

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

О.Є.Кошляков

Гідрогеологічне моделювання

Рекомендовано
Міністерством освіти і
науки України
як підручник для студентів
геологічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
“Київський університет”
2003

УДК 556.3.001.57
ББК 26.35в6

К76 О.Є.Кошляков

**Гідрогеологічне моделювання : Підручник.- К.:
ВПЦ “Київський університет”, 2003. – 113 с.**

ISBN

Рецензенти:

*Рекомендовано радою
геологічного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
22 жовтня 2002 року*

Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2003

ISBN

**© О.Є.Кошляков, 2003
©ВПЦ “Київський університет”, 2003**

ЗМІСТ

Передмова	
Вступ	
Поняття про моделювання.....	
Становлення гідрогеологічного моделювання.....	
Контрольні запитання до вступу.....	
1. Короткі відомості про прикладні програмні засоби сучасних персональних комп'ютерів (ПЕОМ)	
1.1 Класифікація програмного забезпечення.....	
1.2 Системи управління базами даних (СУБД).....	
Контрольні запитання до розділу 1.....	
2. Загальні положення методики гідрогеологічного моделювання	
2.1 Мета гідрогеологічного моделювання.....	
2.2 Натурні, фізичні та математичні моделі.....	
2.3 Вибір математичної гідрогеологічної моделі.....	
2.4 Інформаційне та технічне забезпечення моделей.....	
Контрольні запитання до розділу 2.....	
3. Системний підхід при гідрогеологічному моделюванні	
Контрольні запитання до розділу 3.....	
4. Імовірнісні гідрогеологічні моделі	
4.1 Модель випадкової величини та модель випадкової функції.....	
4.2 Упорядкування та групування даних.....	
4.3 Графічне зображення вибіркового розподілу.....	
4.4 Перевірка гіпотези про нормальність (логнормальність) розподілу випадкової величини.....	
4.5 Встановлення приналежності вибірових сукупностей до однієї генеральної сукупності.....	
4.6 Парний кореляційний аналіз.....	
4.7 Розподіл точок на площині.....	
Контрольні запитання до розділу 4.....	

5. Картографічні гідрогеологічні моделі.....	
5.1 Способи зображення об'єктів та явищ на картах.....	
5.2 Опис по картах.....	
5.3 Графічні прийоми.....	
5.4 Графоаналітичні прийоми.....	
5.5 Прийоми математико-картографічного моделювання.....	
5.5.1 Картографо-статистичний аналіз.....	
5.5.2 Інформаційний аналіз карт.....	
5.5.3 Апроксимація поверхонь.....	
5.5.4 Порівняння карт різної тематики та карт, що побудовані для різних моментів часу.....	
Контрольні запитання до розділу 5.....	
6. Гідрогеологічні детерміновані моделі.....	
6.1 Стадії гідрогеологічного детермінованого моделювання...	
6.2 Вихідні дані для моделювання, схематизація гідрогеологічних умов.....	
6.3 Обґрунтування прогнозованої гідродинамічної схеми.....	
6.4 Основні положення теорії подібності при гідрогеологічному моделюванні.....	
6.5 Метод електрогідродинамічних аналогій (метод ЕГДА)...	
6.5.1 Суцільні моделі.....	
6.5.2 Сіткові моделі.....	
Контрольні запитання до розділу 6.....	
7. Числові методи розв'язання диференціальних рівнянь геофільтрації.....	
Контрольні запитання до розділу 7.....	
8. Поняття про географічні інформаційні системи.....	
Контрольні запитання до розділу 8.....	
Список літератури.....	

ПЕРЕДМОВА

Моделювання є одним з основних методів наукових досліджень та інженерних розрахунків в гідрогеології. На сьогодні його можна вважати науковим методом пізнання, в межах якого розробляється теорія побудови гідрогеологічних моделей з метою відтворення на них гідрогеологічних об'єктів, дослідження і прогнозування гідрогеологічних процесів та явищ.

З середини минулого століття на базі кафедри гідрогеології та інженерної геології Київського університету виникла та набула розвитку школа гідрогеологічного моделювання як одна з головних шкіл цього напрямку у колишньому СРСР. Становлення і розвиток Київської школи пов'язаний з іменами І.Жернова, М.Дзекунова, А.Мандрик, М.Огняника, І.Павловця, А.Ситнікова, Б.Файбищенко, В.Черновала та ін. В Київському університеті на геологічному факультеті спеціальний курс з гідрогеологічного моделювання викладається з 1964 року. В 1976 році І.Жерновим та І.Павловцем виданий відповідний навчальний посібник [8], який на протязі тривалого часу був базовим для студентів-геологів Київського університету.

Вдосконалення теорії та накопичення досвіду практичного застосування, використання математико-картографічних методів досліджень, геоінформаційних і сучасних комп'ютерних технологій, а також необхідність розв'язку актуальних екогеологічних задач призвели за останні роки до якісно нового рівня розвитку гідрогеологічного моделювання. Це викликало необхідність підготовки навчального посібника, що відповідає сучасним вимогам.

Даний підручник складений на основі досвіду десяти років викладання автором курсу “Гідрогеологічне моделювання” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

ВСТУП

Поняття про моделювання

Моделювання як метод наукового пізнання застосовується в різних галузях знань.

В гідрогеології моделювання досить широко використовується при розв’язку конкретних задач інженерного та пошуково-розвідувального змісту. Крім того, моделювання використовують при вирішенні загальнотеоретичних та регіональних задач. Методологія та методика гідрогеологічного моделювання найбільш повно розроблені стосовно процесів фільтрації, але застосовуються також для розв’язку задач міграції підземних вод та вологопереносу.

Взагалі поняття “моделювання” зараз трактується досить широко і є предметом філософського аналізу.

Моделювання взагалі - це відтворення будь-яким способом реально існуючої дійсності для вивчення об’єктивних закономірностей, які властиві цій дійсності. Формою і засобом такого відтворення є **модель**.

Слово “модель” походить від латинського *modus (modulus)* - міра, зразок, засіб, уявлення. Тобто, це поняття досить різноманітне. За допомогою такого поняття можна характеризувати будь-яке відтворення об’єкту, що вивчається (оригінала). Це може бути як матеріальний зразок, так і уявна структура явищ чи процесів, що вивчаються.

З науково-технічних позицій моделювання можна визначити як відтворення на спеціальних моделях процесів та явищ. При цьому вивчення реального процесу замінюється вивченням іншого, який у лабораторних умовах відтворюється більш просто і наочно. Така заміна можлива, тому що багато процесів характеризуються тотожністю (або аналогією) математичних рівнянь, що використовуються для опису таких процесів. Аналогія процесів у свою чергу обумовлена наявністю загальних законів руху матерії.

Всі гідрогеологічні процеси та явища відбуваються в конкретних геологічних умовах. Вони пов'язані з водоносними геологічними структурами (масивами, басейнами, комплексами, горизонтами), що характеризуються певними гідрогеологічними параметрами. Тому є сенс визначити поняття "гідрогеологічний об'єкт".

Гідрогеологічний об'єкт - це гідрогеологічний масив, басейн, водоносний комплекс, водоносний горизонт або їх частка, а також властиві для них процеси і явища. Тоді, **стосовно гідрогеології, моделювання** являє собою відтворення на спеціальних моделях гідрогеологічних об'єктів з метою вивчення цих об'єктів. Таке вивчення можна здійснити за допомогою моделей, які створюються в лабораторних умовах, а також моделей, які вибрані у природних умовах (так звані моделі-аналоги).

При моделюванні процесів фільтрації головним чином застосовуються **математичні моделі**. При цьому може бути використана тотожність рівнянь, які описують гідрогеологічний та інший (аналогічний) процеси (так звані аналогові математичні моделі). Застосування математичних моделей в гідрогеології веде до широкого використання обчислювальної математики, теорії інформації, теорії управління і таке ін. Реалізація математичних моделей потребує від гідрогеолога комплексних знань, в тому числі і уміння працювати на ЕОМ. Таким чином, гідрогеологічне

моделювання має тісний зв'язок з різними науковими та технічними дисциплінами і являє собою перспективний метод досліджень в гідрогеології. **Теоретична частина гідрогеологічного моделювання** розглядає такі головні питання:

1. Як будувати модель, які вимоги до цієї моделі.
2. Які величини слід вимірювати в процесі досліду, як обробляти отримані при моделюванні результати.
3. Як "перейти" від об'єкту до його моделі і навпаки.
4. Яким чином дані, отримані при конкретному досліді, узагальнити на цілий клас подібних або аналогічних процесів.

Становлення гідрогеологічного моделювання

Застосуванню моделювання в гідрогеології сприяли розробки:

1. Загальної теорії подібності.
2. Теорії фільтрації та міграції підземних вод.
3. Розвиток обчислювальної техніки.

Певний вплив був обумовлений також розвитком моделювання в інших галузях знань.

Моделі як форми і засоби наукових досліджень застосовувались досить давно. Наприклад, основи подібних механічних систем були розроблені ще Г.Галілеєм. Загальні ідеї моделювання та теорії подібності можна знайти в роботах І.Ньютона, Д.Максвелла, В.Томпсона (Кельвіна) та ін.

В гідрогеології моделювання (у вигляді так званого фізичного моделювання) бере початок з дослідів Ж.Дарсі (1856р.), Ф.Форхгеймера (1898р.), Г.Хелле-Шоу (1897р.). У колишньому СРСР воно отримало розвиток завдяки роботам Є.Замаріна, В.Аравіна, В.Шестакова, І.Гавіч, І.Жернова та ін.

Математичне моделювання в гідрогеології (як метод розрахунків) бере початок з розробки М.Павловським теорії електрогідродинамічних аналогій (ЕГДА). У 1918-1922р.р.

М.Павловський створив пристрій для реалізації методу ЕГДА для умов суцільного електричного середовища.

Подальший розвиток цей метод отримав в роботах В.Шестакова, П.Фільчакова, В.Панчишина, А.Тарапона та ін.

Загальна теорія так званого методу сіток, яка базується на представленні диференціальних рівнянь (у тому числі рівнянь фільтрації) у скінчених різницях, була розроблена С.Гершгориним у 1929р. Конструктивне рішення метод сіток отримав у 1934р. у роботах В.Лук'янова як метод гідравлічних аналогій (ГА), а у 1936р. в роботах Л.Гутенмахера та ін. як метод електрогідродинамічних аналогій (ЕГДА).

Застосування гідравлічного інтегратора В.Лук'янова (ІГЛ) відбулося у 1936р. ІГЛ досить широко використовувався при гідрогеологічному моделюванні на протязі 50-60-х років нашого століття.

Електричні сітки почали використовуватись в гідрогеології з початку 60-х років. Теорія і методика такого моделювання розроблялись В.Шестаковим, І.Жерновим, І.Гавич, А.Ситніковим, І.Павловцем, М.Огняником та ін.

Зараз **при гідрогеологічному моделюванні головним чином застосовуються числові методи розв'язання крайових задач фільтрації і міграції підземних вод** за допомогою персональних ЕОМ (ПЕОМ). Головні гідрогеологічні задачі, які зараз вирішуються за допомогою моделювання, такі:

1. Оцінка ресурсів і експлуатаційних запасів підземних вод.
2. Прогноз гідрогеологічних умов на зрошувальних територіях.
3. Оцінка припливів до кар'єрів і шахт.
4. Вивчення гідрогеологічних процесів в зоні аерації.
5. Вивчення процесів забруднення підземних вод.
6. Оптимізація умов експлуатації водозаборів та дренажних споруд.
7. Визначення параметрів фільтрації та міграції підземних вод.
8. Побудова постійно діючих гідрогеологічних моделей крупних регіонів з метою управління водними ресурсами.

Контрольні запитання до вступу

1. Що таке моделювання взагалі?
2. Як визначається моделювання з науково-технічних позицій?
3. Що являє собою гідрогеологічне моделювання?
4. Які головні питання розглядає теоретична частина гідрогеологічного моделювання?
5. Які головні задачі вирішуються за допомогою гідрогеологічного моделювання?

1. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ПРИКЛАДНІ ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ СУЧАСНИХ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРІВ (ПЕОМ)

1.1 Класифікація програмного забезпечення

Зараз при гідрогеологічному моделюванні широко застосовуються *персональні комп'ютери (ПК)*. Тому слід нагадати деякі загальні відомості про *програмне забезпечення (ПЗ) ПК* (Рис1.1).

Робота *ПК* неможлива без *ПЗ*. *ПЗ - це комплекс програм, які виконують певні задачі по організації роботи власне ПК, а також по вирішенню конкретних задач за допомогою ПК.*

В комплект *ПК* входить апаратна частина та *ПЗ*, в обов'язковому порядку присутня частка операційної системи (ОС), а саме *базова система вводу-виводу (BIOS)*.

Базове ПЗ - це програмні засоби, які необхідні для створення прикладного програмного забезпечення.

Прикладне ПЗ - це комплекси програм або окремі програми, за допомогою яких безпосередньо обробляється інформація в деякій конкретній галузі діяльності.

Операційна система (ОС) - це комплекс програм для управління роботою апаратної частини **ПК** і організації взаємодії між користувачем та **ПК**. **ОС** являє собою невід'ємну частину **ПК**. **Оточення ОС** - це програми, які розширюють її можливості.

Транслятори забезпечують перетворення програм, які складені за допомогою алгоритмічної або машинно-орієнтованої мови, в машинний код.

Засоби контролю та діагностики - це спеціальні програми (тести) для контролю за роботою апаратної частини **ПК**. Вони виявляють несправності та місця їх виникнення.

Пакети прикладних програм (ППП) - це комплекси програм для вирішення певного класу задач. Характерними рисами **ППП** є наявність управляючої програми, яка організує взаємодію всіх програм пакету, та наявність розвинутої мови (або інтерфейсу) спілкування людини і **ПК**.

Методо-орієнтовані ППП призначені для реалізації певних методів розв'язку задач, наприклад, для обробки статистичних даних.

Проблемно-орієнтовані ППП призначені для вирішення конкретної проблеми, яка існує у сфері діяльності спеціаліста, який не є програмістом., наприклад, це **ППП** для бухгалтерського обліку.

ППП загального призначення - це група **ПЗ**, за допомогою яких можна виконувати обробку інформації у великій кількості сфер діяльності.

Текстові редактори - це група програмних засобів для створення і редагування за допомогою **ПК** різних документів та їхнього друкування у заданому форматі.

Електронні таблиці (ЕТ) призначені для вирішення широкого кола задач, вихідні дані та результати обробки даних

яких можуть бути представлені у вигляді таблиць. При цьому забезпечуються: зберігання у пам'яті **ПК** та перегляд на екрані таблиць великих розмірів; розміщення у клітинках таблиць конкретних даних або формул, які мають посилання на інші клітинки або вбудовані функції; відображення на екрані значень, які обчислені за формулами, у клітинках таблиці; автоматичне перерахування за формулами при зміні вмісту клітинок, на які є посилання у формулах, та ін.

Системи управління базами даних (СУБД) - це **ПЗ**, які забезпечують зберігання у зовнішній пам'яті **ПК** певної інформації, пошук та вибірку цієї інформації у різних формах, оформлення результатів у вигляді документів або звітів певної структури.



Рис.1.1. Варіант класифікації програмного забезпечення персональних комп'ютерів

Графічні засоби забезпечують графічне представлення даних (у вигляді графіків, карт, діаграм, блок-діаграм та ін.).

Засоби телекомунікації і підтримки мережі забезпечують об'єднання комп'ютерів в мережу та функціонування такої мережі.

Всі вищезазначені п'ять груп **ППП загального призначення** реалізують типовий набір процедур обробки інформації. **Інтегровані системи** об'єднують в собі всі ці процедури.

Слід зазначити, що наведена класифікація, як і будь-яка класифікація взагалі, є умовною. Наприклад, сучасні операційні системи Windows 95, Windows 98, Windows 2000 та інші можна розглядати як поєднання базового та частково прикладного програмного забезпечення, а офісні системи Microsoft – як інтегровані системи.

До появи **ПК**, незалежно від типу програм, для роботи з ними необхідно було вивчати деяку вихідну мову, за допомогою якої можна керувати діями комп'ютера. Такою мовою була, як правило, сукупність символів, конструкцій, правил. Вивчивши цю мову, можна було формувати завдання на роботу комп'ютера.

З появою **ПК** та розробкою програмного забезпечення до них докорінно змінилось середовище спілкування з комп'ютером, відповідно змінились і правила роботи. Середовище спілкування стало більш “дружнім”, а саме:

- конструкції мови спілкування легко запам'ятовуються;
- існує багаторівневе меню для вибору подальших дій;
- існує система ситуаційної допомоги.

Зараз головною вимогою до роботи з програмними засобами **ПК** є комфорт користувача.

1.2 Системи управління базами даних (СУБД)

Будь-який природний чи штучний об'єкт можна розглядати як **інформаційну систему (ІС)**, що складається з елементів та зв'язків між елементами, по яким циркулює інформація. Причому ця інформація певним чином подається, переробляється, передається. Вважають, що **ІС** функціонує на базі певної **інформаційної технології (ІТ)**. Під **ІТ** розуміють пристрої, носії, методи зберігання, обробки, принципи обміну інформацією.

Перші шляхи автоматизації **ІТ** ґрунтувались на позадачному методі. При цьому розглядались питання, що пов'язані з

автоматизацією вирішення задач оперативного рівня управління.

Суть *позадачного методу* полягає в тому, що для кожної окремої задачі створюється свій блок даних D_i та своя прикладна програма Π_i . Програма Π_i вирішує цю окрему задачу з максимальною ефективністю, тобто, маємо схему, що наведена на Рис.1.2.

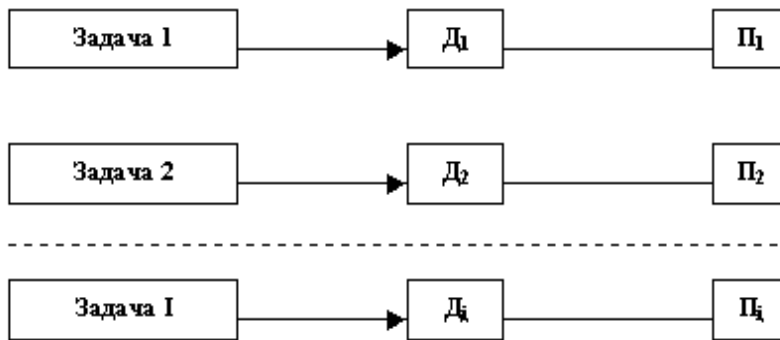


Рис.1.2. Схема позадачного методу автоматизації інформаційної технології

Проте *при реалізації позадачного методу виникають наступні проблеми:*

1. *Проблема контролю надмірності даних*, тому що дані в окремих задачах можуть дублюватися. Складність проблеми полягає також у тому, що будь-яка зміна вихідних даних для однієї задачі викликає необхідність одночасного корегування даних в інших задачах.
2. *Проблема тісного зв'язку між даними та прикладними програмами*, які створювались за допомогою стандартних алгоритмічних мов (FORTRAN, BASIC та ін.). Такі прикладні програми вміщують не тільки алгоритми розрахунків, а також і опис вихідних даних. Результатом

цього є те, що будь-яка зміна у структурі вихідних даних викликає необхідність зміни самої прикладної програми.

Існування таких проблем викликало необхідність якісного нового підходу до організації даних. Тому були сформульовані **стандартні вимоги до організації даних**, основними з яких є:

1. **Інтеграція даних.** Всі дані накопичуються та зберігаються централізовано. Вони створюють динамічну модель об'єкту, яка оновлюється в реальному масштабі часу.
2. **Забезпечення максимальної незалежності прикладних програм від даних.**

Втілення цих вимог призвело до створення єдиного для всіх задач блоку даних (**бази даних - БД**) та розробки однієї керуючої програми для роботи з даними на фізичному рівні (**системи управління базою даних - СУБД**). Схема набула вигляду, що наведений на Рис.1.3.

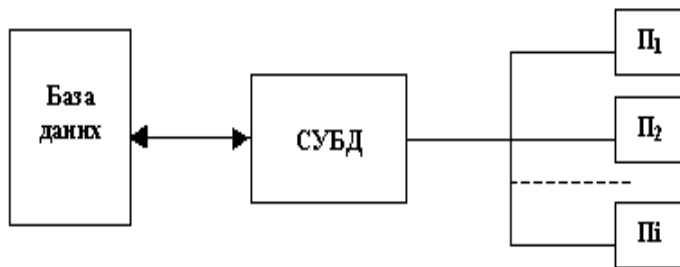


Рис.1.3. Схема автоматизації інформаційної технології за допомогою СУБД

Власне **СУБД** забезпечує незалежність даних, а прикладні програми підтримують логіку кожної конкретної задачі. Зміна фізичної організації даних сприймається **СУБД** і не впливає на прикладні програми. В свою чергу, зміна логіки прикладної програми не потребує реорганізації та зміни механізму доступу до фізичних даних.

Слід зазначити, що **будь-який блок даних не являє собою БД. БД - це сукупність даних, яка має такі властивості:**

1. **Інтегрованість**, яка направлена на вирішення загальних задач.
2. **Модельність**, тобто структурованість, яка віддзеркалює деяку частку реального світу.
3. **Незалежність** опису даних від прикладних програм.

Також *будь-яка керуюча програма роботи з БД не являє собою СУБД. СУБД - це пакет програм, який дозволяє:*

- забезпечити прикладні програми засобами опису та маніпулювання даними;
- забезпечити підтримку *моделей даних* (моделі даних визначають логічне уявлення фізичних даних);
- забезпечити операції створення та маніпулювання даними (вибір, вставка, оновлення, вилучення та ін.) та одночасне відображення (виконання) цих операцій з фізичними даними;
- забезпечити захист та узгодженість даних, тому що при колективному режимі роботи з **БД** можливо використання загальних фізичних даних.

Як зазначалось, **СУБД** підтримує певну модель даних. Розрізняють такі моделі даних (відповідно, **СУБД**):

- мережні,
- ієрархічні,
- реляційні.

Мережні СУБД використовують модель подання даних у вигляді графа.

Ієрархічні СУБД подають дані у вигляді деревоподібної структури.

СУБД персональних комп'ютерів звичайно підтримують реляційну модель даних. Реляційна модель даних використовує поняття відношення (англ. relation). Відношення зручно уявити у вигляді двомірної таблиці за умови виконання деяких обмежень. Набір таблиць (відношень) використовується для зберігання даних про об'єкти та моделювання зв'язків між даними. **Реляційна СУБД - це набір взаємопов'язаних**

відношень. Кожне відношення (таблиця) являє собою файл в комп'ютері.

Слід також визначити поняття “**банк даних**”, яке зараз використовується досить часто. **Банк даних складають:**

1. **База даних (БД).**
2. **Система управління базою даних (СУБД).**
3. **Апаратні засоби.**
4. **Служба забезпечення та деякі інші компоненти.**

Контрольні запитання до розділу 1

1. Що таке програмне забезпечення персональних комп'ютерів?
2. З чого складається програмне забезпечення персональних комп'ютерів?
3. З чого складається інформаційна система?
4. Що розуміють під інформаційною технологією?
5. Що таке база даних?
6. Що таке система управління базою даних?
7. Наведіть схему автоматизації інформаційної технології за допомогою системи управління базою даних.
8. Яку модель даних підтримують системи управління базою даних персональних комп'ютерів?
9. З чого складається банк даних?

2. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДИКИ ГІДРОГЕОЛОГІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2.1 Мета гідрогеологічного моделювання

Досить довгий час в гідрогеології застосовувався лише традиційний науковий метод узагальнення. Поява швидкодіючих комп'ютерів створила передумови для широкого використання в гідрогеології складних математичних моделей. За допомогою таких моделей може бути досягнутий досить високий рівень узагальнення реальних природних умов та прогнозу природного стану у майбутньому.

Головною метою гідрогеологічного моделювання є розробка прогнозу поведінки гідрогеологічної системи у майбутньому. Прогнозування може виконуватися або у реальному часі (*власне прогнозування*), або без конкретної прив'язки до часу (*передбачення*).

При створенні будь-якої моделі завжди намагаються спростити умови реального світу. Спрощення може бути досягнуто:

- 1) за рахунок вибору головних (базових) аспектів системи, що моделюється;
- 2) шляхом зневажання випадковими деталями.

При цьому виникає деяке протиріччя. З одного боку, модель повинна бути досить простою для розуміння і використання. З іншого боку, модель повинна бути складною в такій мірі, щоб з точки зору задачі, яка вирішується, адекватно віддзеркалювати природну систему. Слід зазначити, що більшість гідрогеологічних моделей орієнтовані на конкретний природний або штучний об'єкт. Тому вони вміщують у собі

спрощення та передумови, які обмежують універсальність моделей. Такий факт є типовим для експериментальних наук.

2.2 Натурні, фізичні та математичні моделі

Моделі можна поділити на три групи:

- 1) натурні моделі,
- 2) фізичні моделі,
- 3) математичні моделі.

Натурні моделі досить широко використовуються в практиці гідрогеологічних робіт. *Натурна модель - це об'єкт, який створений самою природою. Натурне моделювання полягає у виконанні виробничих експериментів на таких об'єктах.*

Фізичні моделі відрізняються від натурних лише геометричними параметрами (головним чином у бік зменшення останніх). Фізичне моделювання виконується на лабораторному устаткуванні, причому фізична природа явищ зберігається.

Математичні моделі - це математичний опис процесу, що досліджується. Математичне моделювання полягає або в аналізі цього математичного опису, або у розв'язку рівнянь, за допомогою яких цей опис представлений.

Серед математичних моделей виділяють так звані *постійно діючі математичні гідрогеологічні моделі*. Математичну модель можна вважати постійно діючою, якщо виконуються такі головні принципи: реалізація оберненого зв'язку між розрахунковою схемою-моделлю об'єкта, що вивчається, метою і задачами прогнозу; безперервність схематизації, яка забезпечує етапність польових експериментів, направлених на розширення уявлень про об'єкт та про окремі його елементи; адаптація моделі, що передбачає безперервне покращення її

якості за рахунок додаткових польових досліджень і удосконалення методики їх інтерпретації.

Як відомо, **найбільшу прогностичну здатність** з перелічених груп моделей **мають математичні моделі**. Тому у подальшому будуть розглянуті головним чином математичні гідрогеологічні моделі.

2.3 Вибір математичної гідрогеологічної моделі

Якщо врахувати більшість аспектів гідрогеологічних досліджень, можна виділити **три головних типи математичних моделей**, які мають різну структуру: статистичні моделі, детерміновані моделі та концептуальні моделі.

Статистичні моделі (емпіричні моделі; моделі, які працюють за принципом “чорного ящика”). Такі моделі базуються на статистичній оцінці погодження входів та виходів моделі та не мають фізично обґрунтованої функції, яка пов’язує входи моделі та виходи. Моделі використовують ряд методів для такого погодження (регресійний аналіз, аналіз часових рядів, аналіз екстремальних частот та ін.). У межах діапазону даних про систему, що аналізується (**при інтерполяції**), такі **моделі можуть дати добрий результат**. Це пояснюється тим, що при інтерполяції формально математична структура моделі досить повно відповідає структурі фізичної системи, що досліджується. Але при екстраполяції за межі діапазону, що досліджувався, відповідність математичної та фізичної структур втрачається, тому **результати такої екстраполяції можуть мати досить мало спільного з реальністю**. З точки зору математики такі моделі непридатні для прогнозування, бо вміщують неконтрольовану похибку.

Детерміновані моделі базуються на використанні складної фізичної теорії. Стосовно фільтрації вони базуються на крайових задачах геофільтрації. Незважаючи на те, що розв'язки крайових задач виконуються при певних спрощеннях реальних природних умов, ці моделі часто вимагають великого об'єму вихідної інформації, отже, значних грошових витрат. Брак такої інформації веде до невизначеності прогнозів. Але **детерміновані моделі мають найбільшу прогностичну здібність**. Крім того, при розробці детермінованої моделі вдосконалюються знання про гідрогеологічну систему, що досліджується.

Концептуальні моделі займають проміжне становище між двома попередніми. Концептуальні моделі створюються на основі аналізу простої структури системи, що вміщує у собі відносно невелику кількість компонентів. Кожний з таких компонентів являє собою схематизовану подібність одного з елементів процесу, який має місце в системі, що моделюється. Всі такі елементи розглядаються як нелінійні витoki. Нелінійність віддзеркалює природний характер гідрогеологічних систем, які найчастіше не можна адекватно уявити за допомогою лінійної моделі.

При виборі типу моделі слід додержуватись наступних правил:

- 1) задача, що розв'язується, повинна бути чітко сформульована;
- 2) модель повинна вибиратись "під задачу", а не навпаки;
- 3) якщо декілька моделей можуть забезпечити необхідну точність розв'язку, перевагу слід надати моделі, яка є більш простою.

Також слід врахувати наступне:

- 1) складність моделі і її точність - це різні речі;
- 2) будь-яка модель має певні обмеження, тому що будується на певних передумовах;

3) завжди необхідно оцінювати невизначеність (тобто, похибку) модельних прогнозів.

Не викликає сумнівів той факт, що **чим більша складність моделі, тим ширші її можливості**. Однак масове застосування складних моделей та програм для моделювання пов'язане із значними труднощами. Багато складних програм не розраховані на тиражування. Тому виникають труднощі, коли автоматизовану модель або програму для моделювання починають встановлювати на комп'ютері користувачі, які не мають постійного контакту з розробниками моделі або програми та повної документації до них. Часто-густо користувачеві більш вигідно та простіше розробити власний програмний засіб для реалізації конкретної моделі.

Якщо розглянути питання вибору моделі з позицій гідрогеологічного прогнозування та прийняття рішень (теорії управління), слід врахувати наступне. **Оптимальне рішення не може бути вироблено із застосуванням лише гідрогеологічних моделей. Для цього потрібне поєднання гідрогеологічних моделей та моделей управління. Застосування лише гідрогеологічних моделей може привести до неправильного результату, тому що не враховані реальні можливості інженерного впливу на об'єкт моделювання.** Розробка таких комплексних моделей займає зараз значне місце при гідрогеологічному прогнозуванні.

2.4 Інформаційне та технічне забезпечення моделей

Рівень розвитку гідрогеологічного моделювання пов'язаний з двома суттєвими обмеженнями:

- 1) рівнем застосування обчислювальної техніки (технічне забезпечення);
- 2) базою вихідних даних, що існує (інформаційне забезпечення).

Рівень застосування обчислювальної техніки визначається головним чином рівнем розвитку держави.

Якість вихідних даних (інформації) про об'єкт можна оцінювати з таких позицій:

- 1) **об'єм наявної інформації;**
- 2) **ступінь відповідності параметрів моделі реальним параметрам;**
- 3) **точність вимірювань реальних параметрів;**
- 4) **репрезентативність вимірювань.**

Об'єм наявної інформації визначає вибір тої чи іншої групи (типу) моделі.

Параметри моделі повинні бути реальними, тобто відповідати параметрам, які встановлені в польових умовах.

Оцінка точності польових вимірювань є обов'язковою, інакше не можна оцінити частку похибок вимірювань при моделюванні. Взагалі похибки вимірювань викликають додаткову невизначеність модельних прогнозів.

У більшості випадків дослідники не в змозі досягнути необхідної статистичної репрезентативності вимірювань (об'єму вихідної інформації). Головна причина полягає у тому, що бракує коштів і часу. Часто дослідники обмежуються вимірюванням параметру лише в одній точці. В такому випадку мінливість у просторі і часі параметру, що досліджується, визначається не об'єктивно, а в залежності від типу мережі спостережень. Тому **зараз головним питанням методики гідрогеологічного моделювання є не вдосконалення моделей та обчислювальних процедур, а вирішення проблеми коректного розповсюдження інформації, яка отримана у точці, на об'єкт досліджень.**

Контрольні запитання до розділу 2

1. Що є головною метою гідрогеологічного моделювання?
2. В чому полягає різниця між передбаченням та власне прогнозуванням?

3. В чому полягає різниця між фізичними та натурними моделями?
4. В чому полягає математичне моделювання?
5. Що являють собою постійно діючі математичні гідрогеологічні моделі?
6. Які моделі мають найбільшу прогностичну властивість?
7. Назвіть головні типи математичних моделей.
8. Які існують правила вибору типу моделі?
9. З яких позицій можна оцінити якість інформації про об'єкт при моделюванні?
10. Яке питання методики гідрогеологічного моделювання зараз є головним?

3. СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ПРИ ГІДРОГЕОЛОГІЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Системний підхід - це сукупність спеціальних методологічних прийомів вивчення об'єктів як систем. **Головний принцип системного підходу - це цілісність та визначена послідовність у дослідженнях:** від властивостей об'єкту через його відношення до пізнання механізму функціонування об'єкту.

При системному підході гідрогеологічний об'єкт (**гідрогеологічна система**) розглядається як сукупність гідрогеологічних тіл, що характеризуються певними співвідношеннями між собою та зовнішнім середовищем.

Гідрогеологічні системи можна поділити на:

- 1) **елементарні, локальні та регіональні;**
- 2) **природні та природно-техногенні.**

Категорії “елементарна”, “локальна” і “регіональна” залежать від масштабу, у якому досліджується процес чи об’єкт.

Природно-техногенні системи відрізняються від природних тим, що у вигляді елементів (підсистем) вміщують у собі інженерні (штучні) споруди або такі природні об’єкти, які суттєво змінені людиною.

Функціонування будь-якої гідрогеологічної системи можна розглядати як взаємодію силових полів, які характеризують зміну енергії (тиску, температури) та маси речовини.

Поле будь-якої величини - це область, в якій ця величина змінюється у координатах простору і часу. М.Огільві запропонував розрізняти фізичні та геологічні поля.

Геологічні поля - це поля показників, які характеризують зміну властивостей гідролітосферного простору. Наприклад, це поля коефіцієнту фільтрації, коефіцієнту водопровідності.

Фізичні (або динамічні) поля - це поля сил або градієнтів сил, які визначають рух у гідрогеологічній системі. Наприклад, це поля гідродинамічних напорів, температур, концентрацій.

З точки зору математики **геологічні поля являють собою поля аргументів, а фізичні - поля функцій.**

Якщо зв’язок між фізичними та геологічними полями детермінований, то математично він представляється за допомогою системи диференціальних рівнянь (**детермінована модель**).

Якщо зв’язок між полями не визначений, то для опису системи використовуються імовірно-статистичні методи (**імовірнісна модель**).

Детермінована модель дозволяє отримати значення величин, що вивчаються, з імовірністю 100% (звичайно, у межах достовірності вихідних даних). Проте слід зазначити, що звичайно гідрогеологічні системи при детермінованому моделюванні вважаються однорідними або шматково-однорідними. Їх параметри визначаються як деякі середні для

певної кількості дискретних точок (найчастіше середні арифметичні), хоча на практиці стандартне відхилення до 50% від середнього значення параметру є досить типовим. Цілком зрозуміло, що таке відхилення в значеннях параметрів призводить до невизначеності у прогнозах. Тому зараз актуальною є задача визначеності прогнозних оцінок, тобто необхідно вказувати їх верхні та нижні межі, дисперсії та розподіли імовірності похибок усередині діапазону змін.

Імовірнісна модель дозволяє представити інформацію про гідрогеологічну систему у вигляді декількох узагальнюючих статистик. За допомогою цих статистик можна робити висновки про стан та поведінку гідрогеологічної системи з певною імовірністю.

Існують також *імовірнісно-детерміновані моделі*. Вони являють собою диференціальні рівняння, параметри та крайові умови яких мають імовірнісний характер (диференціальні рівняння із стохастичними параметрами або стохастичними початковими та граничними умовами, тобто стохастичні диференціальні рівняння). На жаль, математична теорія стохастичних рівнянь у частинних похідних знаходиться в початковій стадії розвитку. Тому на практиці такі моделі в гідрогеології майже не застосовуються.

Традиційно в гідрогеології застосовують детерміновані моделі, які мають найбільші прогностичні властивості. Але ***в останній час почали широко застосовуватися імовірнісні гідрогеологічні моделі***. Це обумовлено такими причинами:

- 1) складність задач, які вирішує гідрогеологія, особливо в зв'язку з техногенним впливом;
- 2) сукупне техногенне навантаження на підземні води найчастіше має імовірнісний характер;
- 3) об'єктивно існує інформаційний дефіцит при розв'язку задачі;
- 4) зростання вартості гідрогеологічних робіт.

Імовірнісні гідрогеологічні моделі найбільш успішно зараз використовуються для об'єктивного “наповнення” детермінованих, тобто *імовірнісні моделі доцільно застосовувати при аналізі геологічних полів. Наступний прогноз поведінки фізичних полів доцільно виконувати за допомогою детермінованих моделей.* Проте слід врахувати, що *імовірнісний характер вихідної інформації накладає певні обмеження на достовірність детермінованих гідрогеологічних моделей.*

Стосовно переваг і недоліків детермінованого та імовірнісного підходів при гідрогеологічному моделюванні необхідно зазначити наступне. На початку 30-х років О.Колмогоров математично обґрунтував, що застосування при дослідженні деякого процесу схеми детермінованого або імовірнісного процесу аж ніяк не пов'язане з питанням про те, чи є власне цей процес детермінованим чи випадковим. Тобто, всюди, де виконуються аксіоми теорії ймовірностей, можна застосувати і висновки з цих аксіом, хоча власне об'єкт може не мати нічого спільного з реальною випадковістю. Можна стверджувати, що поділ реального світу (і математики також) на детермінований та випадковий є штучним поділом.

Контрольні запитання до розділу 3

5. Що є головним принципом системного підходу?
6. Як можна поділити гідрогеологічні системи про застосуванні системного підходу?
7. В чому полягає різниця між геологічними та фізичними полями?
8. В чому полягає різниця між детермінованими та імовірнісними моделями?
9. Що являють собою імовірнісно-детерміновані моделі?
10. Які причини останнім часом призвели до широкого застосування імовірнісних гідрогеологічних моделей?

11. Які є переваги та недоліки в застосуванні імовірнісних та детермінованих гідрогеологічних моделей?

4. ІМОВІРНІСНІ ГІДРОГЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ

4.1 Модель випадкової величини та модель випадкової функції

При використанні імовірнісних методів при гідрогеологічному моделюванні можна застосувати або *модель випадкової величини*, або *модель випадкової функції*.

Застосування моделі випадкової величини потребує виконання таких умов:

1. **Однорідність вихідних даних.**
2. **Незалежність величин показників між собою.**
3. **Незалежність величин показника, що досліджується, від координат простору.**

Найбільша проблема, яка тут виникає - це забезпечення однорідності вихідних даних. Але ця проблема може бути вирішена за допомогою поділу гідрогеологічного об'єкту на умовно однорідні частки (гідрогеологічного районування). Тоді відхилення значень показника від середнього арифметичного в межах кожної такої частки можна розглядати як випадкові значення.

Інша модель - це модель випадкової функції. **Випадкова функція - це сукупність випадкових величин, які залежать від певного параметру.** Визначення параметру в гідрогеології майже завжди являє собою лише одну реалізацію випадкової функції. За допомогою одиначної реалізації не можна визначити основні характеристики випадкової функції (математичне очікування, дисперсію та кореляційну функцію). Тому дана модель поки що не може знайти широке застосування в гідрогеології у зв'язку з обмеженістю даних для визначення випадкової функції та параметрів її розподілу.

Таким чином, вимоги до **використання зазначених моделей в гідрогеології, суворо кажучи, не виконуються.** Це примушує дослідників робити певні припущення та спрощення, щоб застосувати певну модель. У відношенні припущень **модель випадкової величини більш гнучка, ніж модель випадкової функції** (дозволяє більш повно обґрунтувати припущення, які необхідні для застосування такої моделі). Тому **зараз при гідрогеологічному моделюванні переважно використовують модель випадкової величини,** яка і розглядається у подальшому.

4.2 Упорядкування та групування даних

При гідрогеологічному дослідженні відбирається певна кількість даних (спостережень), яка має назву **вибіркової сукупності (вибірки)**. Аналізуючи вибірку, роблять висновки про **об'єкт досліджень (генеральну сукупність)**.

Вибіркова сукупність, яка записана у тій послідовності, в якій отримана, являє собою **первісну інформацію (неупорядковану вибірку)**.

Використовуючи неупорядковану вибірку, визначають закономірності явища (або об'єкту), що досліджується. Для цього **спочатку вибірку упорядковують**, тобто розміщують числові дані в певній послідовності. Найчастіше дані розміщують у порядку зростання. Якщо вибірка досить велика, **числові дані об'єднують в групи**. Ці групи повинні розрізнятися на певну величину (інтервал). Для визначення **оптимальної величини** такого **інтервалу d** застосовують формулу Стерджеса:

$$d = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + \log_2 N} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3.32 \cdot \lg N} \quad (4.1)$$

де X_{\max} і X_{\min} - відповідно максимальне і мінімальне

значення вибірки;

N - кількість значень (об'єм) вибірки.

Величина $(X_{\max} - X_{\min})$ має назву **розмаху вибірки**.

Число значень в виборці, яке включене в інтервал, має назву "**частота інтервалу**" (n_i). Число, яке вказує на долю частоти

інтервалу в виборці $\left(v = \frac{n_i}{N} \right)$, має назву **відносної частоти**

(або **частоти**). Також існує поняття **накопиченої частоти** ($n_i^{\text{нак}}$). Воно вказує, скільки менших або рівних даному значенню X_i значень знаходиться у вибірці.

Сума частот інтервалів повинна бути рівною об'єму вибірки, а сума відносних частот - одиниці.

Аналізуючи упорядковану та згруповану вибірку, легше визначити особливості явища або об'єкту, що розглядаються. У такому випадку явище ***являє собою вибірковий розподіл частот або відносних частот.***

4.3 Графічне зображення вибіркового розподілу

Існують наступні види графічного зображення вибіркового розподілу: гістограма, полігон, кумулятивна крива, огіва. Найчастіше застосовують гістограму.

При побудові ***гістограм*** по осі абсцис відкладають відрізки, які відповідають інтервалам вибірки. Потім на базі цих відрізків будують прямокутники, висоти яких відповідають частотам або відносним частотам відповідних інтервалів. При побудові ***полігону*** по осі абсцис відкладають центральні значення всіх інтервалів, а по осі ординат - відповідні частоти або відносні частоти (Рис.4.1). Зовнішньо полігон являє собою ламану лінію.

Кумулятивна крива будується так: по осі абсцис відкладають значення вибірки, а по осі ординат - відповідні накопичені частоти або накопичені відносні частоти (Рис.4.2).

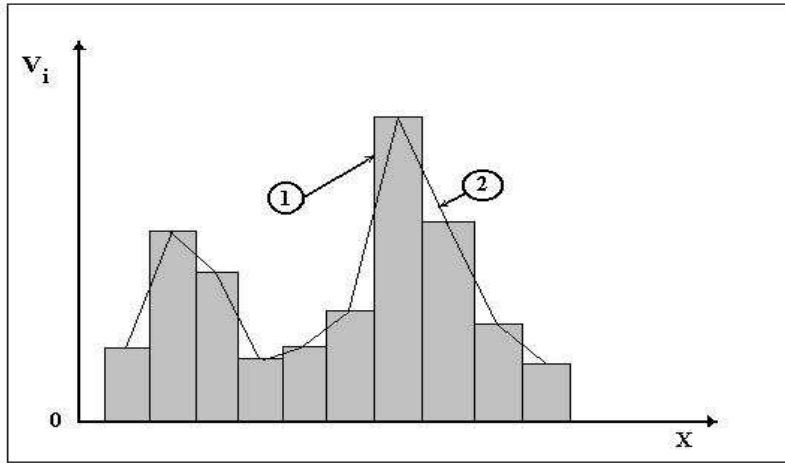


Рис. 4.1. Гістограма (1) та полігон (2)

Відповідно для X_{\min} відносна накопичена частота дорівнює нулю, а для X_{\max} дорівнює одиниці.

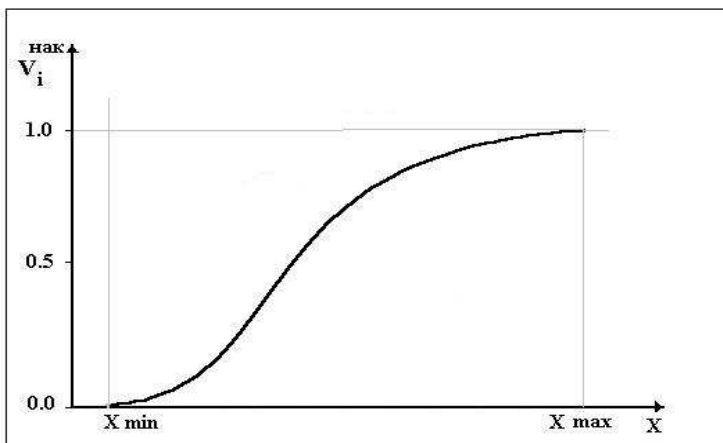


Рис. 4.2. Кумулятивна крива

Якщо поміняти осі місцями, кумулятивна крива перетвориться в *огіву*.

У випадку великого об'єму вибірки кількість інтервалів гістограми також буде досить великою. При цьому графічне зображення розподілу мало відрізняється від безперервних плавних кривих. Такі криві мають назву *кривих розподілу* (Рис.4.3). Аналітичний вираз, який задає криву розподілу в обраній системі координат, являє собою функцію, або *закон розподілу випадкової величини*, що досліджується.

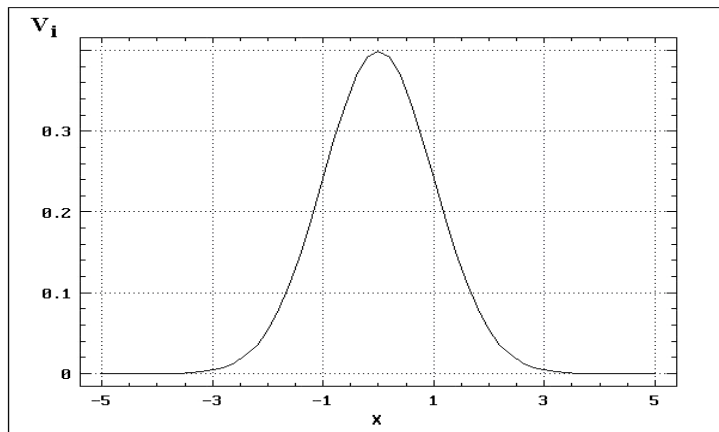


Рис. 4.3. Крива розподілу

Порівняння отриманих вибірових розподілів величин з детально вивченими теоретичними законами розподілу ймовірностей дає можливість у подальшому використовувати ці закони для дослідження вибірових розподілів. Це порівняння та доказ адекватності розподілів виконуються за допомогою відповідних критеріїв.

Найчастіше використовуються теоретичні *нормальний* або *логнормальний* закони розподілу випадкової величини. При цьому слід зазначити, що отримані випадкові величини повинні бути безперервними.

4.4 Перевірка гіпотези про нормальність (логнормальність) розподілу випадкової величини

Існує декілька способів перевірки гіпотези про нормальність розподілу. Найбільш простий з них має назву “*правило трьох сигм*”.

При реалізації такого способу обчислюють наступні величини.

1. Середнє арифметичне $X_{сер}$:

$$X_{сер} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad (4.2)$$

де X_i - i -те значення вибірки;

N - кількість значень вибірки.

2. Вибіркове стандартне відхилення σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - X_{сер})^2} \quad (4.3)$$

3. Коефіцієнт асиметрії A :

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - X_{сер})^3}{N \cdot \sigma^3} \quad (4.4)$$

4. Коефіцієнт ексцесу E :

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - X_{\text{сеп}})^4}{N \cdot \sigma^4} - 3 \quad (4.5)$$

5. Стандартні відхилення коефіцієнтів асиметрії і ексцесу σ_A, σ_E :

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6}{N}} \quad (4.6)$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24}{N}}$$

Ознакою нормальності розподілу випадкової величини теоретично є дотримання умови:

$$\begin{cases} A = 0, \\ E = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Однак значення A і E , що розраховані по даним вибірки, майже завжди відрізняються від значень відповідної генеральної сукупності за рахунок похибки вибірки. Тобто, якщо у генеральній сукупності $A=0$ і $E=0$, то вибіркові значення A і E (значення A і E , які отримані по множині вибірок з генеральної сукупності) будуть являти собою деякі сукупності. Ці сукупності будуть розподілені майже нормально із стандартними відхиленнями σ_A і σ_E , тобто 99,73% вибірових значень A і E будуть знаходитись в інтервалах:

$$-3 \cdot \sigma_A < A < +3 \cdot \sigma_A, \quad (4.8)$$

$$-3 \cdot \sigma_E < E < +3 \cdot \sigma_E$$

Тоді можна стверджувати, що *ознакою нормальності розподілу випадкової величини є дотримання такої умови:*

$$\begin{cases} |A| < 3 \cdot \sigma_A, \\ |E| < 3 \cdot \sigma_E \end{cases} \quad (4.9)$$

Суворо кажучи, якщо виконуються умови $|A| \geq 3 \cdot \sigma_A$ або $|E| \geq 3 \cdot \sigma_E$, з імовірністю 99,73% можна стверджувати, що розподіл значень генеральної сукупності не є нормальним. У випадку дотримання умови (4.9) слід стверджувати таке: немає підстав вважати, що дана генеральна сукупність не підкоряється нормальному закону розподілу. Тому можна прийняти гіпотезу про те, що дана генеральна сукупність підкоряється нормальному закону розподілу.

Все наведене вище є справедливим, коли об'єм вибіркової сукупності досить великий. Якщо кількість даних невелика ($N < 50$), слід замість A, E, σ_A, σ_E використовувати їх незміщені оцінки $A_H, E_H, \sigma_{AH}, \sigma_{EH}$, а саме :

$$A_H = \sqrt{\frac{N \cdot (N-1)}{N-2}} \cdot A \quad (4.10)$$

$$E_H = \frac{N^2 - 1}{(N-2) \cdot (N-3)} \cdot \left[E + \frac{6}{N+1} \right] \quad (4.11)$$

$$\sigma_{AH} = \sqrt{\frac{6}{N+3}} \quad (4.12)$$

$$\sigma_{EH} = \sqrt{\frac{24}{N+5}} \quad (4.13)$$

Для перевірки гіпотези про логнормальність розподілу використовують логарифми значень вибірки, залишаючи власне процедуру перевірки без змін.

4.5 Встановлення приналежності вибірових сукупностей до однієї генеральної сукупності

Якщо вибірові сукупності підкоряються нормальному або логнормальному закону розподілу, приналежність вибірових сукупностей до однієї генеральної сукупності можна встановити за допомогою дисперсійного аналізу та перевірки гіпотези про рівність середніх арифметичних. У випадку логнормального закону розподілу при розрахунках використовують не значення вибірок, а логарифми значень вибірок.

При дисперсійному аналізі перевіряється гіпотеза про рівність дисперсій (дисперсія $D = \sigma^2$). Для цього застосовують вибірові стандартні відхилення двох вибірок X та Y (σ_X) та (σ_Y). Критерій перевірки гіпотези базується на F -розподілі Фішера. Спочатку обчислюється F - відношення, причому у чисельнику повинно стояти більше за абсолютною величиною стандартне відхилення:

$$F = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \quad (4.14)$$

Потім за допомогою спеціальної таблиці в залежності від заданої імовірності та числа ступенів свободи чисельника і знаменника F - відношення визначається F - критерій Фішера ($F_{кр}$). Якщо $F > F_{кр}$, то можна з заданою імовірністю

стверджувати, що дисперсії різні, отже, вибірки не належать до однієї генеральної сукупності. **Якщо** $F \leq F_{кр}$, не можна з заданою імовірністю казати про те, що дисперсії різні. У такому випадку приймається гіпотеза про рівність дисперсій, отже вважається, що **вибірки належать до однієї генеральної сукупності**.

Якщо встановлена рівність дисперсій, слід перевірити гіпотезу про рівність середніх арифметичних. Для цього обчислюється t - статистика Ст'юдента за формулою:

$$t = \frac{X_{сер} - Y_{сер}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{N_X} + \frac{\sigma_Y^2}{N_Y}}} \quad (4.15)$$

де $X_{сер}$ та $Y_{сер}$ - середні арифметичні вибірок X та Y ;

N_X - кількість значень у вибірці X ;

N_Y - кількість значень у вибірці Y .

За допомогою спеціальної таблиці в залежності від заданої імовірності та числа ступенів свободи визначається t - критерій Ст'юдента ($t_{кр}$).

Якщо $t > t_{кр}$, то можна з заданою імовірністю стверджувати, що середні арифметичні вибірок X і Y різні. Якщо $t \leq t_{кр}$, немає підстав для того, щоб вважати середні арифметичні різними. Тому приймається гіпотеза про рівність середніх арифметичних.

Таким чином, **якщо**

$$\begin{cases} F \leq F_{кр} \\ t \leq t_{кр} \end{cases} \quad (4.16)$$

немає підстав для твердження про те, що вибірки належать до різних генеральних сукупностей. Тому приймається, що вибірки належать до однієї генеральної сукупності.

4.6 Парний кореляційний аналіз

Такий аналіз використовується для *вияву зв'язку між двома генеральними сукупностями за даними їх вибірок*.

Необхідні умови застосування парного кореляційного аналізу:

- 1) вихідні дані повинні бути синхронізовані у просторі або часі;
- 2) об'єми вибірок повинні бути однаковими (тобто $N_x = N_y = N$);
- 3) вибірки повинні підкорятись нормальному чи логнормальному законам розподілу (в останньому випадку використовують логарифми значень вибірок).

При аналізі спочатку обчислюється *вибірковий коефіцієнт кореляції* r за формулою:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N [(X_i - X_{cep}) \cdot (Y_i - Y_{cep})]}{(N-1) \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4.17)$$

де X_i та Y_i - відповідні i -ті значення вибірок X та Y .

Потім встановлюється значущість вибіркового коефіцієнту кореляції (тобто, суттєво чи ні він відрізняється від 0) за допомогою Z - критерію Фішера. Для цього обчислюють Z - статистику Фішера (Z) та стандартну похибку Z - статистики Фішера (σ_z):

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (4.18)$$

$$\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} \quad (4.19)$$

Якщо $Z \geq 1.96 \cdot \sigma_Z$, з імовірністю 95% можна стверджувати про те, що коефіцієнт кореляції є значущим. Тобто, з імовірністю 95% можна казати, що між двома генеральними сукупностями є зв'язок. Слід зазначити, що з імовірністю 99.73% зв'язок можна вважати встановленим за умови $Z \geq 3 \cdot \sigma_Z$.

При малій кількості вихідних даних ($N < 50$) замість r слід використовувати виправлений коефіцієнт кореляції $r_{вин}$, який розраховується за допомогою такої формули:

$$r_{вин} = r \cdot \left[1 + \frac{1-r}{2 \cdot (N-3)} \right] \quad (4.20)$$

Взагалі, коефіцієнт кореляції змінюється у межах $-1 \leq r \leq +1$.

Якщо $r = 0$, зв'язок відсутній. Якщо $r = \pm 1$, зв'язок є функціональним.

Для вияву щільності зв'язку між сукупностями можна використати так званий *коефіцієнт детермінації* (d), який показує щільність зв'язку у відсотках:

$$d = r^2 \cdot 100\% \quad (4.21)$$

4.7 Розподіл точок на площині

Досить поширеною є задача вивчення способу розподілу точок на двомірній поверхні (тобто, карті). Ці точки відповідають місцям випробування або місцям спостережень (вимірювань). Така задача вміщує у собі три наступних аспекти:

1. **Вивчення однорідності розподілу точок.**
2. **Вивчення кількості розподілу точок.**
3. **Вивчення зв'язку між точками.**

Існуючи схеми розподілу точок на картах зручно спочатку поділити на *дві групи*:

1. **Рівномірна схема.**
2. **Групова схема.**

Схема розподілу точок на карті є *рівномірною*, якщо щільність точок в будь-якій підобласті карти дорівнює щільності точок у всіх інших підобластях. В іншому випадку маємо *групову* схему. **Щільність точок** - це кількість точок на одиницю площі карти.

Рівномірність розподілу - це необхідна умова для використання багатьох видів аналізу карт. Достовірність карти знаходиться у прямій залежності від рівномірності і щільності розподілу точок спостережень. Однак більшість геологів виконує оцінку розподілу точок лише з якісних позицій, а не з позицій вимірювань та обчислювань. Між тим, критерії такої кількісної оцінки досить прості.

У свою чергу *рівномірні схеми поділяють на регулярні та випадкові*.

Схема є *регулярною*, якщо точки спостережень створюють певний вид мережі. Це означає, що *відстань між точками i та j* у деякому напрямку мережі є *константою* для будь-якої пари точок i та j на даній карті.

Для *випадкової* схеми характерним є те, що *імовірність появи точки* спостережень у будь-якій підобласті карти є *сталю величиною*, яка не залежить від появи інших точок спостережень. Таким чином, *випадкова схема забезпечує рівномірність та незалежність випробувань, що дозволяє*

обґрунтовано застосувати статистичну модель випадкової величини.

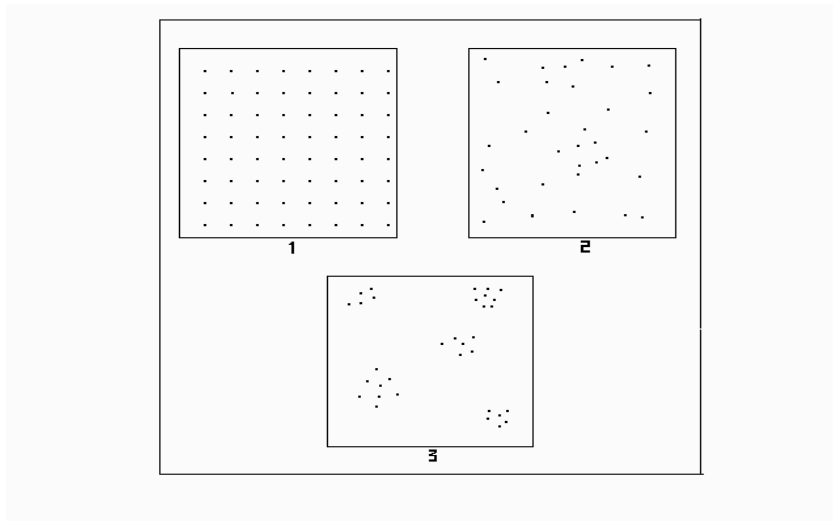


Рис. 4.4. Регулярна (1), випадкова (2) та групова (3) схеми розподілу точок на площині

Звичайно, для більшості карт характерні такі схеми розподілу точок спостережень, які займають проміжне положення між зазначеними вище схемами. **Задача оцінки розподілу точок полягає у віднесенні (класифікації) певної схеми до однієї з зазначених вище схем.**

Для перевірки рівномірності розподілу точок всю карту можна поділити на множину підобластей рівних розмірів (найчастіше на квадрати). Кожна підобласть буде вміщувати певну кількість точок. Якщо розподіл точок є рівномірним, слід чекати того, що кількість точок у всіх розглянутих подібностях буде однаковою (статистично однаковою). Гіпотезу про відсутність суттєвої різниці у кількості точок для кожної з підобластей можна перевірити за допомогою критерію χ^2 .

Теоретично критерій χ^2 не залежить від форми та орієнтації підобластей, потужність критерію зростає з ростом кількості останніх. Проте кількість підобластей не може бути надто великою тому, що підобласть повинна вміщувати не менше п'яти точок спостережень.

Очікувана кількість точок для кожної підобласті O може бути розрахована за формулою:

$$O = \frac{N}{m} \quad (4.22)$$

де N - загальна кількість точок на карті;
 m - кількість підобластей.

χ^2 - статистика для перевірки гіпотези про рівномірність розподілу точок спостережень визначається таким чином:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - O)^2}{O} \quad (4.23)$$

де O_i - кількість точок спостережень в підобласті з номером i ;
 m - кількість підобластей.

Потім за допомогою спеціальної таблиці за умови, що кількість ступіней свободи дорівнює $(m - 2)$, визначається $\chi_{кр}^2$. Якщо $\chi^2 \leq \chi_{кр}^2$, вважається, що розподіл точок спостережень є рівномірним.

Проте **застосування критерію χ^2** для перевірки рівномірності точок **має наступні недоліки:**

1. Можливо, існує такий розмір підобласті, при якому гіпотеза про рівномірність буде відхилена.

2. Встановлення факту рівномірності не визначає природу цієї рівномірності. Тобто, як регулярний, так і випадковий розподіл точок спостережень мають рівномірний характер.

Цих недоліків не має інший метод - **метод найближчого сусідства**. При реалізації методу дані, що аналізуються, являють собою не множину точок спостережень, а відстані між найбільш близькими парами точок спостережень. **Розмір підобласті не обирається**, тому виключена можливість отримання протилежних даних при перевірці гіпотези для різномасштабних карт одного і того ж об'єкту. Крім того, кількість пар найближчих точок спостережень значно більша, ніж кількість підобластей. Тому **метод найближчого сусідства більш чутливий**, ніж застосування критерію χ^2 .

Головна перевага методу найближчого сусідства полягає у тому, що **він дозволяє**, крім оцінки рівномірності, **отримати інформацію про природу цієї рівномірності** (тобто, встановити, за регулярною чи випадковою схемою розподілені точки).

Для застосування методу найближчого сусідства слід визначити так звану R - статистику методу найближчого сусідства:

$$R = \frac{\bar{D}}{\Delta} \quad (4.24)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{P}} \quad (4.25)$$

$$P = \frac{N}{S} \quad (4.26)$$

де N - кількість точок спостережень;
 S - площа території, що досліджується;

\bar{D} - середнє арифметичне відстаней між кожною точкою спостережень та найближчою до неї сусідньою точкою.

R - статистика приймає значення в інтервалі від 0 до 2,15.

У випадку, коли всі точки спостережень зведені в одну точку (ідеальна гіпотетична *групова* схема), R - *статистика дорівнює 0*. Якщо схема розподілу точок спостережень є *випадковою*, R - *статистика дорівнює 1*. При *регулярному* розподілу точок спостережень R - *статистика дорівнює 2,15*.

На практиці для визначення (класифікації) схеми розподілу точок спостережень за допомогою методу найближчого сусідства можна застосувати таку *шкалу*:

- $0.00 < R \leq 0.50$ - *групова* схема;
- $0.50 < R \leq 1.50$ - *випадкова* схема;
- $1.50 < R \leq 2.15$ - *регулярна* схема.

Контрольні запитання до розділу 4

1. Чим відрізняється модель випадкової функції від моделі випадкової величини?
2. Яким умовам повинні відповідати вихідні дані при застосуванні моделі випадкової величини?
3. Як визначається оптимальна величина інтервалу при об'єднанні числових даних в групи?
4. Чим відрізняється частота інтервалу від частоти?
5. Які існують види графічного зображення вибіркового розподілу випадкової величини?
6. Як можна перевірити гіпотезу про нормальність розподілу випадкової величини?
7. Як можна перевірити гіпотезу про логнормальність розподілу випадкової величини?
8. Як можна встановити приналежність вибіркових сукупностей до однієї генеральної сукупності?

9. Для чого використовується парний кореляційний аналіз та які необхідні умови його застосування?
10. Що характеризує коефіцієнт детермінації?
11. Які існують схеми розподілу точок на карті?
12. Чим відрізняється регулярна схема розподілу точок на карті від випадкової?
13. Може чи ні випадковий розподіл точок на карті відповідати рівномірній схемі розподілу?
14. Як можна оцінити схему розподілу точок на карті?

5. КАРТОГРАФІЧНІ ГІДРОГЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ

Найбільш поширений спосіб представлення моделей в гідрогеології (та в геології взагалі) - це графічний спосіб. Тобто, **результати гідрогеологічного моделювання втілюються у вигляді графіків** (розрізів, діаграм, карт і т.д.). Крім того, **графічний матеріал є вихідним для побудови гідрогеологічних моделей**. Таким чином, картографічні моделі займають значне місце у гідрогеологічному моделюванні. В цьому зв'язку слід коротко розглянути основні положення розділу картографії, який має назву "використання карт".

Використання карт - це розділ картографії, який вивчає особливості та напрями використання картографічних матеріалів в різних сферах діяльності людини; розробляє методичку роботи з картографічними матеріалами; оцінює надійність та ефективність отриманих при цьому результатів. Слід зазначити, що розробка методички використання карт здійснюється не тільки у рамках картографії, а також в інших науках, де карти мають широке застосування.

Метод використання карт для пізнання зображених на них явищ має назву **картографічного методу досліджень**. Картографічний метод досліджень вміщує у собі наступні **групи прийомів**:

1. **Опис по картах.** Це фіксація результатів якісного та кількісного аналізів зображених на картах явищ або процесів у вигляді текстів.
2. **Графічні прийоми.** Це побудова по картах профілів, розрізів, графіків, діаграм, блок-діаграм та інших двох і тримірних графічних моделей.
3. **Графоаналітичні прийоми.** Це вимірювання по картах координат, довжин, висот, площ, об'ємів, кутів; обчислення різних показників форми та структури об'єктів і явищ.
4. **Прийоми математико-картографічного моделювання.** Це побудова та аналіз математичних моделей по даним, отриманим з карти; побудова нових карт на базі математичних моделей.

Вказані групи прийомів найчастіше застосовуються в комплексі.

При використанні карт можна виділити чотири рівня механізації та автоматизації робіт:

1. **Візуальний аналіз.** Це “читання” карт, зорове співставлення та оцінка об'єктів.
2. **Інструментальний аналіз.** Це застосування вимірювальних та механічних пристроїв (циркулів-вимірювачів, курвіметрів, транспортирів, планіметрів, палеток та ін.).
3. **Напівавтоматичні (автоматизовані) дослідження.** Це застосування автоматичних пристроїв та електронно-обчислювальної техніки для отримання даних з карт, аналізу цих даних, їхнього перетворення та відтворення у поєднанні з візуальним і інструментальним аналізами.
4. **Автоматичні дослідження.** Це повна автоматизація всього процесу використання карт, яка реалізується на базі автоматичних картографічних систем (АКС).

Існує декілька способів роботи з картами, які розрізняються за методикою та метою досліджень. Це наступні способи:

1. **Вивчення карт без перетворення** - візуальний аналіз, опис, вимірювання та інші операції, які мають за мету отримати уявлення про об'єкт досліджень або явище.
2. **Перетворення картографічного зображення** - трансформування карти в іншу форму, більш зручну для вирішення конкретної задачі. Перетворення завжди пов'язано з побудовою нових похідних карт. Наприклад, карти рівнів ґрунтових вод та рельєфу перетворюються в карту глибин залягання ґрунтових вод.
3. **Розчленування картографічного зображення на складові частини** - особливий вид перетворення з метою виділення та окремого вивчення факторів, що визначають розміщення і розвиток об'єктів чи явищ. Наприклад, це виділення по картах п'єзоізогіпс регіональної та локальної складової потоку підземних вод.
4. **Співставлення карт, що складені на різні моменти часу** - аналіз серій карт, що фіксують стан об'єкту чи явища у різні моменти часу з метою вияву їх змін, динаміки, ритміки, прогнозування подальшого розвитку.
5. **Спільне вивчення карт різної тематики** - аналіз серії карт, які характеризують різні явища та процеси для тієї самої території з метою встановлення зв'язків та залежностей між ними, отримання комплексних характеристик, районування за сукупністю ознак. Наприклад, це спільне вивчення геохімічних, гідрогеохімічних карт та карт захворюваності населення.
6. **Вивчення карт-аналогів** - порівняння карт, що характеризують певне явище, але для різних територій, для вияву подібності об'єктів чи явищ, загальних закономірностей та процесів розвитку.
7. **Спільний аналіз карт, різних за масштабом** - вивчення карт однакової тематики та однакової території, але різних масштабів, з метою встановлення закономірностей і

структур різного порядку (глобальних, регіональних чи локальних).

Організація будь-якого *дослідження по картах* або вирішення певної практичної задачі складаються з чотирьох послідовних етапів:

1. Постановка задачі.
2. Підготовка до дослідження.
3. Власне дослідження.
4. Інтерпретація результатів.

5.1 Способи зображення об'єктів та явищ на картах

Способи зображення геологічних і гідрогеологічних об'єктів та явищ на картах різняться в залежності від конкретних особливостей самих об'єктів (явищ), характеру їх розповсюдження, виду їх якісної або кількісної характеристики. Спосіб зображення залежить також від того, відноситься картографічна характеристика до конкретної точки, площі чи є вона сумарною або усередненою величиною. Найбільш поширені наступні способи зображення:

1. Спосіб значків (Рис.5.1).
2. Спосіб локалізованих діаграм (Рис.5.2).
3. Спосіб ізолій (Рис.5.3).
4. Спосіб якісного фону (Рис.5.4).
5. Спосіб кількісного фону (Рис.5.5).
6. Спосіб ареалів (Рис.5.6).
7. Точковий спосіб (Рис.5.7).
8. Спосіб лінійних знаків (Рис.5.8).
9. Спосіб знаків руху (Рис.5.9).
10. Картодіаграма (Рис.5.10).
11. Картограма (Рис.5.10).

Часто для картографічного відображення явища застосовують спільне використання різних способів. З точки зору кількісних методів аналізу найбільш інформативним є

метод ізоліній. *Метод ізоліній* призначений для кількісного опису безперервних поверхонь (полів), наприклад полів гідродинамічних напорів підземних вод.

ЯКІСТЬ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД

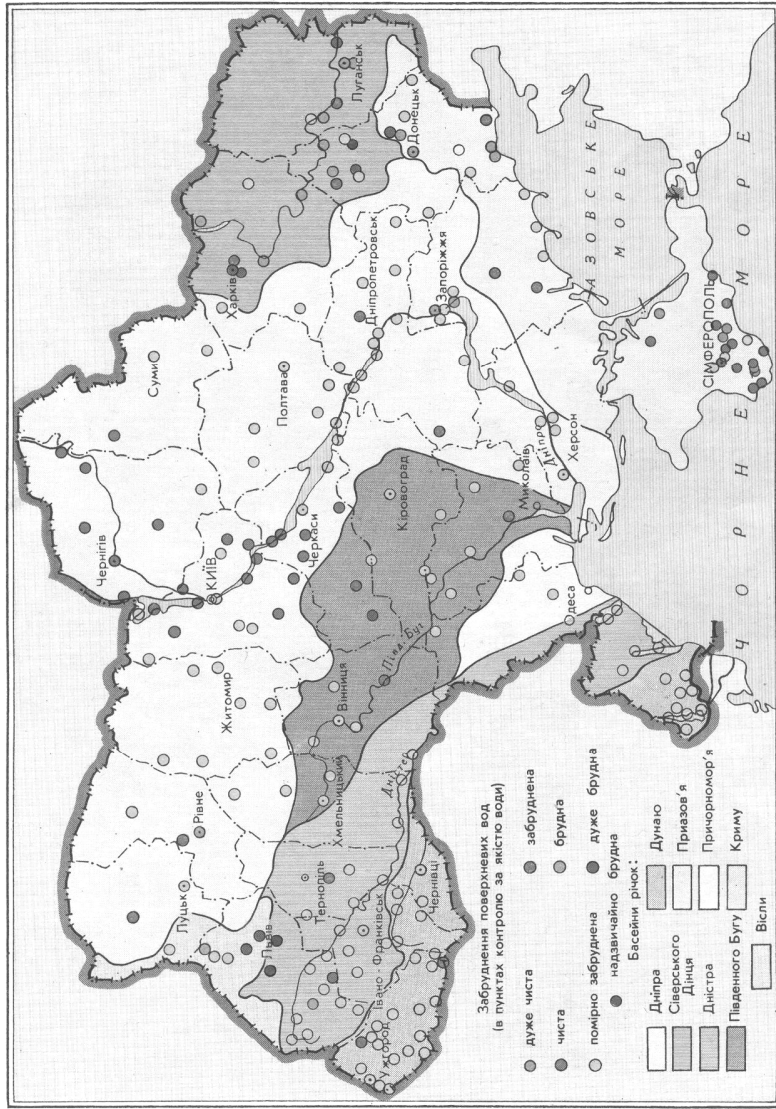


Рис. 5.1 Зображення об'єктів та явищ за допомогою способу значків (забруднення вод)

РОЗПОДІЛ РІЧНОГО РІЧКОВОГО СТОКУ

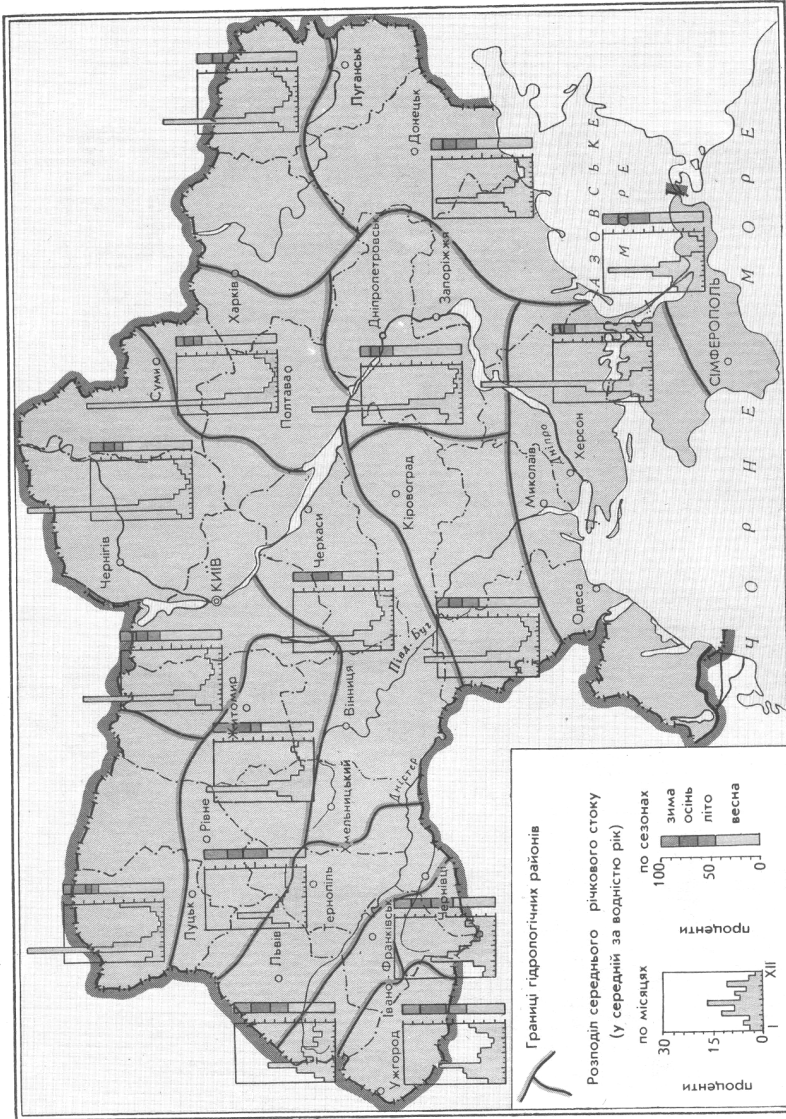


Рис. 5.2 Зображення об'єктів та явищ за допомогою способу локалізованих діаграм

ПОВЕРХНЄВІ ВОДИ. РІЧНИЙ СТІК РІЧОК

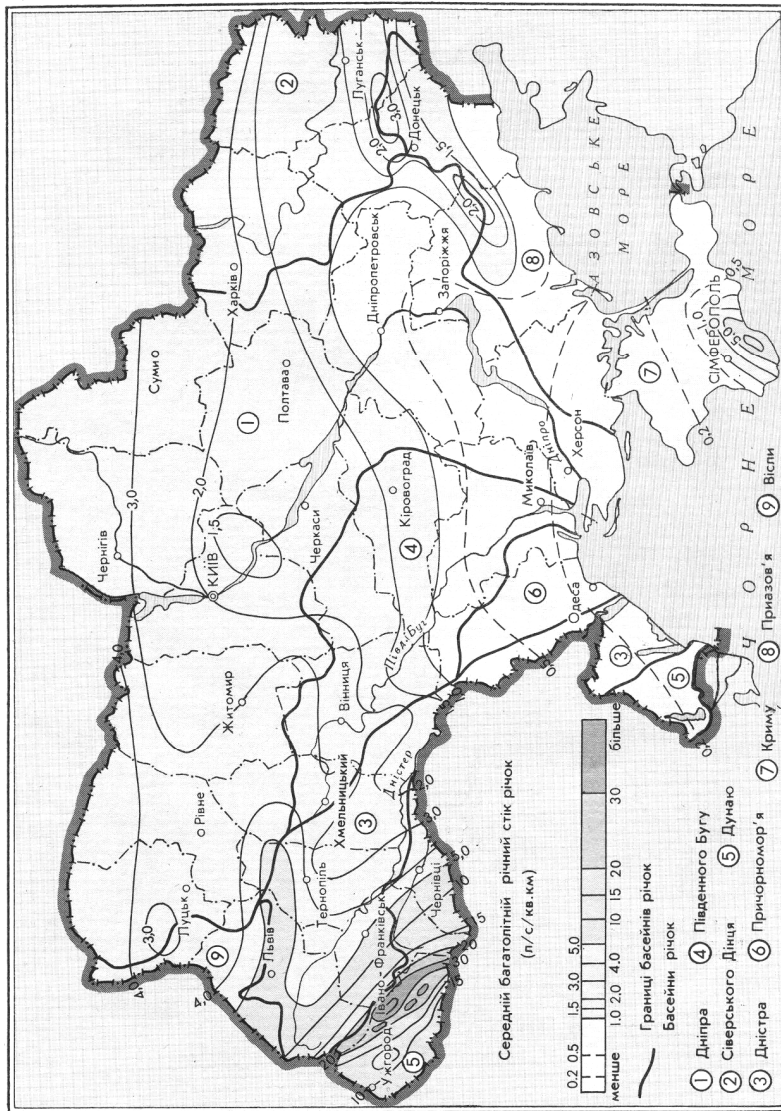


Рис.5.3 Зображення об'єктів та явищ за допомогою способу ізольній (річний стік)

ФІЗИКО-ГЕОГРАФІЧНЕ РАЙОНУВАННЯ

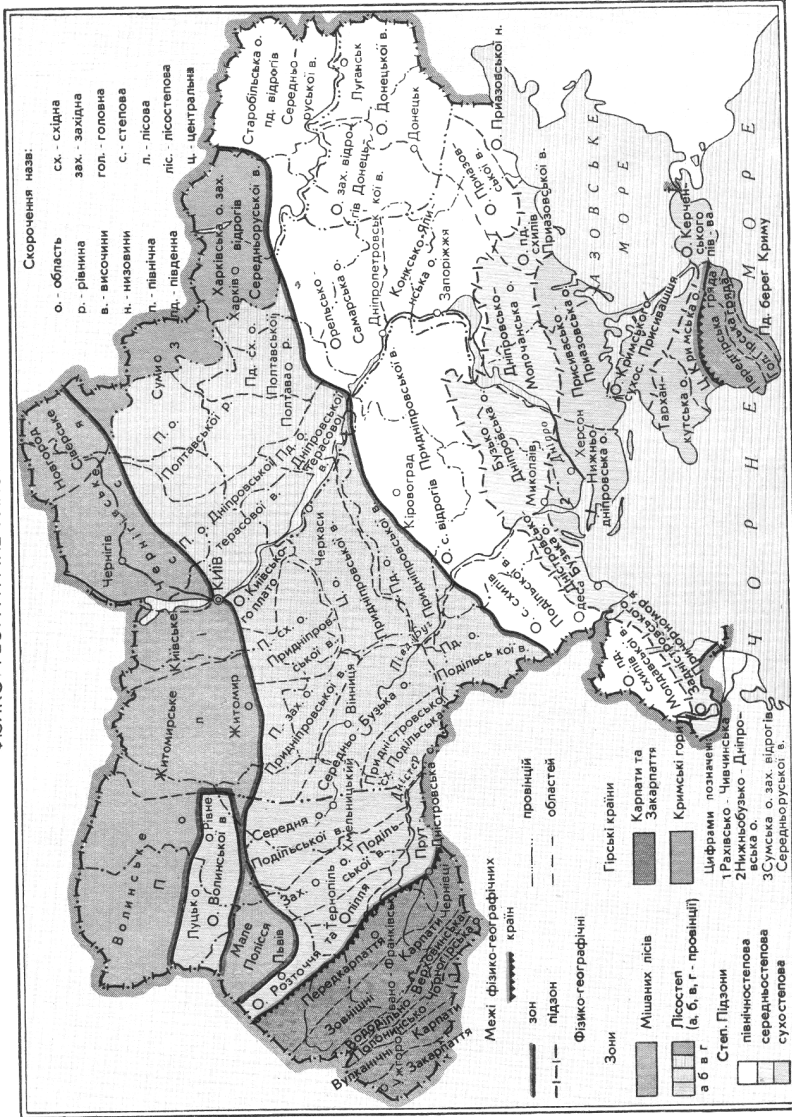


Рис.5.4 Зображення об'єктів та явищ за допомогою способу якісного фону

ПРОГНОЗНІ ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ РЕСУРСИ ПІТНИХ ПІДЗЕМНИХ ВОД

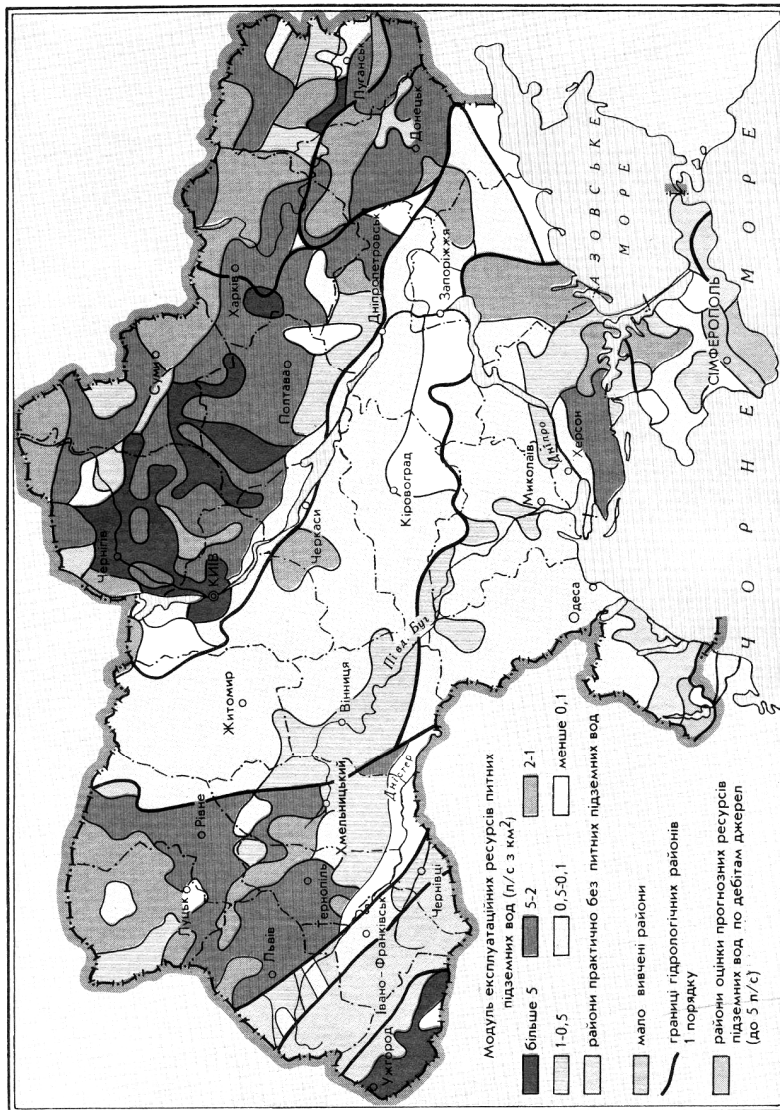


Рис. 5.5 Зображення об'єктів та явищ за допомогою способу кількісного фону

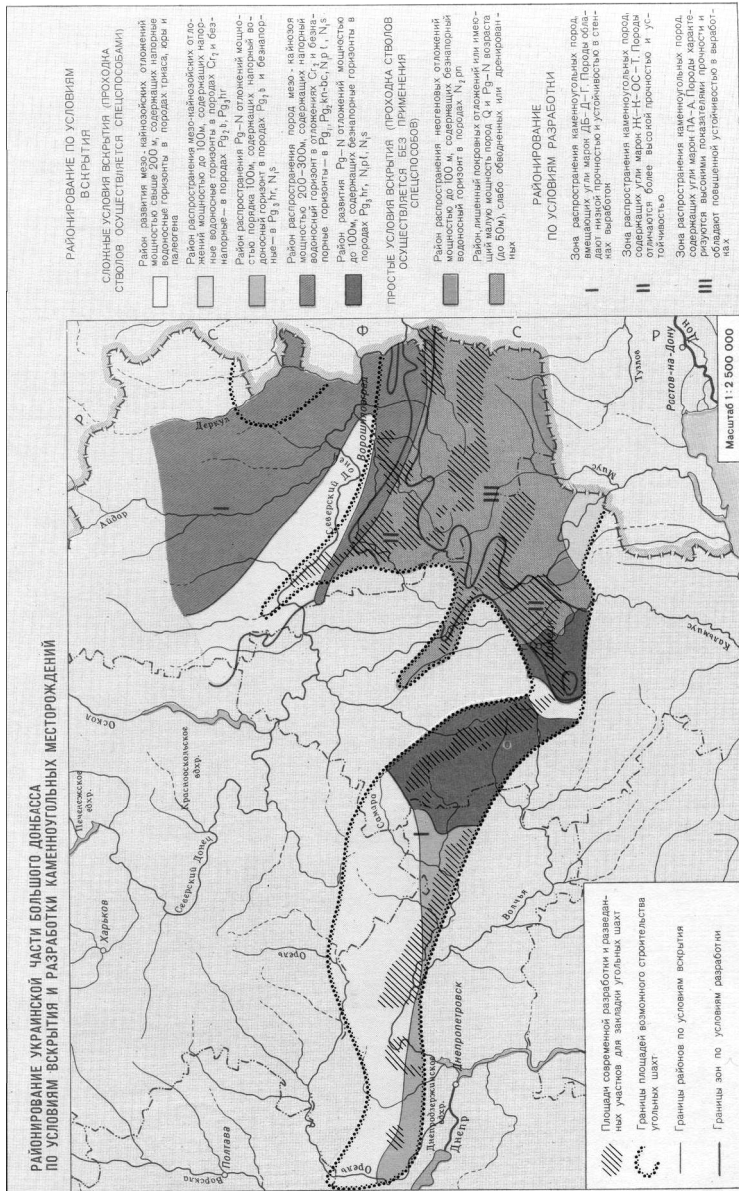


Рис. 5.6 Зображення об'єктів та явищ за допомогою способу ареалів (площі сучасної розробки та розвідані ділянки для вугільних шахт)



Рис. 5.7. Зображення об'єктів та явищ за допомогою точкового способу



Рис. 5.8. Зображення об'єктів та явищ за допомогою лінійних знаків (тектонічні лінії)

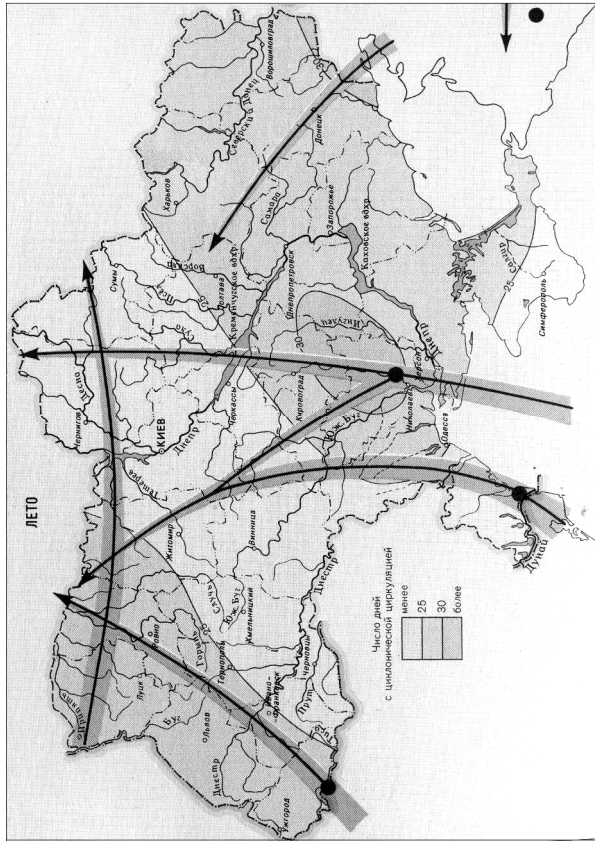


Рис. 5.9 Зображення об'єктів та явищ за допомогою знаків руху (шляхи переміщення циклонів)

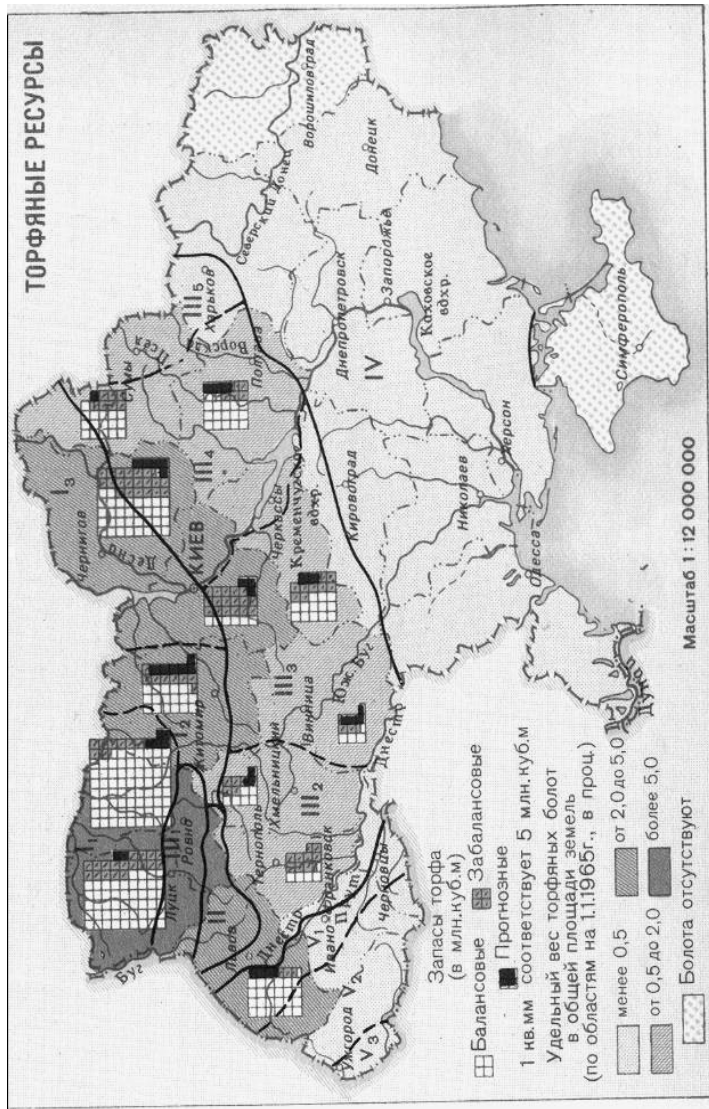


Рис. 5.10 Зображення об'єктів та явищ за допомогою картодіаграми (запаси торфу) та картограми (питома вага торфових боліт)

5.2 Опис по картах

Опис по картах виконується з дотриманням таких вимог:

- 1) логічність, впорядкованість опису;
- 2) відбір та систематизація фактів;
- 3) застосування при опису елементів порівняння, аналогії, співставлення на базі кількісних характеристик;
- 4) об'єктивна оцінка явищ або процесів, що вивчаються, з точки зору конкретної задачі;
- 5) чітке формулювання висновків та рекомендацій.
- 6) До опису додаються цифрові дані, таблиці, графіки та ін.

5.3 Графічні прийоми

Графічні прийоми полягають у побудові по картах профілів, розрізів, графіків, діаграм, блок-діаграм та інших двох і тримірних графічних моделей гідрогеологічних та геологічних об'єктів.

Профілі характеризують розподіл параметру K вздовж заданого на карті напрямку x , тобто

$$K = f(x) \quad (5.1)$$

Слід зазначити, що напрямок x може бути і вертикальним (z). Для аналізу карт, різних за часом, будують профілі за часом, тобто

$$K = f(t) \quad (5.2)$$

Розрізи характеризують розподіл параметру K як функцію двох змінних, наприклад,

$$K = f(x, z) \quad (5.3)$$

або

$$K = f(x, t) \quad (5.4)$$

Роза-діаграма - це графічне відображення розподілу лінійних елементів по азимутах. Довжина кожного променя L_i цієї діаграми віддзеркалює загальну довжину лінійних елементів певного азимуту (або азимутального інтервалу) для визначеної ділянки карти:

$$L_i = K \cdot \sum_{j=1}^N l_{ij} \quad (5.5)$$

де l_{ij} - довжина j -того елементу в i - у азимутальному інтервалі;

N - кількість лінійних елементів;

K - масштабний коефіцієнт.

Блок-діаграма - це тримірне креслення, яке поєднує перспективне зображення певної поверхні з подовжнім та поперечним розрізами. Тематика блок-діаграм може бути різною, наприклад, геологічна блок-діаграма віддзеркалює будову поверхні землі у зв'язку з будовою земної кори. Побудова блок-діаграми виконується у двох головних проекціях: аксонометричній (Рис.5.11) та перспективній (Рис.5.12). **Аксонометрична проекція** деформує кутові співвідношення, але зберігає горизонтальний масштаб вихідної карти. Це дозволяє виконувати на блок-діаграмі вимірювання у будь-якому напрямку. **Перспективна проекція** має одну чи дві точки перспективи; вона є більш наглядною, але має перспективні скривлення, що заважає виконанню вимірювань.

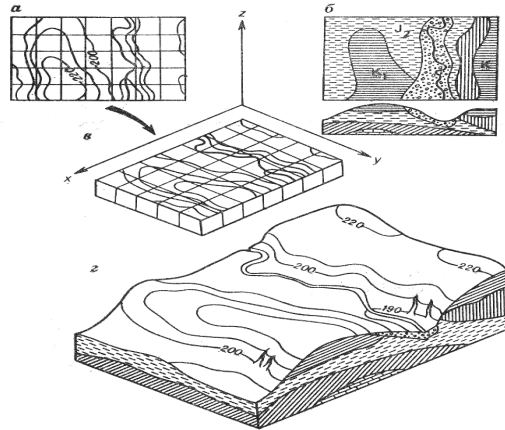


Рис. 5.11. Схема побудови аксонометричної блок-діаграми:
a – фрагмент топографічної карти; *б* – фрагмент геологічної карти та профіль до неї;
в – аксонометричні осі та блок-основа; *г* – блок-діаграма

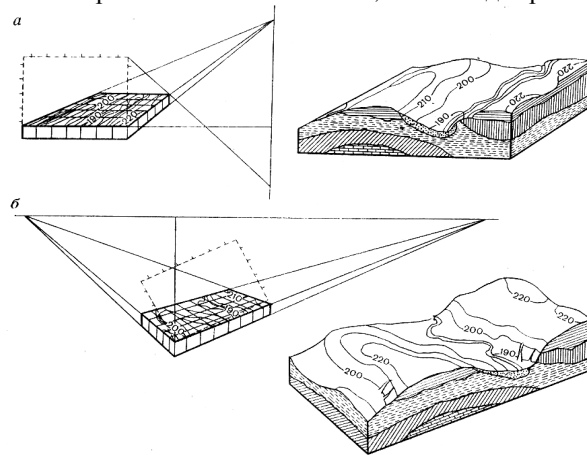


Рис. 5.12. Схема побудови перспективної блок-діаграми:
a – з одною точкою перспективи; *б* – з двома точками перспективи

Існують також блок-діаграми, які складені з серій розрізів вздовж одного чи двох перпендикулярних напрямків (Рис.5.13). Різновидом останніх є метахронні блок-діаграми (Рис.5.14), які

характеризують зміну явища у часі (дві осі - це просторові координати, третя вісь - це час).

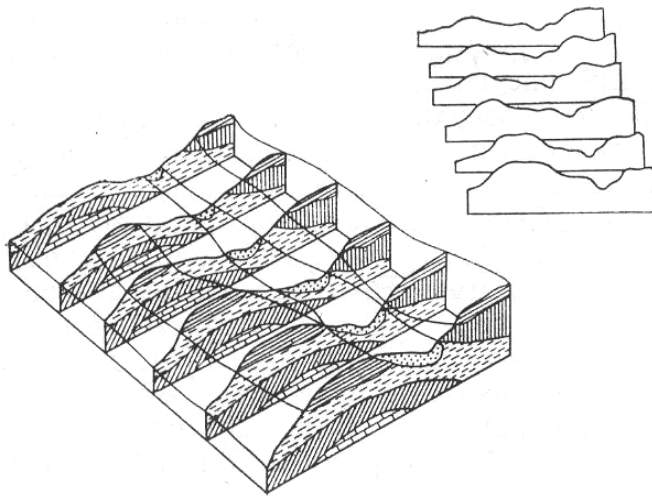


Рис. 5.13. Схема побудови блок-діаграми у вигляді системи паралельних розрізів

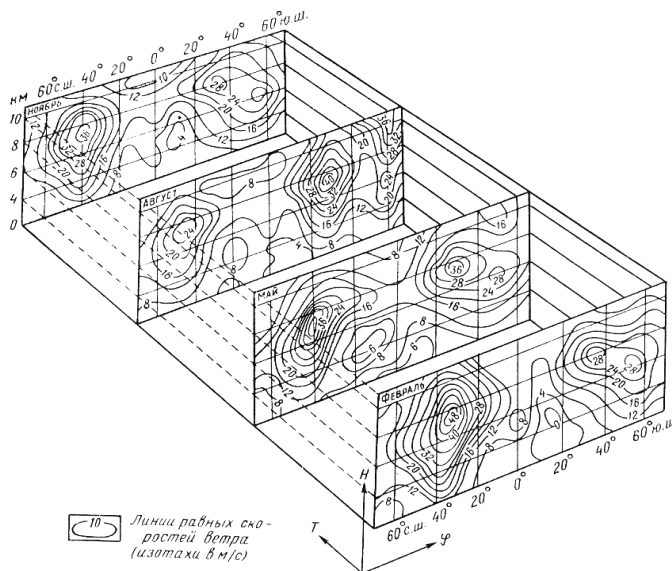


Рис. 5.14. Метакронна блок-діаграма:
 T – пори року; H – висота; φ - широта

Графічне додавання та віднімання поверхонь - це способи виконання дій з ізолінійними картографічними зображеннями гідрогеологічних об'єктів. Для цього системи ізоліній вихідних карт поєднують на загальній основі. У точках взаємного перетину визначаються значення сум або різниць, по яким будують ізолінії сумарних або різницевих поверхонь.

5.4 Графоаналітичні прийоми

До графоаналітичних прийомів відносяться картометрія та морфометрія.

Картометрія - це вимірювання по картах (пряме або непряме) параметрів, які характеризують розташування та розміри гідрогеологічних об'єктів на карті, а саме: координат, довжин та відстаней, висот, площ, об'ємів, кутів та напрямків.

Морфометрія - це розрахунок показників, які характеризують форму і структуру гідрогеологічних об'єктів, а саме: розчленування поверхні гідродинамічних напорів підземних вод, щільність об'єктів, коефіцієнти її звивистості, форми та ін. Всі морфометричні показники розраховуються на базі картометричних вимірювань.

В картометрії та морфометрії, крім прямих вимірювань та розрахунків, широко застосовуються непрямі вимірювання і оцінки, які базуються на використанні ймовірностно-статистичного підходу.

Для **вимірювання довжин ліній** використовуються циркулі-вимірювачі та курвіметри. Відносні похибки вимірювання довжин звивистих ліній за допомогою курвіметрів досягають 10%, тому для точних картометричних робіт курвіметри непридатні.

Вимірювання площ здійснюється за допомогою планіметрів, палеток; також застосовується так званий "метод важення".

Розглянемо поширені **морфометричні показники**.

Найбільш придатним *показником форми контуру* є коефіцієнт f :

$$f = \frac{P^2}{2 \cdot \pi \cdot S} \quad (5.6)$$

де P - периметр контуру;
 S - площа контуру.

За допомогою коефіцієнту f можна порівняти форму даного контуру з формою простих геометричних фігур. Значення f для простих геометричних фігур такі:

- коло - $f = 1.00$;
- шестикутник - $f = 1.10$;
- квадрат - $f = 1.34$;
- рівнобічний трикутник - $f = 1.65$.

Якщо форма контуру близька до еліпсу, можна застосувати *коефіцієнт витягнутості* K_1 та *коефіцієнт стиснення* K_2 :

$$K_1 = \frac{d_1}{d_2} \quad (5.7)$$

$$K_2 = 1 - K_1 = 1 - \frac{d_1}{d_2} \quad (5.8)$$

де d_1 - максимальна довжина контуру;
 d_2 - максимальна ширина контуру.

Звивистість контурів може бути визначена за допомогою декількох показників. Вони базуються на розрахунку співвідношень між довжиною звивистого контуру l , довжиною плавною лінією, що обгинає s , довжиною замикаючої d (для розімкнутих контурів) та числом звивин n .

Відносна звивистість α :

$$\alpha = \frac{l}{s} \quad (5.9)$$

Звивистість загальних обрисів β :

$$\beta = \frac{s}{d} \quad (5.10)$$

Загальна звивистість γ :

$$\gamma = \alpha \cdot \beta = \frac{1}{d} \quad (5.11)$$

Порізаність δ або ε :

$$\delta = \frac{n}{l} \quad (5.12)$$

$$\varepsilon = \frac{n}{s} \quad (5.13)$$

Показники розчленування поверхні поділяють на показники вертикального розчленування та показники горизонтального розчленування.

Вертикальне розчленування (або *глибина розчленування*) H_A - це амплітуда висот (аплікат) в межах певної ділянки:

$$H_A = H_{\max} - H_{\min} \quad (5.14)$$

Розрахунки виконуються для природних ареалів: гідрогеологічних районів, басейнів річок та ін. Також можна виконувати розрахунки для певної геометричної мережі:

квадратів, шестикутників та ін. Отримані значення H_A відносять до центрів відповідних ареалів або фігур. Потім по цим значенням H_A будують картограми або ізолінійні карти вертикального розчленування.

Горизонтальне розчленування (або **густота розчленування** в км/км²) D - це сумарна довжина ліній, що розчленовують $\sum l$, що віднесена до площі ділянки S :

$$D = \frac{\sum l}{S} \quad (5.15)$$

До ліній, що розчленовують, відносять лінії максимумів та мінімумів поверхонь (вододіли, прогини та ін.).

Розрахунки також виконуються для природних ареалів або геометричної мережі. Значення D відносять до центрів ареалів або фігур, потім будують морфометричні карти горизонтального розчленування.

Для районів з переважаючим нелінійним розчленуванням (кратерним, озерним, бугристим і т.д.) краще застосувати формулу:

$$D = \frac{1}{\sqrt{\frac{S}{n}}} \quad (5.16)$$

де n - загальна кількість знижень або підймань у межах ареалу або фігури площею S .

Ухил поверхні i у заданій точці визначають з співвідношення:

$$i = \operatorname{tg} \alpha = \frac{(H_n - H_{n+1})}{l} \quad (5.17)$$

де α - кут ухилу;

H_n та H_{n+1} - значення сусідніх ізоліній, між якими розташована точка;

l - закладення у напрямку нормалі до ізоліній.

Середній ухил певної ділянки поверхні розраховується за допомогою формули Фінстервальдера-Волкова:

$$i_{сер} = tg \alpha_{сер} = \frac{\Delta H \cdot \sum l}{S} \quad (5.18)$$

де ΔH - величина перетину ізоліній поверхні;

$\sum l$ - сумарна довжина ізоліній у межах ділянки площею S .

Для кількісної оцінки по картам **щільності однорідних об'єктів** застосовують два показника: концентрацію та власне щільність об'єктів

Концентрація Q - це кількість гідрогеологічних об'єктів n на одиниці площі ділянки:

$$Q = \frac{n}{S} \quad (5.19)$$

де S - площа ділянки.

Власне щільність об'єктів T . Це відношення загальної площі, зайнятої n гідрогеологічними об'єктами, до площі території S , для якої визначається щільність:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{S} \cdot 100\% \quad (5.20)$$

Величини Q та T слід визначати для природних або адміністративних районів. Рідше визначення виконується для певних геометричних мереж (квадратів, шестикутників і т.д.).

5.5 Прийоми математико-картографічного моделювання

Математико-картографічне моделювання - це поєднання математичних моделей та карт при вивченні певного гідрогеологічного об'єкту. При цьому математичні моделі будуються на базі даних, отриманих з карти (або іншої, наприклад, аерокосмічної інформації). Потім математична модель реалізується, а отримані вихідні дані знов перетворюються у карту. Таким чином, при математико-картографічному моделюванні створюється послідовність: карта - математична модель - нова карта - нова математична модель і т.д.

Головні методи, що застосовуються при математико-картографічному моделюванні: **картографо-статистичний аналіз; інформаційний аналіз карт; апроксимація поверхонь; порівняння карт різної тематики та карт, що побудовані для різних моментів часу.**

5.5.1 Картографо-статистичний аналіз

Методи математичної статистики використовуються для вирішення по картах трьох основних задач:

- 1. Отримання узагальнюючих статистичних показників явищ, що картографуються.**
- 2. Вивчення форми та щільності зв'язку між явищами, що відображені на різних картах.**
- 3. Оцінка ступені впливу окремих факторів на явище, що вивчається, та визначення ведучих факторів.**

В основу всіх статистичних характеристик, які характеризують карту, кладеться вибірка.

Оцінка форми та щільності зв'язку між явищами, що відображені на різних картах, виконується за допомогою кореляційного аналізу. Якщо встановлено, що явища підкоряються нормальному або логнормальному закону розподілу, застосовують **парний кореляційний аналіз** (Див.4.6). Коли явища не підкоряються нормальному закону, або вибірки малі, або неможливо отримати точні кількісні значення з карт, застосовують так званий **ранговий коефіцієнт кореляції**.

Ранги Pa_i та Pb_i для відповідних явищ A та B являють собою порядкові номери значень, отриманих з карт a та b , у зростаючій послідовності. Найменше значення отримує ранг 1, наступне за ним - ранг 2 і т.д. Якщо декілька значень рівні між собою, вони отримують середній ранг. Наприклад:

Ранги Pa_i	2.0	3.5	5.0	7.0	10.0
Значення A	17	21	24	28	30
Ранги Pb_i	1.0	3.5	6.0	8.5	8.5
Значення B	16	21	25	29	29

Ранговий коефіцієнт кореляції γ обчислюється за залежністю:

$$\gamma = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n d^2}{n^3 - n} \quad (5.21)$$

де $d = |Pa_i - Pb_i|$;

n - об'єм вибірки ($n > 3$).

По змісту ранговий коефіцієнт кореляції відповідає парному коефіцієнту кореляції. Він визначає ступінь близькості статистичної залежності до лінійної, змінюється в інтервалі від -1 до +1.

Окремий коефіцієнт кореляції $r_{AB/C}$ характеризує зв'язок між двома явищами A та B за умови виключення третього явища C :

$$r_{AB/C} = \frac{r_{AB} - r_{AC} \cdot r_{BC}}{\sqrt{(1 - r_{AC}^2)(1 - r_{BC}^2)}} \quad (5.22)$$

де r_{AB} , r_{AC} , r_{BC} - парні (або рангові) коефіцієнти кореляції між явищами A , B та C .

Коефіцієнт множинної кореляції R_{ABC} характеризує сукупний взаємозв'язок трьох явищ A , B та C :

$$R_{ABC} = \sqrt{\frac{r_{AB}^2 + r_{AC}^2 - 2 \cdot r_{AB} \cdot r_{BC} \cdot r_{AC}}{1 - r_{BC}^2}} \quad (5.23)$$

Поліхоричний показник зв'язку дозволяє оцінити зв'язок між явищами, які не мають на картах кількісних характеристик, а мають лише якісні градації (наприклад, коли карти побудовані способом якісного фону).

Тетрахоричний показник зв'язку характеризує зв'язок між явищами, які мають тільки два альтернативних стана (наявність або відсутність, позитивне або від'ємне значення і т. ін.). Такі випадки виникають при порівнянні карт ареалів: "ареал є" або "ареал відсутній".

При вивченні багато параметричних гідрогеологічних систем застосовують **методи багатовимірного статистичного аналізу**, в першу чергу факторний та компонентний аналізи.

Застосування факторного або компонентного аналізу дозволяє узагальнити окремі фактори, які впливають на явище, виділити з них головні (вплив яких є найбільш суттєвим), визначити головні тенденції явища. Багатовимірний

статистичний аналіз - це головний засіб так званого синтетичного картографування.

Факторний та компонентний аналізи дають можливість звести до мінімуму комплекс показників, які характеризують складний вплив, визначивши при цьому один або декілька головних факторів.

Рівняння факторного аналізу має вигляд:

$$a_p = \sum_{r=1}^k l_{pr} f_r + e_p \quad (5.24)$$

де a_p - вихідний показник;

f_r - виділені головні фактори, які дають синтетичну оцінку явища, що вивчається;

l_{pr} - “вага” кожного фактора в синтетичній оцінці (“факторне навантаження”);

e_p - остача, яка характеризує відхилення, що не враховані.

Факторний аналіз базується на використанні кореляційної матриці між багатьма показниками (10 і більше), які впливають на явище, що вивчається. В процесі аналізу виділяють декілька головних факторів, найчастіше 3 або 4, які узагальнюють вплив окремих вихідних показників. Потім виконується змістовна інтерпретація визначених головних факторів. Вихідною умовою застосування факторного аналізу є випадковість розподілу вихідних гідрогеологічних показників.

Компонентний аналіз вирішує такі ж самі задачі, що і факторний. Відрізняється від факторного тим, що в ньому не розглядається остача, тобто дисперсія гідрогеологічних змінних повністю описується виділеними компонентами. Аналіз не потребує випадковості розподілу вихідних показників.

Головні компоненти - це лінійні комбінації вихідних показників, що описуються рівнянням:

$$K_r = \sum_{p=1}^m l_{pr} a_p \quad (5.25)$$

де K_r - r -та компонента;
 l_{pr} - "вага" показника a_p в r -й компоненті;
 $p = 1, 2, \dots, m$;
 $r = 1, 2, \dots, n$.

5.5.2 Інформаційний аналіз карт

Інформаційний аналіз використовується для оцінки ступені однорідності картографічного зображення та кореляції (взаємної відповідності) явищ, що показані на різних картах. Він базується на використанні основної функції теорії інформації - *ентропії* H . Для деякого картографічного зображення A ентропія $H(A)$ розраховується як сума добутків відносної частоти зустрічі ω_i окремих гідрогеологічних ареалів (районів) на логарифм за основою два цієї відносної частоти:

$$H(A) = H(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = -\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \log_2 \omega_i \quad (5.26)$$

Функція $H(A)$ завжди позитивна або дорівнює нулю. $H(A) = 0$, якщо на карті показаний лише один ареал (район), тобто маємо повну однорідність зображення.

Зі збільшенням числа ареалів функція $H(A)$ безперервно зростає і досягає максимуму при рівності відносних частот:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_n = \frac{1}{n} \quad (5.27)$$

Тоді

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n \quad (5.28)$$

Функція $H(A)$ залежить як від кількості ареалів (районів) на карті, так і від площі кожного ареалу:

$$\omega_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (5.29)$$

де f_i - площа i -го ареалу,

$\sum_{i=1}^n f_i$ - площа всіх n ареалів (площа карти).

Крім поняття абсолютної ентропії $H(A)$ використовують поняття *відносної ентропії*. Це відношення абсолютної ентропії до максимально можливої при заданому n (кількості ареалів):

$$H(A)_r = \frac{H(A)}{H(A)_{\max}} \quad (5.30)$$

Показник $H(A)_r$ змінюється від 0 до +1. Він є дуже зручним при порівнянні карт з різним числом явищ, що зображені на них. Якщо прийняти, що максимальна неоднорідність зображення дорівнює 1, то величина

$$I(A) = 1 - H(A)_r \quad (5.31)$$

характеризує міру однорідності (впорядкованості).

Для визначення взаємної відповідності зображень на різних картах розраховують спочатку значення ентропії для окремих карт $H(A)$, $H(B)$, $H(C)$ і т.д., потім - ентропію поєднаного зображення $H(AB)$, $H(AC)$ і т.д.:

$$\begin{aligned} H(A) &= -\sum \omega_{a_i} \log_2 \omega_{a_i} \\ H(B) &= -\sum \omega_{b_i} \log_2 \omega_{b_i} \\ &\dots\dots\dots \\ H(AB) &= -\sum \omega_{a,b_i} \log_2 \omega_{a,b_i} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Коефіцієнт взаємної відповідності $K(AB)$ характеризує кореляцію зображених на картах гідрогеологічних та інших явищ. Він розраховується за формулою:

$$K(AB) = \frac{H(A) + H(B) - H(AB)}{H(AB)} \cdot 100\% \quad (5.33)$$

Значення $K(AB)$ знаходяться в інтервалі від 0 (повна невідповідність контурів явищ) до 100% (повна відповідність).

Інформаційні функції найчастіше використовуються для аналізу однорідності та взаємозв'язку між явищами, які зображені на картах способом якісного фону. Наприклад, за допомогою інформаційних функцій можна оцінити однорідність геологічної будови території, ґрунтового покриву, ландшафтної структури і т.д., встановити зв'язок між цими явищами.

5.5.3 Апроксимація поверхонь

Апроксимація поверхонь - це спрощення (наближення) реальних складних конфігурацій більш простими, опис

реальних поверхонь (наприклад, поверхні ґрунтових вод) за допомогою відомих функцій. Найчастіше апроксимація застосовується до поверхонь, які зображені способом ізоліній.

Будь-яка поверхня, яка зображена на карті і задовольняє рівнянню

$$Z = F(x, y) \quad (5.34)$$

може бути апроксимована, тобто наближено подана за допомогою відомої функції

$$Z = f(x, y) + \varepsilon \quad (5.35)$$

де ε - залишок, який не можна апроксимувати.

Функцію $f(x, y)$ розкладають у ряд, отримуючи рівняння поверхні у вигляді

$$Z = f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_n(x, y) + \varepsilon \quad (5.36)$$

$f_i(x, y)$ - компоненти розкладання, які описують апроксимуючу поверхню. Вони невідомі і повинні бути визначені. Визначення числових значень $f_i(x, y)$ виконується за умови мінімуму квадратів відхилень апроксимуючої поверхні від вихідної (тобто, застосовується метод найменших квадратів):

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^m [F(x_i, y_i) - f(x_i, y_i)]^2 = \min \quad (5.37)$$

де m - кількість точок на карті, в яких визначені відхилення.

Існує декілька способів апроксимації поверхонь в залежності від конкретних задач досліджень та математичного апарата, що застосовується. Апроксимація за допомогою алгебраїчних поліномів має *назву тренд-аналізу*. При застосуванні тренд-аналізу функція $f(x, y)$ розкладається по степеням координат x та y :

$$f(x, y) = A_{00} + A_{10} \cdot x + A_{20} \cdot x^2 + \dots + A_{mn} \cdot x^m \cdot y^n \quad (5.38)$$

Апроксимація поліномом першого степеня має вигляд:

$$f(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \quad (5.39)$$

другого степеня:

$$f(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot y^2 + a_5 \cdot x \cdot y \quad (5.40)$$

третього степеня:

$$f(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot y^2 + a_5 \cdot x^3 + a_6 \cdot y^3 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x \cdot y \quad (5.41)$$

Точність апроксимації збільшується зі збільшенням степені полінома.

Апроксимація застосовується для вирішення наступних задач:

- 1) математичний опис реальних та абстрактних поверхонь;
- 2) створення цифрових моделей рельєфу поверхні;
- 3) узагальнення, згладжування, “фільтрація” поверхонь;
- 4) виконання інтерполяції або екстраполяції;
- 5) перетворення дискретних даних у безперервні;
- 6) розкладання поверхонь на складові;

- 7) виконання дій з поверхнями (додавання, віднімання, інтегрування і т. ін.).

5.5.4 Порівняння карт різної тематики та карт, що побудовані для різних моментів часу

Порівняння картографічних моделей дає можливість:

- 1) з'ясувати, проаналізувати та кількісно оцінити взаємозв'язок явищ, що представлені на моделях;
- 2) прослідкувати просторову зміну взаємозв'язку, встановити головні та другорядні залежності.

Для вивчення взаємозв'язку використовуються різні прийоми. Найбільш простий з них - це візуальний аналіз та опис взаємозв'язків. З графічних прийомів найбільш ефективно співставлення контурів явищ, що аналізуються, на загальній основі; побудова комплексних профілів та розрізів по серіям карт; побудова поєднаних роз-діаграм, блок-діаграм. Уявлення про схожість явищ дає порівняння морфометричних характеристик, що розраховані для різних карт.

Найбільші можливості для вивчення та якісної оцінки взаємозв'язку явищ дає математична статистика. Порівняння розподілів можна виконати за допомогою середніх арифметичних, стандартних відхилень, коефіцієнтів варіації. Головний статистичний метод встановлення та оцінки взаємозв'язків - кореляційний та інформаційний аналіз карт різної тематики.

Для уявлення про розподіл просторових зв'язків між явищами створюють спеціальні карти взаємозв'язків, які віддзеркалюють зміну ступеню зв'язку від точки до точки по окремим районам або клітинкам мережі. Існує декілька видів карт взаємозв'язку:

- 1) карти районів різного ступеня відповідності;
- 2) картограми взаємозв'язку;
- 3) карти ізокорелят;

4) карти відхилень від регресії.

Наприклад, карти ізокорелят дають детальну картину просторової варіації взаємозв'язку явищ. Вони досить чутливі до просторової зміни зв'язку. Це можуть бути карти, що віддзеркалюють парні кореляції, окремі кореляції, множинні кореляції.

При вивченні карт, що побудовані для різних моментів часу, головним є визначення стану та просторового положення об'єктів і процесів, вивчення їх динаміки та еволюції. По таким картам встановлюють не тільки зміни, а також його напрям (оцінюється за допомогою вектору) та середню швидкість. Результати порівняння карт представляють порізному. Найчастіше об'єднують контури явищ на різні дати. Інший спосіб - побудова карт різниць стану на дві або декілька дат. Найбільш наочний спосіб представлення результатів аналізу карт, що побудовані для різних моментів часу - це створення карт ареалів зміни явища (карт динаміки). Для цього поєднують карти попереднього і наступного стану явища, аналізують перетин контурів, відмічають зміну явища (наприклад, забруднення ґрунтів радіонуклідами). Легенда карти динаміки будується у матричній формі: одна вісь - це умовні позначки попереднього стану, друга вісь - наступного стану. Позначення та індекси у клітинках матриці вказують на характер зміни у часі, що відбулася.

Контрольні запитання до розділу 5

1. Що являє собою картографічний метод досліджень?
2. Які рівні механізації та автоматизації робіт виділяють при використанні карт?
3. Які існують способи роботи з картами?
4. Які способи зображення об'єктів та явищ на картах найбільш поширені?
5. Для чого призначений метод ізоліній?
6. З дотриманням яких вимог виконується опис по картах?

7. В чому полягають графічні прийоми роботи з картами?
8. Чим відрізняється профіль від розрізу?
9. Що таке блок-діаграма, які види блок-діаграм існують?
10. Які графоаналітичні прийоми роботи з картами існують?
11. Які морфометричні показники є найбільш поширеними?
12. Які існують показники розчленування поверхонь?
13. Як визначається середній ухил певної ділянки поверхні?
14. Як можна оцінити щільність однорідних об'єктів на карті?
15. Що таке математико-картографічне моделювання?
16. Які основні задачі вирішуються по картах за допомогою методів математичної статистики?
17. Для чого і в яких випадках застосовується ранговий коефіцієнт кореляції?
18. Чим відрізняються окремих коефіцієнт кореляції від коефіцієнту множинної кореляції?
19. В чому полягає різниця між факторним та компонентним аналізами?
20. З якою метою використовується інформаційний аналіз карт?
21. Чим відрізняється абсолютна ентропія від відносної?
22. Що характеризує коефіцієнт взаємної відповідності?
23. Для чого застосовується тренд-аналіз і в чому його сутність?
24. Для чого застосовується апроксимація поверхонь?
25. Які існують види карт взаємозв'язку?

6. ГІДРОГЕОЛОГІЧНІ ДЕТЕРМІНОВАНІ МОДЕЛІ

6.1 Стадії гідрогеологічного детермінованого моделювання

Гідрогеологічні математичні детерміновані моделі базуються на використанні складної фізичної теорії. Найбільш розвинутими з детермінованих моделей є геофільтраційні, що базуються на відомих з курсу “Динаміка підземних вод” крайових задач геофільтрації. Нагадаємо, що крайова задача –

це диференціальне рівняння геофільтрації (рівняння математичної фізики другого порядку, еліптичного або параболічного типів) та крайові умови до нього (граничні умови та початкові умови). В такому розумінні моделювання – це розв’язок крайової задачі геофільтрації. Подальший розгляд гідрогеологічних детермінованих моделей виконаний саме на прикладі детермінованих моделей геофільтрації.

Можна визначити чотири послідовних стадії такого моделювання.

Перша стадія – стадія схематизації умов геофільтрації, визначення розрахункових параметрів та характеристик об’єкту моделювання. Стадія закінчується точним математичним формулюванням задачі і побудовою вихідної гідродинамічної схеми.

Друга стадія – стадія епігнозного моделювання. Для отримання достовірних прогнозів необхідно обґрунтувати, що узагальнення матеріалів та вихідна гідродинамічна схема виконані добре, а роль головних гідродинамічних факторів моделі оцінені вірно. Такий доказ можна отримати, якщо відтворити на моделі вихідну гідродинамічну обстановку та порівняти її з реально існуючою, тобто відомою. Таке відтворення вихідної гідродинамічної обстановки на моделі має назву **епігнозного моделювання**. Якщо в результаті епігнозного моделювання буде встановлено, що модель недостатньо точно відображає гідродинамічну обстановку, виникає необхідність в застосуванні так званої **факторно-діапазонної оцінки**.

Сутність **факторної оцінки** полягає в наступному. На вихідній моделі за допомогою розв’язку спеціально сформульованих задач виявляють головні фактори, які визначають гідродинамічну обстановку об’єкту, та другорядні фактори. У подальшому модель можна спростити, відкинувши другорядні фактори, або спростивши умови врахування другорядних факторів на моделі. Таким шляхом можна, наприклад, спростити геометричні форми меж, оцінити вплив

локальних зон гідравлічного зв'язку між водоносними горизонтами, обґрунтувати схематизацію неоднорідної будови водоносного горизонту.

Діапазонна оцінка полягає у вивченні впливу зміни геофільтраційних параметрів та крайових умов на результат розв'язку задачі. Необхідність діапазонної оцінки виникає тоді, коли значення параметрів та крайові умови визначені неточно, але встановлено діапазон їх можливої зміни.

Результатом факторно-діапазонної оцінки є визначення напрямків та обґрунтування необхідності подальших досліджень для уточнення (коригування) вихідної гідродинамічної схеми, інколи математичного формулювання геофільтраційної задачі.

Третя стадія – прогнозне моделювання. Вона починається зі створення прогнозної гідродинамічної схеми, яка визначається гідродинамічними умовами об'єкту, а також розташуванням, типом та режимом роботи штучних споруд, що проектуються (свердловини, дрени, водойми, греблі, будівлі тощо). Для побудови прогнозної схеми перш за все необхідно усвідомити (уявити) загальний характер розвитку процесу геофільтрації, що прогнозується, з врахуванням дії штучних споруд; виявити особливості процесу, що прогнозується, в порівнянні з існуючим, який вивчений на стадії епігнозного моделювання.

При прогнозах поведінки фільтраційних потоків, як правило, змінюються граничні умови на межах області фільтрації, виникають нові внутрішні межі (штучні споруди), які можуть дуже суттєво переформувати існуючий природний підземний потік. Майже завжди прогнозна гідродинамічна схема буде складнішою за існуючу. Тому знову виникає необхідність у схематизації області фільтрації та отриманні оптимальної прогнозної гідродинамічної схеми.

Найчастіше метою прогнозного моделювання є вибір найбільш раціональної схеми штучної споруди, що

проектується, або визначення оптимального режиму роботи цієї споруди. Тому при прогнозному моделювання звичайно розв'язують не одну, а серію прямих задач для отримання кількісних показників, що характеризують фільтраційний потік при різних варіантах дії штучної споруди.

Четверта стадія – обробка та оформлення результатів моделювання. На цій стадії складають звітні документи і прогнозні карти ізоліній гідродинамічних напорів, поздовжні профілі, графіки зміни у часі дебітів водозабірних споруд або фільтраційних втрат з каналів, водосховищ тощо. Потім виконується техніко-економічне співставлення оптимальної схеми розташування та режиму дії штучних споруд.

Наведена схема з чотирьох стадій не є обов'язковою при виконанні моделювання. Для кожного окремого випадку, виходячи з конкретних вимог до результатів моделювання та повноти вихідних даних, має бути розроблена конкретна методика моделювання.

6.2 Вихідні дані для моделювання, схематизація гідрогеологічних умов

Для моделювання необхідно мати достовірні **вихідні дані** про область фільтрації, що досліджується, а саме дані щодо:

- геологічної будови області фільтрації;
- умов залягання та розповсюдження водоносних горизонтів та слабо проникних шарів;
- умов та джерел живлення підземних вод;
- основних гідрогеологічних параметрів водоносних горизонтів і слабо проникних шарів та закономірностей їх зміни за площею та в розрізі;
- поверхневих водних об'єктів та умов взаємозв'язку підземних та поверхневих вод;
- будови зони аерації та умов інфільтрації атмосферних опадів;

- природних та техногенних джерел живлення підземних вод.

Крім того, вихідна інформація повинна дозволити охарактеризувати зміни у просторових та часовій координатах гідродинамічних напорів та витрат потоку підземних вод.

Вихідні дані для моделювання легше отримати, маючи **такі спеціальні гідрогеологічні карти:**

- гіпсометрії нижнього водотриву;
- гіпсометрії верхнього розділюючого шару (для напірних пластів);
- гідроізогіпс для безнапірного потоку, або п'єзоізогіпс для напірного потоку;
- ізопотужностей водонасичених порід;
- водопроникності (або коефіцієнтів фільтрації) водонасичених порід;
- коефіцієнтів водовіддачі (недостачі насичення) порід;
- величини живлення по площі.

За допомогою згаданих карт будуються декілька характерних розрізів, на яких вказується літологія всіх стратиграфічних горизонтів, а також всі дані про геофільтраційні та ємнісні властивості порід.

Слід зазначити, що найчастіше повноцінних зазначених карт ми не маємо, а тому змушені використовувати не карти, а схеми. Іноді ці схеми складають самостійно.

На базі зазначених матеріалів виконується **схематизація природних умов геофільтрації** та складається **природна гідрогеологічна модель**, яка враховує реальну будову розрізу області фільтрації, її геометричну форму, умови на зовнішніх та внутрішніх межах, закономірності зміни фільтраційних та ємнісних параметрів водоносних та слабо проникних шарів, режим підземних вод та інші особливості геолого-гідрогеологічних, фізико-географічних і техногенних умов формування підземних вод.

Потім ця природна модель перетворюється в **геофільтраційну модель**, на якій реальна природна

гідродинамічна обстановка формалізується шляхом виділення основних факторів формування підземних вод (водоносних та слабо проникних шарів і їх меж, джерел живлення, розподілу геофільтраційних параметрів тощо).

В свою чергу, геофільтраційна модель перетворюється в **розрахункову математичну модель**, яка враховує режим фільтрації, необхідну кількість розрахункових шарів в розрізі, планову розбивку області фільтрації на розрахункові блоки тощо.

При цьому встановлюють межі області фільтрації, крайові умови, розрахункові значення параметрів.

Межами області фільтрації можуть бути:

- річки та водойми, які гідравлічне пов'язані з підземними водами;
- лінії контакту водонасичених порід з шаром, який має значно більшу (у 20-40 разів) водопроникність та дуже великі запаси підземних вод;
- різні тектонічні порушення.

У великих долинах річок, на вододілах, а також у середніх частинах артезіанських басейнів межі області фільтрації можуть бути значно віддалені від об'єкту моделювання. Для таких випадків при моделюванні виділяють умовну область, за межі якої вплив процесу, що моделюється, практично не поширюється. Розміри такої умовної області визначають або з загальних міркувань, або шляхом обчислень з врахуванням факторів впливу (дія водозабору, підйом рівня води у водосховищі) та терміну дії факторів.

Наприклад, для попереднього визначення довжини L або радіусу R впливу області суттєвого збурення потоку можна застосувати наближену залежність:

$$L = R \approx 4.5 \cdot \sqrt{a \cdot t} \quad (6.1)$$

де a - коефіцієнт п'єзопровідності (рівнепровідності),

t - термін розвитку процесу.

Крайові умови визначають умови формування потоків підземних вод, у тому числі умови живлення та циркуляції. Крайові умови складаються з початкових та граничних. Граничні умови бувають 4 родів, вони встановлюються як для зовнішніх, так і для внутрішніх меж області фільтрації. Для моделювання неусталених потоків потрібні також початкові умови, що характеризують розташування поверхні гідродинамічних напорів у початковий момент часу.

В реальних умовах **граничні умови I роду** виникають на межі пласта з річкою або водоймою, які гідравлічне пов'язані з підземними водами і є гідродинамічно досконалими. Якщо водойма або річка перетинають водоносний горизонт лише частково (гідродинамічна недосконалість), має місце гранична **умова III роду**, яку можна замінити **умовою I роду**, застосувавши так званий **додатковий фільтраційний опір** ложа водойми або русла ріки.

Гранична умова II роду має місце, наприклад, на межі, вздовж якої виникає перетік підземних вод з одного водоносного горизонту в інший, не пов'язаний з ним, або на межі водоносного горизонту з водотривом.

Граничні умови IV роду виникають на межах пластів з різною водопровідністю і не потребують спеціального врахування. Але, якщо водопроникність двох пластів відрізняється більш як у 100 разів, **умова IV роду** може бути замінена на **умову I роду** (на межах з більш проникною породою) або на **умову II роду** (на межах з менш проникною породою).

Згадане вище відноситься головним чином до бокових (бічних) меж.

На нижній межі (ложе водоносного горизонту або комплексу) найчастіше має місце **гранична умова II роду** (непроникна межа, витрати дорівнюють 0) або **умова III роду** (перетік через слабо проникний шар).

На верхній межі (верхній роздільний шар напірного водоносного горизонту або поверхня ґрунтових вод) ситуація майже така, що виникає на нижній межі. Різниця полягає в тому, що для безнапірного потоку розглядають не перетік, а величину живлення по площі.

Слід пам'ятати, що встановлення нижньої межі та граничної умови для такої межі тісно пов'язане з схематизацією області фільтрації.

Схематизація області фільтрації виконується в такій послідовності. По-перше, розглядають матеріали по кожному водоносному горизонту та слабо проникному шару для того, щоб встановити для них величини потужностей шарів, коефіцієнтів фільтрації, п'єзопровідності тощо. При незначній мінливості цих показників в межах поширення пласта можна виділити зони з встановленими середніми величинами параметрів, що спрощує процедуру подальшого моделювання.

Наступним етапом схематизації є встановлення нижньої межі області фільтрації, тобто водотриву. За нижню межу може бути прийнятий не тільки справжній водотрив, але й шар широкого розповсюдження і великої потужності, який має коефіцієнт фільтрації у 1000 разів менший за коефіцієнт фільтрації шару, що моделюється.

При встановленні нижньої межі багатошарових товщ слід врахувати різницю напорів сусідніх шарів та водопроникність роздільних слабо проникних шарів, які визначають процес перетікання. Крім того, нижня межа встановлюється з врахуванням дії штучних споруд (наприклад, запроектованих водозаборів).

При схематизації необхідно встановити так звані **представницькі значення фільтраційних параметрів.** Це виконується шляхом узагальнення даних, що представлені на відповідних картах та схемах, а також шляхом детального аналізу гідрогеологічних, геологічних, літологічних та інших умов. Коректним є застосування для цього **імовірнісного**

моделювання, яке дозволяє виділити області, що відповідають однорідним ділянкам водоносних горизонтів чи комплексів.

Природна геофільтраційна модель повинна бути детально подана за допомогою *картографічних моделей*. Потім на базі такої природної схеми створюють гідродинамічну схему, яка характеризує область та процес фільтрації у суворій гідродинамічній постановці (тобто, з повним математичним формулюванням задачі, яке необхідно для її однозначного розв'язку). Таким шляхом створюється вихідна гідродинамічна схема. В подальшому вона уточнюється шляхом коригування вихідних даних у межах припустимого.

6.3 Обґрунтування прогнозної гідродинамічної моделі

Прогнозна модель будується на базі вихідної гідродинамічної моделі з урахуванням штучних споруд, що проектується.

Штучні споруди іноді розташовуються на бічних межах області фільтрації (водойма, канал), але частіше являють собою внутрішні межі.

Для всіх штучних споруд повинні бути відомі розташування, розміри та режим роботи.

Режим роботи штучної споруди визначає фактичну умову на межі. Наприклад, *гранична умова I роду* може бути задана у водоймах і каналах, горизонтальних дренах, свердловинах. *Гранична умова II роду* може бути задана для свердловини, що працює з фіксованим дебітом.

При моделюванні процесів фільтрації в умовах меліорації (особливо, зрошення) особливу увагу слід приділити вивченню умов на поверхні ґрунтових вод, тобто, встановити величини живлення по площі у штучних умовах.

Характеристика режиму роботи споруд у часі необхідна для загальної оцінки характеру розвитку процесів, що прогноуються, та дає підстави для вибору режиму фільтрації, у

якому ці процеси повинні моделюватися - усталеного чи неусталеного, жорсткого чи пружного.

Якщо метою моделювання є вибір найбільш раціональної схеми розташування чи роботи штучної споруди, то розробляється декілька варіантів прогнозної гідродинамічної схеми.

Після створення прогнозної гідродинамічної схеми слід встановити та обґрунтувати можливість *зменшення порядку мірності фільтраційної течії*, а також з'ясувати можливість застосування при моделюванні *методу фрагментування*. Створена гідродинамічна схема може бути досить складною, тому з метою спрощення подальшого моделювання можна подовжити схематизацію. Для цього і застосовують вищезгадані прийоми.

Зменшення порядку вимірності задачі значно скорочує об'єм та час моделювання. Класична задача геофільтрації розглядається як двомірна або одновимірна. Але недосконалість меж (недосконалість свердловин, дрен тощо) та шарова будова області фільтрації призводять до того, що реальна задача є три - або двомірною. Тому для зменшення мірності потоку недосконалі споруди "замінюють" на досконалі за допомогою *методу фільтраційних опорів*. Застосування методу фільтраційних опорів досить детально розглянуто в роботах В.Шестакова. На базі методу фільтраційних опорів ряди досконалих або недосконалих свердловин можна замінити на еквівалентні досконалі траншеї, також окремі свердловини можна відтворити на моделі без додержання геометричних розмірів свердловин у плані. Нагадаємо, що головним положенням методу фільтраційних опорів є виділення у зонах різкої деформації фільтраційного потоку (поблизу дрен та свердловин) місцевих опорів, які визначаються тільки локальними умовами формування потоку в цих зонах, незалежно від умов формування фільтраційного потоку в цілому. Якщо визначити цей місцевий опір за допомогою

відповідних формул, то тримірний потік можна уявити як двомірний, а двомірний - як одномірний. Метод фільтраційних опорів розроблений для усталених течій, однак його можна також застосовувати при моделюванні неусталеної фільтрації.

Шарову будову області фільтрації можна замінити на однорідну лише за умови горизонтального залягання шарів та відмінності у значеннях коефіцієнтів фільтрації шарів не більше ніж у 20 разів. Якщо розглядається усталена фільтрація, можна успішно застосувати **функцію Грінського**.

Для умов неусталеної фільтрації спрощення можливе, якщо поверхня безнапірного потоку розташована лише в межах одного верхнього шару, а також при дотриманні деяких додаткових умов. Так, наприклад, горизонтально-шарову товщу можна звести до однорідної, якщо виконується умова:

$$\frac{k_v * t}{\mu_v * h_{сер}} > 5 \div 10 \quad (6.2)$$

де k_v - коефіцієнт фільтрації верхнього шару,

μ_v - коефіцієнт водовіддачі верхнього шару,

t - час розвитку неусталеної фільтрації,

$h_{сер}$ - середня за часом та простором потужність верхнього шару.

Тоді модель являє собою однорідний потік із сталою водопровідністю, яка дорівнює сумарній водопровідності всіх шарів, крім верхнього, та з коефіцієнтом водовіддачі верхнього шару.

Фрагментування області фільтрації полягає у виділенні з області одного чи декількох фрагментів для моделювання. Такі фрагменти повинні бути достатньо представницькими, щоб після виконання моделювання можна було оцінити фільтраційний процес в цілому, тобто можна було

розповсюдити (поширити) результати моделювання на всю область з точністю, яка задовольняє практичним потребам.

Основні вимоги до виділення фрагментів такі:

- фрагмент повинен вміщувати у собі всі основні гідродинамічні особливості, які притаманні гідродинамічній моделі в цілому;
- на межах фрагменту необхідно виконання граничних умов, що відповідають граничним умовам фільтраційної моделі.

Найчастіше фрагменти виділяють по осям симетрії або по лініям току фільтраційних течій, що виникають внаслідок дії штучних споруд.

Потім на фрагменті виконується детальне моделювання з врахуванням особливостей будови пластів, реального розташування кожної штучної споруди та режиму її роботи.

В ряді випадків не вдається вибрати типовий фрагмент для всієї області фільтрації внаслідок великої складності моделі. Тоді всю область фільтрації поділяють на декілька більш простих фрагментів та моделюють кожний з фрагментів окремо. Як результат отримують часткові розв'язки для окремих ділянок області фільтрації. Додавання цих часткових розв'язків, тобто "зшивка" фрагментів, дає рішення для всієї області фільтрації у цілому.

Слід відзначити, що чим більш складна геофільтраційна задача розв'язується, тим кращий результат дає застосування фрагментування області фільтрації.

6.4 Основні положення теорії подібності при гідрогеологічному моделюванні

Досить довгий час впри гідрогеологічному детермінованому моделюванні застосовувались головним чином методи аналогового моделювання. Зокрема, при моделюванні геофільтрації використовувався метод електрогідродинамічних аналогій (метод ЕГДА), основи якого викладені у розділі 6.5.

Базою аналогового моделювання є теорія подібності, тому доцільно розглянути основні положення цієї теорії.

Подібність явищ передбачає протікання всіх або найбільш суттєвих процесів у двох або декількох явищах, коли дані, що отримані при вивченні одного явища, можна розповсюдити (поширити) на всі явища, що подібні до даного.

Подібними (аналогічними) називають явища, які протікають в геометрично або **афінне** подібних системах (афінний від лат. affinis - той, що знаходиться в якості, споріднений; існує так звана афінна геометрія). При цьому всі відповідні змінні, які характеризують процеси у подібних явищах, у подібних точках та у подібні моменти часу відрізняються на сталу величину.

Подібні явища описуються **тотожними рівняннями**, які пов'язують параметри системи та параметри процесів, які характеризують стан системи.

Для того, щоб із загального класу явищ або процесів виділити лише одне, необхідне дотримання умов однозначності.

Умови однозначності визначають один розв'язок. При гідрогеологічному моделюванні умов однозначності включають характеристику геометричної форми та розмірів області, що досліджується, її будови та фізичних параметрів, крайових умов.

Сукупність рівнянь та умов однозначності створює (за І.Є.Жерновим) **систему повних рівнянь**, які повністю характеризують конкретне явище або процес.

Розрізняють декілька видів подібності, а саме:

- абсолютна;
- повна;
- неповна;
- наближена;
- фізична;
- математична.

Абсолютна подібність - це повна відповідність геометричних розмірів систем, що розглядаються, та всіх

величин систем, що змінюються у просторі і часі. Тобто, має місце подібність всіх процесів, які є у системах. Абсолютна подібність значною мірою є поняттям абстрактним.

Повна подібність передбачає відповідність моделі та об'єкту за процесами та визначальними факторами і параметрами, різниця полягає лише у масштабах. Наприклад, можна вважати, що потік підземних вод має повну гідромеханічну подібність до іншого потоку, якщо всі процеси зміни гідродинамічних елементів потоків відрізняються лише за масштабами. При цьому, однак, теплові та електричні поля у потоках можуть бути неподібними, тому що суттєво не впливають на гідромеханічний процес руху рідини.

Неповна подібність - це пропорційна відповідність моделі та об'єкту тільки по координатах, або тільки у часі. Тому моделювання основних процесів явища здійснюється лише частково. При такому моделюванні допускають викривлення неподібних сторін явищ, однак ці викривлення суттєво не впливають на ту сторону явища, що вивчається. Приклад - гідромеханічні процеси у потоці підземних вод у часі, без дотримання геометричної подібності в окремих частинах потоку.

Наближена подібність пов'язана зі спрощеннями, що відомі та заздалегідь оцінені шляхом експерименту або аналітичного розрахунку. При цьому пропорційна відповідність моделі і об'єкту дотримується у часі по головним процесам, факторам та параметрам. Деякі фактори, що несуттєво впливають на процес, моделюються наближено або зовсім не моделюються. Це викликає похибки, які оцінюють певними способами.

З точки зору відповідності до фізичної природи явищ розрізняють фізичну та математичну подібність.

Фізична подібність має місце при однаковій фізичній природі подібних явищ, коли, наприклад, фільтраційні процеси

у системі, що вивчається, відповідають фільтраційним процесам у подібних до неї системах.

Математична подібність потребує лише відповідності між параметрами порівнювальних процесів, фізична природа яких може бути різною. Математична подібність базується на так званому ізоморфізмі рівнянь (фізична природа процесів різна, але за формою рівняння, що описують процеси, однакові). Так, наприклад, рівняння руху сталого електричного струму у провіднику за формою аналогічне рівнянню ламінарної фільтрації у пористому середовищі.

Всі зазначені вище види подібності підкоряються певним загальним закономірностям, що мають назву **теорем подібності**. Теорія подібності базується на **трьох теоремах подібності**. Виведення першої і другої теорем базується на припущенні, що досліджувані об'єкти подібні. Тим самим ці теореми встановлюють властивості подібних (аналогічних) об'єктів. Третя теорема визначає умови, які необхідні і достатні для того, щоб об'єкти були подібними (аналогічними). Перша теорема подібності була вперше сформульована в 1686 р. І.Ньютоном при розгляді ним умов подібності руху двох рідин, а повний її доказ був реалізований у 1848 р. Ж.Бертраном. Друга теорема виведена А.Федерманом в 1911 р., а доведена у 1914 р. Є.Букінгемом на базі теорії розмірності. М.В.Кірпічов в 1930 р. сформулював і довів третю теорему подібності.

В теорії подібності використовуються поняття критеріїв, констант та індикаторів подібності.

Критерії подібності - це безрозмірні множники основних розмірних фізичних величин, які входять у замкнену систему рівнянь та описують процес чи явище, що досліджується. Наприклад, одним із головних критеріїв подібності процесів фільтрації у пористому середовищі та руху електричного струму у провіднику є співвідношення:

$$\frac{t}{F * C} = \frac{t_M}{R * C_M} \quad (6.3)$$

де t - час розвитку процесу фільтрації;
 F - фільтраційний опір;
 C - водоемкість пористого середовища;
 t_m - час руху електричного струму на моделі;
 R_m - електричний опір на моделі;
 C_m - електрична ємність на моделі.

Константи подібності - це сталі масштабні коефіцієнти, за допомогою яких визначають співвідношення для кожної пари схожих параметрів у схожих точках подібних систем. Для наведеного вище прикладу критерію подібності є масштабні коефіцієнти (масштаби) часу α_t , фільтраційного опору α_F , водоемкості α_C :

$$\alpha_t = \frac{t}{t_m}$$

$$\alpha_F = \frac{F}{R} \quad (6.4)$$

$$\alpha_C = \frac{C}{C_m}$$

Індикатори подібності - це рівняння зв'язку масштабних коефіцієнтів. Вони показують, які з масштабних коефіцієнтів можна призначити довільно, а які слід обчислювати. Для згаданого вище прикладу індикатор подібності має вигляд:

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_F \cdot \alpha_C} = 1 \quad (6.5)$$

Тобто, якщо призначені α_F і α_C , масштабний коефіцієнт α_t слід обраховувати за залежністю $\alpha_t = \alpha_F \cdot \alpha_C$.

6.5 Метод електрогідродинамічних аналогій (метод ЕГДА)

Метод базується на математичній аналогії між рухом постійного електричного струму в електропровідному середовищі та ламінарною течією рідини у пористому середовищі. Основи теорії і практики методу ЕГДА були розроблені М.Павловським.

Наприклад, усталена планова фільтрація у пористому анізотропному середовищі за відсутністю живлення по площі описується таким рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{x,y} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{x,y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.6)$$

де $K_{x,y}$ - коефіцієнт фільтрації;
 H - гідродинамічний напір;
 x, y - координати.

Диференціальне рівняння руху постійного електричного струму в анізотропному плоскому провіднику має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{x,y} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{x,y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.7)$$

де $C_{x,y}$ - питома електропровідність;
 U - електричний потенціал (напруга).

Якщо середовища, що розглядаються, є однорідними, то коефіцієнт фільтрації та питома електропровідність є сталими величинами. Тому згадані диференціальні рівняння будуть мати вигляд рівнянь Лапласа:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (6.9)$$

Ці рівняння аналогічні між собою. Аналогічними є також вирази законів Дарсі і Ома, а також схожі параметри, що характеризують процеси фільтрації у пористому середовищі та рух електричного струму у провіднику.

Метод ЕГДА дозволяє вивчити відповідні (аналогічні) електричні процеси та параметри на електричних моделях, і результати цього вивчення поширити на процеси фільтрації (Див. Таблицю 6.1).

Таблиця 6.1

Аналогія між рухом напірного фільтраційного потоку та рухом постійного електричного струму

Фільтраційний Потік	Електричний струм у провіднику
1	2
Закон Дарсі $v = -K \frac{\partial H}{\partial l}$	Закон Ома $i = C \frac{\partial U}{\partial s}$
Швидкість фільтрації v , м/діб	Щільність струму i , в/(ом*см ²)
Гідродинамічний напір H , м	Електричний потенціал U , в
Різниця напорів $H_1 - H_2$, м	Різниця потенціалів $U_1 - U_2$, в
Довжина шляху Фільтрації l , м	Довжина провіднику електричного струму s , см

Площа перерізу фільтраційного потоку f , м^2	Площа перерізу електричного провіднику w , см^2
Коефіцієнт фільтрації K , м/діб	Питома електропровідність C , $\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$
Градiєнт фільтраційного потoku $I = -\frac{\partial H}{\partial l}$	Напруженість електричного поля $\varepsilon = -\frac{\partial U}{\partial s}$, в/см

Подовження Таблиці 6.1

1	2
Фільтраційний опір ділянки потoku $F = \frac{\Delta l}{K \cdot f}$, діб/м^2	Електричний опір ділянки провіднику $R = \frac{\Delta s}{C \cdot w}$, ом
Витрата фільтраційного потoku $Q = K \cdot f \cdot \frac{H_1 - H_2}{l}$, $\text{м}^3/\text{діб}$	Сила електричного струму $I = C \cdot w \cdot \frac{U_1 - U_2}{s}$, а
Інтенсивність живлення по площі $W = \frac{Q}{f}$, м/діб	Одинична сила електричного струму $I_w = \frac{I}{w}$, а/см^2

Аналогові пристрої для моделювання поділяються на **суцільні** та **сіткові**, а також комбіновані (останні являють собою комбінацію перших двох). По суті сіткова модель створюється для розв'язку диференціального рівняння методом скінчених різниць (див. Розд.7) шляхом аналогового моделювання.

6.5.1 Суцільні моделі

На суцільних моделях область фільтрації, що досліджується, замінюється на суцільне електропровідне середовище (найчастіше, це електропровідний папір, рідше електроліт, гіпс з саджею). Модель у геометричному масштабі є просторово подібною до області фільтрації, яка досліджується. Найчастіше суцільні моделі використовуються для моделювання усталеної фільтрації. Для моделювання неусталених процесів використовуються суцільні моделі з розподіленими опором та ємністю (застосовується так званий електроінтегратор неусталених процесів ЕНП).

При виконанні досліджень за методом ЕГДА на суцільних моделях розрізняють власне модель області фільтрації з допоміжними пристроями та прилад (інтегратор) ЕГДА. За допомогою приладу ЕГДА задають потенціали або силу струму у певних точках моделі для реалізації граничних умов I та II роду, а також вимірюють електричні потенціали і значення сили струму на моделі.

Найбільш поширеним матеріалом для виготовлення суцільних моделей є електропровідний папір (папір, наповнений саджею або графітом). Виготовляються різні сорти такого паперу з питомим електричним опором від десятків до сотень тисяч ом.

Переваги паперових моделей:

- простота виготовлення;
- незначна контактна різниця потенціалів між папером та електричними шинами.

Недоліки паперових моделей:

- анізотропія паперу (коефіцієнт анізотропії у вертикальному та горизонтальному напрямках може досягати 10%);
- електричний опір залежить від вологості і температури повітря та паперу.

Для з'єднання паперу з різним питомим електричним опором використовують спеціальний електропровідний клей або звичайну чорну туш, що виготовлена на спирту.

Для завдання граничних умов застосовують спеціальні електричні шини наступних типів: шини-зажими, дротові, лінійні та точкові.

Електроінтегратор ЕГДА призначений для розв'язку задачі, фактично являє собою пристрій для інтегрування рівнянь (тому і отримав назву інтегратору). Всі пристрої ЕГДА працюють за принципом мостової (компенсаційної) схеми і відрізняються один від одного окремими конструктивними елементами та характеристиками електричного струму, що застосовується (напруга до 30 в).

Детально технологія моделювання на суцільних моделях викладена у [8,11].

6.5.2 Сіткові моделі

На сіткових моделях фільтраційний потік моделюється за допомогою сітки електричних резисторів та конденсаторів. Просторова подібність тут відсутня, а геометричні масштаби не витримуються. Сіткові моделі застосовують для моделювання як неусталеної, так і усталеної фільтрації.

При моделюванні усталеної фільтрації модель являє собою ланцюг, плоску або просторову сітку з електричних резисторів (опорів). Такі сітки називають *моделями типу R* (Рис.6.1).

При моделюванні неусталеної фільтрації моделі ускладнюються.

Якщо час розглядають як неперервний, права частина диференціального рівняння фільтрації не перетворюється у кінцево-різницевий вигляд (Див. Розділ 7). Процес тоді описується за допомогою системи кінцево-диференціальних рівнянь. Модель складається з електричних опорів та конденсаторів. Такі сітки називають *моделями типу RC* (Рис.6.2).

Якщо все диференціальне рівняння перетворюють у кінцево-різницевий вигляд, процес фільтрації описується системою звичайних алгебраїчних рівнянь. Модель складається з

електричних опорів, які відповідають фільтраційним та "часовим" опорам. Такі сітки називають *моделями типу RR_t* (Рис.6.3).

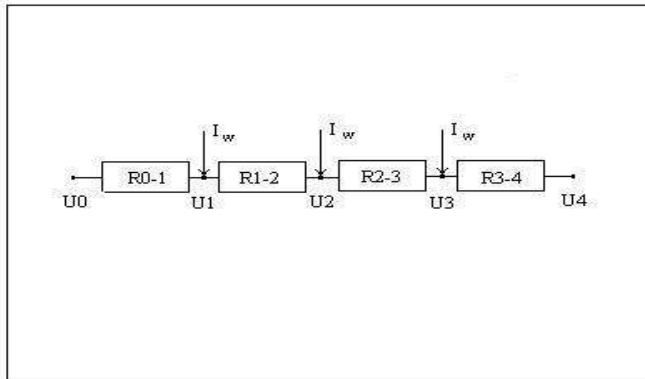


Рис. 6.1 Принципова схема одновірної моделі типу R (R_{0-1}, R_{1-2}, \dots - електричні резистори; U_0, U_1, \dots - електричні потенціали у вузлах сітки, що відповідають гідродинамічним напорам; I_w - сила струму, що відповідає інтенсивності живлення по площі).

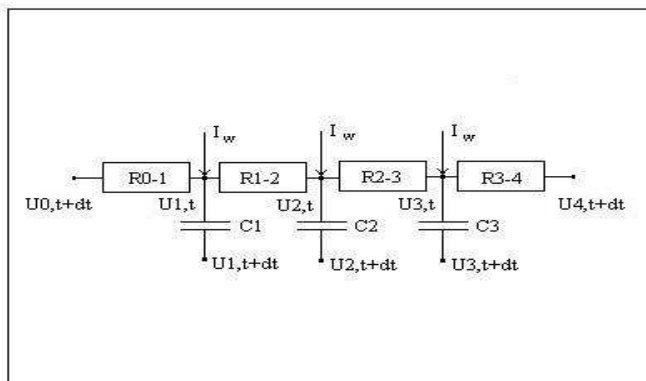


Рис. 6.2 Принципова схема одновірної моделі типу RC (R_{0-1}, R_{1-2}, \dots - електричні резистори; C_1, C_2, \dots - електричні конденсатори; $U_{0,t}, U_{1,t}, \dots$ - електричні потенціали у вузлах сітки, що відповідають гідродинамічним напорам на вихідний момент часу; $U_{0,t+dt}, U_{1,t+dt}, \dots$ - електричні

потенціали у вузлах сітки, що відповідають гідродинамічним напорам на розрахунковий момент часу; I_w – сила струму, що відповідає інтенсивності живлення по площі).

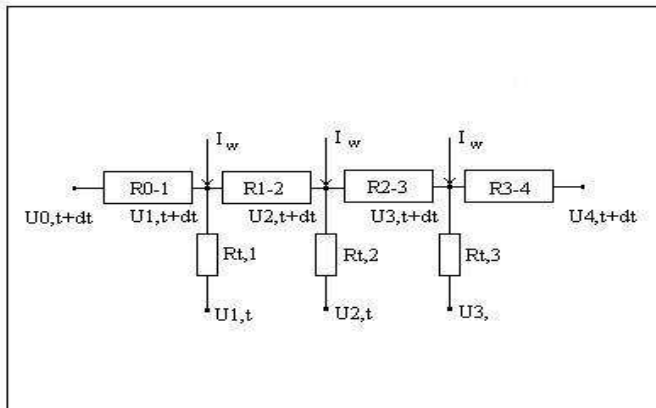


Рис. 6.3 Принципова схема одномірної моделі типу RR_t ($R0-1, R1-2, \dots$ - електричні резистори; $R_{t,1}, R_{t,2}, \dots$ - так звані “часові” електричні резистори; $U0,t, U1,t, \dots$ - електричні потенціали у вузлах сітки, що відповідають гідродинамічним напорам на вихідний момент часу; $U0,t+dt, U1,t+dt, \dots$ - електричні потенціали у вузлах сітки, що відповідають гідродинамічним напорам на розрахунковий момент часу; I_w – сила струму, що відповідає інтенсивності живлення по площі).

Детально технологія моделювання на сіткових моделях викладена у [9,12].

Контрольні запитання до розділу 6

1. На чому базуються гідрогеологічні математичні детерміновані моделі?
2. Які стадії можна виділити при гідрогеологічному математичному детермінованому моделюванні?
3. В чому полягає сутність факторно-діпазонної оцінки?
4. Які необхідні вихідні дані для гідрогеологічного математичного детермінованого моделювання?

5. Які необхідні спеціальні карти для гідрогеологічного математичного детермінованого моделювання?
6. Що таке схематизація природних умов області фільтрації та в якій послідовності вона виконується?
7. Чим відрізняється прогнозна гідродинамічна схема від вихідної схеми?
8. Які методи застосовуються для подальшого спрощення гідродинамічної схеми?
9. Які явища називають подібними, які види подібності розрізняють?
10. Чим критерій подібності відрізняється від індикатора подібності?
11. На чому базується метод електрогідродинамічних аналогій?
12. Чим відрізняються сіткові електричні моделі від суцільних?
13. Які існують типи сіткових моделей?

7. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ

На теперішній час в гідрогеології застосовуються наступні числові методи розв'язання диференціальних рівнянь геофільтрації: скінчених різниць, скінчених елементів, граничних елементів. Найбільш поширеним з них є **метод скінчених різниць (метод сіток)**.

Розглянемо відоме рівняння геофільтрації:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot h \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \cdot h \frac{\partial H}{\partial y} \right) + w = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.1)$$

де $K \cdot h$ - коефіцієнт водопровідності, м²/діб;
 H - гідродинамічний напір, м;
 w - інтенсивність живлення по площі, м/діб;
 μ - коефіцієнт водовіддачі;
 x, y - координати простору, м;
 t - час, діб.

Для спрощення припустимо:

1. Потік є одномірним.
2. Водопровідність стала, тобто $K \cdot h = const$.
3. Живлення по площі відсутнє, тобто $w = 0$.

Тоді рівняння (7.1) матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K \cdot h} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.2)$$

або

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.3)$$

де $a = \frac{K \cdot h}{\mu}$.

Метод скінчених різниць базується на понятті похідної:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta x} \quad (7.4)$$

Якщо Δx є досить малим, можна записати:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{\Delta H}{\Delta x} \quad (7.5)$$

Розглянемо Рис.7.1.

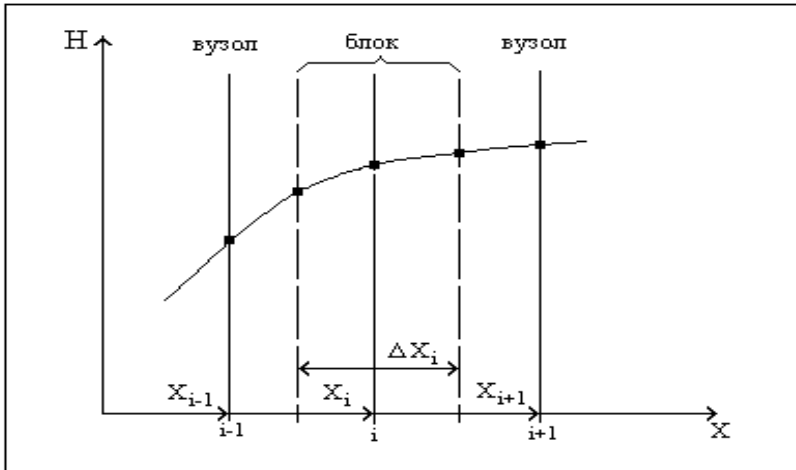


Рис. 7.1 Пояснююча схема просторової дискретизації при застосуванні методу скінчених різниць

Користуючись Рис.7.1, запишемо вираз $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ у скінчених різницях.

Для вузла i :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{H_{i+1} - H_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{H_i - H_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{\Delta x_i} \quad (7.6)$$

Зауважимо, що у чисельнику записані перші похідні у скінчених різницях.

За аналогією запишемо у скінчених різницях вираз для $\frac{\partial H}{\partial t}$ для вузла i :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t_k} \quad (7.7)$$

де H_i^{k+1} - гідродинамічний напір для прогнозного моменту часу $k + 1$;
 H_i^k - гідродинамічний напір для вихідного моменту часу k ;
 Δt_k - час прогнозу (інтервал часу від k до $k + 1$).

У підсумку маємо:

$$\frac{\frac{H_{i+1} - H_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{H_i - H_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{\Delta x_i} = \frac{1}{a} \cdot \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t_k} \quad (7.8)$$

Слід звернути увагу на те, що лівій частині цього рівняння значення H можуть відповідати як моменту часу k , так і моменту часу $k + 1$.

Звідси випливають три схеми апроксимації рівняння у скінчених різницях:

- явна,
- неявна,
- явно-неявна.

Якщо у лівій частині H відповідають вихідному моменту часу k , то маємо **явну схему**.

Якщо у лівій частині H відповідають прогнозованому моменту часу $k + 1$, то маємо **неявну схему**.

Якщо частка вузлів записана по явній схемі, а частка - по неявній, маємо **явно-неявну схему**. Явно-неявна схема зараз рідко застосовується.

Слід підкреслити, що, застосовуючи метод скінчених різниць, отримаємо замість одного диференціального рівняння n звичайних рівнянь, де n - кількість вузлів (блоків). Тобто, замість розв'язку диференціального рівняння необхідно розв'язати систему звичайних алгебраїчних рівнянь.

Існує поняття *нестійкості схеми розв'язку*. Нестійка схема - це така схема, при реалізації якої накопичується похибка від кроку до кроку у часі (слід звернути увагу, що метод скінчених різниць - це комбінований метод розв'язку). Явна схема може бути нестійкою (стійкість цієї схеми визначається окремими умовами вибору Δt_k та Δx у відповідності до фільтраційних властивостей порід). Неявна схема завжди стійка.

Для практичної реалізації методу скінчених різниць площа області фільтрації, яка моделюється, поділяється на блоки (дискретизується), здебільшого за ортогональною сіткою. Застосовуються й інші способи поділу, наприклад, трикутні сітки або сітки довільної конфігурації. В центрі кожного блоку розташовується вузол.

Дискретизація області фільтрації виконується і в розрізі. При цьому частина шарів, виділених на геофільтраційній моделі, може об'єднуватися, якщо це суттєво не впливає на результат розв'язку. Іноді окремі однорідні шари поділяються на декілька розрахункових шарів для підвищення точності розв'язку або більш точного врахування реальної структури потоку. Це необхідно для реалізації вертикальної складової потоку у водоносних горизонтах значної потужності, розв'язанні задачі про пересування некондиційних вод у розрізі, врахуванні пружного режиму фільтрації в слабо проникних пластах.

Ступінь і характер дискретизації області, яка моделюється, визначається гідрографічними і геоморфологічними особливостями території, геолого-гідрологічними умовами, а також ступенем вивченості району. Крім того, при дискретизації необхідно враховувати розташування об'єктів, які впливають на режим і баланс підземних вод, а також схеми розташування водозабірних споруд. При виборі напряму ортогональної сітки бажано суміщати її з напрямом основних елементів геологічної структури та гідрографічної мережі.

Дискретизації області фільтрації може бути рівномірною або нерівномірною. Перша є більш привабливою, оскільки вносить

менші похибки в розв'язки, особливо при моделюванні шаруватих водоносних систем. Проте вибір розмірів блоків визначається масштабом моделі і характером задачі, яка розв'язується. При цьому при обмежених можливостях програмного забезпечення чи технічних засобів у відношенні числа блоків (вузлів) фільтрації використовуються нерівномірні розбивки.

Слід звернути увагу на те, що підходи до дискретизації області фільтрації при розв'язанні регіональних та локальних задач дещо відрізняються.

При розв'язанні регіональних задач крок сітки може змінюватися від перших кілометрів до одного-двох десятків кілометрів. При досить рідкій річковій мережі розбивку доцільно виконувати таким чином, щоб між двома суміжними або паралельними річками розміщувалося не менше трьох блоків, з яких один повністю розміщується в межах виділеного геоморфологічного елемента (вододіл або долина річки). Можливість такого підходу є не завжди. Якщо блок моделі включає в собі різні геоморфологічні елементи, які відрізняються між собою значеннями гідрогеологічних параметрів, як розрахункові приймаються гідрогеологічні параметри, середньозважені по площі блоку.

Для детального відтворення локальних особливостей водообміну поверхневих і підземних вод потрібний високий ступінь дискретизації області, практичне здійснення якого при розв'язанні регіональних задач часто виявляється недоцільним через недостатню гідрогеологічну вивченість території або внаслідок обмежених технічних можливостей обчислювальних засобів. У таких ситуаціях для кожного блоку вводяться середні значення рівнів підземних і поверхневих вод і узагальнені фільтраційні опори, які характеризуються ступінь їх взаємозв'язку.

При розв'язанні локальних задач розбивка на блоки має забезпечити можливість відображення основних локальних

джерел збурення (водозабірних споруд і дрен), які реалізуються як граничні умови I, II чи III роду. Бажано, щоб блоки, в яких задані такі умови, були розділені між собою не менше ніж одним блоком, тобто лінійні розміри блоків мають бути менше відстаней між джерелами, стоками, дренами.

Розрахункова дискретизація розрізу області фільтрації на локальних моделях має забезпечити виділення всіх водоносних горизонтів, які експлуатуються, а також інших горизонтів, в яких прогнозується зниження рівнів підземних вод. На відміну від регіональної моделі, тут повинна бути забезпечена можливість отримання прогнозних розв'язків стосовно не лише балансу підземних вод всієї шаруватої системи, але і розподілу рівнів у всіх елементах розрізу цієї системи.

Розміри блоків на локальних моделях обираються також з врахуванням можливості забезпечення контролю зміни в них напорів і знижень рівня за наявними сверловинами спостережної мережі, витрат джерел, розвантаження в річки та інших фактичних даних.

Числові методи розв'язання диференціальних рівнянь геофільтрації реалізуються на практиці за допомогою відповідного прикладного програмного забезпечення, а саме за допомогою оригінальних програм для розв'язку конкретних задач. На теперішній час найбільш поширеними серед них є програми MIFP[®], PMWIN[®], GWFS[®]-MTS[®], FEFLOW[®]. Вони призначені для моделювання геофільтрації та міграційних процесів в підземних водах в багатошарових товщах в напірній, безнапірній та напірно-безнапірній стаціонарній і нестаціонарній постановках.

Програми MIFP[®] (Моделювання фільтраційних процесів, розроблена в Україні), PMWIN[®] (Processing Modflow for Windows, розроблена в США), GWFS[®]-MTS[®] (Моделирование геофильтрации GWFS[®], Моделирование массопереноса MTS[®], розроблена в Росії) реалізують метод скінчених різниць.

Програма FEFLOW[®] (розроблена в Німеччині) реалізує метод скінчених (фінітних) елементів.

Сучасні версії згаданих програм реалізуються на персональних комп'ютерах в середовищі Windows, є сумісними з базовими ПС-системами моніторингу геологічного середовища та орієнтовані на можливість врахування при моделюванні не тільки природних, а також і різноманітних техногенних факторів. Детальний їх опис наведений у відповідних інструкціях.

Контрольні запитання до розділу 7

1. Які числові методи розв'язання диференціальних рівнянь геофільтрації на теперішній час застосовуються в гідрогеології, який з них є найбільш поширеним?
2. В чому полягає сутність методу скінчених різниць?
3. Які існують схеми апроксимації диференціального рівняння геофільтрації у скінчених різницях?
4. Пояснить поняття нестійкості схеми розв'язку диференціального рівняння геофільтрації.
5. Яке програмне забезпечення існує для реалізації числових методів розв'язання диференціальних рівнянь геофільтрації?

8. ПОНЯТТЯ ПРО ГЕОГРАФІЧНІ ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ

На даний час одним з пріоритетних напрямів розвитку інформаційних технологій, зокрема, моделювання, є розробка і подальше вдосконалення *географічних інформаційних систем (ГИС)*. Термін “географічний” використовується тут не в сенсі

“географія” як галузь знань, а в сенсі *прив’язки всієї інформації, що є в системі, до географічних координат місцевості.*

ГІС призначені для збору, систематизації, обробки, аналізу та видачі по запитам багаточисельних користувачів різноманітних даних про землю та пов’язаних з землею. В ГІС різного призначення та рівня інтегрується інформація про природу та суспільство, яка є на топографічних і тематичних картах, планах міст, аеро - та космічних знімках, в довідниках та інших матеріалах про місцевість і процеси (явища), що притаманні цій місцевості. При цьому широко використовується *математико-картографічне моделювання*, яке дозволяє отримати просторово-часову інформацію, розв’язувати різні розрахункові задачі, наочно віддзеркалювати місцевість та процеси (явища), що з нею пов’язані. По суті ГІС – це нова інформаційна (насамперед геоінформаційна) технологія.

Особливістю ГІС є наявність в їх складі специфічних методів аналізу просторових даних, які у сукупності з засобами вводу, зберігання, маніпулювання та представлення просторово-координованої інформації складають основу технології географічних інформаційних систем (ГІС-технології). Саме *наявність сукупності специфічних методів аналізу з застосуванням як просторових так і не просторових атрибутів об’єктів, що здатні генерувати нові знання про об’єкти досліджень, визначає головну відмінність ГІС-технології* від технологій автоматизованого картографування або систем автоматизованого проектування.

Слід відмітити, що розвиток геоінформаційних технологій, а саме геоінформаційного картографування за допомогою персональних комп’ютерів призвів до появи чотирьох нових *типів геозображень, які реалізують окремі елементи ГІС-технології: електронних карт, комп’ютерних атласів, тримірних моделей реальних та абстрактних об’єктів, картографічних фільмів та мультиплікації.* Найбільш поширені з них комп’ютерні атласи. Комп’ютерні атласи

являють собою систему електронних карт, що складені на єдиній інформаційній основі за допомогою єдиного пакету програм. Розрізняють два типи комп'ютерних атласів: необроблені атласи та закінчені атласи. Необроблені атласи – це сукупність базових цифрових картографічних даних, для відтворення яких необхідне відповідне програмне забезпечення. Закінчені атласи більш близькі до традиційних, вони вміщують серії погоджених карт різної тематики, просторового охоплення, ступені аналітичності та синтетичності. Програми побудови комп'ютерних атласів цього типу вже “вбудовані” в атлас, тому електронні карти зразу відтворюються на екрані комп'ютера за вимогою користувача. Причому відтворення можуть бути не тільки двомірними. Важливе місце займають тримірні (об'ємні) просторово-часові моделі реальних та абстрактних об'єктів.

Будь-яка ГІС складається з трьох **основних структурних компонентів**:

- **апаратного комплексу**;
- **програмного комплексу**;
- **інформаційного блоку**.

Апаратний комплекс включає комп'ютер відповідної конфігурації та набір периферійних пристроїв вводу-виводу інформації (сканери, принтери, плоттери, дигітайзери тощо).

Програмний комплекс, або програмне забезпечення ГІС (GIS software) являє собою сукупність зв'язаних (інтегрованих) програмних модулів, які забезпечують виконання основних функцій ГІС з дотриманням певного стандарту інтерфейсу користувача. На теперішній час найбільш поширеними є наступні програмні комплекси ГІС:

- MapInfo Professional™ фірми Mapping Information Systems Corporation (США);
- ArcINFO™ GIS, ArcVIEW™ GIS, ArcGIS™ Каліфорнійського інституту досліджень природного середовища ESRI (США);

- GeoLink™ компанії “Геолінк” (Російська Федерація).

Інформаційний блок вміщує просторову інформацію у вигляді відповідним чином закодованих шарів картографічних даних (гідрографічна мережа, адміністративне районування, ґрунти, геологічна будова тощо), а також просторово прив’язану цифрову-літерну (атрибутивну) інформацію для певної території.

Загальна схема функціонування ГІС представлена на Рис.8.1.

Функціональні можливості ГІС визначають такі *головні напрями їх практичного застосування*:

- *створення та ведення баз даних (інформаційно-довідковий напрям);*
- *автоматизоване картографування;*
- *просторовий аналіз природних, природно-техногенних, природно-господарських та соціально-економічних територіальних систем;*
- *моделювання природних, природно-техногенних, природно-господарських та соціально-економічних процесів;*
- *підтримка прийняття рішень в плануванні, проектуванні та управлінні.*

Слід зазначити, що на теперішній час *без застосування ГІС неможливо створення сучасних ефективних систем моніторингу* різного рівня та напрямів. Зокрема, програмний комплекс GeoLink™ запропоновано GeoLink™ як базове програмне забезпечення при створенні федеральної та регіональних систем моніторингу геологічного середовища Російської Федерації.

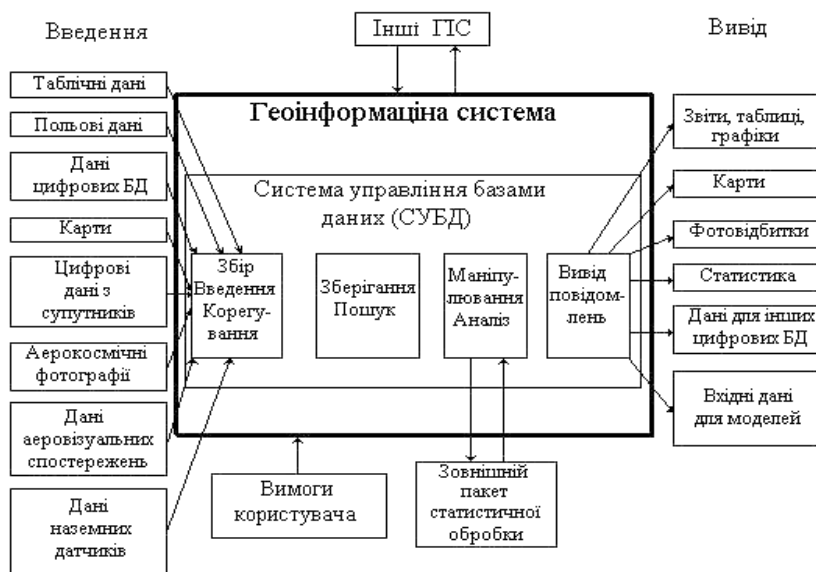


Рис. 8.1 Загальна схема функціонування ГІС.

Контрольні запитання до розділу 8

1. Для чого призначені географічні інформаційні системи?
2. Що складає основу технології географічних інформаційних систем?
3. Які основні структурні компоненти складають географічну інформаційну систему?
4. Які програмні комплекси географічних інформаційних систем на теперішній час є найбільш поширеними?
5. Які існують головні напрями практичного застосування географічних інформаційних систем?

Список літератури

1. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. Москва: Наука, 1977. - 408с.
2. Боревский Б.В., Дробноход Н.И., Язвин Л.С. Оценка запасов подземных вод. Киев: Вища школа, 1989. – 407с.
3. Гавич И.К. Теория и практика применения моделирования в гидрогеологии. - Москва: Недра, 1980. – 358с.
4. Гавришин А.И. Гидрогеохимические исследования с применением математической статистики и ЭВМ. Москва: Недра, 1974. – 145с.
5. Гавришин А.И. Математико-статистические методы оценки и контроля качества геологической информации: Курс лекций. Новочеркасск: Изд-во Новочеркасского политехнического ин-та, 1979. – 59с.
6. Гидрогеологическое прогнозирование: Пер. с англ. /Под ред. М.Г.Андерсона и Т.П.Берта. – Москва: Мир, 1988. – 736с.
7. Дэвис Дж. С. Статистически анализ данных в геологии: Пер. с англ. В 2 кн. / Под ред. Д.А.Родионова Кн.1. - Москва: Недра, 1990. – 319с.
8. Дэвис Дж. С. Статистически анализ данных в геологии: Пер. с англ. В 2 кн. / Под ред. Д.А.Родионова Кн.2. - Москва: Недра, 1990. – 427с.
9. Жернов И.Е., Павловец И.Н. Моделирование фильтрационных процессов. - Киев: Вища школа, 1976. – 192с.
10. Закс Л. Статистическое оценивание. Москва: Статистика, 1976. – 598с.
11. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Наука, 1986. - 535с.
12. Коносавский П.К., Соловейчик К.А.. Математическое моделирование геофильтрационных процессов: Учеб.пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. - 96с.

13. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. Москва: Недра, 1976. – 407с.
14. Митчел Э. Руководство по ГИС-анализу. Часть 1 : Модели пространственного распределения и взаимосвязи / Пер. с англ. - Киев: ЗАО ЕСОММ Со, 2000. - 179с.
15. Огильви Н.А. Физические и геологические поля в гидрогеологии. Москва: Наука, 1974. - 160с.
16. Огняник Н.С. Постоянно действующие гидрогеологические модели интенсивно осваиваемых территорий Украинской ССР. Киев: Наукова думка, 1991. – 176с.
17. Пелешенко В.И., Ромась Н.И. Применение вероятностно-статистических методов для анализа гидрохимических данных: Учебное пособие. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1977. – 66с.
18. Светличный А.А., Андерсон В.Н., Плотницкий С.В. Географические информационные системы: технология и приложения. – Одесса: Астропринт, 1997. – 196с.
19. Системный подход к управлению водными ресурсами / Под ред. А.Бисваса. – Москва: Наука, 1985. - 392с.
20. Справочник по картографии / А.М.Берлянт, А.В.Гедымин, Ю.Г.Кельнер и др. - Москва: Недра, 1988. - 428с.
21. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. Москва: Недра, 1985. - 288с.
22. Эренберг А. Анализ и интерпретация статистических данных: Пер. с англ. Москва: Финансы и статистика, 1981. – 406с.