§ 2. ГРУППЫ

Известно, что *группа* есть множество с одним ассоциативным бинарным умножением, причем левое и правое деления всегда выполнимы и однозначны. Обозначим решение уравнения $az = b$ через $b \setminus a$, а решение уравнения $ta = b$ — через b / a. Можно считать, что это еще две бинарные операции, определенные в группе. Умножение и эти две новые операции подчинены тождествам:

$$\text{(Ia)} \quad (xy)z = x(yz),$$

$$\text{(Ib)} \quad x(y \setminus x) = y, \qquad \text{(Ib}'\text{)} \quad (y/x)x = y,$$

$$\text{(Ic)} \quad xy \setminus x = y, \qquad \text{(Ic}'\text{)} \quad yx/x = y.$$

Последние два тождества как раз выражают однозначность обратных операций, так как если, например, $ac = b$, то по (Ic)

$$b \setminus a = ac \setminus a = c.$$

Класс всех групп оказался многообразием относительно трех бинарных операций ab, $b \setminus a$, b / a. Известно, однако, что понятие группы можно определить также при помощи бинарного умножения, унарной операции перехода к правому обратному элементу a^{-1} и нульарной операции, фиксирующей правую единицу 1, причем снова получаем многообразие, так как указанные операции подчиняются тождествам

$$\text{(IIa)} \quad (xy)z = x(yz),$$

$$\text{(IIв)} \quad xx^{-1} = 1,$$

$$\text{(IIc)} \quad x \cdot 1 = x.$$

Равносильность этих двух определений группы общеизвестна. Напомним лишь, что при переходе от первого определения ко второму умножение сохраняется и принимается, что

$$1 = a \setminus a, \quad a^{-1} = 1 \setminus a.$$

При этом приходится доказывать, что для любых a и b

$$b \setminus b = a \setminus a,$$

— лишь в этом случае 1 будет нульарной операцией. В самом деле, используя, помимо ассоциативности умножения, последовательно аксиомы (Ib′), (Ib), (Ib′) и (Ic), получаем

$$b \setminus b = [(b / a)a] \setminus b = [(b / a)a(a \setminus a)] \setminus b = \\ = [b\,(a \setminus a)] \setminus b = a \setminus a.$$

Проверка аксиом (II) проходит теперь без затруднений.

При переходе от второго определения к первому сохраняется умножение и принимается, что

$$b \setminus a = a^{-1}b, \quad b / a = ba^{-1}.$$

Проверка аксиом (I) проходит без затруднений после того, как будет доказано, что для всех a

$$1 \cdot a = a, \; a^{-1}a = 1.$$

Действительно, используя, помимо ассоциативности умножения, в первом случае последовательно аксиомы (IIc), (IIb), (IIb), (IIc), (IIb), (IIb), (IIc), а во втором — (IIc), (IIc), (IIb), (IIc), (IIb), получаем

$$1 \cdot a = 1 \cdot a \cdot 1 = 1 \cdot a \cdot a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1 \cdot 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = \\ = 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = a \cdot a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = a \cdot 1 = a,$$

$$a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot a \cdot 1 = a^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = \\ = a^{-1} \cdot 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1.$$

Мы видим, что один и тот же класс алгебраических объектов может задаваться как многообразие универсальных алгебр многими разными способами. Это приводит к понятию эквивалентности многообразий.

Понятие группы может быть определено и многими другими способами. Интересно то, что его можно определить, в частности, при помощи всего одной бинарной операции, впрочем, неассоциативной, причем оказывается, что класс групп является некоторым многообразием группоидов. В этом определении используется уже встречавшаяся нам операция b / a. Обозначим ее через ω, т. е.

$$ba\omega = ba^{-1}.$$

Операции, используемые во втором из указанных выше определений группы, записываются через операцию ω следующим образом (используется бесскобочная запись, т. е. символ ω всегда применяется к двум предшествующим элементам группы):

$$1 = aa\omega,\ a^{-1} = aa\omega a\omega,\ ab = abb\omega b\omega\omega.$$

Тождества, определяющие группу, получим, переписав должным образом тождества (II). Впрочем, как показали Х и г м э н и Б. Н е й м а н (Publ. Math. **2** (1952), 215—221), рассматриваемое многообразие можно задать одним единственным тождеством, а именно

$$xxx\omega y\omega z\omega xx\omega z\omega\omega\omega = y.$$

Любопытно, что класс групп не является многообразием полугрупп (т. е. ассоциативных группоидов).

Отметим, что класс абелевых групп также будет многообразием — достаточно к набору тождеств (I) (или (II)) добавить тождество коммутативности умножения

$$xy = yx.$$

Этот класс будет многообразием и относительно указанной выше операции $ba\omega = ba^{-1}$, причем это многообразие также может быть задано одним единственным тождеством, а именно

$$xyz\omega yx\omega\omega\omega = z.$$