§ 16. СТРУКТУРЫ

Введем, наконец, еще один класс универсальных алгебр, занимающий в общей алгебре весьма заметное место. Напомним, что множество S называется *частично упорядоченным*, если на S задано бинарное отношение $\leqslant$, т. е. для некоторых упорядоченных пар $a, b \in S$ положено $a \leqslant b$, причем это отношение должно быть рефлексивным, транзитивным и антисимметричным, т. е. для всех $a, b, c \in S$

$a \leqslant a$,

если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$,

если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$.

Напомним также, что отношение $\geqslant$ обратно отношению $\leqslant$, т. е. $b \geqslant a$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$.

Частично упорядоченное множество S называется *структурой* (употребляется также термин «решетка»), если оно удовлетворяет следующим двум условиям.

I_1. Для всякой пары элементов $a, b \in S$ в S существует такой элемент $c = a \cap b$, *пересечение* элементов a и b, что $c \leqslant a$, $c \leqslant b$, причем если некоторый элемент c' также обладает свойствами $c' \leqslant a$, $c' \leqslant b$, то $c' \leqslant c$.

I_2. Для всякой пары элементов $a, b \in S$ в S существует такой элемент $d = a \cup b$, *объединение* элементов a и b, что $d \geqslant a$, $d \geqslant b$, причем если некоторый элемент d' также обладает свойствами $d' \geqslant a$, $d' \geqslant b$, то $d' \geqslant d$.

Из этого определения следует, что и пересечение $a \cap b$, и объединение $a \cup b$ элементов a и b определены в структуре S однозначно. Всякая структура является, следовательно, универсальной алгеброй с двумя бинарными операциями $\cap$ и $\cup$. Исходная частичная упорядоченность в структуре S может быть задана при помощи любой из этих операций. Именно, очевидно, что для элементов $a, b \in S$ тогда и только тогда $a \leqslant b$, когда $a \cap b = a$ (а также когда $a \cup b = b$).

Структуры как алгебры с бинарными операциями $\cap$ и $\cup$ составляют многообразие, задаваемое тождествами

II_1. $x \cap x = x, x \cup x = x$;

II_2. $x \cap y = y \cap x, \quad x \cup y = y \cup x$;

II_3. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$,
$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$;

II_4. $x \cap (x \cup y) = x$, $x \cup (x \cap y) = x$.

В самом деле, выполнение в структуре S тождеств II_1 и II_2 очевидно. Проверим II_3, хотя бы для пересечения. Для любых a, b, $c \in S$ будет, ввиду I_1,

$$(a \cap b) \cap c \leqslant a \cap b \leqslant a,$$
$$(a \cap b) \cap c \leqslant a \cap b \leqslant b,$$
$$(a \cap b) \cap c \leqslant c,$$

откуда, снова по I_1,

$$(a \cap b) \cap c \leqslant b \cap c,$$
$$(a \cap b) \cap c \leqslant a \cap (b \cap c).$$

Аналогично

$$a \cap (b \cap c) \leqslant (a \cap b) \cap c,$$

а поэтому имеет место II_3.

Проверим теперь хотя бы первое из тождеств II_4. Ввиду I_1

$$a \cap (a \cup b) \leqslant a,$$

но $a \leqslant a$ и, по I_2, $a \leqslant a \cup b$, откуда, по I_1,

$$a \leqslant a \cap (a \cup b);$$

отсюда следует II_4.

Пусть теперь S — алгебра с операциями $\cap$, $\cup$, удовлетворяющими тождествам II_1 — II_4. Покажем, что для a, $b \in S$ равенства

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \tag{1}$$

одновременно выполняются или не выполняются. Действительно, если $a \cap b = a$, то, по II_2 и II_4,

$$a \cup b = (a \cap b) \cup b = b;$$

если же $a \cup b = b$, то, по II_4,

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a.$$

Подмножества любого множества составляют структуру относительно частичной упорядоченности по теоретико-множественному включению. Для нас особенно важно, что можно говорить *о структуре подалгебр* любой универсальной алгербы. G. Это будет множество всех подалгебр алгебры G, если в G нет таких подалгебр A, B, пересечение которых пусто, в противном же случае указанное множество пополняется пустым подмножеством. Частичная упорядоченность подалгебр берется по теоретико-множественному включению. Пересечение $A \cap B$ двух подалгебр есть их теоретико-множественное пересечение, а роль объединения $A \cup B$ выполняет подалгебра $\{A, B\}$, порожденная теоретико-множественным объединением подалгебр A, B (см. § 1).

Если G — группа, то для любых ее нормальных делителей A, B подгруппы $A \cap B$ и $\{A, B\}$ сами будут, как известно, нормальными делителями в G, причем $\{A, B\} = AB$, т. е. всякий элемент из $\{A, B\}$ может быть хотя бы одним способом записан в виде произведения ab, $a \in A$, $b \in B$. Нормальные делители произвольной группы составляют, следовательно, подструктуру в структуре всех подгрупп этой группы.

Структура S называется *дедекиндовой* (или *модулярной*), если для любых a, b, $c \in S$, удовлетворяющих условию $a \geqslant b$, выполняется равенство

$$a \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c). \tag{2}$$

Структура нормальных делителей произвольной группы является дедекиндовой.

Действительно, пусть в группе G даны нормальные делители A, B и C, причем $A \supseteq B$. Нужно доказать, что

$$A \cap BC = B (A \cap C). \tag{3}$$

Так как $B \subseteq A$ и $B \subseteq BC$, то B содержится в левой части равенства (3). Там же содержится и $A \cap C$, так как $C \subseteq BC$. Отсюда следует, что вся правая часть равенства (3) содержится в его левой части. С другой стороны, любой элемент, содержащийся в нормальном делителе $A \cap BC$, является элементом $a \in A$, допускающим запись $a = bc$, где $b \in B$, $c \in C$. Отсюда

$c = b^{-1}a \in A$, так как $B \subseteq A$, т. е. $c \in (A \cap C)$, откуда

$$a = bc \in B\,(A \cap C).$$

Этим доказано, что левая часть равенства (3) содержится в свою очередь в его правой части.

Легко показать, что структура всех подгрупп некоммутативной группы в общем случае не будет дедекиндовой.

Дедекиндовы структуры составляют многообразие структур: структура S тогда и только тогда дедекиндова, если в ней выполняется тождество

$$x \cap [(x \cap y) \cup z] = (x \cap y) \cup (x \cap z). \qquad (4)$$

Действительно, если структура S дедекиндова, то (4) следует из (2), так как $a \geqslant a \cap b$. Обратно, если в структуре S выполняется тождество (4), то для $a \geqslant b$ выполняется равенство (2), так как в этом случае $a \cap b = b$.

Еще более узким является многообразие *дистрибутивных* структур, т. е. структур, в которых выполняется тождество

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z). \qquad (5)$$

В самом деле, всякая дистрибутивная структура является дедекиндовой, так как для таких элементов a, b, c структуры, что $a \geqslant b$, т. е. $a \cap b = b$, из (5) следует (2). С другой стороны, структура подгрупп прямой суммы двух циклических групп второго порядка дедекиндова, но не дистрибутивна.

Для структур (в отличие от колец, например) *тождество* (5) *равносильно двойственному ему тождеству*

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z). \qquad (6)$$

Действительно, применяя (5), а также $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_4$, получаем:

$$a \cup (b \cap c) = [a \cup (a \cap c)] \cup (b \cap c) =$$
$$= a \cup [(a \cap c) \cup (b \cap c)] = a \cup [(a \cup b) \cap c] =$$
$$= [(a \cup b) \cap a] \cup [(a \cup b) \cap c] = (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

Двойственные рассмотрения позволяют вывести (5) из (6).

Легко показать, что структура подмножеств любого множества дистрибутивна,— проверка в этом случае тождества (5) (или (6)) не представляет никаких затруднений. Существует теорема Стоуна, по которой всякая дистрибутивная структура изоморфно вкладывается в структуру подмножеств некоторого множества (Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37—111).

Единицей некоторой структуры S называется такой элемент 1, что для любого $a \in S$ выполняется неравенство $a \leqslant 1$. Нулем структуры S называется такой элемент 0, что для любого $a \in S$ будет $a \geqslant 0$. Если структура обладает единицей (или нулем), то этот элемент определен однозначно.

Если структура S обладает единицей и нулем, то элемент $b \in S$ называется *дополнением* к элементу $a \in S$, если

$$a \cap b = 0, \quad a \cup b = 1.$$

В общем случае элемент может иметь много различных дополнений, однако в *дистрибутивной структуре с единицей и нулем всякий элемент может обладать не больше чем одним дополнением*, так как если структура S дистрибутивна, то в ней для любых элементов a, b, c из

$$a \cap c = b \cap c, \quad a \cup c = b \cup c$$

следует $a = b$. Действительно,

$$a = a \cup (a \cap c) = a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) =$$
$$= (a \cup b) \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c) =$$
$$= b \cup (b \cap c) = b.$$

Обозначим дополнение к элементу a дистрибутивной структуры с единицей и нулем через $\bar{a}$. Очевидны или легко проверяются следующие равенства:

$$\bar{1} = 0, \ \bar{0} = 1, \ \bar{\bar{a}} = a, \ \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}, \ \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}.$$

Проверим хотя бы последнее из них:

$$(a \cup b) \cap (\bar{a} \cap \bar{b}) = [a \cap (\bar{a} \cap \bar{b})] \cup [b \cap (\bar{a} \cap \bar{b})] = 0 \cup 0 = 0,$$

$$(a \cup b) \cup (\bar{a} \cap \bar{b}) = [(a \cup b) \cup \bar{a}] \cap [(a \cup b) \cup \bar{b}] = 1 \cap 1 = 1.$$

Дистрибутивная структура с единицей и нулем, в которой каждый элемент обладает дополнением, называется *булевой структурой* (или *булевой алгеброй*). Структура всех подмножеств любого множества M является на самом деле булевой: роль единицы играет само множество M, роль нуля — пустое подмножество, дополнением к подмножеству A служит теоретико-множественное дополнение $M \setminus A$. Доказательство сформулированной выше теоремы Стоуна позволяет утверждать, что всякая булева структура изоморфно вкладывается (как алгебра сигнатуры ($\cap$, $\cup$, $-$, 1, 0)) в булеву структуру подмножеств некоторого множества.

С другой стороны, многообразие булевых структур оказывается эквивалентным одному специальному многообразию колец. Именно, ассоциативное кольцо R с единицей 1 называется *булевым кольцом*, если все его элементы идемпотентны, т. е. для всех $a \in R$

$$a^2 = a. \tag{7}$$

Всякое булево кольцо R коммутативно и удовлетворяет тождеству

$$2x = 0. \tag{8}$$

Действительно, для любых $a, b \in R$ из (7) следует

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = \\ = a + ab + ba + b,$$

откуда

$$ab + ba = 0. \tag{9}$$

Полагая здесь $b = a$ и учитывая (7), мы получаем (8), т. е. $x = -x$, а поэтому (9) можно переписать в виде

$$ab - ba = 0,$$

т. е. $ab = ba$.

Всякую булеву структуру можно превратить в булево кольцо, если положить

$$a + b = (a \cap \bar{b}) \cup (\bar{a} \cap b), \quad ab = a \cap b. \tag{10}$$

С другой стороны, всякое булево кольцо можно превратить в булеву структуру, если положить

$$a \cup b = a + b + ab, \quad a \cap b = ab. \tag{11}$$

Эти переходы обратны друг другу. При них нуль и единица структуры совпадают соответственно с нулем и единицей кольца, $-a = a$ ввиду (8), а на основании первого из равенств (10)

$$\bar{a} = a + 1.$$

Доказательство всех этих утверждений проходит при помощи канительной, но не сложной проверки. Стоит учесть при этом, что определение сложения из (10) можно записать, используя (6), также в виде

$$a + b = (a \cup b) \cap (\bar{a} \cup \bar{b}).$$

Отметим, что операция $a \cup b$ из (11) совпадает, ввиду (8), с присоединенным умножением в рассматриваемом кольце (см. § 10).