§ 12. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР В ПОЛУГРУППАХ

Предыдущий параграф дал нам примеры алгебр с бесконечным множеством операций. Еще раньше мы встречались с операциями произвольной арности. Можно считать, таким образом, что понятие универсальной алгебры уже достаточно хорошо оправдано во всей той общности, в какой оно было введено в § 1. Существует, однако, возможность сделать это оправдание еще более убедительным, показав, что на самом деле все универсальные алгебры могут быть некоторым естественным способом получены при помощи полугрупп.

Пусть дана полугруппа П. Зафиксируем в ней элемент a, возьмем натуральное число n и рассмотрим слово

$$x_1 \ldots x_n a. \tag{1}$$

Любой системе значений $b_1, \ldots, b_n \in$ П неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ слово (1) сопоставляет однозначно определенный элемент $b_1 \ldots b_n a$ полугруппы П, т. е. определяет в П n-арную операцию. Конечно, n-арные производные операции можно задать в полугруппе П и многими другими способами, но мы ограничимся сейчас операциями, определяемыми словами вида (1), т. е. заданием числа n и элемента a.

Если дана произвольная сигнатура Ω, то сопоставим каждому $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, некоторый элемент a_ω полугруппы П (эти элементы не обязаны быть различными для различных ω) и зададим на П операцию ω при помощи слова $x_1 \ldots x_n a_\omega$. Если, сверх того, элементы a_ω будут зафиксированы в П и для всех $\omega \in \Omega_0$, то на множестве П будет задана алгебра сигнатуры Ω, которую назовем *специальной производной алгеброй сигнатуры Ω на полугруппе* П. Эта алгебра определяется, конечно, выбором элементов a_ω, $\omega \in \Omega$.

Мы скажем, что алгебра G сигнатуры Ω обладает *специальным точным представлением* в полугруппе П, если она изоморфно вкладывается в некоторую специальную производную алгебру сигнатуры Ω на этой полугруппе. Докажем следующую теорему Кона — Ребане (П. Кон, Универсальная алгебра, М., «Мир», 1968; Ю. К. Ребане, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 878—885).

Всякая алгебра G произвольной сигнатуры Ω обладает специальным точным представлением в некоторой полугруппе Π.

Доказательство. Искомая полугруппа Π будет симметрической полугруппой (т. е. полугруппой всех преобразований) на следующем множестве M: его элементами служат всевозможные такие непустые упорядоченные конечные строки $(u_1, \ldots, u_s)$, что всякое u_i, $i = 1, \ldots, s$, является или некоторым элементом из G, или же некоторым символом $\omega \in \Omega$ положительной арности, причем если $u_j = \omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и если $n + 1 \leqslant j \leqslant s$, то элементы $u_{j-n}, \ldots$ $\ldots, u_{j-1}$ должны не все быть элементами из G.

Сопоставим каждому $\omega \in \Omega$ элемент σ_ω полугруппы Π, т. е. преобразование множества M. Именно, если ω нульарно и отмечает в алгебре G элемент 0_ω, то для любого элемента $(u_1, \ldots, u_s) \in M$ положим

$$(u_1, \ldots, u_s)\sigma_\omega = (u_1, \ldots, u_s, 0_\omega); \qquad (2)$$

строка, стоящая справа, снова будет элементом из M. Если же $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то полагаем

$$(u_1, \ldots, u_s)\sigma_\omega = (u_1, \ldots, u_s, \omega), \qquad (3)$$

если справа стоит элемент из M; если же это не так, т. е. если $s \geqslant n$ и все элементы $u_{s-n+1}, \ldots, u_s$ лежат в G, а поэтому в G существует элемент $u_{s-n+1} \ldots$ $\ldots u_s\omega$, то полагаем

$$(u_1, \ldots, u_s)\sigma_\omega = (u_1, \ldots, u_{s-n}, u_{s-n+1} \ldots u_s\omega). \qquad (4)$$

Используя элементы σ_ω, $\omega \in \Omega$, в качестве элементов a_ω, мы, как указано выше, построим на полугруппе Π специальную производную алгебру сигнатуры Ω. Покажем, что в нее изоморфно вкладывается исходная алгебра G. Сопоставим всякому элементу $a \in G$ следующий элемент φ_a полугруппы Π (т. е. преобразование множества M):

$$(u_1, \ldots, u_s)\varphi_a = (u_1, \ldots, u_s, a); \qquad (5)$$

строка, стоящая справа, будет, очевидно, элементом множества M. Если $a,b \in G$ и $a \neq b$, то $\varphi_a \neq \varphi_b$, так как, например, ввиду (5)

$$(a)\varphi_a = (a,a), \quad (a)\varphi_b = (a,b).$$

Полученное взаимно однозначное отображение G в П является изоморфным. В самом деле, если $\omega \in \Omega_0$, то, по (5) и (2),

$$\varphi_{0_\omega} = \sigma_\omega.$$

Если же $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то, ввиду (5) и (4),

$$\varphi_{a_1 \ldots a_n \omega} = \varphi_{a_1} \ldots \varphi_{a_n} \sigma_\omega.$$

Теорема Кона — Ребане доказана. Эта теорема не дает возможности, понятно, сводить все проблемы общей алгебры к теории полугрупп. Она показывает, однако, что все то, что мы изучаем в общей алгебре, в конечном счете содержится в полугруппах. В цикле работ Ю. К. Ребане (Сиб. матем. ж. **7** (1966), 878—885; **10** (1969), 945—949) указаны характеризации тех алгебр, которые обладают точным представлением в коммутативных полугруппах, в полугруппах с сокращениями, а также в полугруппах с некоторыми другими свойствами.