§ 18. КОНГРУЕНЦИИ

Применим сказанное выше к случаю $H = G$, т. е. рассмотрим соответствия $G\rho G$ алгебры G с самой собой (т. е., короче, *соответствия алгебры* G). Они составляют, как мы знаем, полную структуру, притом компактнопорожденную, так как это структура всех подалгебр декартова квадрата $G \times G$. Известна теорема Искандера (Изв. АН СССР, серия матем. 29 (1965), 1273—1282), по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна структуре всех соответствий некоторой алгебры; эта теорема обобщает, очевидно, отмеченную в предшествующем параграфе теорему Биркгофа — Фринка.

С другой стороны, произведение соответствий вида $G\rho G$ всегда определено и поэтому соответствия алгебры G составляют полугруппу по умножению; эта *полугруппа соответствий* обладает единицей $\varepsilon = \varepsilon_G$. Наконец, в множестве соответствий алгебры G существует инволюция, а именно переход к инверсному соответствию ρ^{-1}.

Совокупность соответствий алгербы G, рассматриваемых с их упорядоченностью, умножением и переходом к инверсному соответствию,— связи между этими отношениями и операциями указаны в предшествующем параграфе,— назовем *связкой соответствий* алгебры G.

Связка соответствий содержит в себе многое из того, что приходится использовать при изучении алгебры G. Так, *структура подалгебр алгебры* G *изоморфна подструктуре структуры ее соответствий, состоящей из всех таких соответствий* ρ, *что* $\rho \leqslant \varepsilon$. Именно, такими соответствиями будут тождественные автоморфизмы всевозможных подалгебр алгебры G и только они — последнее потому, что для соответствия ρ, удовлетворяющего условию $\rho \leqslant \varepsilon$, обе проекции совпадают, т. е. являются одной и той же подалгеброй. С другой стороны, эндоморфизмы алгебры G — это такие ее соответствия ρ, что $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon$, $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon$, а так как произведение гомоморфизмов совпадает, как мы знаем, с их произведением как соответствий, то *полугруппа эндоморфизмов алгебры* G *будет подполугруппой полугруппы ее соответствий.*

При изучении алгебр очень важную роль играет еще один тип соответствий. Именно, соответствие π алгебры G называется *конгруенцией*, если, как бинарное отношение, оно является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно, иными словами, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\pi \geqslant \varepsilon, \quad \pi^{-1} = \pi, \quad \pi\pi \leqslant \pi. \tag{1}$$

Для конгруенции π будет даже

$$\pi\pi = \pi, \tag{2}$$

так как из $\pi \geqslant \varepsilon$ следует, по (1) из § 17, $\pi\pi \geqslant \pi$.

Если в алгебре G заданы конгруенции π_i, $i \in I$, то их пересечение в структуре соответствий само будет конгруенцией.

В самом деле, докажем справедливость условий (1) для конгруенции $\pi = \bigcap\limits_{i \in I} \pi_i$. Справедливость первого из этих условий очевидна, второе следует из равенства (4) предшествующего параграфа. Пусть, наконец, элементы a, $c \in G$ таковы, что $a(\pi\pi)c$. Тогда существует такой элемент $b \in G$, что $a\pi b$ и $b\pi c$, а поэтому для всех $i \in I$ будет $a\pi_i b$, $b\pi_i c$. Отсюда $a(\pi_i\pi_i)c$, т. е., так как для π_i выполняется последнее из условий (1), то $a\pi_i c$, $i \in I$, а поэтому $a\pi c$.

С другой стороны, объединение конгруенций в структуре соответствий не обязано быть конгруенцией, как показывает следующий тривиальный пример. Рассмотрим множество M, в котором задана тождественная унарная операция

$$x\omega = x \text{ для всех } x \in M.$$

Всякая эквивалентность в множестве M будет конгруенцией полученной алгебры. Возьмем две конгруенции этой алгебры π_1 и π_2. Ввиду тождественности операции ω их объединение в структуре соответствий совпадает с их теоретико-множественным объединением как подмножеств множества $M \times M$. Последнее не обязано, однако, быть конгруенцией, так как может не удовлетворять условию транзитивности: если элементы

$a, b, c \in M$ таковы, что $a\pi_1 b$, $b\pi_2 c$, но a и c лежат в разных классах как по π_1, так и по π_2,— эта ситуация может быть реализована, если M содержит не менее трех элементов,— то a и c не находятся в отношении $\pi_1 \cup \pi_2$, хотя $a(\pi_1 \cup \pi_2) b$, $b(\pi_1 \cup \pi_2) c$.

Множество всех конгруенций произвольной алгебры G частично упорядочено как подмножество структуры соответствий, содержит единицу этой полной структуры, т. е. соответствие $G \times G$, и, наконец, замкнуто относительно пересечений. Оно само будет, следовательно, полной структурой. Эта *структура конгруенций* алгебры G не обязана быть, как мы знаем, подструктурой структуры соответствий.

Легко показать, что структура конгруенций всякой алгебры является компактнопорожденной. Отметим теорему Грецера — Шмидта, по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна структуре конгруенций некоторой алгебры (Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 34—59).

Конгруенции данной алгебры не всегда составляют подполугруппу полугруппы ее соответствий, так как произведение двух конгруенций может не быть конгруенцией. Докажем следующую теорему:

Произведение $\pi_1\pi_2$ двух конгруенций π_1 и π_2 алгебры G тогда и только тогда будет конгруенцией, если конгруенции π_1 и π_2 перестановочны, т. е. $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Действительно, если $\pi_1\pi_2$ является конгруенцией, то, используя свойства конгруенций (1), а также (3) из предшествующего параграфа, получаем:

$$\pi_1\pi_2 = (\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_2\pi_1.$$

Обратно, если $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$, то соответствие $\pi_1\pi_2$ обладает всеми свойствами (1), входящими в определение конгруенции. Именно, ввиду (1) из § 17,

$$\pi_1\pi_2 \geqslant \pi_1\varepsilon \geqslant \varepsilon\varepsilon = \varepsilon;$$

далее, ввиду (3) из § 17,

$$(\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_2\pi_1 = \pi_1\pi_2;$$

наконец, снова ввиду (1) из § 17,

$$(\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_2) = (\pi_1\pi_1)(\pi_2\pi_2) \leqslant \pi_1\pi_2.$$

Для некоторых классов алгебр, в том числе для групп, колец и вообще мультиоператорных групп, может быть доказана перестановочность всех их конгруенций. Структуры конгруенций алгебр, обладающих этим свойством, являются дедекиндовыми. Можно доказать даже несколько больше.

Полная структура называется *вполне дедекиндовой*, если для любых ее элементов a_i, b_i, $i \in I$, удовлетворяющих условию $a_i \geqslant b_j$ при $i \neq j$, имеет место равенство

$$(\bigcap_{i \in I} a_i) \cap (\bigcup_{i \in I} b_i) = \bigcup_{i \in I} (a_i \cap b_i). \tag{3}$$

Всякая вполне дедекиндова структура S является дедекиндовой.

В самом деле, пусть в S взяты элементы a, b, c, причем $a \geqslant b$. Положим

$$a_1 = a, \quad a_2 = a \cup c, \quad b_1 = c, \quad b_2 = b.$$

Тогда $a_1 \geqslant b_2$ по предположению и $a_2 \geqslant b_1$ по определению операции объединения. Поэтому должно выполняться равенство (3), т. е.

$$(a_1 \cap a_2) \cap (b_1 \cup b_2) = (a_1 \cap b_1) \cup (a_2 \cap b_2)$$

или

$$a \cap (c \cup b) = (a \cap c) \cup [(a \cup c) \cap b],$$

а так как $a \geqslant b$, то мы получаем равенство (2) из § 16. Дедекиндовость структуры S доказана.

Справедлива следующая теорема Двингера (Proc. Neder. Ac. 20 (1958), 70—76): Если в алгебре G конгруенции перестановочны, то структура конгруенций этой алгебры вполне дедекиндова.

Значение конгруенций для теории универсальных алгебр определяется, как известно, следующим.

Если π — конгруенция алгебры G сигнатуры Ω, то в множестве G/π непересекающихся классов, на которые разбивается G конгруенцией π, естественным образом определяются все операции из Ω. Полученная *фактор-алгебра* G/π оказывается эпиморфным образом алгебры G при естественном эпиморфизме, сопоставляющем каждому элементу из G тот класс конгруенции π, к которому этот элемент принадлежит. Обратно, любой эпиморфизм $\varphi\colon G \to G'$ определяет в алгебре G конгруенцию π, классами которой служат полные прообразы элементов алгебры G', причем существует такой изоморфизм ψ алгебры G' на фактор-алгебру G/π, что произведение $\varphi\psi$ совпадает с естественным эпиморфизмом G на G/π.