§ 5. ПОЛУГРУДЫ

Полугруппа G называется *полугруппой с инволюцией*, если в ней задана, помимо умножения, еще унарная операция a^{-1}, причем выполняются следующие тождества (помимо ассоциативности умножения):

$$(x^{-1})^{-1} = x, \ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Полугруппы с инволюцией составляют, следовательно, многообразие, содержащее в себе многообразие всех инверсных полугрупп.

В полугруппе с инволюцией G следующим образом определим тернарную операцию $[abc]$:

$$[abc] = ab^{-1}c.$$

Ассоциативность умножения и определение инволюции дают

$$ab^{-1}cd^{-1}e = (ab^{-1}c)d^{-1}e = a\,(dc^{-1}b)^{-1}e = ab^{-1}(cd^{-1}e),$$

т. е. для операции $[abc]$ выполняются тождества

$$[[xyz]uv] = [x[uzy]v] = [xy[zuv]]; \tag{1}$$

обращаем внимание на то, что в средней части крайние множители внутренней скобки оказались переставленными. Алгебра с одной тернарной операцией, удовлетворяющей тождествам (1), называется *полугрудой*.

Слова «полугруда, *определяемая* данной полугруппой с инволюцией» имеют понятный смысл.

Если G будет инверсной полугруппой, то операция $[abc]$, определенная выше, будет удовлетворять, помимо тождеств (1), также тождествам

$$[xxx] = x, \tag{2}$$

$$[[xyy]zz] = [[xzz]yy], \ [[xxy]yz] = [[yyx]xz]; \tag{3}$$

последние вытекают из аксиомы 3 предшествующего параграфа, для первого из тождеств (3) переписанной для обратных элементов. Алгебра с одной тернарной операцией, удовлетворяющей тождествам (1), (2) и (3), называется *обобщенной грудой*. Быть может, термин «инверсная полугруда» был бы более оправданным.

Наконец, если G будет группой (что также является полугруппой с инволюцией относительно умножения и взятия обратного элемента), то операция $[abc]$ будет удовлетворять, помимо тождеств (1), также тождествам

$$[xyy] = x, \; [yyx] = x, \tag{4}$$

из которых тождества (2) и (3) немедленно следуют. Алгебра с одной тернарной операцией, удовлетворяющей тождествам (1) и (4), называется *грудой*.

Для определенных нами алгебр докажем следующую теорему Бэра-Вагнера (Бэром она доказана для груд, В. В. Вагнером для обобщенных груд и полугруд; см. Уч. зап. Саратовск. ун-та **70** (1961), 25—39). Назовем элемент e полугруды G *биунитарным*, если для любых $a \in G$

$$[aee] = [eea] = a.$$

Тождества (4) показывают, что в груде всякий элемент биунитарен. Отметим также, что если полугруппа с инволюцией обладает единицей, то в соответствующей полугруде эта единица будет одним из биунитарных элементов.

Если G — полугруда (*или обобщенная груда*), *обладающая биунитарными элементами, или же груда, и если e — любой биунитарный элемент из G, то операции, определяемые равенствами*

$$ab = [aeb], \; a^{-1} = [eae],$$

превращают множество G в полугруппу с инволюцией (*соответственно, в инверсную полугруппу или в группу*), *для которой e служит единицей, причем определяемая ею полугруда* (*соответственно, обобщенная груда или груда*) *совпадает с исходной.*

Действительно, элемент e служит единицей для умножения ab, так как, ввиду его биунитарности,

$$ae = [aee] = a, \; ea = [eea] = a.$$

Далее, ассоциативность умножения ab следует из (1):

$$(ab)c = [[aeb]ec] = [ae[bec]] = a(bc).$$

Из (1) и биунитарности элемента e следует также

$$(a^{-1})^{-1} = [e[eae]e] = [[eea]ee] = a,$$

$$b^{-1}a^{-1} = [[ebe]e[eae]] = [[[ebe]ee]ae] = [[ebe]ae] = \\ = [e\,[aeb]e] = (ab)^{-1},$$

т. е. нами получена полугруппа с инволюцией. Если же G — обобщенная груда, то, так как

$$ab^{-1} = [ae[ebe]] = [[aee]be] = [abe], \tag{5}$$

получаем

$$aa^{-1}a = [[aae]ea] = [aa[eea]] = [aaa] = a$$

ввиду (2), а также $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Нами получена, следовательно, инверсная полугруппа. Наконец, если G — груда, то, по (5) и (4),

$$aa^{-1} = [aae] = e,$$

т. е. нами получена группа, так как уже доказано, что e является единицей. Последнее утверждение теоремы проверяется следующим образом на основании (5):

$$ab^{-1}c = [[abe]ec] = [ab[eec]] = [abc].$$

Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что введение понятия груды как самостоятельного объекта изучения было ошибкой, так как это всего лишь еще один способ определения понятия группы, на этот раз при помощи одной тернарной и одной нульарной операции (последняя фиксирует произвольный элемент), способ, эквивалентный рассмотренным в § 2. Заметим, что группы, которые получаются этим путем из данной груды, будут, как можно показать, изоморфными. Именно, пусть в груде G взяты элементы e и e' и определены умножения

$$a\cdot b = [aeb], \quad a\circ b = [ae'b]. \tag{6}$$

Тогда, ввиду (4) и (1),

$$a \circ b = [a[eee']b] = [[ae'e]eb] = [ae'e] \cdot b.$$

Покажем, что преобразование σ множества G, определяемое равенством

$$a\sigma = [ae'e], \ a \in G,$$

будет подстановкой. Действительно, преобразование τ,

$$a\tau = [aee'], \ a \in G,$$

будет для него обратным, так как

$$a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau = [[ae'e]ee'] = [ae'[eee']] = [ae'e'] = a,$$
$$a(\tau\sigma) = (a\tau)\sigma = [[aee']e'e] = [ae[e'e'e]] = [aee] = a.$$

Этим доказано, что группы с операциями (6) будут изотопными (см. § 6) и, по второй теореме Алберта (см. конец § 6), изоморфными.

Что же касается понятий обобщенной груды и полугруды, то положение иное — сейчас будет показано, что существуют обобщенные груды, не содержащие биунитарных элементов. Можно было бы доказать, впрочем, что всякую полугруду (всякую обобщенную груду) можно изоморфно вложить в полугруду (соответственно, в обобщенную груду), обладающую биунитарными элементами и определяемую, следовательно, некоторой полугруппой с инволюцией (некоторой инверсной полугруппой).

Пример обобщенной груды без биунитарных элементов можно построить следующим образом. Возьмем множество M, построим на нем симметрическую инверсную полугруппу и перейдем к определяемой ею обобщенной груде; обозначим последнюю через G. Возьмем, далее, в M подмножества A и B и обозначим через G' множество всех тех частичных подстановок в M (т. е. тех элементов из G), которые отображают (взаимно однозначно) некоторое подмножество из A на некоторое подмножество из B. Это множество замкнуто, очевидно, относительно тернарной операции $[\varphi\psi\chi] = \varphi\psi^{-1}\chi$, т. е. является подалгеброй обобщенной груды G и, следовательно, само будет обобщенной грудой. Пусть ε: $A_0 \to B_0$ — ее биунитарный элемент. Тогда для любой частичной подстановки $\varphi \in G'$, т. е. φ: $A' \to B'$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, должно быть $\varepsilon\varepsilon^{-1}\varphi = \varphi$. Отсюда следует, ввиду определения умножения частичных подстановок, что $A' \subseteq \subseteq A_0$, откуда, так как, в частности, подмножество A' могло быть любым отдельным элементом из A, вытекает $A_0 = A$. Таким образом, если подмножества A и B будут выбраны так, что мощность A строго больше мощности B, то соответствующая обобщенная груда G' не будет содержать биунитарных элементов.