

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплітуда E_0 цього коливання дорівнює:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \left[\omega \left(\frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \right],$$

а початкова фаза φ_0 визначається виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2},$$

де $\alpha_1 = -\omega \frac{d_1}{v_1} + \varphi_{01}$, $\alpha_2 = -\omega \frac{d_2}{v_2} + \varphi_{02}$.

Різниця фаз δ двох когерентних хвиль від одного джерела:

$$\begin{aligned} \delta &= \omega \left(\frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \\ &= \frac{\omega}{c} (d_2 n_2 - d_1 n_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, де λ_0 – довжина

хвилі у вакуумі, то

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \end{aligned}$$

Добуток геометричної довжини d шляху світлової хвилі на показник n заломлення цього середовища називається **оптичною довжиною шляху** L , а різниця оптичних довжин шляхів, що пройшли хвилі $\Delta = L_2 - L_1$ – називається **оптичною різницею ходу**.

Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна до квадрату її амплітуди, то результуюча інтенсивність в точці M визначається співвідношенням

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \right].$$

У випадку когерентних хвиль

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \text{const}$$

і для зручності припустимо, що $\varphi_{02} = \varphi_{01}$.

В результаті

$$I = I_1 + I_2 + 2I_1 I_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta.$$

Якщо оптична різниця ходу дорівнює парному числу півхвиль у вакуумі:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots),$$

то $\delta = 2m\pi$, і коливання, що збуджуються в точці M обома хвилями, відбуваються в однакових фазах. Отже, $\cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = 1$ і результуюча інтенсивність – максимальна:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (E_{01} \neq E_{02}); \\ I &= 4I_1 \quad (E_{01} = E_{02}). \end{aligned}$$

Таким чином, максимум інтенсивності при накладанні двох когерентних хвиль буде у точках, для яких у різниці ходу променів укладеться парне число пів-

хвиль. Сукупність таких точок утворює інтерференційні лінії, порядок яких визначається числом m .

Якщо оптична різниця ходу:

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots),$$

то $\delta = (2m + 1)\pi$ і коливання, що збуджуються в точці M обома хвилями, знаходяться у протифазі і $\cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = -1$. Результуюча інтенсивність при цьому буде мінімальна:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (E_{01} \neq E_{02}); \\ I &= 4I_1 \quad (E_{01} = E_{02}). \end{aligned}$$

Мінімум інтенсивності отримуємо в точках, для яких різниця ходу променів вміщає непарне число півхвиль.

Таким чином,

$$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2}$$

– умова інтерференційного максимуму, а

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$$

– умова інтерференційного мінімуму.

Визначимо геометричне місце точок максимальної (мінімальної) інтенсивності. Як для точок максимальної інтенсивності $L_2 - L_1 = m\lambda_0$, так і для точок мінімальної інтенсивності

$$L_2 - L_1 = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$$

має місце

$$L_2 - L_1 = \text{const},$$

що визначає рівняння гіпербол з фокусами S_1 і S_2 . Кожному значенню інтенсивності відповідає поверхня гіперboloїда обертаня. Переріз таких поверхонь наведено на рис. 210, де суцільними лініями показано розміщення максимумів інтенсивності,

штриховими – мінімумів інтенсивності.

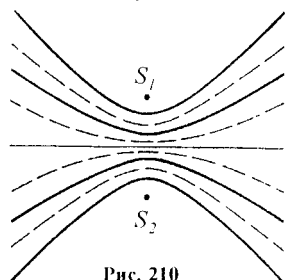


Рис. 210

Контрастність інтерференційної картини характеризується за допомогою параметра V , який виражається формулою

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

де I_{max} і I_{min} – інтенсивність світлих і темних смуг. Якщо інтенсивність темної смуги дорівнює нулю, то $V=1$, тобто когерентність максимальна. Для рівномірно освітленого екрана ($I_{max} = I_{min}$) контрастність дорівнює нулю.

§90. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел

Розглянемо дві когерентні світлові хвилі, що йдуть від джерел S_1 і S_2 , які мають вигляд паралельних тонких світних ниток або вузьких щілин (рис. 211), які розміщені на віддалі d одна від одної.

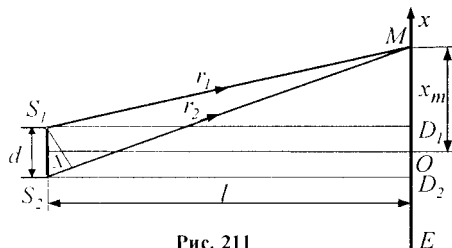


Рис. 211

Область, в якій ці хвилі перекриваються, називається полем інтерференції. У всій цій області спостерігається чергування місць з максимальною і мінімальною інтенсивністю світла. Якщо в поле інтер-

ференції помістити паралельно до площини, яка проходить через джерела S_1 і S_2 , екран, то на ньому буде видно інтерференційну картину, яка має вигляд світлих і темних смуг, які чергуються. Розрахуємо ширину цих смуг і відстань між ними. Позначимо координату інтерференційного максимуму чи мінімуму x_m . З трикутника S_2MD_2 маємо:

$$r_2^2 = l^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2,$$

а з трикутника S_1MD_1 –

$$r_1^2 = l^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Звідси

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2x_m d,$$

$$\text{або } \Delta = r_2 - r_1 = \frac{2x_m d}{r_1 + r_2}.$$

З умови $l \gg d$ випливає, що $r_1 + r_2 \approx 2l$.

Тому $\Delta = \frac{x_m d}{l}$, і $x_m = \frac{l}{d} \Delta$.

Положення m -го інтерференційного максимуму на екрані задовольняє умову $\Delta = m\lambda_0$. Тоді, максимуми інтенсивності будуть спостерігатися при

$$x_m^{max} = \frac{m l \lambda_0}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Умова для m -го мінімуму має вигляд

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$$

і координати мінімумів інтенсивності

$$x_m^{min} = \frac{(2m + 1) l \lambda_0}{2d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Шириною інтерференційної смуги

називається відстань між двома сусідніми мінімумами інтенсивності, тобто

$$\Delta x = x_{m+1}^{min} - x_m^{min} =$$

$$= \frac{[2(m+1)+1]l\lambda_0}{2d} - \frac{(2m+1)l\lambda_0}{2d} = \frac{l\lambda_0}{d}.$$

Відстань між сусідніми інтерференційними максимумами називається відстанню між інтерференційними смугами, яка теж дорівнює $\Delta x = \frac{l\lambda_0}{d}$. З цієї формули випливає, що відстань Δx зростає при зменшенні d між джерелами S_1 і S_2 . Якщо відстань d досягає величини порядку l , то відстань між інтерференційними смугами буде порядку довжини світлової хвилі. При цьому спостерігати окремі смуги неможливо. Щоб інтерференційна картина була чіткою, необхідно дотримання умови $d \ll l$. Ширина інтерференційних смуг залежить і від довжини хвилі λ_0 .

За вимірними значеннями l , d і Δx можна експериментально визначити довжину світлової хвилі.

Отже, інтерференційна картина, яка створюється на екрані двома когерентними джерелами світла, представляє собою чергування світлих та темних смуг, паралельних одна до одної. Головний максимум, що відповідає $m=0$, проходить через точку O , вниз і вгору від нього на рівних відстанях один від одного розміщуються максимуми першого ($m = \pm 1$), другого ($m = \pm 2$) порядків тощо.

Якщо використати біле світло, то інтерференційні максимуми для кожної довжини хвилі будуть зміщені один відносно одного і матимуть вигляд райдужних смуг, які будуть починатись фіолетовим і закінчуватись червоним кольором, якщо рахувати від точки O (рис. 211). Тільки для $m=0$ максимуми для всіх довжин хвиль збігаються і в середині екрану буде спостерігатися біла смуга, по обидві

сторони якої розмістяться спектрально забарвлені смуги максимумів першого, другого порядків і т. д.

Розглянемо умови, за яких у монохроматичному світлі інтерференційна картина сприймається чітко. Для цього необхідно, щоб різноманітність довжин хвиль була обмежена і не перевищувала деякого інтервалу між λ_0 і $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$.

Умовою нерозрізнимості інтерференційної картини є збіг максимуму $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі λ_0 з максимумом m -го порядку для довжини хвилі $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$, тобто

$$x_{m+1}^{max}(\lambda_0) = x_m^{max}(\lambda_0 + \Delta\lambda_0).$$

Використовуючи вираз

$$x_m^{max} = m \frac{l}{d} \lambda_0,$$

отримуємо

$$(m+1) \frac{l}{d} \lambda_0 = m \frac{l}{d} (\lambda_0 + \Delta\lambda_0).$$

Звідси граничне значення інтервалу $\Delta\lambda_{cp.} = \frac{\lambda_0}{m}$, тобто інтерференційну картину для монохроматичного світла можна спостерігати, коли ширина інтервалу довжин хвиль не перевищує граничного:

$$\Delta\lambda_0 < \Delta\lambda_{cp.} = \frac{\lambda_0}{m}.$$

§91. Інтерференція світла у тонких плівках

Прикладом інтерференції світла, що спостерігається в природних умовах, може бути райдужне забарвлення мильних плівок, тонких плівок нафти або мінерального масла, які плавають на поверхні води. Кольори мінливості на поверхні загартованих сталевих деталей, покритих найтоншим шаром оксидів. Усі ці явища зумовлені інтерференцією світла в тонких про-

зорих плівках, яка виникає внаслідок накладання когерентних хвиль, що відбиваються від верхньої та нижньої поверхонь плівки.

Нехай плоска монохроматична хвиля, поширюється у середовищі з показником заломлення n_0 , (рис. 212), падає під кутом i на плоскопаралельну прозору плівку з показником заломлення n і товщиною d .

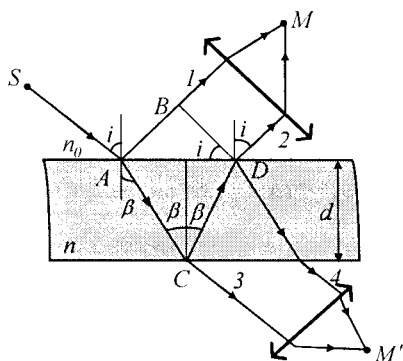


Рис. 212

Падаюча хвиля частково відбивається від верхньої поверхні плівки та частково заломлюється. Напрямок поширення відбитої хвилі зображено променем AB , а заломленої – променем AC . Заломлена хвиля, досягнувши нижньої поверхні плівки, частково відбивається (промінь CD), і частково заломлюється. Хвиля, що поширюється вздовж променя CD , на верхній поверхні плівки частково відбивається, і частково заломлюється, причому заломлена хвиля (промінь 2) накладається на хвилю, що безпосередньо відбита від верхньої поверхні.

Промені 1 і 2 когерентні між собою, оскільки вони утворені поділом хвилі SA . Якщо на їх шляху поставити збірну лінзу, то вони зберуться в одній з точок M фокальної площини лінзи і дадуть інтерференційну картину, яка визначається оптич-

ною різницею ходу Δ між променями 1 і 2:

$$\Delta = (AC + CD)n - AB \pm \frac{\lambda_0}{2} = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Тут прийнято, що показник заломлення $n_0 = 1$. Доданок $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ зумовлений втратою півхвилі при відбиванні світла на межі поділу середовищ. Якщо $n > n_0$, то в точці A фаза коливань змінюється на протилежну, відбувається втрата півхвилі і доданок матиме знак „-“. У випадку $n < n_0$ втрата півхвилі відбудеться в точці C і $\frac{\lambda_0}{2}$ матиме знак „+“.

З рис. 212 видно, що

$$AC = CD = \frac{d}{\cos \beta}, \quad AB = AD \sin i = 2d \operatorname{tg} \beta \sin i.$$

Оскільки $n = \frac{\sin i}{\sin \beta}$ або $\sin i = n \sin \beta$, то

$$AB = 2dn \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 2dn \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

$$\bar{\Delta} = \frac{2dn}{\cos \beta} - \frac{2dn}{\cos \beta} (1 - \cos^2 \beta) =$$

$$= 2dn \cos \beta = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 \beta} =$$

$$= 2dn \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{n^2}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

З урахуванням втрати півхвилі для оптичної різниці ходу отримаємо:

$$\Delta = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

В точці M буде максимум, якщо:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

і мінімум, якщо:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}; \quad (m=0, 1, 2 \dots)$$

Інтерференція спостерігається не лише у відбитому світлі, а й у світлі, що

проходить через плівку (рис. 212, промені 3 і 4). Оптична різниця ходу для прохідного світла відрізняється від Δ для відбитого світла на $\frac{\lambda_0}{2}$, бо світло не відбивається від оптично густішого середовища. Отже, максимумам інтерференції у відбитому світлі відповідають мінімуми інтерференції в прохідному світлі і навпаки.

1. Смуги однакового нахилу

Інтерференція світла в плоскопаралельних пластинках визначається товщиною пластинки d , показником заломлення n середовища, довжиною λ_0 падаючої світлової хвилі та кутом падіння i . Для даних λ_0 , d і n кожному куту i падіння променів відповідає своя інтерференційна смуга.

Інтерференційні смуги, які виникають внаслідок накладання хвиль, що падають на плоскопаралельну пластинку під однаковими кутами, називаються смугами однакового нахилу.

Промені I' і I'' , відбившись від верхньої та нижньої граней пластинки, паралельні один до одного, оскільки пластинка плоскопаралельна (рис. 213).

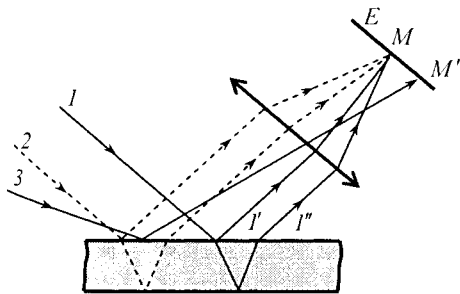


Рис. 213

Отже, інтерферуючі промені I' і I'' перетинаються лише в нескінченності, тому кажуть, що *смуги однакового нахилу локалізовані в нескінченності.*

Для їх спостереження використовують збірну лінзу й екран, розмішений у фокальній площині лінзи. Паралельні промені I' і I'' зберуться у фокусі лінзи. В ту саму точку прийдуть й інші промені, паралельні до променя I , (на рис. 213 – промінь 2) внаслідок чого збільшиться загальна інтенсивність.

Хвилі 3, які падають на пластину під іншим кутом, зберуться в іншій точці M' фокальної площини лінзи.

Оцінимо допустиму товщину пластинки, при освітленні якої природним світлом, можна спостерігати інтерференційну картину. Щоб світлові хвилі інтерферували, необхідно щоб виконувалась часова когерентність, а саме різниця ходу променів Δ повинна бути меншою за довжину когерентності $l_{\text{ког}}$:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0} \quad \text{або}$$

$$d < \frac{\lambda_0 \left(\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} + \frac{1}{2} \right)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Нехай довжина падаючого світла $\lambda_0 \approx 0,5 \text{ мкм}$ і $\Delta\lambda_0 \approx 0,01 \text{ мкм}$. Саме з такою різницею хвиль людське око здатне розрізняти дві спектральні лінії. Тоді $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = 50$. Нехтуючи величиною $\frac{1}{2}$ в порівнянні з $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}$, отримуємо

$$d < \frac{l}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$$

Для $n=1,5$ та кута падіння $i = 0^\circ$ дістаємо

$$d < \frac{\lambda_0^2}{3\Delta\lambda_0}$$

В результаті

$$d < \frac{0,5^2}{3 \cdot 0,01} \text{ мкм} \approx 8 \text{ мкм} .$$

Якщо ступінь монохроматичності світла збільшиться ($\Delta\lambda$ – досить мале), то допустима товщина пластинки буде зростати.

2. Смуги однакової товщини

Нехай на клин, кут α між боковими гранями якого малий, падає плоска хвиля, напрямок поширення якої збігається з променями 1 і 2 (рис. 214).

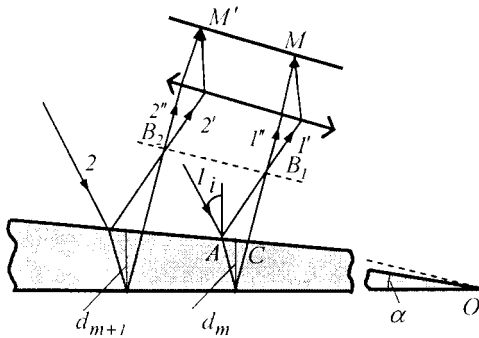


Рис. 214

Напрямок поширення інтерферуючих хвиль, які виникають внаслідок відбивання світла від верхньої і нижньої поверхонь клина зображено відповідно променями 1' і 1'' та 2' і 2''.

Якщо джерело хвиль розміщене далеко від поверхні і кут α досить малий, то різниця ходу променів 1' і 1'' визначається формулою

$$\Delta = 2d_m \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} .$$

де d_m – середня товщина клина на ділянці AC. Нехай умова часової когерентності $\Delta < l_{\text{ког}}$ виконується для всього клина. Оскільки значення i , n та λ_0 сталі, то однаковим значенням d відповідають однакові оптичні різниці ходу.

При певному положенні лінзи і

клина промені 1' і 1'', оптична різниця ходу яких визначається d_m , перетинаються в деякій точці M на екрані. А всі промені, які падають на поверхню клина товщиною d_m , будуть в результаті інтерференції, утворювати інтерференційну смугу.

Інтерференційні смуги, що виникають внаслідок відбивання від ділянок клина з однаковою товщиною, називаються смугами однакової товщини.

Оскільки верхня та нижня грані клина не паралельні між собою, то промені 1' і 1'' та 2' і 2'' перетинаються поблизу поверхні клина. Лінія перетину всіх променів $B_1 B_2$ проходить через вершину клина O. Отже, *смуги однакової товщини локалізовані поблизу поверхні клина.*

Якщо світло падає на пластину нормально, то смуги однакової товщини локалізуються на верхній поверхні клина паралельно до ребра клина. Щоб визначити відстань Δl між двома сусідніми максимумами інтерференційних смуг у випадку монохроматичного світла з довжиною хвилі λ_0 , запишемо умову двох сусідніх максимумів інтерференції, враховуючи, що кут падіння $i = 0^\circ$ та оскільки кут α дуже малий, то і кут заломлення $\beta = 0^\circ$:

$$2d_m n - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2} ,$$

$$2d_{m+1} n - \frac{\lambda_0}{2} = 2(m+1) \frac{\lambda_0}{2} .$$

Віднімаючи від другого виразу перший, отримуємо

$$2(d_{m+1} - d_m) n = \lambda_0 .$$

Якщо відстані від ребра клина до інтерференційних смуг дорівнюють l_m і

$$l_{m+1} = l_m + \Delta l , \text{ то } d_m = l_m \sin \alpha , \text{ і}$$

$$d_{m+1} = (l_m + \Delta l) \sin \alpha .$$

Тому

$$d_{m+1} - d_m = \Delta l \sin \alpha \approx \Delta l \alpha,$$

де α – малий кут між гранями клина. Тоді

$$\Delta l = \frac{\lambda_0}{2\alpha n}.$$

3. Кільця Ньютона

Окремим випадком смуг однакової товщини є кільця Ньютона, що виникають у повітряному шарі між плоскоопуклою лінзою з великим радіусом кривини R і плоскою скляною пластинною, які дотикаються в точці M (рис. 215). При цьому товщина повітряного шару поступово зростає від точки M до краю пластини.

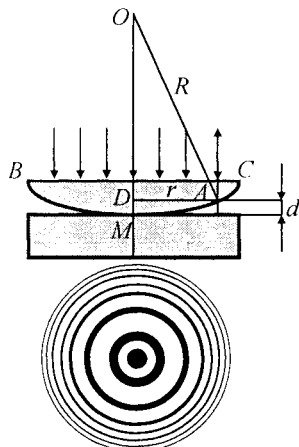


Рис. 215

Паралельний пучок світла падає на плоску поверхню BC лінзи. Після відбивання від опуклої поверхні лінзи і дотичної до неї поверхні пластини світло поширюється у зворотному напрямку паралельним пучком.

При накладанні відбитих хвиль виникають інтерференційні смуги однакової товщини, що мають при нормальному падінні світла вигляд концентричних кілець (рис. 215). В центрі міститься темний круг, тому що в місці дотику лінзи з поверхнею пластинки залишається дуже тонкий повіт-

ряний шар товщиною набагато меншою від довжини хвилі. Різниця ходу між променями, що виникають в цій точці, визначається лише втратою півхвилі при відбиванні від поверхні пластини, тобто $\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$ і тут спостерігається інтерференційний мінімум нульового порядку.

Оскільки результат накладання двох відбитих хвиль залежить від товщини повітряного шару, то для всіх точок цього шару, що знаходяться на однаковій відстані r від точки M , тобто тих, що утворюють коло, буде однакова умова або для інтерференційного максимуму або мінімуму. Тому виникає інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець.

Отже, темний круг буде оточений системою світлих кілець, що чергуються, ширина й інтенсивність яких поступово зменшуються з віддаленням від центрального темного круга. У прохідному світлі буде доповняльна картина – центральне світле коло, наступне кільце темне і т. д.

Нехай d – товщина повітряного шару на відстані r від точки M . Оптична різниця ходу Δ між променем, який відбився від межі поділу повітряний шар – скляна пластинка, і променем, який зазнав часткового відбивання на межі поділу опукла поверхня лінзи – повітряний шар, дорівнює

$$\Delta = 2dn \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

де доданок $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ враховує втрату півхвилі при відбиванні світла. Якщо лінза і пластинка виготовлені зі скла, показник заломлення якого n , а шар між ними повітряний ($n_0 = 1$), то $\frac{\lambda_0}{2}$ буде зі знаком „+”.

З трикутника OAD маємо

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2, \quad R^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r^2.$$

При $d \ll R$ отримуємо

$$r^2 = 2Rd \quad \text{і} \quad d = \frac{r^2}{2R}.$$

Тут знехтувано членами другого порядку відносно d . Тоді оптична різниця ходу променів

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Використавши умову максимуму, знайдемо радіус m -го кільця:

$$\frac{(r_m^{max})^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2},$$

$$r_m^{max} = \sqrt{(2m-1) \frac{R\lambda_0}{2}}; \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

Радіус m -го темного кільця визначається з умови:

$$\frac{(r_m^{min})^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2},$$

$$r_m^{min} = \sqrt{m\lambda_0 R}; \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, що в прохідному світлі

$$r_m^{max} = \sqrt{m\lambda_0 R}; \quad (m=1, 2, 3, \dots),$$

$$r_m^{min} = \sqrt{(2m-1) \frac{\lambda_0 R}{2}}; \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

За формулами для радіусів кілець Ньютона можна розрахувати радіус плоскоопуклої лінзи.

При розрахунках радіусів кілець Ньютона знехтувано впливом світлових хвиль, що відбиваються від верхньої поверхні лінзи (BC) і нижньої поверхні пластини. Але оскільки товщина центральної частини лінзи і пластини на багато порядків більші за товщину повітряного шару поблизу точки M , то різниця ходу між хвилями, які відбиваються від верхньої і нижньої поверхонь лінзи і пластини, такі великі, що інтерференція цих хвиль практично

не спостерігається, тому що максимуми будуть розміщені настільки близько, що розділити їх неможливо.

Як для смуг однакового нахилу, так і для смуг однакової товщини положення максимумів залежить від довжини хвилі λ_0 . Тому систему світлих і темних смуг отримують лише при освітленні монохроматичним світлом. При спостереженні в білому світлі отримують сукупність змішених одна відносно одної смуг, утворених променями різних довжин хвиль, й інтерференційна картина набуває райдужного забарвлення.

§92. Практичне застосування інтерференції світла

Явище інтерференції світла використовують для створення різних оптичних приладів, за допомогою яких можна виконувати такі операції:

- вимірювати довжини світлової хвилі з великою точністю;
- вимірювати лінійні розміри тіл і коефіцієнти лінійного розширення тіл;
- визначити якість і точність шліфування різних поверхонь;
- вимірювати показники заломлення газоподібних, рідких і твердих тіл;
- вимірювати кутові розміри небесних тіл;
- вивчати і контролювати однорідність речовин;
- вивчати структури спектрів різних речовин;
- досліджувати ударні хвилі у газах.

За допомогою явища інтерференції можна виготовляти інтерференційні світлофільтри і вдається значно зменшити відбивання світла від оптичних систем.

Розглянемо більш детально деякі

практичні застосування явища інтерференції.

О. Смакула розробив спосіб просвітлення оптики для зменшення втрат світла, зумовлених його відбиванням на межі поділу двох середовищ, оскільки проходження світла через кожну заломну поверхню лінзи супроводжується відбиттям $\approx 4\%$ падаючого потоку світла. У складних об'єктивах число відбивань велике і сумарна втрата світлового потоку досить значна, що приводить до зменшення світлосили оптичних приладів. Крім того, відбивання від поверхні лінз приводить до виникнення бликів.

Щоб елементи оптичних систем зробити просвітленими, їх поверхні покривають прозорими плівками речовин, показник заломлення яких менший, ніж скла.

При відбиванні світла від межі поділу повітря – плівка і плівка-скло виникає

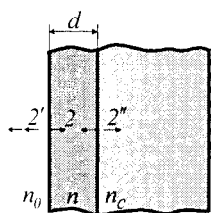


Рис. 216

інтерференція когерентних хвиль 1' і 2' (рис. 216). Товщину плівки d і показники заломлення скла n_c і плівки n

можна підібрати так, щоб хвилі, які інтерферують, гасили одна одну. Для цього їх амплітуди повинні бути рівні, а оптична різниця ходу

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Розрахунки показують, що амплітуди відбитих хвиль рівні, якщо $n = \sqrt{n_c}$.

Речовину плівки підбирають так, щоб виконувалась умова $n_c > n > n_0$, де n_0 - показник заломлення повітря. Втрата півхвилі в цьому випадку відбувається на обох поверхнях. Умова мінімуму при кути

падіння $i=0$ має такий вигляд

$$2dn = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Для мінімальної товщини плівки $m=0$, і тоді

$$dn = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Ця формула показує, що неможливо добитися одночасного гасіння для всіх довжин хвиль видимого спектра. Тому ця умова повинна виконуватись для довжини хвиль $\lambda_0 = 0,555 \text{ мкм}$, яка найбільше сприймається людським оком.

Отже, якщо $n = \sqrt{n_c}$ і оптична товщина плівки дорівнює $\frac{\lambda_0}{4}$, то в результаті інтерференції спостерігається гасіння відбитих хвиль.

Явище інтерференції використовують у ряді дуже точних вимірювальних приладів, які називають *інтерферометрами*.

Розглянемо схему *інтерферометра Жамена*, який застосовують для точних вимірювань показників заломлення газів і їх залежності від температури, тиску і вологості (рис. 217).

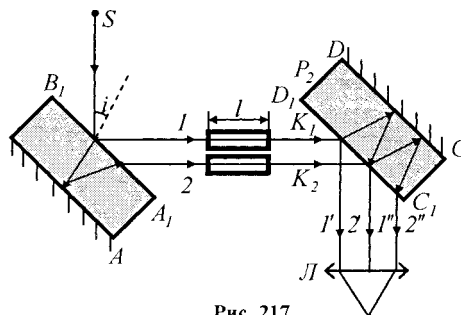


Рис. 217

Дві зовсім однакові скляні товсті плоскопаралельні пластини P_1 та P_2 установлені майже паралельно одна до одної. Поверхні AB і CD – дзеркальні. Промені

світла довжиною λ_0 від монохроматичного джерела S падають на поверхню пластини A під різними кутами i , близькими до 45° . На рисунку показано лише один падаючий промінь. Внаслідок його відбивання від поверхонь AB і A_1B_1 пластини P_2 з неї виходять дві когерентні паралельні хвилі 1 і 2 . Пройшовши крізь дві цілком однакові закриті скляні кювети K_1 і K_2 довжиною l , ці хвилі відбиваються поверхнями CD і C_1D_1 пластини P_2 . В результаті виникають чотири промені $1'$ і $1''$, $2'$ і $2''$ з яких промені $1''$ і $2'$ накладаються один на одного і інтерферують.

Інтерференційні смуги однакового нахилу розглядають за допомогою окуляра.

Якщо одну з кювет K_1 заповнено газом з відомим показником заломлення n , а другу – газом з показником заломлення n_x , який треба виміряти, то оптична різниця ходу між інтерферуючими хвилями $\Delta = (n_x - n)l$. Якщо ця різниця ходу $\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2}$ то вся інтерференційна картина зміститься на m смуг. Визначивши m , можна знайти показник заломлення n_x :

$$n_x = n + \frac{m\lambda_0}{l}.$$

Внаслідок великої чутливості інтерферометра, його використовують для вимірювання показників заломлення газів, що мало відрізняються від одиниці.

Розглянемо спрощену схему *інтерферометра Майкельсона* (рис. 218).

Монохроматичне світло від джерела S падає під кутом 45° на плоскопаралельну пластинку P_1 . Сторона пластинки AB , яка посріблена і напівпрозора, розділяє

промінь на дві частини: промінь 1 , який відбивається від посрібленого шару і промінь 2 , що проходить крізь нього. Промінь 1 відбивається від дзеркала M_1 і повертається назад, знову проходить через пластинку P_1 ($1'$). Промінь 2 поширюється до дзеркала M_2 , відбивається від нього, повертається назад і відбивається від пластинки P_1 ($2'$). Оскільки промінь 1 проходить пластинку P_1 двічі, то для компенсації різниці ходу, яка виникає на шляху другого променя, ставиться пластинка P_2 , яку називають компенсатором.

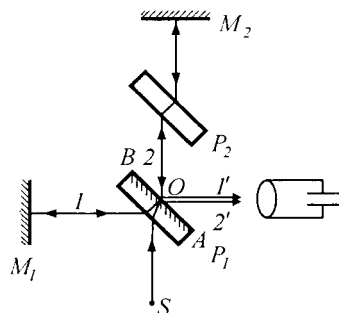


Рис. 218

Дзеркала M_1 і M_2 розміщують перпендикулярно одне до одного. Одне з них може переміщатися за допомогою мікрометричних гвинтів паралельно само до себе.

Хвилі $1'$ і $2'$ – когерентні; отже, за допомогою зорової труби буде спостерігатися інтерференційна картина. Оптична різниця хвиль $1'$ і $2'$ $\Delta = 2n_0(l_1 - l_2)$, де n_0 – абсолютний показник заломлення повітря, а l_1 і l_2 – відстані від точки O до дзеркал M_1 і M_2 .

Якщо $l_1 = l_2$, то буде інтерференційний максимум. Переміщення одного з дзеркал на відстань $\frac{\lambda_0}{4}$ приводить до ви-

никнення інтерференційного мінімуму. Отже, за зміною інтерференційної картини можна зробити висновки про малі переміщення одного з дзеркал і тим самим використати інтерферометр Майкельсона для точних вимірювань довжини світлової хвилі, довжини тіла, зміни довжини тіла при зміні температури. Похибки при вимірюванні довжини $\approx 10^{-8}$ мм.

Інтерферометр Майкельсона можна використати для знаходження незначних змін показника заломлення прозорих тіл залежно від тиску, температури, домішок. Такий інтерферометр називається *інтерференційним рефрактометром*.

В.П. Лінник використав принцип дії інтерферометра Майкельсона для створення *мікроінтерферометра* – високочутливого приладу, який використовується для контролю чистоти обробки поверхонь металевих виробів. Світло від джерела S падає на скляний кубик A (рис. 219), який складається з двох половин, склеєних по діагональній площині.

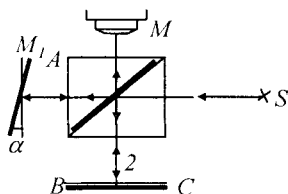


Рис. 219

Одну із спостережуваних поверхонь напівпосріблено так, що вона частково пропускає, а частково відбиває промені, які падають на неї. Промінь 1, який пройшов через кубик, попадає на дзеркало M_1 , відбивається і, пройшовши знову через кубик, йде в мікроскоп M . Промінь 2 відбивається від напівпрозорої площини, падає на поверхню BC , яка досліджується, відби-

вається від неї і проходить через кубик в мікроскоп. Дзеркало M_1 нахилено під великим кутом α . Завдяки цьому при ідеальній гладкій поверхні BC в полі зору мікроскопа видно інтерференційні смуги однакової товщини повітряного проміжку між кубиком і дзеркалом. У тих місцях поверхні BC , де є виступи або заглибини, інтерференційні смуги викривлятимуться. За допомогою цього приладу можна виявити штрихи на поверхні деталі, глибина яких дорівнює $(2+3)10^{-7}$ мм.

СМАКУЛА ОЛЕКСАНДР
(1900-1983)

Отримав в 1937р. патент на винахід способу просвітленої оптики. Предметом винаходу було: зменшення втрат світла, зумовлених його відбиванням на межі розділу двох середовищ, методом нанесення тонких шарів, товщина яких $1/4$ довжини хвилі, а також спосіб одержання цих покриттів.

БОРЗЯК ПЕТРО ГРИГОРОВИЧ
(1903-2000)

Відкрив (1952 р.) інтерференційний спосіб підвищення ефективності катодів: слід вибрати товщину катода, нанесеного на дзеркальну підкладку такою, щоб, внаслідок інтерференції, була максимальною напруженість поля світлової хвилі в шарі, товщина якого дорівнює глибині виходу.

ЛІННИК ВОЛОДИМИР ПАВЛОВИЧ
(1889-1984)

Вперше розробив інтерференційні методи контролю шорсткості й правильності форми крупногабаритних металевих поверхонь – мікроінтерферометр. За його допомогою можна виявити штрихи на поверхні деталі, глибина яких дорівнює $(2+3) \cdot 10^{-7}$ м.

§93. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля

Дифракцією називається сукупність явищ, що спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різними неоднорідностями (поблизу границь непрозорих або прозорих тіл, через малі отвори) і які пов'язані із зміною напрямку поширення світлових хвиль (порівняно з напрямком, передбаченим геометричною оптикою).

Дифракція, зокрема, приводить до

огинання світловими хвилями перешкод і проникнення світла в область геометричної тіні.

Між інтерференцією і дифракцією немає суттєвої фізичної відмінності. **Інтерференція хвиль** – це перерозподіл інтенсивності, який виникає в результаті суперпозиції хвиль, що збуджуються скінченим джерелом когерентних джерел. Перерозподіл інтенсивності, який виникає внаслідок суперпозиції хвиль, що збуджуються когерентними джерелами, які розміщені неперервно, називається **дифракцією хвиль**.

Явище дифракції пояснюється за допомогою **принципу Гюйгенса**:

кожна точка, до якої доходить хвиля, служить центром вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу.

Як приклад застосування принципу Гюйгенса розглянемо падіння плоскої хвилі на перешкоду з отвором (рис. 220).

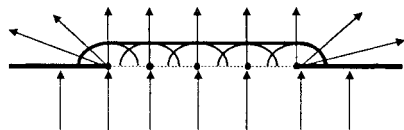


Рис. 220

Коли хвильовий фронт доходить до перешкоди, то кожна точка отвору стає джерелом вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль задає фронт хвилі, що пройшла через отвір. Цей фронт плоский лише в середній частині, а біля границі отвору відбувається загинання хвильового фронту, тобто хвиля проникає в область геометричної тіні, огинаючи краї перешкоди.

Принцип Гюйгенса – суто геометричний спосіб побудови хвильових поверхонь – розв'язує лише задачу про напрямки поширення хвильового фронту, але не

зачіпає, по суті, питання про амплітуду, а отже, і про інтенсивність хвиль, що поширюються в різних напрямках. Френель вклав у принцип Гюйгенса фізичний зміст, доповнивши його ідеєю інтерференції вторинних хвиль. **Принцип Гюйгенса-Френеля** можна виразити такими положеннями:

- 1). під час розрахунку амплітуди світлових коливань, що збуджуються джерелом S_0 в довільній точці M , джерело S_0 можна замінити еквівалентною йому системою вторинних джерел – малих ділянок dS будь-якої замкненої допоміжної поверхні S , проведеної так, щоб вона охоплювала джерело S_0 і не охоплювала розглядувану точку M ;
- 2). вторинні джерела, які еквівалентні джерелу S_0 , когерентні між собою, тому вторинні хвилі, збуджені ними, інтерферують, і розрахунок інтерференції найбільш простий, якщо S – хвильова поверхня для світла джерела S_0 , оскільки при цьому фази коливань всіх вторинних джерел однакові;
- 3). амплітуда dE_0 коливань, що збуджуються в точці M вторинним джерелом, пропорційна до площі dS відповідної ділянки хвильової поверхні обернено пропорційна до відстані r від неї до точки M і залежить від кута φ між зовнішньою нормаллю до хвильової поверхні і напрямком від елемента dS до точки M (рис. 221):

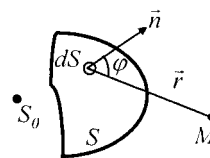


Рис. 221

$$dE_0 = f(\varphi) \frac{a}{r} dS \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

де $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза коливань в місці розміщення хвильової поверхні, a – величина,

яка пропорційна до амплітуди первинних хвиль в точках елемента dS ; $f(\varphi)$ монотонно спадає від 1 при $\varphi = 0$ до 0 при $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ (вторинні джерела не випромінюють назад); кут φ називається кутом дифракції.

4). якщо частина поверхні S закрита непрозорими екранами, то вона не випромінює енергію, а інші випромінюють так само, як і за відсутності екранів.

Врахування амплітуд і фаз вторинних хвиль дозволяє в кожному конкретному випадку знайти амплітуду результуючої хвилі в довільній точці простору, тобто визначити закономірності поширення світла. В загальному випадку розрахунок інтерференцій вторинних хвиль досить складний і громіздкий, однак для ряду випадків знаходження амплітуди результуючого коливання здійснюється алгебраїчним або геометричним додаванням.

Результуюче коливання в точці M є суперпозицією коливань dE_0 , взятих для всієї хвильової поверхні S :

$$E_{0M} = \int_S f(\varphi) \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) dS.$$

Ця формула є аналітичним виразом принципу Гюйгенса-Френеля.

§94. Метод зон Френеля.

Прямолінійне поширення світла

За допомогою принципу Гюйгенса-Френеля можна обґрунтувати з хвильових властивостей світла **закон прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі**. Френель розв'язав цю задачу, розглянувши взаємну інтерференцію вторинних хвиль, і застосував прийом, який отримав назву **методу зон Френеля**.

Знайдемо в довільній точці M амплітуду світлової хвилі, що поширюється в однорідному середовищі від точкового джерела S_0 .

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля замінимо дію джерела S_0 дією уявних джерел, які розміщені на допоміжній поверхні S , що є однією з хвильових поверхонь хвилі, яка поширюється від джерела S_0 (рис. 222).

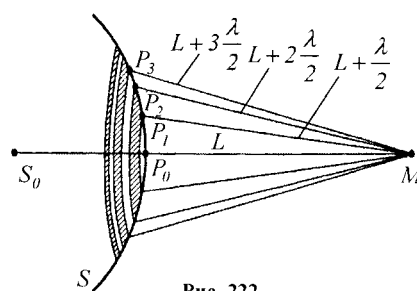


Рис. 222

Ця допоміжна поверхня є поверхнею сфери з центром в S_0 . Френель розбив хвильову поверхню S на кільцеві зони такого розміру, щоб відстані від країв зони до M відрізнялись на $\lambda/2$, тобто

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \frac{\lambda}{2}.$$

Подібне розбивання хвильової поверхні S на зони можна виконати, провівши з точки M концентричні сфери радіусами

$$L + \frac{\lambda}{2}; \quad L + 2\frac{\lambda}{2}; \quad L + 3\frac{\lambda}{2}; \quad \dots \quad L + m\frac{\lambda}{2}.$$

Точки сфери S , що лежать від точки M на відстанях $L + \frac{\lambda}{2}$; $L + 2\frac{\lambda}{2}$; $L + 3\frac{\lambda}{2}$ і т.д. утворюють межі 1-ї, 2-ї, 3-ї і т.д. зон Френеля.

Оскільки коливання від сусідніх зон проходять до точки M відстані, які відрізняються на $\lambda/2$, то в точку M вони надходять з протилежними фазами і при накладанні

данні ці коливання будуть взаємно ослаблюватися. Тому амплітуда результуючого коливання в точці M

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots \pm E_{0m},$$

де $E_{01}, E_{02}, \dots, E_{0m}$ - амплітуди коливань, що збуджуються 1-ю, 2-ю, ..., m -ю зонами. В цей вираз всі амплітуди коливань від непарних зон входять зі знаком „+“, а від парних зон – зі знаком „-“.

Величина E_{0m} залежить від площі σ_m m -ї зони і кута φ_m між зовнішньою нормаллю до поверхні зони в якій-небудь її точці і прямою, яка напрямлена з цієї точки в точку M . На рис. 223 точки B і B_1 відповідають зовнішній границі m -ї зони; $BC = r_m$ – радіус зовнішньої границі m -ї зони. $CO = h_m$ – висота кульового сегмента BOB_1 .

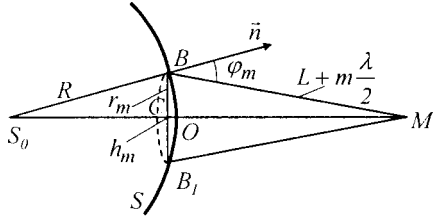


Рис. 223

З трикутників S_0BC і MBC видно, що

$$r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2 = \left(L + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - (L + h_m)^2.$$

Звідси

$$\begin{aligned} R^2 - R^2 + 2Rh_m - h_m^2 &= \\ &= L^2 + 2L\frac{m\lambda}{2} + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 - L^2 - 2Lh_m - h_m^2. \end{aligned}$$

Тоді

$$2(R + L)h_m = m\lambda L + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2.$$

Оскільки $\lambda \ll L$, то при не дуже великих

m доданком $\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2$ можна знехтувати і

$$h_m = \frac{m\lambda L}{2(R + L)}.$$

Бічна поверхня кульового сегмента BOB_1 , яка є сумою площ усіх m зон, починаючи з першої, дорівнює

$$S_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = 2\pi R h_m = \frac{\pi R L \lambda}{R + L} m,$$

а площа m -ї зони Френеля

$$\begin{aligned} \sigma_m &= S_m - S_{m-1} = \\ &= \frac{\pi R L \lambda}{R + L} m - \frac{\pi R L \lambda}{R + L} (m - 1) = \frac{\pi R L \lambda}{R + L}. \end{aligned}$$

Цей вираз не залежить від m , отже, при не дуже великих m площі зон Френеля однакові. У такий спосіб побудова зон Френеля розбиває поверхню сферичної хвилі на рівні за площею зони.

Із збільшенням номера зони m зростають кут φ_m і відстань від зони до точки M . Згідно із принципом Гюйгенса-Френеля це приводить до монотонного зменшення інтенсивності випромінювання в напрямку точки M . Тому

$$E_{01} > E_{02} > E_{03} > E_{04} > \dots$$

Загальне число N зон Френеля, які вміщуються на частині сфери, яка повернена до точки M (рис. 224), дуже велике.

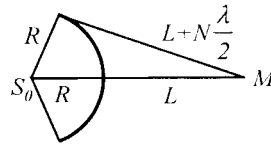


Рис. 224

З рис. 224 видно, що

$$L + N\frac{\lambda}{2} = \sqrt{(L + R)^2 - R^2}.$$

Звідси:

$$N = \frac{2}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + 2LR} - L \right).$$

Якщо $R=L=0,1\text{ м}$ і $\lambda=5\cdot 10^{-5}\text{ м}$, то $N\sim 3\cdot 10^5$. Тому можна вважати, що в межах не дуже великих змін m залежність E_{0m} від m є лінійною, і амплітуда коливань, яка викликана якою-небудь m -ю зоною, дорівнює півсумі амплітуд коливань, що викликані $m-1$ -ю і $m+1$ -ю зонами. Тобто

$$E_{0m} = \frac{1}{2}(E_{0m-1} + E_{0m+1}).$$

Тоді амплітуда результуючого коливання в точці M матиме такий вигляд:

$$E_{0M} = \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots = \frac{E_{01}}{2},$$

оскільки усі вирази, що стоять у дужках, дорівнюють нулю. Отже, амплітуда коливань, що створюється в довільній точці M сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди коливань, що створюється однією центральною зоною. Дія всієї хвильової поверхні на точку M зводиться до дії її малої ділянки, меншої, ніж центральна зона.

Якщо у виразі $r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2$ покладемо, що висота сегмента $h_m \ll R$ (при не дуже великих m), тоді $r_m^2 \approx 2Rh_m$. Радіус зовнішньої границі m -ї зони Френеля

$$r_m = \sqrt{2Rh_m} = \sqrt{\frac{m\lambda RL}{R+L}}.$$

При $R=L=0,1\text{ м}$ і $\lambda=0,5\text{ мкм}$ $r_1=0,16\text{ мм}$. Отже, поширення світла від S_0 до M відбувається так, немовби світловий потік поширюється всередині дуже вузького каналу вздовж S_0M , тобто *прямолинійно*. У такий спосіб хвильовий

принцип Гюйгенса-Френеля дозволяє пояснити прямолинійне поширення світла в однорідному середовищі.

Виразимо кількість зон Френеля m через радіус зовнішньої границі:

$$m = \frac{r_m}{\lambda} \frac{r_m(R+L)}{RL} = \frac{r_m^2}{\lambda} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R}\right).$$

Кількість зон m симетричне відносно L і R . Це означає, що точкове джерело викликає в точці M таку дію, яку викликало б у точці S_0 , якщо його розмістити у точці M .

Інтенсивність світла в точці M можна значно збільшити, якщо закрити всі парні або непарні зони Френеля. Тоді результуюча амплітуда коливань відповідно дорівнюватиме:

$$E_{0M} = E_{01} + E_{03} + E_{05} + \dots$$

або

$$E_{0M} = E_{02} + E_{04} + E_{06} + \dots$$

Екран, який перекриває всі парні або непарні зони Френеля, називається *зонною пластинкою*. Пластинка має складатися з прозорих або непрозорих кілець, радіуси яких дорівнюють r_m . Радіуси прозорих кілець підраховують для $m=0, 2, 4, \dots$, непрозорих – для $m=1, 3, 5, \dots$

УМОВ МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ
(1846-1915)

Розробив оригінальний метод обчислення інтегралів О.Френеля, які мають велике значення в теорії дифракції.

§95. Дифракція Френеля на круглomu отворі та диску

Дифракція Френеля – це дифракція сферичних світлових хвиль, а дифракційна картина спостерігається на скінченній віддалі від перешкоди, що викликала дифракцію.

Дифракція на круглomu отворі

Нехай сферична хвиля, що поши-

рюється з точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху екран з круглим отвором (рис. 225). Дифракційну картину спостерігаємо на екрані E в точці M , що лежить на лінії, яка з'єднує S_0 з центром отвору. Екран E паралельний до площини отвору і знаходиться від нього на відстані L . Побудуємо на відкритій частині фронту хвилі зони Френеля, що відповідають точці M . Вигляд дифракційної картини залежить від кількості зон Френеля, які укладаються в отворі.

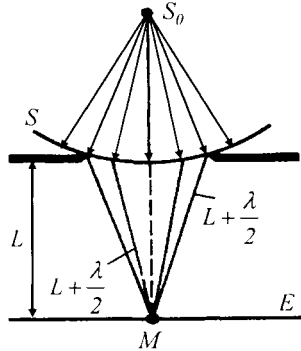


Рис. 225

Якщо в отворі укладається m зон Френеля, то згідно з формулами

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots \pm E_{0m},$$

і

$$E_{0m} = \frac{1}{2}(E_{0m-1} + E_{0m+1})$$

амплітуда E_{0M} результуючих коливань у точці M залежатиме від парності або непарності m .

Якщо кількість m зон Френеля непарна, то

$$\begin{aligned} E_{0M} &= \frac{1}{2}E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots + \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-1} + \frac{E_{0m}}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}E_{0m} = \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m}}{2}. \end{aligned}$$

Якщо в отворі укладається парна кількість m зон, то

$$\begin{aligned} E_{0M} &= \frac{1}{2}E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-1} + \frac{E_{0m}}{2}\right) + \frac{1}{2}E_{0m-1} - E_{0m} = \\ &= \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m-1}}{2} - E_{0m}. \end{aligned}$$

Отже, коли отвір відкриває непарну кількість зон Френеля, то амплітуда в точці M буде більша, ніж при вільному поширенні хвилі і у точці M буде інтерференційний максимум. Якщо m – парне, то у точці M – інтерференційний мінімум. Амплітуди коливань від двох сусідніх зон практично однакові. Тому

$$\frac{1}{2}E_{0m-1} - E_{0m} = -\frac{1}{2}E_{0m}.$$

В результаті

$$E_{0M} = \frac{E_{0m}}{2} \pm \frac{E_{0m}}{2},$$

де знак „+” стосується непарної, а знак „-” парної кількості зон Френеля.

Якщо в отворі вкладається одна зона Френеля, то в точці M амплітуда $E_{0M} = E_{01}$, тобто вдвоє більша, ніж за відсутності непрозорого екрану з отвором. Якщо в отворі вкладається дві зони Френеля, то їх дія в точці M практично компенсована через інтерференцію. Таким чином, дифракційна картина від круглого отвору поблизу точки M матиме вигляд темних і світлих кілець з центрами в точці M (якщо m – непарне, то в центрі буде світлий круг (рис. 226), коли m – парне – темний (рис. 227), причому інтенсивність $I = A^2$ максимумів зменшується з відстанню від центра картини.

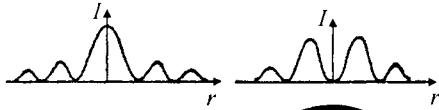


Рис. 226

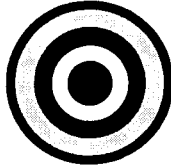


Рис. 227

При незмінному положенні джерела світла кількість зон m залежить від діаметра отвору і відстані L . При зміні діаметра отвору в отворі змінюватиметься і кількість зон Френеля, що вміщуються на відкритій ділянці хвильового фронту. Їх кількість буде змінюватись з парної на непарну і навпаки. Внаслідок цього інтенсивність світла в точці M періодично то зменшуватиметься, то збільшуватиметься. Така зміна інтенсивності також спостерігається, якщо екран E переміщати вздовж лінії S_0M .

У випадку, коли діаметр отвору великий, так що $E_{0m} \ll E_{01}$, то ніякої дифракційної картини на екрані не буде спостерігатись – світло в цьому випадку поширюється прямолінійно.

Якщо отвір освітлюється не монохроматичним, а білим світлом, то кільця будуть мати кольорове забарвлення, бо кількість зон Френеля, які вкладаються в отворі, залежить від довжини хвилі світла.

Дифракція на диску

Нехай сферична хвиля, яка поширюється від точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху непрозорий диск. У такому разі закрити диском ділянку фронту хвилі треба виключити з розгляду і будувати зони Френеля потрібно, починаючи з країв диска. На рис. 228 показано побудову цих зон для точки M екрана E , яка

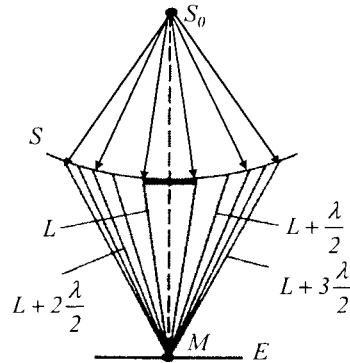


Рис. 228

лежить навпроти центра диска. Амплітуда E_{0m} в точці M визначається спільною дією всіх відкритих зон, починаючи з першої:

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}$$

Отже, в точці M завжди буде інтерференційний максимум, який відповідає половині дії першої відкритої зони Френеля. Центральний максимум оточений концентричними темними і світлими інтерференційними кільцями, що чергуються. Зміна інтенсивності світла I із відстанню r від точки M наведена на рис. 226. Зі збільшенням радіуса диска перша відкрита зона віддаляється від M і збільшується кут φ , між нормаллю до поверхні цієї зони в якій-небудь її точці і напрямком випромінювання в бік точки M . Тому інтенсивність центрального максимуму послаблюється при збільшенні розмірів диска. Якщо радіус диска набагато більший за радіус закритої ним центральної зони Френеля, то за диском буде звичайна тінь з дуже слабкою інтерференційною картиною в її межах.

§96. Дифракція Фраунгофера на одній щілині і на дифракційній ґратці

Дифракція Фраунгофера – це диф-

ракція плоских світлових хвиль, коли джерело світла і точка спостереження нескінченно віддалені від перешкоди, яка викликає дифракцію. Для здійснення дифракції Фраунгофера потрібно джерело світла S_0 помістити у фокусі збірної лінзи L_1 , а дифракційну картину досліджувати у фокальній площині другої збірної лінзи L_2 , встановленої за перешкодою (рис. 229).

Дифракція на одній щілині

Нехай паралельний пучок монохроматичного світла падає нормально на непрозору плоску поверхню, в якій прорізано вузьку щілину BC , що має сталу ширину $a=BC$ і довжину $l \gg a$ (рис. 229). За принципом Гюйгенса-Френеля точки щілини є вторинними джерелами хвиль, які коливаються в одній фазі, бо площина щілини збігається з фронтом падаючої хвилі.

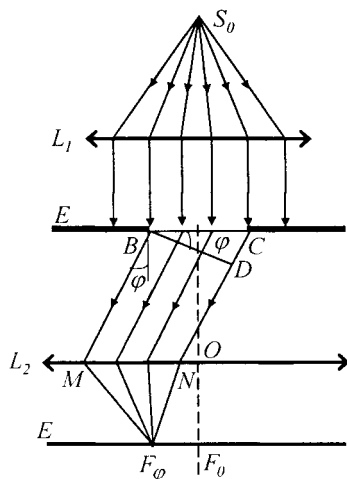


Рис. 229

У побічному фокусі F_φ лінзи L_2 збираються всі паралельні промені, які падають на лінзу під кутом φ до її оптичної осі OF_0 , яка перпендикулярна до фронту падаючої хвилі. Оптична різниця ходу Δ між крайніми променями CN і BM , які по-

ширюються від щілини в цьому напрямку, дорівнює $\Delta = CD = a \sin \varphi$, де BD – перпендикуляр, який опущений з точки B на промінь CN .

Щілину BC можна розбити на зони Френеля, які мають вигляд смуг, паралельних до ребра B щілини (рис. 230).

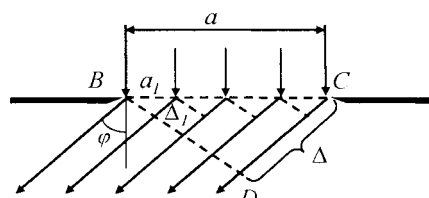


Рис. 230

Ширина кожної зони вибирається так, щоб різниця ходу від країв цих зон дорівнювала $\Delta_1 = \lambda/2$, тобто разом на ширині щілини поміститься $n = \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\Delta}{\lambda/2}$ зон.

$$n = \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\Delta}{\lambda/2}$$

Ширина кожної зони дорівнює $a_1 = \frac{\Delta_1}{\sin \varphi} = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}$, тобто їх площі однакові.

Всі зони в заданому напрямку випромінюють світло однакової інтенсивності. При інтерференції світла від кожної пари сусідніх зон амплітуда результуючих коливань дорівнює нулю, бо ці зони спричиняють коливання з однаковими амплітудами, але протилежними фазами. Отже, результат інтерференції світла в точці F_φ визначиться тим, скільки зон Френеля вкладається в щілині. Якщо кількість зон парна, то $n = 2k$ і

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

В точці F_φ отримується **дифракційний мінімум**. Знак „-“ у правій частині відповідає променям світла, які поширюються від щілини під кутом $-\varphi$ і збираються в

побічному фокусі $F_{-\varphi}$ лінзи, який симетричний F_{φ} відносно головного фокусу F_0 . Якщо кількість зон непарна, то

$$a \sin \varphi = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

і в точці F_{φ} буде **дифракційний максимум**, інтенсивність якого I_{φ} і який відповідає дії однієї зони Френеля. Величина k називається порядком дифракційного максимуму.

У напрямку $\varphi=0$ спостерігатиметься найінтенсивніший центральний максимум нульового порядку інтенсивністю I_0 ; тому що коливання, які спричинюються в точці F_0 всіма ділянками щілини, відбувається в одній фазі.

Залежність відношення $\frac{I_{\varphi}}{I_0}$ від $\sin \varphi$ зображено на рис. 231.

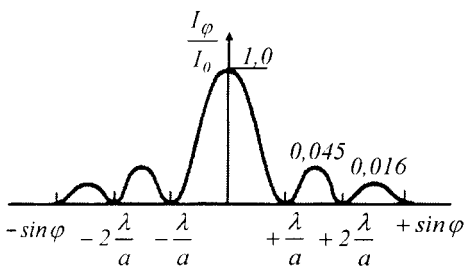


Рис.231

Розрахунок показує, що інтенсивності центрального і наступних максимумів співвідносяться як

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,0083 : \dots$$

тобто основна частина світлової енергії зосереджена в центральному максимумі.

Шириною дифракційного максимуму на екрані E називають відстань між двома найближчими до нього дифракційними мінімумами.

Ширина максимуму нульового по-

рядку дорівнює відстані між двома мінімумами першого порядку, тобто $l = 2 \frac{\lambda}{a}$.

Отже, центральна світла смуга тим ширша, чим більша довжина хвилі λ і чим менша ширина щілини a . В межах самої центральної смуги інтенсивність досить швидко зменшується від її середини до країв.

При $\varphi = \pm \frac{\lambda}{2a}$ інтенсивність дорівнює 0,4 від максимальної.

$$\text{Для } a = \lambda \left(\sin \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$$

головний максимум охоплює всю область екрана, тобто екран освітлений рівномірно. При збільшенні ширини щілини ($a > \lambda$) дифракційні смуги стають вузькими, а число мінімумів $k = \frac{a}{\lambda} \sin \varphi$ зростає. Дифракційна картина стає яскравіша, оскільки через ширшу щілину проходить більший світловий потік. Коли щілина досить широка ($a \gg \lambda$), то в центрі дифракційної картини буде чітке зображення джерела світла, що відповідає прямолінійному поширенню світла.

У випадку білого світла буде спостерігатися сукупність відповідних картин для різних кольорів. Центральний максимум має райдужне забарвлення по краях. Повного гасіння світла не буде в жодній точці екрана, бо максимуми і мінімуми світла з різними λ перекриваються.

Дифракція на дифракційній ґратці

Розглянемо дифракцію світла, зумовлену дією **дифракційної ґратки**.

Дифракційна ґратка – це система з великої кількості однакових за шириною і паралельних одна до одної щілин, що лежать в одній площині і відокремлені не-

прозорими проміжками, однаковими за шириною. $BC=DP=a$; $CD=b$; $d=a+b$ – період дифракційної ґратки (рис. 232).

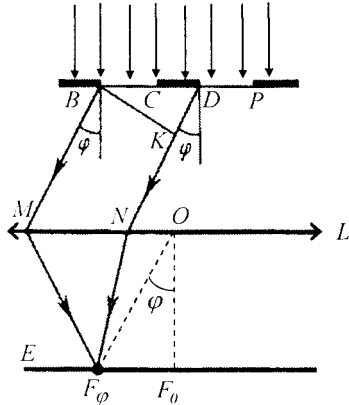


Рис. 232

Розглянемо спочатку дифракцію плоскої монохроматичної хвилі, яка падає нормально на поверхню ґратки, що містить дві щілини. Коливання в усіх точках щілини відбуваються в одній фазі, оскільки ці точки лежать на тій самій хвильовій поверхні. Знайдемо результуючу амплітуду коливань у точці F_φ екрана E , в якій збираються промені від усіх щілин ґратки, що падають на лінзу L під кутом φ до її оптичної осі OF_0 .

Очевидно, що в тих напрямках, в яких одна із щілин не поширює світла, воно не буде поширюватися і при двох щілинах, **тобто головні мінімуми інтенсивності** будуть спостерігатися в напрямках, що визначаються умовою:

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Оскільки щілини знаходяться одна від одної на однакових відстанях, то різниця ходу променів, що йдуть від двох сусідніх щілин, будуть для даного напрямку φ однакові в межах всієї дифракційної ґратки:

$$\Delta = KD = (a+b) \sin \varphi = d \sin \varphi.$$

Внаслідок взаємної інтерференції світлових променів, які посилюються двома щілинами, в деяких напрямках вони будуть гасити один одного, тобто виникнуть додаткові мінімуми. Ці додаткові мінімуми будуть спостерігатися для променів, які поширюються від точок B і D двох щілин, якщо різниця ходу променів $\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots$.

Отже, з урахуванням $d \sin \varphi = \Delta$ умова додаткових мінімумів:

$$d \sin \varphi = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

Якщо ж в різниці ходу променів, які випромінюються з точок B і C , вміщується ціле число довжин хвиль, а саме $0, \lambda, 2\lambda, \dots$, то дія одної щілини буде підсилюватися дією іншої. Отже, умова головних максимумів

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

Якщо дифракційна ґратка складається з N щілин, то умовою головних максимумів є вираз

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots),$$

умовою головних мінімумів –

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

умовою додаткових мінімумів –

$$d \sin \varphi = \pm \frac{m'}{N} \lambda,$$

$$(m'=1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots)$$

або

$$d \sin \varphi = \pm \left(m + \frac{m'}{N} \right) \lambda, \quad \left(\begin{matrix} m=0, 1, 2, \dots \\ m'=1, 2, 3, \dots, N-1 \end{matrix} \right)$$

Між двома сусідніми додатковими мінімумами утворюються максимуми, які називаються **вторинними**. При великому N найближчий до головного максимуму вто-

ринний максимум має інтенсивність в 22 рази меншу, ніж інтенсивність головного максимуму.

Отже, між двома сусідніми головними максимумами знаходиться $N-1$ додаткових мінімумів і $N-2$ вторинних максимумів. На них накладатимуться мінімуми, що виникають при дифракції від однієї щілини.

Із формул

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda \quad \text{і} \quad d \sin \varphi = \pm m \lambda$$

видно, що головний максимум m -го порядку збігається з k -им мінімумом від однієї щілини, якщо виконується рівність

$$\frac{k}{a} = \frac{m}{d}, \quad \text{або} \quad \frac{m}{k} = \frac{d}{a}.$$

На рис. 233 наведено розподіл інтенсивності I_φ від $\sin \varphi$ для $N=4$ і $\frac{d}{a}=3$.

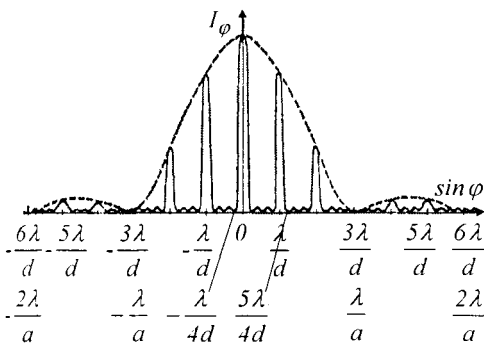


Рис. 233

Пунктирна крива, що проходить через вершини головних максимумів, зображує інтенсивність, яка зумовлена дифракцією на одній щілині. Як видно з рис. 233, при відношенні $\frac{d}{a}=3$ головні максимуми 3-го, 6-го тощо порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, тому ці максимуми зникають.

Чим більше щілин N , тим більша кількість світлової енергії пройде через

гратку, тим більше мінімумів утворюється між сусідніми головними максимумами, тим інтенсивнішими і гострішими будуть максимуми.

Оскільки $\sin \varphi$ не може бути більше від одиниці, то кількість головних максимумів $m \leq \frac{d}{\lambda}$.

Якщо дифракційну гратку освітлюють білим світлом, то для різних значень λ положення всіх головних максимумів, крім центрального, не збігаються один з одним. Тому центральний максимум має вигляд білої смужки, а всі інші – райдужних смужок, які називають дифракційними спектрами першого, другого і тощо порядків. У межах кожної смужки забарвлення змінюється від фіолетового біля внутрішнього краю, який найближчий до максимуму нульового порядку до червоного – біля зовнішнього краю. На рис. 234 зображено центральний та два головні максимуми і зазначено їхнє забарвлення.

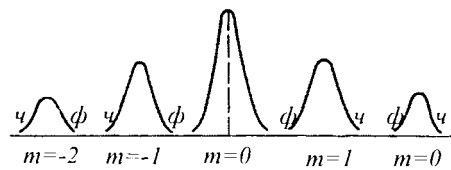


Рис. 234

Основними характеристиками дифракційної ґратки є кутова або лінійна дисперсія, дисперсійна область і роздільна здатність.

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

де $d\varphi$ – кутова відстань між двома спектральними лініями, яким відповідають довжини хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Продиференціювавши формулу

$$d \sin \varphi = m \lambda,$$

по λ при сталому m отримаємо

$$d \cos \varphi d\varphi = m d\lambda.$$

Звідси

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

Якщо кути дифракції φ малі, то

$$\cos \varphi \approx 1 \quad \text{і} \quad D = \frac{m}{d} = m \frac{N}{l},$$

де l – довжина робочої ділянки ґратки.

Звідси видно, що дифракційний спектр рівномірний для всіх довжин хвиль.

Лінійною дисперсією називають величину

$$D_{\text{ліній}} = \frac{dl}{d\lambda},$$

де dl – лінійна відстань на екрані між двома максимумами одного й того самого порядку m для хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Якщо фокусна відстань лінзи, у фокальній площині якої спостерігається дифракційна картина, дорівнює F , то

$$dl \approx F d\varphi \quad \text{і} \quad D_{\text{ліній}} = F \frac{d\varphi}{d\lambda} = FD = F \frac{m}{d}.$$

Дисперсійною областю спектрального приладу, зокрема дифракційної ґратки, називається ширина спектрального інтервалу $\Delta\lambda$, в якому спектри не перекриваються. Нехай довжини світлових хвиль, що падають на ґратку, знаходяться в інтервалі від λ до $\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda$. Інтервал $\Delta\lambda$ буде дисперсійною областю ґратки тоді, коли правий край спектра $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі λ збігатиметься з лівим краєм спектра m -го порядку для довжини хвилі λ_1 .

Цю умову можна записати так:

$$d \sin \varphi = m \lambda_1, \quad d \sin \varphi = (m+1) \lambda,$$

звідси

$$m \lambda_1 = (m+1) \lambda, \quad \lambda_1 - \lambda = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній $\Delta\lambda$, при яких спектральний прилад розділяє їх окремо, називається **спектральною розділяючою відстанню**, а величина

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

– **роздільною здатністю** приладу.

Для дифракційної ґратки Релей запропонував такий критерій спектрального розділення: спектральні лінії з довжинами хвиль λ і $\lambda_1 = \lambda + \delta\lambda$ вважаються розділеними, якщо головний максимум дифракційної картини для хвилі довжиною λ збігається за своїм розміщенням з першим дифракційним мінімумом того самого порядку для хвилі довжиною λ_1 , а інтенсивність в проміжку між максимумами становить не більше ніж 80% від інтенсивності максимуму (рис. 235).

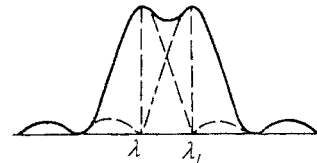


Рис. 235

Нехай головний максимум m -го порядку для хвиль $\lambda_1 = \lambda + \delta\lambda$ знаходиться на місці першого мінімуму ($m' = 1$) спектра того самого порядку для хвилі λ :

$$d \sin \varphi = m \lambda_1, \quad d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda.$$

Звідси

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda,$$

тобто

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}.$$

Роздільна здатність ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

Отже, роздільна здатність ґратки пропорційна порядку спектра m і кількості N щілин.

Оскільки $N = \frac{l}{d}$, а $m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}$, то

$$R = mN = \frac{l}{d} \frac{d \sin \varphi}{\lambda} = \frac{l \sin \varphi_{max}}{\lambda},$$

де φ_{max} – максимальний кут дифракції і $\varphi_{max} \leq 90^\circ$. Тому, максимальна роздільна здатність ґратки буде $\left(\frac{\lambda}{\delta\lambda}\right)_{max} \leq \frac{l}{\lambda}$.

ТУДОРОВСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ІЛАРІОНОВИЧ
(1875-1963)

Розробив теорію розрахунку приладів з дифракційною ґраткою, запропонував строгі методи розрахунку ходу променів у таких приладах.

§97. Дифракція рентгенівського випромінювання

Рентгенівським випромінюванням є електромагнітні хвилі, довжина яких лежить в інтервалі $10^{-10} \div 8 \cdot 10^{-8}$ м. Залежно від умов отримання рентгенівське випромінювання утворює *суцільний* або *лінійчастий* (характеристичний) спектр.

Для спостереження дифракції на ґратці необхідно, щоб її період d був того самого порядку, що і довжина хвилі падаючого випромінювання. Для рентгенівських променів ідеальними природними дифракційними ґратками є монокристали, в яких атоми та іони розміщені на відстані порядку 10^{-10} м. Кристалографічні дослідження показали, що у будь-якому кристалі можна виявити певні площини, де атоми або іони, які утворюють його кристалічну ґратку, розміщені найбільш густо. Такі площини відбиватимуть монохроматичне рентгенівське випромінювання, яке може

інтерферувати від різних площин.

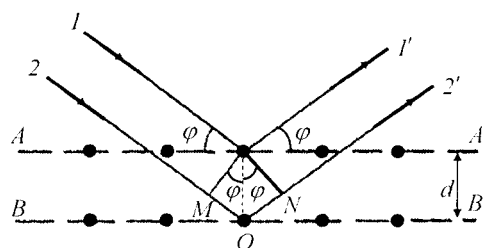


Рис. 236

На рис. 236 зображено сусідні площини кристала AA_1 і BB_1 . Абсолютний показник заломлення всіх середовищ для рентгенівських променів близький до одиниці. Тому оптична різниця ходу Δ між двома променями I' і $2'$, які відбиваються від площини AA_1 і BB_1 , дорівнює

$$\Delta = MO + ON = 2d \sin \varphi,$$

де d – відстань між площинами, а кут φ – кут між площиною AA_1 та падаючими та відбитими променями або кут ковзання. Якщо довжина хвилі рентгенівських променів λ , то інтерференційні максимуми у відбитих променях спостерігатимуться, коли

$$2d \sin \varphi = m\lambda, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Співвідношення $2d \sin \varphi = m\lambda$ є *формулою Вульфа-Брегга*. Дифракція виникає не в довільному напрямку падіння монохроматичного випромінювання, тому для її спостереження треба повертати кристал так, щоб кут ковзання задовольняв умову $2d \sin \varphi = m\lambda$. Якщо обертати кристал або проводити експеримент з полікристалічною системою, в якій окремі кристалики орієнтовані довільно, то можна отримати певну систему інтерференційних картин від усіх можливих типів атомних площин певного кристала.

Дифракція рентгенівських променів є основою *рентгеноструктурного аналі-*

зу, який дає можливість вивчати структуру кристалів, аморфних твердих тіл, рідин, а також *рентгеноспектрального аналізу*, що використовується для вивчення рентгенівських спектрів, а також для визначення хімічного складу речовин.

§98. Дисперсія світла. Области нормальної і аномальної дисперсії

Дисперсією світла називається залежність показника заломлення n речовини від частоти ν (довжини хвилі λ) світла або залежність фазової швидкості v світла в середовищі від його частоти ν .

Дисперсію світла представляють у вигляді залежності $n = f(\lambda)$.

Наслідком дисперсії є розклад у спектр пучка білого світла при проходженні його через призму.

Такий дослід вперше виконав в 1672 р. Ньютон. Схема дослідів наведена на рис. 237.

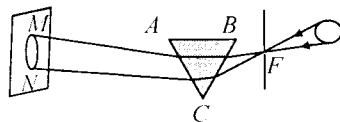


Рис. 237

Промінь світла від Сонця проходить через малий круглий отвір F у ставні вікна, потім заломлюється в скляній призмі ABC і падає на аркуш білого паперу. При цьому кругле зображення отвору F розтягується в кольорову смугу MN , яку Ньютон назвав спектром.

Розглянемо дисперсію світла у призмі. Нехай монохроматичний пучок світла падає на призму з показником заломлення n під кутом α_1 (рис. 238).

Кут δ – заломлюючий кут призми. Із рис. 238 видно, що кут відхилення φ дорівнює:

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta.$$

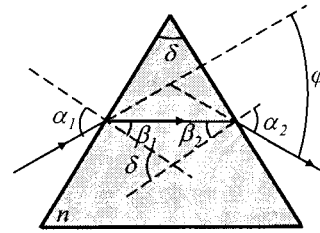


Рис. 238

Нехай кути δ і α_1 малі, тоді кути α_2 , β_1 і β_2 також будуть малі і синуси цих кутів дорівнюватимуть кутам. Тому

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = n, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{n}.$$

Оскільки $\beta_1 + \beta_2 = \delta$, то

$$\alpha_2 = \beta_2 n = (\delta - \beta_1) n = n \left(\delta - \frac{\alpha_1}{n} \right) = n\delta - \alpha_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = n\delta \quad \text{і} \quad \varphi = n\delta - \delta.$$

В результаті

$$\varphi = \delta(n - 1),$$

тобто кут відхилення променів призмою тим більший, чим більший заломлюючий кут призми. Оскільки кут відхилення φ залежить від величини $n - 1$, а n є функцією довжини хвилі, то промені різних довжин хвиль після проходження призми виявляються відхиленими на різні кути.

Кутовою дисперсією призми, що відповідає сталому значенню кута падіння α_1 , називається величина

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dn} \frac{dn}{d\lambda}.$$

Кут відхилення φ буде мінімальним, коли промінь проходить через призму паралельно до її основи. За такої умови $\beta_1 = \beta_2$ і $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, тоді

$$\alpha = \frac{\varphi_{\min}}{2} + \frac{\delta}{2}, \quad \text{а} \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{\delta}{2}.$$

Згідно із законом заломлення

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_{\min} + \delta)}{\sin \frac{1}{2} \delta}$$

Звідси

$$\frac{dn}{d\varphi_{\min}} = \frac{1 \cos \frac{1}{2}(\varphi_{\min} + \delta)}{2 \sin \frac{\delta}{2}}$$

Тоді

$$D_{\varphi} = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_{\min} + \delta)} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_{\min} + \delta)}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$$

Для спектральних приладів призми виготовляють здебільшого із заломлюючими кутами $\delta = 60^\circ$. Тоді

$$D_{\varphi} = \frac{1}{b} \frac{dn}{d\lambda}, \text{ де } b = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}}$$

За допомогою призми, як і за допомогою дифракційної ґратки можна визначити спектральний склад світла.

Розглянемо відмінності в дифракційному і призматичному спектрах:

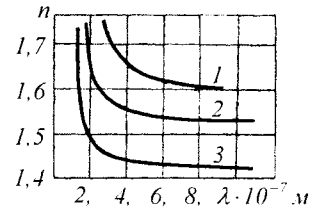
а) дифракційна ґратка розкладає падаюче світло безпосередньо по довжинах хвиль, тому за вимірними кутами можна обчислити довжину хвилі.

Розклад білого світла в призмі відбувається за значеннями показника заломлення, тому для визначення довжини світла треба знати залежність $n = f(\lambda)$.

У дифракційному спектрі кольори розміщуються за порядком зростання довжини хвилі, а в дисперсійному – навпаки. Дифракційною ґраткою червоні промені, що мають більшу довжину хвилі, ніж фіо-

летові, відхиляються сильніше.

На рис. 239 наведені залежності показника заломлення n від довжини хвилі λ для скла (1), кварцу (2) і флюорита (3).



Як видно із рис. 239, показник заломлення n монотонно зростає зі зменшенням довжини хвилі λ . Отже, призмою червоні промені, що мають менший показник заломлення, ніж фіолетові промені, відхилюються на менший кут φ , ніж фіолетові.

б) дифракційний спектр рівномірно розтягнутий на всіх своїх ділянках. Дисперсійний же спектр білого світла стиснутий у червоній області і розтягнутий у фіолетовій, тому що показник заломлення скла в області коротких хвиль при зміні довжини хвилі випромінювання змінюється швидко, а в області довгих хвиль – повільно.

Залежність $n = n(\lambda)$ в оптичній області спектра має складний характер; для тих ділянок спектра, які слабо поглинаються даною речовиною, залежність показника заломлення від довжини хвилі може бути подана у вигляді **формули Коші**:

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} \text{ або } n \approx n_0 + \frac{a}{\lambda^2}$$

Величина, яка показує, як швидко змінюється показник заломлення n речовини з довжиною хвилі λ називається **дисперсією речовини D**:

$$D = \frac{dn}{d\lambda}$$

Дисперсію світла в середовищі на-

зивають *нормальною*, якщо із зростанням частоти ν світла абсолютний показник заломлення n середовища також зростає:

$$\frac{dn}{d\nu} > 0, \quad \left(\frac{dn}{d\lambda} < 0 \right).$$

Така залежність показника заломлення n від ν буде в тих областях частот, для яких середовище прозоре. Наприклад, звичайне скло прозоре для видимого світла і в цьому інтервалі частот має нормальну дисперсію.

Дисперсію світла в середовищі називають *аномальною*, якщо із зростанням частоти ν світла абсолютний показник заломлення середовища n зменшується:

$$\frac{dn}{d\nu} < 0, \quad \left(\frac{dn}{d\lambda} > 0 \right).$$

Аномальна дисперсія буде в області частот, які відповідають смугам інтенсивного поглинання світла речовиною. Для скла ці смуги лежать в ультрафіолетовій й інфрачервоній частині спектра. Аномальній дисперсії відповідає інтервал частот від ν_1 до ν_2 (рис. 240).

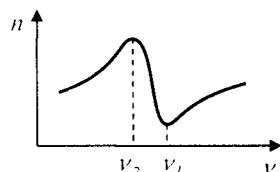


Рис. 240

В різних ділянках спектра дисперсія характеризується тією зміною показника заломлення, яка припадає на одиничний інтервал довжин хвиль. Ця величина $\frac{\Delta n}{\Delta \lambda}$ називається *середньою дисперсією* для ділянки спектра $\lambda, \lambda + \Delta \lambda$.

У довідникових таблицях показники заломлення різних речовин даються для жовтої лінії натрію $\lambda_D = 0,5893 \mu\text{м}$ і поз-

начаються n_D . Середня дисперсія визначається за синьою $\lambda_F = 0,4861 \mu\text{м}$ і червоною $\lambda_C = 0,6563 \mu\text{м}$ лініях водню і позначається $n_F - n_C$. Величина $\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$ називається *відносною дисперсією*, обернена її величина – *коефіцієнтом дисперсії*.

Оскільки показник заломлення n світла залежить від частоти коливання ν світла, то швидкість його поширення також залежить від частоти коливань електромагнітної хвилі. А яку швидкість поширення світлового сигналу вимірюють дослідним шляхом?

Усі приймачі світла реагують на енергію, тому в дослідах вимірюють *швидкість перенесення енергії світловим сигналом* і яка називається її *груповою швидкістю*. Вона відрізняється від швидкості ν поширення фази, яка називається *фазовою швидкістю*.

Розглянемо дві плоскі хвилі, які поширюються вздовж осі OX . Нехай амплітуди цих хвиль однакові, початкові фази $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$, а різниця між частотами і хвильовими числами незначна:

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$E_2 = E_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x].$$

Додаючи ці коливання і нехтуючи $\Delta\omega$ в порівнянні з ω і Δk в порівнянні з k , дістанемо квазікосинусоїдальну хвилю, яка називається групою хвиль, або хвильовим пакетом:

$$E \approx 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega t - kx).$$

Амплітуда E_p цієї хвилі залежить від координати x і часу t :

$$E_p = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right).$$

Отриманий вираз для амплітуди хвильового пакета є рівнянням плоскої косинусоїдальної хвилі, яка є хвилею амплітуди коливань і фаза якої

$$\Phi_A = \frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta kx).$$

Об'ємна густина w енергії хвилі прямо пропорційна до квадрата амплітуди цієї хвилі. Отже, швидкість u поширення енергії хвильового пакета збігаються з фазовою швидкістю хвилі амплітуди. Диференціюючи вираз для Φ_A в припущенні, що $\Phi_A = const$, дістаємо

$$\Delta\omega dx - \Delta k dx = 0$$

і групова швидкість

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

або в границі, коли $\Delta\omega$ і Δk прямують до нуля, дістанемо:

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Оскільки

$$\omega = 2\pi\nu, \text{ а } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi n\nu}{c}, \text{ то}$$

$$d\omega = 2\pi d\nu, \quad dk = \frac{2\pi}{c}(nd\nu + \nu dn).$$

Групова швидкість

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi d\nu}{\frac{2\pi}{c}(nd\nu + \nu dn)} = \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}} = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}}.$$

Якщо $\frac{dn}{d\nu} = 0$, то $u = v$, тобто фазова і групова швидкості збігаються. Цей випадок має місце для вакууму.

При нормальній дисперсії $\frac{dn}{d\nu} > 0$ і $u < v$.

При аномальній дисперсії $\frac{dn}{d\nu} < 0$, $u > v$ і,

зокрема, якщо $n + \nu \frac{dn}{d\nu} < 1$, то $u > c$.

Цей результат не протирічить твердженню спеціальної теорії відносності про те, що швидкість передачі будь-якого сигналу не може перевищувати c . Поняття групової швидкості застосовне лише при умові, що поглинання енергії хвилі в даному середовищі невелике. При значному згасанні хвилі поняття групової швидкості втрачає сенс. Саме в області аномальної дисперсії поглинання дуже велике, і поняття групової швидкості не можна використовувати.

ПРИХОТЬКО АНТОНІНА ФЕДОРІВНА
(1906-1988)

Виконала перші низькотемпературні вимірювання нормальної й аномальної дисперсії світла в органічних кристалах.

ГОРБАНЬ ІВАН СТЕПАНОВИЧ
(нар. 1928 р.)

Експериментально обґрунтував квантову теорію дисперсії світла в розчинах.

§99. Електронна теорія дисперсії світла

Дисперсію світла можна пояснити на основі електромагнітної теорії і електронної теорії будови речовини. Для цього треба розглянути процес взаємодії електромагнітних хвиль із зв'язаними електронами атомів речовини.

Розглянемо класичну теорію дисперсії світла в однорідному діелектрику. З теорії Максвелла випливає, що абсолютний показник заломлення середовища $n = \sqrt{\epsilon}$. Отже, знайшовши залежність відносної діелектричної проникності ϵ діелектрика від частоти світла, можна отримати залежність показника заломлення n від циклічної частоти ω .

Відомо, що за визначенням

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E},$$

де χ – діелектрична сприйнятливість середовища, ε_0 – електрична стала, P – миттєве значення вектора поляризації. Отже,

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}.$$

Внаслідок великої частоти світла поляризація середовища зумовлена лише зміщенням електронів (електронною поляризацією). Отже, $P = n_0 p_e$, де n_0 – кількість атомів в одиниці об'єму, p_e – наведений дипольний момент атома. У першому наближенні можна вважати, що величина p_e визначається зміщенням лише зовнішніх електронів, які найслабше зв'язані з ядром атома. Ці електрони називаються оптичними електронами.

В електронній теорії дисперсії оптичний електрон розглядається як згасаючий гармонічний осцилятор, тобто як електрон, що коливається і поступово віддає свою енергію середовищу та на випромінювання.

Для атомів з одним оптичним електроном $p_e = -ex$ і $P_e = -n_0 ex$, де e – абсолютна величина заряду електрона, x – зміщення електрона під дією електричного поля світлової хвилі. Знак „-” у правих частинах виразів для p_e і P_e введено тому, що вектори \vec{p}_e і \vec{P}_e протилежні за напрямком вектору \vec{x} зміщення негативно зарядженого електрона. Тоді

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E}.$$

Задача зводиться до визначення зміщення x електрона під дією зовнішнього поля E .

Оптичний електрон здійснює вимушені коливання в полі світлової хвилі під дією таких сил:

а) повертальної квазіпружної сили взаємодії оптичного електрона з іншою частиною атома: $F_{пов} = -kx$, де k – коефіцієнт квазіпружної сили; $k = m\omega_0^2$, ω_0 – циклічна частота вільних незгасаючих коливань електрона. Отже $F_{пов} = -m\omega_0^2 x$;

б) сили опору, яка пропорційна до швидкості електрона: $F_{оп} = -r\dot{x}$, де r – коефіцієнт опору;

в) збуджуючої (вимушуючої) сили: $F = -eE$, де E – напруженість електричного поля світлової хвилі, яка змінюється з часом за законом $E = E_0 e^{i\omega t}$, а $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота.

Рівняння вимушених коливань електрона має вигляд

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} - eE_0 e^{i\omega t},$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t},$$

де $\delta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання.

Система під дією зовнішньої періодичної сили здійснює вимушені коливання з частотою вимушуючої сили. Тому розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді: $x = x_0 e^{i\omega t}$. Оскільки

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} = i\omega x, \quad \ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x,$$

то

$$-\omega^2 x + i2\delta\omega x + \omega_0^2 x = -\frac{eE}{m}.$$

Звідси

$$x = -\frac{eE}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}.$$

Підставивши це значення зміщення у вираз для n^2 , отримуємо

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}.$$

У випадку, коли є втрати енергії хвилі, показник заломлення є комплексною величиною і введемо його за формулою $n' = n - i\kappa$, де n – справжній показник заломлення, κ – показник поглинання середовища. Тоді

$$(n - i\kappa)^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}.$$

Перепишемо цей вираз у такий спосіб, розділяючи дійсну і уявну частини:

$$\begin{aligned} & (n^2 - \kappa^2) - i2n\kappa = \\ & = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\delta\omega][(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega]} = \\ & = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} - \\ & - i \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}, \\ 2n\kappa &= \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт згасання $\delta \ll \omega$ і для частот, які значно відрізняються від власної частоти коливань ω_0 , має місце нерівність $4\delta^2 \omega^2 \ll (\omega_0^2 - \omega^2)^2$, а також $\kappa^2 \ll n^2$. Тоді

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Звідси видно, що $n > 1$, якщо $0 < \omega < \omega_0$; $n = \pm \infty$ при $\omega = \omega_0$ і $n < 1$, якщо $\omega_0 < \omega < \infty$.

На рис. 241 наведена залежність функції $n^2 - 1$ від частоти ω . Для значень $\omega = \omega_0$ функція має розрив, а для всіх ін-

ших значень ω спостерігається нормальна дисперсія, тобто

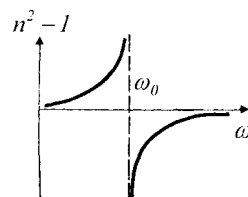


Рис. 241

$\frac{dn}{d\lambda} < 0$. Перетворення показника заломлення у нескінченність при $\omega = \omega_0$ не має фізичного змісту і пояснюється нехтуванням поглинання.

На рис. 242 показані графіки залежності функцій $n^2 - \kappa^2$ і $2n\kappa$ від частоти ω . В інтервалі частот від ω_1^2 до ω_2^2 (крива BC) показник заломлення зменшується зі збільшенням частоти, тобто дисперсія речовини аномальна.

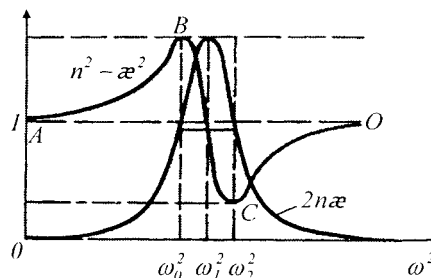


Рис. 242

Отримані формули для $n^2 - \kappa^2$ і $2n\kappa$ справедливі, коли в кожній речовині є лише одна характерна для неї циклічна частота ω_0 вільних коливань оптичних електронів. Насправді, кожна речовина характеризується певним набором різних власних частот ω_{0i} , які спостерігаються у спектрах поглинання та випромінювання.

Нехай з n_0 атомів, що знаходяться в одиниці об'єму, f_1 осциляторів мають частоту ω_{01} і коефіцієнт згасання δ_1 , f_2 осциляторів – частоту ω_{02} і коефіцієнт згасання δ_2 і т.д.

Тоді кількість осциляторів з частотою

тою ω_{0i} і коефіцієнтом загасання δ_i буде $n_{0i} = n_0 f_i$. Щоб врахувати вплив всіх осциляторів на показник заломлення n і показник поглинання у формулах для $n^2 - \varepsilon^2$ і $2n\varepsilon$ треба замість n_0 , ω_0 і δ підставити відповідно n_{0i} , ω_{0i} і δ_i та знайти суму за всіма можливими значеннями i . В результаті отримаємо

$$n^2 - \varepsilon^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) f_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_i^2 \omega^2},$$

$$2n\varepsilon = \frac{2e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{\omega \delta_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_i^2 \omega^2}.$$

Величину f_i називають силою i -го осцилятора. Він характеризує внесок цього осцилятора в дисперсію і поглинання світла ω . За наявності декількох ліній поглинання графік залежності n від ω для газів, у яких $\varepsilon \ll 1$, наведена на рис. 243.

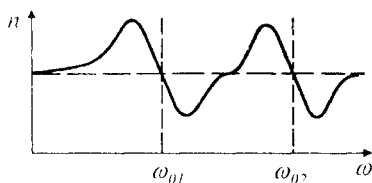


Рис. 243

Поблизу кожної із частот ω спостерігається аномальна дисперсія.

§100. Поглинання світла

Поглинанням світла називається явище втрати енергії світловою хвилею, яка проходить через речовину, внаслідок перетворення енергії хвилі у інші форми енергії.

При проходженні паралельного пучка світла крізь шар прозорого середовища його інтенсивність зменшується. Поглинання світла може приводити до нагрівання, іонізації або збудження атомів і молекул речовини, до деформації, поглинан-

ня може супроводжуватись розсіянням світла та індуктивним випромінюванням.

Щоб отримати співвідношення, яке виражає закон поглинання світла, розглянемо шар прозорого середовища завтовшки l , на який падає паралельний пучок променів інтенсивністю I_0 . Виділимо в середовищі нескінченно тонкий шар dl , який обмежений паралельними поверхнями, що перпендикулярні до напрямку поширення світла (рис. 244).

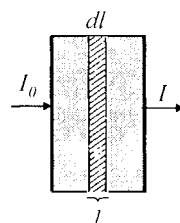


Рис. 244

Дослід показує, що зменшення інтенсивності світла шаром середовища dl пропорційне до величини інтенсивності, що входить у цей шар, і товщини шару, тобто

$$dl = -\alpha dl,$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який не залежить від інтенсивності світла і називається коефіцієнтом поглинання. Знак мінус вказує на те, що із збільшенням товщини шару поглинаючого середовища інтенсивність світла, що проходить крізь нього, зменшується.

Після розділення змінних у рівнянні дістаємо

$$\frac{dl}{I} = -\alpha dl.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{I_0}^I \frac{dl}{I} = -\alpha \int_0^l dl; \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\alpha l.$$

В результаті маємо

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

де I – інтенсивність світла, що виходить із шару поглинаючого середовища завтовшки l ; I_0 – інтенсивність світла, що входить

у поглинаюче середовище. При $I = \frac{I_0}{\alpha}$ інтенсивність $I = \frac{I_0}{e}$. Отже, шар, товщина якого дорівнює $\frac{I}{\alpha}$, зменшує інтенсивність світла в e разів. Отримане співвідношення було встановлене у 1729 р. П. Бугером і називається законом Бугера, або **законом Бугера-Ламберта**. А. Бер встановив, що поглинання світла розчинами пропорційне молекулярній концентрації C_0 розчиненої речовини, тобто

$$\alpha = \alpha_0 C_0,$$

де α_0 – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи розчиненої речовини і не залежить від її концентрації.

Тоді **закону Бугера-Ламберта-Бера**, який справедливий для газів і розчинів малих концентрацій, можна надати вигляду

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 C_0 l}.$$

Коефіцієнт поглинання залежить від довжини хвилі λ_0 (або частоти ω) і від хімічної природи речовини.

В одноатомних газах і парах металів, у яких атоми розміщені на значних відстанях один від одного і їх можна вважати ізольованими, коефіцієнт поглинання для більшості довжин хвиль близький до нуля і лише для дуже вузьких спектральних областей спостерігаються різні максимуми. Такий спектр поглинання називається **лінійчастим**. (рис. 245). Ці лінії відповідають частотам власних коливань електронів в атомах.

У газів з багатоатомними молекулами спостерігаються системи тісно розміщених ліній, які утворюють **смуги поглинання**.

Структура цих смуг визначається складом і будовою молекул.

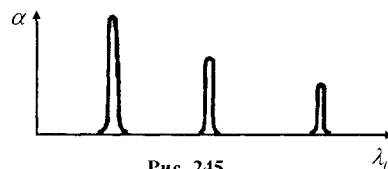


Рис. 245

Рідкі і тверді діелектрики мають **суцільні спектри поглинання**, що складаються з порівняно широких смуг поглинання, в межах яких коефіцієнт поглинання змінюється плавно. За межами цих смуг $\alpha \approx 0$, тобто діелектрики прозорі.

Метали практично непрозорі для світла. Коефіцієнт α для них має значення порядку 10^2 м^{-1} , в той час як для скла $\alpha \approx 1 \text{ м}^{-1}$. Це обумовлено наявністю в металах вільних електронів. Під дією електричного поля світлової хвилі вільні електрони починають рухатись і в металі виникають швидкозмінні струми, що супроводжуються виділенням теплоти. В результаті енергія світлової хвилі швидко зменшується і перетворюється у внутрішню енергію металу.

Структура спектрів поглинання визначається складом і будовою молекул, тому вивчення спектрів поглинання є одним з основних методів кількісного і якісного дослідження речовин.

КОРДИШ ЛЕОН ЙОСИПОВИЧ
(1878-1932)

В 1906 р., використовуючи теорію теплового випромінювання Планка, порівняв лінійчасті і смугові спектри випромінювання, і прийшов до висновку, що лінійчасті спектри дають речовини в атомарному стані, а смугові – речовини, молекули яких складаються з двох і більше атомів.

КИРИЛОВ ЄЛІПІФОР АНЕМПОДІСТОВИЧ
(1883-1964)

Встановив картину поглинання у широкій області спектра – від ультрафіолетової до інфрачервої – на різних світлочутливих об'єктах і фотографічних шарах. Це явище було названо тонкою структурою.

Знайшов структуру спектрів поглинання бромистого і йодистого срібла, хлористого і бромистого талію. Провів порівняння спектрів поглинання голоїдних солей ртуті, талію і срібла.

ПРИХОТЬКО АНТОНІНА ФЕДОРІВНА
(1906-1988)

Встановила основні закономірності поглинання і випромінювання світла органічними кристалами.

Виконала цикл досліджень спектрів поглинання кристалів ароматичного ряду.

Розвинула теорію поглинання світла магнітними молекулярними кристалами.

ЄРЕМЕНКО ВІКТОР ВАЛЕНТИНОВИЧ
(нар. 1932 р.)

Показав, що електронно-магнітні смуги поглинання світла більш чутливі до встановлення магнітного порядку, ніж суто електронні.

ПРИХОТЬКО А.Ф., БРОДИН М.С., СОСКИН М.С.

В результаті систематичних досліджень дисперсії показника заломлення деяких кристалів вперше встановили істотне порушення дисперсійних співвідношень Крамерса-Кроніга в околі ексitonних смуг при низьких температурах.

§101. Природне і поляризоване світло. Закон Малюса

Наслідком теорії Максвелла є поперечність світлових хвиль: вектори напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів електромагнітної хвилі взаємно перпендикулярні і коливаються перпендикулярно до вектора швидкості \vec{v} поширення хвилі. Оскільки основне значення при дії світла на речовину має вектор напруженості \vec{E} електричного поля – *світловий вектор*, - що діє на електрони в атомах речовини, тому в наступному будемо розглядати напрямок коливання лише цього вектора.

Світло є сумарним електромагнітним випромінюванням множини атомів.

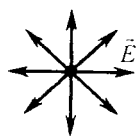


Рис. 246

Атоми ж випромінюють світлові хвилі незалежно один від одного, тому світлова хвиля, що випромінюється тілом, характеризується різноманітними рівномірними коливаннями світлового вектора (рис. 246).

В даному випадку рівномірний розподіл векторів \vec{E} пояснюється великим числом атомарних випромінювачів, а рівність амплітудних значень векторів \vec{E} – однаковою в середньому інтенсивністю випромінювання кожного з атомів.

Природним називається світло з усіма можливими рівноймовірними орієнтаціями вектора \vec{E} (і, отже, \vec{H}).

Поляризованим називається світло, в якому напрямки коливань вектора \vec{E} якимось чином упорядковані.

Розглянемо дві монохроматичні взаємно перпендикулярні хвилі, що поширюються вздовж додатного напрямку осі Ox ,

$$E_y = E_{01} \cos(\omega t - kx),$$

$$E_z = E_{02} \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота, $k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число, E_{01} , E_{02} – амплітуди E_y і E_z , φ – різниця фаз коливань E_y і E_z .

Щоб знайти траєкторію результуючого коливання світлового вектора при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, визначимо $\cos(\omega t - kx)$ з рівняння для E_y :

$$\cos(\omega t - kx) = \frac{E_y}{E_{01}},$$

тоді

$$\sin(\omega t - kx) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2}.$$

Оскільки

$$\cos(\omega t - kx + \varphi) = \cos(\omega t - kx)\cos\varphi - \sin(\omega t - kx)\sin\varphi, \text{ то}$$

$$\frac{E_z}{E_{02}} - \frac{E_y}{E_{01}} \cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2} \sin\varphi.$$

Піднесемо до квадрата це рівняння, в результаті:

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Отримане співвідношення є рівнянням еліпса, довільно орієнтованого відносно осей OY і OZ . Отже, кінець вектора \vec{E} в кожній точці поля описує еліпс, який лежить у площині, що перпендикулярна до осі OX . Така хвиля називається *еліптично поляризованою*.

Якщо $\varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$, ($m = 0, 1, 2, \dots$),

то отримуємо рівняння еліпса, орієнтованого відносно осей OX і OY :

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 1.$$

При $E_{01} = E_{02} = E_0$ еліпс перетворюється в коло. Така хвиля називається *циркулярно поляризованою (поляризованою по колу)*.

Схематично на рис. 247 зображено циркулярно поляризовану хвилю.

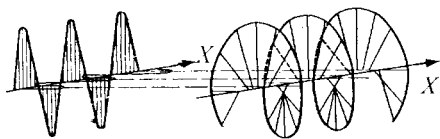


Рис. 247

Якщо відносно напрямку променя вектор \vec{E} обертається проти годинникової стрілки, поляризація називається *правою*, в протилежному випадку – *лівою*.

Якщо $\varphi = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то еліпс вироджується в пряму

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} \pm \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 0.$$

Така хвиля називається *лінійно поляризованою (плоскополяризованою)* (рис. 248).

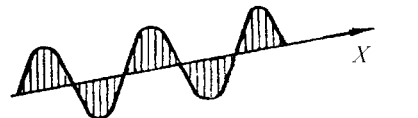


Рис. 248

Якщо внаслідок яких-небудь зовнішніх впливів появляється переважаючий напрямок коливань вектора \vec{E} , то *світло частково поляризоване*.

Площина, в якій відбувається коливання вектора \vec{E} , називається *площиною поляризації*, а перпендикулярна до неї площина – *площиною коливань*.

За міру ступеня поляризації приймають вираз

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

де I_{max} і I_{min} – відповідно, максимальна і мінімальна інтенсивність світла, що відповідають двом перпендикулярним компонентам вектора \vec{E} . Для природного світла $I_{max} = I_{min}$ і $P = 0$. Для плоскополяризованого – $I_{min} = 0$ і $P = 1$. Для еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується (у такого світла коливання повністю впорядковані).

Поляризацією світла називається виділення лінійно поляризованого світла із природного або частково поляризованого.

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою приладів, які називаються *поляризаторами*. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні до площини поляризації, яка називається *головною площиною*, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні цій площині. В ролі поляризаторів можуть бути середовища, які анізотропні відносно коливань вектора \vec{E} , наприклад, кристали. Одним із

природних кристалів, які використовуються як поляризатори, може бути турмалін.

Прилади, за допомогою яких аналізують ступінь поляризації світла, називають *аналізаторами*.

Нехай на поляризатор падає природне світло (рис. 249).

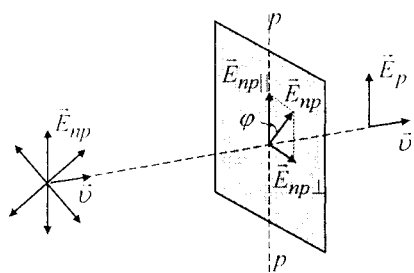


Рис. 249

Виберемо хвилю, вектор напруженості електричного поля якої \vec{E}_{np} , коливається у площині, що утворює з головною площиною поляризатора $p-p$ кут φ . При вході в поляризатор падаючу хвилю можна зобразити у вигляді двох коливань у взаємно перпендикулярних площинах:

$$E_{np\parallel} = E_{np} \cos \varphi, \quad E_{np\perp} = E_{np} \sin \varphi.$$

Перше коливання пройде через поляризатор, друге буде затримане. Інтенсивність хвилі, що пройшла, пропорційна до $E_{np\parallel}^2 = E_{np}^2 \cos^2 \varphi$, тобто дорівнює

$$I_p = I_{np} \cos^2 \varphi,$$

де I_{np} – інтенсивність коливань з амплітудою E_{np} .

В природному світлі всі значення φ рівноймовірні. Тому частка світла, що пройшла через поляризатор, буде дорівнювати середньому значенню $\cos^2 \varphi$, тобто $\frac{1}{2}$ і

$$I_p = \frac{1}{2} I_{np}.$$

Під час обертання поляризатора

навколо напрямку природного світла інтенсивність світла, що пройшло, залишається однією і тією самою, змінюється лише орієнтація площини поляризації світла, що вийшло з поляризатора.

Нехай на аналізатор падає лінійно поляризоване світло, отримане за допомогою поляризатора, головна площина якого $p-p$ утворює кут φ з головною площиною

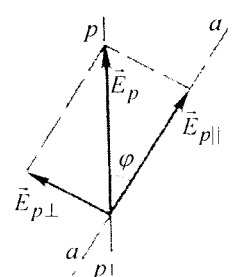


Рис. 250

аналізатора $a-a$ (рис. 250). При вході в аналізатор лінійно поляризований промінь, амплітуда електричного вектора якого E_p , поділиться на два лінійно поляризовані промені, площини поляризації яких взаємно перпендикулярні. Амплітуди вектора напруженості електричного поля цих променів будуть

$$E_{p\perp} = E_p \sin \varphi, \quad E_{p\parallel} = E_p \cos \varphi.$$

Оскільки аналізатор пропускає коливання електричного вектора, що відбуваються в площині $a-a$, а інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди E_p , то

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi.$$

Якщо аналізатор не абсолютно прозорий, то

$$I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi,$$

де k_a – коефіцієнт прозорості аналізатора.

Отримані співвідношення виражають *закон Малюса*.

Отже, інтенсивність світла, що пройшла через аналізатор, змінюється від мінімуму (повне погашення світла) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ до максимуму при $\varphi = 0$.

Якщо пропустити природне світло через поляризатор і аналізатор, площини яких утворюють кут φ , то з першого вийде плоскополяризоване світло, інтенсивність якого $I_p = \frac{1}{2} k_p I_{np}$, а з другого вийде світло інтенсивністю $I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi$. Отже, інтенсивність світла, що пройшла через два поляризатори, $I_a = \frac{1}{2} k_p k_a I_{np} \cos^2 \varphi$. Звідси $I_{max} = \frac{1}{2} I_{np} k_p k_a$ (поляризатори паралельні) і $I_{min} = 0$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ – поляризатори схрещені).

Нехай еліптично поляризоване світло падає на аналізатор, який пропускає складову $\vec{E}_{p\parallel}$ вектора \vec{E}_p за напрямком

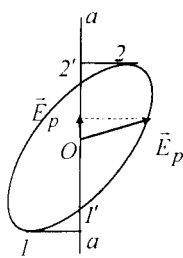


Рис. 251

площини $a-a$ (рис. 251). Максимальне значення цієї складової досягається в точках 1 і 2. Отже, амплітуда E_a плоскополяризованого світла, що вийде з приладу, буде дорівнювати

довжині відрізка OL' . При повертанні аналізатора навколо напрямку променя спостерігається зміна інтенсивності в межах від I_{amax} , яка отримується при збігу осі $a-a$ з великою віссю еліпса, до I_{amin} , яка має місце при збігу осі $a-a$ з малою віссю еліпса.

У випадку світла, поляризованого по колу, обертання аналізатора не супроводжується зміною інтенсивності світла, що пройшло через прилад.

ПІЛЬЧИКОВ МИКОЛА ДМИТРОВИЧ
(1857-1908)

Провів у 1889 р. ретельні дослідження поля-

ризованого світла, відбитого від Місяця і розсіяного атмосферою. Показав, що поляризація світла, яке посилає нічне небо, безперервно зменшується від повного Місяця, коли стає рівною нулеві, а потім знову зростає до повного Місяця.

Експериментально (1892 р.) за допомогою синього та червоного світлофільтрів довів, що в точках найбільшої поляризації ступінь поляризації для синіх променів більший, ніж для червоних.

ТИХОНОВСЬКИЙ І.І.

В 1924 р. на підставі вимірів величини поляризації неба у різних частинах спектру встановив, що максимум поляризації лежить у червоній частині спектру і в міру забруднення атмосфери пересувається в зелену, а потім і в синю частину. Значення величини поляризації чистої атмосфери дало можливість на підставі атмосферних вимірів вивести новим методом число Лошмідта.

ЛИСИЦЯ МИХАЙЛО ПАВЛОВИЧ
(нар. 1921р.)

Створив оригінальну установку, розробив технологію і нову вакуумну апаратуру для виготовлення поляризаторів інфрачервоного діапазону. Сконструював і дослідив германієві поляризатори відбивного типу і значно вдосконалив селенові поляризатори, що працюють на пропускання.

§102. Поляризація світла при відбиванні. Закон Брюстера

Якщо природне світло падає на межі поділу двох діелектриків наприклад, повітря і скла, то частина його відбивається, а частина заломлюється і поширюється у другому середовищі. Якщо встановити на шляху відбитого і заломленого променів аналізатор, то видно, що відбитий і заломлений промені частково поляризовані: при повертанні аналізатора навколо променів інтенсивність світла періодично посилюється і ослаблюється, але повного гасіння не спостерігається.

Подальші дослідження показали, що у відбитому промені переважають коливання, перпендикулярні до площини падіння (\bullet), в заломленому – коливання, паралельні площині падіння (\dagger) (рис. 252).

Ступінь поляризації – ступінь виділення світлових хвиль з певною орієнтаці-

ю електричного вектора – залежить від кута падіння променів і показника заломлення.

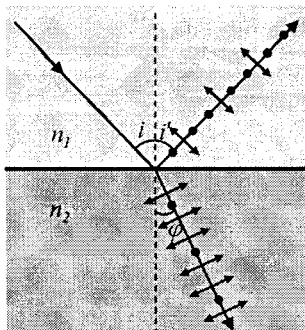


Рис. 252

Відбитий промінь є лінійно поляризованим в площині, яка перпендикулярна площині падіння променя, якщо кут падіння $i_{Бр}$ задовольняє умову

$$\operatorname{tg} i_{Бр} = n_{21},$$

де n_{21} - показник заломлення другого середовища відносно першого.

Цей закон називається **законом Брюстера**, а кут $i_{Бр}$ - кутом Брюстера. Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння $i_{Бр}$ досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково.

Якщо світло падає на границю поділу під кутом Брюстера, то відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\operatorname{tg} i_{Бр} = \frac{\sin i_{Бр}}{\cos i_{Бр}} = n_{21} = \frac{\sin i_{Бр}}{\sin \beta}.$$

Звідси $\cos i_{Бр} = \sin \beta$. Отже, $i_{Бр} + \beta = \frac{\pi}{2}$,

але $i_{Бр} = i$, тому $i' + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Відбивання під кутом Брюстера дає змогу отримати лінійно поляризоване світло, однак його інтенсивність невелика і

для скла ($n \approx 1,5$) дорівнює близько 15%, тобто основна його частина поширюється у напрямку заломленої хвилі, яка поляризована не повністю. Для збільшення ступеня поляризації заломлених хвиль їх треба пропустити крізь стопу скляних пластинок (рис. 253).

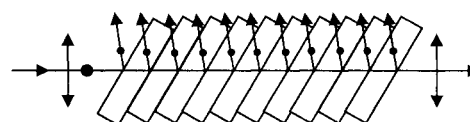


Рис. 253

Так, для $i = i_{Бр}$ стопа з десяти скляних пластинок дає змогу отримати майже стопроцентну поляризацію заломлених хвиль.

§103. Подвійне променезаломлення

Усі прозорі кристали, крім кристалів кубічної системи, які оптично ізотропні, є оптично анізотропні. Їх відносна діелектрична проникність і показник заломлення залежать від напрямку електричного вектора \vec{E} світлової хвилі.

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище **подвійного променезаломлення**, яке полягає в тому, що промінь світла, який падає на поверхню кристала, розділюється в ньому на два заломлені промені, що поширюються з різними швидкостями.

Кристали, що мають подвійне променезаломлення, діляться на **одновісні і двовісні**. В одновісних кристалів для одного із заломлених променів виконується закон заломлення, зокрема заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлючої поверхні. Цей промінь називається **звичайним** (*o*). Для другого променя, який називається **незвичайним** (*e*), відношення синусів кута падіння і кута заломлення не

залишається сталим при зміні кута падіння. Незвичайний промінь не лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до кристала поверхні.

На рис. 254 показано явище подвійного променезаломлення в одновісному кристалі, коли пучок світла падає на кристал нормально. Один з променів (o) є продовженням падаючого, а інший (e) при проникненні в кристал відхиляється на якийсь кут.

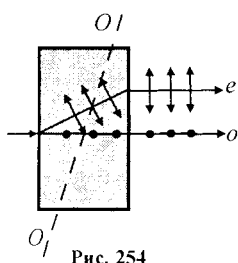


Рис. 254

Одновісними кристалами є ісландський шпат, кварц, турмалін, а двоівісними – слюда, гіпс. У двоівісних кристалах обидва промені незвичайні.

В одновісних кристалах існує один напрямок, вздовж якого подвійне променезаломлення не спостерігається.

Напрямок в кристалі, по якому поширюються звичайні і незвичайні промені не розділяючись і з однаковою швидкістю, називається оптичною віссю кристала.

Оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрямок в кристалі. Довільна пряма, паралельна до цього напрямку, є оптичною віссю кристала.

Площина, яка проходить через промінь і оптичну вісь кристала, що перетинає промінь, називається *головною площиною*, або головним перерізом кристала, що відповідає цьому променю. Через кристал можна провести нескінченну множину паралельних оптичних осей і нескінченну множину паралельних головних перерізів. Лінія перетину двох довільних головних перерізів завжди є оптичною віссю. На

рис. 254 оптична вісь OO' : промінь, що падає на кристал і поширюється в цьому напрямку, не роздвоюється.

Дослідження звичайного і незвичайного променів показує, що обидва промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Електричний вектор у звичайному промені перпендикулярний до площини головного перерізу (\bullet), а в незвичайному промені лежить у площині головного перерізу (\updownarrow) (рис. 254), тобто площина поляризації звичайного променя перпендикулярна до площини головного перерізу, а незвичайного збігається з площиною головного перерізу.

Після виходу з кристала, якщо не брати до уваги поляризацію у двох взаємно перпендикулярних напрямках (площинах), ці два промені нічим один від одного не відрізняються.

Подвійне променезаломлення пояснюється анізотропією кристалів. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність ϵ виявляється залежною від напрямку дії електричного поля \vec{E} . В одновісних кристалах ϵ в напрямку оптичної осі і в напрямку, який перпендикулярний до неї, має різні значення ϵ і ϵ_{\perp} , які називаються повздовжньою і поперечною діелектричними проникностями кристала. В інших напрямках ϵ має проміжне значення. А оскільки $n = \sqrt{\epsilon}$ і $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, то з анізотропії ϵ випливає, що світловим хвилям з різними напрямками коливання вектора \vec{E} відповідають різні значення показника заломлення і швидкості світлових хвиль.

Виділимо в кристалі площину головного перерізу і розглянемо промені, що

виходять з деякої точки C в різних напрямках в цій площині. На рис. 255 напрямки, які паралельні до оптичної осі, зображені пунктирними лініями, а напрямки коливань електричного вектора показані точками. При довільному напрямку звичайного променя, наприклад, Ca_1 , Ca_2 , Ca_3 , вектор \vec{E} утворює з оптичною віссю кристала прямиий кут і швидкість буде одна і та сама в усіх напрямках і дорівнюватиме $v_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$. Геометричне місце точок, до яких промені, що виходять з центра C , будуть доходити за однаковий проміжок часу, є колом (рис. 255). Якщо розглянути сукупність всіх можливих головних перерізів, що проходять через точку C , то геометричним місцем кінців всіх променів буде сфера.

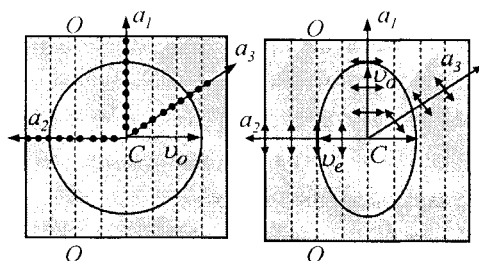


Рис. 255

Рис. 256

Коливання вектора \vec{E} в незвичайному промені здійснюється в площині головного перерізу (рис. 256). Тому для різних напрямків коливання вектора \vec{E} утворюють з оптичною віссю OO різні кути α . Для променя Ca_1 кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і швидкість поширення коливань дорівнює $v_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$, для променя Ca_2 кут $\alpha = 0$ і швидкість дорівнює $v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}$. Для променя Ca_3

швидкість має проміжне значення між v_o і v_e . У такому разі хвильова поверхня має вигляд еліпсоїда обертання навколо оптичної осі, переріз якого однією з головних площин зображено на рис. 256.

Одновісні кристали характеризуються показником заломлення звичайного променя, який дорівнює $n_o = \frac{c}{v_o}$, і показником заломлення незвичайного променя $n_e = \frac{c}{v_e}$. Значення n_e найбільше відрізняється від n_o для напрямку, який перпендикулярний до оптичної осі.

Залежно від того, яка із швидкостей v_o чи v_e більша, розрізняють додатні і від'ємні одновісні кристали.

Якщо $v_o > v_e$ і, відповідно, $n_o < n_e$, то кристал називається оптично додатним і еліпсоїд вписаний у сферу (рис. 257). Для від'ємного кристала $v_o < v_e$ і $n_o > n_e$. У такому разі еліпсоїд описаний навколо сфери (рис. 258).

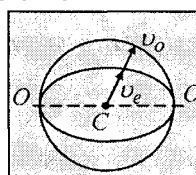


Рис. 257

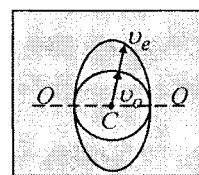


Рис. 258

Хід звичайних і незвичайних променів в кристалі можна визначити за допомогою принципу Гюйгенса (рис. 259).

Нехай на плоску поверхню ab одновісного оптично від'ємного кристала падає під кутом i плоска неполяризована світлова хвиля. Оптична вісь OO з поверхнею кристала утворює гострий кут і лежить в площині рисунка. В момент часу t фронт AB падаючої хвилі досяг точки A поверхні

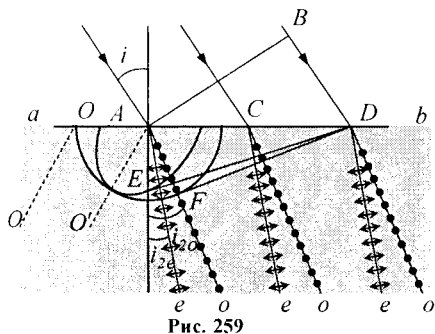


Рис. 259

кристала. За час, поки промінь з точки B досягне точки D , в кристалі з точки A виникнуть сферична та еліпсоїдальна хвильові поверхні. З проміжних точок, які лежать на поверхні кристала між A і C , також утворяться подібні поверхні, але менших розмірів. Згідно з принципом Гюйгенса прямі DE і DF , які дотикаються відповідно до еліпсоїдальної та сферичної поверхонь, будуть фронтом незвичайної і звичайної хвиль. Промені AO і DO – звичайні. Вони нормальні до хвильового фронту; промені Ae і De – незвичайні, вони не перпендикулярні до хвильового фронту.

Явище подвійного променезаломлення лежить в основі роботи поляризаційних пристроїв, які служать для отримання поляризованого світла. Найчастіше для цього застосовуються **призми** і **поляроїди**. Призми ділять на два класи:

- 1). призми, що дають лише плоскополяризований промінь (поляризаційні призми);
- 2). призми, що дають два поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах промені (двозаломні призми).

Типовий представник поляризаційних призм – **призма Ніколя** (ніколь) – подвійна призма з ісландського шпату, які склеєні вздовж лінії AB канадським бальзамом з $n=1.55$ (рис. 260).

Оптична вісь OO спрямована під

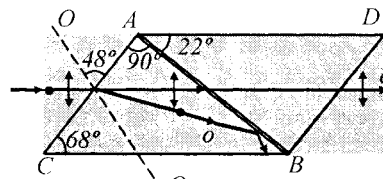


Рис. 260

кутом 48° до входної грані AC . Промінь при падінні на грань AC внаслідок подвійного заломлення поділяється на звичайний o і незвичайний промінь e . При певному виборі кутів призми звичайний промінь падає на шар бальзаму під кутом 76° , який більший за граничний, зазнає повного внутрішнього відбивання, падає на зачорнену грань CB і нею поглинається. Незвичайний промінь виходить з призми паралельно до грані CB . Площина його поляризації збігається з площиною головного перерізу.

Прикладом двозаломної призми є **призма Волластона**, яка складається з двох прямокутних призм із ісландського шпату (рис. 261). У призмі ABC оптична вісь паралельна до катета AB , а в призмі ACD до ребра C , яке перпендикулярне до площини рисунка. Природне світло падає нормально на грань AB ; обидва промені, звичайний і незвичайний, що виникають в призмі ABC , ідуть по одному напрямку, відповідно з швидкостями v_o і v_e . У іншій призмі вони також поширюються в напрямку, який перпендикулярний до оптичної осі, але оскільки оптичні осі в обох призмах взаємно перпендикулярні, то звичайний промінь в першій призмі перетворюється у незвичайний в іншій і навпаки. Тому звичайний промінь в першій призмі заломить-

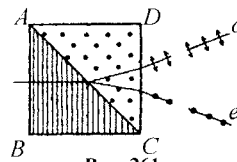


Рис. 261

ся на межі обох призм з відносним показником заломлення n_e/n_o , а промінь незвичайний – з n_o/n_e . Для ісландського шпату $n_o > n_e$ і тому $n_e/n_o < 1$, а $n_o/n_e > 1$. Перший промінь заломиться в бік ребра C призми ACD , а другий – в бік її основи AD . Цим досягається значне розходження променів. Обидва промені плоско поляризовані.

Всі двозаломлені кристали тією чи іншою мірою поглинають світло. Коефіцієнт поглинання неоднаковий для звичайного і незвичайного променів і залежить від напрямку поширення світла в кристалі. Ця явище називається дихроїзмом. Значний дихроїзм у видимій області спектра мають кристали турмаліну, в якому коефіцієнт поглинання для звичайних променів в багато разів більший, ніж для незвичайних. Пластина турмаліну завтовшки 1 мм практично повністю поглинає звичайні промені, і світло, що проходить крізь неї, буде лінійно поляризованим.

Плівка завтовшки $0,1\text{ мм}$, на яку нанесено кристалики гепатиту, повністю поглинає звичайний промінь видимої області спектра.

Поляризатори, для створення яких використане явище дихроїзму, називаються *поляроїдами*.

ДЕМЕТЦ ГЕОРГІЙ ГЕОРГІЙОВИЧ
(1861-1947)

Протягом 1888-1902 рр., вдосконаливши методи Максвелла по спостереженню подвійного променезаломлення в рідинах при деформаціях, визначив подвійне заломлення в 16 рідинах.

ШІЛЛЕР МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ
(1848-1910)

Вперше експериментально встановив зв'язок між електричними та оптичними характеристиками речовини – так зване співвідношення Максвелла $\varepsilon = n^2$, де ε – діелектрична проникність, n – показник заломлення діелектрика.

ВЛОХ ОРЕСТ ГРИГОРОВИЧ
(нар. 1934р.)

Провів вимірювання залежності подвійного променезаломлення Δn від температури і довжини світлової хвилі для діелектричних, сегнетоелектричних, напівпровідникових кристалів.

§104. Штучна оптична анізотропія

Подвійне променезаломлення спостерігається в природних анізотропних середовищах. Існують різні способи отримання *штучної оптичної анізотропії*, тобто надання оптичної анізотропії природно ізотропним речовинам.

Оптично ізотропні речовини стають оптично анізотропними під дією :

- 1). *одностороннього стиску або розтягу* (кристали кубічної системи, скла та ін.) (Т. Зеєбек, Д. Брюстер);
- 2). *електричного поля* (рідини, аморфні тіла, гази) (Керр);
- 3). *магнітного поля* (рідини, скло, колоїди) (Коттон, Мутон);

I. Оптичну анізотропію, яка виникає під впливом деформації, можна виявити, якщо помістити досліджуване тіло A між поляризатором p і аналізатором a , які схрещені (рис. 262). Доки тіло не деформоване, така система світла не пропускає.

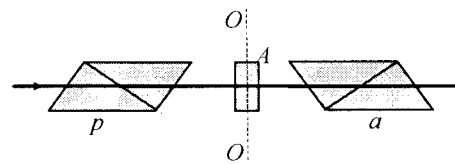


Рис. 262

При односторонньому стиску або розтягу тіла вздовж напрямку OO в ньому виникає оптична анізотропія, яка еквівалентна анізотропії одноосного кристала з оптичною віссю OO . Звичайний і незвичайний промені будуть поширюватися в напрямку, який перпендикулярний до OO , із різними швидкостями v_o і v_e . Якщо головний переріз поляризатора не паралельний і не

перпендикулярний до OO , то світло, яке пройшло через деформоване тіло, стане еліптично поляризованим і його не можна погасити аналізатором.

Різниця коефіцієнтів заломлення $n_o - n_e = \frac{v_o}{c} - \frac{v_e}{c}$ може служити мірою анізотропії, що виникла. Досвід показує, що різниця $n_o - n_e$ пропорційна до напруги σ в даній точці тіла:

$$n_o - n_e = k_l \sigma .$$

де k_l – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей речовини. Різниця фаз, яку матимуть звичайний і незвичайний промені, пройшовши тіло завтовшки l , дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_o} (n_o - n_e) = 2\pi C \sigma l ,$$

де λ_o – довжина світлової хвилі у вакуумі,

а $C = \frac{k_l}{\lambda_o}$ – новий коефіцієнт. Залежно від

роду речовини коефіцієнт C може бути позитивним або негативним.

Явище штучної оптичної анізотропії при деформаціях використовують для виявлення внутрішніх залишкових напруг, які можуть виникати у виробках зі скла та інших прозорих ізотропних матеріалів внаслідок порушення технології їх виготовлення. Оптичний метод вивчення на прозорих моделях розподілу внутрішніх напруг у різних напружених частинах машин і споруд широко застосовують у сучасній техніці. Для цього використовують моделі, виготовлені з целулоїду або іншої ізотропної речовини.

Оскільки величина оптичної анізотропії пропорційна до напруги σ , то за виглядом смуг однакового кольору (ізохром), що виникають при спостереженні моделі

між схрещеними ніколями, можна зробити висновок про величину напруг.

Оптична анізотропія може виникнути теж і в рідині під впливом зовнішніх динамічних впливів. Виникнення оптичної анізотропії в потоці може бути використана для вивчення властивостей полімерів, що йдуть на виготовлення штучних каучуків і пластмас.

II. У 1875 р. Д. Керр виявив, що рідкий або твердий ізотропний діелектрик, вміщений у дуже сильне однорідне електричне поле, стає оптично анізотропним. Це явище називають *ефектом Керра*. Принципову схему спостереження цього явища в рідинах зображено на рис. 263, де p і a – поляризатор і схрещений з ним аналізатор. Між ними розміщена кювета з конденсатором („комірка Керра”), між пластинами якого знаходиться досліджувана рідина. За відсутності електричного поля світло через систему не проходить.

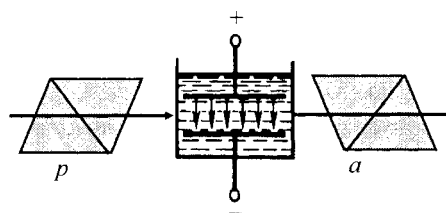


Рис. 263

Досліди показали, що під дією однорідного електричного поля в плоскому конденсаторі рідина набуває властивостей одновісного двозаломлюючого кристала, оптична вісь якого збігається з напрямком вектора \vec{E} напруженості поля конденсатора. Різниця показників заломлення рідини для звичайного і незвичайного променів монохроматичного світла в напрямку, який перпендикулярний до вектора \vec{E} , пропорційна E^2 :

$$n_o - n_e = k_2 E^2,$$

де k_2 – коефіцієнт пропорційності.

Якщо довжина шляху променів між обкладками конденсатора l , то різниця фаз між звичайним і незвичайним променями дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_e - n_o) l = \frac{2\pi}{\lambda_o} l k_2 E^2 = 2\pi B E^2,$$

де $B = \frac{k_2}{\lambda_o}$ – стала Керра, яка залежить від

природи речовини, довжини хвилі λ_o , температури і швидко зменшується з її збільшенням. Часто користуються іншою константою Керра K , яка пов'язана з B співвідношенням: $K = \frac{B\lambda_o}{n}$, n – абсолютний показник заломлення речовини за відсутності електричного поля.

У 1930 р. було виявлено існування ефекту Керра і в газах. Трудність спостереження цього явища пов'язана з тим, що значення B для газів на кілька порядків менше ніж для рідин.

Для більшості речовин $B > 0$, тобто ці речовини за своїми оптичними властивостями в однорідному електричному полі подібні до оптично позитивних одновісних кристалів. Є речовини, для яких $B < 0$.

Ефект Керра пояснюється різною поляризацією молекул за різними напрямками. За відсутності поля молекули орієнтовані довільно, тому рідина загалом не виявляє анізотропії. Під дією поля молекули повертаються так, щоб в напрямі поля були орієнтовані або їх дипольні електричні моменти (у полярних молекул), або напрям найбільшої поляризації (у неполярних молекул). В результаті речовина стає оптично анізотропною.

Ефект Керра практично безінерцій-

ний, тобто перехід речовини з ізотропного стану в анізотропний (і назад) при вмиканні поля становить $\sim 10^{-10}$ с. Тому цей ефект може бути ідеальним світловим затвором і застосовується в швидкоплинних процесах (звукозапис, відтворення звуку, швидкісне фото – і кінознімання), в оптичній локації.

III. Штучну анізотропію можна створити теж дією магнітного поля, яка спостерігається в речовинах, молекули яких анізотропні, тобто в парамагнетиках. За відсутності зовнішнього магнітного поля молекули розміщуються хаотично, результатом чого є статистична ізотропія. Якщо таку речовину помістити в досить сильне магнітне поле, то відбудеться напрямлена орієнтація власних магнітних моментів молекул. Це зумовлює анізотропію речовини, що приводить до подвійного заломлення променів. Таке середовище поводить себе як одновісний кристал, оптична вісь якого паралельна до вектора індукції поля \vec{B} . Це явище називається ефектом Коттона-Мутона. Різниця показників заломлення середовища при цьому

$$n_o - n_e = k_3 B^2,$$

де k_3 – коефіцієнт пропорційності, а різниця фаз між звичайним і незвичайним променями становитиме

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_o - n_e) l = \frac{2\pi}{\lambda_o} k_3 l B^2 = 2\pi D B^2 l,$$

де $D = \frac{k_3}{\lambda_o}$ – стала, яка залежить від природи речовини, довжини хвилі світла λ_o і температури.

ДЕМЕТЦ ГЕОРГІЙ ГЕОРГІЙОВИЧ
(1861-1947)

Експериментально дослідив (1888-1902) ефект Керра в чистій воді і водяних розчинах желатину і колодію.

ЛУБЧЕНКО АНДРІЙ ФЕДОРОВИЧ
(1921-1977)

Розвинув теорію лінійного явища Керра в області екситонного поглинання світла молекулярними кристалами і явища Коттона-Мутона в області домішкового поглинання світла.

§105. Обертання площини поляризації

*Явище повертання площини поляризації світлової хвилі на деякий кут при проходженні світла крізь кристалічні тіла і деякі ізотропні рідини, називається **обертанням площини поляризації** або **оптичною активністю**.*

Якщо речовина не знаходиться у зовнішньому магнітному полі, то оптична активність буде природною.

Природна оптична активність була відкрита в 1811 р. Д. Араго на пластинках кварцу, які вирізані перпендикулярно до оптичної осі.

Нехай погляд спостерігача спрямований назустріч падаючому променю. Обертання називають правим (додатним), якщо площина поляризації повертається вправо (за годинникову стрілкою) для спостерігача, і лівим (від'ємним), якщо вона повертається вліво.

В природі існує два типи кристалів кварцу, які є дзеркальним відображенням один одного. Перші обертають площину поляризації вправо, другі – вліво і відповідно називаються право- і лівообертаючим кварцем. Кут обертання площини поляризації пропорційний до товщини шару оптично активної речовини:

$$\varphi = \alpha l,$$

де l – довжина шляху променя в оптично активному середовищі; α – коефіцієнт пропорційності, який називають обертальною здатністю, або питомим обертанням. Він залежить від природи речовини, від температури та довжини хвилі.

Питоме обертання α дорівнює величині кута, на який повертається площина поляризації монохроматичного світла при проходженні шару завтовшки 1 м .

Далеко від смуг поглинання світло речовини залежність α від λ задовольняє закон Біо:

$$\alpha \sim \frac{1}{\lambda^2}.$$

Для оптично активних рідин та розчинів Ж.Біо встановив, що кут повороту площини поляризації прямо пропорційний товщині шару l і концентрації C оптично активної речовини, тобто

$$\varphi = [\alpha]Cl,$$

де $[\alpha]$ – коефіцієнт пропорційності, який називається **питомим обертанням розчину**. Коефіцієнт $[\alpha]$ залежить від природи оптично активної речовини і розчинника, температури та довжини хвилі світла.

Властивості оптичної активності розчинів дають змогу визначити їх концентрації. **Прилади, за допомогою яких проводять такі вимірювання, називаються поляриметрами**. Оскільки для розчину цукру питоме обертання $[\alpha]$ значне, то поляриметри набули широкого застосування в цукрометрії.

Теорію обертання площини поляризації оптично активними речовинами розробив О. Френель. Він вважав, що це явище зумовлене особливим видом подвійного заломлення променів, при якому швидкість поширення світла в активному середовищі різна для променів, що мають праву і ліву колові поляризації. Знак кута повертання площини поляризації визначається співвідношенням між швидкостями поширення променів правої циркуляційної поляризації v_n і лівої циркуляційної поля-

ризації ν_l . Для $\nu_n > \nu_l$ оптично активне середовище буде додатним, а для $\nu_n < \nu_l$ буде від'ємним.

На вході в оптично активну речовину лінійно поляризоване монохроматичне світло розкладається на дві хвилі тої самої частоти, але поляризовані по колу у взаємно протилежних напрямках (рис. 264).

Вектори \vec{E}_n і \vec{E}_l цих хвиль симетричні відносно площини $p - p$ коливань падаючого світла.

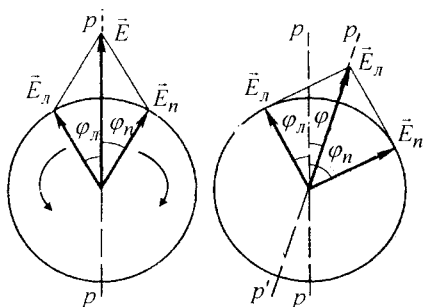


Рис. 264

Рис. 265

Якщо $\nu_n > \nu_l$, то при виході з оптично активного середовища з товщиною шару l електричний вектор правоциркуляційної хвилі буде повернутий на більший кут φ_n , ніж для лівоциркуляційної хвилі φ_l . Внаслідок цього площина $p' - p'$, відносно якої електричні вектори цих хвиль розміщені симетрично, буде повернута вправо на кут φ відносно площини поляризації падаючої хвилі (рис. 265). Кут визначається з умови $\varphi_n - \varphi = \varphi_l + \varphi$, звідки маємо

$$\varphi = \frac{\varphi_n - \varphi_l}{2}.$$

Кути повороту електричного вектора правої і лівої хвиль залежать від часу поширення хвилі t і довжини їх шляху в оптично активному середовищі, тобто

$$\varphi_n = \omega \left(t - \frac{l}{\nu_n} \right) \quad \text{і} \quad \varphi_l = \omega \left(t - \frac{l}{\nu_l} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{l}{2} \left[\omega \left(t - \frac{l}{\nu_n} \right) - \omega \left(t - \frac{l}{\nu_l} \right) \right] = \\ &= \frac{\omega l}{2} \left(\frac{l}{\nu_l} - \frac{l}{\nu_n} \right). \end{aligned}$$

Фазові швидкості поширення лівої і правої хвиль виразимо відповідно через коефіцієнти заломлення n_l і n_n , $\nu_n = c/n_n$ і $\nu_l = c/n_l$. Враховуючи, що $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ з попередньої формули, отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi l}{T} \frac{l}{2} \left(\frac{n_l}{c} - \frac{n_n}{c} \right) = \\ &= \frac{\pi l}{cT} (n_l - n_n) = \frac{\pi l}{\lambda_0} (n_l - n_n), \end{aligned}$$

де $\lambda_0 = cT$ – довжина світлової хвилі у вакуумі. Отже, при $n_l > n_n$ ($\nu_l < \nu_n$) площина поляризації повертається вправо, а при $n_l < n_n$ ($\nu_l > \nu_n$) – вліво.

У 1845 р. М. Фарадей виявив, що при поширенні лінійно поляризованого світла в оптично неактивних речовинах в напрямку магнітного поля, то відбувається поворот площини поляризації на деякий кут. Якщо спостерігач дивиться у напрямку магнітного поля, то повертання праворуч вважається додатним, ліворуч – від'ємним. Досліди М. Фарадея та М. Верде показали, що кут повертання площини поляризації пропорційний довжині шляху l променя у речовині і магнітній індукції B , тобто

$$\varphi = V l B,$$

де V – стала Верде, яка залежить від природи речовини і довжини хвилі світла.

ЛУБЧЕНКО АНДРІЙ ФЕДОРОВИЧ
(1921-1977)

Вперше розвинув теорію природного і магнітного обертання площини поляризації світла молекулярними кристалами в області екситонних збуджень при слабкій екситон-фононній взаємодії.

ВЛОХ ОРЕСТ ГРИГОРОВИЧ
(нар. 1934 р.)

Відкрив (1964-69рр.) із І.С.Жолудєвим теоретично і підтвердив експериментально нове явище – електрогірацію. Воно полягає в тому, що при проходженні світла перпендикулярно до оптичної осі кристала під дією електричного поля відбувається повертання еліпса поляризації світла.

СТАСЮК ІГОР ВАСИЛЬОВИЧ
(нар. 1938 р.)

Розробив на мікроскопічному рівні теорію природної та індукованої електричним полем оптичної активності діелектричних кристалів та явища п'єзогірації, при якому причиною ефекту є постійне механічне напруження, прикладене до кристалу.

§106. Ефект Доплера

Якщо джерело світла і приймач світлових хвиль нерухомі один відносно одного, то частота коливань, що сприймається приймачем, дорівнюватиме частоті ν_0 коливань джерела. Якщо ж джерело або приймач рухаються один відносно одного, то частота ν , що сприймається приймачем, може виявитись відмінною від ν_0 .

Це явище називається *ефектом Доплера*.

Зв'яжемо з джерелом світла початок координат системи K , а з приймачем – початок координат системи K' . Осі X і X' спрямуємо вздовж вектора швидкості \vec{v} , з якою система K' рухається відносно системи K (рис. 266).

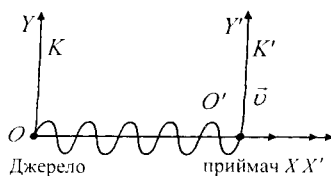


Рис. 266

Рівняння плоскої світлової хвилі, що випромінюється джерелом у напрямку

до приймача, буде в системі K мати вигляд

$$E(x, t) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi \right].$$

Тут ω – частота хвилі, що фіксована в системі K , тобто частота з якою коливається джерело.

Згідно з принципом відносності закони природи мають однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку. Тому в системі K' хвиля описується рівнянням:

$$E'(x', t') = E'_0 \cos \left[\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi' \right],$$

де ω' – частота, що фіксована в системі відліку K' , тобто частота, що сприймається приймачем.

Рівняння хвилі в системі K' можна отримати з рівняння в системі K , перейшовши від x і t до x' і t' за допомогою перетворень Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} E(x', t') &= E_0 \cos \left\{ \omega \left[\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] + \varphi \right\} = \\ &= E_0 \cos \left\{ \omega \left[\frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c} \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x'}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c} \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] + \varphi \right\} = \\ &= E_0 \cos \left\{ \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Це рівняння описує в системі K' ту саму хвилю, що і рівняння $E'(x',t')$. Тому повинно виконуватися такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}} = \omega \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} \end{aligned}$$

Змінимо позначення: циклічну частоту джерела ω позначимо ω_0 , а частоту приймача $\omega' - \omega$. В результаті

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

При віддаленні приймача $v > 0$ і $\omega < \omega_0$; при наближенні приймача до джерела $v < 0$ і $\omega > \omega_0$.

Перейшовши від циклічної частоти до лінійної, отримаємо

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Якщо кут між напрямом спостереження і напрямом швидкості, що вимірюються в системі відліку, зв'язаній з спостерігачем, дорівнює θ , то

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}$$

Формула $v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$

описує *поздовжній ефект Доплера*, який спостерігається під час руху приймача вздовж лінії, що з'єднує його з приймачем. Якщо $v \ll c$, то

$$v \approx v_0 \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}}{1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right)$$

Обмежившись членами порядку v/c , отримаємо $v = v_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$, звідси відносна зміна

$$\text{частоти } \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\Delta v}{v_0} = -\frac{v}{c}$$

Зазначимо, що при віддаленні джерела і приймача один від одного спостерігається зсув в область довших хвиль ($v < v_0, \lambda > \lambda_0$), так зване червоне зміщення. При наближенні – зсув в область коротших хвиль ($v > v_0, \lambda < \lambda_0$), так зване фіолетове зміщення.

Крім поздовжнього ефекту, для світлових хвиль також існує *поперечний ефект Доплера*. Він полягає в зменшенні частоти, яка сприймається приймачем, і спостерігається в тому випадку, коли вектор відносної швидкості напрямлений перпендикулярно вздовж прямої, що проходить через приймач і джерело (наприклад, джерело рухається по колу, в центрі якого поміщено приймач).

У такому разі

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) < v_0$$

Відносна зміна частоти при поперечному ефекті Доплера

$$\frac{\Delta v}{v_0} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Вона значно менша, ніж при поздовжньому ефекті.

VII. КВАНТОВА ПРИРОДА ВИПРОМІНЮВАННЯ

§107. Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа

Тіла, нагріті до досить високої температури, набувають здатності світитися. Наприклад, розпечені тверді тіла випромінюють біле світло, яке має суцільний спектр частот. Із зниженням температури тіла зменшується інтенсивність його випромінювання, а у спектрі переважають довгі хвилі (червоні та інфрачервоні). При подальшому охолодженні тіло випромінює невидимі оком інфрачервоні промені.

Свічення тіл, зумовлене нагріванням, називається тепловим (температурним) випромінюванням.

Теплове випромінювання є найпоширенішим у природі. Воно здійснюється за рахунок енергії теплового руху атомів і молекул речовини, тобто за рахунок внутрішньої енергії і тому залежить від температури речовини.

Оточимо випромінююче тіло оболонкою з ідеально відбивальною поверхнею (рис. 267). Повітря з оболонки відкачаємо. Відбите оболонкою випромінювання, потрапляючи на тіло, поглинається ним (частково або повністю).

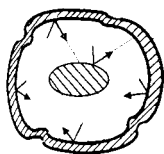


Рис. 267

Буде відбуватися неперервний обмін енергією між тілом і випромінюванням, яке заповнює оболонку.

Якщо обмін енергії між тілом і випромінюванням залишається незмінним при кожній довжині хвилі, стан системи тіло – випромінювання буде рівноважним.

Дослід показує, що єдиним видом випромінювання, яке може знаходитися в

рівновазі з випромінюючими тілами, є теплове випромінювання.

Здатність теплового випромінювання знаходитися в рівновазі з випромінюючими тілами зумовлена тим, що його інтенсивність зростає при підвищенні температури. Порушення рівноваги в системі тіло – випромінювання викликає виникнення процесів, що відновлюють рівновагу.

Рівноважне випромінювання однорідне і неполяризоване, напрямки його поширення у порожнині рівноймовірні. Будь-яке випромінювання характеризується об'ємною густиною та спектральною густиною енергії випромінювання.

Об'ємна густина w енергії випромінювання дорівнює сумарній енергії одиниці об'єму електромагнітних хвиль усіх можливих частот ($0 \leq \nu \leq \infty$). А спектральна густина енергії випромінювання дорівнює енергії одиниці об'єму електромагнітних хвиль вузького інтервалу частот $\nu, \nu + d\nu$ або інтервалу довжин хвиль $\lambda, \lambda + d\lambda$.

Для рівноважного випромінювання спектральна густина енергії є функцією частоти і температури - $\rho_{\nu,T}$ або функцією довжини хвилі і температури - $\rho_{\lambda,T}$.

Об'ємна густина енергії рівноважного випромінювання є універсальною функцією тільки температури і визначається інтегруванням функції $\rho_{\nu,T}$ або $\rho_{\lambda,T}$ в усьому інтервалі частот або довжин хвиль:

$$w = \int_0^{\infty} \rho_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} \rho_{\lambda,T} d\lambda.$$

Введемо поняття, які характеризують теплове випромінювання і поглинання тіл.

Кількість R_T енергії, що випромінюється з 1 м^2 поверхні тіла за 1 с на всіх довжинах хвиль, називається **інтегральною випромінювальною здатністю**, або енергетичною світністю тіла.

Дослідження показують, що енергія випромінювання розподіляється між всіма частотами хвиль, які випромінюються нагрітим тілом.

Кількісною характеристикою теплового випромінювання служить **випромінювальна здатність тіла**, яка числово дорівнює потужності випромінювання з одиниці площі поверхні цього тіла в одиничному інтервалі частот:

$$r_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^e}{d\nu},$$

де $dW_{\nu,\nu+d\nu}^e$ - енергія електромагнітного випромінювання, що випромінюється за одиницю часу з одиниці площі поверхні тіла в інтервалі частот від ν до $\nu + d\nu$.

Випромінювальна здатність може бути представлена і як функція довжини хвилі. Ділянці спектра $d\nu$ буде відповідати інтервал довжин хвиль $d\lambda$.

Диференціюючи вираз $\lambda = \frac{c}{\nu}$, отримуюємо

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu.$$

Знак „-“ вказує на те, що зі зростанням однієї з величин, ν або λ , друга величина зменшується. Тому далі знак „-“ опускають.

Якщо інтервали $d\nu$ і $d\lambda$ стосуються однієї і тієї самої ділянки спектра, то

$$r_{\nu,T} d\nu = r_{\lambda,T} d\lambda.$$

Звідси

$$r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}.$$

Інтегральна випромінювальна здатність R_T тіла зв'язана з випромінювальною здатністю $r_{\nu,T}$ співвідношенням:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu.$$

Усі тіла тією чи іншою мірою поглинають енергію електромагнітних хвиль, які падають на них.

Поглинальна здатність тіла A_T дорівнює відношенню енергії, що поглинається тілом за одиницю часу одиницею площі, до енергії, що падає на тіло при даній температурі.

Спектральна поглинальна здатність тіла $a_{\nu,T}$ показує, яка частина енергії $dW_{\nu,\nu+d\nu}^n$, що попадає за одиницю часу на одиницю поверхні тіла електромагнітними хвилями з частотами від ν до $\nu + d\nu$, які падають на неї, поглинається тілом:

$$a_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^n}{dW_{\nu,\nu+d\nu}}.$$

Поглинальна здатність $a_{\nu,T}$ - величина безрозмірна.

Досліди показують, що випромінювальна здатність $r_{\nu,T}$ і поглинальна $a_{\nu,T}$ тіла залежать від частоти ν хвиль, які відповідно випромінюються або поглинаються, температури тіла, його хімічного складу і стану поверхні.

Тіло, яке здатне поглинати повністю при будь-якій температурі всю енергію електромагнітних хвиль, які падають на нього, незалежно від їх частоти, нази-

вається **абсолютно чорним**.

Отже, поглинальна здатність абсолютно чорного тіла дорівнює одиниці: $a_{\nu,T} = 1$ для всіх частот і температур.

Випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла позначимо $r_{\nu,T}^*$. Вона залежить тільки від частоти ν і абсолютної температури тіла T .

Між спектральною густиною енергії рівноважного випромінювання і випромінювальною здатністю абсолютного чорного тіла існує такий зв'язок:

$$\rho_{\nu,T} = \frac{4}{c} r_{\nu,T}^*$$

Найдосконалішою моделлю абсолютно чорного тіла може бути невеликий отвір O в непрозорій стінці замкненої порожнини, внутрішня поверхня якої зачорнена (рис. 268). Світло, яке потрапляє все-

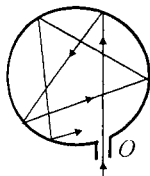


Рис. 268

решину порожнини через отвір O , багаторазово відбивається від стінок порожнини, перш ніж вийти з порожнини назад. При кожному відбиванні енергія світла частково поглинається стінками. Тому незалежно від матеріалу стінок інтенсивність світла, яке виходить з порожнини через отвір O , у багато разів менша за інтенсивність первинного світла, яке падає ззовні.

Поряд з поняттям абсолютно чорного тіла використовують поняття **сірого тіла** - тіла, поглинальна здатність якого менша від одиниці, але однакова для всіх частот і залежить лише від температури, матеріалу і стану поверхні тіла:

$$a_{\nu,T}^c = a_T^c = \text{const} < 1.$$

Кірхгоф, спираючись на закони тер-

модинаміки й аналізуючи умови рівноважного випромінювання в ізольованій системі тіл, встановив кількісний зв'язок між випромінювальною здатністю тіла і його поглинальною здатністю.

Розглянемо теплоізолювану систему, яка складається з двох нескінченно довгих пластин AA_1 і BB_1 , які можуть обмінюватися енергією у формі теплоти лише одна з одною, бо їх зовнішні поверхні покриті ідеальною тепловою ізоляцією (рис. 269). Нехай внутрішня поверхня пла-

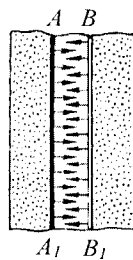


Рис. 269

стини AA_1 абсолютно чорна, а випромінювальна і поглинальна здатності внутрішньої поверхні пластини BB_1 дорівнюють $r_{\nu,T}$ і $a_{\nu,T}$. Якщо в цій системі встановилась термодинамічна рівновага, то температури обох пластин однакові і дорівнюють T , а випромінювання пластин – рівноважне.

Енергії, що випромінюються і поглинаються одиницею площі поверхні пластини BB_1 за одиницю часу в інтервалі частот від ν до $\nu + d\nu$, становлять

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^g = r_{\nu,T} d\nu,$$

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^n = a_{\nu,T} dW_{\nu,\nu+d\nu}^g.$$

Енергія $W_{\nu,\nu+d\nu}$ електромагнітного випромінювання, яке падає за одиницю часу на одиницю площі пластини BB_1 , в інтервалі частот від ν до $\nu + d\nu$, дорівнює енергії $dW_{\nu,\nu+d\nu}^g = r_{\nu,T}^* d\nu$, що випромінюється за той самий час і в тому ж інтервалі частот одиницю площі абсолютно чорної поверхні пластини AA_1 . Отже,

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^n = a_{\nu,T} r_{\nu,T}^* d\nu.$$

Згідно з принципом детальної рів-

новаги будь-який процес в рівноважній системі повинен проходити з такою самою швидкістю, що і зворотний йому, тобто

$$W_{\nu, \nu+d\nu}^e = W_{\nu, \nu+d\nu}^n.$$

Отже,

$$r_{\nu, T} d\nu = a_{\nu, T} r_{\nu, T}^* d\nu, \text{ або } \frac{r_{\nu, T}}{a_{\nu, T}} = r_{\nu, T}^*.$$

Закон Кірхгофа: відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності не залежить від матеріалу тіла; воно є для всіх тіл універсальною функцією частоти ν і температури T .

Для абсолютно чорного тіла $a_{\nu, T}^c = 1$, тому $r_{\nu, T}^c = r_{\nu, T}$, тобто універсальна функція Кірхгофа $r_{\nu, T}^*$, є не що інше, як випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Для довільного тіла $a_{\nu, T} < 1$ і тому в довільній області спектра $r_{\nu, T}^* < r_{\nu, T}$.

Якщо тіло не поглинає електромагнітні хвилі якоїсь частоти, то воно їх і не випромінює, оскільки при $a_{\nu, T} = 0$, $r_{\nu, T} = 0$.

Використовуючи закон Кірхгофа, виразу для інтегральної випромінювальної здатності можна надати вигляду:

$$R_T = \int_0^{\infty} a_{\nu, T} r_{\nu, T}^* d\nu.$$

Для сірого тіла

$$R_T^c = a_T^c \int_0^{\infty} r_{\nu, T}^* d\nu = a_T^c R_T^*,$$

де $R_T^* = \int_0^{\infty} r_{\nu, T}^* d\nu$ - інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла, яке залежить лише від абсолютної темпе-

ратури T .

§108. Закон Стефана Больцмана. Закон Віна. Формула Релея-Джінса

Після встановлення закону Кірхгофа стало очевидним, що першочергове завдання теорії теплового випромінювання полягає у визначенні вигляду функції Кірхгофа $r_{\nu, T}^*$. Однак спочатку було знайдено залежність інтегральної випромінювальної здатності R_T^* абсолютно чорного тіла від його температури.

У 1884 р. Л. Больцман, застосувавши термодинамічний метод для дослідження рівноважного теплового випромінювання всередині замкненої порожнини, теоретично показав, що:

інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла пропорційна до четвертого степеня його абсолютної температури.

$$R_T^* = \sigma T^4.$$

Цей закон називають **законом Стефана-Больцмана**, бо Д. Стефан на основі експериментальних даних дійшов аналогічного висновку. Але Д. Стефан помилково вважав, що інтегральна випромінювальна здатність будь-якого тіла пропорційна до четвертого степеня його абсолютної температури.

Коефіцієнт пропорційності σ називають сталою Стефана-Больцмана. Внаслідок численних експериментів знайдено, що $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$.

Енергія, яка випромінюється за час t абсолютно чорним тілом з поверхні S при температурі T , дорівнює:

$$W = \sigma T^4 S t.$$

Якщо ж температура тіла змінюється

ся з часом, тобто $T = T(t)$, то

$$W = \int_0^t \sigma T^4(t) S dt.$$

Якщо абсолютно чорне тіло оточене середовищем з температурою T_0 , то воно буде поглинати енергію, що випромінюється самим середовищем. В цьому випадку різниця між випускаючим і поглинаючим випромінюванням приблизно виражається формулою:

$$U = \sigma(T^4 - T_0^4).$$

До реальних тіл закон Стефана-Больцмана не застосовний, оскільки спостереження показують більш складну залежність R_T від температури, а також від форми тіла і стану його поверхні.

Розподіл енергії у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла вивчив експериментально В.Ленглей у 1866 р. В ролі абсолютно чорного тіла було використано порожнину з малим отвором, а також чорну сажу.

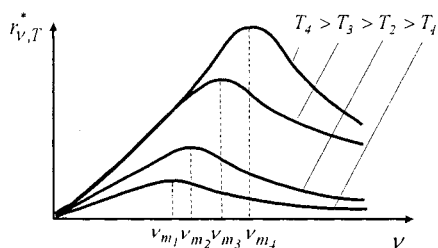


Рис. 270

Експерименти показали, що залежність $I_{\nu, T}^*$ від частоти ν при різних температурах T абсолютно чорного тіла має вигляд, зображений на рис. 270. В.Він встановив, що при малих частотах $I_{\nu, T}^* \sim \nu^2 T$, а в області великих частот залежність $I_{\nu, T}^*$ від частот має вигляд

$$I_{\nu, T}^* \sim \nu^3 e^{-a_\nu \frac{\nu}{T}},$$

де a_ν - сталий коефіцієнт, $[a_\nu] = K \cdot c$.

Енергія випромінювання абсолютно чорного тіла розподілена у його спектрі нерівномірно: абсолютно чорне тіло майже не випромінює енергії в області дуже малих і дуже великих частот. З підвищенням температури тіла максимум $I_{\nu, T}^*$ зміщується в область великих частот.

Площа, яка обмежена кривою залежності $I_{\nu, T}^*$ від ν і віссю абсцис, пропорційна до інтегральної випромінювальної здатності R_T^* абсолютно чорного тіла. Тому за законом Стефана-Больцмана вона зростає пропорційно до T^4 .

Використовуючи закони термодинаміки і електродинаміки, В.Він у 1893 р. встановив характер залежності випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $I_{\nu, T}^*$ від частоти і температури. Було встановлено, що величина $I_{\nu, T}^*$ прямо пропорційна до кубу частоти і є функцією відношення $\frac{\nu}{T}$, тобто

$$I_{\nu, T}^* = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

де $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ - функція відношення частоти випромінювання абсолютно чорного тіла до його температури.

Віну не вдалося теоретично встановити вигляд функції

$$f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Проте закон Віна дав змогу досягнути ряд важливих результатів.

Отримаємо закон Стефана-Больцма-

на:

$$R_T^* = \int_0^\infty r_{\nu,T}^* d\nu = \int_0^\infty \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu =$$

$$= T^4 \int_0^\infty \left(\frac{\nu^3}{T^3}\right) f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\left(\frac{\nu}{T}\right) = \sigma T^4,$$

де $\sigma = \int_0^\infty \left(\frac{\nu}{T}\right)^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\left(\frac{\nu}{T}\right)$ – сталий коефіцієнт.

Із закону Віна можна знайти залежність від температури частоти ν_m , яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності $r_{\nu,T}^*$ абсолютно чорного тіла.

При $\nu = \nu_m$ частинна похідна

$$\frac{\partial r_{\nu,T}^*}{\partial \nu} = 3\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu^3}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

мас дорівнювати нулю:

$$3\nu_m^2 f\left(\frac{\nu_m}{T}\right) + \frac{\nu_m^3}{T} f'\left(\frac{\nu_m}{T}\right) = 0;$$

$$3f\left(\frac{\nu_m}{T}\right) = -\frac{\nu_m}{T} f'\left(\frac{\nu_m}{T}\right).$$

Звіден

$$\frac{\nu_m}{T} = b_1,$$

де b_1 – стала величина, яка є коренем рівняння і залежить від вигляду функції

$f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Рівняння $\nu_m = b_1 T$ виражає **закон**

зміщення Віна:

частота, яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності $r_{\nu,T}^$ абсолютно чорного тіла, прямо пропорційна до його абсолютної температури.*

Закон зміщення Віна можна записати в дещо іншій формі, розглядаючи максимум випромінювальної здатності абсо-

лютно чорного тіла $r_{\nu,T}^*$, віднесеної до інтервалу $d\lambda$ довжин хвиль (у вакуумі).

Оскільки

$$r_{\lambda,T}^* = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}^*, \text{ то}$$

$$r_{\lambda,T}^* = \frac{c}{\lambda^2} \left(\frac{c}{\lambda}\right)^3 f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

Це співвідношення дозволяє встановити залежність між довжиною хвилі λ_m , на яку припадає максимум функції $r_{\lambda,T}^*$, і температурою.

Закон зміщення Віна: довжина хвилі λ_m , яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності $r_{\lambda,T}^*$ абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна до його температури:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де b – стала Віна, $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ К} \cdot \text{м}$.

Із закону Віна видно, що при зниженні температури абсолютно чорного тіла максимум енергії його випромінювання зміщується в область великих довжин хвиль. Отже, стає зрозуміло, чому при зниженні температури світних тіл в їх спектрі все більше переважає довгохвильове випромінювання.

Слід відзначити, що випромінювальні здатності $r_{\nu,T}^*$ і $r_{\lambda,T}^*$ не пропорційні одна до одної. Тому їх максимуми лежать у різних частинах спектра, так що λ_m і ν_m не зв'язані співвідношенням $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

Значення максимуму випромінювальної здатності $r_{\lambda,T}^*$ абсолютно чорного тіла пропорційне до п'ятого степеня його абсолютної температури:

$$(r_{\lambda,T}^*)_{max} = \frac{c^4}{\lambda_m^5} f\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right) = \frac{c^4}{b^5} f\left(\frac{c}{b}\right) T^5 = b_2 T^5,$$

де

$$b_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \frac{Вт}{м^3 К^5}.$$

Наступна спроба теоретичного виведення залежності $r_{\nu,T}^*$ належить англійським вченим Д.Релею і Д.Джінсу, які застосували до теплового випромінювання методи статистичної фізики, використавши класичний закон розподілу енергії за ступенями вільності.

Формула Релея-Джінса для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

де k - стала Больцмана.

Цей вираз узгоджується з експериментальними даними лише в області малих частот і великих температур. Для великих частот формула виявилась явно неправильною. Розбіжність між експериментальною кривою (суцільна лінія) і кривою, одержаною за допомогою формули Релея-Джінса (штрихова лінія), видно з рис. 271. Спроба отримати закон Стефана-Больцмана з формули Релея-Джінса не дає позитивного результату. Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла при будь-якій температурі перетворюється в нескінченність:

$$R_T^* = \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty.$$

Водночас за законом Стефана-Боль-

цмана $R_T^* \sim T^4$. Цей результат отримав назву „ультрафіолетової катастрофи“.

Отже, в рамках класичної фізики не вдалося пояснити закони розподілу енергії в спектрі абсолютно чорного тіла.

§109. Квантова гіпотеза і формула Планка

В 1900 р. М.Планк вперше знайшов правильний вираз для функції Кірхгофа і обґрунтував спектральні закономірності випромінювання абсолютно чорного тіла.

В своїх розрахунках Планк, враховуючи, що об'ємна густина енергії рівноважного випромінювання в замкненій порожнині залежить від температури стінок порожнини, а матеріал стінок значення не має, вибрав найпростішу модель випромінювальної системи у вигляді сукупності лінійних гармонічних осциляторів (електричних диполів) з найрізноманітнішими частотами ν . Кожний з таких осциляторів відповідає монохроматичній компоненті чорного випромінювання.

Нехай $\langle \varepsilon_\nu \rangle$ - середнє значення енергії осцилятора з власною частотою ν . Тоді випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon_\nu \rangle.$$

Правильний вираз для середньої енергії осцилятора $\langle \varepsilon_\nu \rangle$ і функції Кірхгофа вдалось знайти Планку введенням **квантової гіпотези**, яка зовсім не притаманна класичній фізиці. У класичній фізиці припускається, що енергія будь-якої системи може змінюватись неперервно, набираючи будь-яких, як завгодно близьких значень.

За квантовою гіпотезою Планка

енергія ε_ν осцилятора може набувати тільки певних дискретних значень, які дорівнюють цілому числу елементарних порцій - квантів енергії ε_{ν_0} :

$$\varepsilon_\nu = n\varepsilon_{\nu_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Вираз для $\langle \varepsilon_\nu \rangle$ Планк отримав в такому вигляді:

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\varepsilon_{\nu_0}}{e^{\frac{\varepsilon_{\nu_0}}{kT}} - 1}.$$

Величину ε_{ν_0} Планк визначив з вимоги, щоб вираз $r_{\nu,T}^*$ задовольняв загальну термодинамічну формулу Віна

$$r_{\nu,T}^* = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Ця вимога зводиться до виконання співвідношення

$$\frac{2\pi}{c^2} \frac{\varepsilon_{\nu_0}}{\nu} = f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Але ε_{ν_0} є характеристикою лише самого осцилятора, а тому не може залежати від температури T - макроскопічного параметра, що визначає стан речовини і випромінювання. Величина ε_{ν_0} може залежати лише від власної частоти ν осцилятора. В такому випадку, щоб ліва частина даного співвідношення була функцією лише аргументу $\frac{\nu}{T}$, необхідно і достатньо, щоб $\varepsilon_{\nu_0} = h\nu$, де h - стала величина, яку називають сталою Планка.

Тобто, згідно з гіпотезою Планка атоми і молекули випромінюють енергію окремими порціями, або квантами, величина яких $\varepsilon_{\nu_0} = h\nu$.

Отже, формула Планка для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}, \quad r_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

В області малих частот ($h\nu \ll kT$) формула Планка збігається з формулою Релея-Джінса, а у випадку високих частот ($h\nu \gg kT$) - з виразом, який отримав В.Він.

З формули Планка можна отримати закон Стефана-Больцмана і закон зміщення Віна.

Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

$$R_T = \int_0^\infty r_{\nu,T}^* d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} d\nu.$$

Введемо безрозмірну змінну інтегрування

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \quad \text{тоді} \quad dx = \frac{h}{kT} d\nu, \quad d\nu = \frac{kT}{h} dx;$$

Тоді

$$R_T = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4,$$

де

$$\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3},$$

оскільки

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Підставивши значення сталих, отримуємо

$$\sigma = (5,67032 \pm 0,00071) \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}.$$

Отже,

$$h = \pi c^3 \sqrt{\frac{2\pi^2 k}{15\sigma}}.$$

За відомим з досліду значенням сталої Стефана-Больцмана σ Планк вперше визначив величину сталої h :

$$h = (6.626176 \pm 0.000036) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Отже, формула Планка дає змогу не тільки встановити закон Стефана-Больцмана, але й знайти величину сталої σ .

Для отримання виразу закону змі-

шення Віна знайдемо $\frac{\partial r_{\lambda,T}^*}{\partial \lambda}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{\lambda,T}^*}{\partial \lambda} &= -\frac{2\pi c^2 h}{\left(\frac{hc}{e^{kT\lambda}} - 1\right)} \frac{5}{\lambda^6} + \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{hc}{kT}}}{\left(\frac{hc}{e^{kT\lambda}} - 1\right)^2} = \\ &= \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^6 \left(\frac{hc}{e^{kT\lambda}} - 1\right)} \left[\frac{\frac{hc}{kT\lambda} e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{\frac{hc}{e^{kT\lambda}} - 1} - 5 \right]. \end{aligned}$$

Довжину хвилі λ_m , яка відповідає максимальному значенню $r_{\lambda,T}^*$, знайдемо, прирівнявши до нуля $\frac{\partial r_{\lambda,T}^*}{\partial \lambda}$. Введемо

змінну $y = \frac{hc}{kT\lambda_m}$ і отримаємо

$$ye^y - 5e^y + 5 = 0.$$

Розв'язання цього трансцендентного рівняння методом послідовних наближень дає $y = 4.965$.

Отже,

$$\frac{hc}{kT\lambda_m} = 4.965.$$

Звідси

$$\lambda_m = \frac{hc}{4.965kT} = \frac{b}{T}.$$

Таким чином, формула Планка є повним розв'язком основної задачі тепло-

вого випромінювання, сформульованої Кірхгофом.

§110. Зовнішній фотоелектрний ефект і його закони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоелектрний ефекту

Поглинання світлового випромінювання в речовині часто супроводжується електричними явищами, які називають фотоелектричним ефектом.

Фотоелектричним ефектом називаються електричні явища, які супроводжують поглинання світлового випромінювання в речовині.

Розрізняють:

- 1) **зовнішній фотоелектрний ефект** – виривання електронів з речовини під дією світла;
- 2) **внутрішній фотоелектрний ефект**, при якому відбувається лише збільшення кількості вільних електронів всередині речовини, але вони не виходять назовні;
- 3) **фотогальванічний ефект**, при якому на границі поділу напівпровідника і металу або на границі поділу двох напівпровідників під впливом опромінювання виникає електрорушійна сила (за відсутності зовнішнього електричного поля);
- 4) **фотоелектрний ефект в газоподібному середовищі**, який полягає у фотоіонізації окремих молекул або атомів.

Розглянемо закономірності зовнішнього фотоелектрний ефекту. Зовнішній фотоелектрний ефект спостерігається у твердих тілах, а також у газах. Фотоелектрний ефект відкрив у 1887 р. Г.Герц, який виявив, що при освітленні негативного електрода іскрового розрядника ультрафіолетовими променями розряд відбувається при меншій напрузі між електродами, ніж без такого освітлення.

Перші фундаментальні дослідження фотоелектрний ефекту виконані в 1888 – 1889 р.р. О.Г. Столетовим за допомогою установки,

що показана на рис. 272. Конденсатор, утворений дрютяною сіткою з міді C і су-

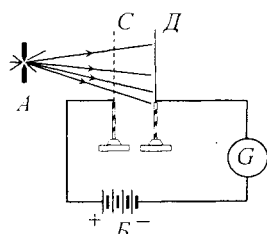


Рис. 272

цільною цинковою пластинкою D , був послідовно ввімкнений з гальванометром G в коло акумуляторної батареї B . При

освітленні негативно зарядженої пластини світлом від джерела у колі виникав електричний струм, який називається фотострумом. На основі своїх дослідів Столетов дійшов таких висновків:

- 1) найбільшу дію чинять ультрафіолетові хвилі;
- 2) сила струму зростає із збільшенням освітленості пластини;
- 3) заряди, які випускаються під дією світла, мають від'ємний знак.

У 1898 р. Леонард і Томсон методом відхилення зарядів у електричному і магнітному полях визначили питомий заряд $\frac{e}{m}$ частинок, що вириваються світлом з катода, довівши, що ці частинки є електронами.

Леонард й інші дослідники удосконалили прилад Столетова, помістивши електроди у вакуумну трубку (рис. 273).

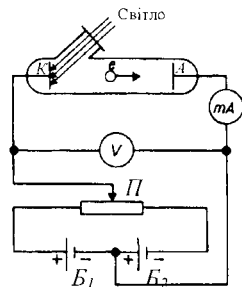


Рис. 273

Катод K , який покритий досліджуваним металом, освітлювався монохроматичним світлом, що проходить у трубку через кварцеве вікно. Напругу між катодом і анодом можна регулювати за допомогою потенціометра $П$ і вимірюють вольтметром V . Дві акумуляторні батареї B_1 і B_2 , увімкнуті „назустріч одна одній”, дають можливість за допомогою потенціометра змінювати не лише абсолютну величину, а й знак напруги U . Цей пристрій дав можливість дослідити вольт-амперну характеристику фотоелектру – залежність фотоструму I від напруги між електродами (рис. 274).

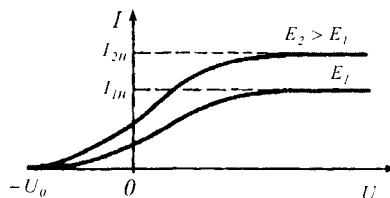


Рис. 274

Така залежність відповідає двом різним освітленостям E катода. У міру збільшення напруги U фотострум I поступово зростає, тобто все більша кількість фотоелектронів досягає анода. Максимальне значення фотоструму I_n , яке називається фотострумом насичення, відповідає таким значенням U , при яких усі електрони, що вибиваються з катода, досягають анода: $I_n = en$, де n – кількість електронів, які вилітають з катода за $1c$.

З вольт-амперної характеристики виходить, що при $U=0$ фотострум не зникає. Електрони, вибиті з катода світлом, мають деяку початкову швидкість v , а отже, і відмінну від нуля кінетичну енергію і можуть досягати анода без зовнішнього поля. Для того, щоб фотострум став нульовим, необхідно прикласти **затримуючу напругу** U_0 . При $U = U_0$ жоден з електро-

нів не може подолати затримуючого поля і досягнути анода. Отже,

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = eU_0,$$

тобто, виміривши U_0 , можна знайти максимальне значення швидкості і кінетичної енергії фотоелектронів.

Дослідами встановлено такі основні закони зовнішнього фотоефекту:

I. Закон Столетова: при фіксованій частоті падаючого світла кількість фотоелектронів, що вириваються з катода за одиницю часу, пропорційне до інтенсивності світла (сила фотоструму насичення пропорційна до енергетичної освітленості E катода – $I_n = \gamma E$, γ – спектральна густина фотокатода).

II. Максимальна початкова швидкість фотоелектронів визначається лише частотою ν світла і не залежить від його інтенсивності. Величина v_{max} зростає із збільшенням частоти ν .

III. Для кожної речовини існує „червона межа” фотоефекту, тобто максимальна довжина хвилі λ_{max} , при якій спостерігається фотоефект. Величина λ_{max} залежить від хімічної природи речовини і стану його поверхні.

Важливе значення має залежність спектральної чутливості від довжини світлової хвилі. З рис. 275 видно, що, починаючи від „червоної межі”, із зменшенням λ відбувається зростання чутливості фотокатода.

Столетовим була встановлена фактична безінерційність зовнішнього фотое-

фекту. Проміжок часу між початком освітлення і початком фотоструму не перевищує 10^{-9} с.

Фотоефект не можна пояснити з погляду хвильової теорії світла.

А. Ейнштейн в 1905 р. показав, що явище фотоефекту і його закономірності можуть бути пояснені на основі запропонованої ним квантової теорії фотоефекту.

Згідно з Ейнштейном світло частотою ν не лише випромінюється, але і поширюється в просторі і поглинається речовиною окремими порціями, енергія яких $\varepsilon = h\nu$. Поширення світла треба розглядати не як неперервний хвильовий процес, а як потік локалізованих у просторі дискретних світлових квантів, що рухаються зі швидкістю поширення світла у вакуумі. Ці кванти електромагнітного випромінювання отримали назву **фотонів**.

За Ейнштейном кожний фотон поглинається лише одним електроном. Тому кількість вирваних фотоелектронів повинна бути пропорційна до кількості поглинутих фотонів, тобто пропорційна до інтенсивності світла (I закон фотоефекту). Безінерційність фотоефекту пояснюється тим, що передача енергії при зіткненні фотона з електроном відбувається майже миттєво.

Енергія падаючого фотона витрачається на виконання електроном роботи виходу A з металу і на надання електроном, який вилетів, кінетичної енергії $\frac{mv_{max}^2}{2}$.

За законом збереження енергії

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Це рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.

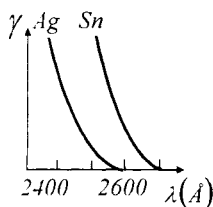


Рис. 275

спектральної чутливості від довжини світлової хвилі. З рис. 275 видно, що, починаючи від „червоної межі”, із зменшенням λ відбувається зростання чутливості фотокатода.

Перевірку формули Ейнштейна з достатньою точністю здійснив в 1916 р. Міллікен, який створив прилад, в якому поверхні, які досліджувались, очищались у вакуумі і після чого вимірювалась робота виходу A і досліджувалась залежність максимальної кінетичної енергії фотоелектронів від частоти ν світла. Результати вимірювань повністю підтвердили справедливість формули Ейнштейна.

Рівняння Ейнштейна дає змогу пояснити II і III закони фотоелектру. Максимальна кінетична енергія фотоелектрона лінійно зростає із збільшенням частоти падаючого випромінювання і не залежить від його інтенсивності, оскільки ні робота виходу A , ні частота ν від інтенсивності світла не залежать (II закон). Оскільки із зменшенням частоти світла кінетична енергія фотоелектронів зменшується, то при деякій досить малій частоті $\nu = \nu_{min}$ кінетична енергія фотоелектронів буде дорівнювати нулю. Енергії кванта вистачає тільки, щоб вирвати електрон з металу. Отже,

$$h\nu_{min} = h\frac{c}{\lambda_{max}} = A.$$

Величина λ_{max} залежить лише від роботи виходу електрона, тобто від хімічної природи речовини і стану її поверхні.

Якщо створити поле, яке затримує рух електронів, тобто на катод подати „+”, а на анод „-”, то фотострум буде зменшуватись і при напрузі U_0 струм дорівнюватиме нулю. Ця напруга називається затримуючим потенціалом. Робота поля

$$eU_0 = \frac{mU_{max}^2}{2}.$$

Тоді формула Ейнштейна матиме вигляд:

$$h\nu = A + eU_0.$$

Якщо замість роботи виходу підставити значення енергії фотона, що відповідає червоній межі фотоелектру, то

$$h\nu = h\nu_{min} + eU_0 \quad \text{і} \quad eU_0 = h(\nu - \nu_{min}).$$

КИРИЛОВ ЕЛПІДІФОР АНЕМПОДИСТОВИЧ
(1883-1964)

Встановив (1930 р.) існування двох максимумів фотоелектру в галогенідах срібла і показав, що їх спектральні положення збігаються з положеннями максимумів при фотохімічній дії. У бромистому сріблі спостерігав так званий „негативний” фотоелектр, при якому електропровідність зменшувалась під дією світла з області видимого спектра.

ТАРТАКОВСЬКИЙ ПЕТРО САВИЧ
(1895-1940)

Виконував експериментальні дослідження фотоелектричного ефекту у діелектриках.

В 1940р. вийшла друком монографія „Внутрішній фотоелектр у діелектриках”, в якій зосереджена увага на експериментальних дослідженнях твердого тіла, насамперед його електронної структури.

§111. Маса та імпульс фотона

Згідно з гіпотезою світлових квантів Ейнштейна світло випромінюється, поглинається і поширюється дискретними порціями, які названі *фотонами*. Енергія фотона $\epsilon_{\phi} = h\nu$.

Формулу для маси фотона можна безпосередньо вивести з формули, яка виражає взаємозв'язок маси і енергії в теорії відносності:

$$m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Маса фотона відрізняється від маси макроскопічних тіл і мас інших „елементарних” частинок. Ця відмінність полягає в тому, що фотон не має маси спокою m_0 .

Якщо вважати, що фотон має відмінну від нуля масу спокою, то застосування формули

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

до фотона, який рухається у вакуумі з швидкістю $v = c$, приводить до абсурду, бо тоді ($m = \infty$). Отже, фотонів, які перебувають у спокої, не існує і для фотона $m_0 = 0$. Фотон завжди рухається зі швидкістю $v = c$, бо при $v \neq c$ маса і енергія фотона дорівнювали б нулю, що суперечить формулі $m = \frac{h\nu}{c^2}$.

Зв'язок імпульсу фотона P_ϕ з його енергією ε_ϕ можна вивести з формули, яка отримана в теорії відносності:

$$\varepsilon_\phi = c\sqrt{P_\phi^2 + m_0^2 c^2}.$$

Для фотона $m_0 = 0$ і

$$P_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{m_\phi c^2}{c} m_\phi c,$$

де m_ϕ – маса фотона. Введемо хвильове

число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, тоді імпульс фотона

$$P_\phi = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k,$$

де

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Імпульс фотона є векторною величиною. Напрямок імпульсу \vec{P}_ϕ збігається з напрямком поширення світла, що характеризується хвильовим вектором \vec{k} , який числово дорівнює хвильовому числу.

Фотон, подібно до будь-якої рухомої частинки або тіла, має енергію, масу та імпульс. Усі ці корпускулярні характеристики пов'язані з хвильовою характеристикою світла – його частотою ν .

Одним з підтверджень наявності у фотонів маси та імпульсу є світловий тиск.

Необхідність існування тиску світла вперше показав Д. Максвелл, виходячи із

розробленої ним електродинамічної теорії.

Якісно механізм тиску світла можна пояснити з хвильових властивостей світла. Нехай на плоску поверхню тіла діє перпендикулярно до неї монохроматична хвиля (рис. 276). Під дією сили \vec{F}_{el} електричного

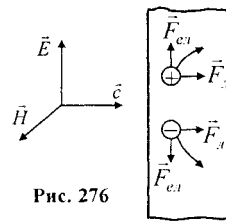


Рис. 276

го поля електромагнітної хвилі позитивні і негативні заряди зміщуються вздовж поверхні тіла у протилежні

сторони. А з боку магнітного поля на ці заряди діє сила Лоренца \vec{F}_L , яка втискає ці заряди в речовину. Сила Лоренца пропорційна до $[\vec{v} \vec{H}]$, зрештою до добутку $[\vec{E} \vec{H}]$, а він у свою чергу пропорційний до густини енергії падаючої хвилі w .

У 1901 р П.М. Лебедев вперше експериментально виявив і виміряв тиск світла на тверді тіла і гази

Прилад Лебедева – це досить чутливі крутильні терези, рухома система яких складалась з легкого каркаса із закріпленими на ньому тонкими кружками, які розміщені симетрично відносно осі підвісу

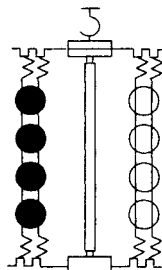


Рис. 277

(рис. 277). Деякі крильця були дзеркальними, а поверхня інших була зачорнена. Усю цю систему підвішували на тонкій пружній нитці всередині закритого скляного балона, в якому був створений високий вакуум. Крильця освітлювали вольтовою дугою, напрямленою на них за допомогою системи лінз і дзеркал. Величину світлового тиску на крильця визначали за кутом закручування нитки підвісу.

Тиск світла настільки малий, що

для його надійного вимірювання треба було усунути вплив на крильця всіх інших факторів. Вплив конвекційних струмин повітря Лебедев усунув, саме створивши в балоні досить високий вакуум. Однак і в такому разі не було усунуто так званий радіометричний ефект. Причина його в тому, що зачорнене крильце нагрівається внаслідок поглинання світла, яке падає на нього, причому температури освітленої і неосвітленої (задньої) поверхонь крильця неоднакові. Молекули розрідженого повітря в балоні відбиваються від нагрітої поверхні крильця з більшою швидкістю, передаючи їм відповідно більший імпульс. Тиск, зумовлений такою дією значно більший за світловий. Радіометричний ефект може призвести до того, що в досліді тиск на зачорнене крильце буде більший за тиск на дзеркальне крильце тих самих розмірів. Лебедев усунув вплив радіометричного ефекту, використавши у своїх дослідях дуже тонкі крильця різної товщини від $0,01$ до $0,1$ мм.

Тиск світла на дзеркальне крильце з коефіцієнтом відбиття $\rho = 1$ виявився у два рази більший, ніж тиск на зачорнене крильце ($\rho = 0$).

З погляду квантової теорії тиск світла на поверхню якого-небудь тіла зумовлений тим, що при ударі з цією поверхнею кожний фотон передає їй свій імпульс. При відбиванні світла від поверхні тіла падаючий фотон поглинається поверхнею, а потім знову випромінюється нею з імпульсом протилежного напрямку.

Знайдемо тиск, який чинить на ідеально відбивні стінки замкненої порожнини *ізотропне монохроматичне випромінювання* в цій порожнині. Для спрощення

припустимо що порожнина має форму куба з ребром, яке дорівнює l . Внаслідок ізо­тропності випромінювання можна вважати, що всі напрями руху фотонів рівноімовірні, тобто фотони рухаються як молекули ідеального одноатомного газу. Тиск ідеального газу на стінки порожнини можна знайти з основного рівняння кінетичної теорії газів:

$$pV = \frac{1}{3} \sum_i m_i v_i^2.$$

Для фотонів

$$m_i = \frac{h\nu_i}{c^2}, \quad \nu_i = c,$$

тому $m_i v_i^2 = h\nu_i$.

Отже,

$$\sum_i m_i v_i^2 = \sum_i h\nu_i = E_{\phi},$$

де E_{ϕ} - повна енергія фотонів у порожнині, а тиск на стінки порожнини

$$p = \frac{E_{\phi}}{3V} = \frac{w}{3},$$

де $w = \frac{E_{\phi}}{V}$ - об'ємна густина енергії випромінювання.

Як другий приклад розглянемо світловий тиск, який чинить на поверхню тіла потік *неізотропного монохроматичного випромінювання*, що падає на поверхню

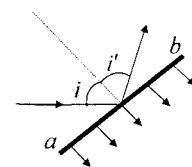


Рис. 278

ab під кутом i (рис. 278). Нехай за одиницю часу на поверхню ab падає N фотонів. Якщо ρ - коефіцієнт відбивання світла від поверхні, то з N фотонів ρN дзеркально відбиваються, а $(1 - \rho)N$ поглинаються.

Фотони, що відбиваються, передають тілу сумарний за одиницю часу ім-

пульс, який напрямлений перпендикулярно до поверхні ab і числово дорівнює

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta t} = \rho N \frac{2h\nu}{c} \cos i.$$

Поглинуті фотони передають тілу сумарний імпульс за одиницю часу, нормальна складова до ab якого числово становить

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta t} = (1 - \rho) N \frac{h\nu}{c} \cos i.$$

Отже, тиск світла на поверхню визначається формулою

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{S} = \frac{\Delta P}{S \Delta t} = \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{S \Delta t} = \\ &= \rho N \frac{2h\nu}{Sc} \cos i + (1 - \rho) N \frac{h\nu}{Sc} \cos i = \\ &= (1 + \rho) \frac{N}{S} \frac{h\nu}{c} \cos i = \frac{I}{c} (1 + \rho) \cos i, \end{aligned}$$

де $I = \frac{N h\nu}{S}$ – енергія всіх фотонів, що падають на одиницю площі поверхні за одиницю часу, тобто інтенсивність світла.

Величина $w = \frac{I}{c}$ – об'ємна густина енергії падаючого випромінювання. Отже,

$$p = w(1 + \rho) \cos i.$$

Для абсолютно відбивної поверхні $\rho = 1$ тиск випромінювання вдвічі більший, ніж для абсолютно поглинаючої поверхні $\rho = 0$.

Тиск сонячного випромінювання (в ясний день) на поглинаючу поверхню, що орієнтована перпендикулярно до променів, приблизно становить $4 \cdot 10^{-6}$ Па.

Отже, світло одночасно має властивості безперервних електромагнітних хвиль і властивості дискретних фотонів. Воно являє собою діалектичну єдність цих протилежних властивостей. Корпускулярні і хвильові властивості світла не ви-

ключають, а навпаки, взаємно доповнюють одне одного.

КУЧЕР ВОЛОДИМИР АНТОНОВИЧ
(1885-1959)

В 1916 р. написав роботу “Електромагнетна теорія лучистого тиснення”, де спочатку виклав теорію Максвелла для тиску світла. В другій частині роботи розвиває загальну теорію тиску світла, враховуючи пондеромоторичні сили, які діють на границі двох середовищ. Отримав нагугнний вираз для тиску світла:

$$p = w \cos \varphi \sqrt{1 + 2\rho \cos^2 \varphi + \rho^2}$$

Розглянув теж тиск порожнього простору і отримав, що тиск в порожньому просторі на зовсім відбиваючу поверхню дорівнює третій частині густини енергії хвилі.

§112. Ефект Комптона і його теорія

Особливо чітко проявляються корпускулярні властивості світла в явищі розсіяння рентгенівських променів. А. Комптон, досліджуючи у 1923 р. розсіяння монохроматичних рентгенівських променів речовинами з легкими атомами (парафін, бор), виявив, що у складі розсіяного випромінювання, поряд з випромінюванням початкової довжини хвилі λ , спостерігається також випромінювання більшої довжини хвилі λ' .

Схема досліду Комптона зображена на рис. 279. Пучок монохроматичних рентгенівських променів, пройшовши систему діафрагм D падає на розсіюючу речовину P і після розсіяння на кут θ попадає в рентгенівський спектрограф C , де вимірюється довжина хвилі розсіяного випромінювання.

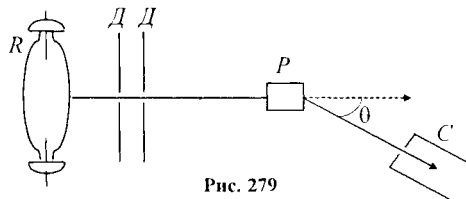


Рис. 279

Досліди Комптона показали, що довжина хвилі λ' розсіяного випроміню-

вання більша за довжину хвилі λ падаючого випромінювання, причому різниця $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не залежить від довжини хвилі λ падаючого випромінювання і природи розсіювальної речовини, а визначається лише величиною кута розсіяння θ :

Пояснити ефект Комптона можна на основі квантових уявлень про природу світла. Якщо вважати, що випромінювання є потоком фотонів, то ефект Комптона є результат пружного зіткнення рентгенівських фотонів з вільними електронами речовини (для легких атомів електрони слабо зв'язані з ядрами атомів, тому їх можна вважати вільними). У процесі цього зіткнення фотон передає електрону частину своїх енергії й імпульсу відповідно до законів їх збереження.

Розглянемо пружне зіткнення двох частинок - налітаючого фотона, що має імпульс $P_\phi = \frac{h\nu}{c}$ і енергію $\mathcal{E}_\phi = h\nu$ з вільним електроном, що знаходиться у спокої. Енергія спокою електрона

$$W_0 = m_0 c^2,$$

де m_0 - маса спокою електрона (рис. 280). Фотон, зіткнувшись з електроном, передає

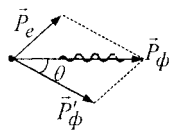


Рис. 280

йому частину своєї енергії й імпульсу та змінює напрямок руху (розсіюється). Зменшення енергії фотона і означає збільшення довжини хвилі.

Нехай імпульс і енергія розсіяного фотона дорівнюють $P'_\phi = \frac{h\nu'}{c}$ і $\mathcal{E}'_\phi = h\nu'$.

Електрон, який раніше знаходився у стані спокою, отримує імпульс $P_e = m\nu$ і енергію

$$W = mc^2 = c\sqrt{P_e^2 + m_0^2 c^2}.$$

При кожному такому зіткненні виконуються закони збереження енергії та імпульсу.

Згідно із законом збереження енергії

$$m_0 c^2 + h\nu = c\sqrt{P_e^2 + m_0^2 c^2} + h\nu',$$

а згідно із законом збереження імпульсу

$$\frac{h\nu}{c} = P_e + \frac{h\nu'}{c}, \text{ або } \vec{P}_\phi = \vec{P}_e + \vec{P}'_\phi.$$

Розділимо перший вираз на c і запишемо його у вигляді:

$$\sqrt{P_e^2 + m_0^2 c^2} = \frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_0 c,$$

Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$P_e^2 + m_0^2 c^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0 c + m_0^2 c^2.$$

Звідси

$$P_e^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0 c.$$

Відповідно до теореми косинусів для трикутника імпульсів рівняння $\vec{P}_\phi = \vec{P}_e + \vec{P}'_\phi$ перепишемо так:

$$P_e^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\theta).$$

Прирівнюючи вирази для P_e^2 , отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2) - \frac{h^2}{c^2}2\nu\nu' + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0 c &= \\ = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2) - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu' \cos\theta, \end{aligned}$$

звідси

$$m_0 c(\nu - \nu') = h\nu\nu'(1 - \cos\theta)$$

Оскільки

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'},$$

то,
$$\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h}{m_0 c^2} \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} (1 - \cos\theta);$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta),$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = 2 \lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

де $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ - комптонівська

довжина хвилі, яка є сталою для всіх речовин.

Розрахуємо тепер кінетичну енергію електрона віддачі:

$$E_k = (m - m_0) c^2.$$

Із закону збереження енергії

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2$$

маємо:

$$E_k = (m - m_0) c^2 = h(\nu - \nu') = h\nu\nu' \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) =$$

$$= h \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} \left(\frac{\lambda'}{c} - \frac{\lambda}{c} \right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda) = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} =$$

$$= h\nu \frac{2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Енергія E_k максимальна при $\theta = \pi$:

$$E_k^{max} = h\nu \frac{2\lambda_c}{\lambda + 2\lambda_c}.$$

Якщо електрон сильно зв'язаний з атомом, то при розсіянні на ньому фотона останній передає енергію й імпульс не електрону, а атому загалом. Маса атома в багато разів більша від маси електрона. Тому атому передається лише незначна частина енергії фотона, так що довжина хвилі λ' розсіяного випромінювання практично не відрізняється від довжини хвилі λ падаючого випромінювання. Частка електронів, сильно зв'язаних в атомах, збільшується із зростанням порядкового номера елемента і відповідно із зростанням маси атомів. Тому, чим важчі атоми розсіювальної речовини, тим більша інтенсивність незміщеної компоненти ($\lambda' = \lambda$) в розсіяному випромінюванні.

Ефект Комптона спостерігається не лише на електронах, але і на інших заряджених частинках, наприклад, протонах, але внаслідок великої маси протона його віддача відчувається лише при розсіянні електронів дуже великих енергій.

VIII. ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

§113. Досліди Резерфорда. Ядерна модель атома

Перша спроба створення моделі атома на основі нагромаджених експериментальних даних належить Дж. Томсону (1903р.). Згідно з цією моделлю атом є рівномірно зарядженою кулею радіусом $\sim 10^{-10}$ м, всередині якої біля своїх положень рівноваги коливуються електрони; сумарний від'ємний заряд електронів дорівнює додатному заряду кулі. Модель Томсона виявилась неправильною.

Велику роль у розвитку уявлень про будову атома відіграли досліди Е. Резерфорда із вивчення розсіяння α -частинок в речовині.

α -частинки утворюються під час природного радіоактивного розпаду деяких важких елементів і є позитивно зарядженими частинками з зарядом $2e$ і масою, яка приблизно в чотири рази більша за масу атома водню.

Спрощена схема досліду Резерфорда зображена на рис. 281.

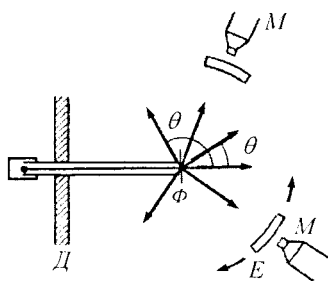


Рис. 281

Джерело α -частинок поміщене всередині свинцевої порожнини з вузьким каналом. Усі α -частинки, крім тих, що рухаються всередині вузького каналу, поглинаються свинцем. Потік α -частинок,

пройшовши через вузьку діафрагму $Д$, потрапляє на тонку золоту фольгу Φ завтовшки $10^{-6} - 10^{-7}$ м, що складається з декількох атомних шарів. При проходженні через фольгу α -частинки відхиляються на різні кути θ і потрапляють на екран $Е$, який можна поміщати в різних положеннях відносно фольги. Екран покритий флюоресцентною речовиною. За допомогою мікроскопа $М$ можна спостерігати місця потрапляння α -частинок за свіченням екрану. Поведінку α -частинок після проходження через фольгу вивчали в камері Вільсона.

Резерфорд з'ясував, що потік α -частинок, пройшовши крізь фольгу, майже не відхиляється від прямолінійного напрямку і лише деякі частинки змінюють напрямку руху, відхиляючись на дуже великі кути, близько $135 - 150^\circ$ (рис. 282).

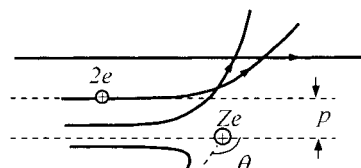


Рис. 282

На підставі досліду Резерфорда зробив такі висновки.

1. Оскільки переважна більшість α -частинок проходить через атоми, не змінюючи свого напрямку, то атом прозорий і частинки, на яких відбувається розсіювання, займають об'єм значно менший за об'єм атома.
2. Тому що при розсіюванні спостерігаються кути відхилення α -частинок близько 150° , то взаємодіють одноіменно заряджені частинки, тобто роз-

сіювання відбувається на позитивно заряджених частинках.

- Після проходження α -частинкою фольги в камері Вільсона спостерігалися треки однакової довжини, які належать лише α -частинці. Отже, маса частинки, на якій відбувається розсіювання, значно більша від маси α -частинки і через це вона не отримує прискорення.
- Резерфорд приблизно розрахував розмір частинки, на якій відбувається розсіювання. Розглянемо центральний удар α -частинки, який відповідає куту розсіяння $\theta = 180^\circ$. Із закону збереження енергії випливає, що в момент найбільшого зближення α -частинки з невідомою частинкою її кінетична енергія $E_{k\alpha}$ цілком перейде в потенціальну енергію їх взаємодії:

$$\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{2e \cdot Ze}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Оцінимо величину R для золота ($Z = 79$). Якщо припустити, що швидкість α -частинки $v_\alpha \approx 10^7$ м/с, її маса $m_\alpha = 6.6 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд електрона $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, то

$$R = \frac{2eZe}{2\pi\epsilon_0 m_\alpha v_\alpha^2} \approx 2.7 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

В той же час, радіус атома $r \approx 10^{-10}$ м.

Таким чином, частинка на якій відбувається розсіювання α -частинок займає в атомі об'єм, який значно менший від об'єму атома.

Резерфорд теоретично розглянув задачу про розсіювання α -частинок у кулонівському електричному полі частинки, що має заряд Q . Кут відхилення α -частинок θ тим більший, чим менша віддаль p

від ядра до початкового напрямку руху α -частинки (рис. 282). Віддаль p називається „параметром удару“.

Закони динаміки дозволяють розрахувати залежність кута відхилення θ від параметра удару p , а методами теорії ймовірностей можна знайти ймовірність пролітання α -частинки на даній відстані p від частинки і тим самим ймовірність її відхилення на кут θ . Розрахунок показує, що із загального числа розсіяних N α -частинок в тілесному куті $d\Omega$, що міститься між двома конічними поверхнями, твірні які утворюють кути θ і $\theta + d\theta$ з початковим напрямком руху α -частинок, розсіюється така їх кількість:

$$dN = nN \left(\frac{Qq_\alpha}{m_\alpha v_\alpha^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

де n – кількість α -частинок, які налітають на частинку через одиницю площі перпендикулярного перерізу пучка за одиницю часу.

Для певної розсіюючої речовини при певній енергії α -частинок і заданій густині їх потоку добуток $\frac{dN}{d\Omega} \sin^4 \frac{\theta}{2}$ повинен бути сталим, що було експериментально підтверджено в дослідях Гейгера і Марсдена.

Наведена формула дозволяє за вимірним числом частинок, які розсіяні під певним кутом θ , визначити величину позитивного заряду Q , тому, що всі інші величини, що входять у цю формулу, доступні вимірюванню. Оскільки атоми в нормальному стані нейтральні, то позитивний заряд Q повинен бути цілим кратним від значення заряду електрона:

$$Q = Z|e|,$$

де Z – ціле число.

На основі вимірювань Резерфорда виникла гіпотеза, що величина Z дорівнює порядковому номеру елемента в таблиці Менделєєва. Пізніше ця гіпотеза підтвердилася.

Знаючи заряд частинки $Q = Ze$, можна знайти, який „параметр удару” відповідає різним кутам удару θ .

На підставі результатів дослідів з розсіянням α -частинок тонкими фольгами Резерфорд запропонував *ядерну модель атома*.

Згідно з цією моделлю в центрі атома знаходиться ядро, в якому зосереджено позитивний заряд Ze і практично вся маса атома. Лінійні розміри ядра $\sim 10^{-14} - 10^{-15}$ м.

Навколо ядра в області з лінійними розмірами $\sim 10^{-10}$ м по замкнених орбітах рухаються Z електронів, утворюючи електронну оболонку атома.

Ядерна модель Резерфорда зовні дуже нагадує Сонячну систему: у центрі – ядро, навколо нього по орбітах рухаються електрони. Тому цю модель називають планетарною. Орбіти електронів в атомі стаціонарні, атому властива виняткова стійкість.

Стійкість атома не можна погодити з класичним поясненням ядерної моделі. Електрон по коловій орбіті рухається з доцентровим прискоренням $a = \frac{v^2}{r}$, а згідно із законами електродинаміки він повинен випромінювати електромагнітні хвилі і внаслідок цього неперервно втрачати енергію. За класичними уявленнями це випромінювання повинно відбуватися безперервно. Тому електрон не зможе триматись на

колової орбіті – він повинен по спіралі наближатись до ядра, і частота його обертання навколо ядра повинна безперервно змінюватись. Електромагнітне випромінювання атома тому повинно мати неперервний, а не лінійчастий спектр.

Отже, застосування класичної електродинаміки до ядерної моделі атома привело до суперечності з експериментальними фактами.

ШВЕДОВ ФЕДІР НИКИФОРОВИЧ
(1903-1974)

Запропонував в 1905 р. власну будову молекули газу у вигляді планетарної системи, де негативний електрон обертається навколо позитивного іона. Ця ідея залишилась непоміченою іншими фізиками, які віддавали в той час перевагу моделі Дж. Томсона. Планетарна модель газової молекули Шведова на 6 років випередила знамените відкриття Резерфорда (1911 р.), яке повністю змінило прийняті в той час явлення про структуру атома.

§114. Атом водню і його спектр за теорією Бора

Дослідження спектрів випромінювання розріджених газів, показали, що кожному газу властивий певний лінійчастий спектр, який складається з окремих спектральних ліній. Найбільш вивченим є спектр атома водню.

Швейцарський вчений І. Бальмер у 1885 р. встановив, що довжини хвиль відомих на той час дев'яти ліній спектра атома водню можна обчислити за формулою:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{k^2}{k^2 - 4},$$

де $\lambda_0 = 3,65 \cdot 10^{-7}$ м, $k = 3, 4, 5, \dots, 9$.

Цю формулу можна записати в іншому вигляді:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad k = 3, 4, 5, \dots,$$

де $R' = 1,097 \cdot 10^7$ м⁻¹, R' – стала Рідберга.

Оскільки $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

де $R = R'c = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$, яку також називають сталою Рідберга.

Спектральні лінії, що відрізняються різними значеннями k , утворюють серію ліній, яка називається *серією Бальмера*. Тепер в спектрі випромінювання водню виявлено 37 ліній серії Бальмера. Із збільшенням k лінії серії зближуються; значення $k = \infty$ визначає границю серії, до якої з боку більших частот прилягає суцільний спектр: $\lambda_{\text{гран}} = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Крім того, виявляється, що зі збільшенням номера лінії її інтенсивність зменшується. Якщо схематично зобразити розміщення спектральних ліній відповідно до формули

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

а довжиною штриха виразити інтенсивність спектральної лінії, то отримуємо картину, зображену на рис. 283.

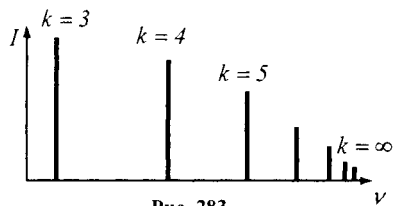


Рис. 283

На початку ХХ ст. у спектрі водню було виявлено ще декілька серій спектра випромінювання, які знаходяться у невидимій області.

В ультрафіолетовій області – серія *Лаймана*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 2, 3, 4, \dots);$$

в інфрачервоній області – серія *Пашена*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 4, 5, 6, \dots);$$

серія *Брекета*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 5, 6, 7, \dots);$$

серія *Пфунда*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 6, 7, 8, \dots);$$

серія *Хемфрі*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (k = 7, 8, 9, \dots).$$

Всі серії у спектрі водню можуть бути описані однією формулою, яка називається *узагальненою формулою Бальмера*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

де $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$, і визначає серію, а $k=n+1, n+2, n+3, \dots$ і визначає окремі лінії серії.

Спектральні серії водню наведені на рис. 284.

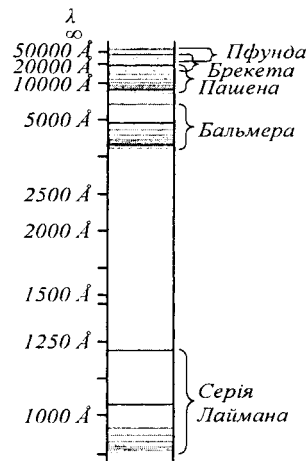


Рис. 284

Р.Рідберг показав, що не лише в спектрі водню, але і в спектрах інших елементів, лінії утворюють закономірні серії, частоти яких можуть бути представлені у вигляді різниці двох функцій

$$T(k) = \frac{R}{k^2} \quad \text{і} \quad T(n) = \frac{R}{n^2},$$

які називаються спектральними термами, тобто

$$\nu = T(n) - T(k).$$

Для певної серії n має стале значення. Зміна числа k дає всі лінії цієї серії.

У 1908р. В. Рітц установив справедливність положення, яке називають **комбінаційним принципом Рітца**:

частоти спектральних ліній випромінювання будь-якого атома можна подати у вигляді різниці двох термів; укладаючи різні комбінації термів, можна знайти всі можливі частоти спектральних ліній цього атома.

Наведені серіальні формули підібрані емпірично і довгий час не мали теоретичного обґрунтування.

Перша спроба побудови якісно нової теорії атома була зроблена в 1913 р. Н.Бором. Він поставив перед собою мету зв'язати в єдине ціле емпіричні закономірності лінійчастих спектрів, ядерну модель атома Резерфорда і квантовий характер випромінювання та поглинання світла.

Теорія Бора застосовна до атома водню і воднеподібної системи, яка складається з ядра з зарядом Ze і одного електрона, що обертається навколо ядра: He^+ , Li^{++} , ...

В основу своєї теорії Бор поклав три постулати.

Перший постулат Бора (постулат стаціонарних станів): існують деякі стаціонарні стани атома з відповідними значеннями енергії $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, перебуваючи в яких, він не випромінює енергії.

Цим стаціонарним станам відповідають цілком визначені (стаціонарні) орбі-

ти, по яких рухаються електрони, які, незважаючи на наявність у них прискорення, електромагнітних хвиль не випромінюють.

Другий постулат Бора (правило квантування орбіт): в стаціонарному стані атома електрон, рухаючись по коловій орбіті, повинен мати квантові значення моменту імпульсу, які задовольняють умову

$$L_n = m v_n r_n = n \hbar, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

де m – маса електрона, v_n – його швидкість, r_n – радіус орбіти електрона.

Третій постулат Бора (правило частот): при переході атома з одного стаціонарного стану в інший випромінюється або поглинається один фотон з енергією $h\nu_{kn} = E_k - E_n$, яка дорівнює різниці енергій відповідних стаціонарних станів.

Випромінювання фотона відбувається при переході атома зі стану з більшою енергією E_k у стан з меншою енергією E_n , тобто при переході електрона з орбіти більш віддаленої від ядра на ближчу до ядра орбіту. Поглинання енергії супроводжується переходом атома у стан з більшою енергією, і електрон переходить на віддаленішу від ядра орбіту. Набір можливих частот $\nu_{kn} = \frac{E_k - E_n}{h}$ квантових переходів і визначає лінійчастий спектр атома.

Постулати, висунуті Бором, дозволили розрахувати спектр атома водню і воднеподібних систем, а також теоретично розрахувати сталу Рідберга.

Враховуючи припущення Резерфорда, що електрон у воднеподібній системі рухається по коловій орбіті радіусом r під дією кулонівської сили притягання елект-

рона до ядра, яка створює доцентрове прискорення, запишемо:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m v_n^2}{r_n}.$$

Звідси

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_n^2}.$$

Підставивши сюди величину v_n з виразу $m v_n r_n = n\hbar$, отримаємо:

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{m^2 r_n^2}{n^2 \hbar^2} \quad \text{і} \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z m e^2} n^2,$$

де $n=1, 2, 3, \dots$

Радіуси орбіт зростають пропорційно квадратам цілих чисел.

Для атома водню ($Z=1$) радіус першої орбіти електрона при $n=1$ називається першим борівським радіусом (a_0) і дорівнює

$$r_1 = a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m e^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Тоді

$$r_n = a_0 n^2 \frac{1}{Z}.$$

Оскільки експериментально виміряти радіуси орбіт неможливо, то для перевірки правильності теорії потрібно знайти такі величини, які можна виміряти експериментально. Такою величиною може бути, зокрема, енергія, яку випромінюють або поглинають атоми.

Енергія електрона у воднеподібній системі дорівнює сумі його кінетичної і потенціальної енергій в електростатичному полі ядра:

$$E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Враховавши, що $\frac{m v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$,

отримаємо:

$$\frac{m v_n^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Тоді

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

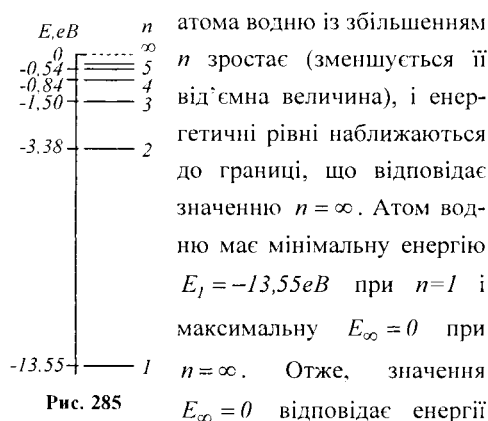
Підставимо в цей вираз значення r_n . Тоді

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m Z e^2}{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2}.$$

Знак „-“ означає, що електрон знаходиться у зв'язаному стані.

Енергетичні стани атома утворюють сукупність енергетичних рівнів, що змінюються залежно від значення n , яке виражає номер енергетичного рівня атома і називається **головним квантовим числом**. Енергетичний стан з $n=1$ є **основним станом**, а стани з $n>1$ – збуджені.

Надаючи n різні цілочислові значення, отримаємо для атома водню ($Z=1$) можливі рівні енергії (рис. 285). Енергія



іонізації атома (відриву від нього електрона). Енергія іонізації з певного стану дорівнює за абсолютною величиною енергії зв'язку електрона в атомі в цьому стані E_n .

Згідно з третім постулатом Бора при переході електрона з k -ї орбіти на n -у ви-

промінь фотон з енергією

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n = -\frac{Z^2 me^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

звідки частота випромінювання

$$\nu_{kn} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

де $R = \frac{Z^2 me^4}{8h^3 \epsilon_0^2}$ - стала Рідберга. Числове

значення $R_{теор}$ добре узгоджується з експериментально отриманим $R_{експ}$ в емпіричних формулах для атома водню. Це підтверджує правильність отриманої Бором формули для енергетичних рівнів воднеподібної системи.

Теорія Бора не позбавлена внутрішніх протиріч, тому що з одного боку, застосовує закони класичної фізики, з іншого – ґрунтується на квантових постулатах. Вона змогла пояснити спектри водню і воднеподібних систем і обчислити частоти спектральних ліній, але не змогла пояснити їх інтенсивність і не дала відповіді на запитання: чому здійснюються ті чи інші переходи? У теорії Бора не описано атом гелію – один з простих атомів, що безпосередньо слідує за атомом водню.

Створюючи свою теорію, Бор керувався важливою ідеєю наступності в розвитку фізичних теорій. Цю ідею він сформулював стосовно співвідношення між його теорією атома та класичною механікою і назвав її принципом відповідності. Згідно з **принципом відповідності Бора** при досить великих квантових числах квантові співвідношення переходять у класичні.

За принципом відповідності будь-яка нова теорія, яка претендує на більшу загальність, цілком не відкидає стару теорію, основу на дослідних даних, а вклю-

чає її в себе і вказує межі її застосування.

Німецькі фізики Д. Франк і Г. Герц, експериментально довели дискретність значень енергій атомів, вивчаючи методом затримуючого потенціалу зіткнення електронів з атомами газів. Схема їх установки наведена на рис. 286.

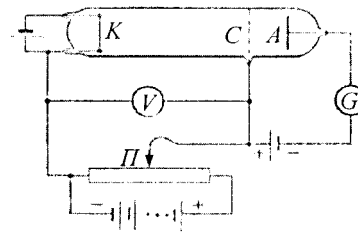


Рис. 286

Трубка, яка заповнена паровою ртуті при низькому тиску ($\sim 130 \text{ Па}$), містить катод K, анод A і сітку C. Електрони, які вилітають з катода внаслідок термоелектронної емісії, прискорюються різницею потенціалів U , що прикладена між катодом і сіткою. Цю різницю потенціалів можна змінювати за допомогою потенціометра П. Між сіткою C і анодом A прикладена гальмівна різниця потенціалів порядку $0,5 \text{ В}$. Д. Франк і Г. Герц досліджували залежність сили струму I в колі анода від напруги U між катодом і сіткою. Сила струму вимірювалась гальванометром G, напруга – вольтметром V.

Електрони в області між катодом і сіткою співударяються з атомами пари ртуті. Ті електрони, які після співударів мають достатню енергію, щоб подолати гальмівне поле, досягають анода. При непружних ударах електронів з атомами ртуті останні можуть збуджуватися. Згідно з теорією Бора кожен з атомів ртуті може отримати лише певну енергію, переходячи при цьому в один із збуджених станів. Тому, якщо в атомах дійсно існують стаціо-

нарні стани, то електрони, стикаючись з атомами ртуті, повинні втрачати енергію дискретно, певними порціями, які дорівнюють різниці енергій відповідних стаціонарних станів атома.

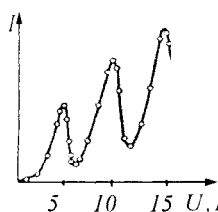


Рис. 287

Згідно з експериментом при збільшенні напруги до $4,86\text{ В}$, сила анодного струму зростає монотонно, проходить через максимум ($4,86\text{ В}$), потім різко падає і зростає знову (рис. 287). Наступні максимуми спостерігаються при $2 \cdot 4,86\text{ В}$ і $3 \cdot 4,86\text{ В}$.

Доки напруга між катодом K і сіткою C менша, ніж $4,86\text{ В}$, то електрони, зустрічаючи на своєму шляху атоми ртуті, співударяються пружно. При $eU = 4,86\text{ eV}$ енергія електрона достатня, щоб викликати непружний удар, при якому електрон віддає атому ртуті всю кінетичну енергію, збуджуючи перехід одного з електронів атома на вищий енергетичний рівень, тобто атом переходить у збуджений стан. Електрони, які втратили свою кінетичну енергію, уже не зможуть подолати гальмівного поля і досягнути анода. При значеннях енергій, кратних $4,86\text{ eV}$, електрони можуть $2, 3, \dots$ рази співударятися непружно з атомами ртуті, втрачаючи при цьому повністю свою енергію, і не долетять до анода.

Досліди Франка і Герца показали, що електрони при зіткненні з атомами ртуті передають атомам лише певні порції енергії, причому $4,86\text{ eV}$ - найменша можлива порція енергії, яка може бути поглинена атомом ртуті в основному енергетичному стані.

Атоми ртуті, які отримали при ударі з електроном енергію ΔE , переходять у збуджений стан i , повертаючись в основний, випромінюють світловий квант з частотою

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{hc}{\Delta E},$$

де $\Delta E = 4,86\text{ eV}$. Тоді $\lambda = 2,537 \cdot 10^{-7}\text{ м}$. Ця лінія була виявлена експериментально.

Отже, досліди Франка і Герца експериментально підтвердили постулати Бора.

§115. Формула де Бройля. Дослідне обґрунтування корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей речовин

Теорія Бора була значним кроком у розвитку атомної фізики, однак мала ряд внутрішніх протиріч. Тому необхідно було переглянути уявлення про природу елементарних частинок (електронів, протонів і т.д.). Оскільки було переконливо доведено, що світло проявляє корпускулярно-хвильовий дуалізм, французький вчений Луї де Бройль у 1924 р. висунув гіпотезу про те, що частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові.

Як відомо, фотон має квант енергії $\epsilon_{\phi} = h\nu$, імпульс $P_{\phi} = \frac{h}{\lambda}$, масу $m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2}$.

За де Бройлем, між корпускулярними і хвильовими характеристиками електрона існує такий самий зв'язок, як і між відповідними характеристиками фотона.

Інакше кажучи, рух електрона з швидкістю v пов'язаний з деяким хвильовим процесом, довжина хвилі якого визначається

$$\text{рівнянням} \quad \lambda = \frac{h}{P}, \quad \text{де імпульс} \quad P = mv. \quad \text{Це}$$

формула де Бройля.

Якщо частинка має кінетичну енергію E_K , то замінюючи її імпульс P енергією E_K за формулою $P = \sqrt{2mE_K}$, можна записати

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_K}}.$$

Зокрема, для електрона, що прискорюється в електричному полі з різницею потенціалів U , маємо

$$E_K = \frac{mV^2}{2} = eU.$$

Тоді

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}} \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Для електричних полів з напругою $1-10\text{В}$ довжини хвиль де Бройля належать інтервалу $(10 \div 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ м}$, тобто мають довжини хвиль звичайних рентгенівських променів.

Цікавий результат дало порівняння гіпотези де Бройля і теорії атома Бора.

Згідно з II постулатом Бора: $mvr = n \frac{h}{2\pi}$.

З цього рівняння можна визначити довжину стаціонарної орбіти

$$2\pi r = n \frac{h}{mv},$$

де згідно з гіпотезою де Бройля $\frac{h}{mv} = \lambda$.

Отже, довжина стаціонарної орбіти

$$2\pi r = n\lambda.$$

Ціле число n дорівнює числу довжини хвиль де Бройля для електрона, яке укладається на довжині колової орбіти.

В 1927р. К. Девіссон і Л. Джермер експериментально підтвердили гіпотезу де Бройля, спостерігаючи розсіювання електронів монокристалом нікелю. Схема дослідів наведена на рис. 288.

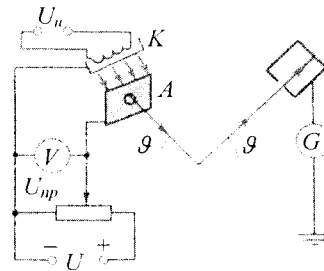


Рис. 288

З катода K , який нагрівається питою розжарення, вилітають електрони зі швидкістю, яка залежить від напруги U між катодом і анодом A . Величина напруги може змінюватися потенціометром. Пройшовши через отвір в аноді, електрони падають на поверхню нікелю і відбиваються від неї. Відбиті електрони потрапляють в циліндр Фарадея і створюють струм, який вимірюється гальванометром.

На рис. 289 показано кристалічну ґратку нікелю, на якому проводили дослід на розсіювання під кутом $\theta = 65^\circ$.

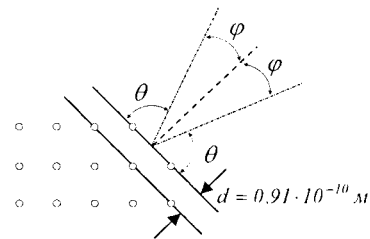


Рис. 289

При незмінному куті θ неперервно змінювалась прискорююча напруга U і вимірювалась сила струму I . На рис. 290 зображено залежність сили струму I від напруги U .

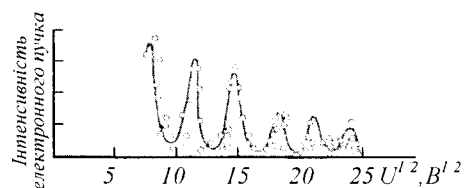


Рис. 290

При напрузі $U=54\text{В}$ виявився мак-

симум сили струму, а значить і максимуму кількості відбитих електронів.

З результатів дослідів випливає, що розсіювання електронів монокристалом нікелю нагадує відбивання таким кристалом рентгенівських променів. Рентгенівські промені відбиваються лише при певних довжинах хвиль, які задовольняють умову Вульфа-Брегга $n\lambda = 2d \sin\theta$. Звідси

$$\lambda = 2 \cdot 0,91 \sin 65^\circ = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ м } (n = 1).$$

Розсіяння електронів пов'язане з їх хвильовими властивостями, і довжина хвилі, яка пов'язана з рухомих електронем, визначається його кінетичною енергією, а значить і напругою U :

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{54}} \cdot 10^{-10} \text{ м} = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Цей збіг підтвердився при інших значеннях енергії електронів і кутів розсіювання.

Для виявлення дифракції електронних пучків було використано метод дифракції рентгенівського випромінювання Дебая-Шеррера. Якщо вузький пучок рентгенівського випромінювання проходить крізь дрібнокристалічний порошок або тонку металеву пластинку, то після його проходження на фотографічній пластинці утворюється дифракційна картина у вигляді кілець. На рис. 291 подано фотографію дифракційної картини, отриманої при розсіюванні рентгенівських променів пластинкою алюмінію.

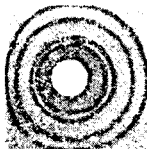


Рис. 291

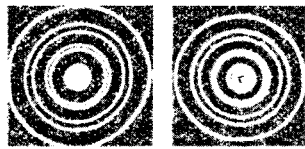


Рис. 292

Аналогічну картину спостерігали у 1928р. Д.Томсон і П.Тартаковський при

пропусканні крізь металеві плівки потоків електронів. На рис. 292 зображені фотографії дифракційних картин, отриманих при розсіюванні пучка електронів, що пройшли крізь тонкі плівки золота і міді.

У методі Дебая-Шеррера діаметр D дифракційного кільця певного порядку прямо пропорційний довжині хвилі і тому відношення $\frac{D}{\lambda}$ для певного матеріалу при незмінній відстані від зразка до фотопластинки повинно бути сталим. Аналогічні результати було отримано при дифракції електронів.

Протягом тривалого часу залишалось нез'ясованим, чи хвильові властивості є окремо у кожній мікрочастинки, чи їх має лише потік багатьох мікрочастинок. У 1949 р. В.Фабрикант, М. Сушкін, Л. Біберман провели дослід з дифракції потоку електронів настільки незначної інтенсивності, що інтервал часу між пролітанням наступних електронів був приблизно в 30000 разів більший від часу, який необхідний для проходження через увесь прилад, тобто реєструвалось проходження окремих електронів. При досить тривалій експозиції отримували таку ж дифракційну картину, як і для інтенсивних пучків електронів. Цей дослід переконав, що хвильові властивості притаманні кожному електрону.

Відкриття хвильових властивостей електрона показало, що електрон не можна уявити у вигляді маленької кульки як матеріальної точки. Він має складну структуру з корпускулярними і хвильовими властивостями одночасно.

Відповідно до гіпотези де Бройля хвильові властивості повинні мати не тільки електрони, але й будь-які частинки про-

тони, нейтрони, атоми і молекули.

У 1929р. О.Штерн провів серію дослідів для вивчення дифракції нейтральних атомів і молекул. При відбиванні пучків атомів і молекул від поверхонь твердих тіл повинні спостерігатись дифракційні явища, що описуються тими самими співвідношеннями, які справедливі для плоскої двовимірної дифракційної ґратки.

Досліди, в яких була вивчена дифракція нейтронів на кристалах, теж є доказом справедливості формули де Бройля. Нейтрони від кристалів твердих тіл відбиваються і розсіюються в речовині відповідно до умови Вульфа-Брегга

$$n\lambda = 2d \sin\theta,$$

де λ – довжина хвилі, яка пов'язана з рухомим нейтроном і задовільняє формулу де Бройля.

Для тіл, маса яких дуже велика порівняно з масою атомів і молекул, ніяких хвильових властивостей виявити не можна. Наприклад, якщо кулька масою $m = 10^{-3} \text{ кг}$ рухається зі швидкістю $v = 10^2 \text{ м/с}$, то $\lambda = \frac{h}{mv} = 6,62 \cdot 10^{-33} \text{ м}$.

Таку довжину хвилі не можна встановити у жодному дифракційному досліді. Тому макроскопічні тіла хвильових властивостей практично не мають.

ТАРТАКОВСЬКИЙ ПЕТРО САВИЧ
(1895-1940)

Зробив в 1927 р. вагомий внесок в експериментальне обґрунтування хвильових властивостей електрона. Продемонстрував дифракційний характер взаємодії електронів з енергією до 1,5 KeV з тонкою алюмінієвою мішенню. Написав в 1932 р. монографію "Експериментальні підвалини хвильової теорії матерії", яка присвячена оглядові експериментальних даних з дифракції електронів та їх теоретичному осмисленню.

ЛАШКАРЬОВ ВАДИМ ЄВГЕНОВИЧ
(1903-1974)

Працював у 1930-1935 рр. в галузі дифракції повільних і швидких електронів. Здійснив піо-

нерські дослідження розподілу електронної густини в кристалах, узагальнені в монографії „Дифракція електронів”.

ПАСІЧНИК МИТРОФАН ВАСИЛЬОВИЧ
(1812-1996)

Вивчав дифракцію швидких електронів та досліджував електронографічним методом структуру тонких шарів речовини, а також природу захисних плівок у нержавіючих сталях та кислотостійких чавунах.

§116. Співвідношення невизначеностей як прояв корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей матерії. Обмеженість механічного детермінізму

Розглянемо, наслідки що випливають з корпускулярно-хвильової двоїстості електронів, фотонів, протонів та інших об'єктів мікросвіту, і які обмеження накладає цей дуалізм на класичний метод описування їх руху і, зокрема, на можливість одночасного визначення їх імпульсів і координат.

У класичній механіці всяка частинка рухається вздовж певної траєкторії так, що фіксовані її координати та імпульс. Мікročастинки внаслідок наявності в них хвильових властивостей відрізняються від класичних частинок. Одна з основних відмінностей полягає в тому, що мікročастинка не має чіткої траєкторії, і неправомірно говорити одночасно про точні значення її координат та імпульсу.

Як відомо, будь-яка хвиля, незалежно від її природи, є процесом, що заповнює більшу чи меншу область простору, а через це не може локалізуватися в одній точці. Наприклад, уздовж осі Ox рухається фотон, для якого точно відомий імпульс $P = P_x$, тобто $\Delta P_x \rightarrow 0$. Такому фотону відповідає хвиля, довжина якої однозначно визначається величиною імпульсу $\lambda = \frac{h}{P}$.

Така монохроматична хвиля в прос-

торі нічим не обмежена, область її існування – вся вісь OX . Це означає, що в цьому випадку просторовий інтервал Δx , в якому замкнено об'єкт з хвильовими властивостями – фотон, дорівнює нескінченності. Іншими словами, при $\Delta P_x \rightarrow 0$ маємо

$\Delta x \rightarrow \infty$. Отже, якщо точно відомий імпульс, локалізація фотона стає цілком невизначеною.

Якщо ж область локалізації фотона є обмеженою, то це означає, що амплітуда відповідного хвильового процесу відрізняється від нуля тільки всередині скінченного інтервалу Δx і дорівнює нулю поза ним. Такий хвильовий процес уже не можна зобразити монохроматичною хвилею. Його можна уявити як суперпозицію ряду монохроматичних хвиль різної довжини. На рис. 293 наведено простий приклад суперпозиції трьох синусоїдальних хвиль, внаслідок чого виникає хвильовий процес – так званий хвильовий пакет, амплітуда якого відрізняється від нуля в скінченному інтервалі Δx .

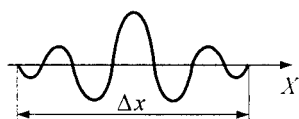


Рис. 293

Оскільки в хвильовому пакеті є набір значень λ , які містяться в деякому інтервалі $\Delta\lambda > 0$, то набір значень імпульсів P знаходиться в інтервалі

$$\Delta P = \Delta\left(\frac{h}{\lambda}\right) = \frac{h}{\lambda^2} |\Delta\lambda|.$$

Чим ширший інтервал можливих значень інтерферуючих хвиль, а разом з тим інтервал ΔP_x можливих значень імпульсів, тим вужча область локалізації Δx результуючого пакета. Інакше кажучи, чим

більша невизначеність імпульсу фотона, тим точніше можна визначити його координати. При $\Delta P_x \rightarrow \infty$ маємо $\Delta x \rightarrow 0$,

тобто *точно значення координат фотона можливе тільки при повній невизначеності його імпульсу.*

Такі висновки справедливі не тільки для фотонів, а й для електронів, протонів та інших мікрочастинок.

У 1927 р. В. Гейзенберг, враховуючи хвильові властивості мікрочастинок, дійшов до висновку, що об'єкт мікросвіту неможливо одночасно з однаковим ступенем точності характеризувати і координатами, й імпульсом.

Згідно з співвідношенням невизначеностей Гейзенберга *мікрочастинка не може одночасно мати і певні координати (x, y, z) , і певні відповідні проєкції імпульсу (P_x, P_y, P_z) , причому невизначеності в значеннях цих всіх величин задовольняють умови*

$$\Delta x \Delta P_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta P_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta P_z \geq \hbar,$$

тобто *добуток невизначеностей координати і відповідної їй проєкції імпульсу не може бути меншим від величини \hbar .*

Співвідношення невизначеностей впливає з хвильових властивостей мікрочастинок. Нехай потік електронів проходить через вузьку щілину завширшки Δx , яка розміщена перпендикулярно напрямку їх руху (рис. 294).

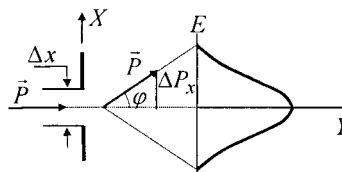


Рис. 294

Оскільки електрони мають хвильові властивості, то при розмірах щілини, які

співмірні з довжиною хвиль де Бройля для електрона, при їх проходженні через щілину відбувається дифракція, яка спостерігається на екрані E .

До проходження через щілину електрони рухалися вздовж осі OY , тому складові імпульсу $P_x = 0$ так, що $\Delta P_x = 0$, а координата x точки є цілком невизначеною. В момент проходження електронів через щілину їх положення в напрямку осі OX визначається з точністю до ширини щілини, тобто з точністю Δx . У той самий момент внаслідок дифракції електрони відхиляються від початкового напрямку і починають рухатися в границях кута 2φ . Отже, появиться невизначеність в значенні складової імпульсу вздовж осі OX , яка дорівнює

$$\Delta P_x = P \sin \varphi = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi.$$

З теорії дифракції відомо, що перший мінімум відповідає куту φ , що задовольняє умову $\Delta x \sin \varphi = \lambda$. З цих формул

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x} \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

Отже,

$$\Delta x \Delta P_x = h.$$

Якщо врахувати дифракційні максимуми вищих порядків, то

$$\Delta x \Delta P_x \geq h \quad \text{або} \quad \Delta x \Delta P_x \geq \hbar.$$

Неможливість одночасно точно визначити координату і відповідну складову імпульсу не пов'язана з недосконалістю методів вимірювання та вимірювальних приладів, а є наслідком подвійної корпускулярно-хвильової природи мікрооб'єктів. Співвідношення невизначеностей отримано при одночасному використанні класичних характеристик руху частинки (коорди-

нати, імпульсу) і наявності у неї хвильових властивостей.

Оскільки в класичній механіці приймається, що вимірювання координати та імпульсу може бути проведено з будь-якою точністю, то, таким чином, співвідношення невизначеностей є квантовим обмеженням застосовності класичної механіки до мікрооб'єктів.

Якщо розглянути траєкторію руху електрона за слідом, який він залишив на фотопластинці, то його положення можна зафіксувати з точністю, яка визначається розмірами зерна фотоемульсії, що зазнало дії електрона. Нехай ці розміри $\Delta x \sim 10^{-6} \text{ м}$. Тоді невизначеність швидкості електрона

$$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m \Delta x} = 1,2 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Але слід на фотопластинці залишають швидкі електрони з $v \sim 10^6 \div 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, тобто

$$v \gg \Delta v_x.$$

У цьому випадку можна говорити про рух електрона вздовж певної траєкторії з точно заданою в кожній точці швидкістю.

Розглянемо тепер електрон, який рухається в атомі. Положення електрона можна визначити з точністю до розмірів атома, тобто $\Delta x \sim 10^{-10} \text{ м}$. В цьому випадку $\Delta v_x \geq 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Під час руху електрона навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ його швидкість $v = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Отже, величина невизначеності швидкості Δv_x од-

ного порядку з швидкістю електрона і тому не можна говорити про рух електрона в атомі по певній траєкторії.

Співвідношення невизначеності

$$\Delta x \Delta P_x \geq \hbar$$

можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta P_x &= (v_x \Delta t) (m \Delta v_x) = \Delta \left(\frac{m v_x^2}{2} \right) \Delta t = \\ &= \Delta E_k \Delta t \geq \hbar, \end{aligned}$$

де ΔE_k – невизначеність кінетичної енергії частинки в деякому стані; Δt – час її перебування в цьому стані.

Отримане співвідношення справедливе не тільки для кінетичної, але і для повної енергії:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Система, що має середній час життя Δt , не може бути охарактеризована чіткими значеннями енергії; невизначеність енергії

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$$

зростає зі зменшенням середнього часу життя. Частота випромінюваного фотона повинна мати невизначеність

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h},$$

тобто лінії спектра повинні характеризуватися частотою, яка дорівнює

$$\nu \pm \frac{\Delta E}{h}.$$

§117. Хвильова функція і її статистичний зміст

Згідно з ідеєю де Бройля із рухом частинок пов'язані певні хвильові процеси. Розглянемо вільну частинку, яка рухається вздовж осі Ox і характеризується енергією $E = mc^2$ та імпульсом $P = m v$. При цьому частинка не локалізована в якійсь певній

точці простору, а займає весь простір. Така частинка описується плоскою монохроматичною хвилею. Фаза цієї хвилі має вигляд:

$$\Phi = (\omega t - kx).$$

Напрямок хвильового вектора \vec{k} збігається з напрямком поширення хвилі, а його числове значення дорівнює хвильовому числу $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а частота ω зв'язана з енергією частинки E співвідношенням $E = h\nu$.

Тому, враховуючи що

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi E}{h} = \frac{E}{\hbar}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi P}{h} = \frac{P}{\hbar},$$

вираз для фази Φ можна звести до вигляду

$$\Phi = \frac{1}{\hbar}(Et - Px).$$

Плоска хвиля де Бройля вільної частинки – функція комплексна:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= A(\cos \Phi - i \sin \Phi) = A e^{-i\Phi} = \\ &= A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)}. \end{aligned}$$

Швидкість поширення v_ϕ хвилі де Бройля можна знайти як швидкість переміщення сталої фази

$$Et - Px = const.$$

Звідси

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{E}{P} = \frac{mc^2}{m v} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{h} m \lambda.$$

Оскільки $c > v$, то фазова швидкість хвиль де Бройля більша від швидкості світла у вакуумі.

Хвилі де Бройля зазнають великої дисперсії, оскільки $v_\phi \sim \lambda$.

Групова швидкість хвилі де Бройля

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(h\nu)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dP}.$$

Для вільної частинки

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2} \quad ;$$

$$\frac{dE}{dP} = \frac{Pc^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2}} = \frac{Pc^2}{E} = \frac{m_0 v c^2}{m c^2} = v .$$

Групова швидкість хвиль де Бройля дорівнює швидкості частинки.

Якщо частинка рухається в довільному напрямку, то хвиля де Бройля

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{k})} = \\ &= A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)} . \end{aligned}$$

Функція $\Psi(x, y, z, t)$ – називається хвильовою функцією, A – її амплітуда.

З'ясуємо фізичний зміст хвильової функції.

Дифракційна картина для мікрочастинок є проявом статистичної закономірності, згідно з якою частинки потрапляють в ті місця, де інтенсивність хвиль де Бройля найбільша.

Необхідність ймовірнісного підходу до опису мікрочастинок є важливою особливістю квантової теорії. Однак, якщо вважати, що хвилі де Бройля характеризують ймовірність виявлення частинки в деяких точках простору, то при від'ємному значенні хвиль ймовірність може бути від'ємна, що не має сенсу.

У 1926р. М.Борн запропонував *статистичну інтерпретацію хвильової функції*:

ймовірність експериментального виявлення частинки, що описується хвильовою функцією Ψ в точці (x, y, z) в момент часу t пропорційна до квадрату модуля хвильової функції $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^$ в цій точці в момент часу t , Ψ^* – функція, яка комплексно спряжена з Ψ .*

Дифракційну картину пучка елек-

тронів можна інтерпретувати так: світлі плями відповідають максимуму $|\Psi|^2$, і разом з тим найбільшій кількості електронів, що летять у відповідному напрямку. Ймовірність руху електронів у напрямку темних плям буде мінімальною.

Отже, в квантовій механіці стан мікрочастинок описується принципово повному – за допомогою хвильової функції, яка є основним носієм інформації про їх корпускулярні і хвильові властивості.

Ймовірність знаходження частинки в елементарному об'ємі dV дорівнює:

$$dw = |\Psi|^2 dV ,$$

де величина $|\Psi|^2 = \frac{dw}{dV}$ є *густиною ймовірності*, тобто визначає ймовірність знаходження частинки в одиничному об'ємі в околі точки з координатами x, y, z .

Таким чином, фізичний сенс має не сама функція Ψ , а квадрат її модуля $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, яким визначається інтенсивність хвиль де Бройля.

Ймовірність знайти частинку в момент часу t в скінченному об'ємі V згідно з теоремою додавання ймовірностей, дорівнює

$$w = \int_V dw = \int_V |\Psi|^2 dV .$$

Оскільки $|\Psi|^2 dV$ визначається як ймовірність, то хвильову функцію Ψ необхідно нормувати так, щоб ймовірність w достовірної події дорівнювала одиниці, якщо за об'єм V прийняти нескінченний об'єм всього простору. Це означає, що при даній умові частинка повинна знаходитись десь в просторі. Отже, *умова нормування ймовірностей*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1,$$

де потрібний інтеграл обчислюють по всьому нескінченному простору. Ця формула означає, що перебування частинки у просторі є достовірною подією і її ймовірність повинна дорівнювати одиниці.

Щоб хвильова функція була об'єктивною характеристикою стану мікрочастинки, вона повинна задовольняти ряд обмежувачих умов:

1. функція Ψ , що характеризує ймовірність виявлення мікрочастинки в елементі об'єму, повинна бути *скінченною* (ймовірність не може бути більшою від одиниці), *однозначною* (ймовірність не може бути неоднозначною величиною) і *неперервною* (ймовірність не може змінюватись стрибком);
2. похідні $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dy}$, $\frac{d\Psi}{dz}$, $\frac{d\Psi}{dt}$ повинні бути неперервні;
3. функція $|\Psi|^2$ повинна бути інтегрованою.

Хвильова функція задовольняє принцип *суперпозиції*: якщо система може знаходитись в різних станах, що описуються хвильовими функціями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, то вона також може знаходитись в стані Ψ , що описується лінійною комбінацією цих функцій:

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n,$$

де C_n – деякі комплексні числа.

За допомогою хвильової функції в квантовій механіці можна обчислити середні значення фізичних величин, які характеризують певний об'єкт, що перебуває в стані, який описує хвильова функція Ψ .

Обчислимо, наприклад, середню відстань від електрона до ядра в атомі. Ймовірність виявлення електрона в атомі в елементі об'єму dV дорівнює $|\Psi|^2 dV$. Величина

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dx dy dz$$

є сумою добутоків різних відстаней r від електрона до ядра на ймовірність цих відстаней. Середнє значення $\langle r \rangle$ відстані електрона від ядра буде визначене відношенням величини R до повної ймовірності виявлення електрона в якійсь точці простору:

$$\langle r \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz}.$$

Знаменник цього дробу дорівнює одиниці. Тому

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dx dy dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r \Psi \Psi^* dx dy dz. \end{aligned}$$

§118. Рівняння Шредінгера. Принцип причинності в квантовій механіці

Статистичне трактування хвиль де Бройля і співвідношення невизначеностей Гейзенберга привели до висновку, що рівнянням руху в квантовій механіці, яке описує рух мікрочастинки в різних силових полях, повинно бути рівняння, з якого виходили би хвильові властивості частинки, які спостерігаються під час досліду. Основне рівняння повинно бути диференціальним рівнянням відносно хвильової функції $\Psi(x, y, z, t)$, оскільки, величина $|\Psi|^2$, визначає ймовірність перебування

частинок в момент часу t в об'ємі dV . Оскільки шукане рівняння повинно враховувати хвильові властивості частинок, то воно повинно бути хвильовим рівнянням.

Основне рівняння нерелятивістської квантової механіки сформульовано в 1926 р. Е. Шредінгером. Рівняння Шредінгера, як і всі основні рівняння фізики, не виводиться, а постулюється. Правильність цього рівняння підтверджується узгодженням з експериментами, що, у свою чергу, надає йому характер закону природи.

Ідея Шредінгера полягала в тому, щоб дістати диференціальне рівняння розв'язком якого для нерелятивістського випадку ($v \ll c$) є хвильова Ψ – функція вигляду

$$\Psi(x, y, z, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - P_x x - P_y y - P_z z)}$$

Частинна похідна за часом t від Ψ дорівнює

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} EAe^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{P}\vec{r})} = -\frac{i}{\hbar} E\Psi.$$

Візьмемо другу похідну від Ψ - функції за координатою x

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} P_x A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{P}\vec{r})} = \frac{i}{\hbar} P_x \Psi,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 P_x^2 \Psi = -\frac{1}{\hbar^2} P_x^2 \Psi.$$

Додаючи другі похідні за просторовими координатами, маємо

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\hbar^2} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) \Psi,$$

або

$$\Delta \Psi = -\frac{1}{\hbar^2} P^2 \Psi,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ оператор Лапласа.

З виразів для похідних за часом і координатами отримаємо

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{dt}; \quad P^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\Psi} \Delta \Psi.$$

У випадку вільної частинки повна енергія E збігається з кінетичною E_k , причому $E_k = \frac{P^2}{2m}$. Отже,

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Psi} \Delta \Psi.$$

В результаті диференціальне рівняння Шредінгера для вільної частинки має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi}{dt}$$

або

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = E_k \Psi.$$

Якщо частинка має потенціальну енергію $U(x, y, z, t)$, то кінетична енергія $E_k = E - U$. Тоді

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = (E - U) \Psi,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = E \Psi.$$

Оскільки

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{dt},$$

то отримаємо *загальне часове рівняння Шредінгера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Наведені міркування не повинні сприйматися як виведення рівняння Шредінгера. Вони лише пояснюють, як можна прийти до цього рівняння. Доказом правильності рівняння Шредінгера є його узгодження з результатами експерименту.

З погляду математики рівняння Шредінгера є лінійним диференціальним

рівнянням з частинними похідними. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що кожне лінійне рівняння з частинними похідними має багато розв'язків, причому таких, що лінійна комбінація будь-якої сукупності розв'язків рівняння також буде розв'язком рівняння.

Для значної кількості фізичних явищ, які відбуваються в мікросвіті, наприклад, для опису поведінки електрона в атомі у ряді випадків важливо вміти знаходити стаціонарні розв'язки рівняння Шредінгера, які не містять часу.

Щоб розв'язати цю задачу, треба знайти так зване стаціонарне рівняння Шредінгера, в якому виключено залежність Ψ від часу. Воно має сенс для тих задач, в яких потенціальна енергія U не залежить від часу: $U = U(x, y, z)$. Шукатимемо розв'язок рівняння Шредінгера у вигляді добутку:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

де $\psi(x, y, z)$ є функцією лише координат, а E – повна енергія частинки.

Підставимо вираз для $\Psi(x, y, z, t)$ у рівняння Шредінгера

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi e^{-i \frac{E}{\hbar} t} + U(x, y, z) \psi e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = \\ = i\hbar \psi (-i) \frac{E}{\hbar} e^{-i \frac{E}{\hbar} t}. \end{aligned}$$

Скоротивши на множник $e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$, дістанемо

$$\Delta \psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi(x, y, z) = 0.$$

Це *стаціонарне рівняння Шредінгера*.

Наведене рівняння – найважливіше співвідношення нерелятивістської квантової механіки. Функції ψ , які задовольняють рівняння Шредінгера при певному E ,

називають *власними функціями*. В рівнянні Шредінгера як параметр входить повна енергія частинки. В теорії диференціальних рівнянь доводиться, що подібні рівняння мають розв'язок не при довільних значеннях параметра, а лише при певних значеннях E . Ці значення *енергії* називають *власними*.

Власні значення E можуть утворювати як неперервний, так і дискретний ряд.

Стан частинки в певний момент часу описується періодичною функцією часу з циклічною частотою $\omega = \frac{E}{\hbar}$, яка визначається повною енергією частинки.

Рівняння Шредінгера дає змогу знайти не тільки конкретний вигляд функції $\Psi(x, y, z, t)$ у заданому зовнішньому полі $U(x, y, z, t)$, а й визначити її зміну з часом $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Отже, рівняння Шредінгера виступає як свого роду „причина“ того, який вигляд має Ψ – функція в тому чи іншому випадку і як вона змінюється з часом. Знання ж Ψ – функції дає змогу знайти всі можливі значення важливих фізичних параметрів фізичної системи у будь-який момент часу.

Отже, рівняння Шредінгера є математичним виразом принципу причинності в квантовій механіці.

Але на відміну від класичної фізики, квантова механіка не дає чіткої відповіді на запитання, які точні значення параметрів у даний момент часу. Ψ – функція, вказуючи цілий спектр можливих значень параметрів системи, дає змогу обчислити лише ймовірність появи кожного значення під час вимірювання.

§119. Рух вільної частинки. Частинка в прямокутній потенціальній ямі. Тунельний ефект

Розглянемо декілька порівняно простих прикладів застосування рівняння Шредінгера до руху частинки в конкретних умовах.

1. Рух вільної частинки

Під час руху вільної частинки ($U(x)=0$) повна енергія збігається з кінетичною $E = E_k$. Для вільної частинки, що рухається вздовж осі OX , ($-\infty \leq x \leq \infty$), рівняння Шредінгера для стаціонарних станів набирає вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0.$$

Прямою підстановкою можна переконатися в тому, що частковим розв'язком рівняння є функція

$$\psi(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}} + Be^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}},$$

де A і B – сталі. Функція $\psi(x)$ є тільки координатною частиною хвильової функції $\Psi(x,t)$ стаціонарного стану. Розв'язок повного рівняння Шредінгера отримаємо у формі

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \sqrt{2mEx})} + Be^{-\frac{i}{\hbar}(Et + \sqrt{2mEx})}.$$

Цей розв'язок є суперпозицією двох плоских монохроматичних хвиль однакової частоти $\omega = \frac{E}{\hbar}$, хвиля з амплітудою A

поширюється в додатному напрямі осі OX , хвиля з амплітудою B у протилежному напрямку. Порівнюючи знайдені розв'язки з загальним виразом плоскої монохроматичної хвилі $\xi = Ae^{-i(\omega t - kx)}$, бачимо, що хвильове число k для вільної частинки дорівнює $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$.

Отже, вільній частинці в квантовій механіці відповідає плоска монохроматична хвиля де Бройля. Вона характеризує ймовірність знаходження частинки в певній точці простору.

Дійсно, взявши лише одну з хвиль, що поширюється в додатному напрямку осі OX , маємо

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = |A|^2.$$

Власні значення енергії частинки

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{P_x^2}{2m}.$$

Енергія вільної частинки може набувати довільне значення, тобто її енергетичний спектр неперервний.

2. Частинка в одномірній прямокутній потенціальній ямі

Нехай частинка може рухатися лише вздовж осі OX і знаходиться всередині

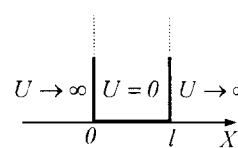


Рис. 295

прямокутної потенціальної ями, яка обмежена нескінченно високими потенціальними бар'єрами. (рис. 295).

В цьому випадку потенціальна енергія частинки $U(x)$ набу-

$$ватиме такі значення: U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq l; \\ \infty, & x > l. \end{cases}$$

де l – ширина ями, а енергія відраховується від дна ями.

Рівняння Шредінгера у випадку одномірної ями запишемо у вигляді

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0.$$

За умовою задачі (нескінченно високі „стінки“) частинка не проникає за границі ями, тому ймовірність її виявлення за границями ями дорівнює нулю. На гра-

ницях ями (при $x=0$ і $x=l$) неперервна хвильова функція повинна перетворюватися в нуль. Отже, граничні умови мають вигляд

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

В межах ями ($0 \leq x \leq l$) рівняння Шредінгера має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0,$$

де $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$.

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Оскільки $\psi(0) = 0$, то $B = 0$. Отже,

$$\psi(x) = A \sin kx.$$

Умова $\psi(l) = A \sin kl = 0$ виконується лише при $kl = n\pi$, де n – цілі числа, тобто необхідно, щоб $k = \frac{n\pi}{l}$. Тоді

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E_n \quad \text{і} \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2}.$$

Рівняння Шредінгера задовольняється лише при значеннях E_n , що залежать від цілого числа n .

Отже, енергія E_n частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками не може бути довільною, а набуває лише певні дискретні значення, тобто квантується.

Квантові значення енергії E_n називають *рівнями енергії*, а число n , яке визначає енергетичні рівні частинки, називають *квантовим числом*.

Умова $k_n = \frac{n\pi}{l}$ має простий фізичний зміст. Оскільки $k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ_n – довжина хвилі де Бройля для електрона в ямі,

то $\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}$, або $\lambda_n = \frac{2l}{n}$, тобто на ширині ями повинно вкладатись ціле число півхвиль де Бройля.

Знайдемо власні хвильові функції

$$\psi(x) = A \sin kx = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Стаду інтегрування A визначаємо з умови нормування

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1.$$

Звідси $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Тоді власні хвильові функції мають вигляд:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

На рис. 296а наведені графіки функцій $\psi_n(x)$ при $n=1, 2, 3$, на рис. 296б – густини ймовірності знаходження частинки

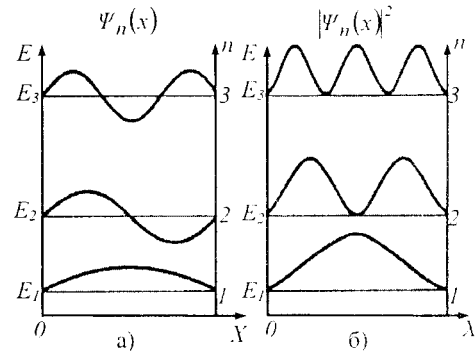


Рис. 296

на різних відстанях від „стінок” ями для $n=1, 2, 3$.

Наприклад, у квантовому стані з $n=2$ частинка не може знаходитись в середині ями і в той же час однаково часто може перебувати в її лівій або правій частині.

Квантовий стан з найнижчим значенням енергії ($n=1$) називається *основним станом*. Йому відповідає енергія

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2.$$

Оцінімо різницю енергій двох сусідніх рівнів:

$$\begin{aligned} \Delta E_n = E_{n+1} - E_n &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n+1)^2 - \\ &- \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1). \end{aligned}$$

Для електрона при розмірах ями $l = 10^{-10}$ м (вільні електрони в метали)

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= (2n+1) \cdot 6 \cdot 10^{-36} \text{ Дж} = \\ &= (2n+1) \cdot 3.7 \cdot 10^{-17} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Енергетичні рівні розміщені так тісно, що спектр практично можна вважати неперервним. Якщо область, в якій рухається електрон, порядку атомних розмірів ($l \sim 10^{-10}$ м), то

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= (2n+1) \cdot 6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = \\ &= (2n+1) \cdot 3.7 \cdot 10 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Отже, дискретність енергетичних рівнів в цьому випадку буде досить помітною і отримусмо лінійчастий спектр.

При великих квантових числах ($n \gg 1$)

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \approx \frac{2}{n} \ll 1,$$

тобто сусідні рівні розміщені тим густіше, чим більше n . Якщо n дуже велике, то можна говорити про практично неперервну послідовність рівнів, і характерна особливість квантових процесів – дискретність – згладжується.

3. Тунельний ефект

Нехай частинка, яка рухається в додатному напрямку осі Ox зустрічає на своєму шляху прямокутний потенціальний бар'єр висотою U і шириною l (рис. 297). Отже величина U вздовж осі Ox змінюється так:

ся так:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ U, & 0 \leq x \leq l; \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

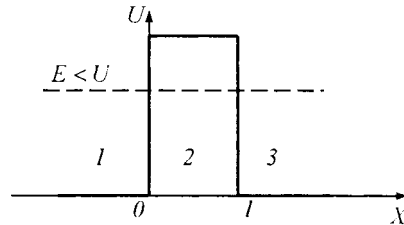


Рис. 297

При даних умовах задачі класична частинка, маючи енергію E , або пройде над бар'єром при $E > U$, або відіб'ється від нього при $E < U$ і буде рухатися в зворотний бік.

Для частинки навіть при $E > U$ є відмінна від нуля ймовірність того, що частинка відіб'ється від бар'єра і буде рухатися у зворотний бік. При $E < U$ є також відмінна від нуля ймовірність того, що частинка проникне через бар'єр і виявиться в області $x > l$.

Рівняння Шредінгера для кожної з виділених областей має вигляд:

$$1 \text{ і } 3: \frac{d^2 \psi_{1,3}}{dx^2} + k^2 \psi_{1,3} = 0; \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E,$$

$$2: \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + q^2 \psi_2 = 0; \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U).$$

Загальні розв'язки цих диференціальних рівнянь:

$$1: \psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$$

$$2: \psi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx},$$

$$3: \psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}.$$

В області 3 є лише хвиля, що пройшла через бар'єр і поширюється зліва направо. Тому коефіцієнт $B_3 = 0$.

При $E < U$ в області 2 q – уявне чис-

ло, тобто $q = i\alpha$, де $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}$.

У результаті

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{-\alpha x} + B_2 e^{\alpha x},$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}.$$

Отже, хвильова функція не дорівнює нулю і всередині бар'єра, а в області 3 буде мати вигляд хвилі де Бройля з тим самим імпульсом, але меншою амплітудою.

Якісний вигляд функцій $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ і $\psi_3(x)$ наведений на рис. 298.

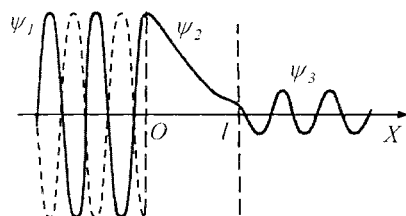


Рис. 298

Таким чином, квантова механіка приводить до принципово нового явища, яке називається **тунельним ефектом**, в результаті якого частинка може пройти через потенціальний бар'єр.

Знайдемо ймовірність проходження мікрочастинки крізь потенціальний бар'єр, або **коефіцієнт пропускання**. Цей коефіцієнт також називають **коефіцієнтом прозорості бар'єра**. Він дорівнює відношенню інтенсивності хвилі, що проходить через бар'єр, до інтенсивності хвилі, що падає на межу поділу областей 1 і 2. Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна до квадрату амплітуди коливань, то коефіцієнт прозорості бар'єра

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}.$$

Для того, щоб знайти це відношення, необхідно використати умови неперервності функції ψ у всій області змін x від $-\infty$ до $+\infty$, тобто

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_2(l) = \psi_3(l).$$

Для того, щоб функція ψ була гладкою, повинні виконуватися умови

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0), \quad \psi_2'(l) = \psi_3'(l).$$

Ці умови дають змогу виразити коефіцієнти A_1 через A_3 . В результаті

$$D = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = D_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} l \right],$$

$$\text{де } D_0 = \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{\kappa}}{1 - \frac{\alpha}{\kappa}} \right)^2.$$

Для потенціального бар'єра довільної форми:

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx \right],$$

де $U = U(x)$.

Із виразів для D видно, що коефіцієнт прозорості залежить від маси мікрочастинки, ширини бар'єра і від різниці $(U-E)$.

Тунельний ефект є специфічним квантовим ефектом. Проходження мікрочастинки крізь область, в яку, згідно із законами класичної механіки, вона не може проникнути, можна пояснити співвідношенням невизначеностей. Невизначеність імпульсу Δp на відрізку $\Delta x = l$ дорівнює

$$\Delta p > \frac{\hbar}{l}.$$

Зв'язана з цим розкидом в значеннях імпульсу кінетична енергія $\frac{\Delta p^2}{2m}$ може виявитися достатньою для того, щоб

повна енергія мікрочастинки виявилася більшою за потенціальну.

Проходження частинок через потенціальний бар'єр експериментально підтверджено в явищі холодної емісії електронів з металу. Тунельний ефект відіграє основну роль у явищах радіоактивного α -розпаду, перебігу термоядерних реакцій.

§120. Атом водню у квантовій механіці

Розглянемо воднеподібні атоми, які складаються з нерухомого ядра із зарядом Ze і електрона, який рухається навколо нього. При $Z=1$ це буде атом водню, $Z=2$ іон гелію He^+ , $Z=3$ двохкратно іонізований атом літію Li^{++} та ін. Заряд ядра можна вважати точковим, а його електричне поле – сферично-симетричним.

Потенціальна енергія взаємодії електрона з ядром

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

де r – відносна відстань між електроном і ядром.

Графічно функція $U(r)$ зображена на рис. 299.

Стан електрона в атомі водню описується хвильовою функцією ψ , яка є розв'язком стаціонарного рівняння Шредінгера

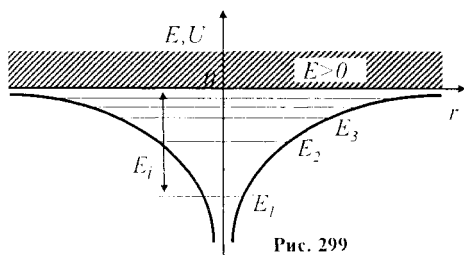


Рис. 299

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

де E – повна енергія електрона в атомі, а m – маса електрона. Оскільки поле, в якому рухається електрон, є сферично-симетричним, то для розв'язання рівняння Шредінгера використовують сферичну систему координат: r, θ, φ . Підставляючи в рівняння Шредінгера оператор Лапласа в сферичних координатах, прийдемо до рівняння:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

Функцію $\psi(r, \theta, \varphi)$ можна зобразити добутком трьох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Не вдаючись до математичного розв'язання цієї задачі, обмежимося розглядом важливих результатів, які з нього отримують, пояснивши їх основний зміст.

Для $E < 0$ рівняння Шредінгера має розв'язки, що задовольняють вимоги однозначності, скінченності і неперервності хвильової функції ψ лише при власних значеннях енергії

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8\hbar \epsilon_0^2} = -\frac{Z^2}{n^2} R h \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

де R – стала Рідберга, n – головне квантове число.

Розв'язок рівняння Шредінгера для атома водню приводить до появи дискретних енергетичних рівнів. Нижній рівень E_1 , що відповідає мінімально можливій енергії – основний, всі інші ($E_n > E_1$) збуджені. При $E < 0$ рух електрона є зв'язаним – він знаходиться всередині гіперболічної „потенціальної ями“. У міру зростання головного квантового числа n енергетичні

рівні розміщуються тісніше і при $n = \infty$ $E_\infty = 0$. При $E > 0$ рух електрона є вільний – він може покинути межі атома. Енергія іонізації атома водню дорівнює:

$$E_i = -E_1 = \frac{me^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 13,55 \text{ eV}.$$

У квантовій механіці дискретні значення енергії є наслідком самої теорії, вони випливають безпосередньо з розв'язків рівняння Шредінгера.

Рівняння Шредінгера задовольняють власні функції $\psi = \psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)$, що визначаються трьома квантовими числами: головним n , орбітальним l і магнітним m_l .

Головне квантове число n визначає енергетичні рівні електрона в атомі

Воно може набувати довільних цілочислових значень, починаючи з одиниці: $n = 1, 2, 3, \dots$

З розв'язків рівняння Шредінгера випливає, що момент імпульсу (механічний орбітальний момент) електрона квантується, тобто не може бути довільним, а набуває дискретних значень, які обчислюють за формулою

$$L_l = h\sqrt{l(l+1)},$$

де l – **орбітальне квантове число**, що визначає величину модуля вектора моменту імпульсу електрона в атомі

При заданому n набуває значення $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, тобто разом n значень.

З розв'язків рівняння Шредінгера виходить також, що вектор \vec{L}_l моменту імпульсу електрона може мати лише таку орієнтацію в просторі, при якій проекція L_{lz} на довільний напрямок OZ набуває квантових значень, кратних h :

$$L_{lz} = hm_l,$$

де m_l – **магнітне квантове число**, яке визначає проекцію моменту імпульсу електрона на заданий напрямок OZ .

Магнітне квантоване число при заданому l може набувати значення $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$, тобто разом $2l+1$ значень. Фізичний сенс обмеження m_l за величиною полягає в тому, що проекція вектора моменту не може бути більшою за довжину самого вектора.

На рис. 300 наведені можливі орієнтації векторів \vec{L}_l для електронів у випадку $l = 1$ і $l = 2$.

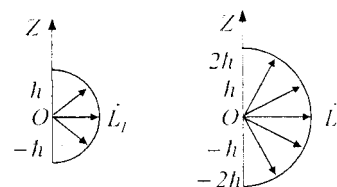


Рис. 300

Коли проекція L_{lz} має деяке значення, то на основі співвідношення невизначеності інших проекцій L_{lx} та

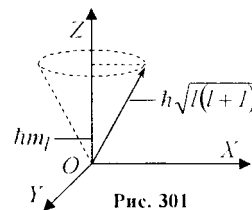


Рис. 301

L_{ly} будуть повністю невизначеними. Отже, вектор моменту імпульсу можна зобразити у вигляді вектора довжиною $h\sqrt{l(l+1)}$, який прецесує навколо осі OZ і зберігає свою проекцію на вісь OZ (рис. 301).

В магнітному полі рівень з головним квантовим числом n внаслідок наявності квантового числа m_l розщеплюється на $(2l+1)$ підрівнів. Відповідно у спектрі атома повинно спостерігатися розщеплення спектральних ліній. Розщеплення енергетичних рівнів в магнітному полі було

виявлено Т. Зеєманом і називається *ефектом Зеємана*. Розщеплення рівнів енергій у зовнішньому електричному полі називається *ефектом Штарка*.

Хоча енергія електрона і залежить від головного квантового числа n , але кожному значенню E_n (при E_j) відповідає декілька власних функцій ψ_{nlm_l} , що відрізняються значеннями l і m_l . Отже, атом водню може мати одне і те ж значення енергії, перебуваючи в декількох різних станах. Оскільки при даному n орбітальне квантове число l може змінюватись від 0 до $n-1$, а кожному значенню l відповідає $2l+1$ різних значень m_l , то число різних станів, що відповідають даному n , дорівнює

$$\Omega_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

Стани з однаковою енергією називаються *виродженими*, а кількість станів з певним значенням енергії називають *кратністю виродження* Ω_n відповідного енергетичного рівня.

Якщо рух електрона має сферичну симетрію, то його розподіл у просторі залежить лише від радіальної складової $R(r)$ хвильової функції $\psi(r, \theta, \varphi)$. Ймовірність dW виявлення електрона в сферичному шарі товщиною dr на відстані r від ядра дорівнює об'єму цього шару $dV = 4\pi r^2 dr$ на квадрат модуля $R(r)$:

$$dW = 4\pi r^2 |R(r)|^2 dr.$$

Отже, лінійна густина ймовірності $w(r) = \frac{dW}{dr}$ виявлення електрона на відстані r від ядра атома дорівнює

$$w(r) = 4\pi r^2 |R(r)|^2.$$

На рис. 302 зображено залежність $w(r)$ від радіуса r для перших трьох станів електрона в атомі водню.

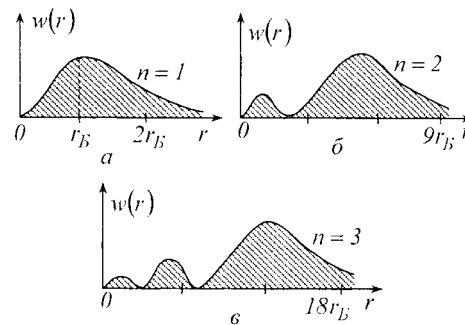


Рис. 302

Густина ймовірності $w_l(r)$ для основного стану атома ($n=1$) спочатку дорівнює нулю, а потім зростає до максимуму і далі експоненціально зменшується.

Отже, густина ймовірності виявлення електрона в різних частинах атома різна. Електрон при своєму русі ніби „розмазаний“ по всьому об'єму, створюючи електронну хмару, густина якої характеризує ймовірність знаходження електрона в різних точках об'єму атома.

Квантові числа n і l характеризують розмір і форму електронної хмари, а квантове число m_l характеризує орієнтацію електронної хмари в просторі (рис. 303).

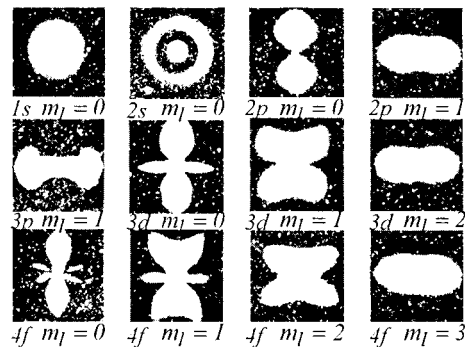


Рис. 303

Стан електрона, що характеризується квантовим числом $l=0$, називається s -станом (електрон в цьому стані називається s -електроном), $l=1$ – p -станом; $l=2$ – d -станом; $l=3$ – f -станом і так далі.

Значення головного квантового числа вказується перед умовним позначенням орбітального квантового числа:

$$1s; 2s2p; 3s3p3d; 4s4p4d4f; \dots$$

Квантові числа n , l і m_l дозволяють повністю описати спектр випромінювання атома водню, отриманий в теорії Бора.

У квантовій механіці появляются правила відбору, що обмежують число можливих переходів електронів в атомі, зв'язаних з випромінюванням і поглинанням світла. Теоретично доведено і експериментально підтверджено, що для дипольного випромінювання електрона, який рухається в сферично-симетричному полі ядра атома, можуть здійснюватися лише такі переходи, для яких:

1. зміна орбітального квантового числа Δl задовольняє умову $\Delta l = \pm 1$;
2. зміна магнітного квантового числа Δm_l задовольняє умову $\Delta m_l = 0, \pm 1$

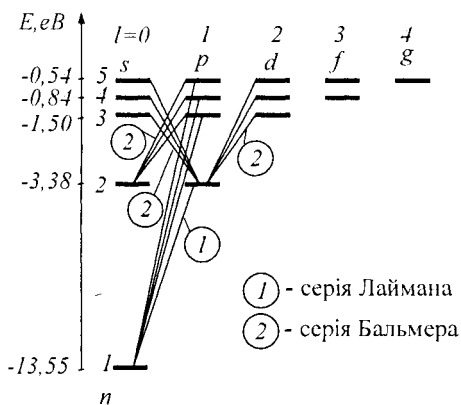


Рис. 304

У спектральних лініях атома водню серії Лаймана відповідають переходи

$$np \rightarrow 1s \quad (n=2, 3, \dots),$$

серії Бальмера –

$$np \rightarrow 2s, \quad np \rightarrow 2p, \quad (n=3, 4, \dots) \quad (\text{рис. 304}).$$

Розглянемо можливі переходи у воднеподібному атомі між станами d і p при наявності магнітного поля. Під дією зовнішнього магнітного поля енергетичні рівні розщеплюються (рис. 305).

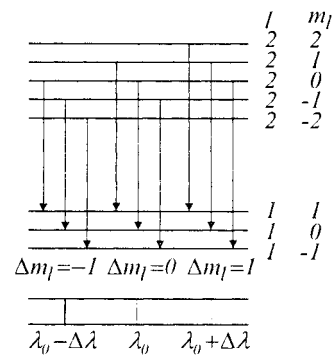


рис. 305

Стан d розщеплюється на п'ять рівнів, а стан p – на три рівні. Коли зовнішнє магнітне поле відсутнє, то випромінюється фотон з довжиною хвилі λ_0 , а при $B_{зов} \neq 0$ початкова спектральна лінія розщеплюється на три компоненти $\lambda_0 - \Delta\lambda$; λ_0 ; $\lambda_0 + \Delta\lambda$.

ХРАПЛИВИЙ ЗІНОВІЙ
(1904-1983)

Один із перших українських фізиків-теоретиків, що вийшли на світовий рівень науки. Автор наукових праць „Про власний потенціал електрона у хвильовій механіці”, „Про від’ємні рівні в теорії Дірака” та ін. Автор „Нарису фізики” (Львів, 1938 р.).

КОРДИШ ЛЕОН ЙОСИПОВИЧ
(1878-1932)

Розробляв (1915 р.) теорію ефекту Зесмана. В її основу ним вперше покладено представлення про просторове розміщення орбіт електронів в атомі. Отримав рівняння, яке вказує на прецесію і мутацію в русі електрона при сумісній дії магнітного поля і центральної сили, вивів декілька співвідношень, які ввійшли пізніше в квантову теорію явища.

МІЛЯНЧУК ВАСИЛЬ СТЕПАНОВИЧ
(1905-1958)

Пояснив різноманітні тонкі деталі спектрів,

зумовлені ефектом Зеемана. Розрахував інтенсивності та поляризації розщеплених зовнішнім магнітним полем компонент квадрупольного дублета, проаналізував їх залежність від напруженості поля. Виконав аналогічні розрахунки для дипольних спектральних ліній у випадку поперечного та поздовжнього ефекту Зеемана.

**§121. Дослід Штерна і Герлаха.
Спін електрона**

У 1921 р. О.Штерн і В.Герлах поставили досліди, метою яких було вимірювання магнітних моментів \vec{p}_{ml} атомів різних хімічних елементів.

Для визначення орбітального моменту імпульсу \vec{L}_l та магнітного моменту \vec{p}_{ml} одного електрона треба було поставити дослід з атомами хімічних елементів, які утворюють першу групу Періодичної системи елементів Менделєєва і мають один валентний електрон на зовнішній оболонці. Отже, моменти імпульсу і магнітні моменти таких атомів збігаються з моментами валентного електрона.

Використаємо зв'язок між векторами \vec{p}_{ml} і \vec{L}_l :

$$\vec{p}_{ml} = -g_l \vec{L}_l = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_l,$$

де $g_l = \frac{e}{2m_e}$ – орбітальне гіромагнітне відношення. Підставимо сюди вираз

$$L_l = h\sqrt{l(l+1)}.$$

Тоді

$$p_{ml} = -\frac{e}{2m_e} L_l = -\frac{eh}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}.$$

де μ_B – магнетон Бора.

Пристрій досліду Штерна і Герлаха зображений на рис. 306. З поверхні катода K випромінювались атоми срібла. Щілина $Щ$ пропускала вузький пучок атомів, що

проходив крізь сильне і неоднорідне магнітне поле, яке створювалось електромагнітом EM з полюсними наконечниками спеціальної форми. Атоми срібла осідали на фотопластинці Π .

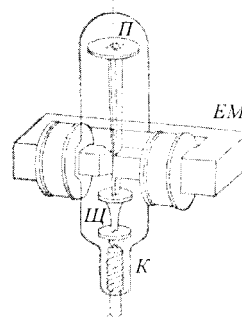


Рис. 306

При наявності магнітного поля виявилось, що залежно від досліджуваного елемента на пластинці спостерігається декілька тонких смужок, чітко відділених одна від одної і симетрично розміщених відносно початкового положення (при $\vec{B} = 0$) (рис. 307).

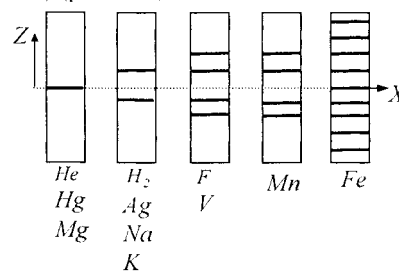


Рис. 307

Наприклад, атоми водню відхилилися в магнітному полі у двох напрямках, що відповідає лише двом можливим орієнтаціям магнітного моменту атома у зовнішньому полі. Момент імпульсу атома і його магнітний момент дорівнюють сумарним моментам електронів, бо магнітні моменти ядер мають значно меншу величину, ніж магнітні моменти електронів. А магнітні моменти електронів дорівнюють сумарним моментам валентних електронів.

бо моменти електронів заповнених оболонок компенсуються.

За відомою величиною $\frac{dB}{dz}$ неоднорідності магнітного поля, напрямленої вздовж осі Z , і за визначеною з відхилення атомів у магнітному полі силою F , яка діє на атом, можна визначити $p_{m/z}$. Для срібла Штерн і Герлах знайшли, що проекція магнітного моменту атома на напрямок поля числово дорівнює магнетону Бора, і підтвердили просторове квантування моментів імпульсу в магнітному полі.

Важливою особливістю атомів першої групи є те, що валентний електрон в основному стані атома має орбітальне квантове число $l=0$, тобто електрон перебуває в s -стані. Атомний пучок у дослідах мав атоми в основному стані. Однак у стані з $l=0$ електрон не має моменту імпульсу, як це випливає з формули $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Тому виникало питання про пояснення результатів дослідів Штерна і Герлаха. Просторове квантування якого моменту імпульсу було виявлено в цих дослідах і проекція якого магнітного моменту дорівнює одному магнетону Бора?

Для пояснення цього результату треба припустити, що в електрона, крім орбітального моменту імпульсу \vec{L}_l і відповідного йому магнітного моменту \vec{p}_{ml} , є власний механічний момент імпульсу \vec{L}_s , який називається *спіном електрона*, і *власний магнітний момент* \vec{p}_{ms} , що відповідає йому. Припущення про існування спіну висловили в 1925 р. С. Гюудеміт і Г. Уленбек.

Із загальних законів квантової механіки випливає, що спін повинен бути

квантований за законом

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

де s – квантове число, яке називається *спіновим квантовим числом*.

За аналогією з орбітальним моментом імпульсу проекція L_{sz} квантується так, що вектор \vec{L}_s може набувати $2s+1$ орієнтацій. Оскільки в дослідах Штерна і Герлаха для водню спостерігались лише дві орієнтації, то $2s+1=2$, звідси $s = \frac{1}{2}$.

Виявлене для атомів першої групи просторове квантування моменту імпульсу атома у магнітному полі було доказом наявності в спіну лише двох орієнтацій у зовнішньому полі.

Спінове квантове число на відміну від введених головного n , орбітального l і магнітного m_l не є цілим числом.

Власний механічний момент електрона L_s може набувати лише одного значення:

$$L_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$

Проекція спіна на напрямок зовнішнього магнітного поля, будучи квантовою величиною, визначається формулою

$$L_{sz} = m_s\hbar,$$

де m_s – *магнітне спінове число*, яке визначає проекцію власного імпульсу електрона на заданий напрямок.

Магнітне спінове число може мати лише два значення: $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Отже, проекція спінового механічного моменту імпульсу на напрямок поля може набувати

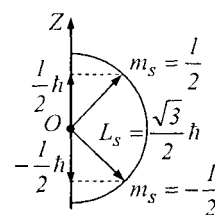


Рис. 308

двох значень (рис. 308):

$$L_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

З дослідів Штерна і Герлаха випливає, що проекція p_{msz} власного магнітного моменту електрона дорівнює магнетону Бора:

$$p_{msz} = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Розглянемо відношення L_{sz} і p_{msz} :

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m_e} = g_s.$$

де g_s – спінове гіромагнітне гіромагнітне відношення.

§122. Принцип Паулі. Розподіл електронів в атомі за станами

Якщо перейти від розгляду руху однієї мікрочастинки до багатоелектронних систем, то проявляються особливі властивості, що не мають аналога в класичній фізиці. Нехай квантово-механічна система складається з однакових частинок, наприклад, електронів. Всі електрони мають однакові фізичні властивості – масу, електричний заряд, спін і т. д. Такі частинки в квантовій механіці є **тотожними**.

Незвичайні властивості системи однакових частинок проявляються у фундаментальному принципі квантової механіки – **принципі тотожності частинок**:

внаслідок тотожності однакових частинок, що утворюють систему, стани системи, які відрізняються лише перестановкою частинок, є еквівалентними.

У квантовій механіці тотожні частинки повністю втрачають свою індивідуальність і стають нерозрізними.

Беручи до уваги фізичний зміст величини $|\psi|^2$, принцип нерозрізності то-

тожних частинок можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} |\psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N)|^2 = \\ = |\psi(q_2, q_1, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N)|^2, \end{aligned}$$

де q_i – сукупність просторових і спінової координат i -ї частинки (x_i, y_i, z_i, s_i) . З цього виразу випливає, що можливі два випадки:

$$\begin{aligned} \psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N) = \\ = \pm \psi(q_2, q_1, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N), \end{aligned}$$

тобто принцип тотожності частинок веде до певних властивостей симетрії їх хвильових функцій. Якщо при обміні частинок місцями хвильова функція не змінює знака, то вона називається **симетричною**, якщо змінює – **антисиметричною**. Характер симетрії хвильової функції не міняється з часом. Це є доказом того, що властивість симетрії чи антисиметрії – ознака даного типу мікрочастинок.

Симетрія чи антисиметрія хвильових функцій визначається спіном частинок. Залежно від характеру симетрії всі елементарні частинки і побудовані з них системи діляться на два класи. Результати різних експериментів показали, що частинки з півцілим спіном (електрони, протони, нейтрони) описуються антисиметричними хвильовими функціями. Ці частинки називаються **ферміонами**. Частинки з нульовим і цілочисловим спіном (π -мезони, фотони) описуються симетричними хвильовими функціями і називаються **бозонами**.

Якщо тотожні частинки мають однакові квантові числа, то їх хвильова функція симетрична відносно перестановки частинок. Звідси виходить, що два однакові ферміони, що входять в одну систему, не можуть знаходитись в однакових станах, оскільки для ферміонів хвильова

функція повинна бути антисиметричною. Узагальнюючи дослідні дані, В.Паулі у 1925 р. сформулював принцип, згідно з яким

системи ферміонів зустрічаються в природі лише у станах, що описуються антисиметричними хвильовими функціями (квантово – механічне формулювання принципу Паулі).

Із сформульованого положення випливає і *елементарне формулювання* принципу Паулі, яке і було введено ним у квантову теорію (1925 р.) ще до побудови квантової механіки:

в системі однакових ферміонів довільні два або більше з них не можуть одночасно знаходитися в одному і тому ж стані.

Кількість однотипних бозонів, що знаходяться в одному і тому ж стані, не лімітується.

Розподіл електронів в атомі відповідає принципу Паулі, який може бути використаний в його *простішому формулюванні*:

в одному і тому ж атомі не може бути більше від одного електрона з однаковим повним набором чотирьох квантових чисел n, l, m_l і m_s , тобто

$$Z_4(n, l, m_l, m_s) = 0, \text{ або } 1,$$

де $Z_4(n, l, m_l, m_s)$ – кількість електронів, що перебувають у стані, який описується набором квантових чисел n, l, m_l і m_s .

Користуючись принципом Паулі, можна знайти максимальну кількість електронів в атомі, що мають задані значення трьох (n, l, m), двох (n, l) і одного (n) квантових чисел.

Оскільки $m_s = \pm \frac{1}{2}$, то максимальна

кількість електронів, що перебуває у станах, які визначаються набором трьох квантових чисел n, l, m_l , дорівнює

$$Z_2(n, l, m_l) = 2.$$

При заданому числовому значенні L_l вектор моменту імпульсу \vec{L}_l може мати в просторі $(2l+1)$ різних орієнтацій, і тому максимальна кількість електронів, що перебувають у станах, які визначаються двома квантовими числами n, l , дорівнює

$$Z_2(n, l) = 2(2l+1).$$

Значення $Z_2(n, l)$ для різних значень l наведено в таблиці:

l	0	1	2	3	4
символ відповідного стану електронів	s	p	d	f	g
$Z_2(n, l)$	2	6	10	14	18

Число l при заданому значенні n змінюється від 0 до $n-1$, то максимальна кількість електронів, що перебуває у станах, що визначається значенням головного квантового числа n ,

$$Z_1(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = [2(n-1)+2]n = 2n^2.$$

Сукупність електронів, що мають однакові значення квантового числа n , утворює оболонку. Оболонки поділяються на підоболонки, що відрізняються значенням квантового числа l . Відповідно до значення n оболонкам дають позначення, які взяті зі спектроскопії рентгенівських променів:

n	1	2	3	4	5	6	7
позначення оболонок	K	L	M	N	O	P	Q

Оскільки орбітальне квантове число набуває значення від 0 до $n-1$, то кількість підоболонок дорівнює порядковому номеру n оболонки. Кількість електронів в пі-

добовонці визначається магнітним і магнітним сипновим квантовими числами, позначення оболонок і розподіл електронів в електроніках наведено в таблиці:

підоболонка	n	l	m _l	m _s	підоболонка	кількість електронів
K	1	0	0	↑↓	K(1s)	2
		0	0	↑↓		
L	2	-1	0	↑↓	L ₂ (2s)	6
				↑↓		
		-1	1	↑↓		
				↑↓		
0	0	↑↓	M ₁ (3s)	2		
M	3	-1	0	↑↓	M ₂ (3p)	6
				↑↓		
		-1	1	↑↓		
				↑↓		
		-2	2	↑↓		
				↑↓		
0	0	↑↓	M ₃ (3d)	10		
1	1	↑↓				
2	2	↑↓				

§123. Рентгенівські промені

У 1895 р. В.Рентген відкрив випромінювання, яке було названо „ліке-променями“ Рентгенівські хвилі охоплюють широкий інтервал довжин від 0,01 до 10⁸ мкм.

Джерелом рентгенівського випромінювання є рентгенівські трубки. На рис. 309 наведена схема рентгенівської трубки. У скляну трубку, в якій створено вакуум ~10⁻⁶ мм рт ст., введено анод А і катод К, що є джерелом електронів.

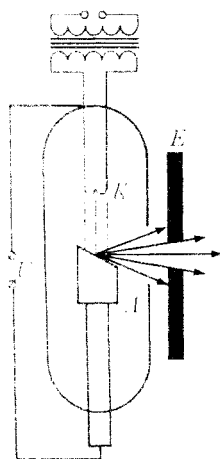


Рис. 309

Між катодом і анодом створюється сильне електричне поле з різницею потенціалів $U=10-50$ кВ. Електрони, які набули високих енергій у приєднаному електричному полі, бомбардують анод А, площина якого утво-

рює з напрямком руху електронів кут 45°. Внаслідок цього рентгенівське випромінювання, що виникає при гальмуванні електронів анодом, виходить із трубки через отвір захисного свинцевого екрану Е. Коефіцієнт корисної дії рентгенівських трубок становить близько 1%, тобто 99% кінетичної енергії електронів перетворюється в аноді у теплоту. Тому в тілі анода роблять канали, в яких циркулює охолоджуюча рідина. За принципом отримання електронних пучків рентгенівські трубки поділяють на три типи: іонні, електронні, індукційні. Джерелами рентгенівського випромінювання також можуть бути природні або штучні радіоактивні елементи, ряд небесних тіл.

Рентгенівське випромінювання, яке виникає в результаті гальмування електронів, називається *гальмівним*. Виникнення гальмівного випромінювання можна пояснити так. Рухомі електрони утворюють навколо себе магнітне поле. Різка зміна швидкості електронів при ударі в анод рівнозначна ослабленню і зникненню струму, що приводить до зміни магнітного поля, в результаті чого і виникають електромагнітні хвилі.

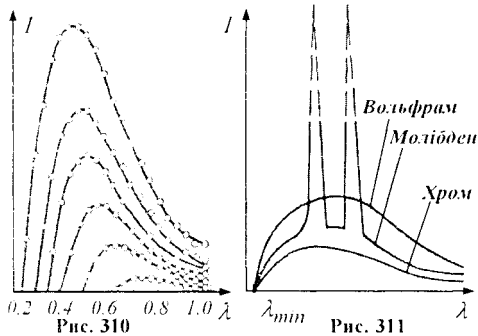
Гальмівне випромінювання має суцільний спектр. Це пояснюється тим, що одні електрони гальмуються швидше, а інші повільніше. Це приводить до виникнення електромагнітного випромінювання з різними довжинами хвиль. За квантової теорії енергія фотона рентгенівського випромінювання

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} - A$$

де $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія електрона пе-

ред ударом в анод, а A – енергія, яка перетворюється в теплоту. Оскільки величина A має різні значення, то і енергія $h\nu$ може бути різною.

На рис. 310 зображені експериментальні криві розподілу інтенсивності рентгенівського випромінювання за довжинами хвиль λ при ударі електронів у вольфрамовий анод при різних значеннях прискорюючої напруги U , а на рис. 311 – при ударі у анод з вольфраму, молібдену і хрому при однакових напругах U .



Характерною особливістю суцільних рентгенівських спектрів є наявність чіткої короткохвильової межі λ_{min} та її незалежність від речовини анода. При підвищенні напруги інтенсивність випромінювання збільшується, а короткохвильова межа змінюється у бік коротких хвиль.

Існування короткохвильової межі λ_{min} в рентгенівському спектрі пояснюється так. Енергія електрона при ударі у анод може повністю перейти в енергію випромінювання, тобто

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu_{max} = h\frac{c}{\lambda_{min}}$$

Оскільки $\frac{mv^2}{2} = eU$, то

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{min}} \quad \text{і} \quad \lambda_{min} = \frac{hc}{eU}.$$

Отже, мінімальна довжина хвилі гальмівного випромінювання обернено пропорційна прискорюючій напрузі U .

При підвищенні напруги на рентгенівській трубці до величини, більшої за деяке критичне значення, що залежить від речовини анода, на фоні суцільного спектра виникають лінійчасті спектри, інтенсивність яких у тисячі разів перевищує інтенсивність суцільного спектра. Оскільки лінійчастий спектр визначається природою речовини, з якої виготовлено анод, то його називають *характеристичним*.

З рис. 311 видно, що для напруги, при якій рентгенівська трубка з анодом вольфраму і хрому випромінює суцільний спектр, трубка з молібденовим анодом, крім суцільного, випромінює ще лінійчастий спектр.

Існування характеристичного випромінювання підтверджує наявність дискретних рівнів енергії атомів.

Кожний хімічний елемент дає характеристичне рентгенівське випромінювання незалежно від того, чи його атоми вільні, чи входять до складу хімічних сполук.

Рентгенівські спектральні лінії утворюють певні серії, які позначають буквами K, L, M, N, O і т. д. Кожна серія має певну кількість ліній, які позначають у порядку зменшення довжини хвилі індексами α, β, γ і т. д. Лінійчасті рентгенівські спектри різних речовин подібні між собою. Це зумовлено подібністю забудови нижніх (найближчих до ядра) шарів електронів в атомах. При збільшенні атомного номеру речовини анода весь рентгенівський спектр лише змінюється в короткохвильову частину спектра, не змінюючи своєї

структури. Це можна пояснити тим, що лінійчасті рентгенівські спектри утворюються внаслідок переходів електронів у внутрішніх шарах атомів. Механізм виникнення лінійчастих спектрів можна пояснити так. Якщо під впливом падаючих електронів високих енергій на атоми анода вибивається один із двох електронів $1s$ -стану K -оболонки, то звільнене місце може зайняти електрон з якої-небудь зовнішньої оболонки (L , M , N , і т.д.). При цьому виникає K -серія. Аналогічно виникають й інші серії. Схема виникнення спектральних серій показана на рис. 312.

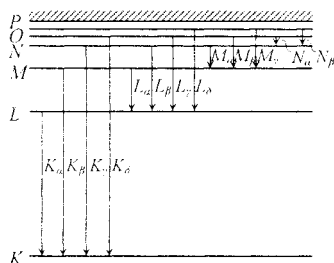


Рис. 312

Серія K обов'язково супроводжується іншими серіями, оскільки при випромінюванні її ліній звільнюються рівні в оболонках L , M , і т.д., які будуть заповнюватися електронами із більш віддалених оболонок. Частоти ліній зростають при переході від ліній K_α до K_β, K_γ, \dots , що пов'язано із збільшенням енергії, яка вивільняється при переході електрона на K -оболонку з дедалі більш віддалених оболонок. А інтенсивності ліній спадають при переході від ліній K_α до ліній K_β, K_γ , бо ймовірність переходу на K -оболонку з L -оболонки більша ніж з M, N , і т.д. Ці закономірності справедливі для L -, M - та інших серій.

При дослідженні лінійчастих рентгенівських спектрів Г.Мозлі в 1913 р.

встановив закон, який виражає зв'язок між хвильовим числом спектральної лінії $\nu_0 = \frac{1}{\lambda}$ і атомним номером Z елементу,

який випромінює ці лінії. Так, для K_α -лінії ця залежність має вигляд

$$\nu_0 = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right),$$

де R - стала Рідберга.

Для ліній інших серій ця залежність виражається подібними формулами. Так, для ліній L -серії закон Мозлі має вигляд

$$\nu_0 = R(Z-\sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=3, 4, 5, \dots),$$

де σ - стала екранування, яка має певне значення в межах однієї серії.

Зміст сталої екранування полягає в тому, що у важкому атомі, який має Z електронів, на електрон, що здійснює, наприклад, перехід, який відповідає лінії K_α , діє не весь заряд ядра Ze , а заряд $(Z-\sigma)e$, ослаблений екрануючою дією одного електрона, що залишився на K -оболонці.

Узагальнений закон Мозлі має вигляд

$$\nu_0 = R(Z-\sigma)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $m=1, n=2, 3, 4, \dots$ для ліній K -серії,

$m=2, n=2, 3, 4, \dots$ для ліній L -серії,

$m=3, n=2, 3, 4, \dots$ для ліній M -серії.

Для K -серії $\sigma = 1$, для L -серії $\sigma = 7,5$.

У загальному вигляді закон Мозлі записують і так:

$$\sqrt{\nu} = a(Z-\sigma),$$

де ν - частота, a - стала для певної серії ліній.

Закон Мозлі можна сформулювати так: *корінь квадратний із частоти є лінійною функцією атомного номера Z .*

На рис. 313 наведений загальний хід залежності $\sqrt{\frac{I}{\lambda}}$ для K_{α} -, L_{α} - і M_{α} -ліній від атомного номера Z .

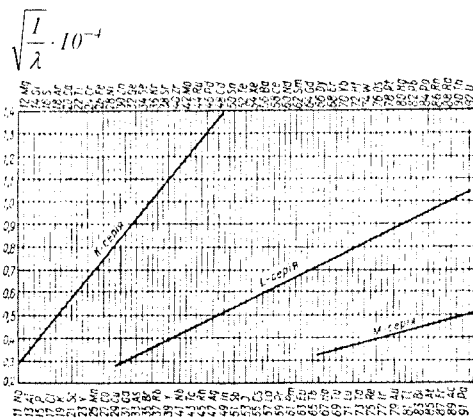


Рис. 313

Закон Мозлі дозволяє за виміряною довжиною хвилі рентгенівських ліній точно встановити атомний номер даного елемента. Цей закон відіграв велику роль при розміщенні елементів в періодичній системі. На основі цього закону вперше було показано, що не атомна маса, а атомний номер, який дорівнює заряду ядра, визначає хімічні властивості атомів.

ПУЛЮЙ ІВАН
(1845-1918)

Опублікував у 1896 р. дві статті. «Про походження рентгенівських променів та їх фотографічну дію» і додаток до праці «Про походження рентгенівських променів та їх фотографічну дію». Навів близько десяти досконалих знімків, які ілюструють отримані результати. Рентгенограми відрізнялись від знімків Рентгена високою якістю. Пулюєві належить перша вдала спроба з'ясувати механізм виникнення рентгенівських променів.

Зробив перший знімок цілого людського скелета.

ПІЛЬЧИКОВ МИКОЛА ДМИТРОВИЧ
(1857-1908)

Удосконалив трубку Пулюя, застосувавши в ній увігнутий антиматод. Цей прилад було названо фокус-трубкою Пильчикова. Один з перших використовував X-промені у медицині для огляду хворих та діагностики захворювань.

КОРДИШ ЛЕОН ЙОСИПОВИЧ
(1878-1932)

Розробив в 1923 р. теорію суцільного рентге-

нівського спектру. Її вихідним пунктом є припущення про неупорядковану зміну імпульсів електронів при зустрічі з атомами антиматод. Швидкості електронів в цьому випадку набувають різних величин, що викликає неперервний спектр випромінюваних частот. Отримана залежність між величиною прискорюючого потенціалу і довжиною хвилі рентгенівського випромінювання.

ЛІННИК ВОЛОДИМИР ПАВЛОВИЧ
(1889-1984)

Розробив у 1926 р. метод точного визначення показника заломлення рентгенівських променів за характеристиками повного внутрішнього відбиття. Нині цей метод є класичним.

ЖМУДСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ЗАХАРОВИЧ
(нар 1910 р.)

Розробив метод точного рентгенографування великих зразків металів і сплавів, метод високодисперсійного рентгенографування великої світлосили в широко-розбіжному пучку рентгенівських променів, склав таблиці для прецизійного розрахунку параметрів ґраток заліза, алюмінію, міді, запропонував формули розрахунку ширини рентгенівських ліній для всіх елементів і серій.

НАСЛІДОВ ДМИТРО МИКОЛАЙОВИЧ
(1903-1975)

Дослідив 1929 р. незалежність рентгенівських спектральних ліній від напруги.

МЕМОШКАЛЕНКО ВОЛОДИМИР ВОЛОДИМИРОВИЧ
(нар 1933 р.)

Виконав ґрунтовні дослідження з теорії рентгенівських емісійних спектрів.

КРИВОГЛАЗ МИХАЙЛО ОЛЕКСАНДРОВИЧ
(нар 1929 р.)

Розвинув (1956-1977 р.) рентгенографічні методи дослідження недосконалостей кристалів, передбачив появу квазіліній на рентгенограмі сильносотворених кристалів.

НАХОДКИН МИКОЛА ГРИГОРОВИЧ
(нар 1929 р.)

Вивчав процеси взаємодії електронів та м'якого рентгенівського випромінювання з твердим тілом. Висновки, зроблені з цих досліджень, сприяли розробці фізичних основ прогресивних технологій виробництва вакуумних приладів та відіграли значну роль в розробці захисту космонавтів та космічних апаратів від радіаційного впливу.

§124. Поняття про енергетичні рівні молекул. Спектри молекул

Молекула – найменша частинка речовини, що складається з однакових або різних атомів, з'єднаних між собою хімічними зв'язками, і яка є носієм хімічних і фізичних властивостей цієї речовини.

Хімічні зв'язки зумовлені взаємоді-

сто зовнішніх валентних електронів атомів. Електрони внутрішніх оболонок при об'єднанні атомів в молекулу залишаються в попередніх станах.

Обмежимося розглядом лише двоатомних молекул. Розрізняють два види зв'язку між атомами в молекулі. Один з них здійснюється в тому випадку, коли електрони в молекулі розподіляються так, що навколо першого з ядер утворюється надлишок електронів, а навколо іншого – їх недостача. Отже, молекула якби складається з двох іонів протилежних знаків, що притягуються один до одного (рис. 314). Зв'язок цього типу називається *гетерополярним* (або іонним): $NaCl$, KBr , HCl і т.д.

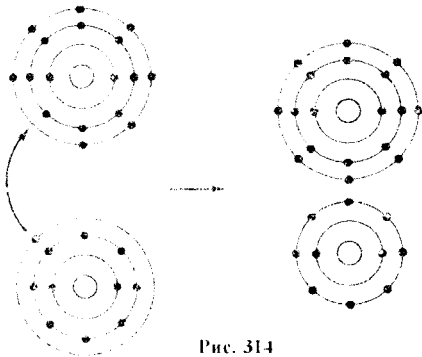


Рис. 314

Другий тип зв'язку спостерігається в тих молекулах, в яких частина електронів рухається навколо обох ядер (рис. 315). Такий зв'язок називається *гомеополярним* (ковалентним). Він утворюється парою електронів з протилежно напрямленими спінами.

Серед молекул цього типу слід розрізняти молекули з однаковими ядрами (H_2 , N_2 , O_2) і молекули з різними ядрами (CN).

Найпростішою молекулою з гомеополярним зв'язком є молекула водню. В 1927 р. Гайтлер і Лондон провели кванто-

во-механічний розрахунок основного стану молекули водню H_2 . Вони розв'язали рівняння Шредингера для системи, що складається з двох протонів (ядер атома водню) і двох електронів (рис. 316).

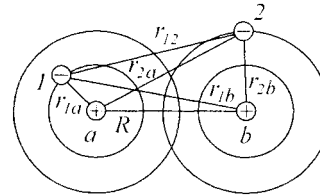


Рис. 316

Потенціальна енергія такої системи дорівнює

$$U = \left(-\frac{e^2}{r_{1a}} - \frac{e^2}{r_{2a}} - \frac{e^2}{r_{1b}} - \frac{e^2}{r_{2b}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Маса ядра приблизно у 2000 разів більшу від маси електрона. Тому ядра рухаються значно повільніше від електронів і в першому наближенні їх можна вважати нерухомими. В цьому наближенні рівняння Шредингера має вигляд

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0.$$

Тут Δ_1 – оператор Лапласа, що містить координати одного електрона, а Δ_2 – оператор Лапласа, що містить координати другого електрона.

Власні значення енергії, що отримують з цього рівняння, виявляються залежними від відстані між ядрами R , тобто $E = E(R)$.

Утворення молекули можливе лише при наближенні атомів з антипаралельними спінами (рис. 317).

Енергія, зумовлена електронною

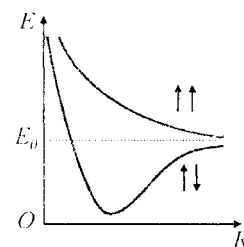


Рис. 317

конфігурацією (електронна енергія) має при деякому значенні R мінімум (рис. 318).

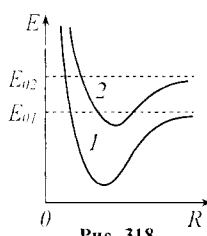


Рис. 318

Зміна електронної конфігурації молекули приводить до зміни кривої залежності електронної енергії від відстані між ядрами R .

В основному зміна енергетичного запасу молекули відбувається внаслідок зміни в електронній конфігурації, що утворює периферійну частину молекули. Однак при заданій електронній конфігурації

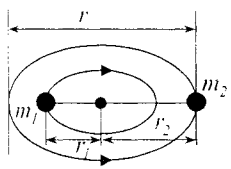


Рис. 319

ядра молекули можуть різним чином коливатися і обертатися навколо загального центра мас (рис. 319). З цих

видами руху зв'язані запаси коливальної і обертальної енергії, які повинні бути враховані в загальному балансі.

Введемо такі позначення:

$E_{ел}$ — енергія, зумовлена електронною конфігурацією (*електронна енергія*);

$E_{кол}$ — енергія, що відповідає коливанням молекули (*коливальна, або вібраційна енергія*);

$E_{об}$ — енергія, зв'язана з обертанням молекули (*обертальна, або ротаційна енергія*).

В першому наближенні рух електронів, коливання і обертання молекули — можна вважати незалежними один від одного. Тому повну енергію молекули можна подати у вигляді

$$E = E_{ел} + E_{кол} + E_{об}.$$

Відношення

$$E_{ел} : E_{кол} : E_{об} = 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M},$$

де m — маса електрона, M — величина порядку маси ядер атомів в молекулі.

$$\frac{m}{M} \approx 10^{-5} \div 10^{-3}.$$

Тому

$$E_{ел} \gg E_{кол} \gg E_{об}.$$

Доведено, що

$$E_{ел} \approx 1 - 10 \text{ eB}, \quad E_{кол} = 10^{-2} - 10^{-4} \text{ eB},$$

$$E_{об} \approx 10^{-5} - 10^{-8} \text{ eB}.$$

За правилом Бора частота ν кванта, який випускає молекула при зміні її енергетичного стану, дорівнює

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\Delta E_{ел}}{h} + \frac{\Delta E_{кол}}{h} + \frac{\Delta E_{об}}{h},$$

де $\Delta E_{ел}$, $\Delta E_{кол}$, $\Delta E_{об}$ — зміни відповідних частин енергії молекули. Оскільки кожний з доданків $\Delta E_{ел}$, $\Delta E_{кол}$, $\Delta E_{об}$ набуває ряду дискретних квантованих значень, то й зміни також дають дискретні значення, тому спектр молекули складається з густо розміщених ліній, які утворюють смуги.

Енергію коливального руху описує вираз

$$E_{кол\nu} = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) h \nu_0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3),$$

де ν — *коливальне квантове число*, яке визначає величину коливального енергетичного рівня;

ν_0 — власна частота коливань ядер атомів відносно положень їх рівноваги і

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

де $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — зведена маса двоатомної молекули, m_1, m_2 — маси атомів у молекулі, а k — силова стала, яка характеризує

квазіпружні сили, які виникають в молекулі при відхиленні ядер від положення рівноваги.

Для коливального квантового числа існує правило відбору $\Delta\nu = \pm 1$, тобто можливі лише переходи між сусідніми рівнями.

Різниця енергій двох послідовних коливальних рівнів дорівнює

$$E_{\text{кол}(\nu+1)} - E_{\text{кол}(\nu)} = h\nu_0.$$

В основному коливальному стані з коливальним квантовим числом $\nu = 0$ молекула має енергію

$$E_{\text{кол}}(0) = \frac{1}{2} h\nu_0.$$

Це означає, що ні при яких умовах ядра в молекулі не можуть знаходитись в стані спокою, вони завжди коливаються з різною амплітудою.

Якщо вважати двоатомну молекулу ідеально твердою, то кінетична енергія $E_{\text{об}}$ обертового руху такої молекули має вигляд

$$E_{\text{об}} = \frac{J\omega_r^2}{2} = \frac{(J\omega_r)^2}{2J} = \frac{L^2}{2J},$$

де ω_r – кутова швидкість, J – момент інерції молекули, обчислений відносно осі, яка перпендикулярна до лінії, що сполучає атоми і проходить через центр інерції молекули і

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m r^2,$$

де m – зведена маса молекули, r_1 і r_2 – відстані від атомів до центра інерції, а $r = r_1 + r_2$ – відстань між ядрами в молекулі.

Момент імпульсу $L = J\omega_r$ молекули може набувати тільки дискретні значення:

$$L = h\sqrt{J(J+1)} \quad (J = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

де J – *обертальне квантове число*, яке визначає обертальний енергетичний рівень.

Отже, обертальна енергія молекули може мати лише квантові значення:

$$E_{\text{об}} = \frac{h^2 J(J+1)}{8\pi^2 J} = B J(J+1),$$

де $B = \frac{h^2}{8\pi^2 J}$ – обертальна стала молекули.

Можливі лише такі переходи між обертальними енергетичними рівнями, які підпорядковані такому правилу відбору за орбітальним квантовим числом:

$$\Delta J = \pm 1,$$

тобто переходи можливі лише між сусідніми обертальними енергетичними рівнями.

Отже, повна енергія молекули дорівнює

$$E = E_{\text{ел}} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 + \frac{h^2 J(J+1)}{8\pi^2 J}.$$

Дослід і теорія показують, що відстані між електронними рівнями ΔE_e значно більша ніж відстані між коливальними рівнями $\Delta E_{\text{кол}}$, які в свою чергу значно більші, ніж відстані між обертальними рівнями $\Delta E_{\text{об}}$. Схема енергетичних рівнів двоатомної молекули виглядає так, як показано на рис. 320.

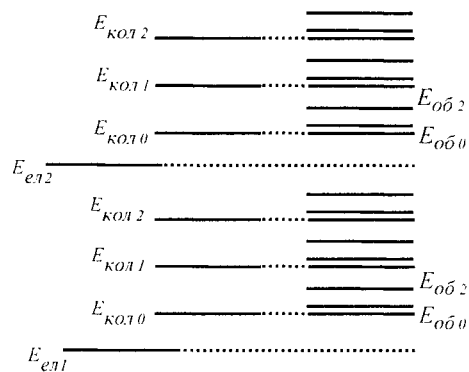


Рис. 320

Для кожного електронного стану є зв'язані з ним коливальні стани, і для коливального рівня є зв'язані з ним обертальні рівні.

Будова молекул і властивості їх енергетичних рівнів проявляються в молекулярних спектрах – спектрах випромінювання (поглинання), що виникають при квантових переходах молекули на різні енергетичні рівні. Спектр випромінювання молекули визначається структурою її енергетичних рівнів і відповідними правилами відбору.

При різних типах переходів між рівнями виникають різні типи молекулярних спектрів. Якщо спостерігати спектр випромінювання-поглинання в тому діапазоні, який відповідає частоті $\nu_{об} = \frac{\Delta E_{об}}{h}$, то тут з'являтимуться тільки переходи між обертальними рівнями. Особливо ефективним інструментом дослідження в далекій інфрачервоній області є спектр поглинання.

Якщо довжина хвилі λ пучка променів настільки велика, що енергії фотонів $h\nu$ не вистачає для переведення молекули з одного обертального рівня на інший, то поглинання не буде. Поступове збільшення частоти падаючих променів приведе до того, що окремі фотони будуть поглинатися молекулами, які переходитимуть при тому на що раз вищі обертальні рівні. В цьому випадку виникає суто **обертальний спектр** поглинання. Він лежить в області мікрохвиль ($\lambda = 0,1 - 1\text{ мм}$) або, інакше, в діапазоні далекого інфрачервоного спектра.

Частоти ліній поглинання при переходах між обертальними рівнями знахо-

дять з виразу

$$\nu = \frac{\Delta E_{об}}{h} = B[(J+1)(J+2) - J(J+1)] = 2B(J+1) = \nu_J(J+1),$$

де J – квантове число рівня, на який здійснюється перехід, а

$$\nu_J = \frac{h^2}{4\pi^2 J}.$$

На рис. 321 показана схема виникнення обертального спектра поглинання, який складається із ряду ліній, що розміщені на однакових відстанях. Вимірявши відстані між лініями $\Delta\nu = \nu_J$, можна визначити сталу B і знайти момент інерції молекули.

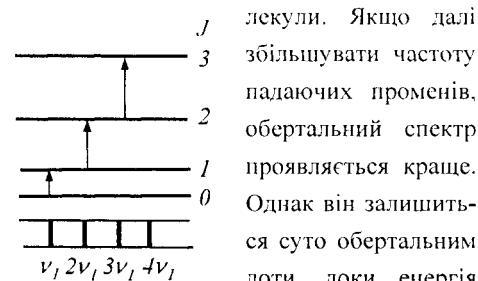


Рис. 321

Якщо далі збільшувати частоту падаючих променів, обертальний спектр проявляється краще. Однак він залишиться суто обертальним доти, доки енергія падаючих квантів не буде настільки велика, що зможе перевести молекули з одного коливального рівня ν на інший ν' . Якщо пройти цю межу, то поглинання фотонів супроводжується зміною як обертальної, так і коливальної енергії молекул.

Енергія поглинутого фотона дорівнюватиме:

$$\nu = \frac{\Delta E_{квл}}{h} + \frac{\Delta E_{об}}{h} = \nu_0 + B[J'(J'+1) - J(J+1)].$$

За правилом відбору $\Delta J = J' - J = \pm 1$.

У випадку $\Delta J = +1$ маємо

$$J = J' + 1 \quad \text{і} \quad \nu = \nu_0 + 2BJ',$$

де $J' = 1, 2, 3, \dots$

У випадку

Для кожного електронного стану ϵ зв'язані з ним коливальні стани, і для коливального рівня ϵ зв'язані з ним обертальні рівні.

Будова молекул і властивості їх енергетичних рівнів проявляються в молекулярних спектрах – спектрах випромінювання (поглинання), що виникають при квантових переходах молекули на різні енергетичні рівні. Спектр випромінювання молекули визначається структурою її енергетичних рівнів і відповідними правилами відбору.

При різних типах переходів між рівнями виникають різні типи молекулярних спектрів. Якщо спостерігати спектр випромінювання-поглинання в тому діапазоні, який відповідає частоті $\nu_{об} = \frac{\Delta E_{об}}{h}$, то тут з'являтимуться тільки переходи між обертальними рівнями. Особливо ефективним інструментом дослідження в далекій інфрачервоній області є спектр поглинання.

Якщо довжина хвилі λ пучка променів настільки велика, що енергії фотонів $h\nu$ не вистачає для переведення молекули з одного обертального рівня на інший, то поглинання не буде. Поступове збільшення частоти падаючих променів приведе до того, що окремі фотони будуть поглинатися молекулами, які переходитимуть при тому на що раз вищі обертальні рівні. В цьому випадку виникає суто **обертальний спектр** поглинання. Він лежить в області мікрохвиль ($\lambda = 0,1-1\text{ мм}$) або, інакше, в діапазоні далекого інфрачервоного спектра.

Частоти ліній поглинання при переходах між обертальними рівнями знахо-

дять з виразу

$$\nu = \frac{\Delta E_{об}}{h} = B[(J+1)(J+2) - J(J+1)] = 2B(J+1) = \nu_J(J+1),$$

де J – квантове число рівня, на який здійснюється перехід, а

$$\nu_J = \frac{h^2}{4\pi^2 J}.$$

На рис. 321 показана схема виникнення обертального спектра поглинання, який складається із ряду ліній, що розміщені на однакових відстанях. Вимірявши відстані між лініями $\Delta\nu = \nu_J$, можна визначити сталу B і знайти момент інерції молекули.

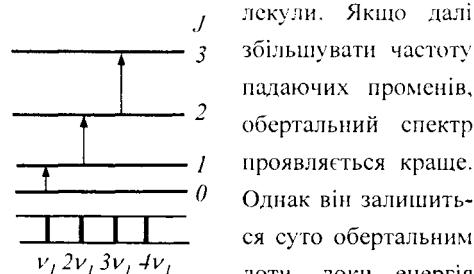


Рис. 321

Якщо далі збільшувати частоту падаючих променів, обертальний спектр проявляється краще. Однак він залишиться суто обертальним доти, доки енергія падаючих квантів не буде настільки велика, що зможе перевести молекулу з одного коливального рівня ν на інший ν' . Якщо пройти цю межу, то поглинання фотонів супроводжується зміною як обертальної, так і коливальної енергії молекул.

Енергія поглинутого фотона дорівнюватиме:

$$\nu = \frac{\Delta E_{кол}}{h} + \frac{\Delta E_{об}}{h} = \nu_0 + B[J'(J'+1) - J(J+1)].$$

За правилом відбору $\Delta J = J' - J = \pm 1$.

У випадку $\Delta J = +1$ маємо

$$J = J' + 1 \quad \text{і} \quad \nu = \nu_0 + 2BJ',$$

де $J' = 1, 2, 3, \dots$

У випадку

$\Delta J = -1 \quad J = J' - 1 \quad \text{і} \quad \nu = \nu_0 - 2B(J' + 1)$,
 де $J' = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 322 наведена схема Туворення коливально-обертального спектра.

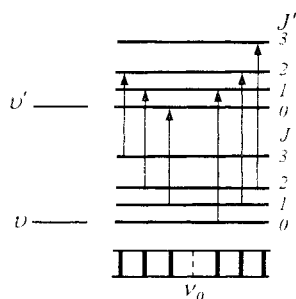


Рис. 322

Коливально – обертальний спектр

лежить в інфрачервоній області ($\lambda \approx 3 - 50 \mu\text{м}$). Переходові між заданою парою коливальних рівнів відповідає велика сукупність комбінацій різних обертальних станів, які дають багато дуже близько розташованих ліній. Так виникає одна смуга. Лінії в смузі розташовані симетрично відносно ν_0 ліній і знаходяться на відстані одна від одної на $\Delta\nu = \nu_J$. Лише в середині смуги відстань в два рази більша, оскільки лінії з частотою ν_0 не виникає, тому що вона відповідає „забороненому” переходу $\Delta J = 0$. Різним парам коливальних рівнів відповідають різні смуги, які у своїй сукупності утворюють коливально-обертальний спектр, що має вигляд групи смуг.

Продовжимо далі збільшувати частоту променів. Досягаючи видимої та ультрафіолетової частини спектра, отримуємо фотони, енергія яких є достатньою для збудження не тільки коливальних та обертальних процесів, але й електронних рівнів. З'являються електронно-коливально-обертальні переходи, при яких змінюються

всі три види енергії молекули. Відповідний спектр називають *електронно-коливально-обертальним* або просто електронним. Переходові між заданою парою електронних рівнів відповідає цілий коливально-обертальний спектр молекули, тобто певна група смуг. Перебираючи всі можливі комбінації електронних рівнів, одержимо повний спектр молекули, тобто набір груп смуг.

Отже, в оптичному діапазоні молекулярні спектри є смугастими – вони складаються з величезного числа ліній, що утворюють ряд дуже густих скупчень смуг.

Структура молекулярних спектрів неоднакова для різних молекул і зі збільшенням числа станів у молекулі ускладнюється.

КОРДИШ ЛЕОН ЙОСИПОВИЧ
 (1872-1932)

Висловив думку про походження смугастих і лінійчастих спектрів, вважаючи, що перші пов'язані з молекулами речовини, а другі – з атомами.

ЛІСИЦЯ МИХАЙЛО ПАВЛОВИЧ
 (нар. 1921 р.)

Встановив температурні залежності інтегральних інтенсивностей коливних смуг поглинання молекулярних газів, рідин і кристалів.

ДАВИДОВ ОЛЕКСАНДР СЕРГІЙОВИЧ
 (1912-1993)

Побудував (1948 р.) теорію поглинання світла молекулярними кристалами, в якій був закладений принципово новий підхід до розуміння спектрів кристалічних тіл. Зв'язав колективне поглинання молекулярного кристалу з екситами Френеля, які вільно поширюються резонансним чином від молекули, захоплюючи в процес поглинання весь колектив молекул кристалу.

§125. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання

Атоми можуть знаходитися лише у квантових станах з дискретними значеннями енергії E_1, E_2, E_3, \dots . Задля простоти розглянемо два з цих станів (n і k) з енергіями E_n і E_k . Якщо атом знаходиться в

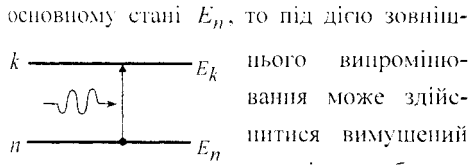


Рис. 323

основному стані E_n , то під дією зовнішнього випромінювання може здійснитися вимушений перехід у збуджений стан k , що приводить до поглинання випромінювання (рис. 323). Ймовірність таких переходів пропорційна до густини енергії випромінювання, що викликає ці переходи.

Дослід показує, що атом в збудженому енергетичному стані сам собою переходить у нормальний, незбуджений стан, випромінюючи фотон.

Таке випромінювання, яке відбувається без зовнішніх причин, що змінюють енергію атома, називають самочинним, або спонтанним випромінюванням.

А. Ейнштейн створив теорію випромінювання, яка базується на законах збереження енергії та імпульсу при взаємодії квантових систем з електромагнітним полем.

Розглянемо спонтанне випромінювання атома за Ейнштейном. Якщо атом у деякий момент часу t перебуває в квантовому стані k і має енергію E_k , то під дією внутрішніх впливів, механізм яких не можна простежити, атом може спонтанно перейти в деякий стан n , що характеризується меншою енергією E_n (рис. 324). Введе-

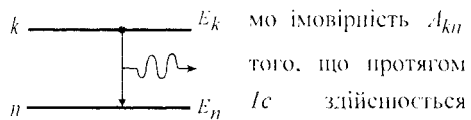


Рис. 324

мо ймовірність A_{kn} того, що протягом 1с здійснюється спонтанний перехід атома зі стану k в стан n . Величина A_{kn} називається коефіцієнтом Ейнштейна для спонтанного випромінювання. Кількість dN_k атомів, що перейшли за проміжок ча-

су від t до $t+dt$ в стан n , пропорційна до ймовірності A_{kn} спонтанного переходу, кількості N_k атомів в стані k в момент часу t і проміжку часу dt :

$$dN_k = -A_{kn}N_k dt.$$

Знак „-“ свідчить про зменшення числа атомів на рівні k . Отже,

$$\int_{N_{k0}}^{N_k} \frac{dN_k}{N_k} = -\int_0^t A_{kn} dt, \quad \ln \frac{N_k}{N_{k0}} = -A_{kn} t.$$

В результаті

$$N_k = N_{k0} e^{-A_{kn} t},$$

де N_{k0} – число атомів на рівні k в момент часу $t = 0$.

Кожний перехід зі стану k в стан n супроводжується випромінюванням спектральної лінії з частотою $h\nu_{kn}$, що визначається правилом частот Бора:

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n.$$

Енергія, яка випускається за час dt , дорівнюватиме

$$dE = h\nu_{kn} |dN_k| = h\nu_{kn} A_{kn} N_k dt.$$

Інтенсивність випромінювання I , тобто енергія, яка випромінюється за одиницю часу, можна визначити так:

$$I = \frac{dE}{dt} = h\nu_{kn} N_{k0} A_{kn} e^{-A_{kn} t} = I_0 e^{-A_{kn} t},$$

де I_0 – початкова інтенсивність випромінювання.

Середньою тривалістю τ_k життя атома у збудженому стані називається час, протягом якого число атомів N_{k0} , які спочатку були на збудженому рівні k , зменшиться в e разів:

$$N_k = \frac{N_{k0}}{e} = N_{k0} e^{-A_{kn} \tau_k}.$$

Звідси

$$A_{kn}\tau_k = 1, \text{ тобто } \tau_k = \frac{1}{A_{kn}}.$$

Отже, коефіцієнт Ейнштейна A_{kn} є величина, обернена до середнього часу життя атома в збудженому стані.

Тоді

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_k}}.$$

Перевірку цього закону і вимірювання часу τ_k було здійснено В.Віном у дослідах зі світінням каналових променів.

Порядок величини $\tau_k \approx 10^{-8} \text{ с}$ є характерним для часу перебування атомів у збудженому стані, після чого вони спонтанно переходять на розміщені нижче енергетичні стани. Скінченність часу життя τ_k атома в збудженому стані призводить до того, що енергію E_k атома в збудженому стані можна визначити лише з деякою невизначеністю ΔE_k , що впливає зі співвідношення невизначеностей Гейзенберга $\Delta E_k \geq \frac{\hbar}{\tau_k}$.

Спонтанні переходи взаємно не зв'язані, тому спонтанне випромінювання некогерентне.

У 1916 р. Ейнштейн для пояснення термодинамічної рівноваги між речовиною і випромінюванням, що випускається і поглинається нею, постулював, що крім поглинання і спонтанного випромінювання повинен існувати третій, якісно інший тип взаємодії. Якщо на атом, що знаходиться у збудженому стані k , діє зовнішнє випромінювання з частотою, що задовольняє умову $h\nu_{kn} = E_k - E_n$, то виникає вимушений перехід в основний стан n з випромінюванням фотона з тією самою енергією $h\nu_{kn}$

(рис. 325). При подібному переході відбувається випромінювання атомом фотона,

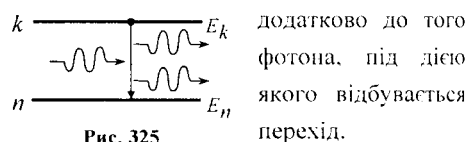


Рис. 325

додатково до того фотона, під дією якого відбувається перехід.

Отже, атом, який перебуває на деякому збудженому енергетичному рівні k , може з деякою ймовірністю перейти під дією поля передчасно в нижчий стан n . Поле ніби „скидає” атом із збудженого рівня „вниз”.

Ймовірність вимушеного випромінювання під дією поля пропорційна до об'ємної густини $\rho(\nu)$ енергії поля і деякому коефіцієнту B_{kn} , який називається коефіцієнтом Ейнштейна для вимушеного (індукованого) випромінювання.

Повсю ймовірність того, що збуджений атом, який перебуває на рівні k , за одиницю часу перейде на нижчий рівень n з випусканням кванта $h\nu_{kn}$ спонтанно або вимушено, можна визначити сумою

$$A_{kn} + B_{kn}\rho(\nu).$$

Число dN'_k атомів, які із загального числа N_k атомів, що перебувають на рівні k , перейдуть у стан n за час dt , можна записати так:

$$dN'_k = [A_{kn} + B_{kn}\rho(\nu)]N_k dt.$$

З іншого боку, взаємодія з електромагнітним полем атомів, що перебувають на рівні n , може привести до того, що атом, поглинаючи квант енергії $h\nu_{nk} = E_n - E_k$, перейде у вищий енергетичний стан k . Ймовірність того, що за одну секунду відбудеться поглинання, за аналогією з попереднім, можна записати так: $B_{nk}\rho(\nu)$, тут B_{nk} – коефіцієнт Ейнштейна

для поглинання світла. Число актів dN'_n збудження атомів за час dt дорівнюватиме:

$$dN'_n = B_{nk}\rho(\nu)N_n dt,$$

де N_n – число атомів на рівні n в момент часу t .

У стані термодинамічної рівноваги речовини і електромагнітного поля повинна бути рівновага між процесами випускання і поглинання світла, тобто рівновага повного числа актів випускання світла і числа актів його поглинання.

Оскільки мова йде про переходи між двома довільно обраними рівнями k і n , то справедлива *детальна рівновага*, для якої можна записати

$$[A_{kn} + B_{kn}\rho(\nu)]N_k = B_{nk}\rho(\nu)N_n.$$

Така рівновага встановлюється в замкненій порожнині, температура T якої підтримується сталою. Рівновага, яка виникає в результаті випромінювання і поглинання електромагнітних хвиль атомами стінки, приводить у такому разі, як показав Ейнштейн, до формули Планка.

Ейнштейн і Дірак показали, що вимушене випромінювання (вторинні фотони) тотожне вимушуючому випромінюванню (первинні фотони) і воно має таку ж частоту, фазу, поляризацію і напрямок поширення, як і вимушуюче випромінювання.

Вторинні фотони, рухаючись в одному напрямку і зустрічаючи інші збуджені атоми, стимулюють наступні індуковані переходи і кількість фотонів зростає лавиноподібно. Однак поряд з вимушеним випромінюванням можливий і конкуруючий процес – поглинання. Тому для підсилення падаючого випромінювання необхідно, щоб кількість актів вимушеного випромінювання фотонів яка пропорційна до засе-

леності збуджених станів, перевищувала число актів поглинання фотонів, що пропорційна до заселеності основних станів.

У системі атомів, що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, падаюче випромінювання при проходженні через речовину буде ослаблятися, тому поглинання падаючого випромінювання буде перевищувати вимушене випромінювання.

Щоб середовище підсилювало падаюче на нього випромінювання, необхідно створити нерівноважний стан системи, при якому кількість атомів у збудженому стані було би більшою, ніж їх кількість в основному стані. Такі стани називаються станами з *інверсною заселеністю*. Створення нерівноважного стану речовини називається *накачуванням*. Накачування можна здійснити оптичним, електричним й іншими способами.

У середовищах, які перебувають в інверсному стані, вимушене випромінювання може перевищувати поглинання, внаслідок чого падаючий пучок світла при проходженні через ці середовища буде підсилюватися.

§126. Оптичні квантові генератори

Практично інверсну заселеність середовища здійснено в *оптичних квантових генераторах* (ОКГ), або *лазерах*. Слово „лазер” скорочено означає підсилення світла за допомогою вимушеного випромінювання. Лазери генерують у видимій, інфрачервоній і ближній ультрафіолетовій областях.

Фізики М. Басов і О. Прохоров і американський вчений Ч. Таунс створили квантові генератори електромагнітних хвиль сантиметрового діапазону – *мазери*. Слово „мазер” – підсилення мікрохвиль за

допомогою індукованого випромінювання.

Залежно від типу активного середовища лазери поділяються на *твердотільні, газові, напівпровідникові і рідинні*.

Класифікують лазери і за методами накачування – *оптичні, теплові, хімічні, електроіонізаційні та ін.*

Лазери обов'язково мають три основні компоненти:

- 1) *активне середовище*, в якому створюється стан з інверсною заселеністю енергетичних рівнів;
- 2) *систему накачування* – пристрій для створення інверсії в активному середовищі;
- 3) *оптичний резонатор* – пристрій, який формує вихідний світловий пучок.

Інверсну заселеність рівнів в ОКГ практично здійснюють за трирівневою схемою, яку запропонували М.Басов і О. Прохоров в 1955 р.

Один з перших ОКГ, що працюють за схемою трьох рівнів з твердим тілом як активним підсилюючим середовищем, був створений у 1960 р. Т. Мейманом. Підсилюючим середовищем у ньому є кристал рубіну, який за хімічним складом є оксидом алюмінію Al_2O_3 з домішкою оксиду хрому Cr_2O_3 у кількості від 0,03 до 0,05%. При цьому в кристалічній ґратці оксиду алюмінію певну частку атомів Al замінено Cr^{3+} . Активною речовиною, в якій здійснюються вимушені переходи, в рубіні є іони Cr^{3+} .

На рис. 326 показана схема енергетичних рівнів іона хрому Cr^{3+} . У ньому над основним рівнем E_1 розміщені дві енергетичні смуги E_3 і E_4 , а між рівнем E_1 і смугою E_3 знаходиться метастабіль-

ний рівень E_2 , який складається з двох енергетичних станів. Накачування в лазері здійснюється потужним спалахом ксенонової лампи. Іони хрому, які до спалаху знаходились на основному рівні E_1 , внаслідок поглинання зеленого або синього світла, яке випромінює ксенонова лампа, переходять у збуджені стани E_3 і E_4 . Час перебування іонів Cr^{3+} у збуджених станах становить $\sim 10^{-8} c$, і вони здійснюють релаксаційний перехід на збуджений рівень E_2 без випромінювання. Рівень E_2 метастабільний, і час життя на ньому становить $\sim 10^{-3} c$, тобто в $\sim 10^5$ разів більший за час перебування іона у звичайному збудженому стані E_3 і E_4 .

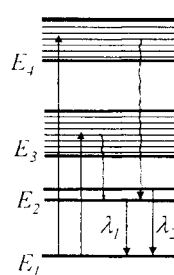


Рис. 326

Отже, заселеність іонами подвійного рівня E_2 перевищує заселеність основного рівня E_1 . При переході іонів хрому з метастабільного стану в основний рубіновий лазер випромінює світло двох хвиль: $\lambda_1 = 0,6929 \mu m$ і $\lambda_2 = 0,6943 \mu m$, що лежать в червоній частині спектра. Більш інтенсивна лінія $\lambda_2 = 0,6943 \mu m$. Тому вона і підсилюється при роботі лазера. Виникненню інверсії рівнів E_3 і E_2 сприяє мала ймовірність спонтанних переходів іонах хрому з рівнів E_3 на рівень E_1 .

Кожний фотон, який випадково народжується при спонтанних переходах, може породжувати в активному середовищі множини вимушених переходів, в результаті чого виникає ціла лавина вторинних фотонів, що є копією первинних. Однак спонтанні переходи мають випадковий

характер, і фотони, що народжуються, спонтанно випромінюються в різних напрямках. Тому в різних напрямках поширюються і лавини вторинних фотонів. Отже, випромінювання, що складається з подібних лавин, не може мати високі когерентні властивості.

Для виділення напрямку лазерної генерації використовується елемент лазера – *оптичний резонатор*. Ним служать пара дзеркал, які встановлені паралельно одне одному. Найчастіше використовують дзеркала угнуті. Принципова схема ОКГ зображена на рис. 327, де 1 – активне середовище, 2 і 3 – суцільне і напівпрозоре дзеркала.

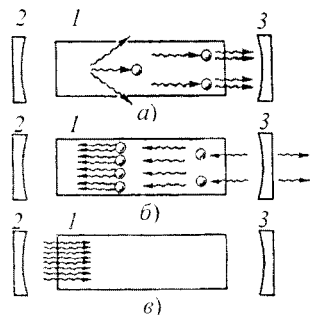


Рис. 327

Розглянемо фотон, який рухається паралельно до осі кристала. Він породжує лавину фотонів, які летять у тому самому напрямку (рис. 327а). Частина цієї лавини частково пройде крізь напівпрозоре дзеркало 3 назовні, а частина відіб'ється і наростатиме в активному середовищі (рис. 327б). Коли лавина електронів дійде до суцільного дзеркала 2, вона частково поглинеться, але після відбивання від дзеркала 2 підсилений потік фотонів знову рухатиметься так само, як і початковий, „затравочний“ фотон (рис. 327в). Потік фотонів, який був багато разів підсилений і вийшов з генератора крізь напівпрозоре

дзеркало, утворює точно напрямлений пучок променів світла.

Довжина шляху, який проходить хвиля між двома відбиваннями, повинна становити ціле число довжин хвиль:

$$2L = n\lambda, \text{ або } L = n\frac{\lambda}{2},$$

де $n=1, 2, \dots$

Якщо виконано цю умову, то хвилі, які при кожному відбиванні виходять з генератора через дзеркало 3, когерентні між собою.

Перший газовий лазер на суміші атомів неону і гелію був створений Джованом в 1960 р. В газових лазерах інверсна заселеність рівнів здійснюється електричним розрядом, що збуджується в газах.

В гелій-неоновому лазері накачування відбувається в два етапи: гелій (*He*) служить носієм енергії збудження, а лазерне випромінювання дає неон (*Ne*). Із всіх рівнів *He*, крім основного E'_1 , для роботи лазера мають значення метастабільні рівні E'_2 і E'_3 з енергіями 19,82 і 20,61 eV відповідно (рис. 328). Спонтанний перехід з цих

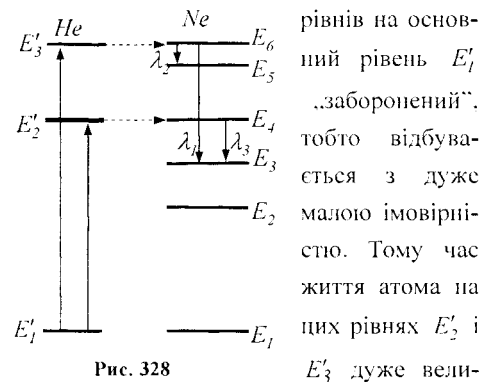


Рис. 328

рівнів на основний рівень E'_1 „заборонений“, тобто відбувається з дуже малою ймовірністю. Тому час життя атома на цих рівнях E'_2 і E'_3 дуже великий. На цих метастабільних рівнях атоми *He* нагромаджуються в результаті зіткнень з електронами, що утворюються в розряді. Але рівні гелію E'_2 і E'_3 майже збігаються

з рівнями E_4 і E_6 неону (рис. 328). Завдяки цьому при зіткненнях збуджених атомів гелію з незбудженими атомами неону інтенсивно відбуваються безвипромінювальні переходи атомів гелію у незбуджений стан з передачею енергії атомам неону. Цей процес збудження атомів Ne на рис. 328 символічно показаний горизонтальними пунктирними стрілками. В результаті концентрація атомів Ne на рівнях E_4 і E_6 сильно зростає, і виникає інверсна заселеність відносно рівнів E_3 і E_5 , а різниця заселеності рівнів E_6 і E_3 збільшується в декілька разів. Перехід атомів неону з рівня E_6 на рівень E_3 супроводжується генерацією червоного світла з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,6328 \text{ мкм}$. Цей лазер може генерувати й інфрачервоне випромінювання з довжинами хвиль $\lambda_2 = 3,390 \text{ мкм}$ і $\lambda_3 = 1,150 \text{ мкм}$.

Принципова схема гелій-неонового лазера наведена на рис. 329.

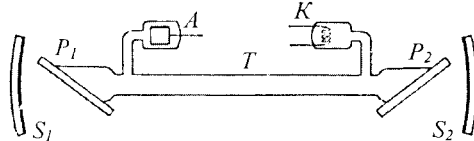


Рис. 329

Лазер складається з газорозрядної трубки T діаметром $7\text{--}10 \text{ мм}$. Трубка заповнена сумішшю гелію (тиск $\sim 1 \text{ мм рт.ст.}$) і неону (тиск $\sim 0,1 \text{ мм рт.ст.}$). Кінці трубки закриті плоскостежними скляними або кварцовими пластинами P_1 і P_2 , які встановлені під кутом Брюстера до її осі. Це створює лінійну поляризацію лазерного випромінювання з електричним вектором, який паралельний до площини падіння. Дзеркала S_1 і S_2 , між якими розміщена

трубка, сферичні з багат шаровими діелектричними покриттями. Вони мають високі коефіцієнти відбивання і практично не поглинають світла. Пропускна здатність дзеркала, через яке виходить випромінювання лазера, становить 2% , а другого – менше 1% . Між електродами трубки прикладається постійна напруга $1\text{--}2 \text{ кВ}$. Розрядний струм в трубці становить декілька десятків міліампер.

Лазерне випромінювання характеризується такими властивостями:

- високою часовою і просторовою когерентністю;
- строгою монохроматичністю ($\Delta\lambda \sim 10^{-11} \text{ м}$);
- великою густиною потоку випромінювання;
- дуже малим кутовим розходженням в пучку.

Незвичайні властивості лазерного випромінювання мають широке застосування. ОГК можна з великою ефективністю використовувати для зв'язку, локації. Випромінюванням ОГК можна пробивати найдрібніші отвори в найтвердіших речовинах, зварювати мікродеталі, використовувати механічну обробку, впливати на хід хімічних реакцій. Застосування лазерів значно підвищило точність виміральної техніки.

БРОДІНІ МІХАЙЛО СЕМЕНОВИЧ
(нар. 1931 р.)

Створив вперше лазери на ряді змішаних напівпровідників, які дали змогу забезпечити частотне перенастроювання генерацій у всій видимій і ближній ультрафіолетовій ділянках спектра. Показав, що основним каналом їх лазерної генерації є екситонні переходи.

ШПАК МАРАТ ТЕРЕНТІЙОВИЧ
(1926-1993)

На основі проведених досліджень розробив і виготовив декілька типів нових лазерів. На речинах поліметинових барвників створив лазер з самосинхронізацією мод, який генерує в області

7100-10000 Å імпульси пікосекундної тривалості. Вперше створив лазери на рідких кристалах, що активовані барвниками, частотою випромінювання яких можна керувати зміною температури, а також удосконалений лазер на розчинах органічних барвників із розподіленням зворотнім зв'язком.

СОСКІН МАРАТ САМУІЛОВИЧ
(нар. 1929 р.)

Створив (1967 р.) світ-лазери, які перестроювались у процесі генерації, розвинув методи лазерної спектроскопії активних лазерних середовищ, зокрема, неодимового скла.

Дослідив та розробив лазери на барвниках, створив високоефективні дисперсні елементи, нові схеми резонаторів лазерів.

БІЛІЙ МИХАЙЛО УЛЬЯНОВИЧ
(1922-2001)

Вперше запропонував оптимальні умови створення досить ефективних квантових генераторів на розчинах електролітів.

Досліджував процеси нелінійної взаємодії інтенсивного лазерного випромінювання з активними середовищами.

§127. Комбінаційне розсіяння світла

Крім процесів випромінювання та вбирання світла атомними системами, зокрема молекулами, існує ще одне явище, яке відіграє важливу роль у вивченні будови молекул.

Це так зване *комбінаційне розсіяння*, яке полягає у зміні спектрального складу світла при його розсіянні в речовині.

У твердих тілах воно було вивчено Л. Мандельштамом і Г. Ландсбергом, в рідинах – Раманом.

Схема досліду для спостереження комбінаційного розсіяння зображена на рис. 330.

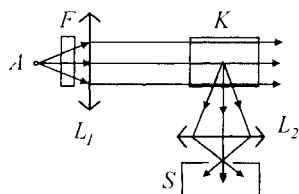


Рис. 330

Джерелом світла служить ртутна лампа А, спектр якої містить декілька ін-

тенсивних ліній. За допомогою фільтра F із спектра виділяється одна лінія з частотою ν_0 . Світло, яке пройшло через фільтр, спрямовується за допомогою лінзи L_1 на кристал K . Промені, які розсіяні в напрямку, перпендикулярному до напрямку первинного пучка за допомогою лінзи L_2 , спрямовуються на щілину спектрографа S .

Наведемо отримані таким шляхом експериментальні дані:

1). Розсіяне світло вже не є монохроматичним – в його спектрі, крім інтенсивної лінії з незмінною частотою ν_0 присутні ще декілька більш слабких ліній („супутників“ або „сателітів“), які розміщені з обох сторін основної лінії (рис. 331).

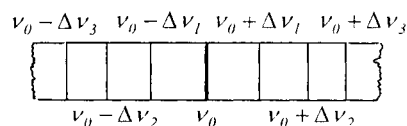


Рис. 331

Їх частоти можна записати у вигляді $\nu'_i = \nu_0 - \Delta \nu_i$, $\nu''_i = \nu_0 + \Delta \nu_i$. Супутники з частотами, меншими від ν_0 , називають *червоними*, або *стоксівськими*, а з частотами, більшими від ν_0 , – *фіолетовими*, або *антистоксівськими*.

2). Розміщення супутників відносно ліній з частотою ν_0 є характерним для даної речовини, що розсіює світло, і не залежить від частоти ν_0 . Кількість різних супутників залежить від речовини, що розсіює світло.

3). Величини зміщень супутників $\Delta \nu_i$ збігаються, як правило, з частотами інфрачервоних коливальних ліній в спектрах випромінювання та поглинання речовини, з якої виготовлений розсіювач. Частоти ліній супутників виражаються комбінація-

ми початкової частоти ν_0 з власними коливальними частотами молекул розсіювача. Звідси походить термін „комбінаційне розсіяння”.

4). Інтенсивність фіолетових супутників є меншою від інтенсивності червоних. При підвищенні температури розсіювача інтенсивність фіолетових супутників зростає, тоді як для червоних вона залишається практично сталою. Інтенсивність супутників зменшується при збільшенні $\Delta\nu_i$.

5). Лінії комбінаційного розсіяння більш чи менш поляризовані. Характер поляризації червоних і фіолетових супутників, що відповідають даному значенню $\Delta\nu_i$, завжди однаковий і не залежить від частоти основної лінії.

Повне пояснення закономірності комбінаційного розсіяння дає квантова теорія. Нехай квант світла з енергією $h\nu_0$ падає на речовину, молекули якої можуть бути в різних коливальних енергетичних станах з енергією $E_{ji} = E_{el1} + E_{kol1}$. У квантовій теорії випромінювання комбінаційне розсіювання світла розглядається як двоетапний процес. Спочатку поглинається падаючий фотон $h\nu_0$, а потім випромінюється фотон за рахунок взаємодії електронних шарів молекули з полем світлової хвилі.

Якщо квант падаючого світла $h\nu_0$ досить великий (видима або ультрафіолетова область спектра), то молекула, яка перебувала у незбудженому стані з енергією $E_{10} = E_{el1} + E_{kol0}$, поглинувши цей квант, може перейти у збуджений електронний стан. Через 10^{-8} с збуджена молекула може перейти в основний стан з

енергією E_{10} і при цьому випромінюється фотон тієї самої частоти ν_0 (рис. 332а).

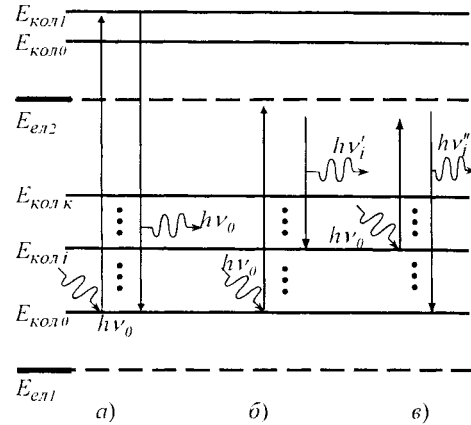


Рис. 332

Можливий випадок, коли молекула, що перебувала у незбудженому стаціонарному стані, поглинувши фотон з енергією $h\nu_0$, через проміжний (нестационарний, віртуальний) електронний стан, випромінює квант $h\nu'_i$ і переходить на i -й коливальний рівень (рис. 332б). За законом збереження енергії

$$h\nu_0 + E_{el1} + E_{kol0} = h\nu'_i + E_{el1} + E_{kol1}.$$

Звідси

$$\nu'_i = \nu_0 - \frac{E_{kol1} - E_{kol0}}{h} = \nu_0 - \Delta\nu_i.$$

Так виникають червоні супутники.

Поява фіолетових супутників з квантового погляду пояснюється можливістю того, що молекула, яка перебуває в одному із збуджених коливальних станів з енергією $E_{ji} = E_{el1} + E_{kol1}$, під дією фотона з енергією $h\nu_0$ перейде у стан з енергією $E_{ji} + h\nu_0$. При переході в основний стан з енергією E_{10} молекула випромінює фотон з енергією $h\nu''_i$ (рис. 332в). За законом збереження енергії

$$h\nu_0 + E_{ел1} + E_{кол1} = h\nu_i'' + E_{ел1} + E_{кол0}.$$

Тоді

$$\nu_i'' = \nu_0 + \frac{E_{кол1} - E_{кол0}}{h} = \nu_0 + \Delta\nu_j.$$

Інтенсивність супутників визначається кількістю відповідних актів взаємодії фотонів з молекулами розсіювача. При кімнатній температурі більшість молекул перебувають в нормальному стані і тільки невелика частина – в збуджених станах. Тому зіткнення фотонів із збудженими молекулами є значно рідшим явищем, ніж з молекулами в нормальному стані. Відповідно, кількість переходів, що супроводжуються збільшенням частоти фотонів, є в багато разів меншою від кількості процесів із зменшенням частоти. Звідси випливає, в згоді з експериментом, що інтенсивність фіолетових супутників повинна бути значно меншою від інтенсивності червоних компонент комбінаційного розсіяння.

При підвищенні температури розсіювача збільшується кількість молекул, що перебувають в збуджених станах. Разом з тим повинно зростати число актів розсіяння, при яких частота фотонів збільшується. Отже, інтенсивність фіолетових супутників зростає з підвищенням температури. У комбінаційному розсіянні світла

можуть брати участь не тільки коливальні рівні молекул, але й обертальні та електронно-обертальні рівні, переходи між якими характеризуються мінімальними значеннями енергії, так що відповідні лінії комбінаційного спектра розташовуються дуже близько до початкової лінії. Якщо комбінаційне розсіяння виникає при зміні і коливальних, і обертальних рівнів, то замість описаного вище лінійчастого спектра спостерігаються смуги комбінаційного розсіяння.

КОПІЛЕНКО ІВАН ІВАНОВИЧ

(нар. 1919 р.)

Вперше (кінець 50-х років) почав вивчати інтенсивність ліній комбінаційного розсіяння залежно від умов їх збудження і фізичного стану середовища. Для кількісної оцінки інтенсивностей розробив нові джерела світла, зокрема, сконструював і виготовив кільцеві ртутні лампи низького тиску. Розробив метод абсолютного енергетичного виходу ліній комбінаційного розсіяння. Вперше отримав лінію розсіяння в максимальній смугі електронного поглинання і в більш короткохвильовій частині спектра.

ЛУБЧЕНКО АНДРІЙ ФЕДОРОВИЧ

(1921-1977)

Розвинув теорію комбінаційного розсіяння світла домішковими центрами твердого тіла.

СТАСЮК ІГОР ВАСИЛЬОВИЧ

(нар. 1938 р.)

Розглянув деякі аспекти комбінаційного розсіяння світла, які пов'язані з так званим конфігураційним розщепленням у фононному спектрі.

ІХ. ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА ТА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

§128. Розмір, склад і заряд ядра. Масове і зарядове число

Досліджуючи проходження α -частинок з енергією декілька MeV крізь тонкі пластинки золота, Е. Резерфорд зробив висновок про те, що атом складається з позитивно зарядженого ядра і електронів, які його оточують. Розмір ядра $\sim 10^{-14} - 10^{-15} m$, а розмір атома $\approx 10^{-10} m$.

Атомне ядро складається з елементарних частинок протонів і нейтронів. Протон (p) має позитивний заряд, що дорівнює заряду електрона, масу спокою $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1836 m_e$, спіні $s = \frac{1}{2}$ і власний магнітний момент $p_{mp} = +2,79 \mu_j$,

де $\mu_j = \frac{eh}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – ядерний

магнетон. Нейтрон (n)-нейтральна частинка з масою спокою $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1839 m_e$, спіном $s = \frac{1}{2}$ і власним магнітним моментом $p_{mp} = -1,91 \mu_j$. **Протони і нейтрони називають нуклонами** (від латинського *nucleus* – ядро). Загальна кількість нуклонів в ядрі називається **масовим числом** A . До складу ядра входять Z протонів та N нейтронів, тому $A = Z + N$.

Атом з певним числом протонів і нейтронів в складі ядра називається **нуклідом**. Нуклід з ядром в основному стані позначають ${}^A_Z X$, де X – символ хімічного елемента з порядковим номером Z .

Атомне ядро характеризується зарядом Ze , де e – заряд протона, Z – **зарядове число** ядра.

Зарядове число Z характеризує од-

ночасно:

- число протонів в ядрі,
- число електронів в електрично нейтральному атомі.
- порядковий номер елемента в періодичній системі Менделєєва.

Нині відомі і вивчені близько 1800 ядер природних і штучних елементів, які відрізняються або Z , або A , або Z і A .

Ядра ${}^{A_1}_{Z_1} X_1, {}^{A_2}_{Z_2} X_2, {}^{A_3}_{Z_3} X_3, \dots$ при певних значеннях Z, A і N утворюють деякі групи:

ізотопи: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots;$

$A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq \dots; \quad N_1 \neq N_2 \neq N_3 \neq \dots;$

$| {}^1_1 H, {}^2_1 H, {}^3_1 H | {}^{16}_8 O, {}^{17}_8 O, {}^{18}_8 O |$

$| {}^{28}_{14} Si, {}^{29}_{14} Si, {}^{30}_{14} Si, {}^{32}_{14} Si |$

ізобари: $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \neq \dots;$

$A_1 = A_2 = A_3 = \dots; \quad N_1 \neq N_2 \neq N_3 \neq \dots;$

$| {}^{10}_4 Be, {}^{10}_5 Be, {}^{10}_6 Be | {}^{16}_8 O, {}^{16}_7 N | {}^{40}_{18} Ar, {}^{40}_{20} Ca |$

ізотопи: $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \neq \dots;$

$A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq \dots; \quad N_1 = N_2 = N_3 = \dots;$

$| {}^{14}_6 C, {}^{15}_7 N, {}^{16}_8 O | {}^{44}_{20} Ca, {}^{46}_{22} Ti |$

дзеркальні ряди: $Z_1 = N_2; \quad Z_2 = N_1;$

$A_1 = A_2; \quad | {}^3_1 H, {}^3_2 He | {}^{11}_5 B, {}^{11}_6 C | {}^{13}_6 C, {}^{13}_7 N |$

ізомери: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots;$

$A_1 = A_2 = A_3 = \dots; \quad N_1 = N_2 = N_3 = \dots;$

різні періоди піврозпаду

$T_{1/2}({}^{80}_{35} Br) = 18 \text{ хв}, \quad T_{1/2}({}^{80}_{35} Br) = 4,1 \text{ год}.$

Радіус ядра визначається емпіричною формулою:

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}, \quad \text{де } R_0 = (1,3 \div 1,7) \cdot 10^{-15} m.$$

Радіус ядра, враховуючи його розмітність, визначається в певних межах. 3

формули видно, що радіус ядра пропорційний до кількості нуклонів. Отже, густина ядерної речовини є приблизно однакова для всіх ядер $\left(\approx 10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$.

Прилади високої роздільної здатності дозволили виявити надтонку структуру спектральних ліній ядерного випромінювання. Існування такої структури було пояснено наявністю у ядер власного моменту імпульсу (спіну) та відповідно магнітного моменту.

Власний момент імпульсу ядра – спін ядра – складається із спінів нуклонів та орбітальних моментів імпульсу нуклонів. Обидві ці величини є векторними, тому спін є їх векторною сумою. Спін ядра квантується за законом: $L_{\text{я}} = \hbar \sqrt{I(I+1)}$, I – спінове ядерне квантове число (або спін ядра), яке набуває цілі або напівцілі значення $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Ядра з парним значенням A мають цілий спін, ядра з непарним – напівцілий спін.

Атомне ядро, крім спіна, має магнітний момент $\vec{p}_{\text{ня}}$. Магнітний момент зв'язаний зі спіном співвідношенням

$$\vec{p}_{\text{ня}} = g_{\text{я}} \vec{L}_{\text{я}}$$

де $g_{\text{я}}$ – коефіцієнт пропорційності, який називається **ядерним гіромагнітним відношенням**.

Оскільки ядерний магнетон в 1836 разів менший, ніж магнетон Бора, то магнітні властивості атома, переважно, визначаються магнітними властивостями електронів.

Протони і нейтрони розміщуються таким чином, що їх спіни і магнітні моменти взаємно компенсуються. Відмінні від

нуля спіни існують лише у ядер які складають з непарної кількості протонів або нейтронів.

Атомне ядро є квантово-механічною системою, яка має значну кількість різних квантових станів. Квантові стани характеризуються енергетичними рівнями ядра, які можуть набувати лише дискретні значення $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. Таку систему певних енергетичних рівнів називають енергетичним спектром ядра (рис. 333). Якщо на ядро не діють зовнішні сили, то

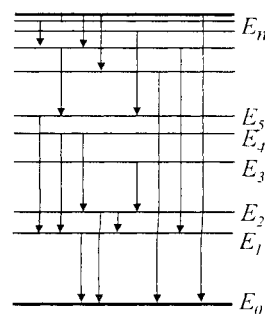


Рис. 333

воно знаходиться в основному стані – на найнижчому енергетичному рівні E_0 , який приймають за початок відліку ($E_0 = 0$). Вертикальні стрілки на рис. 333, напрямлені зверху вниз, показують переходи між енергетичними рівнями з випромінюванням γ – квантів.

Якщо ядро отримує певну порцію енергії, воно переходить у збуджений стан на вищій енергетичний рівень. Середній час життя ядра у збудженому стані дорівнює $\tau = 10^{-14} \div 10^{-13} \text{ с}$. Після перебування у збудженому стані ядро переходить на один із рівнів, з меншою енергією або зразу в основний стан, випромінюючи один γ – квант або послідовно декілька γ – квантів.

Чим більше нуклонів у складі ядра і чим вища енергія збудження, тим менша середня відстань між рівнями.

Маса і енергія є важливими харак-

теристиками атомного ядра, зміна яких визначає характер перебігу будь-яких ядерних процесів. Застосування законів збереження маси і енергії дозволяє проводити розрахунок ядерних взаємодій.

Масу атомів і ядер в ядерній фізиці виражають в атомних одиницях маси (а.о.м.). За атомну одиницю маси приймається $\frac{1}{12}$ частини маси атома вуглецю ^{12}C .

$1 \text{ а.о.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Згідно із співвідношенням Ейнштейна $E = mc^2$ масу атомів визначають також в одиницях енергії: $1 \text{ а.о.м.} = 931,50 \text{ MeV}$.

ІВАНЕНКО ДМИТРО ДМИТРОВИЧ
(нар. 1904 р.)

Сформулював в 1932 р. гіпотезу про протонно-нейтронну будову ядра, розглядаючи нейтрон як елементарну частинку.

Почав разом із С.М. Гапоном вивчення оболонок протонів і нейтронів в ядрах

ГАМОВ ДЖОРДЖ (ГЕОРГІЙ АНТОНОВИЧ)
(1904-1968)

Сформулював уявлення про рівні енергії в ядрі та показав, що більш ефективнішими „ядерними снарядами” є протони.

ВАЛЬТЕР АНТОН КАРЛОВИЧ
(1905-1965)

Провів цикл досліджень розмірів і форми ядер методом розсіяння електронів.

КЛЮЧАРЬОВ ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ
(нар. 1910 р.)

Вперше вивчив (1959 р.) ізометрію атомних ядер в мілісекундній області, отримав більше 20 нових ізомерних ядер і встановив закономірності їх розпаду, виявив більш складні ізомерні стани – трьох і чотирьохчастинкові.

Відкрив (1962 р.) ізобар-аналогові стани і резонанси в області середньотяжких ядер (ідентифіковано 27 ізобар-аналогових станів в ядрах з непарним $A \leq 41$).

Визначив (1969 р.) квантові характеристики рівнів ряду ядер, більшість з яких отримано вперше.

АФАНАСЬЄВ МИКОЛА ГРИГОРОВИЧ

Провів в 1962-65 рр. дослідження з розсіяння атомними ядрами електронів. Показав, що для всіх середніх і тяжких ядер, починаючи з ^{28}Si середньоквадратичні зарядові радіуси ядер пропорційні $Z^{1/3}$, а не $A^{1/3}$, як передбачалось раніше ($R_s = r_0(2Z)^{1/3}$), а крива залежності середньоквадратичного радіуса від Z або A не є монотонною, а є осцилюючою, що відображає оболонкову структуру ядер.

ЛАЗАРСВ БОРИС ГЕОРГІЙОВИЧ
(1906-2001)

Розробив низькотемпературний метод розділення ізотопів гелію, який дав змогу добувати ^3_2He із суміші ізотопів гелію.

ДАВИДОВ ОЛЕКСАНДР СЕРГІЙОВИЧ
(1912-1993)

Праці Давидова з теорії ядра справили великий вплив на уявлення про форму ядер та види колективних рухів в них. Сформулював і розвинув основні положення моделі жорсткого неаксіального ротатора, яка дала можливість пояснити багато закономірностей у спектрах низьких збуджень великої групи несферичних ядер.

§129. Дефект маси і енергія зв'язку ядра

Атомні ядра є стійкими утвореннями. Це означає, що в ядрі між нуклонами існують сили притягання, які забезпечують зв'язки між нуклонами.

Мас-спектрометричні дослідження показали, що маса ядра менша, ніж сума мас нуклонів, з яких воно складається.

Зменшення маси нуклонів викликає перехідом їх із вільного стану у зв'язаний стан в атомному ядрі. Виникнення зв'язаного стану нуклонів відбувається під дією ядерних сил притягання. Як тільки нуклони виявляються в області дії ядерних сил, вони швидко починають зближатися і набувають великої кінетичної енергії. При переході нуклонів у зв'язаний стан (утворення ядра) вони потрапляють в потенціальну яму з мінімальними для даного ядра значеннями енергії спокою E_0 . На рис. 334 наведена залежність потенціальної енергії (а) протона і нейтрона (б) від відстані від ядра.

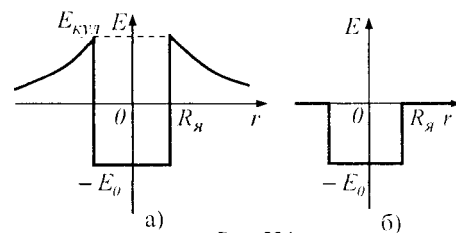


Рис. 334

Отримана раніше нуклонами кінетична енергія виділяється у вигляді γ -квантів або переходить до інших частинок.

Енергію $E_{зв}$, яка виділяється при утворенні ядра, називають енергією зв'язку ядра.

Із закону збереження енергії випливає і зворотний висновок: для розділення ядра необхідно затратити таку саму кількість енергії, яка виділяється при його утворенні.

Зменшення енергії спокою нуклонів при переході їх у зв'язаний стан (утворення ядра) і виділення її у вигляді енергії зв'язку $E_{зв}$ супроводжується відповідно до закону Ейнштейна $\Delta E = \Delta m c^2$ зменшенням сумарної маси спокою нуклонів.

Це приводить до *дефекту маси ядра*, що дорівнює різниці між масою нуклонів, що утворюють ядро, і масою ядра:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{я}$$

де m_p , m_n , $m_{я}$ – маси протона, нейтрона, ядра, відповідно.

Оскільки в таблицях наводять масу атомів, а не ядер, то Δm виражають через масу атома:

$$\Delta m = Zm_{iH} + (A - Z)m_n - m_{ат}$$

де $m_{iH} = m_p + m_e$, $m_{ат} = m_{я} + Zm_e$.

m_{iH} – маса атома водню, m_e – маса електрона.

Отже, стійкість ядра як сукупність нуклонів у зв'язаному стані, підтримується відносним зменшенням енергії системи на

$$E_{зв} = \Delta m c^2.$$

Дефект маси служить мірою енергії зв'язку ядра.

Переважно розглядають і викорис-

тують *питому енергію зв'язку* – енергію зв'язку $\delta E_{зв}$, що припадає на один нуклон.

Питома енергія зв'язку залежить від масового числа і характеризує стійкість атомних ядер. Чим більша питома енергія зв'язку, тим стійкіше атомне ядро. Залежність питомої енергії зв'язку від масового числа наведена на рис. 335.

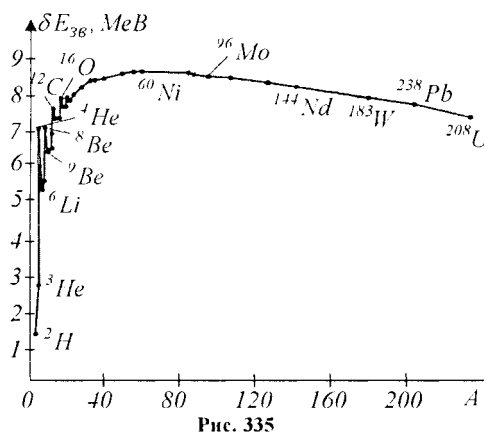


Рис. 335

В області невеликих масових чисел питома енергія зв'язку виявляє характерні гострі „піки“ – максимуми і мінімуми. Мінімуми для енергії зв'язку на один нуклон спостерігаються в області ядер з непарними кількостями протонів і нейтронів – ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$. Максимуми питомої енергії зв'язку відповідають ядрам з парними числами протонів і нейтронів – ${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$. Найбільші значення питомої енергії зв'язку мають парно-парні ядра, тобто ядра з парною кількістю протонів Z і парною кількістю нейтронів $N=A-Z$. Найменшу енергію зв'язку на один нуклон мають непарно-непарні ядра. Проміжні значення питомої енергії зв'язку мають парно-непарні і непарно-парні ядра.

Питома енергія зв'язку $\delta E_{зв}$ різко зростає для легких елементів від 1MeV до

~6-7MeV (з різкими стрибками для деяких елементів), потім повільно збільшується до 8,7 MeV (елементи з $A=50-60$) і повільно зменшується (до 7,6 MeV у ${}^{238}_{92}\text{U}$) для важких елементів.

Ядра елементів в середній частині таблиці Менделєєва ($28 < A < 138$) від ${}^{28}_{14}\text{Si}$ до ${}^{138}_{56}\text{Ba}$ найбільш стійкі, в цих ядрах $\delta E_{36} \sim 8,7 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}$. Найстійкішими виявились так звані „магічні ядра“, у яких кількість протонів або нейтронів дорівнює одному з „магічних чисел“: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Особливо стійкі двічі „магічні“ ядра, в яких „магічним“ є і кількість протонів і кількість нейтронів. Таких ядер лише п'ять – ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

Зменшення питомої енергії зв'язку у важких атомних ядер пояснюється тим, що при зростанні числа протонів у ядрі збільшується й енергія їх кулонівського відштовхування. Тому зв'язок між нуклонами стає слабшим, а ядра менш міцними.

Отже, важкі і легкі ядра менш стійкі. Це означає, що енергетично вигідні такі процеси:

- 1) поділ важких ядер на більш легкі;
- 2) злиття легких ядер у важчі (синтез).

Під час обох процесів виділяється величезна кількість енергії. Ці процеси були здійснені практично.

Крім енергії зв'язку ядра відносно всіх нуклонів, які входять у ядро, можна ввести у розгляд енергію зв'язку ядра відносно яких-небудь складових частин. В деяких випадках енергія зв'язку ядра, розрахована відносно яких-небудь його складових частин, стає особливо малою. Це спос-

терігається у легких ядер відносно вільноту з них нейтрона. Так, енергія зв'язку ${}^9_4\text{Be}$ відносно до його розпаду на нейтрон і ${}^8_4\text{Be}$ дорівнює приблизно 2MeV, хоча енергія зв'язку ядра ${}^9_4\text{Be}$ відносно всіх дев'яти нуклонів, які входять в ядро, дорівнює

$$E_{36}({}^9_4\text{Be}) \cong 5,8 \text{ MeV}.$$

Ядра важких елементів, наприклад, урану, мають дуже велику енергію зв'язку відносно всіх нуклонів, але якщо для ${}^{238}_{92}\text{U}$ обчислити значення енергії зв'язку відносно ${}^4_2\text{He}$ і ${}^{234}_{90}\text{Th}$, то отримуємо від'ємну величину

$$E_{36}({}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He} | {}^{238}_{92}\text{U}) = -4,25 \text{ MeV}.$$

Це означає, що ядро урану є нестійкою системою відносно до розпаду на ядро ${}^4_2\text{He}$ і ${}^{234}_{90}\text{Th}$.

Енергія зв'язку ${}^{238}_{92}\text{U}$ відносно ядер ${}^4_2\text{He}$ і ${}^{234}_{90}\text{Th}$ має фізичний сенс енергії, яку треба затратити на відокремлення α -частинки від ядра урану. Тому її можна назвати *енергією відокремлення* або енергією зв'язку α -частинки в ядрі урану.

Відповідно фізичний сенс енергії зв'язку (енергії відокремлення) нейтрона такий: це енергія, яку треба надати ядру, щоб відокремити від нього нейтрон.

§130. Взаємодія нуклонів і поняття про властивості і природу ядерних сил

До складу атомного ядра входить Z протонів і A-Z нейтронів. Незважаючи на те, що між протонами діють сили кулонівського відштовхування, атомні ядра є досить стійкими системами. Це вказує на те, що в ядрах атомів діють специфічні сили

притягання, які називають **ядерними силами**. Ядерні сили не можуть бути зведені ні до кулонівських, ні до молекулярних, ні до магнітних, ні до гравітаційних сил.

Основні властивості ядерних сил:

1. Ядерні сили є силами притягання.
2. Ядерні сили **досить значні**, тому таку взаємодію називають **сильною**. Енергія зв'язку, що припадає на один нуклон у ядрі, досягає 7-8,5 MeV. Сили взаємодії ядра з електронами атома забезпечують енергію зв'язку від десятків до тисяч електрон-вольт, а сили зв'язку між атомами в молекулах забезпечують енергію зв'язку в кілька електрон-вольт.
3. Ядерні сили є **короткодійними** на відміну від електромагнітних і гравітаційних сил. Радіус дії ядерних сил приблизно дорівнює розміру нуклона (10^{-15} м). При $r > 10^{-14}$ м ядерні сили практично дорівнюють нулю.
4. Ядерні сили мають **властивість зарядової незалежності**, тобто величина ядерних сил не залежить від електричного заряду взаємодіючих нуклонів. Ядерні взаємодії між двома протонами або між двома нейтронами, або між протоном і нейтроном однакові.
5. Ядерні сили мають **властивість насичення**, тобто кожен нуклон в ядрі взаємодіє лише з обмеженою кількістю найближчих до нього нуклонів. Насичення проявляється в тому, що питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі при збільшенні числа нуклонів не зростає, а залишається приблизно сталою (якщо не враховувати легкі ядра).

Властивості насичення ядерних сил приводять до такого важливого висновку: взаємодія між нуклонами не зводиться тільки до сил притягання. На відстанях

між нуклонами $r < 0,5 \cdot 10^{-15}$ м притягання між ними переходить у відштовхування. За відсутності у ядрі сили відштовхування між нуклонами ядра повинні б колапсувати, тобто стискатись у точку.

6. Ядерні сили залежать від **орієнтації спінів нуклонів**, які взаємодіють. Система з протона і нейтрона утворює ядро-дейтрон лише у випадку, коли спіни протона і нейтрона паралельні. Якщо ж спіни протилежно напрямлені, то нейтрон і протон ядра не утворюють.

7. Величина ядерних сил також **залежить від взаємної орієнтації спіна та орбітального моменту кожного нуклона**.

8. Ядерні сили **не є центральними силами**, тобто силами, які можна уявити такими, що діють вздовж лінії, яка з'єднує центри взаємодіючих нуклонів.

Для пояснення властивостей ядерних сил – насичення і короткодії – В. Гейзенберг висунув гіпотезу про те, що ядерні сили є „обмінні сили”, тобто що ядерні сили між двома нуклонами забезпечуються третьою частинкою.

Довжина хвилі $\lambda_{o.ч.}$ обмінної частинки повинна відповідати радіусу R_j дії ядерних сил. Виходячи із формули де Бройля

$$\lambda_{o.ч.} = \frac{h}{m_{o.ч.}c} = R_j,$$

можна оцінити масу обмінної частинки:

$$m_{o.ч.} \cong \frac{h}{R_j c}.$$

Ця маса повинна у 300 разів перевищувати масу електрона.

У 1935 р. японський фізик Х.Юкава висунув гіпотезу про те, що ядерні сили зумовлені невідомою на той час частинкою, маса якої становить 200-300 мас елек-

трона. Оскільки ці гіпотетичні частинки за величиною маси займали проміжне місце між масою електрона і протона, то їх назвали мезонами („мезос” - грецьке слово – середній). Такі частинки дійсно було виявлено у 1947 році в космічному випромінюванні.

Виявилось, що існує три типи π -мезонів: π^+ , π^- , π^0 . Заряди π^+ і π^- за абсолютною величиною дорівнюють заряду електрона, маса зарядженого мезона $m_{\pi^\pm} = 273 m_e$, маса π^0 -мезона $m_{\pi^0} = 264 m_e$. Спін π -мезонів дорівнює нулю.

Ядерну взаємодію двох нуклонів, що знаходяться на відстані радіуса дії ядерних сил, можна представити у такий спосіб. Один нуклон випускає π -мезон, а другий нуклон його поглинає упродовж 10^{-23} с (час прольоту частинки з швидкістю світла відстані між нуклонами – ядерний час). Частинки, які існують лише в області дії ядерних сил протягом ядерного часу, називаються *віртуальними*.

Розглянемо обмінну взаємодію між нуклонами. В результаті віртуальних процесів

$$\begin{aligned} p &\Leftrightarrow n + \pi^+, \\ n &\Leftrightarrow p + \pi^-, \\ p &\Leftrightarrow p + \pi^0, n \Leftrightarrow n + \pi^0 \end{aligned}$$

нуклон виявляється оточеним хмарою віртуальних π -мезонів, які утворюють поле ядерних сил. Поглинання цих мезонів іншим нуклоном приводить до сильної взаємодії між нуклонами, яка здійснюється за однією із таких схем:

$$1) \quad p + n \Leftrightarrow n + \pi^+ + n \Leftrightarrow n + p.$$

Протон випускає віртуальний π^+ -мезон і перетворюється в нейтрон. Мезон

поглинається нейтроном, який внаслідок цього перетворюється у протон. Потім такий процес відбувається у зворотному напрямку. Кожний із взаємодіючих нуклонів частину часу проводить в зарядженому стані, а частину в нейтральному.

$$2) \quad n + p \Leftrightarrow p + \pi^- + p \Leftrightarrow p + n.$$

Нейтрон і протон обмінюються π^- -мезонами.

$$\begin{aligned} 3) \quad p + p &\Leftrightarrow p + \pi^0 + p \Leftrightarrow p + p, \\ n + n &\Leftrightarrow n + \pi^0 + n \Leftrightarrow n + n. \end{aligned}$$

Два протони або два нуклони обмінюються нейтральними π^0 -мезонами.

Перша із цих трьох схем обміну π -мезонами нуклонів експериментально підтверджується при вивченні розсіяння нейтронів на протонах.

Безперечно, процес взаємодії між нуклонами значно складніший і наведені схеми є не що інше, як намагання унаочнити дії обмінних сил. Обмінні сили – це суто квантово-механічні поняття.

Складний характер ядерних сил і значні труднощі, що виникають при розв'язанні рівнянь руху всіх нуклонів у ядрі, є причиною того, що донині не створена єдина послідовна теорія атомного ядра. Тому сьогодні користуються наближеними ядерними моделями, які досить добре описують лише деякі властивості ядра при використанні порівняно простого математичного апарату. З багатьох моделей, кожна з яких описує лише певні властивості ядра, згідно з експериментальними даними, найбільш використовувані дві: краплинна та оболонкова.

Краплинна модель ядра

(1936 р., Н. Бор, Я. Френкель) є першою моделлю. Вона ґрунтується на аналогії між

поведінкою нуклонів у ядрі та молекул в краплині рідини. В обох випадках сили, що діють між складовими частинами короткодіючі та мають властивість насичення. Рідина має сталу густину, ядерна речовина також характеризується сталою густиною, незалежною від числа нуклонів у ядрі. Об'єм краплини, як і об'єм ядра, пропорційний до числа частинок, що в них знаходяться.

При отриманні певної енергії краплина ядерної рідини переходить у збуджений стан. Отримана енергія в результаті зіткнень нуклонів швидко перерозподіляється між ними. Проте можуть виникнути такі умови, коли отримана енергія концентрується на поверхневому нуклоні або групі нуклонів. Якщо ця енергія більша від енергії зв'язку частинки в ядрі, частинка може подолати поверхневі сили ядерного притягання і вийти з ядра. Такий процес аналогічний випаровуванню молекули з поверхні краплини рідини.

Істотна відмінність ядра від краплини рідини в цій моделі в тому, що вона трактує ядро як краплину електрично зарядженої нестискуваної рідини (з такою самою густиною, як ядерна), яка підлягає законам квантової механіки. Краплинна модель ядра дозволила отримати напівемпіричну формулу для енергії зв'язку нуклонів у ядрі, пояснила механізм реакцій поділу ядер. Однак не змогла пояснити, наприклад, підвищену стійкість ядер, які містять магічні числа протонів і нейтронів.

Оболонкова модель ядра

(1949-50 р., німецький фізик Х. Йенсен, американський фізик М. Гепперт-Майєр) базується на припущенні, що нуклони в ядрі розташовуються на дискретних рівнях (оболонках), заповнюючи їх згідно з прин-

ципом Паулі. Стійкість ядер залежить від ступеня заповнення таких оболонок. Вважається, що ядра з повністю заповненими оболонками найбільш стійкі. Дослідами підтверджено існування найбільш стійких (магічних) ядер. Оболонкова модель ядра дозволила пояснити спіни і магнітні моменти ядер, різну стійкість атомних ядер, періодичність зміни їх властивостей. Нові експериментальні дані про властивості атомних ядер, які появились в результаті подальших досліджень, виходили за рамки обох теорій. Так виникла узагальнена модель (синтез краплинної і оболонкової) – **оптична модель ядра** (пояснює взаємодію ядер з елементарними частинками і та ін.).

ІСМЕЦ ОЛЕГ ФЕДОРОВИЧ

(нар. 1922 р.)

Визначив ступінь спінової залежності ядерних сил.

КЛЮЧАРЬОВ ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ

(нар. 1910 р.)

При вивченні розсіяння повільних протонів ядрами (1957-1964 рр.) виявив немонотонну залежність радіуса ядерних взаємодій від масового числа.

ІВАНЕНКО ДМИТРО ДМИТРОВИЧ

(нар. 1904 р.)

Показав в 1934 р. разом з І.С. Таммом можливість взаємодії через частинки, що мають масу спокою і заклав основи першої польової феноменологічної теорії парних (електронно-нейтринних) ядерних сил.

ІСМЕЦ ОЛЕГ ФЕДОРОВИЧ

(нар. 1922 р.)

Експериментально обґрунтував оптичну модель ядра для складних частинок.

§131. Радіоактивність. Основний закон радіоактивного перетворення атомних ядер

Радіоактивністю називають само-вільне (спонтанне) перетворення ядер нестійких ізотопів одних елементів у ядра ізотопів інших елементів, що зумовлено внутрішніми причинами та супроводжується α -, β -, γ -випромінюванням, а також інших частинок (нейтронів, протонів).

До радіоактивних процесів належать:

1. α - розпад;
2. β - розпад;
3. γ - випромінювання;
4. спонтанний поділ тяжких ядер;
5. протонна радіоактивність.

Радіоактивність, яка спостерігається в ядрах, що існують у природних умовах, називається *природною*. Радіоактивність ядер, які отримані за допомогою ядерних реакцій, називається *штучною*. Між природною та штучною радіоактивністю немає принципової різниці.

Природні радіоактивні перетворення ядер, які відбуваються самочинно, називаються *радіоактивним розпадом*. Ядро, що виникло внаслідок розпаду, називають *дочірнім* ядром, а ядро, яке розпалося, – *материнським*.

Теорія, яка пояснює це явище, ґрунтується на припущенні, що радіоактивний розпад є спонтанним процесом.

Численні дослідження показали, що на швидкість радіоактивного розпаду не впливають ніякі зовнішні зміни температури, тиску, наявності електричних і магнітних полів, вид хімічної сполуки, її агрегатний стан. З цього випливає, що радіоактивний процес відбувається в глибинних частинах атома, тобто в його ядрі. Радіоактивний розпад – це властивість самого атомного ядра, і залежить вона тільки від його внутрішнього стану.

Внаслідок самочинності цього процесу природно припустити, що число ядер $[dN]$, які розпадаються за інтервал часу від t до $t+dt$, пропорційне до проміжку часу dt і кількості N наявних ядер, які ще не розпалися на момент часу t :

$$-dN = \lambda N dt.$$

Тут λ – стала величина, яку називають *сталою розпаду, або радіоактивною сталою*. Знак „-“ вказує на те, що загальна кількість радіоактивних ядер під час розпаду зменшується ($dN < 0$):

$$\text{Стала розпаду } \lambda = -\frac{dN}{N dt} \text{ дорівнює}$$

відносному зменшенню кількості ядер, які зазнають розпаду, за одиницю часу. Стала λ визначає швидкість радіоактивного розпаду.

Розділивши в рівнянні $dN = -\lambda N dt$ змінні, та проінтегрувавши, отримуємо:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt; \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Звідси:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Цей вираз виражає *закон радіоактивного розпаду*, згідно з яким кількість атомів, які не розпалися, зменшується за експонентою. У цій формулі N_0 – початкова кількість ядер, які не розпалися в момент часу $t=0$, N – кількість ядер, які не розпалися в момент часу t .

Кількість ядер, які розпалися за час t , визначається виразом

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

На рис. 336 зображено залежність

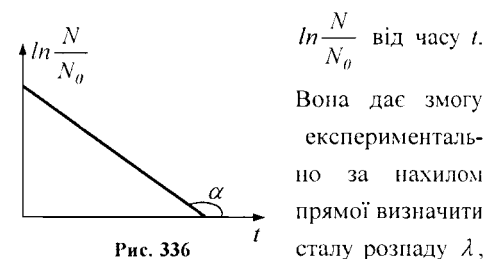


Рис. 336

тому що $\tan \alpha = \lambda$.

Знайдемо середній час життя радіо-

активного ядра. Кількість ядер $|dN(t)|$, що розпалися за проміжок часу від t до $t+dt$, визначається модулем виразу

$$|dN(t)| = \lambda N(t) dt.$$

Час життя кожного з цих ядер дорівнює t . Отже, суму життів всіх N_0 ядер, що були спочатку, одержують інтегруванням виразу $t dN(t)$. Поділивши цю суму на число ядер N_0 , одержимо середній час життя τ радіоактивного ядра:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t |dN(t)| = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N(t) dt = \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Стала розпаду λ є оберненою величиною середнього часу життя τ певного радіоактивного елементу. Тому

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де τ – це час, за який кількість ядер при радіоактивному розпаді зменшиться в e разів.

Для характеристики стійкості ядер відносно розпаду, для оцінки тривалості життя певного радіоактивного ізотопу вводять поняття про період піврозпаду $T_{1/2}$.

Періодом піврозпаду називається час, протягом якого початкова кількість ядер певної речовини розпадається наполовину.

З визначення $T_{1/2}$ випливає, що

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \quad e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}.$$

Звідси отримуємо:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693 \tau.$$

Періоди піврозпаду різних природних ізотопів досить відрізняються один від

одного. Так, $T = 4,51 \cdot 10^9$ років для ${}^{238}_{92}\text{U}$ і $T_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7}$ с для ${}^{212}_{84}\text{Po}$.

На рис. 337 наведені графіки кривих розпаду при різних значеннях λ .

Кількість атомів, що розпадається за одну секунду, називається активністю елементу.

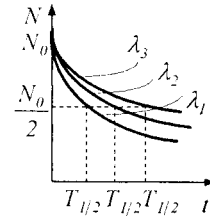


Рис. 337

Активність A визначається такими формулами:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N \ln 2}{T}.$$

Отже, активність обернено пропорційна до періоду піврозпаду і зменшується з часом за експоненціальним законом.

За одиницю активності препарату беруть один розпад за секунду – беккерель (Бк). Часто користуються позасистемною одиницею, яку називають кюрі (Ки):

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

Якщо відбувається ланцюжок радіоактивних перетворень, то закон розпаду дає змогу робити висновок лише про зменшення з часом материнської речовини. Якщо ж дочірня речовина також радіоактивна, то одночасно відбувається і нагромадження цієї речовини і її зменшення внаслідок розпаду. За час dt розпадеться $\lambda_M N_M dt$ ядер атомів материнської речовини із загальної кількості N_M цих ядер, що були на момент часу t . Якщо з кожного ядра материнської речовини утворюється одне ядро дочірньої, то за час dt кількість ядер дочірньої речовини збільшиться на $\lambda_M N_M dt$. Водночас з кількості ядер N_D дочірньої речовини, що були на момент часу t , за проміжок dt розпадеться $\lambda_D N_D dt$.

Загальна зміна dN_∂ кількості ядер дочірньої речовини за одиницю часу дорівнюватиме:

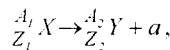
$$\frac{dN_\partial}{dt} = \lambda_M N_M - \lambda_\partial N_\partial.$$

У випадку рухомої рівноваги між материнською і дочірньою речовинами $\frac{dN_\partial}{dt} = 0$ і $\lambda_M N_M = \lambda_\partial N_\partial$ – умова радіоактивної рівноваги: Звідси

$$\frac{N_M}{N_\partial} = \frac{\lambda_\partial}{\lambda_M} = \frac{T_{1/2M}}{T_{1/2\partial}}.$$

Числа атомів обох речовин прямо пропорційні до періодів їх піврозпадів.

Радіоактивний розпад записують у вигляді рівняння



де ${}_{Z_1}^{A_1}X$ – материнське радіоактивне ядро,

${}_{Z_2}^{A_2}Y$ – дочірнє ядро (продукт розпаду),

a – частинка, яка випускається.

При радіоактивному розпаді справджується **закон збереження енергії**, згідно з яким повна енергія материнського ядра дорівнює повній енергії продуктів розпаду:

$$m_X c^2 = (m_Y + m_a) c^2 + E_p,$$

де E_p – повна енергія розпаду, яка дорівнює зміні енергії спокою материнського ядра, що перетворюється в кінетичну енергію дочірнього ядра, вилітаючої частинки і γ -квантів.

При радіоактивному розпаді ядер виконується **закон збереження зарядових чисел**:

$$Z_Y = \sum_i Z_i,$$

де Z_Y – зарядове число ядра, яке зазнало

розпаду, Z_i – зарядові числа ядер і частинок, що виникли внаслідок розпаду.

Крім того, виконується **правило збереження масових чисел**:

$$A_Y = \sum_i A_i.$$

Ці співвідношення при радіоактивному розпаді формулюють у вигляді правил зміщення, які дають змогу встановити, яке ядро виникає внаслідок розпаду певного материнського ядра. При цьому розрізняють правила зміщення для випадків можливого α - або β -розпаду:

при α -розпаді: ${}_{Z}^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4He$,

при β -розпаді: ${}_{Z}^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_{-1}^0e$.

Ядро, яке зазнало α -розпаду, зміщується на два місця лівіше в періодичній системі елементів, а його масове число зменшується на 4 одиниці. При β -розпаді позитивний заряд ядра збільшується на одну одиницю і ядро зміщується на одне місце правіше в періодичній системі. При цьому масове число ядра не змінюється.

Ядра, які виникають внаслідок радіоактивного розпаду, також можуть бути радіоактивними. Послідовність такого процесу приводить до виникнення ланцюжка радіоактивних перетворень, який закінчується стабільним елементом. Сукупність елементів, яка утворює такий ланцюжок, називається радіоактивним сімейством.

Сімейства називають за найбільш довгоживучим „родоначальником”: сімейство торію (${}_{90}^{232}Th$), нептунію (${}_{93}^{237}Np$), урану (${}_{92}^{238}U$) і актинію (${}_{89}^{235}Ac$). Кінцевими продуктами такого розпаду відповідно є: ${}_{82}^{208}Pb$, ${}_{83}^{209}Bi$, ${}_{82}^{206}Pb$, ${}_{82}^{207}Pb$, тобто єдине сімейство нептунію (штучно радіоактивного

ядра) закінчується нуклідом Bi , всі інші (природно - радіоактивні ядра) – нуклідами Pb .

ПІЛЬЧИКОВ МИКОЛА ДМИТРОВИЧ
(1857-1908)

Провів перші в Україні дослідження з радіоактивності.

§132. Закономірності радіоактивного випромінювання атомних ядер

Альфа - розпад

α - розпадом називається випускання ядрами деяких хімічних елементів α - частинок.

Альфа-випромінювання відхиляється електричними і магнітними полями, має високу іонізуючу здатність і малу проникну здатність (поглинається шаром алюмінію завтовшки $\sim 0,05$ мм). α - випромінювання – це потік іонізованих атомів гелію. Заряд α - частинки дорівнює $+2e$, а маса рівна масі ядра ізотопа гелію 4_2He .

Відомо більше ніж дві сотні α - активних ядер, в основному важких елементів $A > 200, Z > 82$. Лише невелика група α - активних ядер знаходиться в області з масовими числами $A=140-160$ (рідкісноземельні).

Всередині важких ядер утворюються α - частинки, кожна з яких складається з двох протонів і двох нейтронів. Відокремленню цих чотирьох нуклонів сприяє властивість насичення ядерних сил. Можливість α - розпаду викликана тим, що маса материнського ядра m_M більша від суми мас дочірнього ядра m_D і α - частинки.

$$\Delta m = m_M - (m_D + m_\alpha).$$

Отже, при α - розпаді виділяється енергія

$$E_\alpha = \Delta mc^2.$$

Енергія α - розпаду ($4-9$ MeV) ви-

діляється у вигляді кінетичної енергії продуктів розпаду: α - частинки і дочірнього ядра. Кінетична енергія між ними розподіляється обернено пропорційно до їх маси, тому практично всю енергію розпаду отримує α - частинка.

В ядрі α - частинок немає, вони утворюються з чотирьох нуклонів лише в момент α - розпаду.

Здійсненню α - розпаду перешкоджає значний кулонівський потенціальний бар'єр E_K ($25-30$ MeV), який виник при утворенні ядра. Значення E_K в декілька разів перевищує різницю енергій E_α між початковим і кінцевими станами системи при α - розпаді (рис 338).

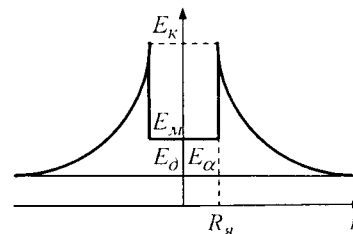


Рис. 338

α - частинка вилітає з ядра, проходячи крізь заборонену зону, завдяки тунельному ефекту, який характеризується певною прозорістю потенціального бар'єра.

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_\alpha |U(x) - E|} dx \right].$$

Ця формула свідчить про велику чутливість прозорості бар'єра до найменших змін енергії α - частинки, що перебуває всередині потенціальної ями. Навіть незначні зміни в значеннях E приводять до того, що величина D буде дуже змінюватись. Цим пояснюються великі відмінності в періодах піврозпаду α - випромінювачів – від 10^9 років до 10^{-7} с при

порівняно невеликому зростанні енергії α -частинок ($4-9 \text{ MeV}$).

Знайдемо зв'язок між сталою розпаду λ і прозорістю D потенціального бар'єру для α -частинки. Зради спрощення замінимо реальний бар'єр прямокутним бар'єром довжиною L . В цьому випадку

$$\lambda = nD,$$

де n – число ударів α -частинок об стінку бар'єра за одиницю часу і $n = \frac{v}{2L}$, де

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}$$
 – швидкість α -частинки в ядрі.

Величина $L=R$, де R – радіус ядра. Тоді у випадку прямокутного бар'єра дістанемо

$$\begin{aligned} \lambda &= n \cdot \exp\left\{-\frac{2}{h}\sqrt{2m_\alpha(U_0 - E)}L\right\} = \\ &= \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \exp\left\{-\frac{2}{h}\sqrt{2m_\alpha(U_0 - E)}R\right\}. \end{aligned}$$

Ця формула свідчить про існування залежності між сталою розпаду і початковою енергією α -частинки.

Дослідження кривих питомої іонізації, яку здійснюють α -частинки в різних газах, показало, що залежність кількості α -частинок N від довжини відрізків

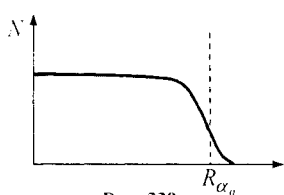


Рис. 339

шляху R , які ці частинки проходять у певній речовині, зображується кривою, поданою на рис. 339. До деякого значення R_{α_0}

кількість частинок залишається майже сталою. Потім кількість частинок, які пройшли шлях $R_\alpha > R_{\alpha_0}$, швидко спадає. Довжини пробігів α -частинок мало відрізняються від деякої величини R_0 , що є експериментальним значенням пробігу α -

частинок. Проходячи через речовину, α -частинка витрачає свою енергію на непружні зіткнення з атомами, переважно на їх іонізацію. Очевидно, що довжина пробігу α -частинки повинна залежати від її початкової енергії. Дослідним шляхом Гейгер знайшов емпіричну формулу, яка пов'язує початкову швидкість v α -частинки з її пробігом R_α у повітрі при 0°C :

$$R_\alpha = bv^3, \quad b = 9,7 \cdot 10^{-28} \frac{\text{c}^3}{\text{m}^2},$$

де b – деяка стала.

Г. Гейгер і Дж. Неттол на підставі аналізу численних дослідів установили співвідношення, яке називають **законом Гейгера-Неттола**:

чим менший період піророзпаду $T_{1/2}$ або більша стала розпаду λ радіоактивного елементу, тим більший пробіг α -частинок, які він випускає.

Закон Гейгера-Неттола записують формулою

$$\ln R = A' \ln \lambda + B' \quad \text{або} \quad \ln \lambda = A + B \ln R_\alpha,$$

A, B, A', B' – емпіричні константи.

Дослідження показують, що здебільшого ядра випромінюють не одну, а кілька груп α -частинок, енергії яких утворюють дискретний спектр. Його називають тонкою структурою α -спектра. На рис. 340 показано схематичне пояснення викинення різних груп α -частинок, що випромінюються при розпаді ядра ${}_{83}^{212}\text{Bi}$. Зліва на рисунку наведено енергетичні рівні дочірнього ядра ${}_{81}^{208}\text{Tl}$.

У збуджених станах дочірнє ядро знаходиться доволі малий проміжок часу ($10^{-8} - 10^{-12} \text{ c}$) і переходить у стани з меншою енергією або в основний стан. При

цьому відбувається випромінювання фотонів. На рис. 340 показано виникнення γ -фотонів шести різних енергій.

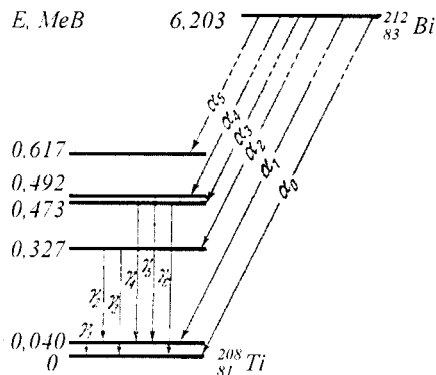


Рис. 340

Бета - розпад

β - розпадом називається процес самочинного перетворення нестабільного ядра в ядро-ізобар із зарядом, який відмінний на $\Delta Z = \pm 1$, за рахунок випускання електрона (позитрона) або захоплення електрона.

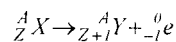
Період піврозпаду β - радіоактивних ядер змінюється від $\approx 10^{-2}$ с до $2 \cdot 10^{15}$ років. Енергія β - розпаду знаходиться в межах від 18 KeV (для ${}^3_1\text{H}$) до 16,6 MeV (для ${}^{14}_7\text{N}$).

β - випромінювання відхиляється електричними і магнітними полями; його іонізуюча здатність значно менша (приблизно на два порядки), а проникна здатність значно більша (поглинається шаром алюмінію 2 мм), ніж у α - частинок. β - випромінювання – це потік швидких електронів.

Терміном β - розпад називають три типи ядерних перетворень: електронний β^- - розпад, позитронний β^+ - розпад, а також електронне захоплення (e^- або K^-

захоплення).

Явище електронного β^- - розпаду відбувається за правилом зміщення



і супроводжується випромінюванням електрона. Електрони, що випромінюються в процесі β^- - розпаду, мають широкий спектр енергій від нуля до деякого максимального значення (рис. 341).

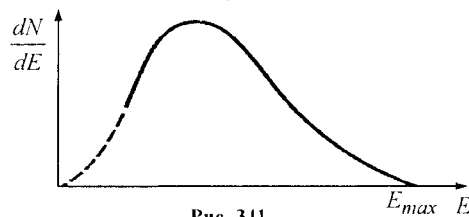


Рис. 341

При β^- розпаді кількість нуклонів в ядрі не змінюється. Однак, якщо з ядра випромінюється електрон, який має спин $\frac{1}{2}$, то спин ядра повинен змінитися на $\frac{1}{2}$. Таке неузгодження спіну ядра до і після розпаду, а також наявність суцільного енергетичного спектра випромінюваних електронів привели В. Паулі до гіпотези (1931 р.) про те, що при β^- - розпаді разом з електроном випускається ще одна нейтральна частинка – нейтрино. Нейтрино має нульовий заряд, спин $\frac{1}{2}$ і нульову масу спокою. Нейтрино позначають ${}^0_0 \nu_e$.

Проте виявилось, що при β^- - розпаді випускається не нейтрино, а антинейтрино, (античастинка за відношенням до нейтрино, яка позначається ${}^0_0 \bar{\nu}_e$).

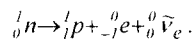
Гіпотеза про існування нейтрино дала змогу Е. Фермі створити теорію β^- - розпаду (1934), а через 20 років (1956 р.)

нейтрино було виявлено експериментально. Такі довгі пошуки нейтрино пов'язані з відсутністю у цієї частинки заряду та маси спокою, а також тим, що іонізуюча здатність нейтрино надзвичайно мала (один акт іонізації припадає на пробіг 500 км в повітрі), а проникна здатність – дуже висока (пробіг нейтрино з енергією 1 MeV в свинцю порядку 10^{18} м).

Для експериментального виявлення нейтрино використовували метод, який ґрунтується на тому, що в ядерних реакціях виконується закон збереження імпульсу.

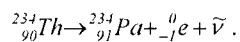
Введення нейтрино дозволило пояснити не лише збереження спіна ядра, а й неперервність енергетичного спектра випромінюваних електронів. Суцільний спектр β^- -частинок зумовлений розподілом енергії між електронами і антинейтрино, причому сума енергій обох частинок становить E_{max} .

Оскільки при β^- -розпаді кількість нуклонів в ядрі не змінюється, а Z збільшується на одиницю, то єдиний шлях, яким може відбуватись цей процес, це перетворення одного з нейтронів ядра в протон з одночасним утворенням електрона і антинейтрино:



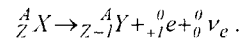
Цей процес супроводжується виконанням законів збереження електричних зарядів, імпульсу і масових чисел.

Прикладом β^- -розпаду може бути така реакція:

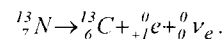


Явище β^+ -розпаду характерне лише для штучно радіоактивних ядер і було

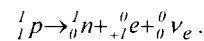
вперше виявлено Фредериком та Ірен Жоліо-Кюрі при бомбардуванні різних ядер α -частинками. Цей вид радіоактивного розпаду відбувається за таким правилом зміщення:



Прикладом β^+ -розпаду може бути така реакція перетворення азоту ${}_{7}^{13}\text{N}$ у вуглець ${}_{6}^{13}\text{C}$:



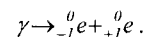
Процес β^+ -розпаду проходить за такою схемою: один з протонів ядра перетворюється у нейтрон, випромінюючи при цьому позитрон і нейтрино:



Оскільки маса спокою протона менша, ніж маса спокою нейтрона, то для вільного протона реакція відбуватися не може. Однак для протона, який знаходиться в ядрі, внаслідок ядерної взаємодії частинок, ця реакція є енергетично можливою.

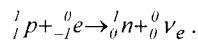
Позитрон - ${}_0^0e$ – частинка з масою спокою, яка точно дорівнює масі спокою електрона, спіном $\frac{1}{2}$, і яка має додатний електричний заряд $+e$.

Позитрони можуть народжуватись при взаємодії γ -квантів великих енергій ($E_\gamma > 1,02\text{MeV} = 2m_e c^2$) з речовиною. Цей процес відбувається за схемою

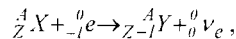


Для багатьох ядер перетворення протона в нейтрон, крім описаного вище процесу, може відбуватись через електронне захоплення, або e^- захоплення, при якому ядро спонтанно захоплює електрон з однієї із внутрішніх оболонок атома, ви-

пускаючи нейтрино:

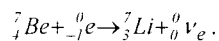


Необхідність появи нейтрино випливає із закону збереження спіна. Схема e -захоплення:



тобто один з протонів ядра перетворюється у нейтрон, заряд ядра зменшується на одиницю і воно зміщується вліво, так само, як і при позитронному розпаді.

Електронне захоплення супроводжується характеристичним рентгеновським випромінюванням, що виникає при заповненні вакансій, які утворюються в електронній оболонці атома. При e -захопленні, крім нейтрино, ніякі інші частинки не випромінюються. Прикладом електронного захоплення може служити перетворення радіоактивного ядра берилію у стабільне ядро літію:



Гамма-випромінювання і його властивості.

γ -випромінювання не відхиляється електричними і магнітними полями, володіє відносно слабкою іонізуючою і надзвичайно великою проникаючою здатністю (проходить крізь шар свинцю завтовшки 5 см), дифрагує на кристалах. γ -випромінювання – це короткохвильове електромагнітне випромінювання з дуже малою довжиною хвилі $\lambda < 10^{-10}$ м і внаслідок цього – яскраво вираженими корпускулярними властивостями.

Експериментально встановлено, що γ -випромінювання не є самостійним видом радіоактивності, а лише супроводжує α - та β -розпади; виникає також під час ядерних реакцій, гальмування заряджених

частинок, їх розпаду та ін. Встановлено, що γ -випромінювання не викликає зміни заряду і масового числа ядер, воно випускається дочірнім ядром, яке в момент свого утворення перебуває у збудженому стані.

Повертаючись в основний стан, збуджене ядро може пройти через ряд проміжних станів, тому γ -випромінювання одного і того самого радіоактивного ізотопу може містити кілька груп γ -квантів, що відрізняються одна від одної своєю енергією. Отже, спектр γ -випромінювання дискретний.

Ядро, яке знаходиться у збудженому стані, може передати енергію E при переході в основний стан одному з електронів атома (без випускання γ -кванта). При цьому випромінюється електрон конверсії, а саме явище називається внутрішньою конверсією. Якщо енергія збудженого ядра виділяється у вигляді γ -кванта, то його частота визначається з $\varepsilon = h\nu$. Якщо випромінюються електрони конверсії, то їх енергія буде $E - A_K$, $E - A_L$, ..., де A_K , A_L - робота виходу електронів з відповідних електронних оболонок. Вакансії місця, що виникли внаслідок випромінювання електронів конверсії, будуть заповнюватись електронами з верхніх оболонок. Тому внутрішня конверсія завжди супроводжується характеристичним рентгеновським випромінюванням.

γ -кванти мають нульову масу спокою, тому під час проходження крізь речовину вони або поглинаються, або розсіюються речовиною, але їх енергія не змінюється. Внаслідок поглинання інтенсивність γ -випромінювання зменшується за екс-

поненціальним законом: $I = I_0 e^{-\mu x}$, де I_0 та I - інтенсивність γ - випромінювання на вході і виході речовини завтовшки x . μ - лінійний коефіцієнт поглинання, який залежить від властивостей речовини та енергії γ - квантів.

γ - кванти, проходячи через речовину, можуть взаємодіяти як з електронами атомів речовини, так із їх ядрами.

Основними процесами, які супроводжують проходження γ - квантів крізь речовину, є фотоэффект, комптонівське розсіювання і утворення електрон-позитронних пар.

Фотоэффект – це процес, при якому атом поглинає γ - квант і випромінює електрон. Оскільки електрони вибиваються з внутрішніх оболонок атома, він супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням. Фотоэффект відбувається в області малих енергій γ - квантів ($E_\gamma \leq 100 \text{ keV}$).

Зі збільшенням енергії γ - квантів ($E_\gamma \sim 0,5 \text{ MeV}$) основним механізмом взаємодії з речовиною є **комтонівське розсіювання**.

При $E_\gamma > 1,02 \text{ MeV} = 2m_e c^2$ стає можливим процес утворення електронно-позитронних пар в електричних полях ядер. Ймовірність цього процесу пропорційна до Z^2 і збільшується з ростом E_γ . Тому при $E_\gamma = 10 \text{ MeV}$ основним процесом взаємодії γ - випромінювання в довільній речовині є утворення електрон-позитронних пар.

Якщо енергія γ - кванта перевищує енергію зв'язку нуклонів у ядрі

($\sim 7-8 \text{ MeV}$), то може спостерігатись **ядерний фотоэффект** – виривання з ядра одного з нуклонів, найчастіше нейтрона. Велика проникна здатність γ - випромінювання використовується в γ - дефектоскопії – методі спектроскопії, який ґрунтується на відмінності в інтенсивності випромінювання, що пройшло різні ділянки речовини.

Дія γ - випромінювання (а також інших видів іонізуючого випромінювання) на речовину характеризується дозою іонізуючого випромінювання. Розрізняють такі одиниці випромінювання:

Поглинута доза випромінювання – фізична величина, що дорівнює відношенню енергії поглинутого випромінювання до маси опромінованої речовини. Одиниця поглинутої дози випромінювання – грей (Гр): $1 \text{ Гр} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ – доза випромінювання, при якій опромінованій речовині масою 1 кг передається енергія довільного іонізуючого випромінювання 1 Дж .

Експозиційна доза випромінювання – фізична величина, що дорівнює відношенню суми електричних зарядів всіх іонів одного знака, створених електронами, звільненими в опромінованому повітрі (при повному використанні іонізуючої здатності електронів), до маси цього повітря.

Одиниця експозиційної дози випромінювання – кулон, поділений на кілограм $\left(\frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \right)$, часто користуються позасистемною одиницею – рентген (Р):

$$1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$$

При експозиційній дозі, яка дорів-

ное одному рентгену, в 1 м^3 сухого повітря при нормальному атмосферному тиску виникає сумарний заряд іонів одного знака величиною $0,33 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$.

Біологічна доза – величина, яка вказує вплив випромінювання на організм.

Одиниця біологічної дози – біологічний еквівалент рентгена (*бер*): 1 бер – доза довільного виду іонізуючого випромінювання, яка здійснює таку саму біологічну дію, яку здійснює доза рентгенівського або γ -випромінювання в 1 Р

$$\left(1\text{ бер} = 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right).$$

Потужність дози випромінювання – величина, яка дорівнює відношенню дози випромінювання до часу опромінювання.

ГАМОВ ДЖОРЖ (ГЕОРГІЙ АНТОНОВИЧ)
(1904-1968)

Показав в 1928 р., використовуючи квантову механіку, що частинки навіть з не дуже великою енергією можуть з певною імовірністю проникати через потенційний бар'єр, дав модель прямокутної потенційної ями. В результаті виникло уявлення про „тунельний ефект”.

ІВАНЕНКО ДМИТРО ДМИТРОВИЧ
(нар. 1904 р.)

Висловив (1932 р.) думку про те, що електрони, які утворюються при β -перетвореннях, не вилітають у готовому вигляді з ядер, а виникають при зміні заряду їх, подібно до того як фотони виникають при переході з одного стану в інший з меншою енергією.

ЛЕЙПУНСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ІЛЛІЧ
(1903-1972)

Дав в 1936 р. перше непряме підтвердження гіпотези нейтрино на основі вимірювання енергії ядер віддачі при бета-розпаді.

ГАМОВ ДЖОРЖ (ГЕОРГІЙ АНТОНОВИЧ)
(1904-1968)

Встановив у 1936 р. в теорії β -розпаду правила відбору.

ЛАТИШЕВ ГЕОРГІЙ ДМИТРОВИЧ
(1907-1973)

Виконав значні дослідження з проблеми взаємодії гамма-випромінювання з речовиною (зокрема, комптон ефект, фотоэффект, внутрішня конверсія проміння на електронних оболонках атома) і тим самим експериментально підтвердив сучасну теорію жорсткого випромінювання

в ділянці релятивістських енергій і показав шлях дальшого розвитку ядерної спектроскопії.

ЗЕЛЕНСЬКИЙ ВІКТОР ФЕДОРОВИЧ
(нар. 1929 р.)

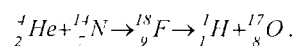
Вивчив особливості взаємодії електронів і γ -квантів високих енергій з речовиною. Вперше розроблені методи розрахунків просторово-енергетичних параметрів, які характеризують пошкодження в матеріалах при опромінюванні їх електронами і γ -квантами в області $1-1,7 \text{ GeV}$.

§133. Ядерні реакції.

Ядерні реакції – це перетворення атомних ядер при взаємодії з елементарними частинками, з γ -квантами або між собою.

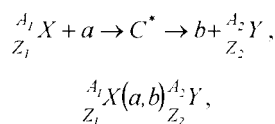
Характер ядерної реакції визначається видом частинки, її енергією, властивостями речовини і умовами взаємодії. Зокрема, зіткнення частинки з ядром викликає різні ядерні реакції, в результаті яких відбувається зміна заряду чи маси частинки або випускаються γ -кванти.

Типовим прикладом ядерної реакції є процес взаємодії швидких α -частинки з ядрами азоту, при якому спостерігається виліт протонів:



Вперше ядерну реакцію такого типу здійснив Резерфорд в 1919 р. Кількість відомих нині ядерних реакцій сягає уже тисяч.

Ядерні реакції записують у вигляді рівняння



де C^* - проміжне ядро у збудженому стані.

Тип ядерної реакції визначається видом взаємодіючої і виділеної частинки

(a, b). Якщо вони збігаються (a, a), реакцію називають розсіянням частинки a . У такому разі склад ядер не змінюється.

Якщо в ядерній реакції частинка a зникає (поглинається ядром), а замість неї появляється нова частинка b , склад ядра змінюється: відбувається ядерне перетворення.

За механізмом взаємодії ядерні реакції можна поділити на два види:

- прямі ядерні реакції;
- реакції з утворенням проміжного ядра.

Прямі ядерні реакції відбуваються при дуже високих енергіях частинок і за дуже короткий час, необхідний для того, щоб частинка пролетіла через ядро ($10^{-23} - 10^{-21}$ с). Наприклад, швидкий протон може вибити з поверхні ядра один з нуклонів і полетіти разом з ним.

Більшість же ядерних реакцій з кінетичною енергією частинок < 10 MeV проходить з утворенням проміжного ядра. Така ядерна взаємодія відбувається у два етапи.

На першому етапі відбувається захоплення частинки ядром і виникнення проміжного ядра, яке знаходиться у збудженому стані. Енергія збудження E^* складається з кінетичної енергії частинки E_K і енергії зв'язку нуклона $E_{зв}$, який приспонується:

$$E^* = E_K + E_{зв}.$$

Енергія зв'язку нуклона в середньому дорівнює 8 MeV. Тому складове ядро отримує досить велику енергію збудження.

В ядерній взаємодії беруть участь лише ближні до частинки нуклони, тому до них переходить основна частина енергії збудження. Енергія, отримана такими нуклонами, передається потім за участю ядер-

них сил сусіднім і поступово статистично розподіляється між всіма нуклонами ядра. При цьому відбувається значний розігрів ядра. Енергія збудження, розподілена рівномірно між всіма нуклонами, недостатня для подолання енергії зв'язку нуклона. Однак з часом флуктуації збудженого ядра приводять до того, що в одному нуклоні зосереджується енергія, достатня для відриву його від ядра ($E_{нук} > E_{зв}$). Тоді настає другий етап ядерної реакції – викидання нуклона з ядра.

При захопленні нейтрона з утворенням складового ядра швидкість нейтрона, який вилетів, звичайно менша, ніж швидкість захопленого первинного нейтрона. Оскільки первинні і вторинні нейтрони не можна розрізнити, таке явище сприймається як дещо сповільнене розсіювання нейтрона з втратою частини його енергії. Такий процес має назву *непружного (резонансного) розсіювання частинок*: $E_в \neq E_а$.

У деяких випадках розпад проміжного ядра з випусканням нейтрона може затриматися настільки, що починає переважати конкуруючий процес – розпад з випромінюванням γ -квантів під дією більш слабких електромагнітних сил. Після випускання γ -квантів збуджене ядро переходить в основний енергетичний стан. Такий процес взаємодії частинки з ядром називають *радіаційним захопленням частинки*.

Існують певні обмеження енергії для ядерної реакції з утворенням складового ядра. Наявність енергетичних рівнів ядра строго лімітує порції енергії, які можуть бути передані ядру. Оскільки енергія зв'язку має цілком певне значення для системи ядро-нуклон, передача енергії збуд-

ження може відбуватися через зміну кінетичної енергії частинки. Отже, утворення проміжного ядра можливе лише при певних значеннях кінетичної енергії частинки. Якщо кінетична енергія частинки відрізняється від цих значень, проміжне ядро не утворюється. В цьому випадку при зіткненні частинки з ядром відбувається її пружне (потенціальне) розсіяння: $E_{\text{в}} = E_{\text{а}}$.

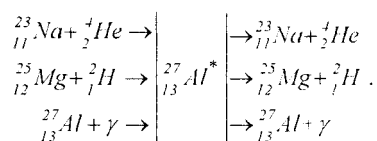
Проміжок часу, який потрібний нуклону з енергією порядку 1 MeV ($v \sim 10^7 \frac{\text{M}}{\text{c}}$) для того, щоб пройти відстань, яка дорівнює діаметру ядра ($\sim 10^{-14} \text{ M}$), називається ядерним часом (або ядерним часом прольоту):

$$\tau_{\text{я}} \cong \frac{10^{-14} \text{ M}}{10^7 \frac{\text{M}}{\text{c}}} = 10^{-21} \text{ c}.$$

Середній час життя складового ядра ($10^{-1} - 10^{-2} \text{ c}$) на багато порядків перевищує ядерний час $\tau_{\text{я}}$. Отже, розпад проміжного ядра являє собою процес, який не залежить від першого етапу реакції, що полягає в захопленні частинки A (проміжне ядро якби забуває спосіб свого утворення). Одне і те саме ядро може розпадатися різними шляхами, причому характер цих шляхів і їх відносна імовірність не залежить від способу утворення проміжного ядра.

Ядерну реакцію, що приводить до утворення проміжного ядра, називають вхідним каналом ядерної реакції, а кожний окремий вид розпаду проміжного ядра – вихідним каналом.

Наприклад, проміжне ядро ${}^{27}_{13}\text{Al}$ має три вхідні канали його утворення і три вихідні канали його розпаду:

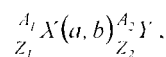


Здійснення того чи іншого виду вихідного каналу залежить від енергії збудження проміжного ядра E^* . Якщо енергія збудження перевищує енергію зв'язку ${}^4_2\text{He}$ -частинки або дейтрона ${}^2_1\text{H}$, проміжне ядро може перейти в основний стан, випустивши одну з цих частинок. Якщо ж E^* менша від енергії цих частинок, то перехід в основний стан відбувається через випускання одного або декількох γ -квантів.

Під час ядерної реакції зберігається загальна кількість нуклонів і сумарний заряд, а відбувається лише перерозподіл нуклонів і заряду між ядрами та частинками. Збереження заряду і кількості нуклонів дає змогу якісно визначити можливі напрямки перебігу ядерної реакції.

Ядерні реакції супроводжуються зміною кінетичної енергії взаємодіючих частинок. **Для ядерних реакцій виконуються закони збереження енергії і імпульсу.**

Запишемо баланс енергії в реакції



враховуючи, що повна енергія ядра і частинки дорівнює сумі їх енергій спокою mc^2 і кінетичної енергії E :

$$m_x c^2 + m_a c^2 + E_x + E_a = m_y c^2 + m_b c^2 + E_y + E_b$$

З цього рівняння можна визначити енергію ядерної реакції (або тепловий ефект Q) як зміну кінетичної енергії в процесі реакції:

$$Q = (E_y + E_b) - (E_x + E_a) =$$

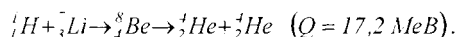
$$= (m_x + m_a) - (m_y + m_b) \Big] c^2 = \Delta mc^2.$$

Якщо масу вимірювати в а.о.м., то $Q = 931 \Delta m \text{ MeV}$.

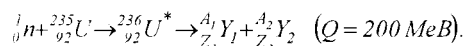
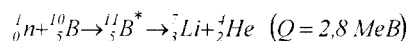
Маси спокою для даного набору ядер і частинок мають цілком певне значення, тому Q набуває характерного значення для кожної ядерної реакції.

Залежно від зміни маси ядер і частинок, що беруть участь в реакції, Q може набувати значення $Q > 0$, $Q < 0$.

Реакції з $Q > 0$ називають *екзоенергетичними* (екзотермічними). В цьому випадку частина енергії спокою вихідного ядра X і взаємодіючої частинки a перетворюються в кінетичну енергію продуктів реакції, при цьому маса останніх зменшується. Прикладом такої реакції є



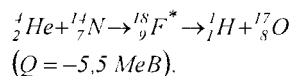
Екзоенергетичні реакції можуть відбуватись і при нульовій кінетичній енергії взаємодіючих частинок, якщо їх наближенню не заважають кулонівські сили відштовхування:



Реакції з від'ємними значеннями Q називають *ендоенергетичними* (ендотермічними). Для таких реакцій при умові $E_x = 0$ (вихідне ядро є нерухомим)

$$E_y + E_b = E_a - |Q|.$$

Оскільки $E_y + E_b > 0$, ендоенергетичні реакції мають порогову енергію. Вони можуть відбуватись лише в тому випадку, коли кінетична енергія частинки E_a більша від деякого порогового значення реакції ($E_a > |Q|$). Прикладом такої реакції є реакції виду



Рівняння ядерної реакції показує лише якісний характер взаємодії частинки з ядром, за його видом нічого не можна сказати про кількісні характеристики ядерної реакції.

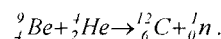
Всі ядерні реакції підпорядковані законам квантової механіки. Тому можна розглядати лише ймовірнісні характеристики перебігу тих чи інших реакцій. Ця ймовірність в ядерній фізиці визначається значенням ефективного перерізу реакції G :

$$G = \frac{I}{n\alpha} \ln \frac{N_0}{N(\alpha)},$$

де n – концентрація ядер, α – товщина мішені, N_0 – первинний потік частинок, $N(\alpha)$ – потік частинок на глибині α .

Ефективні перерізи ядерних процесів виражаються в одиницях, які називаються барн: $1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2$.

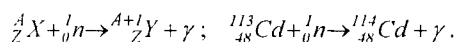
Найбільше значення мають реакції, які викликаються нейтронами. Нейтрони не відчувають кулонівського відштовхування, внаслідок чого вони можуть проникати в ядра, маючи доволі малу енергію. Нейтрони були виявлені в такій ядерній реакції (1930):



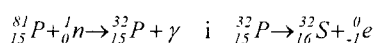
Характер ядерних реакцій під дією нейтронів істотно залежить від їх швидкості. Залежно від енергії нейтрони умовно діляться на повільні з енергією $10^{-7} - 10^4 \text{ eV}$, і швидкі, енергія яких $10^4 - 10^{10} \text{ eV}$.

Повільні нейтрони ефективні для збудження ядерних реакцій, оскільки вони відносно довго знаходяться поблизу атомного ядра. Завдяки цьому ймовірність за-

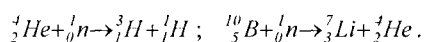
хоплення нейтрона ядром стає доволі великою, для повільних нейтронів характерне пружне розсіяння на ядрах (реакції типу (n, n)). Реакція (n, γ) приводить до утворення нового ізотопу вихідної речовини:



Часто в результаті (n, γ) - реакції утворюються штучно - радіоактивні ізотопи, які дають β - розпад:

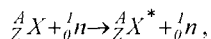


Під дією повільних нейтронів на деяких легких ядрах спостерігаються такі реакції захоплення нейтронів з випусканням заряджених частинок - ${}^1_1 H$, ${}^4_2 He$:



Реакції типу (n, p) і (n, α) , тобто реакції з утворенням заряджених частинок відбуваються в основному під дією швидких n , оскільки у випадку повільних нейтронів енергії атомного ядра недостатньо для подолання потенціального бар'єра, що перешкоджає вильоту протонів і α - частинок.

Для швидких нейтронів спостерігається непружне їх розсіяння, що здійснюється за схемою

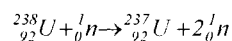


де нейтрон, який вилітає з ядра, позначений як ${}^1_0 n$, оскільки це не той нейтрон, який проник в ядро. ${}^1_0 n$ має енергію, меншу енергії ${}^1_0 n$, а ядро, що залишається після вильоту нейтрона, знаходиться у збудженому стані, тому його перехід в нормальний стан супроводжується випусканням γ - кванта.

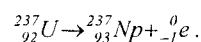
Коли енергія нейтронів досягає значень $10 MeV$, стає можливою реакція типу

$(n, 2n)$.

Наприклад, в реакції



утворюється штучно β - активний ізотоп ${}^{237}_{92} U$, що розпадається за схемою



Ядерні реакції класифікуються за такими ознаками:

1) за родом частинок, що беруть в них участь:

- реакції під дією нейтронів;
- реакції під дією заряджених частинок;
- реакції під дією γ - квантів;

2) за енергією частинок, що їх викликають:

- реакції при малих енергіях ($\approx 1eB$), що проходять за участю нейтронів;
- реакції при середніх енергіях (до $10 MeB$), що проходять за участю γ - квантів і заряджених частинок (${}^1_1 H$, ${}^4_2 He$);
- реакції при високих енергіях ($10-100 MeB$), які приводять до народження елементарних частинок, що відсутні у вільному стані.

3) за родом ядер, що беруть участь в реакції:

- реакції на легких ядрах ($A < 50$);
- реакції на середніх ядрах ($50 < A < 100$);
- реакції на важких ядрах ($A > 100$).

4) за характером ядерних перетворень, що відбуваються:

- реакції з випусканням нейтронів;
- реакції з випусканням заряджених частинок;
- реакції захоплення (під час цих реакцій

складове ядро переходить в основний стан, випромінюючи один або кілька γ – квантів.

СИНЕЛЬНИКОВ К.Д., ЛЕЙБУНСЬКИЙ О.І., ВАЛЬТЕР А.К., ЗАТШЕВ Г.Д.

Розіснили в 1932 р. ядро атома літію протонами, прискореними до 300-400 кеВ: ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^3_2\text{He}$.

Це перша в СРСР і друга в світі штучна ядерна реакція.

Вивчали взаємодію повільних і швидких нейтронів з ядрами.

Дослідили ядерні реакції за участю найлегших ядер. Детально вивчили функції збудження і виміряв абсолютні перерізи реакцій: дейтрон з дейтроном, тритій з дейтроном, гелій-3 з дейтроном, літій-6 з нейтроном, тритій і гелій-3 з легкими ядрами.

ЛЕЙБУНСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ІЛІЧ
(1903-1972)

Створив в 1932 р. апаратуру для утворення монохроматичного пучка потоку нейтронів в інтервалі середніх енергій (до 200 кеВ).

Показав, що для нейтронів середніх енергій ймовірність процесу розсіяння набагато перевищує ймовірність процесу захоплення.

КЛОЧАРЬОВ ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ
(нар. 1910 р.)

При пружному розсіянні протонів при енергіях 5,4 і 19,6 МеВ на мішенях з розділених ізотопів відкрив (1960 р.), детально вивчив і пояснив ізотопний ефект, який полягає в тому, що ядра з парним масовим числом, але малою різницею нейтронів і протонів виявляють аномально велику інтенсивність розсіяння протонів в області великих кутів.

З 1957 р. провів дослідження багаточастинкових ядерних реакцій, які викликані прискореними іонами He^I , Be^9 , B^{10} , C^{12} .

НАСІЧНИК ЛІТРОФАН ВАСІЛЬОВИЧ
(1912-1996)

Вивчав взаємодію нуклонів низьких і середніх енергій з атомними ядрами.

Виконав експериментальні дослідження пружного і непружного розсіяння, радіаційного захоплення нейтронів з енергією порядку 1-14 МеВ великою групою ядер. Зробив висновок про те, що кутовий розподіл пружно розсіяних нейтронів залежить від атомної маси елементів, на яких відбувається розсіяння, і від енергії нейтронів. Показав, що процеси пружного розсіяння нейтронів досить добре описується за допомогою оптичної моделі атомного ядра.

АФАНАСЬЄВ МІКОЛА ГРИГОРОВИЧ

Вивчив пружне магнітне розсіяння електронів на ядрах ${}^{49}\text{R}$, ${}^{49}\text{Ti}$, ${}^{59}\text{Co}$, визначив вищі магнітні мультипольні моменти для цих ядер. Показав, що одностаникова оболонкова модель погано описує процес пружного магнітного розсіяння і необхідно використовувати більш реаліс-

тичні ядерні моделі.

НЕМЕЦ ОЛЕГ ФЕДОРОВИЧ
(нар. 1922 р.)

Дослідив розсіювання і реакції дейтронів і альфа-частинок середніх енергій з ядрами, виміряв векторну поляризацію дейтронів при пружному розсіюванні на ряді ядер, показав роль тричастинкових ефектів у ядерних реакціях. Встановив зв'язок між механізмами ядерних реакцій і природою збуджених рівнів ядер. Дослідив механізм ядерної реакції розщеплення дейтрона, показав, що реакція проходить шлях трьох різних механізмів, виявив немонотонну залежність перетину розщеплення дейтрона від масового числа (ефект Немця), вивчив низку кінематично повних тричастинкових реакцій, які викликаються протонами, дейтронами і альфа-частинками на легких ядрах.

АХІЗЕР ОЛЕКСАНДР ІЛІЧ
(1911-2000)

Виконав в 1941 р. разом із І.Я.Померанчуком дослідження по розсіюванню повільних нейтронів кристалами і передбачив "холодні" нейтрони, побудував в 1948 р. теорію резонансних ядерних реакцій і в 1949 р. теорію дифракційного розсіювання швидких заряджених частинок ядрами.

СИТЕНКО ОЛЕКСІЙ ГРИГОРОВИЧ
(1927-2002)

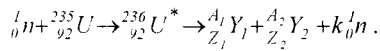
Розробив в 1958 р. теорію дифракційних ядерних процесів, яка враховує ефекти багатократного розсіювання і яка отримала назву теорії Ситенко-Глаубера. Вніс суттєвий вклад в розробку теорії прямих ядерних процесів. Дослідив розщеплення легких ядер в кулонівському полі і поляризаційні явища в прямих ядерних реакціях.

§134. Реакція ядерного поділу. Ланцюгова реакція поділу. Ядерний реактор

До початку 40-х років ХХ ст. роботами багатьох учених було доведено, що під час опромінення урану нейтронами утворюються елементи із середини періодичної системи – лантан і барій. Цей результат поклав початок дослідженню ядерних реакцій нового типу – реакцій поділу ядра, суть яких в тому, що важке ядро під дією нейтронів, а також інших частинок ділиться на декілька більш легких ядер, найчастіше на два близькі за масою ядра.

Поділ атомних ядер може відбуватися різними шляхами. Спостерігається більше, ніж 30 різних варіантів реалізації

процесу поділу, зокрема



Серед осколків поділу є нукліди з масовими числами від 72 до 161 і значеннями Z від 30 до 65. Криві виходу продуктів на один поділ наведені на рис. 342,

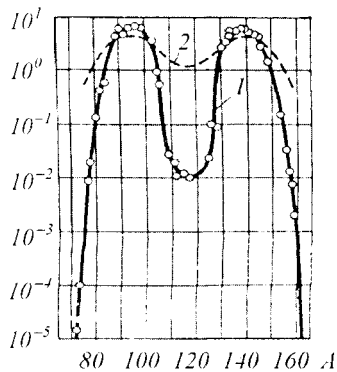


Рис. 342

де крива 1 відповідає дії теплових нейтронів, а крива 2 – швидких. При поділі на теплових нейтронах утворюються переважно осколки зі співвідношенням мас 2:3. Найімовірнішими продуктами поділу з виходом $\approx 6,5\%$ є осколки з масовими числами 195 і 139.

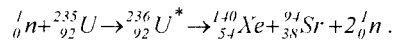
Поділ на два рівні осколки є малоімовірним ($\approx 0,01\%$).

Особливістю поділу ядра є те, що він супроводжується випусканням двох – трьох вторинних нейтронів, які називаються нейтронами поділу. Продукти поділу є радіоактивними. Це зв'язано з тим, що в ядрах – осколках, які утворилися, є надлишок нейтронів в порівнянні з протон-нейтронним співвідношенням, при якому ядра стабільні. Так, у стійких середніх ядер $N \approx 1,3Z$, а у важких ядрах $N \approx 1,6Z$.

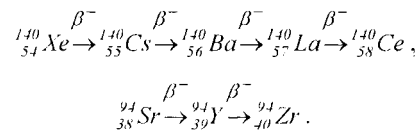
Осколки поділу зазнають тому ряд β^- – розпадів, які супроводжуються ви-

промінюванням γ – квантів і перетворенням нейтрона в протон. В результаті співвідношення між нейтронами і протонами в осколку досягає величини, що відповідає стабільному ізотопу.

Наприклад, одна з типових реакцій ядерного поділу є реакція

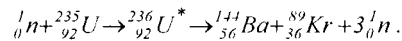


Осколки поділу – ксенон і стронцій – зазнають β^- – розпадів:



Кінцеві продукти – цезій і цирконій – є стабільними.

Іншою типовою реакцією є така:



Більшість нейтронів при поділі випускаються практично миттєво ($t \leq 10^{-14} \text{c}$), а частина (близько 0,7%) випускаються осколками поділу через деякий час після поділу ($0,05 \text{c} \leq t \leq 60 \text{c}$). Перші з них називаються миттєвими, другі – такими, що запізнюються. Загалом на кожний акт поділу припадає 2,5 випущеного нейтрона, а на один нейтрон в середньому припадає енергія близько 2 MeB.

Якщо розглянути реакцію поділу, в результаті якої ядро ${}_{92}^{236}\text{U}^*$ розщеплюється на ядра ${}_{58}^{148}\text{Ce}$, ${}_{40}^{94}\text{Zr}$, 6 β^- – частинок і 2 нейтрона, то цей поділ супроводжується виділенням великої кількості енергії, а саме: $E = 208 \text{MeB}$.

Ймовірність поділу ядер визначається енергією нейтронів. Наприклад, якщо високоенергетичні нейтрони викликають поділ практично всіх ядер, то нейтро-

ни з енергією в декілька *MeV* - лише важких ядер ($A > 210$).

Нейтрони, що мають енергію активації (мінімальну енергію, необхідну для здійснення реакції поділу ядра) порядку 1 MeV , викликають поділ ядра урану $^{238}_{92}\text{U}$, торію $^{232}_{90}\text{Th}$, протактинію $^{231}_{91}\text{Pa}$ і плутонію $^{239}_{94}\text{Pu}$.

Тепловими нейтронами діляться ядра $^{235}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{233}_{92}\text{U}$, $^{230}_{90}\text{Th}$. Два останні ізотопи в природі не зустрічаються, їх отримують штучно.

Теорію поділу важких ядер запропонували Н. Бор і Я. Френкель, в основу її покладено краплинну модель ядра.

Нейтрон, що проникнув у ядро, вносить туди енергію, яка за дуже короткий час поширюється між всіма нуклонами і в результаті утворюється нове ядро у збудженому стані. Якщо енергія збудження невелика, то поділ ядра не відбувається. Таке ядро, втративши надлишок енергії

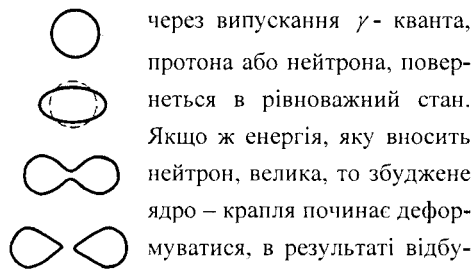


Рис. 343 через випускання γ -кванта, протона або нейтрона, повернеться в рівноважний стан. Якщо ж енергія, яку вносить нейтрон, велика, то збуджене ядро – крапля починає деформуватися, в результаті відбувається поділ на два осколки, що розлітаються з великими швидкостями внаслідок дії між ними сил електростатичного відштовхування (рис. 343).

Для практичного застосування поділу важких ядер найважливіше значення має виділення великої енергії при кожному акті поділу і поява при цьому 2-3 нейтронів. Кожен з цих нейтронів взаємодіє з сусідніми ядрами речовини, що, у свою чер-

гу спричиняє в них реакцію поділу, тобто відбувається лавиноподібне зростання кількості актів поділу. Така реакція поділу називається ланцюговою.

Схематично ланцюгова реакція поділу ядер зображена на рис. 344.

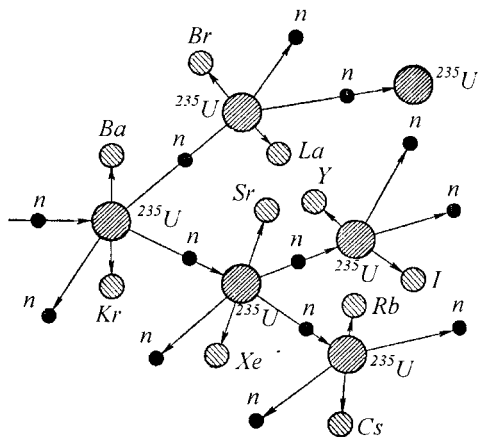


Рис. 344

Ланцюгова реакція поділу характеризується коефіцієнтом розмноження k нейтронів, який дорівнює відношенню кількості нейтронів у даному поколінні до їх кількості в попередньому поколінні.

Виявляється, що не всі вторинні нейтрони, які утворюються, викликають наступний поділ ядер, що приводить до зменшення k . По-перше, внаслідок скінчених розмірів активної зони (простір, де відбувається ланцюгова реакція) і великої проникної здатності нейтронів, частина з них покине активну зону раніше, ніж буде захоплена яким-небудь ядром. По-друге, частина нейтронів захоплюється ядрами домішок, що не діляться, і які завжди присутні в активній зоні.

Коефіцієнт розмноження залежить від природи речовини, що ділиться, а для даного ізотопу – від його кількості, а також від розмірів і форми активної зони.

Мінімальні розміри активної зони,

при яких можливе здійснення ланцюгової реакції, називають *критичними розмірами*. Мінімальна маса речовини, що ділиться, яка необхідна для здійснення ланцюгової реакції, називається *критичною масою*. Для зменшення втрат нейтронів і критичних параметрів речовини її оточують відбивачем - шаром неподільної речовини, яка має малий ефективний поперечний переріз для захоплення нейтронів і великий переріз для їх розсіяння.

Обчислимо швидкість розвитку ланцюгової реакції. Нехай τ – середній час життя одного покоління, а N - число нейтронів у попередньому поколінні. В даному поколінні їх кількість дорівнює kN , тобто приріст кількості нейтронів за одне покоління $dN = kN - N = N(k - 1)$.

Приріст кількості нейтронів за одиницю часу, тобто швидкість наростання ланцюгової реакції

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{\tau}, \quad \frac{dN}{N} = \frac{k-1}{\tau} dt.$$

Інтегруючи цей вираз, отримуємо

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{\tau}},$$

де N_0 - кількість нейтронів в початковий момент часу, а N - їх кількість в момент часу t . При $k > 1$ йде наростаюча реакція, кількість поділів безперервно росте, і реакція може стати вибуховою.

При $k = 1$ йде самопідтримуюча реакція, при якій кількість нейтронів з часом не змінюється. При $k < 1$ йде загасаюча реакція.

Ланцюгові реакції діляться на *керовані* і *некеровані*. Вибух атомної бомби є некерованою реакцією. Керовані ланцюгові реакції здійснюються в ядерних реакторах.

Як сировинні і подільні речовини в реакторах використовуються $^{235}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{238}_{92}\text{U}$, а також $^{232}_{90}\text{Th}$. У природній суміші ізотопів урану ізотопу $^{238}_{92}\text{U}$ у 140 разів більше, ніж ізотопу $^{235}_{92}\text{U}$.

Велике значення в ядерній енергетиці має не лише здійснення ланцюгової реакції поділу, але і керування нею.

Пристрій, в якому здійснюється і підтримується керована ланцюгова реакція поділу, називається ядерним реактором.

Розглянемо типову схему реактора на теплових нейтронах (рис. 345).

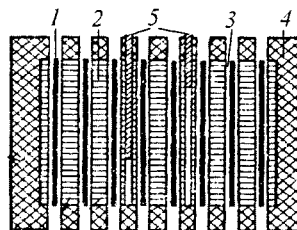


Рис. 345

В активній зоні реактора розміщені тепловиділяючі елементи 1 і сповільнювачі 2, в яких нейтрони сповільнюються до теплових швидкостей. Тепловиділяючі елементи (твели) – це блоки з радіоактивного матеріалу, що знаходиться в герметичній оболонці, яка слабо поглинає нейтрони. За рахунок енергії, що виділяється при поділі ядер, твели розігріваються, і їх поміщають в потік теплоносія (3 – канал для протікання теплоносія). Проходячи через активну зону, теплоносії у вигляді газу, води або розплавленого металу нагрівається і передає теплоту через спеціальний пристрій робочому тілу, наприклад, воді в паротурбогенераторі, а потім знову поступає в активну зону реактора. Активна

зона оточується тепловідбивачем 4, що зменшує витік нейтронів.

Керування ланцюговою реакцією здійснюється спеціальними керуючими стрижнями 5 з матеріалів, що сильно поглинають нейтрони. При повністю вставлених стрижнях реакція не йде. При поступовому вийманні стрижнів k росте і при певному положенні доходить до одиниці. В цей момент реактор починає працювати. В міру його роботи кількість матеріалу, який ділиться в активній зоні, зменшується і відбувається її забруднення осколками поділу. Щоб реакція не припинилась, з активної зони за допомогою автоматичного пристрою поступово виймаються керуючі стрижні. В реакторі є аварійні стрижні, введення яких при збільшенні інтенсивності реакції зразу її припиняє. Кожний реактор має біологічний захист - систему екранів із захисних матеріалів.

Ядерні реактори розрізняють:

- 1) за характером основних матеріалів, що знаходяться в активній зоні (ядерне паливо, сповільнювач, теплоносії); в ролі подільних і сировинних речовин використовують ${}_{92}^{235}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$, ${}_{92}^{233}\text{U}$, ${}_{92}^{238}\text{U}$, ${}_{90}^{232}\text{Th}$, в ролі сповільнювачів - воду (звичайну і важку), графіт, берилій, кадмій; в ролі теплоносіїв - повітря, воду, водяну пару, *He*, *Co* тощо.
- 2) за енергією нейтронів (реактори на теплових і швидких нейтронах);
- 3) за характером розміщення ядерного палива і сповільнювача в активній зоні: гомогенні (обидві речовини рівномірно змішані одна з одною) і гетерогенні (обидві речовини розміщуються окремо у вигляді блоків);
- 4) за типом режиму (неперервний і імпульсний);

5) за призначенням (енергетичні, дослідні реактори виробництва нових подільних матеріалів, радіоактивних ізотопів і та ін.).

СТРУТИНСЬКИЙ ВЛЕН МІТРОФАНОВИЧ
(нар. 1929 р.)

Виконав праці з теорії поділу ядер. Розвинув кількісну теорію кутових розподілів фрагментів поділу і продуктів реакцій, розробив метод розрахунку мас і енергій деформації ядер, який дав змогу відокремити оболонкові ефекти в енергії ядра і дослідити їх вплив на властивості ядер.

Теоретично встановив в 1966 р. явище сильно деформованих важких атомних ядер в квазістаціонарному стані, зумовлене деформуванням в ядрах з числом нуклонів 230-250 оболонкової структури при досягненні ядрами деформації з станом осей порядку 1,8-2,0. Вперше висунув і обґрунтував уявлення про наявність у важких ядер двогорбого бар'єру поділу.

БРОДСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ІЛЛІЧ
(1895-1969)

В 1934 р. перший в СРСР отримав важку воду. Розробив теорію розділення ізотопів та методи концентрування важкої води, що мало велике значення для виробництва останньої та розділення ізотопів урану.

ЛЕЙПУНСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ІЛЛІЧ
(1903-1972)

Прийшов у 1946-1948 рр. до ідеї реакторів на швидких нейтронах, вказав на фізичні особливості ланцюгової ядерної реакції на швидких нейтронах і на перевагу використання в ролі теплоносіїв у швидких реакторах рідких металів.

ІВАНОВ ВІКТОР ЄВГЕНОВИЧ
(1908-1980)

Під керівництвом Іванова виконані розробки ядерного палива на основі металічного урану, розроблені методи дисперсійного зміцнення урану і підвищення його радіаційної стійкості, створено металічне уранове паливо з великою радіаційною стійкістю до вигорання.

АХІЗЕР ОЛЕКСАНДР ІЛЛІЧ
(1911-2000)

Виконав (1943 р.) дослідження над розсіянням повільних нейтронів у кристалах і кінетичними властивостями ділмих середовищ (реакторів). Один з перших висловив ідею про використання в ядерних реакторах так званих „холодних” нейтронів і провів розрахунки критичних розмірів реактора з врахуванням скінченної довжини сповільнення нейтронів.

ТОЛУБІНСЬКИЙ ВСЕВОЛОД ІВАНОВИЧ
(нар. 1904 р.)

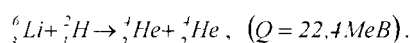
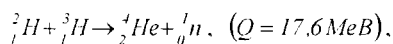
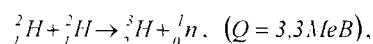
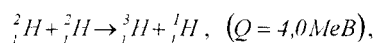
Дослідив умови виникнення і перебігу кризисних явищ при кипінні нагріваної рідини в умовах вимушеного руху і високого тиску в каналах складного профілю. Результати цих досліджень використовуються при розрахунках і конструюванні атомних реакторів та інших машин і апаратів.

**§135. Реакція синтезу атомних ядер.
Проблема керованих термоядерних реакцій**

Реакція синтезу атомних ядер – термоядерна реакція – це злиття легких ядер в одне ядро, яке супроводжується виділенням великих кількостей енергії.

Ядерний синтез, тобто злиття легких ядер в одне ядро супроводжується, як і поділ важких ядер, виділенням великих кількостей енергії. Оскільки для синтезу ядер необхідні дуже високі температури, цей процес називається *термоядерною реакцією*.

Для прикладу наведемо деякі реакції синтезу легких ядер та значення теплових ефектів Q :



Виділення великих кількостей енергії пояснюється тим що питома енергія зв'язку ядер різко збільшується при переході від ядер водню (${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$) до літію ${}^6_3\text{Li}$ і особливо до гелію ${}^4_2\text{He}$.

Реакції синтезу атомних ядер мають ту особливість, що в них енергія, яка виділяється на один нуклон, значно більша, ніж в реакціях поділу важких ядер. Справді, якщо під час поділу ядра ${}^{238}_{92}\text{U}$ виділяється енергія приблизно $0,84 \text{ MeV}$ на один кулон, то в реакції синтезу приблизно $3,5 \text{ MeV}$, тобто в 4 рази більше.

Оцінимо температуру перебігу термоядерної реакції на прикладі синтезу ядра дейтерію ${}^2_1\text{H}$. Для об'єднання ядер дейтерію їх треба наблизити на відстань, що до-

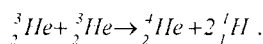
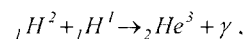
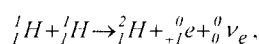
рівнює радіусу дії ядерних сил $r = 2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$, долаючи при цьому кулонівський бар'єр

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx 0,7 \text{ MeV}.$$

На кожне ядро, що стикається, припадає $0,35 \text{ MeV}$. Середній енергії теплового руху $\frac{3}{2}kT$, яка дорівнює $0,35 \text{ MeV}$, відповідає температура порядку $2 \cdot 10^9 \text{ K}$. Отже, реакція синтезу ядер дейтерію може відбуватися лише при температурі, що перевищує на два порядки температуру центральних областей Сонця ($1,3 \cdot 10^7 \text{ K}$).

Однак для перебігу реакції синтезу атомних ядер достатньо температури порядку 10^7 K . Це пов'язано з двома факторами: 1) при температурах, характерних для реакцій синтезу атомних ядер, речовина знаходиться в стані плазми, розподіл частинок якої описується законом Максвелла, тому завжди є деяка кількість ядер, енергія яких набагато перевищує середнє значення; 2) синтез ядер може відбуватися внаслідок тунельного ефекту. Термоядерні реакції є, можливо, одним з джерел енергії Сонця і зірок. В принципі висловлено два припущення про можливі способи перебігу термоядерних реакцій на Сонці:

1) *протонно-протонний або водневий цикл*, характерний для температур $\sim 10^7 \text{ K}$:



Енергія, яка виділяється при цьому циклі, дорівнює $24,7 \text{ MeV}$. На рис. 346 зображений весь ланцюжок протон-протонного циклу.

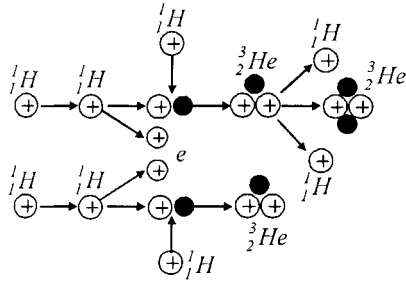
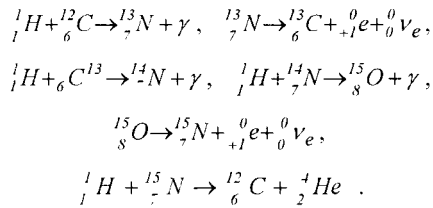


Рис. 346

2) **вуглецево-азотний або вуглецевий цикл**, характерний для більш високих температур ($\sim 2 \cdot 10^7 K$)



В результаті цього циклу 4 протони перетворюються в ядро гелію і виділяється енергія, яка дорівнює $26,7 MeV$. Ядра ж вуглецю, кількість яких залишається незмінною, беруть участь у реакції в ролі каталізатора.

Схема протікання вуглецево-азотного циклу наведена на рис. 347.

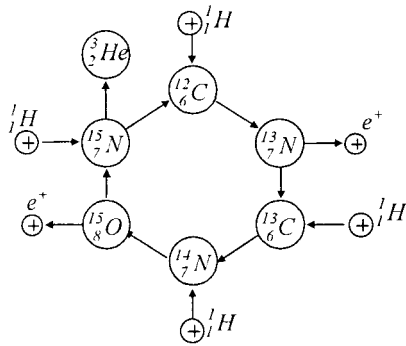


Рис. 347

З наведених вище рівнянь реакції видно, що синтез протонів супроводжується виникненням нейтрино, кількість яких можна оцінити. Однак проведені вимірю-

вання показали, що кількість нейтрино, що виділяються на Сонці, дуже мала. В зв'язку з цим питання про природу сонячної енергії залишається дискусійним.

Вперше штучна термоядерна реакція була здійснена в СРСР (1953), а потім в США у вигляді вибуху водневої (термоядерної бомби), що є некерованою реакцією. Вибуховою речовиною, в якій проходила реакція ${}^3_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^1_0n$, є суміш дейтерію і тритію, а запалом – звичайна атомна бомба, при вибуху якої виникає необхідна для перебігу термоядерної реакції температура.

Теоретичною основою для перебігу штучних керованих термоядерних реакцій є реакції типу ${}^2_1H + {}^3_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^1_0n$, що відбуваються у високотемпературній плазмі. Однак завдання полягає не тільки в створенні умов, потрібних для інтенсивного виділення енергії в термоядерних процесах, а здебільшого в підтриманні цих умов. Для здійснення самопідтримної термоядерної реакції потрібно, щоб швидкість виділення енергії в системі, де відбувається реакція, була не менша за швидкість відведення енергії від системи.

Розрахунки показують, що для забезпечення самопідтримної керованої термоядерної реакції температуру дейтерієвої плазми треба довести до кількох сотень мільйонів градусів. При температурах $\sim 10^8 K$ реакція має повну інтенсивність і супроводжується виділенням великої енергії. Так, при температурі $1,17 \cdot 10^8$ потужність, яка виділяється в одиниці об'єму плазми при сполученні дейтерієвих ядер, становить $3 \frac{кВт}{м^3}$, у той час як при темпе-

ратурі $1,17 \cdot 10^6$ вона дорівнює лише $10^{-17} \frac{\text{Вм}}{\text{м}^3}$.

Основною причиною втрат енергії високотемпературною плазмою є її велика теплопровідність, яка швидко зростає ($\sim T^{5/2}$) при високих температурах. Енергія з плазми може відводитися завдяки дифузії гарячих частинок з області, де відбувається реакція, на стінки апарата, в якому міститься плазма. Якщо плазму не теплоізолювати від контакту з будь-якими навколишніми речовинами, то її можна нагрівати лише до кількох сотень тисяч градусів, тому що енергія, яка виділяється внаслідок реакції синтезу, виходитиме на стінки. Інакше кажучи, треба втримати плазму в заданому об'ємі, не допускаючи її розширення. Ідею ефективної магнітної термоізоляції плазми стосовно проблеми керованого термоядерного синтезу запропонували А.Д. Сахаров і І.Є. Тамм у 1950 р. Якщо пропустити через плазму у формі стовпа вздовж його осі великий електричний струм, то магнітне поле цього струму створює електродинамічні сили, які прагнуть стиснути плазмовий стовп. Отже, стовп плазми буде відірваний від стінок і стягнутий у плазмовий шнур. Однак утримувати плазмовий шнур в такому стані не вдається: відбуваються швидкі радіальні коливання - він то розширюється, то знову стискається.

Внаслідок нестабільності, нестійкості плазми у плазмовому шнурі виникають деформації, які змінюють геометричну форму шнура. Результатом цього є порушення термоізоляції, інтенсивна взаємодія плазми із стінками, що приводить до за-

бруднення дейтерію речовиною стінок і швидкого охолодження плазми.

Основним питанням, розв'язання якого дозволить здійснити керовані термоядерні реакції, є з'ясування умов, за яких високотемпературна плазма в магнітному полі належної конфігурації може зберегти стійкість. Розв'язання цього питання поряд з пошуками шляхів підвищення температури плазми є головним напрямом, в якому розвиваються дослідження керованих термоядерних реакцій.

Можливість реалізації термоядерної реакції зводиться до необхідності виконання двох вимог: наявності деякої мінімальної температури і певного обмеження для добутку концентрації n частинок у плазмі на час τ їх утримання в плазмі. Ці умови називаються **критерієм Лоусона**.

$$n\tau > 10^{14} \frac{\text{с}}{\text{см}^3}, \quad T > 10^8 \text{ К} - {}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$$

$$n\tau > 10^{15} \frac{\text{с}}{\text{см}^3}, \quad T > 10^9 \text{ К} - {}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$$

ГАМОВ ДЖОРЖ (ГЕОРГІЙ АНТОНОВИЧ)
(1904-1968)

Першим почав розраховувати моделі зірок з термоядерними джерелами енергій, дослідив роль нейтрино під час спалахів нових і наднових зір.

СИНЕЛЬНИКОВ КИРИЛО ДМИТРОВИЧ
(1901-1966)

Вивчав утримання і нагрівання плазми в магнітних пастках, динаміку плазмових потоків і згустків, інжекцію заряджених частинок в магнітні пастки. Запропонував пастку з просторово-періодичним магнітним полем (пастка Синельникова).

ФАЙНБЕРГ ЯКІВ БОРИСОВИЧ
(нар. 1918 р.)

Передбачив в 1948 р. разом з О.І. Ахієзером пучкову нестійкість плазми. Виявив її експериментально, визначив основні характеристики процесів пучкової нестійкості, запропонував методи управління пучковими нестійкостями.

Виявив плазмово-пучковий розряд і пучковий нагрів плазми. Співатор відкриття ефекту аномально високого опору плазми за великих густин струму і її турбулентного нагріву.

ТОЛОК ВОЛОДИМИР ТАРАСОВИЧ
(нар. 1926 р.)

Вніс істотний вклад у дослідження методів нагрівання плазми до термоядерних температур та розробку й вивчення замкнених магнітних систем для утримання гарячої плазми.

СИТЕНКО ОЛЕКСІЙ ГРИГОРОВИЧ
(1927-2002)

Ввів вперше тензор діелектричної проникності для плазми в магнітному полі, що враховує просторову дисперсію. Розвинув теорію флюктуацій в плазмі, передбачив комбінаційне розсіювання електромагнітних хвиль в плазмі.

СТЕПАНОВ КОНСТЯНТИН МИКОЛАЙОВИЧ
(нар. 1930 р.)

Проводив дослідження в галузі фізики високотемпературної плазми й керованих термоядерних реакцій, плазми в твердих тілах.

Розглянув збудження різних типів повільних хвиль в плазмі потоком заряджених частинок, виявив іонну циклотронну і конусну нестійкість плазми в адабатичній ловушці.

§136. Елементарні частинки, їх класифікація і взаємна перетворюваність

Елементарними частинками називаються такі частинки, які не мають внутрішньої структури, що є простим з'єднанням інших стабільних частинок.

При взаємодії з іншими частинками і полями елементарна частинка веде себе як одне ціле. Елементарні частинки можуть перетворюватись одна в одну.

В області енергій, менших від $2m_0c^2$, де m_0 – маса спокою частинки, структура елементарних частинок не впливає на взаємодії між ними та іншими частинками і полями. В цих випадках елементарні частинки розглядаються як безструктурні матеріальні точки, що мають ряд властивостей: масу спокою, електричний заряд, спин та ін.

Із співвідношень невизначеностей виходить, що для вивчення структури елементарних частинок необхідно досліджувати процеси, що відбуваються на досить малих відстанях τ , яким відповідає невиз-

наченість імпульсу $\Delta P \geq \frac{\hbar}{\tau}$. Чим менші

відстані τ , зв'язані зі структурою елементарних частинок, тим більшим повинен бути імпульс P частинок, він не може бути меншим, ніж ΔP . Отже, з'ясування структури елементарних частинок можливе лише в галузі фізики високих енергій.

На основі великого експериментального матеріалу встановлено, що кожна частинка має свою античастинку, яка має таку саму масу і спин, але відрізняється протилежним значенням іншої її характеристики. Крім електричного заряду, введені лептонні (\pm) і баріонні (\pm) заряди, які властиві певним категоріям елементарних частинок.

Елементарні частинки діляться на такі групи:

1. Фотони

Вони не мають електричного заряду і маси спокою. Їх основні характеристики: енергія $h\nu$ і спин, який дорівнює одиниці. Фотони оптичного випромінювання мають малі енергії – декілька eV ; вони появляються при переходах атомів і молекул із збуджених станів в стани з меншою енергією. Гамма-фотони появляються в результаті аналогічних процесів, що відбуваються всередині атомних ядер. При гальмуванні електронів високих енергій можуть бути отримані фотони дуже великих енергій – до $1000 MeV$, що майже у 2000 разів перевищує власну енергію електрона. У зворотному процесі, коли фотон „гальмується” при прямому ударі об ядро, відбувається утворення пари електрон-позитрон

$$\gamma \rightarrow {}^0_{-1}e + {}^0_{+1}e.$$

При цьому енергія фотона, що зникає, повинна бути не менша, ніж сума власних

енергій частинок, що появилися, тобто $h\nu \geq 2m_0c^2$.

2. Лептони

До них належать 4 пари елементарних частинок:

- а) пара електронних нейтрино ${}^0_0\nu_e$ і антинейтрино ${}^0_0\bar{\nu}_e$;
- б) пара мюонних нейтрино ${}^0_0\nu_\mu$ і антинейтрино ${}^0_0\bar{\nu}_\mu$;
- в) пара електрон ${}^-_1e$ і позитрон ${}^+_1e$;
- г) пара мю-мезонів (мюонів) - позитивний μ^+ і негативний μ^- .

Усі чотири різновидності нейтрино не мають електричного заряду і маси спокою; рухаються з швидкістю світла. На відміну від фотонів вони мають спіні, який дорівнює $1/2$. Електронні нейтрино виявляються в процесах розпаду разом з електроном (антинейтрино) або з позитроном (нейтрино):

$${}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e + {}^0_0\bar{\nu}_e, \quad {}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_+1e + {}^0_0\nu_e.$$

Мюонні нейтрино виявляються в процесі розпаду мю-мезонів:

$$\mu^- \rightarrow {}^0_{-1}e + {}^0_0\bar{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu; \quad \mu^+ \rightarrow {}^0_+1e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\bar{\nu}_\mu.$$

Існування мюонних нейтрино було виявлено при бомбардуванні потоком нейтрино високих енергій (більше 100MeV) алюмінієвої мішені. Були виявлені реакції утворення мюонів ${}^0_0\nu_\mu + {}^0_1n \rightarrow {}^1_1p + \mu^-$.

Електрон і позитрон мають однакові маси і спіні, але протилежні електричні ($\pm e$) і лептонні (± 1) заряди. Внаслідок цього вони здатні до „анігіляції“, тобто до „зникнення“, з утворенням двох або трьох фотонів.

Мюони мають електричні і одинич-

ні лептонні заряди; їх спіні дорівнює $1/2$. Маса спокою мюонів $m = 206,76 m_e$. Середній час існування мюона $\sim 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ c}$.

3. Мезони

До них належать π -мезони (піони), K -мезони (каони). Загальна їх характеристика – це відсутність спіна. π -мезони відіграють важливу роль в ядерних взаємодіях нуклонів і у визначенні магнітних моментів. Існують:

- а) нейтральні (π^0) π -мезони; їх маса $m = 264 m_e$ (m_e – маса спокою електрона). Вони мають малий час життя $\approx (10^{-16} \text{ c})$ і перетворюються переважно у два фотони $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.
- б) заряджені (π^\pm) π -мезони; їх маса $m = 273 m_e$, середній час життя - $2,6 \cdot 10^{-8} \text{ c}$, вони перетворюються за схемою

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Піони в остаточному рахунку перетворюються на дві пари лептонів, які мають протилежні лептонні заряди:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + {}^0_0\bar{\nu}_\mu \rightarrow ({}^0_{-1}e + {}^0_0\bar{\nu}_e) + ({}^0_0\nu_\mu + {}^0_0\bar{\nu}_\mu),$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu \rightarrow ({}^0_+1e + {}^0_0\nu_e) + ({}^0_0\nu_\mu + {}^0_0\bar{\nu}_\mu).$$

На цьому прикладі ілюструється важливий закон фізики елементарних частинок: алгебраїчна сума довільних зарядів (в даному випадку - електричних і лептонних) у всіх реакціях зберігається сталою. Піони не мають лептонного заряду, тому сума лептонного заряду електрона ($+1$) і електронного антинейтрино, а також мюонних нейтрино ($+1$) і антинейтрино (-1) дорівнює нулю. Парне число продуктів розпаду необхідно і для одержання сумарного спіну, оскільки спіні вихідної частин-

ки – піона – дорівнює одиниці.

K- мезони відрізняються від піонів більшою масою. Нейтральні (K_1^0 і K_2^0) мають масу $m = 974,8 m_e$, заряджені K^+ і K^- мають масу $m = 966,5 m_e$.

Середній час життя τ і схеми перетворення наведені нижче:

	τ, c	
K_1^0	10^{-10}	$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
K_2^0	$6 \cdot 10^{-8}$	$K_2^0 \rightarrow 2\pi^0$
K^\pm	$12 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu (\sim 63,1\%)$ $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 (\sim 21,5\%)$ $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- (\sim 5,5\%)$ $K^+ \rightarrow \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu + \pi^0 (\sim 3,4\%)$ $K^+ \rightarrow e^+ + \pi^0 + \nu_e (\sim 4,8\%)$

4. Баріони

До них належать: пара стабільних частинок – протон+антипротон, пара – нейтрон + антинейтрон і три типи гіперонів, які називаються лямбда-, сігма - і ксі-гіперонами (кожен з них має відповідну античастинку). Заряди q , маси m , час інтенсивності τ і схеми перетворень гіперонів наведені нижче: $\zeta^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$

	q	m	τ, c	
Лямбда	0	$2183 m_e$	$2,51 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \rightarrow \begin{cases} {}^1_0n + \pi^0 \\ {}^1_0p + \pi^- \end{cases}$
Сігма-нуль	0	$2331,8 m_e$	10^{-11}	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
Сігма-плюс	$+e$	$2327,7 m_e$	$0,81 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} {}^1_1p + \pi^0 \\ {}^1_0n + \pi^+ \end{cases}$
Сігма-мінус	$-e$	$2340,5 m_e$	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$
Ксі-нуль	0	$2565 m_e$	10^{-10}	$\zeta^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
Ксі-мінус	$-e$	$2580 m_e$	10^{-10}	$\zeta^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$

Всі баріони мають спин, який дорів-

нює половині. Баріонам приписується баріонний заряд (частинкам $+1$, а анти частинкам -1), який теж підпорядкований закону збереження. Дію цього закону разом із дією закону збереження спіна і електричного заряду можна простежити у процесах перетворення, народження і анігіляції пар баріонів, наприклад:

$${}^1_1p + {}^1_1p \rightarrow \begin{cases} {}^1_1p + {}^1_1p + ({}^1_1p + {}^1_1\bar{p}); & {}^1_1p + \Lambda^0 \rightarrow {}^1_0n + {}^1_1p + K^0; \\ {}^1_1p + {}^1_1p + ({}^1_0n + {}^1_0\bar{n}); & {}^1_1p + {}^1_1\bar{p} \rightarrow \Lambda^0 + \bar{\Lambda}^0. \\ {}^1_1p + {}^1_1p \rightarrow \begin{cases} {}^1_1p + \Lambda^0 + K^+; \\ {}^1_1p + \Sigma^+ + K^0; \\ {}^1_1p + {}^1_0n + \pi^+; \end{cases} \end{cases}$$

Крім перерахованих вище частинок, виявлено численні сильно взаємодіючі короткоживучі частинки, які отримали назву резонансів. Ці частинки являють собою резонансні стани, утворені двома або більшою кількістю елементарних частинок. Час життя резонансів становить лише $\sim 10^{-23} - 10^{-22} c$.

ІВАНЕНКО ДМІТРО ДМІТРОВИЧ
(нар. 1904 р.)

Розвивав нелінійну єдину теорію, яка враховує кварки і субкварки.

БОГОЛЮБОВ МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ
(1909-1992)

Розвинув математичний апарат теорії елементарних частинок. Довів, що висновок про дробові значення основних квантових чисел кварків взагалі не є обов'язковим, бо в принципі унітарну систематику можна побудувати так, що квантові числа кварків залишаються цілочисельними, якщо припустити існування трьох різних типів кварків.

АХІЄЗЕР ОЛЕКСАНДР ІЛІЧ
(1911-2000)

Виконав великий цикл робіт по електродинаміці адронів. Сформулював правило еквівалентності для різних електромагнітних характеристик адронів.

Разом з М.Т.Фекало узагальнив модель кварків на електромагнітні процеси з участю адронів. Встановив кваркову структуру фотону, яка дозволила розвинути теорію комптонівського розсіяння фотонів нуклонами і ядрами.

Х. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

§137. Поняття про квантові статистики Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака

Властивості твердих тіл можна пояснити на основі *квантової статистики* – розділу статистичної фізики, який досліджує системи з великого числа частинок, які підпорядковуються законам квантової механіки.

В основу квантової статистики покладено два принципи, які не мають нічого спільного з уявленнями класичної фізики:

- 1). *Принцип тождественності*, або принцип нерозрізненості мікрочастинок: всі однакові частинки (наприклад, всі електрони в металі, всі протони в ядрах атомів) принципово не відрізняються одна від одної;
- 2). *Принцип Паулі* (справедливий лише для ферміонів): у кожному квантовому стані не може перебувати більш як одна частинка.

Основна задача квантових статистик полягає в знаходженні функції розподілу частинок системи за тими чи іншими параметрами – координатами, імпульсами, енергіями і т.д., а також у розрахунку середніх значень цих параметрів, що характеризують макроскопічний стан всієї системи частинок.

Для цього введемо *повну статистичну функцію розподілу* $N(E)dE$, яка визначає кількість частинок з енергією від E до $E+dE$ в системі, стан якої описується певними термодинамічними параметрами.

Повну статистичну функцію розподілу можна подати у вигляді добутку числа станів $g(E)dE$, що припадають на інтервал енергії dE , на функцію розподілу $f(E)$:

$$N(E)dE = f(E)g(E)dE.$$

Функція розподілу $f(E)$ визначає ймовірність заповнення частинками станів, що припадають на інтервал енергії dE . Якщо, наприклад, на 100 близько розміщених станів припадає в середньому 10 частинок, то ймовірність заповнення цих станів $f(E) = 0,1$. Оскільки на кожний стан припадає в середньому 0,1 частинки, то $f(E)$ можна трактувати як середню кількість частинок, що знаходяться в даному стані:

$$f(E) = \langle N(E) \rangle.$$

Отже, щоб знайти повну функцію розподілу, необхідно розрахувати функції $g(E)dE$ і $f(E)$.

Нехай система складається із N частинок. Введемо в розгляд багатомірний простір всіх координат й імпульсів частинок системи. Стан кожної частинки визначається трьома координатами x, y, z і трьома відповідними проєкціями імпульсу P_x, P_y, P_z . Тоді стан системи з N частинок визначається заданням $6N$ змінних. Цей $6N$ -мірний простір називається *фазовим простором*. Кожному мікростану системи відповідає точка в $6N$ -мірному фазовому просторі. Величина

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_V \Delta\Gamma_P = dx dy dz dP_x dP_y dP_z$$

називається елементом об'єму фазового простору. Тут $\Delta\Gamma_V = dx dy dz$ - елемент об'єму простору координат, $\Delta\Gamma_P = dP_x dP_y dP_z$ - елемент об'єму простору імпульсів. Беручи до уваги співвідношення невизначеностей Гейзенберга, елементарний об'єм $\Delta\Gamma$ не може бути меншим від

h^3 : $\Delta\Gamma = h^3$, де h – стала Планка.

Для вільних мікрочастинок, які не взаємодіють і на які не діють зовнішні поля, $\Delta\Gamma_V = V$ і елемент тримірного простору імпульсів дорівнює

$$\Delta\Gamma_P = \frac{h^3}{V}.$$

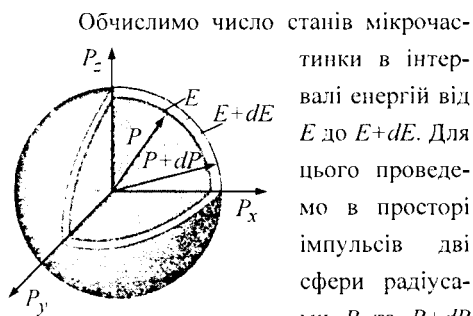


Рис. 348

Обчислимо число станів мікрочастинки в інтервалі енергій від E до $E+dE$. Для цього проведемо в просторі імпульсів дві сфери радіусами P та $P+dP$ (рис. 348). Між цими сферами знаходиться шаровий проміжок, що має об'єм $4\pi P^2 dP$. Число елементарних фазових комірок, що знаходяться в цьому шарі, дорівнює:

$$dZ = \frac{4\pi P^2 dP}{\Delta\Gamma_P} = \frac{4\pi V}{h^3} P^2 dP.$$

Оскільки кожній комірниці відповідає один стан мікрочастинки, то число станів, що припадає на інтервал dP , що знаходиться між P і $P+dP$, дорівнює:

$$g(P)dP = \frac{4\pi V}{h^3} P^2 dP.$$

Для вільних частинок

$$E = \frac{P^2}{2m}, \quad dE = \frac{P}{m} dP.$$

Звідси

$$P = \sqrt{2mE}, \quad dP = \frac{m}{\sqrt{2mE}} dE.$$

Тоді число станів мікрочастинки в інтервалі енергій dE , що знаходиться між E та $E+dE$:

$$g(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE.$$

Поділивши праву і ліву частини

цього співвідношення на dE , отримаємо *густину станів* $g(E)$, що виражає кількість станів мікрочастинки, що містяться в одиничному інтервалі енергії:

$$g(E) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}.$$

У випадку електронів кожній фазовій комірниці відповідають два стани, що відрізняються один від одного напрямками спіну. Тому для електронів

$$g(E)dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE,$$

$$g(E) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}.$$

З'ясуємо тепер, який вигляд може мати функція розподілу $f(E)$, яка визначає ймовірність заповнення частинками станів.

При розгляді принципу нерозрізності тотожних частинок було встановлено, що залежно від симетрії хвильової функції всі елементарні частинки діляться на два класи:

- частинки з півцілим спіном – ферміони
- частинки з цілим спіном – бозони.

В кожній комірниці (в кожному квантовому стані) не може бути більше одного ферміона з даним повним набором квантових чисел або двох з антипаралельними спінами, а число бозонів в комірниці може бути довільним.

Ідеальний газ із ферміонів – ферміон-газ – описується *квантовою статистикою Фермі-Дірака*. Функція розподілу ферміонів за станами з різною енергією має такий вигляд:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}.$$

Цей вираз називається *функцією розподілу Фермі-Дірака*. Тут μ – хіміч-

ний потенціал. Він визначає зміну внутрішньої енергії системи при додаванні до неї однієї частинки за умови, що всі інші величини, від яких залежить внутрішня енергія, фіксовані.

Величина $f(E_i)$ дорівнює середньому числу $\langle N(E_i) \rangle$ ферміонів, що знаходяться в стані з енергією E_i . Тому

$$\langle N(E_i) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1}$$

Ідеальний газ із бозонів - бозе-газ - описують квантовою **статистикою Бозе-Ейнштейна**. Розподіл бозонів за енергіями впливає із так званого великого канонічного розподілу Гіббса (із змінною кількістю частинок) при умові, що кількість тотожних бозонів у даному квантовому стані може бути довільною:

$$\langle N(E_i) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1}$$

Цей розподіл називається **розподілом Бозе-Ейнштейна**. Значення хімічного потенціалу μ знаходять з умови, що сума всіх $\langle N(E_i) \rangle$ дорівнює повній кількості N частинок в системі:

$$\sum_i \langle N(E_i) \rangle = N$$

З формули Бозе-Ейнштейна і з безпосередньої вимоги $\langle N(E_i) \rangle > 0$ видно, що хімічний потенціал бозе-газу не більший від нуля: $\mu \leq 0$, бо тільки при цій умові експонента в знаменнику розподілу не буде меншою від одиниці навіть при $i=0$ ($E_i = 0$).

Якщо $e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} \gg 1$,

то розподіл Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака переходять у класичний розподіл Максвелла-Больцмана:

$$\langle N_i \rangle = A e^{-\frac{E_i}{kT}}, \text{ де } A = e^{\frac{\mu}{kT}}$$

Отже, при великих температурах обидва „квантові” гази ведуть себе так, як класичний ідеальний газ.

Система частинок називається **виродженою**, якщо її властивості істотно відрізняються від властивостей систем, що підпорядковуються класичній статистиці. Поведінка як бозе-газу, так і фермі-газу відрізняється від класичного газу, вони є виродженими газами. Виродження газу стає істотним при досить низьких температурах і великих густинах. Параметром виродження називається величина A . При $A \ll 1$, тобто при малому ступені виродження розподіли Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака переходять в класичний розподіл Максвелла-Больцмана.

Температурою виродження T_g називається температура, нижче якої проявляються квантові властивості ідеального газу, зумовлені тотожністю частинок, тобто T_g - температура, при якій виродження стає істотним.

Якщо $T \gg T_g$, то поведінка системи частинок описується класично.

§138. Розподіл електронів провідності в металі за енергіями. Енергія Фермі

Метал для вільних електронів є середньою потенціальною ямою, вихід з якої

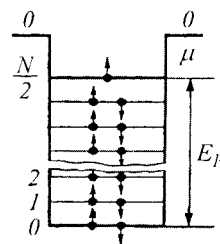


Рис. 349

вимагає затрати енергії на подолання сил зв'язку, що утримують електрони в металі. На рис. 349 наведена схема такої потенціальної ями. Горизонтальними лі-

ніями показані енергетичні рівні, які можуть займати електрони. Розподіл електронів на різних енергетичних рівнях здійснюється за принципом Паулі, згідно з яким на одному рівні не може бути двох або більше однакових (з однаковим набором чотирьох квантових чисел) електронів, вони повинні відрізнятися якоюсь характеристикою, наприклад, напрямком спіну. Отже, за квантовою теорією, електрони в металі не можуть розміщуватися на найнижчому енергетичному рівні навіть при температурі $T=0\text{ K}$. Принцип Паулі вимушує електрони підніматися вгору по „енергетичній драбині”. Якщо електронний газ містить N електронів, то останнім зайнятим виявиться рівень $\frac{N}{2}$.

Найвищий енергетичний рівень, зайнятий електронами, при $T=0\text{ K}$ називається **рівнем Фермі** для виродженого електронного газу.

Рівень Фермі відповідає максимальній кінетичній енергії E_F , яку може мати електрон в металі при абсолютному нулі. Її називають **енергією Фермі**.

Рівень Фермі буде тим вищим, чим більша густина електронного газу. Роботу виходу електрона з металу треба враховувати не від дна потенціальної ями, як це робилось в класичній теорії, а від рівня Фермі.

Електрони провідності в металі можна розглядати як ідеальний газ, що описується розподілом Фермі-Дірака. Середнє число $N(E)$ електронів у квантовому стані на енергетичному рівні з енергією E дорівнює

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$$

При абсолютному нулі всі стани з енергією $E < E_F$ зайняті електронами, стани з енергією $E > E_F$ вільні. Іншими словами, при $T=0\text{ K}$ ймовірність заповнення електронами станів з енергією $E < E_F$ дорівнює 1, ймовірність заповнення станів з енергією $E > E_F$ дорівнює нулю:

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1, & E < E_F, \\ 0, & E > E_F. \end{cases}$$

Щоб отримати цей результат з допомогою розподілу Фермі-Дірака, необхідно вважати, що при $T=0\text{ K}$ хімічний потенціал електронного газу, який відрахований від дна потенціальної ями, дорівнює енергії Фермі E_F :

$$\mu_0 = E_F.$$

Тоді

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

Якщо $E < E_F$, то при $T=0\text{ K}$

$$e^{\frac{E-E_F}{kT}} = \frac{1}{e^{\frac{E_F-E}{kT}}} \rightarrow 0 \quad \text{і} \quad \langle N(E) \rangle = 1.$$

Якщо $E > E_F$, то при $T=0\text{ K}$

$$e^{\frac{E-E_F}{kT}} \rightarrow \infty \quad \text{і} \quad \langle N(E) \rangle = 0.$$

На рис. 350 наведений графік функції розподілу Фермі-Дірака при абсолютному нулі. Він має вигляд сходинок, що обривається при

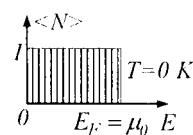


Рис. 350

$$E = \mu_0 = E_F.$$

Повна функція розподілу Фермі-Дірака при абсолютному нулі ($\langle N(E) \rangle = 1$):

$$N(E)dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} dE.$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$N = \int_0^{E_F} \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} dE = \frac{8\pi V}{3h^3} E_F^{\frac{3}{2}} (2m)^{\frac{3}{2}}.$$

Звідси визначаємо енергію Фермі E_F :

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

де $n = \frac{N}{V}$ - концентрація електронного газу в металі.

Введемо **температуру Фермі**, яка визначається із співвідношення $T_F = \frac{E_F}{k}$, де k - стала Больдмана. Вона показує, при якій температурі невироджений газ з масою молекул, що дорівнює масі електрона, мав би енергію теплового руху kT , що дорівнює енергії Фермі. Для електронів в металі $T_F \approx 10^4$ K. Жоден метал при таких температурах не може існувати в твердому стані. Тому для всіх температур, при яких метал може існувати у твердому стані, електронний газ у металі - вироджений.

При температурі $T \neq 0$ K якщо $E = E_F$, функція розподілу Фермі-Дірака $\langle N(E) \rangle = \frac{1}{2}$. Отже, зі статистичної точки зору ймовірність заповнення рівня Фермі при $T > 0$ K дорівнює $\frac{1}{2}$.

При підвищенні температури електрони зазнають теплових збуджень і переходять на вищі енергетичні рівні, внаслідок чого змінюється характер їх розподілу за станами. При кімнатній температурі $kT \approx 0,025$ eV, а енергія Фермі $E_F = 3-10$ eV. В інтервалі температур, в якому енергія kT теплового руху значно менша, теплових збуджень можуть зазнавати електрони лише вузького прошарку kT , розміщеного безпосередньо біля рівня Фермі (рис. 351).

Енергія kT теплового руху недостатня для збудження електронів глибоких рівнів.

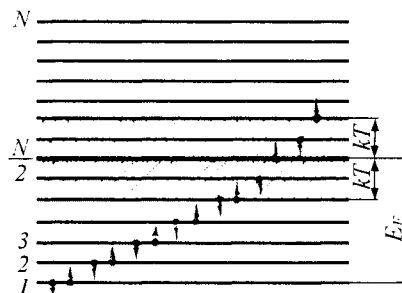


Рис. 351

В результаті теплового збудження частина електронів, що мають енергію, меншу E_F , переходить на рівні з енергією, більшою від E_F , встановлюється новий їх розподіл за станами. На рис. 352 показані криві розподілу електронів за станами при $T=0$ K (крива 1) і при $T>0$ K (крива 2).

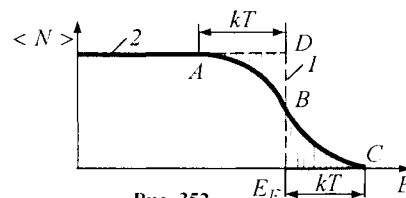


Рис. 352

Підвищення температури викликає розмивання розподілу на глибину kT і появу „хвоста” розподілу BC , що розміщується правіше E_F . У першому випадку середнє число електронів менше від одиниці, а в другому - більше від нуля. Чим вища температура, тим суттєвіше змінюється функція розподілу. Сам „хвіст” BC описується уже максвеллівським розподілом.

На рис. 352 заштриховані площі, пропорційні до кількості електронів ΔN , що покидають стани з енергією $E < E_F$ (площа ABD) і що переходять на рівні, які розміщені вище E_F (площа E_F-BC). За величиною ці площі рівні, оскільки вони виражають одне і те ж число електронів.

При кімнатній температурі $\frac{\Delta N}{N} < 1\%$, при $T=1000\text{ K}$ $\frac{\Delta N}{N} \approx 1-2\%$.

Тому у всьому діапазоні температур, в якому електронний газ в металі є виродженим, його розподіл мало відрізняється від розподілу при абсолютному нулі.

Якщо $(E - E_f) \gg kT$, то одиницею в знаменнику можна нехтувати порівняно з експонентою і тоді розподіл Фермі-Дірака переходить у розподіл Максвелла-Больцмана:

$$\langle N(E) \rangle = e^{\frac{\mu}{kT}} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Отже, при $(E - E_f) \gg kT$, тобто при високих температурах до електронів в металі застосовна класична статистика, в той час коли $E - E_f \ll kT$, до них застосовна лише квантова статистика Фермі-Дірака.

Невиродженим електронним газом є сукупність вільних електронів у власних напівпровідників.

§139. Енергетичні зони в кристалах

Використовуючи рівняння Шредінгера, можна розглянути задачу про кристал, наприклад, знайти можливі значення енергії, а також відповідні енергетичні стани електронів та ядер.

Рівняння Шредінгера для кристала має такий вигляд:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i - \frac{\hbar^2}{2} \sum_k \frac{\Delta_k}{M_k} \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) + \left[\frac{1}{2} K \sum_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} + V(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots).$$

Тут $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ – координати електронів, а

$\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots$ – координати ядер, m – маса електрона, M_k – маса ядра k -го атома. Перший і другий доданки відповідають сумарній кінетичній енергії всіх електронів та ядер. Наступні доданки описують кулонівську взаємодію між електронами, взаємодію між ядрами і взаємодію між електронами та ядрами. У правій частині рівняння E – повна енергія системи, яка складається із енергії електронів і ядер.

Але як у класичній, так і у квантовій механіці відсутні методи точного розв'язання динамічної задачі для системи багатьох частинок. Тому цю задачу розв'язують наближено.

Спочатку використовується *адіабатичне наближення*. Квантово-механічна система поділяється на важкі і легкі частинки – ядра і електрони. Оскільки маси і швидкості цих частинок значно відрізняються, можна вважати, що рух електронів відбувається в полі нерухомих ядер, а ядра, що повільно рухаються, знаходяться в усередненому полі всіх електронів. Вважаючи, що ядра у вузлах кристалічної ґратки нерухомі, рух електронів розглядається в постійному періодичному полі ядер.

Адіабатичне наближення математично приводить до того, що рівняння Шредінгера розпадається на два окремі рівняння, перше з яких описує рух легких електронів, а друге – важких ядер. В результаті рівняння для електронів має вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i \Psi + \left[\frac{1}{2} K \sum_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \right] \Psi = E \Psi.$$

Тут хвильова функція залежить ли-

ше від координат електронів:

$$\psi = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots),$$

а $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$ – енергія взаємодії електронів з періодичним полем ядер.

Далі використовується *наближення самоузгодженого поля*. Взаємодія даного електрона з усіма іншими електронами замінюється дією на нього стаціонарного електричного поля, що має періодичність кристалічної ґратки. Це поле створюється усередненим в просторі зарядом усіх інших електронів. За допомогою цього поля система взаємодіючих електронів замінюється системою не взаємодіючих електронів, внаслідок чого багатеелектронна задача зводиться до одноелектронної.

Рівняння Шредінґера в цьому випадку набирає вигляду:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}),$$

де $U(\vec{r})$ – потенціальна енергія одного електрона не лише в періодичному полі ядер ґратки, але і в усередненому періодичному полі всіх інших електронів.

Існують два наближені методи розв'язання цього рівняння. В першому з них передбачається, що кінетична енергія електрона набагато більша за його потенціальну енергію (*метод слабого зв'язку*). Електрон є майже вільний, силове поле

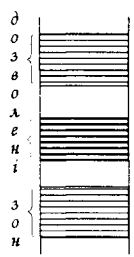


Рис. 353

ґратки чинить на нього лише незначну збурюючу дію. Слабкому зв'язку відповідають валентні електрони. В результаті розв'язування рівняння Шредінґера виявляється, що спектр можливих значень енергій валентних електронів розпадається на ряд дозволених і заборонених

зон, які чергуються. В межах дозволених зон енергія змінюється квазінеперервно. Значення енергії, що належать забороненим зонам, не можуть реалізуватися (рис. 353).

У другому наближенні, навпаки, вважається, що електрон сильно зв'язаний зі своїм атомом (ядром) і не може вільно переміщатися по ґратці (*метод сильного зв'язку*). Якісно задача розв'язується так. Із окремих атомів будується кристалічна ґратка і з'ясовується, як впливають сусідні атоми кристала на поведінку електрона в окремому атомі, тобто досліджується вплив поля сусідніх атомів на енергетичні рівні.

Розмістимо N атомів натрію у вигляді просторової ґратки, яка властива кристалу натрію, але на великих відстанях один від одного, щоб взаємодією між ними можна було знехтувати. В цьому випадку енергетичні стани електронів в кожному атомі можна вважати такими, як і в окремо взятому ізольованому атомі. На рис. 354 наведена енергетична схема двох таких атомів.

Кожний з них зображений у вигляді потенціальної ями, всередині якої проведені рівні $1s, 2s, 2p, 3s, \dots$. Рівні $1s, 2s$ і $2p$ у натрію укомплектовані повністю, рівень $3s$ – наполовину; рівні, які розміщені вище $3s$, – вільні.

Ізольовані атоми відокремлені один від одного потенціальними бар'єрами завтовшки $r \gg a$, де a – стала ґратки. Потенціальний бар'єр перешкоджає вільному переходу електронів від одного атома до іншого.

У верхній частині рис. 354 показана якісна картина розподілу густини ймовір-

ності $\rho = 4\pi r^2 \Psi \Psi^*$ виявлення електронів на даній відстані від ядра. Максимуми кривих відповідають приблизно положенню борівських орбіт для цих електронів.

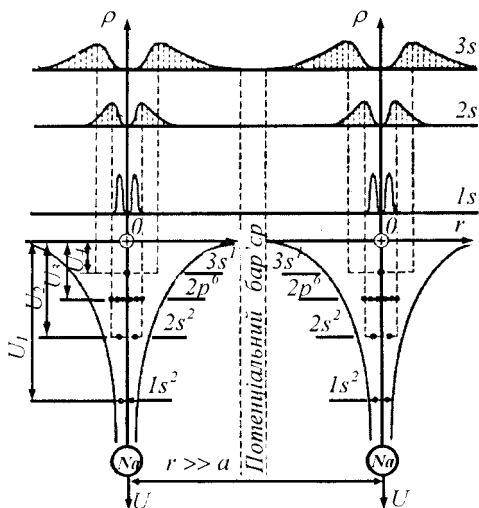


Рис. 354

Тепер будемо повільно зближати атоми ґратки, не порушуючи її симетрію. На рис. 355 наведена картина, яка відповідає такому зближенню. З цього рисунка видно, що потенціальні криві, які відділяють сусідні атоми (показані пунктиром), частково накладаються одна на одну і дають результуючі криві, які проходять нижче нульового рівня 00 (на рисунку вони показані суцільними лініями).

Отже, зближення атомів зменшує товщину потенціального бар'єру до значення порядку a і зменшує його висоту. Для електронів рівня $1s$ висота бар'єра стає U'_1 , для електронів $2s$ - U'_2 , для електронів $2p$ - U'_3 . Для електронів рівня $3s$ висота бар'єра виявляється нижчою від початкового положення рівня $3s$ в атомі натрію. Тому валентні електрони цього рівня отримують можливість практично без перешкод переходити від одного атома до

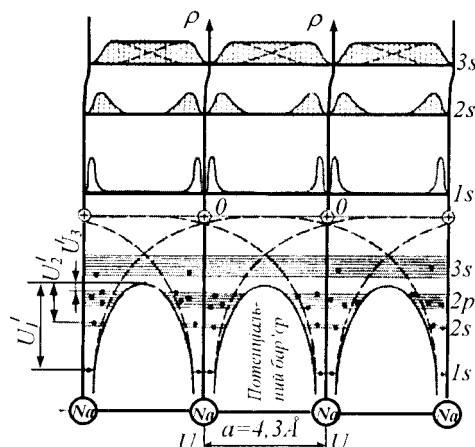


Рис. 355

іншого. Про це свідчить і характер електронних хмар валентних електронів, вони перекриваються настільки сильно, що створюють результуючу хмару рівномірної густини (рис. 355). Це відповідає стану повної їх колективізації в ґратці. Такі колективні електрони називаються вільними, а їх сукупність – електронним газом.

Внаслідок різкого зменшення товщини і висоти потенціального бар'єра при зближенні атомів можливість переміщення в кристалі отримують не лише валентні електрони, але й електрони, що розміщені на інших рівнях атомів. Переміщення відбувається шляхом тунельного переходу електронів через бар'єри, що відокремлюють сусідні атоми.

Якщо колективні електрони зберігають досить сильний зв'язок з атомами, то їх потенціальну енергію можна подати у такому вигляді:

$$U = U_a + \delta U,$$

де U_a – потенціальна енергія електрона в ізольованому атомі. Для кристала вона є періодичною функцією з періодом, що дорівнює параметру ґратки, оскільки енергія електрона повторюється при переході його

від одного атома до іншого (рис. 355); δU - доданок, який враховує вплив сусідніх атомів на цю енергію.

Якщо знехтувати доданком δU , тобто розглядати так зване нульове наближення, то в ролі хвильової функції і енергії електрона в кристалі слід взяти хвильову функцію ψ_a і енергію $E_a(n,l)$ електрона в ізолюваному атомі.

Відмінність між кристалом й атомом полягає в цьому випадку в наступному: в той час як в ізолюваному атомі даний енергетичний рівень $E_a(n,l)$ є єдиним, в кристалі, що складається з N атомів, він повторюється N разів. Кожний рівень ізолюваного атома в кристалі стає N – кратно виродженим.

Якщо врахувати доданок δU в потенціальній енергії, то у міру зближення ізолюваних атомів і утворення з них ґратки кожний атом потрапляє у поле своїх сусідів, яке зростає. Така взаємодія приводить до зняття виродження. Тому кожний енергетичний рівень, не вироджений в ізолюваному атомі, розщеплюється на N близько розміщених один від одного підрівнів, що утворюють енергетичну зону. На кожному підрівні згідно з принципом Паулі може знаходитись не більше двох електронів з антипаралельними спінами.

Якщо енергетичний рівень мав в атомі $(2l+1)$ – кратне виродження, то відповідна йому енергетична зона буде складатися із $N(2l+1)$ підрівнів. Так, s - рівень дає s - зону, яка складається із N підрівнів і здатна вмістити $2N$ електронів; p - рівень дає p - зону, яка складається із $3N$ підрівнів і здатна вмістити $6N$ електронів, і т.д.

Найбільший вплив поле ґратки чи-

нить на зовнішні валентні електрони атомів. Тому стани цих електронів в кристалі відчувають найбільші зміни, а енергетичні зони, які утворені з енергетичних рівнів цих електронів, виявляються найбільш широкими.

Внутрішні ж електрони, які сильно зв'язані з ядром, відчувають лише незначні збурення від інших атомів, внаслідок чого їх енергетичні рівні в кристалі залишаються практично такими ж вузькими, як і в ізолюваних атомах. На рис. 356 наведена схематична картина утворення енергетичних зон в кристалі із дискретних атомних рівнів.

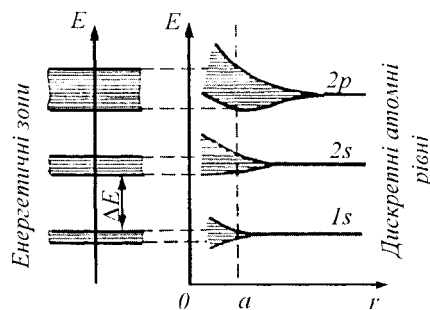


Рис. 356

Отже, кожному енергетичному рівню ізолюваного атома в кристалі відповідає зона дозволених рівнів: рівню $1s$ – зона $1s$, рівню $2p$ – зона $2p$ і т.д.

Зони дозволених енергій розділені областями заборонених енергій – забороненими зонами. Із збільшенням енергії електрона в атомі ширина дозволених зон збільшується, ширина заборонених – зменшується.

Дозволені енергетичні зони в твердому тілі можуть бути різним чином заповнені електронами. У граничних випадках вони можуть бути цілком заповнені або цілком вільні. Електрони в твердих тілах можуть переходити з однієї дозволеної

зони в іншу. Для переходу електрона з нижньої зони в сусідню верхню зону необхідно затратити енергію, що дорівнює ширині забороненої зони, яка розміщена між ними.

Для внутрішніх переходів електронів в межах зони необхідна дуже мала енергія, тому, що відстані між сусідніми енергетичними рівнями в зоні дорівнює приблизно $10^{-22} eV$. Наприклад, для цього достатньо енергії $10^{-4} - 10^{-8} eV$, що отримує електрон в метали під дією електричного поля на довжині вільного пробігу при звичайних різницях потенціалів. Під дією спеціального збудження електронам може бути надана енергія, достатня як для внутрішньозонних, так і для міжзонних переходів.

§140. Розподіл електронів по енергетичних зонах. Валентна зона і зона провідності. Метали, діелектрики і напівпровідники

Зонна теорія твердих тіл дозволила з єдиної точки зору пояснити існування металів, діелектриків і напівпровідників, пояснюючи відмінності в їх електричних властивостях неоднаковим заповненням електронами дозволених зон і різною шириною заборонених енергетичних зон.

Ступінь заповнення електронами енергетичних рівнів у зоні визначається заповненням відповідного атомного рівня. Якщо, наприклад, якийсь рівень атома повністю заповнений електронами відповідно до принципу Паулі, то утворена з таких рівнів енергетична зона також повністю заповнена.

Найвища зона, яка цілком заповнена електронами при $T=0 K$, називається *валентною зоною*.

Зона, яка заповнена електронами

частково або вільна при $T=0 K$, називається *зоною провідності*.

Залежно від ступеня заповнення енергетичних зон електронами і ширини забороненої зони можливі чотири випадки (рис. 357).

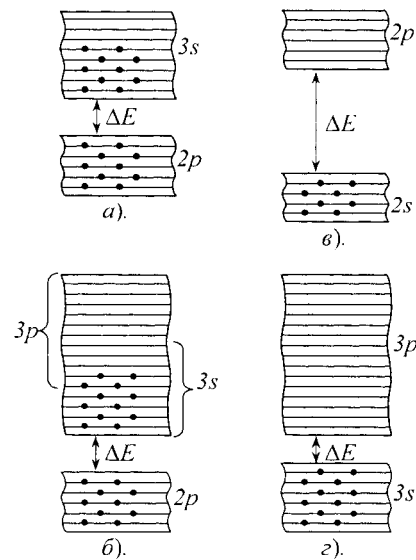


Рис. 352

У першому випадку найвища зона, що містить електрони, заповнена лише частково, тобто в ній є вакантні рівні (рис. 357а). У такому разі електрон, отримавши малу енергетичну добавку за рахунок теплового руху або електричного поля, зможе перейти на вищий енергетичний рівень самої зони, тобто стати вільним і брати участь у провідності. Внутрішній перехід можливий, оскільки, наприклад, при $T=1 K$ енергія теплового руху $kT \approx 10^{-4} eV$, тобто більша від різниці енергій між сусідніми енергетичними рівнями зони ($10^{-22} eV$). Отже, тіло буде провідником електричного струму. Саме це властиве *металом*.

Тверде тіло є провідником електричного струму і в тому випадку, коли

валентна зона перекривається вільною зоною, що приводить до неповного заповнення зони (рис. 357б). Це має місце для лужно-земельних елементів, що утворюють другу групу періодичної системи Менделєєва. У даному випадку утворюється так звана „гібридна“ зона, яка заповнюється валентними електронами лише частково.

Можливий також перерозподіл електронів між зонами, що виникають із рівнів різних атомів, який може привести до того, що в кристалі виявиться одна цілком заповнена (валентна) зона і одна вільна зона (зона провідності). Тверді тіла, у яких енергетичний спектр електронних станів складається лише з валентної зони і зони провідності, є діелектриками або напівпровідниками залежно від ширини забороненої зони ΔE .

Якщо ширина забороненої зони кристала порядку декількох електронвольт, то тепловий рух не може перевести електрони з валентної зони в зону провідності і кристал є *діелектриком*, залишаючись ним при всіх реальних температурах. (рис. 357в). Для типових діелектриків $\Delta E > 3eV$. Так, для алмазу $\Delta E \approx 5,2eV$, для нітриду бору $\Delta E \approx 4,6eV$, для Al_2O_3 $\Delta E \approx 7eV$ і т. д.

Якщо заборонена зона досить вузька $\Delta E \leq 1eV$, перехід електронів з валентної зони в зону провідності може бути здійснений порівняно легко: або тепловим збудженням, або за рахунок зовнішнього джерела, здатного передати електронам енергію ΔE (рис. 357г). Такий кристал буде *напівпровідником*. При температурах, близьких до $0 K$, напівпровідники ведуть себе як діелектрики, оскільки переходу

електронів у зону провідності не відбувається. Для типових напівпровідників $\Delta E \leq 1eV$. Так, для германію $\Delta E = 0,66eV$, для кремнію $\Delta E = 1,08eV$, для антимоніду індію $\Delta E = 0,17eV$ і т. д.

Іноді речовини поділяють на провідники, напівпровідники і діелектрики за величиною питомого опору при кімнатній температурі:

$$\rho = 10^{-8} \div 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{ м} \text{ – провідники;}$$

$$\rho = 10^8 \div 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{ м} \text{ – напівпровідники;}$$

$$\rho = 10^9 \div 10^{17} \text{ Ом} \cdot \text{ м} \text{ – ізолятори.}$$

§141. Власна провідність напівпровідників

Напівпровідниками є тверді тіла, які при $T=0$ характеризуються повністю зайнятою електронами валентною зоною, відокремленою від зони провідності порівняно вузькою ($\Delta E \leq 1eV$) забороненою зоною.

У природі напівпровідники існують у вигляді хімічних елементів (елементи IV, V, VI груп), наприклад, *Si, Ge, As, Se, Te*, і хімічних сполук, (оксиди, сульфід, селенід, сплави елементів різних груп).

Розрізняють власні і домішкові напівпровідники. Власними напівпровідниками є хімічно чисті напівпровідники, їх провідність називається власною провідністю.

На рис. 358 наведена спрощена схема структури власного напівпровідника. При абсолютному нулі його валентна зона укомплектована повністю, зона провідності, яка розміщена над валентною зоною на відстані ΔE , є незаповненою.

Отже, при $T=0$ і за відсутності інших зовнішніх факторів власні напівпро-

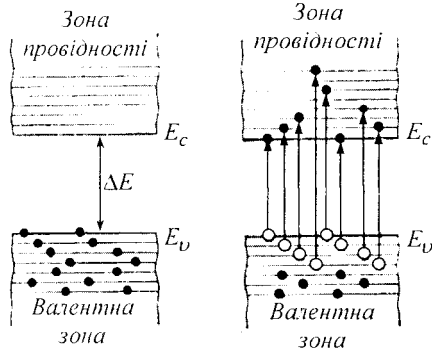


Рис. 358

Рис. 359

відники ведуть себе як діелектрики. При підвищенні температури електрони з верхніх рівнів валентної зони можуть переходити на нижні рівні зони провідності (рис. 359). При накладанні на кристал електричного поля вони переміщуються проти поля і створюють електричний струм. Таким чином, така зона внаслідок часткового укомплектування електронами, стає зоною провідності.

Провідність власних напівпровідників, зумовлена електронами, називається електронною провідністю або провідністю n-типу.

Внаслідок теплових переходів електронів із валентної зони в зону провідності у валентній зоні виникають вакантні стани, які називаються дірками. У зовнішньому електричному полі на місце, яке звільнилось від електрона, – дірку – може переміститися електрон із сусіднього рівня, а дірка появиться в тому місці, яке звільнив електрон і т.д. Такий процес рівнозначний переміщенню дірки в напрямку, протилежному до руху електрона, так, як би дірка мала позитивний заряд, який дорівнює за величиною заряду електрона.

Провідність власних напівпровідників, зумовлена дірками, називається дірковою провідністю або провідністю p-типу.

Отже, у власних напівпровідниках спостерігаються два механізми провідності – електронна і діркова. Число електронів в зоні провідності дорівнює числу дірок у валентній зоні, тобто $N_e = N_p$.

Провідність напівпровідників завжди є збудженою, тобто появляється лише під дією зовнішніх факторів (температури, опромінювання, сильних електричних полів і т.д.).

Розрахунок концентрації електронів у зоні провідності дає такий результат:

$$n_e = 2 \left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_c - E_F}{kT}},$$

а розрахунок, який виконаний для дірок, що виникають у валентній зоні, приводить до виразу:

$$n_p = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E + E_F}{kT}},$$

де m_e^* і m_p^* – ефективна маса електрона і дірки. Ця маса вводиться так, щоб у ній враховувалася дія на електрон чи дірку внутрішнього періодичного поля кристала і щоб можна було вважати, що ці частинки з ефективною масою рухаються лише під впливом одного зовнішнього поля.

З виразів для n_e та n_p видно, що концентрація вільних носіїв заряду в даній зоні визначається відстанню цієї зони від рівня Фермі: чим більша ця відстань, тим нижча концентрація носіїв.

Добуток n_e на n_p для довільного напівпровідника дорівнює:

$$n_e n_p = 4 \left(\frac{2\pi kT}{h^2} \right)^3 (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}.$$

Ця формула показує, що при фіксованій температурі добуток концентрації

електронів і дірок для даного напівпровідника є величиною сталою.

У власних напівпровідниках концентрація електронів провідності n_e в зоні провідності дорівнює концентрації дірок n_p у валентній зоні: $n_e = n_p$ і

$$2 \left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_F}{kT}} = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E + E_F}{kT}}.$$

Звідси

$$e^{\frac{2E_F}{kT}} = \left(\frac{m_p^*}{m_e^*} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}.$$

Взявши натуральний логарифм із цього виразу, отримуємо

$$\frac{2E_F}{kT} = -\frac{\Delta E}{kT} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m_p^*}{m_e^*} \right).$$

Розв'язуючи це рівняння відносно E_F , маємо

$$E_F = -\frac{\Delta E}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p^*}{m_e^*}.$$

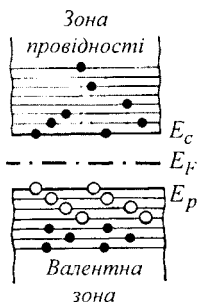


Рис. 360

Цей вираз визначає положення рівня Фермі у власних напівпровідниках при абсолютному нулі ($T = 0$)

$$E_F = -\frac{\Delta E}{2},$$

тобто рівень Фермі розміщується якраз посередині забороненої зони (рис. 360).

Враховуючи, що $n_e = n_p$, з виразу $n_e n_p$ отримуємо:

$$n_e = n_p = \sqrt{n_e n_p} = 2 \left(\frac{2\pi \sqrt{m_e^* m_p^*} kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Звідси видно, що концентрація носіїв струму у власному напівпровіднику виз-

начається шириною забороненої зони ΔE і температурою напівпровідника T .

Внаслідок наявності у власному напівпровіднику двох типів носіїв – електронів і дірок – його питома електропровідність складається з провідності $\sigma_e = n_e e u_e$, яка обумовлена наявністю вільних електронів, що мають рухливість u_e , і провідності $\sigma_p = n_p e u_p$, що обумовлена наявністю дірок, які мають рухливість u_p . Повна питома провідність власного напівпровідника

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_p =$$

$$= 2 \left(\frac{2\pi \sqrt{m_e^* m_p^*} kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e (u_e + u_p) e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Рухливість носіїв заряду визначається їх розсіюванням на теплових коливаннях ґратки. Розрахунок показує, що

$$u_e \approx m_e^{*-3/2} T^{-3/2} \quad \text{і} \quad u_p \approx m_p^{*-3/2} T^{-3/2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{const} (m_p^* m_e^*)^{3/2} (m_e^{*-3/2} + m_p^{*-3/2}) e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} = \\ &= \sigma_\infty e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} \end{aligned}$$

З цього виразу видно, що при $T \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \sigma_\infty$, тобто σ_∞ визначає питому провідність напівпровідника при $T \rightarrow \infty$.

Характерною особливістю власних напівпровідників є збільшення їх питомої провідності із підвищенням температури. З погляду зонної теорії ця обставина пояснюється так: при підвищенні температури зростає кількість електронів, які внаслідок теплового збудження переходять в зону провідності і беруть участь у перенесенні електричного заряду.

Залежність σ від T зручно пред-

ставляти у напівлогарифмічних координатах. Логарифмуючи вираз $\sigma = \sigma_{\infty} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$, знайдемо:

$$\ln \sigma = \ln \sigma_{\infty} - \frac{\Delta E}{2kT}.$$

Якщо по осі абсцис відкласти $\frac{1}{T}$, а по осі ординат $\ln \sigma$, то отримуємо пряму (рис. 361), тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює $\frac{\Delta E}{2k}$. Звідси ширина забороненої зони становить $\Delta E = 2ktg\alpha$.

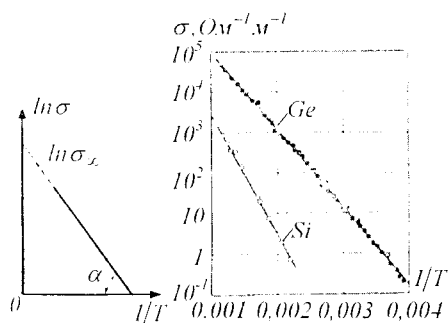


Рис. 361

Рис. 362

На рис. 362 наведена залежність $\ln \sigma$ від $\frac{1}{T}$ для чистого германію і кремнію, які отримані експериментально. Ширина забороненої зони, визначена за нахилом кривих, виявилася для *Ge* $\Delta E = 0,72 \text{ eV}$; для *Si* $\Delta E = 1,2 \text{ eV}$.

У напівпровідниках поряд з процесом генерації електронів і дірок відбувається і процес рекомбінації: електрони переходять із зони провідності у валентну зону, віддаючи енергію гратці і випускаючи кванти електромагнітного випромінювання. В результаті для кожної температури встановлюється певна рівноважна концентрація електронів і дірок.

§142. Домішкова провідність напівпровідників

Провідність напівпровідників, зумовлена домішками, називається **домішковою провідністю**, а самі напівпровідники – домішковими напівпровідниками.

Домішками є атоми сторонніх елементів, надлишкові атоми, пусті вузли або атоми в міжвузлях і механічні дефекти. Наявність в напівпровіднику домішки суттєво змінює його провідність.

Розглянемо кристал германію в якому кожний атом зв'язаний з чотирма сусідами.

При заміщенні атома германію *Ge* п'ятивалентним атомом арсену *As* один електрон не може утворити ковалентний зв'язок, він виявляється зайвим і може бути при теплових коливаннях гратки легко відщеплений від атома, тобто стати вільним (рис. 363).

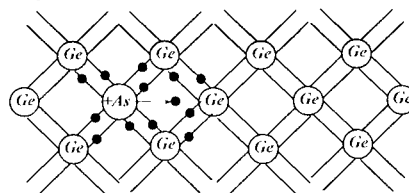


Рис. 363

Утворення вільного електрона не супроводжується порушенням ковалентного зв'язку, дірка не виникає. Надлишковий позитивний заряд, що виникає поблизу атома домішки, зв'язаний з атомом домішки, і тому переміщатися по гратці не може.

З точки зору зонної теорії цей процес можна пояснити так. Введення домішки створює періодичне поле гратки, що приводить до виникнення в забороненій зоні енергетичного рівня *D* валентних електронів арсену, який називається домішковим рівнем (рис. 364). У випадку *Ge* з домішкою *As* цей рівень розміщується від

дна зони провідності на відстані $\Delta E_D = 0,015 eV$. Оскільки $\Delta E_D \ll \Delta E$, то

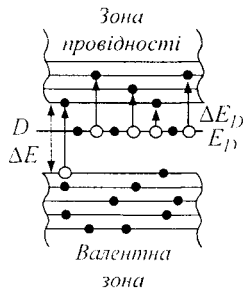


Рис. 364

Дірки, які утворюються при цьому, локалізуються на нерухомих атомах арсену і у провідності участі не беруть.

Отже, в напівпровідниках з домішкою, валентність якої на одиницю більша, ніж валентність основних атомів, носіями струму є електрони, виникає електронна домішкова провідність *n*-типу.

Напівпровідники з такою провідністю називаються електронними (n-типу).

Домішки, які є джерелом електронів, називаються **донорами**, а енергетичні рівні цих домішок – **донорними рівнями**.

Припустимо тепер, що в ґратку германію (*Ge*) введено домішковий атом індію (*In*) з трьома валентними електронами (рис. 365). Для утворення зв'язків з чотирма сусідами в атома індію не вистачає одного електрона, один із зв'язків залишається некомплектованим і четвертий електрон може бути захоплений від сусіднього атома германію, де утворюється дірка.

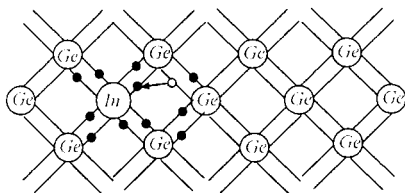


Рис. 365

Дірки не залишаються локалізованими, а переміщуються в ґратці *Ge* як вільні позитивні заряди. Надлишковий від'ємний заряд, що виникає поблизу атома домішки, зв'язаний з атомом домішки і в ґратці переміщатися не може.

Згідно із зонною теорією введення тривалентного атома в ґратку *Ge* приводить до виникнення в забороненій зоні домішкового рівня *A*, не зайнятого електронами (рис. 366). У випадку *Ge* з домішкою

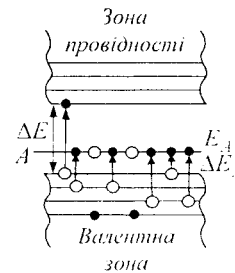


Рис. 366

In цей рівень локалізується вище верхнього краю валентної зони на $\Delta E_A = 0,01 eV$. При порівняно низьких температурах електрони з валентної зони переходять на домішкові рівні і, зв'язуючись з атомами індію, втрачають здатність переміщатися в ґратці германію, тобто в провідності участі не беруть. Носіями струму є лише дірки, що виникають у валентній зоні.

Отже, в напівпровідниках з домішкою, валентність якої на одиницю менша, ніж валентність основних атомів, носіями струму є дірки – виникає діркова провідність.

Напівпровідники з такою провідністю називаються дірковими (p-типу).

Домішки, що захоплюють електрони з валентної зони напівпровідника, називаються **акцепторами**, а енергетичні рівні цих домішок – **акцепторними рівнями**.

Домішкова провідність напівпровідників зумовлена, в основному, носіями одного знака: електронами – у випадку донорної домішки, і дірками у випадку ак-

центронної. Ці носії струму називаються основними.

Крім основних носіїв, у домішкових напівпровідниках є неосновні носії: у напівпровідниках n -типу – дірки, а у напівпровідниках p -типу – електрони. Концентрація основних носіїв більша, ніж концентрація неосновних носіїв.

На рис. 367 показано зміну положення рівня Фермі при підвищенні температури в домішкових напівпровідниках донорного (а) та акцепторного (б) типів.

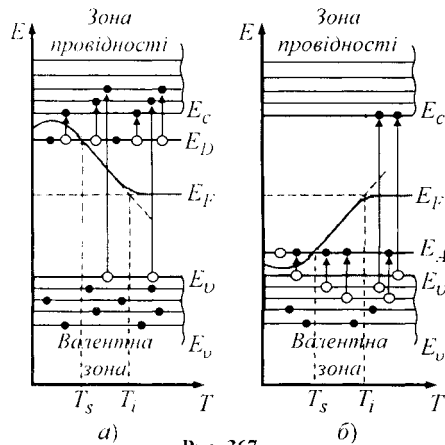


Рис. 367

При низьких температурах середня енергія теплових коливань ґратки kT є достатня лише для збудження і переходу електронів у зону провідності з донорних рівнів E_D і дірок з акцепторних рівнів E_A у валентну зону.

При $T = 0K$ рівень Фермі у напівпровідниках n -типу розміщується посередині між нижнім рівнем E_C зони провідності і донорним рівнем E_D , а у напівпровідниках p -типу – між акцепторним рівнем E_A і верхнім рівнем E_V валентної зони.

У міру підвищення температури концентрація електронів у зоні провідності

збільшується, концентрація електронів на донорних рівнях зменшується – донорні рівні виснажуються. При повному виснаженні домішок концентрація електронів у зоні провідності напівпровідника n -типу стає такою, що практично дорівнює концентрації донорної домішки, а концентрація дірок в напівпровіднику p -типу – концентрації акцепторної домішки.

Температура виснаження домішок T_s тим вища, чим вища енергія активації домішок E_D і E_A і її концентрація. Для германію, наприклад, що містить $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ і має $E_D = 0,01 \text{ eV}$, температура спустошення домішки $T_s = 30K$.

При дальшому підвищенні температури починається все інтенсивніше збудження власних носіїв, напівпровідник все більше наближається до стану власного напівпровідника, внаслідок чого рівень Фермі наближається до положення рівня Фермі у власному напівпровіднику.

Температура T_i відповідає переходу до власної провідності напівпровідника. Температура T_i тим більша, чим більша ширина забороненої зони напівпровідника і концентрації домішок у ньому. Для германію, що містить $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $T_i = 450K$.

Провідність домішкового напівпровідника, як і провідність будь-якого провідника визначається концентрацією носіїв і їх рухливістю. Зі зміною температури рухливість носіїв змінюється за порівняно слабким степеневим законом, а концентрація носіїв – за досить сильним експоненціальним законом. У зв'язку з тим залежність провідності домішкових напівпровідників від температури визначається, в основному, температурною залежністю

концентрації носіїв струму в ньому.

На рис. 368 наведена схематична крива залежності $\ln \sigma$ від $\left(\frac{1}{T}\right)$ для домішкового напівпровідника.

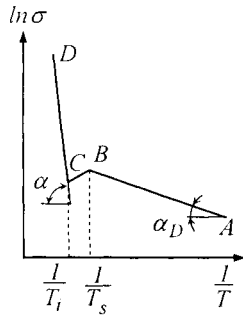


Рис. 368

Область AB відповідає низьким температурам від $T = 0K$ до температури T_s виснаження домішки. Питома провідність у цій області дорівнює:

$$\sigma_D = \sigma_{\infty}^D e^{-\frac{E_D}{2kT}} \quad \text{або} \quad \sigma_A = \sigma_{\infty}^A e^{-\frac{E_A}{2kT}},$$

де σ_{∞}^D і σ_{∞}^A - коефіцієнти, які слабо залежать від температури (порівняно з експонентою). Логарифмуючи ці вирази, отримуємо:

$$\ln \sigma_{D,A} = \ln \sigma_{\infty}^{D,A} - \frac{E_{D,A}}{2kT}.$$

Відкладаючи по осі абсцис $\frac{1}{T}$, а по осі ординат $\ln \sigma_{D,A}$, отримуємо пряму, яка утворює з віссю абсцис кут $\alpha_{D,A}$, тангенс якого $\operatorname{tg} \alpha_{D,A} = \frac{E_{D,A}}{2k}$ пропорційний до енергії іонізації домішки $E_{D,A}$.

Отже, область AB відповідає домішковій провідності напівпровідника.

Область BC спостерігається від температури виснаження домішок T_s до температури переходу до власної провідності T_i . У цій області всі домішкові атоми іонізовані, але ще не відбувається помітне збудження власних носіїв, внаслідок чого концентрація носіїв зберігається приблизно сталою і дорівнює концентрації домі-

шок. Температурна залежність провідності напівпровідника у цій області визначається температурною залежністю рухливості носіїв. При розсіянні носіїв на теплових коливаннях ґратки рухливість носіїв зменшується із зростанням температури і провідність на ділянці BC зменшується.

Область CD описує власну провідність напівпровідника:

$$\sigma = \sigma_{\infty} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Тангенс кута α прямої CD пропорційний до ширини забороненої зони ΔE :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta E}{2k}.$$

ТУЧКЕВИЧ ВОЛОДИМИР МАКСИМОВИЧ
(нар. 1904 р.)

Дослідив генерацію і рекомбінацію електронів і дірок в германії, який легований різними домішками, положення домішкових рівнів.

Отримав чисті монокристали германію.

БУРАК ЯРОСЛАВ ЙОСИПОВИЧ
(нар. 1931 р.)

Вивчав термодинамічні процеси у власних напівпровідниках, запропонував термодинамічну модель власних напівпровідників.

ЛАШКАРЬОВ ВАДИМ ЄВГЕНОВИЧ
(1903-1974)

Вивчав вплив домішок на напівпровідники з германію та ін. Визначені коефіцієнти дифузії і розчинності ряду електрично активних домішок в германію, виявлені умови і причини виникнення дефектів структури кристалів, обчислені перетини захоплення носіїв обох знаків рядом домішок.

ГОРБАНЬ ІВАН СТЕПАНОВИЧ
(нар. 1928 р.)

Визначив енергетичний спектр домішкових центрів у кристалах карбиду кремнію.

ТОВСТЮК КОРИЙ ДЕНИСОВИЧ
(1922-2004)

Ввів (1972 р.) методи теорії поля в проблему взаємодії домішок в напівпровідниках, що стало поворотним пунктом у розвитку напівпровідникового матеріалознавства.

§143. P-n перехід і його вольт-амперна характеристика

Границя контакту обох напівпровідників, один з яких має електронну, а інший діркову провідність, називається електронно-дірковим переходом (або p-n

переходом).

Ці переходи мають велике практичне значення, будучи основою роботи багатьох напівпровідникових приладів.

Отримати $p-n$ - перехід при безпосередньому контакті двох напівпровідників практично неможливо, оскільки їх поверхні містять величезну кількість домішок, різноманітних дефектів, що змінюють властивості напівпровідників.

Одним із поширених методів виготовлення $p-n$ - переходів є *метод сплавлення*. Кристал германію n -типу з „таблеткою” індію, яка покладена на нього, нагрівається в печі при температурі $500 - 600^\circ\text{C}$ в атмосфері водню або аргону. При цьому індій розплавляється і розчиняє в собі германій. При повільному охолодженні із розплаву випадає германій, який насичений індієм. Він кристалізується у формі монокристала. Оскільки германій, що містить індій, має p -провідність, то на границі розплаву, що закристалізувався, і монокристала германію, що має n -провідність, утворюється $p-n$ - перехід.

Електронно-дірковий перехід може бути отриманий також *дифузійно* акцепторної домішки у донорний напівпровідник або донорної домішки в акцепторний напівпровідник. Глибина проникнення домішки і залягання $p-n$ - переходу визначається температурою і часом проведення дифузії. Власне переходом служить границя, що відділяє області з різними типами провідності.

Для створення $p-n$ - переходу використовують також *метод іонного легування*, при якому поверхневий шар напівпровідника даного типу провідності за допомогою іонного пучка легують домішкою, що надає цьому шару провідність проти-

лежного знака.

Розглянемо фізичні процеси, що відбуваються в $p-n$ - переході (рис. 369). Будемо вважати, що концентрація донорів N_D і концентрація акцепторів N_A однако-



Рис. 369

ві. Для n - області основними носіями є електрони і при не-

дуже низьких температурах концентрація електронів в n - області практично дорівнює концентрації донорних атомів - $n_{en} = N_D$. В p - області основні носії - дірки, і концентрація дірок в цій області дорівнює концентрації акцепторних атомів - $n_{dp} = N_A$.

Крім основних носіїв, ці області містять неосновні носії: n - область - дірки (n_{dn}), p - область - електрони (n_{ep}). Розрахунок показує, що концентрація n_{dp} у 10^6 разів більша за n_{dn} в n - області, а концентрація n_{en} в 10^6 разів більша за концентрацію електронів n_{ep} p - області.

На рис. 370 показана енергетична схема p і n - областей у момент, коли їх подумки склали.

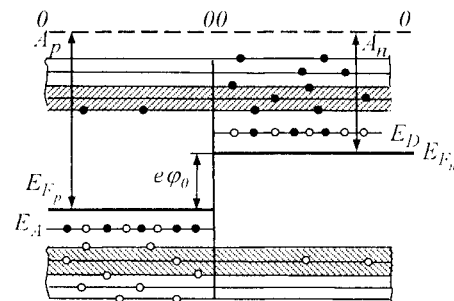


Рис. 370

Відмінність у концентрації однотипних носіїв в контактуючих областях напівпровідника приводить до виникнення дифузійних потоків електронів з n - області

в p -область ($n_{en \rightarrow p}$) і дифузійного потоку дірок із p -області в n -область ($n_{op \rightarrow n}$).

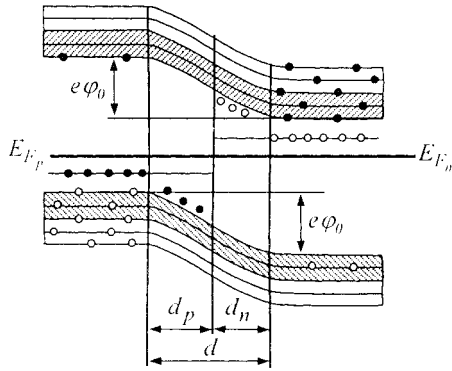


Рис. 371

Область n , із якої дифундували електрони, заряджається позитивно, а p -область, із якої дифундували дірки – негативно. Це приводить до того, що рівень Фермі E_{F_n} знижується, а рівень Фермі E_{F_p} підвищується. Перетікання електронів справа наліво і дірок зліва направо відбувається доти, доки рівень Фермі E_{F_n} в n -області не встановиться на однаковій висоті з рівнем Фермі в p -області (рис. 371). При розміщенні цих рівнів на однаковій висоті між n - і p -областями встановлюється рівновага, при якій потік електронів із n -області в p -область ($n_{en \rightarrow p}$) зрівноважується потоком електронів із p -області в n -область ($n_{ep \rightarrow n}$), а потік дірок із p -області в n -область ($n_{op \rightarrow n}$) зрівноважується потоком дірок із n -області в p -область:

$$n_{en \rightarrow p} = n_{ep \rightarrow n}; \quad n_{op \rightarrow n} = n_{on \rightarrow p}.$$

Позначимо густини струмів, що відповідають потоку $n_{en \rightarrow p}$ через j_{en} ; потоку $n_{ep \rightarrow n} = j_{ep}$; потоку $n_{op \rightarrow n} = j_{op}$;

потоку $n_{on \rightarrow p} = j_{on}$. В рівноважному стані через p - n проходять потоки основних носіїв. Причому

$$j_{en} = j_{ep}; \quad j_{op} = j_{on}.$$

Додаючи ліві і праві сторони цих рівностей, отримуємо

$$j_{en} + j_{op} = j_{ep} + j_{on}.$$

Густина повного струму через рівноважний p - n -перехід

$$j = (j_{en} + j_{op}) - (j_{ep} + j_{on}) = 0.$$

Розрахунки показують, що для рівноважного стану p - n -переходу:

$$j_{en} = j_{ep} = e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep}, \quad j_{op} = j_{on} = e \frac{L_o}{\tau_o} n_{on},$$

де L_e і L_o – дифузійна довжина електронів в n -області і дірок в p -області відповідно, τ_e і τ_o – середній час їх життя.

У n -області напівпровідника внаслідок переходу електронів поблизу границі залишається нескомпенсований позитивний об'ємний заряд нерухомих іонізованих донорних атомів. У p -області напівпровідника, внаслідок переходу дірок, поблизу границі утворюється від'ємний об'ємний заряд нерухомих іонізованих акцепторів. Ці об'ємні заряди утворюють біля границі подвійний електричний шар, який характеризується контактною різницею потенціалів ϕ_0 , що не дозволяє подальший перехід електронів у напрямку $n \rightarrow p$ і дірок у напрямку $p \rightarrow n$. Контактна різниця потенціалів між n і p областями дорівнює різниці робіт виходу A_p і A_n , яка поділена на елементарний заряд:

$$\phi_0 = \frac{1}{e} (A_p - A_n).$$

Якщо концентрація донорів і акцепторів у n і p -областях однакова, то товщи-

ни шарів d_n і d_p , в яких локалізуються рухомі заряди, рівні.

В області p - n - переходу енергетичні зони деформуються, внаслідок чого виникають потенціальні бар'єри як для електронів, так і для дірок. Висота потенціального бар'єра ϕ_0 , тим більша, чим більше відношення концентрації основних носіїв до концентрації цих носіїв в іншій області напівпровідника.

Енергетичні рівні акцепторного напівпровідника підняті відносно рівнів донорного напівпровідника на висоту, яка дорівнює $e\phi_0$, і підйом відбувається на товщині подвійного шару d . Товщина подвійного шару тим більша, чим менша концентрація основних носіїв в n і p - областях напівпровідника.

Товщина d шару p - n - переходу в напівпровідниках становить $\sim 10^{-6} - 10^{-10}$ м. При $n_{en} = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $n_{ep} = 10^{16} \text{ м}^{-3}$ і $T=300 \text{ К}$ контактна різниця потенціалів $\phi_0 \approx 0,45 \text{ eV}$.

Опір запірного шару можна змінити за допомогою зовнішнього електричного поля.

Прикладемо до p - n - переходу, що знаходиться в рівновазі, зовнішнє електричне поле, яке напрямлене протилежно до поля контактного шару, підключивши до p - області позитивний полюс джерела напруги, а до n - області – негативний (рис. 372).

Це поле, напрямком якого називається **прямим**, викликає пониження потенціального бар'єра для основних носіїв до

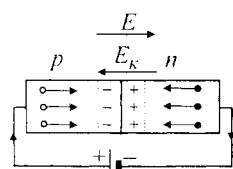


Рис. 372

$$e\phi_0 - e\phi,$$

де ϕ – зовнішня різниця потенціалів. Тому потік електронів із n - області в p - область і потік дірок із p у n - область збільшаться в $e^{\frac{e\phi}{kT}}$ разів, що приведе до збільшення в $e^{\frac{e\phi}{kT}}$ разів густини струмів основних носіїв j_{en} і j_{dp} :

$$j_{en} = e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} e^{\frac{e\phi}{kT}}, \quad j_{dp} = e \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} e^{\frac{e\phi}{kT}}.$$

Густини ж неосновних носіїв струму j_{ep} і j_{dn} залишаються незмінними.

Густина повного струму

$$\begin{aligned} j_{np} &= (j_{en} + j_{dp}) - (j_{ep} + j_{dn}) = \\ &= \left(e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} e^{\frac{e\phi}{kT}} + e \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} e^{\frac{e\phi}{kT}} \right) - \\ &\quad - \left(e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + e \frac{L_d}{\tau_d} n_{dn} \right) = \\ &= e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} \right) \left(e^{\frac{e\phi}{kT}} - 1 \right) = \\ &= j_n \left(e^{\frac{e\phi}{kT}} - 1 \right), \end{aligned}$$

де j_n – густина струму насичення.

Цей струм називається **прямим**.

Прикладемо до p - n - переходу зовнішнє електричне поле, яке напрямлене від n - провідника до p -провідника, тобто поле, яке співпадає з полем контактного шару

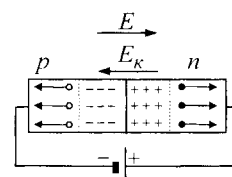


Рис. 373

(рис. 373). Плюсовий полюс джерела струму підключений до n - області, а мінус – до p - області. Під дією різниці потенціалів ϕ зовнішнього поля, напрямком

якого називається **зворотнім**, розширюється запірний шар і потенціальний бар'єр p - n - переходу підвищується $e\phi_0 + e\phi$, що викличе зменшення в $e^{\frac{e\phi}{kT}}$ разів потоку основних носіїв $n_{en \rightarrow p}$ і $n_{op \rightarrow n}$ і густини струмів J_{en} і J_{op} , що відповідають цим потокам. У результаті

$$J_{en} = e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} e^{-\frac{e\phi}{kT}}, \quad J_{op} = e \frac{L_o}{\tau_o} n_{on} e^{-\frac{e\phi}{kT}}.$$

Зміна висоти бар'єра не змінить потоків електронів $n_{ep \rightarrow n}$ і дірок $n_{on \rightarrow p}$.

Густина повного струму через p - n -перехід дорівнює:

$$J_{ze} = (J_{en} + J_{op}) - (J_{ep} + J_{on}) = e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_o}{\tau_o} n_{on} \right) \left(e^{-\frac{e\phi}{kT}} - 1 \right).$$

Цей струм називається **зворотним**. Об'єднуючи вирази J_{np} і J_{ze} , отримуємо

$$j = e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_o}{\tau_o} n_{on} \right) \left(e^{\pm \frac{e\phi}{kT}} - 1 \right).$$

Ці співвідношення є рівнянням **вольт-амперної характеристики p - n -переходу**.

При збільшенні зовнішньої різниці потенціалів ϕ $e^{-\frac{e\phi}{kT}} \rightarrow 0$, а густина струму J_{ze} прямує до граничного значення

$$-e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_o}{\tau_o} n_{on} \right),$$

абсолютну величину якого

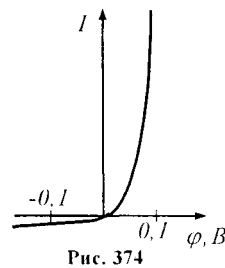
$$j_n = e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_o}{\tau_o} n_{on} \right)$$

називають **густиною струму насичення**. Як видно, j_n визначається потоком через p - n -перехід неосновних носіїв. Оскільки

концентрація цих носіїв невисока, то j_n є незначною величиною. Для германієвих p - n -переходів вона становить порядку $10^{-2} \frac{A}{M^2}$. При прикладанні до p - n -переходу зовнішньої різниці потенціалів у прямому напрямку сила струму через перехід зростає за експоненціальним законом і вже при незначних напругах досягає великих значень.

При $\phi_{ze} = -0,5B$ густина зворотного струму $J_{ze} \approx j_n$, а при $\phi_{np} = +0,5B$

$$J_{np} \approx j_n e^{20}. \text{ Відношення } \frac{J_{np}}{J_{ze}} \approx e^{20} \approx 10^9.$$



ГОЛЬДМАН ОЛЕКСАНДР ГЕНРИХОВИЧ (1884-1971)

Перший в Україні розпочав дослідження з фізики напівпровідників, зокрема вивчав явища випрямлення в напівпровідниках, явища на контакті „метал-напівпровідник”, закономірності вентильного ефекту.

ЛАШКАРЬОВ ВАДИМ СВЕГЕНОВИЧ (1903-1974)

Запропонував у 1941 р. метод термозонда для вивчення поширення питомого опору в глибину запірного шару і вперше виявив p - n -перехід в закисі міді. Експериментально довів, що випрямлення струму на контакті двох напівпровідників пов'язане з наявністю різних типів провідності (електронної і діркової) з різних боків контакту.

НАСІДОВ ДМИТРО МИКОЛАЙОВИЧ (1903-1975)

Розробив технологію одержання монокристалів арсеніду галію і арсеніду індію, p - n -переходи на їх основі, дослідив електричні, оптичні, фотоелектричні, люмінесцентні властивості нових матеріалів.

Вказав на можливість стимульованого випромінювання і p - n -переходу в арсеніді галію і спостерігав його.

ТУЧКЕВИЧ ВОЛОДИМИР МАКСИМОВИЧ
(нар 1904 р.)

Відкрив цікаві властивості діодів легованих золотом, вивчав поведінку електронів і дірок в системах з декількома електронно-дірковими переходами. Ці дослідження привели до розроблення принципів одержання германієвих плоских діодів і тріодів, фотоелементів. Розробив перші в СРСР германієві та кремнієві діоди і тріоди.

ЛЯШЕНКО ВАСИЛЬ ІВАНОВИЧ
(1902-1975)

Вивчав фізичні процеси у контактах напівпровідників, де відкрив важливі явища збіднення і збагачення приконтактної області напівпровідника носіями струму під впливом прикладеного поля, що мають важливе значення в роботі напівпровідникових приладів, зокрема, в діодах і тріодах.

§144. Люмінесценція твердих тіл

У природі існує випромінювання, яке відрізняється за своїм характером від всіх відомих видів випромінювання, а саме від теплового випромінювання, відбивання, розсіювання світла і т.д.. Це люмінесцентне випромінювання. Воно має такі особливості:

- 1). на окремих ділянках спектра спектральна густина люмінесцентного випромінювання перевищує спектральну густину випромінювання абсолютно чорного тіла;
- 2). люмінесцентне свічення речовини продовжується деякий час після припинення опромінення. Тривалість люмінесценції змінюється для різних речовин залежно, від умов, в широких границях, від мільярдних часток секунди до багатьох годин і навіть діб. У першому випадку це флуоресценція ($t \leq 10^{-8} \text{ c}$), а в другому – фосфоресценція ($t > 10^{-8} \text{ c}$);
- 3). люмінесценція є власне випромінювання тіл, кожна речовина має певний характерний для неї спектр люмінесценції.

Об'єднуючи ці всі ознаки, С.І. Ваві-

лов дав таке визначення люмінесценції:

люмінесценція – це оптичне випромінювання тіла, що є надлишковим над тепловим того самого тіла в даній спектральній області при тій же температурі, що має тривалість свічення більше ніж 10^{-10} c , тобто не припиняється одразу після усунення причини, що викликала свічення.

Залежно від способу збудження люмінесценції розрізняють декілька її видів:

- свічення, що виникає під дією світлового випромінювання як видимого, так і більш короткохвильового (*фотолюмінесценція*);
- свічення, що виникає при електричних розрядах (*електролюмінесценція*);
- свічення, що збуджується ударами електронів (*катодолюмінесценція*);
- свічення, яке викликане хімічними перетвореннями всередині тіла (*хемілюмінесценція*).

Доследнє вивчення спектрів люмінесценції показало, що вони відрізняються від спектрів збуджуючого випромінювання.

Згідно з *правилом Стокса спектр люмінесценції в цілому і його максимум завжди виявляються в області більш довгих хвиль порівняно зі спектром поглинутого випромінювання, здатного викликати цю люмінесценцію* (рис. 375).

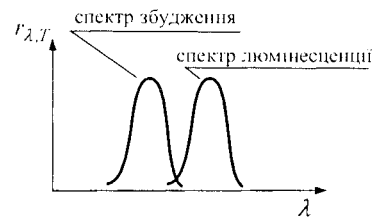


Рис. 375

Це правило з точки зору квантової теорії означає, що енергія $h\nu$ поглинутого

фотона частково витрачається на неоптичні процеси, тобто

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + \Delta E,$$

звідки $\nu_{\text{люм}} < \nu$, або $\lambda_{\text{люм}} > \lambda$, що і виходить із сформульованого правила.

Ступінь перетворення поглинутої енергії в енергію випромінювання характеризується „виходом люмінесценції”. С.Вавілов ввів

1) **енергетичний вихід** - відношення енергії, яка випромінюється люмінофором при повному висвічуванні, до енергії, яка ним поглинута:

$$B_e = \frac{E_d}{E_n},$$

2) **квантовий вихід** - відношення числа квантів N_d , що випромінює речовиною, до числа поглинутих квантів N_n :

$$B_k = \frac{N_d}{N_n}.$$

С. Вавілов встановив такий закон: величина енергетичного виходу спочатку росте пропорційно до довжини хвилі збуджуючого світла, а потім швидко падає до нуля.

Пропорційне збільшення енергетичного виходу із збільшенням λ збуджуючого світла означає, що в цьому інтервалі довжин хвиль квантовий вихід люмінесценції залишається сталим (рис. 376).

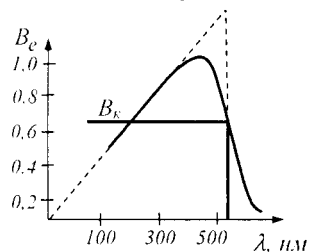


Рис. 376

Справді, допустимо, що кожний фотон збуджуючого світла створює фотон

люмінесценції, тобто $B_k = 1$. У цьому випадку енергетичний вихід дорівнює відношенню енергії фотона люмінесценції $h\nu_{\text{люм}}$ до енергії збуджуючого світла $h\nu_{\text{зб}}$:

$$B_e = \frac{h\nu_{\text{люм}}}{h\nu_{\text{зб}}} = \frac{h\nu_{\text{люм}}}{hc} \lambda_{\text{зб}},$$

тобто енергетичний вихід пропорційний до довжини хвилі збуджуючого світла. Однак як тільки енергія падаючого фотона виявиться недостатньою для збудження атома, люмінесценція припиняється, квантовий і енергетичний виходи дорівнюють нулю, про що свідчить швидке падіння кривих на рис. 376.

Розглянемо механізм виникнення люмінесценції у твердих кристалічних тілах. Дослід показує, що кристали з високим ступенем досконалості ґратки практично не люмінесціюють. Для надання люмінесцентних властивостей в їх структурі необхідно створити дефекти. Найбільш ефективними дефектами є домішки сторонніх атомів. Ці домішки називаються **активаторами**.

Складні, виготовлені штучно кристалічні речовини з дефектами внутрішньої структури, які мають високі люмінесцентні властивості, називаються **кристалофосфорами**.

До складу кристалофосфорів входять звичайно три компоненти: основна речовина, активатор і плавні. У ролі основної речовини використовують ZnS , CdS , CaS та ін., у ролі активаторів – важкі метали: Ag , Cu , Bi , Mn і т.д.; у ролі плавнів – легкоплавкі солі.

Розглянемо механізми виникнення люмінесценції з погляду зонної теорії твердих тіл. Між валентною зоною I і зо-

ною провідності II кристала фосфора розміщуються домішкові рівні активатора (рис. 377). При поглинанні атомом активатора фотона з енергією $h\nu$ електрон з домішкового рівня переводиться в зону провідності, вільно переміщується по кристалу доти, доки не зустрінеться з іоном активатора і рекомбінує з ним, перейшовши знову на домішковий рівень. Рекомбінація супроводжується випроміненням кванта люмінесцентного випромінювання. Час випромінювання люмінофора визначається часом життя збудженого стану атомів активатора, який не перевищує мільярдних часток секунди. Тому свічення є короткочасним (флуоресценція) і зникає швидко після припинення опромінення.

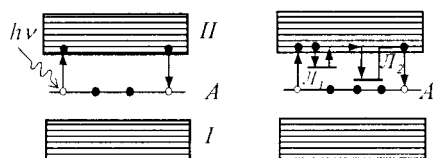


Рис. 377

Рис. 378

Для виникнення тривалого свічення кристалосфосфор повинен містити також центри захоплення або пастки для електронів, якими є незаповнені локальні рівні (L_1 і L_2), що лежать поблизу дна зон провідності (рис. 378). Вони можуть бути утворені атомами домішок, атомами в міжвузловинах. Під дією світла атоми активатора збуджуються, тобто електрони з домішкового рівня переходять в зону провідності і стають вільними. Однак вони захоплюються пастками, внаслідок чого втрачають свою рухливість, тобто здатність рекомбінувати з іонами активатора. Звільнення електрона з пастки вимагає певної енергії, яку електрони можуть отримати, наприклад, від теплових коливань ґратки. Електрон, який звільнений з

пастки, потрапляє в зону провідності і рухається вільно до того часу, доки не буде захоплений пасткою знову або не рекомбінує з іоном активатора. В останньому випадку виникає квант люмінесцентного випромінювання. Тривалість цього процесу визначається часом перебування електрона в пастках.

Явище люмінесценції отримало широке застосування в практиці, наприклад, люмінесцентний аналіз – метод визначення складу речовини за характерним для неї свіченням.

Люмінофори використовуються в люмінесцентних лампах, є активним середовищем активних квантових генераторів і сцинтиляторів, застосовуються в електронно-оптичних перетворювачах тощо.

ПУЛЮЙ ІВАН ПАВЛОВИЧ
(1845-1918)

Присвятив багато уваги експериментальному дослідженню фосфоресценції в газорозрядних трубках з низьким тиском. Виготовив першу люмінесцентну лампу, яка стала широко відомою під назвою „лампа Пулюя”. У ній катодні промені бомбардували слюдяну пластинку, покриту сульфатом кальцію і розташовану між анодом і катодом під кутом до останнього, викликаючи в ній інтенсивну фосфоресценцію.

ГОЛЬДМАН ОЛЕКСАНДР ГЕНРИХОВИЧ
(1884-1971)

Здійснив важливі дослідження з інфрачервоної люмінесценції закису міді та електролюмінесценції деяких складних сполук, зокрема одержав і вивчив об'ємну електролюмінесценцію, супроводжувану емісією „гарячих” електронів. Створив нові ефективні електролюмінофори, сублимат - електролюмінофори з різними кольорами випромінювання. Відкрив новий вид фотографічних процесів, що базується на використанні прихованого (поліризаційного) зображення, яке створюється на люмінофорі.

БІЛІЙ МИХАЙЛО УЛЬЯНОВИЧ
(1922-2001)

Встановив умови виникнення фотолюмінесценції розчинів електролітів і показав, що першопричиною відсутності люмінесценції в таких розчинах є наявність сильного температурного гасіння. Це дало йому можливість уперше виявити світіння розчинів солей вісмуту, олова, стибію, телуру, германію, селену і на основі цього встановити ряд важливих закономірностей у спектральній характеристиці таких розчинів.

Заклав основи спектроскопії розчинів електродів, розробив високої чутливості методи люмінесцентного аналізу, які дали можливість розробити глибоке "зондування" речовин, виявляючи в них з високою точністю ступінь чистоти.

ШПАК МАРАТ ТЕРЕНТІЙОВИЧ
(1926-1993)

Виконав в 50-60-х роках дослідження з відкриття і вивчення власної екситонної люмінесценції молекулярних кристалів, з'ясував роль домішок і дефектів кристалічної решітки в свіченні цих кристалів, ґрунтовно дослідив спектри люмінесценції термічно деформованих кристалів.

ПЕКАР СОЛОМОН ІСААКОВИЧ
(1917-1985)

Розвинув теорію домішкових електронних центрів і загальну теорію форми і температурної залежності смуг домішкового поглинання світла і люмінесценції, обумовленої електронною взаємодією.

Передбачив можливість самостимульованої хемілюмінесцентної реакції в газах і розробив теорію її використання в хімічних лазерах.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютно чорне тіло	255	Густина енергії випромінювання об'ємна	253
Активатор	373	Густина енергії об'ємна	131
Акцентори	365	Густина зарядів зв'язаних поверхнево	119
Аналіз рентгеноспектральний	230	Густина заряду лінійна	115
Аналіз рентгеноструктурний	229	Густина заряду об'ємна	114
Аналізатори	240, 246	Густина заряду поверхнево	112
Анізотропія штучна	246	Густина потоку енергії	46
Ангинейтрипо	331, 349	Густина струму	133
Атом водню	292	Густина теплової потужності струму	137
Атомна модель	270	Двигун тепловий	85
Атомна одиниця маси	320	Дефект маси	320
Бар'єр потенціального	144	Джерело електрорушійної сили	133
Баріон	350	Джерело струму	133
Барометрична формула	66	Диполь електричний	106
Биття	36	Дисперсійна область	228
Бозони	298	Дисперсія атомальна	232
Вектор поляризації	117	Дисперсія відносна	232
Вектор Умова-Пойтінга	203	Дисперсія кутова	227, 230
Вектор переміщення	9	Дисперсія лінійна	228
Випромінювання вимушене	308	Дисперсія нормальна	232
Випромінювання гама	333	Дисперсія світла	230
Випромінювання спонтанне	308	Дифракція світла	217
Випромінювання теплове	253	Дифракція Фраунгофера	223
Відносність довжин і проміжків часу	54	Дифракція Френеля	221
Вітер електричний	126	Дифузія у газах	79
Внутрішнє тертя у газах	82	Діамагнетизм	175
Вольт-амперна характеристика діода	145	Діаметр молекули ефективний	77
Генератор електростатичний	126	Діелектрики	115
Генератор оптичний квадрупольний	303	Діелектрики іонні	116
Гіпотеза Планка	259	Діелектрики неполярні	115
Гістерезис діелектричний	123	Діелектрики полярні	116
Гістерезис магнітний	181	Ділянка кола неоднорідна	134
Гратка дифракційна	225	Ділянка кола однорідна	134

Предметний покажчик

Добротність коливної системи	39	Енергія кінетична в обертовому русі	28
Довжина вільного пробігу	78	Енергія конденсатора	131
Довжина вільного пробігу електронів	139	Енергія магнітного поля	190
Довжина вільного пробігу електронів в металах	143	Енергія потенціальна	18
Довжина когерентності	205	Енергія потенціальна в коливальному русі	31
Довжина шляху	9	Енергія потенціальна заряду	107
Доза біологічна	335	Енергія потенціальна матеріальної точки в однорідному силовому полі	19
Доза випромінювання експозиційна	334	Енергія потенціальна матеріальної точки в полі центральних сил	19
Доза випромінювання поглинута	334	Енергія потенціальна пружнодеформованого тіла	20
Домен	123	Енергія реального газу внутрішня	101
Домен магнітні	182	Енергія реального газу зведена	101
Дослід Девісона і Джермера	278	Енергія Фермі	354
Дослід Лоренца	138	Ентропія	90
Дослід Мандельштама і Паналекі	138	Ефект Доулера	251
Дослід Резерфорда	270	Ефект Керра	247
Дослід Рінке	137	Ефект Комптона	267
Дослід Фарадея та Верде	250	Ефект Коттона-Мутона	248
Дослід Франка і Герца	276	Ефект тунельний	290
Дослід Штерна і Герлаха	296	Ефект Холла	166
Дуалізм корпускулярно-хвильовий	280	Ємність електрична	127
Електрична стала	104	Ємність конденсатора	128
Електроємність відокремленого провідника	127	Ємність кулі	127
Електролюмінесценція	372	Ємність плоского конденсатора	128
Електропровідність питомо	140	Ємність сферичного конденсатора	129
Емісія вторинна	150	Ємність циліндричного конденсатора	128
Емісія термоелектронна	145	З'єднання паралельне конденсаторів	129
Енергія внутрішня	69	З'єднання послідовне конденсаторів	130
Енергія електричного поля	132	Закон Ампера	160
Енергія електромагнітної хвилі	203	Закон Біо-Савара Лапласа	158
Енергія зарядженого провідника	131	Закон Богуславського-Ленгмюра	145
Енергія зв'язку	321	Закон Больцмана про рівномірний	
Енергія кінетична	17		
Енергія кінетична в коливальному русі	31		

Предметний покажчик

розподіл енергії за ступенем вільності	68	Закон Ома для однорідної ділянки кола	135
Закон Брюстера	242	Закон Ома межі застосування	140
Закон Бугера-Ламберта-Бера	237	Закон повного струму	161
Закон взаємозв'язку маси і енергії	57	Закон повного струму узагальнений	195
Закон Відемана-Франца	141	Закон радіоактивного розпаду	326
Закон Гейгера-Неттола	330	Закон Стефана-Больцмана	256
Закон Джоуля-Ленца	137	Закон термодинаміки другий	93, 94
Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі	141, 137	Закон термодинаміки перший	71
Закон додавання швидкостей релятивістський	55	Закон Фарадея	185
Закон збереження електричних зарядів	103	Закон Фіка	80
Закон збереження імпульсу	15	Закон Фур'є	81
Закон збереження механічної енергії	21	Закони фотоефекту	263
Закон збереження моменту імпульсу	28	Заряд зв'язаний	118
Закон зміни моменту імпульсу	27	Заряд питомий	138
Закон зміщення Віна	258	Заряд точковий	103
Закон Кірхгофа	256	Заряди електричні зв'язані	117
Закон Кулона	103	Заселеність інверсна	311
Закон Кюрі	177	Захист електростатичний	126
Закон Кюрі-Вейса	182	Захоплення електронне	332
Закон Ленца	184	Захоплення частинок радіаційне	336
Закон Малюса	240	Зв'язок гетерополярний	304
Закон Мозелі	302	Зв'язок гомеополярний	304
Закон Ньютона другий	13	Здатність випромінююча	254
Закон Ньютона перший	12	Здатність інтегральна випромінююча	254
Закон Ньютона третій	14	Здатність поглинаюча	254
Закон Ома	140	Зміщення	121
Закон Ома в диференціальній формі для неоднорідної ділянки кола	136	Зона валентна	360
Закон Ома в диференціальній формі для однорідної ділянки кола	135	Зона заборонена	360
Закон Ома для густини струму	140	Зона провідності	360
Закон Ома для неоднорідної ділянки кола	136	Зони енергетичні	356
		Зонна пластинка	221
		Ідеальний газ	59
		Ізобари	318
		Ізомери	318

Предметний покажчик

Ізотерма критична	99	Коливання електромагнітні	198
Ізотони	318	Коливання згасаючі	38
Ізотопи	318	Коливання коефіцієнт згасання	39
Імпульс	13	Коливання логарифмічний декремент згасання	39
Індуктивність	188	Конденсатор	127
Індуктивність взаємна	190	Конденсатор плоский	128
Індукція електростатична	124	Конденсатор сферичний	129
Індукція магнітна	157	Конденсатор циліндричний	128
Інертність	12	Контур коливальний	197
Інтерференційний максимум, мінімум	207	Кут повороту площини поляризації	249
Інтерференція хвиль	47	Кюрі точка	182
Інтерференція світла	204	Лазер	311
Інтерферометр Жамена	215	Лептон	349
Інтерферометр Майкельсона	216	Лермора прецесія	174
Іонізація газу	146	Лінії індукції магнітного поля	157
Іонізація ударна	149	Лінії напруженості	104
Іонізація фотонна	150	Лінійчастий спектр поглинання	237
Ймовірність розподілу	92	Люмінесценція	372
Ймовірність термодинамічна	92	Магнетон Бора	296
Катодолюмінесценція	372	Магнетон ядерний	319
Клазіуса рівність	89	Магнітна напруженість поля	179
Класична електронна теорія електропровідності металів	137	Мазер	311
Класична електронна теорія провідності Друде-Лоренца	139	Маса гравітаційна	12
Коефіцієнт дисперсії	232	Маса інертна	12
Коефіцієнт корисної дії циклу Карно	87	Маса критична	343
Коефіцієнт питомого обертання	249	Машина холодильна	86
Коефіцієнт прозорості	291	Маятник математичний	32
Коливання	29	Маятник пружний	31
Коливання вимушене	39	Маятник фізичний	33
Коливання вимушені резонанс	41	Мезон	349
Коливання гармонічні додавання взаємно перпендикулярних	36	Метод дослідження статистичний	58
Коливання гармонічні додавання однаково напрямлених	34	Метод дослідження термодинамічний	58
		Метод зон Френеля	219
		Модель ядра краплинна	324
		Модель ядра оболонкова	325

Предметний покажчик

Момент головний зовнішніх сил відносно точки	25	тіла навколо нерухомої осі	21
Момент диполя	106	Одиниця потенціалу	107
Момент імпульсу відносно нерухомої осі	25	Опір внутрішній	136
Момент імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки	25	Опір питомий	135, 140
Момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі	26	Опір провідника	135
Момент імпульсу тіла відносно точки	26	Опір хвильовий	199
Момент інерції тіла відносно осі	26	Оптична вісь	243
Момент механічний власний	173	Оптична різниця ходу	207
Момент орбітальний магнітний	173	Пара насичена	98
Момент сили відносно нерухомої осі	24	Пара перенасичена	98
Момент сили відносно нерухомої точки	24	Паромагнетизм	176
Наближення адіабатичне	356	Перетворення Лоренца	54
Намагніченість	174	Перехід електронно-дірковий	367
Напруга	134	Перехід фазовий	122
Напруга запалювання	150	Період коливання	30
Напруга пробивна	129	Період обертання	23
Напруженість електричного поля	104	Період піврозпаду	327
Напруженість електричного поля як градієнт потенціалу	108	Плазма	153
Напруженість поля поблизу зарядженого провідника	125	Плазма ідеальна	154
Напруженість поля точкового заряду	105	Плазма неізотермічна	154
Напрямок електричного струму	133	Плече диполя	106
Насиченості явище магнітне	177	Площина коливань	239
Недоліки класичної електронної теорії провідності металів	141	Площина поляризації	239
Нейтрино	331	Поверхні сквіпотенціальні	109
Нейтрон	318	Поглинання світла	236
Нукліди	318	Подвійне променезаломлення	242
Нуклон	318	Поздовжній ефект Доплера	252
Обертальний вектор амплітуди	34	Позитрон	332
Обертання абсолютно твердого		Поле електричне	104
		Поле електричне в діелектрику	118
		Поле електричне в речовині	118
		Поле електричне вихрове	193
		Поле електричне однорідне	105
		Поле електричне потенціальне	109
		Поле електростатичне двох площин заряджених різнойменно	112
		Поле електростатичне зарядженого	

Предметний покажчик

циліндра	114	Принцип суперпозиції електричних полів	105
Поле електростатичне зарядженої кулі	114	Принцип суперпозицій хвиль	47
Поле електростатичне зарядженої сфери	113	Прискорення кутове миттєве	23
Поле електростатичне потенціальне	107	Прискорення кутове середнє	23
Поле магнітне	156	Прискорення миттєве	10
Поляризатори	239	Прискорення нормальне	11
Поляризації площина	202	Прискорення середнє	10
Поляризація дипольна	117	Прискорення тенгенціальне	11
Поляризація електронна	116	Провідник відокремлений	126
Поляризація залишкова	123	Провідники в електричному полі	124
Поляризація іонна	117	Провідність діркова	362
Поляризація орієнтаційна	117	Провідність домішкова	364
Поляризація спонтанна	122	Провідність електрична	135
Поляриметри	249	Провідність електрична питома	135
Поперечний ефект Доплера	252	Провідність електронна	362
Постулати Бора	274	Провідність напівпровідників власна	361
Постулати Енштейна	53	Промені рентгенівські	300
Потенціал електричного поля	107	Промінь звичайний	242
Потенціал іонізації	147	Промінь незвичайний	242
Потенціал поля системи зарядів	108	Проникність діелектрична відносна	119
Потенціал точкового заряду	107	Проникність магнітна	180
Потік вектора напруженості	109	Просвітлення оптики	215
Потік енергії	46, 203	Просторова когерентність	205
Потік магнітний	169	Протон	318
Потужність дози випромінювання	335	Процес адіабатний	75
Правило знаків	162	Процес ізобарний	74
Правої руки правило	184	Процес ізотермічний	74
Принцип відносності механічний	53	Процес ізохорний	74
Принцип відповідності	276	Процес коловий	85
Принцип Гюйгенса	218	Процес необоротний	87
Принцип незалежності дії електричних полів	105	Процес оборотний	86
Принцип незалежності дії сил	13	Радіоактивність	325
Принцип Паулі	299	Радіус екранування дебаївський	153
Принцип суперпозиції	158	Радіус когерентності	206
		Реактор ядерний	340

Предметний покажчик

Реакції ендоенергетичні	338	Розпад радіоактивний	326
Реакції ядерні	335	Розподіл Больцмана	67
Реакції ядерного поділу	340	Розрахунок електричних полів	112
Реакцій екзоенергетичні	338	Розряд газовий	148
Реакція поділу ланцюгова	340	Розряд газовий несамостійний	148
Реакція термоядерна	345	Розряд газовий самостійний	149
Резонатор оптичний	312	Розряд дуговий	152
Рекомбінація іонів	148	Розряд іскровий	151
Рівні акцепторні	365	Розряд коронний	152
Рівновага динамічна	148	Розряд тліючий	150
Рівняння Бернуллі	52	Розсіювання комбінаційне	315
Рівняння Ван-дер –Ваальса	96	Розсіювання комптонівське	334
Рівняння Ван-дер –Ваальса зведене	101	Розсіювання частинок резонансне	336
Рівняння Ейнштейна для фотоефекту	263	Рухливість носіїв заряду	135
Рівняння Клапейрона-Менделєєва	62	Самоіндукція	187
Рівняння Майєра	73	Світло поляризоване еліптично	239
Рівняння Максвела	196	Світло поляризоване лінійно	239
Рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску	62	Світло поляризоване частково	239
Рівняння нерозривності струмини	51	Сегнетоелектрики	122
Рівняння перетворення координат Галілея	52	Середовище активне	312
Рівняння хвильове	45, 201	Середовище пружне	42
Рівняння Шредінгера	286	Серія Бальмера	273
Рідина перегріта	98	Серія Брекета	273
Рідина розтягнута	99	Серія Лаймана	273
Різниця ходу хвиль геометрична	47	Серія Пашена	273
Робота	15, 69	Серія Фунда	273
Робота виходу	264	Серія Хемфрі	273
Робота виходу електронів	144	Сила	13
Робота газу	71	Сила коерцетивна	123, 181
Робота іонізації	147	Сила консервативна	16
Робота сторонніх сил над зарядом	134	Сила Лоренца	164
Роздільна здатність	228	Сила струму	133
Розміри критичні	343	Сили сторонні	134
Розпад альфа	329	Сили ядерні	323
Розпад бета	331	Силова характеристика поля	104
		Система замкнена	14

Предметний покажчик

Система механічна	14	Супутники стоксівські	315
Система термодинамічна	59	Температурна залежність опору	143
Системи дисипативні	21	Теорема Карно	87
Сімейство радіоактивне	328	Теорема Клаузіса	89
Сітка Кольбе	125	Теорема Кюнінга	18
Соленоїд	164	Теорема Лермора	174
Спектр характеристичний	301	Теорема Остроградського-Гауса	111
Співвідношення невизначеностей Гейзенберга	281	Теорема Остроградського-Гауса для електростатичного поля в діелектрику	121
Спін електрона	173	Теорема Остроградського-Гауса для магнітного поля	170
Спін електрона	296	Теорема Штейнера	27
Спін ядра	319	Теорія Максвелла	192
Сприйнятливість діелектрична	118	Теплоємність	72
Сприйнятливість магнітна	176	Теплоємність металу молярна	143
Стала радіоактивна	326	Теплоємність молярна	72
Стала Рідберга	273	Теплоємність питома	72
Стан критичний	99	Теплопровідність газів	80
Стан системи рівноважний	59	Теплота	69
Стан системи стаціонарний	59	Теплота кількість зведена	88
Статистика квантова	351	Течія рідини	50
Статистика квантова Бозе- Енштейна	353	Тиск світла	267
Статистика квантова Фермі-Дірака	352	Тороїда магнітне поле	163
Стримери	151	Траскторія точки	9
Струм в газах	146	Трубка течії	50
Струм електричний	133	Умови існування електричного струму	133
Струм зміщення	194	Умови максимумів та мінімумів дифракційної ґратки	226
Струм індукційний	184	Ферміони	298
Струм насичення	145, 149	Ферромагнетизм	180
Струм повний	195	Флуоресценція	372
Струм постійний	133	Формула Бальмера	273
Струм провідності	133	Формула Больцмана	92
Струм термоелектронний	145	Формула Вульфа-Брега	229
Струмина	50	Формула де Бройля	277
Ступінь іонізації	148	Формула Коші	231
Ступінь іонізації плазми	154		
Супутники антистоксівські	315		

Предметний покажчик

Формула Планка	260, 261	магнітного поля	162
Формула Релея-Джінса	259	Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля	109
Формула Річардсона	146	Циркуляція вектора напруженості сторонніх сил	134
Формула Річардсона-Дешмена	146	Циркуляція напруженості магнітного поля	180
Формула Томсона	199	Цуг хвильовий	204
Фосфоресценція	372	Час когерентності	205
Фотогальванічний ефект	261	Час ядерний	337
Фотоэффект	261	Частинка елементарна	348
Фотоэффект в газоподібному середовищі	261	Частота обертання	23
Фотоэффект внутрішній	261	Частота резонансна	41
Фотоэффект зовнішній	261	Числа квантові	293
Фотолюмінесценція	372	Число зарядове	318
Фотон	263, 348	Число масове	318
Функції власні	287	Число ступенів вільності	67
Функція розподілу молекул за швидкостями	63	Число хвильове	44
Функція хвильова	283	Шар запірний	370
Хвилі біжучі	43	Швидкість коливної точки	30
Хвилі електромагнітні	199	Швидкість кутова	22
Хвилі когерентні	47, 204	Швидкість миттєва	9
Хвилі поперечні	201	Швидкість поширення енергії хвилі	46
Хвилі стоячі	48	Швидкість середня	9
Хвиля довжина	43	Швидкість середня арифметична	64
Хвиля інтенсивність	47	Швидкість середня квадратична	62
Хвиля механічна	42	Швидкість фазова	44, 232
Хвиля плоска	43	Ширина дифракційного максимуму	225
Хвиля поздовжня механічна	43	Ширина інтерференційної смуги	208
Хвиля поперечна механічна	42	Явище електромагнітної індукції	183
Хвиля сферична	43	Явище Столетова	180
Хемілюмінесценція	372	Ядро атома	318
Хмарка електронна	145	Ядро дочірне	326
Центр мас	15	Ядро материнське	326
Цикл (процес) зворотній	86	Ядро проміжне	335
Цикл (процес) прямий	85	Яма потенціальна	144, 288
Цикл водневий	345		
Циркуляція вектора індукції			

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Ф. Ф. Детлаф, Б. М. Яворский. Курс физики. - М.: Высш. шк., 1989. 609 с.
- Б. М. Яворський, А. А. Детлаф, Л. Б. Милковська, Г. П. Сергеев. Курс фізики I, - К.: Вища школа, 1970. 356 с.
- Б. М. Яворський, А. А. Детлаф, Л. Б. Милковська. Курс фізики II, - К.: Вища школа, 1972. 434 с.
- Б. М. Яворський, А. А. Детлаф. Курс фізики III, - К.: Вища школа, 1973. 499 с.
- Т. И. Трофимова. Курс физики. - М.: Высш шк., 1990. 478 с.
- И. В. Савельев. Курс общей физики, т. I, II, III - М.: Наука, 1986. - 432 с, 496 с, 318 с.
- С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. Курс общей физики, т. I, II, III. - М.: Физматгиз, 1962. 466 с., 547 с., 644 с.
- Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Механика. - М.: Наука, 1979. 520 с.
- Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. - М.: Наука, 1979. 552 с.
- Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Электричество. - М.: Наука, 1983. 688 с.
- Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. - М.: Наука, 1985. 752 с.
- Р. Г. Чеворкян, В. В. Шепель. Курс общей физики. - М.: Высш шк., 1972. 599 с.
- М. Е. Меньяйлов. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. - К.: Вища школа, 1974. 391 с.
- І. М. Кучерук, В. П. Дущенко. Загальна фізика. Оптика. Квантова фізика. - К.: Вища школа, 1991. 463 с.
- Ф. А. Королев. Курс физики. Оптика, атомная и ядерная физика. - М.: Просвещение, 1974. 608 с.
- К. Д. Хмелюк, Д. Д. Цициліано. Фізика атома і твердого тіла. - Київ.: Вища школа, 1974. 231 с.
- Г. И. Епифанов. Физика твердого тела. - Москва.: Высш шк, 1982. 288 с.
- М. Х. Ибрагимов. Атомная энергетика. Физические основы. - М.: Высш шк, 1987. 125 с.
- І. Р. Зачек, І. М. Кравчук, Б. М. Романишин, В. М. Габа, Ф. М. Гончар. Курс фізики: Навчальний підручник / За ред. І. Е. Лопатинського. - Львів: Бескид-Біт, 2002. 376 с.
- І. Р. Зачек, І. Е. Лопатинський, Й. Я. Хром'як. Висвітлення досягнень українських фізиків у курсі фізики: Методичний посібник / За ред. Ю. К. Руданського. - Львів: Видавництво національного університету „Львівська політехніка”, 2003. 84 с.