§ 4. ИНВЕРСНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим теперь один класс алгебр, промежуточный между классами групп и полугрупп, а именно класс инверсных полугрупп. Введем сперва вспомогательные понятия. Именно, назовем полугруппу *регулярной*, если для всякого ее элемента a существует хотя бы один такой элемент x, что

$$axa = a. \tag{1}$$

Назовем, далее, элементы a и b полугруппы G *обратными* друг другу, если

$$aba = a, \ bab = b.$$

Оказывается, что *регулярную полугруппу можно определить как полугруппу, в которой всякий элемент обладает обратным элементом, не обязательно единственным.* Действительно, если $axa = a$, то положим $b = xax$. Тогда

$$aba = (axa)xa = axa = a,$$
$$bab = x(axa)xax = x(axa)x = xax = b,$$

т. е. b является обратным для a.

В случае групп элементы, обратные друг другу в указанном полугрупповом смысле, будут в точности обратными в обычном (групповом) смысле, причем всякий элемент обладает единственным обратным.

Полугруппа называется *инверсной*, если всякий ее элемент a обладает обратным элементом, притом единственным; обозначим его через a^{-1}, так что

$$aa^{-1}a = a, \ a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}.$$

Заметим, что требование единственности обратного элемента в этом случае, в отличие от случая групп, необходимо специально накладывать.

Класс инверсных полугрупп содержит в себе класс всех групп и, как мы скоро узнаем, шире последнего.

Понятие инверсной полугруппы допускает и иные определения. Напомним, что элемент a некоторой полугруппы (или группоида) называется *идемпотентом*, если $a^2 = a$. Отметим, что регулярная] полугруппа непременно обладает идемпотентами: если выполняется равенство (1), то элемент ax будет идемпотентом, так как

$$(ax)^2 = (axa)x = ax.$$

Оказывается, что *инверсные полугруппы — это такие регулярные полугруппы, в которых любые два идемпотента перестановочны.*

В самом деле, пусть дана инверсная полугруппа G. Ясно, что она регулярна.

Докажем сначала, что в инверсной полугруппе произведение идемпотентов также будет идемпотентом. Пусть a и b — два идемпотента, $a^2 = a$, $b^2 = b$. Положим

$$s = (ab)^{-1},\ t = sa.$$

Тогда

$$(ab)t(ab) = absa^2b = (ab)s(ab) = ab,$$

$$t(ab)t = sa^2bsa = s(ab)sa = sa = t.$$

Поэтому, ввиду единственности обратного элемента, $t = (ab)^{-1}$, т. е. $sa = s$. Аналогично, полагая $t' = bs$, получим $bs = s$. Отсюда

$$s^2 = (sa)(bs) = s(ab)s = s,$$

т. е. элемент s идемпотентен. Однако идемпотентный элемент служит для самого себя обратным, единственным ввиду инверсности полугруппы, а поэтому $s = ab$. Идемпотентность элемента ab доказана. Идемпотентен, следовательно, и элемент ba. Используя это, получаем:

$$(ab)(ba)(ab) = ab^2a^2b = (ab)^2 = ab,$$

$$(ba)(ab)(ba) = ba^2b^2a = (ba)^2 = ba.$$

Этим доказано, что $ba = (ab)^{-1}$. Однако элемент ab, будучи идемпотентом, совпадает со своим обратным, откуда $ab = ba$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь G—регулярная полугруппа с перестановочными идемпотентами, a — любой элемент из G, b и c — обратные элементы для a. Тогда элементы ab, ac, ba, ca будут идемпотентами и, следовательно, между собою перестановочны. Отсюда

$$b = bab = b(ac)(ab) = (bab)(ac) = bac,$$
$$c = cac = (ca)(ba)c = (ba)(cac) = bac,$$

т. е. $b = c$. Теорема доказана.

Класс инверсных полугрупп является на самом деле многообразием относительно операций ab и a^{-1}, которое задается тождествами

$$(xy)z = x(yz), \quad xx^{-1}x = x, \quad x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}.$$

Покажем теперь, что инверсная полугруппа удовлетворяет тождествам

1. $(x^{-1})^{-1} = x$.
2. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
3. $xx^{-1}yy^{-1} = yy^{-1}xx^{-1}$.

Ясно, что инверсная полугруппа регулярна и удовлетворяет аксиомам 1 и 3 (последнее потому, что элементы aa^{-1} и bb^{-1} идемпотентны и, следовательно, перестановочны). Выполняется и тождество 2, как показывают следующие равенства, в которых снова используется перестановочность идемпотентов:

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = a(bb^{-1})(a^{-1}a)b = (aa^{-1}a)(bb^{-1}b) = ab,$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab)(b^{-1}a^{-1}) = b^{-1}(a^{-1}a)(bb^{-1})a^{-1} = \\ = (b^{-1}bb^{-1})(a^{-1}aa^{-1}) = b^{-1}a^{-1}.$$

Наоборот, как показал Б. М. Шайп (сб. «Теория полугрупп и ее приложения», Саратов, вып. 1 (1965), 286—324), *регулярная полугруппа G, в которой для обратных элементов выполняются равенства* 1, 2, 3, *инверсна*. Для любого $a \in G$ будет, ввиду аксиом регулярной полугруппы, 2 и 1,

$$a^{-1} = (aa^{-1}a)^{-1} = a^{-1}(a^{-1})^{-1}a^{-1} = a^{-1}aa^{-1},$$

т. е. элементы a и a^{-1} действительно обратны друг другу.

Далее, ввиду 3,

$$a^{-1}(a^{-1})^{-1}aa^{-1} = aa^{-1}a^{-1}(a^{-1})^{-1},$$

т. е., ввиду 1,

$$a^{-1}aaa^{-1} = aa^{-1}a^{-1}a.$$

Если теперь a — идемпотент, $a^2 = a$, то, используя указанные равенства и 2, получим

$$a^{-1} = a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}aaa^{-1} = aa^{-1}a^{-1}a = a\,(aa)^{-1}a = \\ = aa^{-1}a = a.$$

Отсюда

$$aa^{-1} = aa = a.$$

Если b — любой другой идемпотент, то будет $bb^{-1} = b$, а поэтому из 3 следует перестановочность идемпотентов a и b, что и доказывает инверсность нашей полугруппы.

Покажем теперь, что понятие инверсной полугруппы на самом деле имеет право быть предметом самостоятельного изучения. Назовем *частичной подстановкой* множества M любое взаимно однозначное отображение вида $\varphi: A \to B$, где A и B — некоторые подмножества из M. К числу частичных подстановок относятся, в частности, все подстановки множества M, все подстановки любого его подмножества, а также пустая подстановка (тождественная подстановке пустого подмножества), которую обозначим через 0.

Если $\varphi: A \to B$, $\psi: C \to D$ — две частичных подстановки множества M, то их произведение $\varphi\psi$ определяется так. Если пересечение $B \cap C$ пусто, то полагаем $\varphi\psi = 0$. Если же $B \cap C$ — непустое, то обозначим через A' его прообраз при φ, через D' — его образ при ψ. Тогда $\varphi\psi: A' \to D'$, причем для любого $a' \in A'$

$$a'(\varphi\psi) = (a'\varphi)\psi.$$

Ясно, что это будет частичная подстановка. Пустая подстановка 0 играет для этого умножения роль нуля, т. е. для любой частичной подстановки φ

$$\varphi \cdot 0 = 0 \cdot \varphi = 0.$$

Для всякой частичной подстановки $\varphi: A \to B$ существует, очевидно, обратная частичная подстановка

$\varphi^{-1}\colon B \to A$, причем

$$\varphi\varphi^{-1} = \varepsilon_A, \ \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon_B,$$

где ε_A, например, есть тождественная подстановка подмножества A. Именно, если $a\varphi = b$, $a \in A$, то $b\varphi^{-1} = a$. Используя обратную частичную подстановку, мы могли бы, например, вместо A' написать выше $(B \cap C)\varphi^{-1}$.

Покажем, что умножение частичных подстановок ассоциативно. Пусть даны $\varphi\colon A \to A'$, $\psi\colon B \to B'$, $\chi\colon C \to C'$ и пусть $(\varphi\psi)\chi\colon D \to D'$, $\varphi(\psi\chi)\colon E \to E'$. Легко проверить, что

$$D = [(A' \cap B)\psi \cap C](\varphi\psi)^{-1},$$

$$E = [A' \cap (B' \cap C)\psi^{-1}]\varphi^{-1}.$$

Покажем, что $D = E$. Если $a \in D$, то $a(\varphi\psi) \in C$, а так как заведомо $a(\varphi\psi) \in B'$, то $a(\varphi\psi) \in B' \cap C$, откуда $a\varphi \in (B' \cap C)\psi^{-1}$. Вместе с очевидным $a\varphi \in A'$ это показывает, что $D \subseteq E$. Обратное включение проверяется аналогично. На полученном подмножестве отображения $(\varphi\psi)\chi$ и $\varphi(\psi\chi)$ действуют одинаково, так как оба сводятся на последовательное применение отображений φ, ψ и χ.

Полученная полугруппа регулярна, так как для любой частичной подстановки $\varphi\colon A \to B$ будет

$$\varphi\varphi^{-1}\varphi = \varepsilon_A\varphi = \varphi.$$

Эта полугруппа даже инверсна. Действительно, ее идемпотентами служат тождественные подстановки ε_A для всех подмножеств $A \subseteq M$ и, как легко проверить, только они. Действительно, если $\varphi\colon A \to B$ и $\varphi^2 = \varphi$, то, по определению умножения,

$$(B \cap A)\varphi^{-1} = A, \ (B \cap A)\varphi = B.$$

Поэтому, ввиду взаимной однозначности φ,

$$A = B \cap A = B,$$

т. е. φ является подстановкой на A, притом тождественной, так как других идемпотентов симметрическая группа не содержит. Однако для любых $A, B \subseteq M$

$$\varepsilon_A\varepsilon_B = \varepsilon_{A\cap B} = \varepsilon_B\varepsilon_A.$$

Эта инверсная полугруппа называется симметрической инверсной полугруппой на множестве M. Она не будет группой, так как мультипликативная группа не может иметь нуля, равно как и потому, что группа обладает единственным идемпотентом.

Справедлива следующая теорема В. В. Вагнера — Престона (ДАН СССР 84 (1952), 1119—1122, J. Lond. Math. Soc. 29 (1954), 411—419), параллельная теоремам 1 и 1′ из § 3:

Всякая инверсная полугруппа G изоморфно вкладывается в симметрическую инверсную полугруппу на множестве G.

Отметим сперва, что для всякого $a \in G$ будет

$$Ga = Ga^{-1}a, \tag{2}$$

где Ga означает множество всех элементов вида xa, $x \in G$. Именно, ясно, что

$$Ga^{-1}a = (Ga^{-1})a \subseteq Ga,$$

но, с другой стороны,

$$Ga = Gaa^{-1}a = (Ga)a^{-1}a \subseteq Ga^{-1}a.$$

Поэтому для всех $a \in G$

$$Ga^{-1} = Gaa^{-1}. \tag{3}$$

Сопоставим, учитывая (2), каждому элементу $a \in G$ отображение $\varphi_a\colon Ga^{-1} \to Ga$, определяемое тем, что для всякого $x \in Ga^{-1}$ будет

$$x\varphi_a = xa \in Ga. \tag{4}$$

Поэтому $\varphi_{a^{-1}}\colon Ga \to Ga^{-1}$, причем

$$y\varphi_{a^{-1}} = ya^{-1}$$

для всех $y \in Ga$. Однако, если $x \in Ga^{-1}$, т. е. $x = x'a^{-1}$, то

$$x(\varphi_a\varphi_{a^{-1}}) = x'a^{-1}aa^{-1} = x'a^{-1} = x$$

и аналогично для $y \in Ga$ будет

$$y(\varphi_{a^{-1}}\varphi_a) = y.$$

Отображения φ_a и $\varphi_{a^{-1}}$ оказались обратными друг другу и, следовательно, взаимно однозначными отображениями, т. е. частичными подстановками, причем

$$\varphi_{a^{-1}} = \varphi_a^{-1}. \tag{5}$$

Пусть $\varphi_a = \varphi_b$. Отсюда, в частности,

$$Ga^{-1} = Gb^{-1}, \tag{6}$$

т. е. $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1} \in Gb^{-1}$, а поэтому, снова ввиду равенства отображений φ_a и φ_b,

$$a^{-1}a = a^{-1}b. \tag{7}$$

Ввиду (3) равенство (6) можно переписать в виде

$$Gaa^{-1} = Gbb^{-1}, \tag{8}$$

причем aa^{-1} и bb^{-1} являются, как мы знаем, идемпотентами. Ввиду (8)

$$aa^{-1} = xbb^{-1},$$

откуда

$$aa^{-1}bb^{-1} = xbb^{-1}bb^{-1} = xbb^{-1} = aa^{-1};$$

аналогично

$$bb^{-1}aa^{-1} = bb^{-1}.$$

Так как, однако, идемпотенты в G перестановочны, то из этих равенств следует

$$aa^{-1} = bb^{-1}. \tag{9}$$

Используя (7) и (9), получаем

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Таким образом, отображение $a \to \varphi_a$ является взаимно однозначным вложением G в симметрическую инверсную полугруппу на G. Докажем изоморфность этого вложения. Отображение φ_{ab} определено, как мы знаем, на множестве $G(ab)^{-1}$, произведение $\varphi_a\varphi_b$ ввиду ду (5), — на множестве $(Ga \cap Gb^{-1})a^{-1}$. Однако, ввиду (2), применяемого дважды, и (3),

$$Ga \cap Gb^{-1} = Ga^{-1}a \cap Gbb^{-1} = Ga^{-1}abb^{-1} = Gabb^{-1},$$

так как, ввиду перестановочности идемпотентов, $Gbb^{-1}a^{-1}a = Ga^{-1}abb^{-1} \subseteq Ga^{-1}a \cap Gbb^{-1}$, если же элемент x лежит в этом пересечении, то

$$x = xa^{-1}a = xbb^{-1} = xa^{-1}abb^{-1} \in Ga^{-1}abb^{-1}.$$

Поэтому, ввиду (3),

$$(Ga \cap Gb^{-1})a^{-1} = Gabb^{-1}a^{-1} = G(ab)(ab)^{-1} = G(ab)^{-1}.$$

Таким образом, отображения φ_{ab} и $\varphi_a\varphi_b$ определены на одном и том же подмножестве, а так как $x(ab) = (xa)b$, то доказано, что $\varphi_{ab} = \varphi_a\varphi_b$. Это вместе с (5) доказывает теорему.

Можно было бы определить частичный автоморфизм универсальной алгебры как изоморфное отображение одной ее подалгебры на другую. Легко видеть, что произведение частичных автоморфизмов как частичных подстановок само будет частичным автоморфизмом и что частичные автоморфизмы данной алгебры составляют инверсную полугруппу с единицей и нулем. По аналогии с теоремами 2 и 2′ из § 3 можно было бы поставить следующий вопрос: всякая ли инверсная полугруппа G с единицей и нулем изоморфна инверсной полугруппе всех частичных автоморфизмов некоторой универсальной алгебры, определенной на множестве G? О. И. Доманов показал, однако, что это не так (Изв. высших учебн. зав., Математика **8** (1971), 52—58).