§ 13. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ С ОПЕРАТОРАМИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ. МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ ГРУППЫ, КОЛЬЦА И ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

Специальные производные алгебры сигнатуры Ω на полугруппах, которыми мы пользовались в предыдущем параграфе, были связаны с фиксированием в полугруппе элементов a_ω, $\omega \in \Omega$. Иными словами, мы рассматривали полугруппу с дополнительной системой нульарных операций, мощность которой равна мощности множества Ω. Иногда рассматриваются и другие типы алгебр с дополнительной системой нульарных операций. Таково, например, многообразие колец с единицей, содержащееся в многообразии всех колец с одной дополнительной нульарной операцией.

Столь же часто встречаются алгебры с дополнительной системой унарных операций. Так, понятие группы с операторами немедленно обобщается до понятия алгебры многообразия (Ω, Λ) с системой операторов Σ: каждый оператор $\alpha \in \Sigma$ должен действовать в алгебре G этого многообразия как некоторый эндоморфизм относительно операций Ω. Как и в § 11, от произвольной системы операторов Σ в этом общем случае также можно перейти к полугруппе операторов.

В частности, если рассматривается *кольцо R с системой операторов Σ*, то для любых $a, b \in R$ и $\alpha \in \Sigma$ будет

$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{1}$$

$$(ab)\alpha = a\alpha \cdot b\alpha. \tag{2}$$

Часто рассматривают, однако, кольца с такой дополнительной системой унарных операций, что эти операции действуют как эндоморфизмы аддитивной группы кольца, т. е. выполняется условие (1), но связь с умножением в кольце, выражаемая условием (2), заменяется некоторым другим условием. Так, понятие дифференцирования кольца (см. § 10) подсказывает следующее определение:

Кольцо R называется *кольцом с системой дифференциальных операторов* Δ (или *дифференциальным кольцом*), если Δ служит системой операторов для аддитивной группы кольца R и если для любых a, $b \in R$ и $\delta \in \Delta$ выполняется условие

$$(ab)\,\delta = (a\delta)b + a(b\delta). \tag{3}$$

Каждое $\delta \in \Delta$ действует в R, следовательно, как его дифференцирование. Так как дифференцирования кольца R составляют, как мы знаем, лиево кольцо — обозначим его через Δ_R,— то от произвольной системы дифференциальных операторов можно перейти к лиеву кольцу дифференциальных операторов. При этом оказывается, что теория колец с произвольной системой дифференциальных операторов (или дифференциальная алгебра, как принято говорить) равносильна изучению объектов, состоящих из произвольного кольца R, лиева кольца Δ и гомоморфизма $\varphi\colon\ \Delta \to \Delta_R$. Иными словами, помимо тождеств (1) (с заменой α на δ) и (3) будут выполняться следующие тождества: для любых $a \in R$ и $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$

$$a(\delta_1 + \delta_2) = a\delta_1 + a\delta_2,$$

$$a\,(\delta_1 \circ \delta_2) = (a\delta_1)\delta_2 - (a\delta_2)\delta_1,$$

где через $\circ$ обозначено умножение в лиевом кольце Δ, а через $a\delta$, $\delta \in \Delta$, обозначен образ элемента $a \in R$ при дифференцировании $\delta\varphi \in \Delta_R$.

Укажем, наконец, еще один весьма часто встречающийся тип колец с дополнительной системой унарных операций, подсказываемый связью умножения в кольцах матриц и кольцах функций с умножением матрицы или функции на число. Именно, рассмотрим произвольное кольцо R с такой дополнительной системой унарных операций Σ, что всякое $\alpha \in \Sigma$ действует в R как эндоморфизм аддитивной группы, перестановочный в кольце всех эндоморфизмов этой группы со всеми правыми и левыми умножениями кольца R; иными словами, помимо условия (1) выполняется также следующее условие: для любых $a, b \in R$

$$(ab)\alpha = (a\alpha)b = a(b\alpha). \tag{4}$$

Те эндоморфизмы аддитивной группы кольца R, которые удовлетворяют условию (4), составляют подкольцо K_R в (ассоциативном) кольце всех эндоморфизмов этой группы.

Действительно, если эндоморфизмы φ и ψ обладают свойством (4), то, например, для любых $a,\ b \in R$

$$(ab)(\varphi \pm \psi) = (ab)\varphi \pm (ab)\psi = (a\varphi)b \pm (a\psi)\, b = \\ = (a\varphi \pm a\psi)b = [a(\varphi \pm \psi)]b,$$

$$(ab)(\varphi\psi) = [(ab)\varphi]\, \psi = [(a\varphi)b]\psi = [(a\varphi)\psi]b = \\ = [a(\varphi\psi)]b.$$

Ввиду доказанного от произвольной системы Σ можно на основании тех же соображений, что и выше, перейти к ассоциативному кольцу K, элементы которого действуют в кольце R в соответствии с условиями (1) и (4), причем задан гомоморфизм φ: $K \rightarrow K_R$, т. е. выполняются также условия (5) и (6) из § 11. Таким образом, аддитивная группа кольца R оказывается K-модулем. Если кольцо K обладает единицей ε, то естественно предположить, что полученный K-модуль унитарен, т. е. выполняется также условие (7) из § 11.

Если даны произвольное кольцо R и ассоциативное кольцо K с единицей, причем аддитивная группа кольца R является унитарным K-модулем и выполняется условие (4), то кольцо R называется *линейной алгеброй* над кольцом K.

Коммутативность кольца K мы не предполагаем. Можно показать, однако, что если кольцо R не содержит *аннуляторов*, т. е. таких ненулевых элементов b, что для всех $x \in R$

$$bx = xb = 0,$$

то «действующее» кольцо K непременно будет коммутативным. По этой причине. а также и в силу других соображений, с одним из которых мы встретимся в следующем параграфе, целесообразно ограничиться рассмотрением линейных алгебр лишь над ассоциативно-коммутативными кольцами с единицей.

Особенно важное место занимает в общей алгебре теория линейных алгебр над полями. Она развивается совершенно параллельно общей теории колец без дополнительных унарных операций, причем часто идет много дальше последней, так как векторные пространства над полями устроены много проще, чем произвольные абелевы группы.

Сейчас будут указаны некоторые типы универсальных алгебр, обобщающие те или иные из рассмотренных ранее «классических» типов алгебр. Эти обобщения будут обычно идти весьма далеко в сторону произвольных универсальных алгебр, и поэтому эти типы алгебр естественно вводить лишь теперь, когда общее понятие универсальной алгебры можно считать вполне оправданным. Заметим, чтобы не оговаривать этого каждый раз, что все рассматриваемые нами классы алгебр будут многообразиями.

Начнем с понятия, объединяющего понятия группы (притом с произвольной системой унарных операторов) и кольца. Пусть дана группа G. Эта группа не обязана быть коммутативной, но нам будет удобно использовать для нее аддитивную запись; в частности, нулевой элемент этой группы будет, как обычно, обозначаться символом 0. Группа G называется *группой с системой мультиоператоров* Ω или, короче, *Ω-группой*, если в G помимо групповых операций задана еще некоторая система операций Ω положительных арностей, причем эти операции связаны с групповыми операциями следующим условием: для всякого $\omega \in \Omega_n$

$$0 \ldots 0\omega = 0, \tag{5}$$

где слева нуль стоит n раз. Группу G назовем *аддитивной группой Ω-группы G.*

Если подалгебру Ω-группы как универсальной алгебры мы будем называть *Ω-подгруппой*, то условие (5) можно было бы заменить словами: нуль Ω-группы G является ее Ω-подгруппой.

Понятие Ω-группы превращается при пустой системе мультиоператоров Ω в понятие группы. Всякая

Σ-операторная группа имеет Σ системой (унарных) мультиоператоров, так как для всякого $\alpha \in \Sigma$ равенство $0 \cdot \alpha = 0$ немедленно вытекает из условия (1) § 11, переписанного аддитивно. Наконец, произвольное кольцо является частным случаем Ω-группы — система мультиоператоров Ω состоит в этом случае из одного бинарного умножения; справедливость в любом кольце равенства $0 \cdot 0 = 0$ вытекает из законов дистрибутивности.

Конечно, связь между мультиоператорами и групповыми операциями, задаваемая условием (5), чрезвычайно слаба. Оказалось, однако, что все параллельно развивающиеся разделы теории групп с операторами и теории колец (их, впрочем, не очень много) могут быть изложены сразу для любых мультиоператорных групп (Х и г г и н с, Proc. London Math. Soc. **6** (1956); русский перевод в сб. «Математика» 3, № 4 (1959)).

Следует отметить, что и группы с операторами, и кольца принадлежат на самом деле к числу *дистрибутивных* Ω-групп. Именно, условие (5) заменяется следующим много более сильным условием дистрибутивности каждой операции из Ω на каждом месте: если $\omega \in \Omega_n$, то для $i = 1, \ldots, n$

$$a_1 \ldots a_{i-1} (b + c) a_{i+1} \ldots a_n\omega =$$
$$= a_1 \ldots a_{i-1} b a_{i+1} \ldots a_n\omega + a_1 \ldots a_{i-1} c a_{i+1} \ldots a_n\omega. \quad (6)$$

Отсюда следует, как обычно, что $a_1 \ldots a_n\omega = 0$, если хотя бы один из элементов $a_1, \ldots, a_n$ равен нулю; уже это свойство само много сильнее условия (5).

Сделаем еще один шаг в сторону теории колец, а именно, выделим такие дистрибутивные Ω-группы, аддитивные группы которых а б е л е в ы, а все мультиоператоры из Ω не менее чем б и н а р н ы. Это образование называется *мультиоператорным* Ω-*кольцом*. Параллельно вводится понятие *мультиоператорной линейной* Ω-*алгебры* над полем P; именно, в качестве аддитивной группы берется векторное пространство над полем P, а мультиоператоры из Ω

удовлетворяют не только условию дистрибутивности (6), но и условию: если $\omega \in \Omega_n$, $\alpha \in P$, то для $i = 1, \ldots, n$

$$a_1 \ldots a_{i-1} (\alpha a_i) a_{i+1} \ldots a_n\omega = \\ = \alpha (a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n\omega).$$

Можно утверждать уже, что именно в этой общности следует рассматривать вопросы, относящиеся к произвольным неассоциативным кольцам и неассоциативным линейным алгебрам (см. обзор А. Г. Куроша, Успехи матем. наук 24 : 1 (1969)).