§ 1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Начнем с понятия алгебраической операции. *n-арная операция* ω в множестве G, $n \geqslant 1$, сопоставляет в с я к о й упорядоченной системе из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ о д н о з н а ч н о о п р е д е л е н н ы й элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in G$. Иными словами, это любое отображение n-й декартовой степени G^n в G. В случае $n = 1$ это будет любое преобразование множества G (отображение G в себя).

0-арная операция фиксирует в множестве G некоторый определенный элемент.

Хотя у нас будут встречаться также операции частичные, или многозначные, или бесконечноместные *), однако они будут играть лишь служебную роль. Предметом изучения будет понятие операции в указанном выше смысле. Точнее, предметом изучения будут *универсальные алгебры* (или *алгебры*), т. е. множества, в которых задана некоторая система операций Ω, конечная или бесконечная. Множество символов операций Ω, для которых указаны их арности, будем называть *сигнатурой* рассматриваемых алгебр. Для записи того, что операция $\omega \in \Omega$ n-арна, будет использоваться символ $\omega \in \Omega_n$.

Примеры алгебр хорошо известны — г р у п п ы, к о л ь ц а, м о д у л и. Однако понятие универсальной алгебры неизбежно кажется пока слишком широким. Мы начнем поэтому с рассмотрения многочисленных примеров, притом весьма естественных, желая показать, что никакие дополнительные ограничения при определении понятия универсальной алгебры сверх тех, которые сделаны при определении понятия операции, не были бы оправданными. Одновременно мы хотим показать, что те типы алгебр, которые исторически стали первыми объектами изучения и являются поэтому носителями наиболее разработанных теорий, логически, в рамках всей современной общей алгебры, уже утеряли свой характер исключительности, первоочередности.

---

*) Т. е. соответственно отображения подмножеств G^n в G, отображения множества G^n в множество подмножеств G и отображения G^n в G, где n — произвольное кардинальное число.— *Прим. ред.*

Мы не будем доказывать об универсальных алгебрах каких-либо общих теорем до тех пор, пока естественность этого понятия не станет убедительной. Введем, однако, уже теперь несколько понятий для сокращения речи.

Если дана алгебра G сигнатуры Ω, то подмножество $A \subseteq G$ называется *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно всех операций из Ω. Иными словами, для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ должно быть

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A.$$

С другой стороны, элементы, отмечаемые в G всеми нульарными операциями из Ω (если такие существуют), должны содержаться в A.

Пересечение любой системы подалгебр алгебры G, если оно не пусто, будет подалгеброй этой алгебры.

Действительно, если в G взята система подалгебр A_i, $i \in I$, с непустым пересечением D и если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — любые элементы из D, то элемент $d_1 d_2 \ldots d_n \omega$ содержится в каждой из подалгебр A_i, а поэтому содержится в D. С другой стороны, в каждой из подалгебр A_i, а поэтому и в D, содержатся и элементы, отмечаемые в G всеми нульарными операциями из Ω.

Отсюда следует, что если M — непустое подмножество алгебры G, то в G существует минимальная среди подалгебр, содержащих целиком множество M, а именно пересечение всех таких подалгебр; одной из них является сама алгебра G. Эта подалгебра обозначается через $\{M\}$ и называется подалгеброй, *порожденной* множеством M. Если $\{M\} = G$, то M называется *системой образующих* для G.

Отметим, что пересечение подалгебр может быть пустым (если, конечно, сигнатура алгебры не содержит нульарных операций). Так, в полугруппе всех целых чисел по сложению подполугруппы строго положительных и строго отрицательных чисел имеют пустое пересечение. Отметим также, что если рассматриваются кольца с единицей и нульарная операция, отмечающая единицу, включена в сигнатуру, то подалгебрами будут лишь подкольца, содержащие единицу кольца.

Если G и G' — алгебры одной и той же сигнатуры Ω (назовем их *однотипными*), то отображение $\varphi: G \to G'$ называется *гомоморфизмом*, если для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ будет

$$(a_1 a_2 \ldots a_n \omega)\varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi) \ldots (a_n\varphi)\omega, \tag{1}$$

а для любого $\omega \in \Omega_0$ элемент 0_ω, отмечаемый этой операцией в G, переходит в элемент $0_\omega'$, отмечаемый ею в G',

$$0_\omega \varphi = 0_\omega'. \tag{2}$$

Образ алгебры G при гомоморфизме $\varphi: G \to G'$, т. е. совокупность образов всех элементов из G, будет подалгеброй в G'. Действительно, если $a_i' = a_i\varphi$, $a_i \in G$, $a_i' \in G'$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\omega \in \Omega_n$, то $a_1' a_2' \ldots$ $\ldots a_n'\omega = (a_1\varphi)(a_2\varphi) \ldots (a_n\varphi)\,\omega = (a_1 a_2 \ldots a_n\omega)\varphi$. Элементы $0_\omega'$, $\omega \in \Omega_0$, также принадлежат по определению гомоморфизма к образу алгебры G.

Гомоморфизм φ называется *мономорфизмом*, если он является взаимно однозначным отображением G в G', т. е. вложением, и *эпиморфизмом*, если он отображает G на G'. Отображение G на G', являющееся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, называется *изоморфизмом*; если такое отображение существует, то G и G' *изоморфны*, $G \simeq G'$. Значение понятия изоморфизма в том, что две изоморфные алгебры с точки зрения свойств заданных в них алгебраических операций неразличимы, т. е. могут рассматриваться как два экземпляра одной и той же алгебры.

Гомоморфизм алгебры G в себя (случай $G' = G$) называется *эндоморфизмом*, изоморфизм G на себя — *автоморфизмом*. Примером последнего является тождественное отображение G на себя.

Пусть задана произвольная сигнатура Ω. Существуют ли алгебры этой сигнатуры? Всегда существуют одноэлементные алгебры, так как во всяком одноэлементном множестве можно определить, притом единственным способом, все операции из Ω. Существуют, впрочем, и алгебры сигнатуры Ω, имеющие сколь угодно большую мощность. Покажем это, построив алгебры, в некотором смысле самые свободные среди всех алгебр сигнатуры Ω; точный смысл этого высказывания вскоре выяснится.

Возьмем произвольное множество X, о котором лишь предположим, что оно не пересекается с множеством символов операций Ω. С другой стороны, каждой нульарной операции $\omega \in \Omega$ сопоставим символ 0_ω, причем все эти символы различны и не являются элементами множеств X и Ω. Определим понятие *слова* (точнее, *Ω-слова*) над алфавитом X. Именно, элементы из X и элементы 0_ω, $\omega \in \Omega_0$, считаются словами, а затем для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых слов $w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_n$ выражение $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$ также будет считаться словом.

Множество всех Ω-слов над алфавитом X следующим образом превращается в алгебру сигнатуры Ω. Если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то результатом применения этой операции к словам $w_1, w_2, \ldots, w_n$ считаем слово $w_1 w_2 \ldots$ $\ldots w_n \omega$; если же $\omega \in \Omega_0$, то эта нульарная операция фиксирует слово 0_ω. Полученная алгебра называется *алгеброй Ω-слов над алфавитом X*. Множество X служит для этой алгебры системой образующих.

Очевидно, что алгебры Ω-слов над равномощными алфавитами изоморфны.

Алгебры Ω-слов *свободны* в классе всех алгебр сигнатуры Ω в следующем смысле: *всякое отображение φ_0 множества образующих X в любую алгебру G сигнатуры Ω можно продолжить, притом единственным образом, до гомоморфизма φ алгебры Ω-слов $F(X)$ в алгебру G.* В самом деле, образы элементов, отмеченных нульарными операциями, определяются однозначно в соответствии с (2). Если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и образы при отображении φ слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ уже определены, то образом слова $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$ считаем элемент $(w_1\varphi)(w_2\varphi) \ldots (w_n\varphi)\omega \in G$ в полном соответствии с (1). Единственность построенного нами гомоморфизма следует из единственности записи всякого слова через элементы алфавита X и символы нульарных операций.

Отсюда немедленно следует, что *если алгебра G сигнатуры Ω порождается множеством M, $G = \{M\}$, то всякий элемент из G хотя бы одним способом записывается в виде Ω-слова от (конечной системы) элементов из M.*

Класс всех алгебр данной сигнатуры Ω является слишком широким и аморфным образованием. Правда, существует некоторая литература, посвященная группоидам, т. е. множествам с одной произвольной бинарной операцией. Трудно указать, однако, какой-либо вопрос, который был бы специфическим именно для этого случая, и мы будем смотреть на слово «группоид» лишь как на простой термин, а не как на понятие, которое должно было бы стать предметом самостоятельного изучения. Отметим здесь же, что класс всех алгебр с пустой сигнатурой (операции отсутствуют) есть просто класс всех множеств.

Обычно приходится рассматривать классы однотипных алгебр, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Чаще всего это делается следующим образом. Фиксируем некоторый алфавит, например стандартный алфавит $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, элементы которого назовем неизвестными. Если w, w' — два любых Ω-слова над этим алфавитом, то формальное равенство

$$w = w'$$

назовем *Ω-тождеством.* Пусть Λ — любая система Ω-тождеств, конечная или бесконечная. Класс всех алгебр сигнатуры Ω, в которых выполняются все тождества из Λ (т. е. каждое тождество из Λ после подстановки в него вместо неизвестных любых элементов данной алгебры превращается в равенство, справедливое в этой алгебре), не является пустым — к нему заведомо принадлежат все одноэлементные алгебры сигнатуры Ω. Этот класс называется *многообразием* алгебр сигнатуры Ω, определяемым тождествами Λ, и будет записываться через (Ω, Λ).

Отметим, что класс всех алгебр сигнатуры Ω будет многообразием, определяемым пустой системой тождеств (или тождеством $x = x$). С другой стороны, класс одноэлементных алгебр этой сигнатуры также является многообразием; это *абсолютно вырожденное многообразие* определяется тождеством $x = y$.

Довольно скоро мы должны будем воспользоваться следующим замечанием: *всякая подалгебра алгебры многообразия* (Ω, Λ) *сама принадлежит к этому многообразию.* В самом деле, всякое тождество из Λ, выполняясь во всей алгебре, будет справедливо, в частности, и для элементов из заданной подалгебры.

Отметим также, что *всякий эпиморфный образ алгебры многообразия* (Ω, Λ) *сам принадлежит к этому многообразию.* В самом деле, пусть задан эпиморфизм φ: $G \to G'$, где G — из многообразия (Ω, Λ), и пусть $w_1 = w_2$ — тождество из Λ. Если в его запись входят неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ и если $a_1', \ldots, a_n'$ — любые элементы из G', не обязательно различные, то существуют такие $a_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$, что $a_i\varphi = a_i'$. Тогда $[w_j(a_1, \ldots, a_n)]\varphi = w_j(a_1', \ldots, a_n')$, $j = 1, 2$, а так как

$$w_1(a_1, \ldots, a_n) = w_2(a_1, \ldots, a_n),$$

то и

$$w_1(a_1', \ldots, a_n') = w_2(a_1', \ldots, a_n'),$$

что и требовалось доказать. В частности, *алгебра, изоморфная алгебре данного многообразия, сама принадлежит к этому многообразию*; иными словами, всякое многообразие является **абстрактным классом алгебр.**