§ 8. n-ГРУППЫ

Понятие сети, введенное в § 6, было подсказано примером сети, составленной из всех точек и трех семейств прямых на плоскости — прямые, параллельные оси x, оси y и еще одной прямой. Столь же естественно, однако, рассмотрение в трехмерном пространстве множества всех точек и четырех семейств плоскостей — параллельных трем координатным плоскостям и еще одной плоскости. Переход к n-мерному евклидову пространству очевиден. Этим подсказывается следующее определение.

Система непустых попарно непересекающихся множеств P, L^1, L^2, . . ., L^{n+1} (элементы первого множества называются *точками*, а остальных — *гиперплоскостями*) называется *n-мерной сетью*, если между точками и гиперплоскостями задано отношение инцидентности, удовлетворяющее следующим требованиям:

а) через каждую точку проходит одна и только одна гиперплоскость каждого из $n+1$ семейств;

б) n гиперплоскостей, принадлежащих к различным семействам, пересекаются в одной и только одной точке.

Таким образом, сети, рассмотренные в § 6, в силу этого определения будут двумерными сетями.

Заметим, что семейства гиперплоскостей L^1, L^2, ..., L^{n+1} равномощны — мы получим взаимно однозначное соответствие между L^1 и L^2, если фиксируем гиперплоскости $l^i \in L^i$, $i = 3, \ldots, n+1$, и гиперплоскости $l^1 \in L^1$ сопоставим гиперплоскость $l^2 \in L^2$, проходящую через точку пересечения гиперплоскостей l^1, $l^3, \ldots, l^{n+1}$.

Пусть G — множество, равномощное с L^i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Используем его для индексации гиперплоскостей этих семейств, после чего определим в G следующим образом n-арную операцию: $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = b$, если через точку пересечения гиперплоскостей $l^i_{a_i} \in L^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, проходит гиперплоскость $l^{n+1}_b \in L^{n+1}$. Для этой операции на каждом из мест $1, 2, \ldots, n$ существует однозначно определенная обратная операция: так, решением уравнения $x a_2 \ldots a_n \omega = b$ будет индекс той единственной гиперплоскости семейства L^1, которая проходит через точку пересечения гиперплоскостей $l_{a_2}^2, l_{a_3}^3, \ldots, l_{a_n}^n\ l_b^{n+1}$.

Алгебра с одной n-арной операцией, однозначно обратимой на каждом месте, называется *n-квазигруппой*. Так как, как и в § 6, можно показать, что всякая n-квазигруппа служит координатной n-квазигруппой некоторой n-мерной сети, то n-квазигруппы оказываются столь же естественным объектом изучения, как и квазигруппы (т. е. 2-квазигруппы), и их изучение уже началось. Ясно, что n-квазигруппы при фиксированном n составляют многообразие.

Много раньше началось изучение частного случая n-квазигрупп, обобщающего на n-арный случай понятие группы. Именно, n-квазигруппа называется *n-группой*, если в ней выполняются следующие т о ж д е с т в а а с с о ц и а т и в н о с т и:

$$(x_1x_2 \ldots x_n\omega)x_{n+1} \ldots x_{2n-1}\,\omega =$$
$$= x_1x_2 \ldots x_i\,(x_{i+1}x_{i+2} \ldots x_{i+n}\omega)x_{i+n+1} \ldots x_{2n-1}\omega, \qquad (1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Как обычно, из (1) следует, что в n-группе можно однозначным образом говорить о произведении k элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, взятых в указанном порядке, не заботясь о том, как расставлены скобки, если, конечно, это произведение вообще имеет смысл, т. е. если k при делении на $n-1$ дает остаток 1,

$$k \equiv 1 \pmod{n-1}.$$

Условимся записывать это произведение просто в виде $a_1a_2 \ldots a_k$ (без символа ω). Условимся также в случае, когда в таком произведении где-то стоят рядом m элементов, равных одному и тому же элементу a, писать вместо этих элементов символ a^m.

Теория n-групп при $n \geqslant 3$ существенно отличается от теории групп (т. е. 2-групп), так как при $n \geqslant 3$ нет аналога единицы. Будем считать поэтому, что на n наложено указанное условие $n \geqslant 3$.

Пусть дана n-группа G. Если $a \in G$, то решение уравнения

$$a^{n-1}x = a$$

обозначается через $\bar{a}$ и называется элементом, *косым* для элемента a. Оказывается, что для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$a^{i-1}\bar{a}\, a^{n-i} = a \tag{2}$$

(считаем, что a^0 означает отсутствие этого множителя). Действительно, из $a^{n-1}\bar{a} = a$ следует

$$a^n = (a^{n-1}\bar{a})a^{n-1} = a^{n-i}\,(a^{i-1}\bar{a}a^{n-i})a^{i-1},$$

а поэтому равенство (2) вытекает из единственности обратной операции на $(n-i+1)$-м месте.

Больше того, для любых a, $b \in G$ имеют место равенства $(i = 0,\ 1, \ldots, n-2)$

$$ba^i\bar{a}a^{n-i-2} = b, \tag{3}$$

$$a^i\bar{a}a^{n-i-2}b = b. \tag{4}$$

Докажем первое из них. Можно подобрать такие элементы c_1, $c_2, \ldots, c_{n-1}$, что $b = c_1c_2 \ldots c_{n-1}a$. Поэтому, ввиду (2),

$$ba^i\bar{a}a^{n-i-2} = c_1c_2 \ldots c_{n-1}\,(a^{i+1}\bar{a}a^{n-i-2}) = \\ = c_1c_2 \ldots c_{n-1}a = b.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Можно было бы показать (см. Глейхгевихт и Глазек, Coll. Math. 17 (1967), 209—219), что n-группу при $n \geqslant 3$ можно определить как множество с одной n-арной операцией, удовлетворяющей тождествам ассоциативности (1), и еще одной унарной операцией $\bar{a}$, для которой выполняются следующие тождества, являющиеся частными случаями тождеств (3) и (4):

$$yx^{n-2}\bar{x} = y, \qquad yx^{n-3}\bar{x}x = y,$$

$$\bar{x}x^{n-2}y = y, \qquad x\bar{x}x^{n-3}y = y.$$

Пусть дана группа Γ с умножением $a \circ b$. Если $n \geqslant 3$, то следующим образом определим на множестве Г n-арную операцию $a_1a_2\ldots a_n$:

$$a_1a_2\ldots a_n = a_1\circ a_2\circ\ldots\circ a_n.$$

Ясно, что все требования, входящие в определение n-группы, выполняются. Назовем полученную n-группу *определяемой* группой Г.

Докажем, что *n-группа G, $n\geqslant 3$, тогда и только тогда определяется группой, если она обладает хотя бы одним элементом t, удовлетворяющим условиям*

а) $\bar{t} = t$,

б) *для любых* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\in G$ *и любого* i, $1\leqslant i\leqslant n-1$, $ta_1a_2\ldots a_{n-1} = a_1\ldots a_ita_{i+1}\ldots a_{n-1}$.

В самом деле, если n-группа G определяется группой Г, то роль элемента t играет единица группы Г, хотя могут существовать и другие элементы, обладающие свойствами а) и б). Обратно, пусть n-группа G обладает элементом t с нужными свойствами. Следующим образом определим на G бинарную операцию: для всех $a, b\in G$

$$a\circ b = at^{n-2}b.$$

Это умножение ассоциативно ввиду ассоциативности операции в n-группе:

$$(a\circ b)\circ c = (at^{n-2}b)t^{n-2}c = at^{n-2}(bt^{n-2}c) = a\circ(b\circ c).$$

Роль единицы играет элемент t: ввиду а) и (3) будет

$$a\circ t = at^{n-2}t = a. \tag{5}$$

Наконец, обратным для элемента a будет решение уравнения $at^{n-2}x = t$, существующее в n-группе G. Нами построена на множестве G группа с умножением $a\circ b$. Определяемой ею n-группой служит исходная n-группа G. В самом деле, используя б) и применяя несколько раз равенство $a_nt^{n-1} = a_n$ (см. (5)), получаем:

$$a_1\circ a_2\circ\ldots\circ a_n = a_1t^{n-2}a_2t^{n-2}a_3\ldots a_{n-1}t^{n-2}a_n = \\ = a_1a_2\ldots a_nt^{(n-2)(n-1)} = a_1a_2\ldots a_n.$$

Теорема доказана.

Мы видим, что класс всех n-групп, определяемых группами, при фиксированном n, $n \geqslant 3$, оказывается многообразием, в сигнатуру которого входят операции n-группы и еще одна нульарная операция. Это многообразие оказывается эквивалентным многообразиям, указанным в § 2, т. е. мы получили еще одну форму определения группы.

Понятие n-группы допускает следующее разумное оправдание. Именно, можно было бы показать, что всякая n-группа изоморфно вкладывается в n-группу, определяемую группой. Это вытекает из теоремы Поста (Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 208—350), утверждающей, что все n-группы можно получить из групп при помощи следующей конструкции. Берется группа G, обладающая нормальным делителем A, индекс которого конечен и делит число $n-1$, а фактор-группа G/A — циклическая. Тогда смежный класс A_g, являющийся образующим элементом этой фактор-группы, обладает, ввиду $g^{n-1} \in A$, тем свойством, что произведение любых n его элементов содержится в самом этом классе. Класс A_g оказывается, следовательно, n-группой, а именно, n-подгруппой n-группы, определяемой группой G.

Другая форма этого описания n-групп — в работах Хоссу (Publ. Math. 10 (1963), 87—92) и Л. М. Глускина (Матем. сб. 68 (1965), 444—472).

Приведем пример 3-группы, не определяемой какой-либо группой. Именно, легко проверяется, что следующая алгебра с одной тернарной операцией будет 3-группой (на самом деле здесь применяется конструкция, указанная в теореме Поста, к случаю, когда G — циклическая группа четвертого порядка, а A — ее подгруппа второго порядка): алгебра состоит из двух элементов a и b, а тернарная операция коммутативна (т. е. произведение $x_1x_2x_3$ не зависит от порядка сомножителей) и задается равенствами

$$a^3 = b, \; a^2b = a, \; ab^2 = b, \; b^3 = a.$$

Эта 3-группа не будет определяться группой в силу доказанной выше характеризации таких 3-групп, так как $\bar{a} = b$, $\bar{b} = a$.