§ 15. КОЛЬЦОИДЫ

В этом параграфе будет введен еще один тип алгебр, более широкий, чем рассмотренный выше класс дистрибутивных кольцоидов над абелевыми алгебрами, но не менее естественный. Абелевы алгебры появились у нас потому, что мы хотели обеспечить суммируемость гомоморфизмов произвольной алгебры сигнатуры Ω в данную алгебру. Эта потребность отпадает, однако, если мы будем рассматривать не гомоморфизмы, а произвольные отображения.

Именно, пусть дана алгебра A сигнатуры Ω. Рассмотрим множество всевозможных отображений (не только гомоморфизмов!) алгебры G сигнатуры Ω в алгебру A. Определяя для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$: $G \to A$ отображение $\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega$ равенством (1) из § 14, а для любого $\omega \in \Omega_0$ отображение φ_ω равенством (2) из § 14, мы превращаем множество всех отображений G в A в алгебру сигнатуры Ω. Из определения операций над отображениями сейчас же следует, что в этой алгебре отображений G в A выполняются все тождества, справедливые в A, т. е. эта алгебра принадлежит к многообразию (Ω, Λ), если в нем содержится алгебра A.

В частности, все преобразования алгебры A многообразия (Ω, Λ) составляют по указанным операциям алгебру этого же многообразия — алгебру преобразований алгебры A. С другой стороны, они составляют полугруппу по умножению преобразований — симметрическую полугруппу на множестве A. При этом умножение преобразований связано с операциями из Ω законами дистрибутивности на втором месте: для любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и любых преобразований $\psi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$

$$\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_n\omega) = (\psi\varphi_1) \ldots (\psi\varphi_n)\omega; \tag{1}$$

для любого $\omega \in \Omega_0$ и любого преобразования ψ

$$\psi\varphi_\omega = \varphi_\omega. \tag{2}$$

Действительно, при выводе формул (5) и (7) из § 14 (в отличие от формул (6) и (8)) мы на самом деле не использовали того, что рассматриваемые преобразования являются эндоморфизмами.

Полученное образование называется *симметрическим* (Ω, Λ)-*кольцоидом* на алгебре A в соответствии со следующим общим определением:

Алгебра G, сигнатура которой состоит из Ω и еще одного бинарного умножения, называется *кольцоидом над алгеброй многообразия* (Ω, Λ) или (Ω, Λ)-*кольцоидом*, если G, рассматриваемая как алгебра сигнатуры Ω, содержится в многообразии (Ω, Λ), а по умножению G является полугруппой, и если умножение связано с операциями из Ω законами дистрибутивности на втором месте. Операции из Ω называются *аддитивными операциями* кольцоида G, а G как алгебра сигнатуры Ω — *аддитивной алгеброй* кольцоида. Если законы дистрибутивности для умножения относительно операций из Ω выполняются и на первом месте (ср. (6) и (8) из § 14), то кольцоид называется *дистрибутивным*.

Докажем следующую теорему Я. В. Хиона (Тр. Моск. матем. о-ва **14** (1965), 3—47), хорошо оправдывающую понятие кольцоида:

Всякий (Ω, Λ)-*кольцоид* G *изоморфно вкладывается в симметрический* (Ω, Λ)-*кольцоид* S *на некоторой алгебре* H *многообразия* (Ω, Λ). *В качестве алгебры* H *можно взять, например, алгебру преобразований аддитивной алгебры* G^+ *кольцоида* G.

Доказательство. Пусть H выбрано так, как указано в формулировке теоремы. Условимся обозначать умножение в кольцоидах G и S символом $\circ$ для того, чтобы не смешивать его с применением преобразований.

Среди преобразований алгебры G^+ (т. е. множества G) имеются следующие постоянные преобразования c_g, $g \in G$: для всякого $x \in G$

$$xc_g = g. \tag{3}$$

Множество C всех постоянных преобразований является подалгеброй алгебры H. Действительно, для всякого $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, и всяких $x, a_1, \ldots, a_n \in G$ будет, ввиду (1) из § 14 и (3),

$$xc_{a_1 \ldots a_n\omega} = a_1 \ldots a_n\omega = (xc_{a_1}) \ldots (xc_{a_n})\,\omega = \\ = x\,(c_{a_1} \ldots c_{a_n}\omega),$$

откуда

$$c_{a_1 \ldots a_n \omega} = c_{a_1} \ldots c_{a_n} \omega. \tag{4}$$

С другой стороны, если операция $\omega \in \Omega_0$ отмечает в G элемент 0_ω, то для отмечаемого ею в H элемента φ_ω будет, ввиду (2) из § 14, $x\varphi_\omega = 0$ для всех $x \in G$, откуда, ввиду (3),

$$\varphi_\omega = c_{0_\omega}. \tag{5}$$

Сопоставим каждому элементу $a \in G$ элемент $s_a \in S$, определяемый как преобразование множества H, следующим образом:
если $h \in C$, $h = c_g$, то

$$hs_a = c_{g \circ a}; \tag{6}$$

если же $h \notin C$, то

$$hs_a = c_a. \tag{7}$$

Если $a, b \in G$ и $a \neq b$, то $s_a \neq s_b$. Действительно, в этом случае найдется преобразование h множества G, не принадлежащее к C (например, перестановка a и b), и, по (7),

$$hs_a = c_a, \quad hs_b = c_b,$$

но $c_a \neq c_b$.

Полученное вложение G в S является мономорфизмом кольцоидов. Именно, если $\omega \in \Omega_n$, $n \geqslant 1$, то для любых $a_1, \ldots, a_n \in G$

$$s_{a_1 \ldots a_n \omega} = s_{a_1} \ldots s_{a_n} \omega.$$

В самом деле, если $h = c_g$, то, применяя (6), (1), (4), снова (6), а затем (1) из § 14, получаем:

$$hs_{a_1 \ldots a_n \omega} = c_{g \circ (a_1 \ldots a_n \omega)} = \\ = c_{g \circ a_1} \ldots c_{g \circ a_n} \omega = (hs_{a_1}) \ldots (hs_{a_n}) \omega = \\ = h (s_{a_1} \ldots s_{a_n} \omega).$$

Если же $h \notin C$, то, применяя (7), (4), снова (7), а затем

(1) из § 14, также получаем:

$$hs_{a_1\ldots a_n\omega} = c_{a_1\ldots a_n\omega} = c_{a_1}\ldots c_{a_n}\omega =$$
$$= (hs_{a_1})\ldots(hs_{a_n})\,\omega = h\,(s_{a_1}\ldots s_{a_n}\omega).$$

Далее, если операция $\omega \in \Omega_0$ отмечает в G элемент 0_ω, то s_{0_ω} будет элементом, отмеченным этой операцией в S. В самом деле, если $h = c_g$, то, применяя (6) и (2), получаем

$$hs_{0_\omega} = c_{g\circ 0_\omega} = c_{0_\omega},$$

если же $h \notin C$, то, по (7), снова

$$hs_{0_\omega} = c_{0_\omega}.$$

Теперь остается сослаться на (5), а затем на (2) из § 14.

Наконец, для любых $a,\ b \in G$

$$s_{a\circ b} = s_a \circ s_b.$$

В самом деле, если $h = c_g$, то, используя (6), ассоциативность умножения в кольцоиде, снова (6) и определение умножения преобразований, получаем:

$$hs_{a\circ b} = c_{g\circ a\circ b} = (hs_a)\,s_b = h\,(s_a \circ s_b).$$

Если же $h \notin C$, то, ввиду (7) и (6), снова

$$hs_{a\circ b} = c_{a\circ b} = (hs_a)\,s_b = h\,(s_a \circ s_b).$$

Теорема доказана.

Еще в тридцатых годах началось изучение кольцоидов над группами, т. е. *почти-колец*. Из того, что было сказано выше, можно сделать заключение, что понятие почти-кольца является столь же естественным объектом изучения, как и много более узкое понятие ассоциативного кольца. Это же справедливо и для двух промежуточных случаев — для дистрибутивных почти-колец (дистрибутивность выполняется на обоих местах, но аддитивная группа может быть неабелевой) и для почти-колец с абелевой аддитивной группой (хотя дистрибутивность на первом месте может не выполняться).

Давно изучаются и *полукольца*, т. е. кольцоиды над полугруппами. Рассматривались и *неокольца*, т. е. кольцоиды над лупами, а также кольцоиды над n-группами и т. д. Весьма интересны и давно изучаются кольцоиды над кольцами; для них конкурируют несколько названий, в том числе *менгеровы алгебры*. Значение их основано на том, что симметричная менгерова алгебра на кольце R — это просто совокупность всюду определенных функций одного переменного из R в R, рассматриваемая как кольцо относительно операций сложения и умножения функций (в смысле сложения и умножения значений функций при каждом значении переменного, ср. (1) из § 14) и в то же время как полугруппа относительно суперпозиции функций:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)).$$

По существу эти же слова применимы, понятно, и к случаю симметрического кольцоида на алгебре любого многообразия (Ω, Λ).

В литературе уже появились различные обобщения кольцоидов. Так, рассматриваются *неассоциативные* (Ω, Λ)-*кольцоиды* — по умножению лишь группоид (в частности, квазигруппа), а не полугруппа.

Рассматриваются и *n-арные* (Ω, Λ)-*кольцоиды*. В частности, симметрические n-арные кольцоиды, $n > 2$, возникают так же, как появились выше симметрические бинарные кольцоиды — нужно только рассматривать на данной алгебре функции от $n-1$ переменного, а не от одного переменного. Пока преимущественно изучались n-арные кольцоиды над кольцами; началось изучение их и над мультиоператорными группами.