**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

В.І.Шевченко, В.І.Тюптя, О.М.Іксанов

Методична розробка до проведення практичних занять з лінійного програмування

**Київ
Електронна бібліотека факультету кібернетики
2003**

Методична розробка до проведення практичних занять з лінійного програмування /Упорядники: Віталій Іванович Шевченко, Володимир Іванович Тюптя, Олександр Маратович Іксанов. – Київ: Електронне видання. Електронна бібліотека факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003.–98с.

Рецензенти: С.І.Ляшко, д-р фіз-мат. наук,
Ю.З.Прохур, канд. фіз.-мат. наук

Затверджено вченою радою
факультету кібернетики
21 жовтня 2002 року

Електронна бібліотека факультету кібернетики КНУ, 2003

1. Вступ.

Матеріали розробки можуть використовуватись, як викладачем так і студентом при опрацюванні на практичних заняттях тем, пов'язаних з застосуванням методів ЛП до розв'язування оптимізаційних задач.

В ній розглянуті у практичному аспекті основні питання лінійного програмування, які є складовими курсів математичних методів дослідження операцій та методів оптимізації, зокрема, побудова лінійних моделей, геометрична інтерпретація та графічний спосіб розв'язування задач ЛП, симплекс-метод для канонічних задач ЛП, застосування методів штучного базису для канонізації стандартних задач ЛП, розв'язування задач ЛП модифікованим симплекс-методом, теорія двоїстості ЛП та розв'язування задач ЛП двоїстим симплекс-методом.

2. Базисні розв'язки системи лінійних рівнянь, їх обчислення. Опорні розв'язки та симплекс-перетворення.

2.1. Основні факти.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} = a_{m0}. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Запишемо її у векторному вигляді

$$x_1\boldsymbol{A}_1 + x_2\boldsymbol{A}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}_0 , \qquad (2.2)$$

де

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,n}, \quad \boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \ldots \\ a_{m0} \end{pmatrix}.$$

Подамо матрицю $\boldsymbol{A}$ коефіцієнтів при невідомих системи (2.1) у вигляді системи векторів-стовпців $\boldsymbol{A}_j$ ($j = \overline{1,n}$):

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n] . \qquad (2.3)$$

Нехай $m < n$ і $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = m$. Виберемо з матриці $\boldsymbol{A}$ (як системи векторів $\boldsymbol{A}_j$ ($j = \overline{1,n}$)) m лінійно незалежних векторів і утворимо з них матрицю $\boldsymbol{B}$, яку назвемо базисною. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m],$$

оскільки цього завжди можна досягти перенумеруванням змінних x_j ($j = \overline{1,n}$). Змінні x_i ($i = \overline{1,m}$) назвемо ***базисними***, а x_j ($j = \overline{m+1,n}$) – ***вільними*** змінними.

Так як $\boldsymbol{B}$ невироджена квадратна матриця розміру $m \times m$, то вона має обернену $\boldsymbol{B}^{-1}$. Помножимо зліва на $\boldsymbol{B}^{-1}$ систему (2.2), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j x_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_0 \qquad (2.4)$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e}_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i x_i = \boldsymbol{\alpha}_0, \qquad (2.5)$$

де

$$\boldsymbol{e}_i = (0,0,...,1,0,...,0)^T = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_i, \; i = \overline{1,m},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ...\alpha_{mj})^T = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j, \; j = \overline{m+1,n},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, ...\alpha_{m0})^T = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_0 .$$

Перепишемо (2.5) у скалярному вигляді

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{0j} x_j = \alpha_{i0}, \; i = \overline{1,m} . \qquad (2.6)$$

Якщо в (2.6) покласти $x_j = 0$ ($j = \overline{m+1,n}$), то базисні змінні x_i будуть рівні

$$x_i = \alpha_{i0}, \; i = \overline{1,m} .$$

Розв'язок системи (2.1) отриманий таким шляхом, називають ***базисним*** її розв'язком.

Означення 2.1. ***Вектор $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ – розв'язок системи (2.1) називається базисним її розв'язком, якщо вектори A_j, що відповідають його ненульовим компонентам, утворюють лінійно незалежну систему.***

Базисний розв'язок називається опорним, якщо він невід'ємний: $\boldsymbol{x}^0 \geq 0$.

Якщо число ненульових компонент базисного розв'язку $\boldsymbol{x}^0$ рівне $m = \operatorname{rang} A$, то такий базисний розв'язок системи (2.1) називається невиродженим; якщо ж це число менше ніж $m = \operatorname{rang} A$, то виродженим.

Зведення базису $\boldsymbol{B}$ до одиничного вигляду (що еквівалентно зведенню системи (2.1) до виду (2.6)) у випадку, коли обернена матриця $\boldsymbol{B}^{-1}$ не обчислена раніше, доцільно здійснювати методом повного виключення Жордана-Гаусса. Всього для перетворення базису $\boldsymbol{B}$ у канонічний потрібно $m = \operatorname{rang} \boldsymbol{A}$ кроків. На кожному кроці обертають в одиничний один базисний вектор.

Позначимо через α^s розширену матрицю системи (2.1) після s кроків методу Жордана-Гаусса.

$$\alpha^s = \left[\alpha_1^s, \alpha_2^s, \ldots, \alpha_m^s, \alpha_{m+1}^s, \ldots, \alpha_n^s, \alpha_0^s\right]$$

де

$$\alpha_j^s = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^s \\ \alpha_{2j}^s \\ \ldots \\ \alpha_{mj}^s \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0,n},$$

і серед векторів $\alpha_1^s, \alpha_2^s, \ldots, \alpha_m^s$ вже є s одиничних.

Нехай для $(s+1)$-го кроку за направляючі вибрані l-й рядок і k-й стовпчик матриці α^s, тобто ведучим елементом кроку буде $\alpha_{lk}^s \neq 0$. Тоді елементи матриці α^{s+1} обчислюються за формулами:

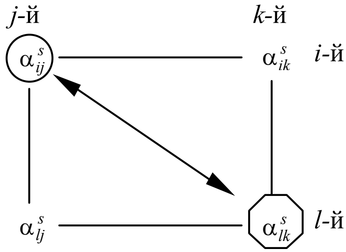
$$\alpha_{ij}^{s+1} = \alpha_{ij}^s - \frac{\alpha_{lj}^s}{\alpha_{lk}^s} \alpha_{ik}^s, \quad i = \overline{1, l-1}, \ \overline{l-1, m}, \ \overline{0,n} \qquad (2.7)$$

$$\alpha_{lj}^{s+1} = \frac{\alpha_{lj}^s}{\alpha_{lk}^s}, \quad j = \overline{0,n}. \qquad (2.8)$$

При підрахунках окремих елементів матриці α^{s+1} доцільно використовувати формули (2.7), записані у вигляді так званого ***“правила прямокутників”***:

$$\alpha_{ij}^{s+1} = \frac{\alpha_{ij}^s \alpha_{lk}^s - \alpha_{lj}^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s}, \quad i \neq l, \ j \neq k, \qquad (2.9)$$

оскільки при обчисленні елемента α_{ij}^{s+1} за формулами Гаусса (2.7) приймають участь чотири елементи α_{ij}^s, α_{ik}^s, α_{lj}^s, α_{lk}^s, які стоять на перетинах i-го і l-го рядків з j-м і k-м стовпчиками матриці α^s у вершинах уявного прямокутника, який завжди визначають ***перетворюваний елемент*** α_{ij}^{s} ***і ведучий елемент*** α_{lk}^{s} кроку .



Якщо потрібно знайти всі базисні розв'язки системи (2.1), а їх буде $\boldsymbol{C}_n^m$, то після обчислення першого такого розв'язку

$$\boldsymbol{x}^0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{m0}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})^T$$

всі інші знаходять послідовно шляхом перетворення однократної заміни вектора у базисі методом Жордана-Гаусса. При цьому за направляючий стовпчик кроку методу вибирають небазисний вектор α_k , який повинен стати базисним. Направляючий рядок l кроку визначатиметься вибраним ненульовим елементом $\alpha_{lk} \neq 0$ стовпчика α_k (такий елемент повинен існувати завжди, інакше α_k не може стати базисним). При переході від одного базису до іншого вибір α_k повинен бути таким, щоб базиси не повторювались, при цьому суттєвим є набір векторів у базисі, а не їх порядок у ньому.

Якщо у системі (2.6) $\alpha_{i0} \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$), то відповідний базисний її розв'язок

$$(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{m0}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})^T$$

буде опорним.

Коли обчислений один опорний розв'язок системи (2.1), то всі інші опорні розв'язки, звичайно, якщо вони існують, обчислюють за допомогою симплекс-перетворення розширеної матриці системи (2.6).

Симплекс-перетворення відрізняється від перетворення однократної заміни вектора у базисі лише правилами вибору направляючого стовпчика α_k ***і номера*** l ***направляючого рядка кроку методу Гаусса, а саме:***

а) направляючий стовпчик α_k ***повинен мати принаймні один додатний елемент*** $\alpha_{ik} > 0$ ***;***
б) номер направляючого рядка вибирається за формулою

$$l = \arg\min_{\{i:\alpha_{ik}>0\}} \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}} . \qquad (2.10)$$

2.2. Приклади.

Приклад 1. Знайти два які-небудь базисні розв'язки системи

$$\begin{cases} 4x_1 \quad +5x_3 - 2x_4 = -10, \\ \quad 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -4. \end{cases} \qquad (2.11)$$

<u>Розв'язування.</u> Розглянемо розширену матрицю цієї системи

$$\begin{array}{cccccc} & \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{A_3} & \boldsymbol{A_4} & \boldsymbol{A_0} \\ \boldsymbol{A} = & \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & -2 & -10 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & -4 \end{array}\right)} \end{array}$$

Обчислимо перший базисний розв'язок методом оберненої матриці. Виберемо за базисну матрицю $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}] = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, для якої легко обчислюється обернена $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Помноживши матрицю $\boldsymbol{A}$ зліва на $\boldsymbol{B}^{-1}$, отримаємо

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 & -2 \end{array}\right),$$

тобто

$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{5}{4}x_3 \quad - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{5}{2}, \\ \quad x_2 \quad - \frac{5}{2}x_3 \quad - \frac{1}{2}x_4 = -2. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Прирівняємо до нуля значення вільних змінних: $x_3 = x_4 = 0$. Отримаємо базисний розв'язок $(-5/2; -2; 0; 0)^T$ системи (2.12), який відповідає базисній матриці $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}]$. Зауважимо, що цей розв'язок не є опорним розв'язком.

Наступний базисний розв'язок знайдемо методом Жордана-Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи (2.12)

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 & -2 \end{array}\right)$$

За базисну приймемо матрицю $B^{(1)} = [A_2, A_4]$. Методом Гаусса приведемо вибраний базис $\{A_2, A_4\}$ до канонічного вигляду.

Для першого кроку методу Жордана-Гаусса виберемо ведучим елемент $a_{24} = -\frac{1}{2}$. Помножимо другий рядок на -2, отримаємо

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/4 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Помножимо ведучий другий рядок на $\frac{1}{2}$, додамо почленно до першого рядка і результат запишемо на місце першого рядка, отримаємо

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 15/4 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Для другого кроку методу Жордана-Гаусса виберемо ведучим елемент $\alpha_{12} = -1$. Помножимо перший рядок -1, отримаємо

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -15/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Помножимо ведучий перший рядок на 2, почленно додамо до другого і результат запишемо на місце другого рядка, отримаємо

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -15/4 & 0 & 1/2 \\ -2 & 0 & -5/2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Отже, після канонізації базису $\{A_2, A_4\}$ система (2.12) набуває вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 15/4\, x_3 \qquad = 1/2, \\ -2x_1 \qquad - 5/2\, x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Поклавши тут $x_1 = x_3 = 0$, отримаємо наступний базисний розв'язок $(0; 1/2; 0; 5)^T$, що відповідає базису $B^{(1)} = [A_2, A_4]$.

Цей розв'язок невід'ємний, тому на відміну від попереднього він є опорним розв'язком системи (2.11).

Приклад 2. Знайти всі опорні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3 & =9, \\ x_1 \ \ +x_2 \qquad +x_4 & =8, \\ 3x_1-2x_2 \qquad\quad +x_5 & =9. \end{cases}$$

Розв'язування. Система має канонічний вигляд, тому перший базисний невід'ємний розв'язок $\boldsymbol{x}^0$ знаходимо безпосередньо з системи, покладаючи $x_1=x_2=0$; отримаємо $x_3=9$, $x_4=8$, $x_5=9$. Отже, $\boldsymbol{x}^0=(0,0,9,8,9)^T$.

Всі інші опорні розв'язки (а вони існують, оскільки небазисні вектори $\boldsymbol{A}_1$ і $\boldsymbol{A}_2$ мають додатні компоненти) обчислюємо шляхом однократних замін векторів у базисі за допомогою симплекс-перетворень. Результати обчислень заносимо у **таблицю 1.** **Таблиця 1**.

№ кр.	$x_{баз}$	$\boldsymbol{A}_0$	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{A}_4$	$\boldsymbol{A}_5$	θ_i^s	базис та опорний розв'язок
	x_3	9	–2	3	1	0	0		$\boldsymbol{B}^0=[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5]$
0	x_4	8	1	1	0	1	0	8	$\boldsymbol{x}^0=(0,0,9,8,9)^T$
	$\leftarrow x_5$	9	$\boxed{3}\uparrow$	–2	0	0	1	3	
	x_3	15	0	$5/3$	1	0	$2/3$	9	$\boldsymbol{B}^1=[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_1]$
1	$\leftarrow x_4$	5	0	$\boxed{5/3}$	0	1	$-1/3$	3	$\boldsymbol{x}^1=(3,0,15,5,0)^T$
	x_1	3	1	$-2/3\uparrow$	0	0	$1/3$		
	$\leftarrow x_3$	10	0	0	1	–1	$\boxed{1}$	10	$\boldsymbol{B}^2=[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1]$
2	x_2	3	0	1	0	$3/5$	$-1/5$		$\boldsymbol{x}^2=(5,3,10,0,0)^T$
	x_1	5	1	0	0	$2/5$	$1/5\uparrow$	25	
	x_5	10	0	0	1	–1	1		$\boldsymbol{B}^3=[\boldsymbol{A}_5,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1]$
3	x_2	5	0	1	$1/5$	$2/5$	0	$25/5$	$\boldsymbol{x}^3=(3,5,0,0,10)^T$
	$\leftarrow x_1$	3	1	0	$-1/5$	$\boxed{3/5}\uparrow$	0	5	
	x_5	15	$5/3$	0	$-2/3$	0	1		$\boldsymbol{B}^4=[\boldsymbol{A}_5,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4]$
4	x_2	3	$-2/3$	1	$1/3$	0	0		$\boldsymbol{x}^4=(0,3,0,5,15)^T$
	x_4	5	$5/3$	0	$-1/3$	1	0		

На вихідному кроці вибираємо за ведучий стовпчик $\boldsymbol{A}_1$ (в таблиці позначаємо $\boldsymbol{A}_1$ стрілкою). Він має дві додатні компоненти, тому обчислюємо відношення $\theta_2^0 = \dfrac{a_{20}^0}{a_{21}^0} = \dfrac{8}{1} = 8$ і $\theta_3^0 = \dfrac{a_{30}^0}{a_{31}^0} = \dfrac{9}{3} = 3$ і вибираємо $\theta_{\min}^0 = \theta_3^0 = 3$. $\theta_{\min}^0$ ***визначає ведучий рядок симплекс-перетворення, це буде третій рядок.*** Позначаємо його стрілкою біля змінної x_5 у стовпчику $x_{баз}$ таблиці.

Отже, ведучим елементом симплекс-перетворення є елемент $a_{kl}^0 = a_{13}^0 = 3$ (у таблиці виділений напівтоном).

В результаті симплекс-перетворення у базис буде введений вектор $\boldsymbol{A}_5$. Виконуємо симплекс-перетворення елементів таблиці, тобто крок повного виключення методом Жордана-Гаусса з ведучим першим стовпчиком ($k = 1$) і третім рядком ($l = 3$) за формулами (2.7), (2.8) або (2.9). Зауважимо, що при цьому потрібно обчислювати лише компоненти небазисних векторів $\boldsymbol{A}_2$ і $\boldsymbol{A}_5$ та вектор правих частин $\boldsymbol{A}_0$, оскільки новий базис $\boldsymbol{B}^1 = [\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_1]$ канонічний: $\boldsymbol{A}_3 = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{A}_4 = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{A}_1 = (0,0,1)^T$.

Спочатку заносимо у нову таблицю кроку 1 у стовпчик $x_{баз}$ замість старої базисної змінної x_5 нову базисну змінну x_1 та переносимо одиничні вектори нового базису $\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_1$.

Потім обчислюємо елементи третього рядка нової таблиці (кроку 1), поділивши елементи небазисних векторів ведучого рядка вихідної таблиці на ведучий елемент: $a_{30}^1 = \dfrac{a_{30}^0}{s_{31}^0} = \dfrac{9}{3} = 3$, $a_{32}^1 = \dfrac{a_{32}^0}{s_{31}^0} = \dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3}$, $a_{35}^1 = \dfrac{a_{35}^0}{s_{31}^0} = \dfrac{1}{5}$.

Інші елементи таблиці кроку 1 обчислюємо за формулами (2.7), (2.8) або (2.9), наприклад:

$$a_{10}^1 = \frac{9 \cdot 3 - (-2) \cdot 9}{3} = 15 , \qquad a_{20}^1 = \frac{8 \cdot 3 - 1 \cdot 9}{3} = 5 , \qquad a_{21}^1 = \frac{3 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2)}{3} = \frac{5}{3} ,$$

$$a_{22}^1 = \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)}{3} = \frac{5}{3} , \ a_{15}^1 = \frac{0 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{3} = \frac{2}{3} , \ a_{25}^1 = \frac{0 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{3} = -\frac{1}{3} .$$

Записуємо в останній стовпчик таблиці нову базисну матрицю $\boldsymbol{B}^1$ та новий базисний розв'язок $\boldsymbol{x}^1 = (3,0,15,5,0)^T$.

На цьому дії ***вихідного (нульового) кроку*** закінчуються.

На першому кроці вибираємо за ведучий стовпчик $\boldsymbol{A}_2$, оскільки він має два додатні елементи $a_{12}^1 = \dfrac{5}{3}$, $a_{22}^1 = \dfrac{5}{3}$. Обчислюючи для цих елементів

θ -відношення $\theta_1^1 = \frac{a_{10}^1}{a_{12}^1} = 15 : \left(-\frac{5}{3}\right) = 9$, $\theta_2^1 = \frac{a_{20}^1}{a_{22}^1} = 5 : \left(\frac{5}{3}\right) = 3$, визначаємо ведучий елемент симплекс-перетворення $a_{22}^1 = \frac{5}{3}$, після виконання якого отримуємо новий опорний план $\boldsymbol{x}^2 = (5,3,10,0,0)^T$.

На наступних кроках вибір ведучого стовпчика симплекс-перетворень здійснюємо так, щоб нові базиси за складом векторів не збігалися із жодним із отриманих на попередніх кроках.

Так на ***другому кроці*** вибираємо за ведучий елемент $a_{15}^2 = 1$, отримуємо опорний план $\boldsymbol{x}^3 = (5,3,10,0,0)^T$ з базисом $\boldsymbol{B}^3 = [\boldsymbol{A}_5, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1]$; на третьому кроці вибираємо за ведучий елемент $a_{34}^3 = 3/5$, отримуємо опорний план $\boldsymbol{x}^4 = (0,3,0,5,15)^T$ з базисом $\boldsymbol{B}^4 = [\boldsymbol{A}_5, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_4]$.

Інших опорних планів, які б були відмінними від знайдених, система не має. Дійсно, якщо вибрати на четвертому кроці за ведучий стовпчик $\boldsymbol{A}_3$, то ведучим елементом симплекс-перетворення буде елемент $a_{31}^4 = 5/3$ і внаслідок такого симплекс-перетворення отримаємо опорний план $\boldsymbol{x}^3$ з базисом $\boldsymbol{B}^3 = [\boldsymbol{A}_5, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1]$.

Якщо ж вибрати за ведучий стовпчик $\boldsymbol{A}_3$, то ведучим елементом симплекс-перетворення буде елемент $a_{23}^4 = 1/3$ і таке симплекс-перетворення приведе до опорного плану $\boldsymbol{x}^0$ з базисом $[\boldsymbol{A}_5, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]$, що відрізняється від базису $\boldsymbol{B}^0$ лише порядком векторів.

2.3. Вправи.

1. Знайти методом Жордана-Гаусса всі базисні розв’язки таких систем лінійних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -5, \\ -x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 - x_4 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ -x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + 3x_5 = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 = 4, \\ -3x_1 - x_3 - x_5 = 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = -10; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ -x_3 - x_5 + 2x_6 = 8, \\ x_4 + 2x_5 - x_6 = 4; \end{cases}$

2. Знайти за допомогою симплекс-перетворення всі опорні розв'язки таких систем лінійних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_2 + 3x_4 = 6, \\ x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_4 = 4, \\ x_4 + x_5 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_5 = 4, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_6 = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_6 = 4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$

8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 33, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_6 = 3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 - x_5 + x_6 = 3, \\ x_2 - x_5 + 4x_6 = 21, \\ x_3 + 4x_5 - x_6 = 21, \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3; \end{cases}$

3. Побудова математичних моделей лінійного програмування.

3.1. Основні правила.

Математичні моделі будують на основі відомої змістовної постановки задачі.

Складання математичної моделі починають з вибору змінних задачі. При цьому слід мати на увазі, що у більшості випадків від вдалого вибору цих змінних залежить простота моделі а, отже, складність її розв'язування.

Після вибору змінних, виходячи із змістовного формулювання задачі, послідовно складають лінійні обмеження, які ці змінні повинні задовольняти. При цьому потрібно слідкувати, щоб у модель були введені всі обмежувальні умови і в той же час не було жодної зайвої або записаної у більш жорсткій формі, ніж потрібно за умовами задачі.

Наступним кроком є складання цільової функції, яка в математичній формі відображає заданий в умовах задачі критерій оптимізації і яка повинна бути лінійною.

Зауважимо, що в деяких моделях зручніше цільову функцію будувати відразу після вибору змінних задачі, тобто порядок побудови моделі не є жорстким і може змінюватись.

Після побудови модель, якщо це можливо, спрощують. Розглянемо приклади побудови математичних моделей задач ЛП.

3.2. Приклади.

Приклад 1 . Задача про оптимальний виробничий план.

<u>Змістовна постановка задачі</u>. При заданих запасах сировини, відомих нормах витрат кожного виду сировини на виробництво одиниці кожного виду виробів, відомій ціні виробів на ринку максимізувати загальний прибуток підприємства.

<u>Математична постановка задачі</u>. Нехай підприємство виробляє n видів виробів, при цьому використовується m видів сировини. Позначимо через: $b_i (i=\overline{1,m})$ – запаси i-го виду сировини; $a_{ij} (i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ – норми витрат i-го виду сировини на виробництво одиниці j-го виробу; $c_j (j=\overline{1,n})$ – ціну j-го виробу на ринку.

Введемо змінні x_j ($j=\overline{1,n}$) – невідомі величини виробництва j-го виду виробів. Тоді вартість плану виробництва $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ буде рівна відповідному значенню функції

$$L(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ . \qquad (3.1)$$

Витрати i-го виду сировини на виробництво всіх видів виробів рівні $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ і не повинні перевищувати запасу b_i ($i=\overline{1,m}$) сировини, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ ,\ \ i=\overline{1,m}\ . \qquad (3.2)$$

За змістом задачі компоненти плану виробництва невід'ємні

$$x_j \ge 0\ ,\ \ j=\overline{1,n}\ . \qquad (3.3)$$

Отже, задача про оптимальний план виробництва полягає у відшуканні таких значень невідомих x_j ($j=\overline{1,n}$), які максимізують лінійну функцію (3.1) і задовольняють умови (3.2), (3.3).

Приклад 2. Задача про оптимальний раціон.

<u>Змістовна постановка задачі</u>. При заданому асортименті продуктів з відомим вмістом поживних речовин у кожному з них і відомій ціні, скласти найбільш дешевий добовий раціон, що задовольняє в той же час задані потреби організму у поживних речовинах.

<u>Математична постановка задачі</u>. Нехай маємо n різних продуктів, що містять m поживних речовин (білків, жирів, вуглеводів, вітамінів і т. і.). Позначимо через: $a_{ij}(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ – питомий вміст i-ої поживної речовини в j-му продукті (тобто кількість одиниць i-ої поживної речовини у ваговій чи об'ємній одиниці j-го продукту); $b_i(i=\overline{1,m})$ – найменшу добову потребу в i-й поживній речовині; $c_j(j=\overline{1,n})$ – ціну j-го продукту (тобто вартість вагової або об'ємної одиниці j-го продукту).

Нехай за добу використовується x_j одиниць (вагових чи об'ємних) j-го продукту.

Тоді вартість добового раціону буде рівна

$$L(\boldsymbol{x})=L(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ . \qquad (3.4)$$

Вміст i-ї поживної речовини в раціоні $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ не повинен бути меншим від мінімальної потреби в ній організму, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ , \ \ i=\overline{1,m} \ . \qquad (3.5)$$

За змістом задачі компоненти раціону невід'ємні

$$x_j \geq 0 \ , \ \ j=\overline{1,n} \ . \qquad (3.6)$$

Отже, задача про оптимальний раціон полягає у відшуканні значень змінних $x_j \geq 0$ ($j=\overline{1,n}$), які мінімізують лінійну функцію (3.4) і задовольняють умови (3.5), (3.6).

Приклад 3. Задача про оптимальний розкрій.

Змістовна постановка задачі. При відомому асортименті і запасах матеріалів, відомих можливих способах розкрою на вироби та заданій умові комплектності розкроїти всі матеріали так, щоб отримати максимальне число комплектів виробів.

Математична постановка задачі. Нехай маємо m різних видів матеріалів, які можуть бути розкроєні n способами на k різних видів виробів. Ці вироби, взяті відповідно у кількостях b_1, $b_2, \ldots,$ b_k, утворюють комплект. Позначимо через: $a_i (i=\overline{1,m})$ – запас i-го матеріалу; $a_{ij}^{(l)} (i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}, l=\overline{1,k})$ – кількість одиниць l-го ($l=\overline{1,k}$) виробу, отримана при розкрої одиниці i-го ($i=\overline{1,m}$) матеріалу j-м ($j=\overline{1,n}$) способом.

Нехай x – кількість комплектів, x_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) – кількість одиниць i-го ($i=\overline{1,m}$) матеріалу розкроєного j-м ($j=\overline{1,n}$) способом.

Використання i-го ($i=\overline{1,m}$) матеріалу не повинно бути більшим його запасу a_i, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \ , \ \ i=\overline{1,m} \ . \qquad (3.7)$$

Оскільки з одиниці i-го ($i=\overline{1,m}$) матеріалу j-м ($j=\overline{1,n}$) способом розкрою одержуємо $a_{ij}^{(l)}$ одиниць l-го ($l=\overline{1,k}$) виробу, то при розкрої x_{ij} одиниць i-го матеріалу одержуємо $a_{ij}^{(l)} x_{ij}$ одиниць l-го виробу. Використання всіх матеріалів і всіх способів розкрою дає $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} x_{ij}$ одиниць l-го ($l=\overline{1,k}$) виробу. З іншого боку помічаємо, що в x комплектах міститься

$x \cdot b_l$ одиниць l-го ($l = \overline{1,k}$) виробу. Тому умова комплектності набуває такого вигляду

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} x_{ij} = b_l x \, , \; l = \overline{1,k} \, . \tag{3.8}$$

За змістом задачі всі змінні x і x_{ij} невід'ємні,

$$x, x_{ij} \ge 0 \, , \; i = \overline{1,m} \, , \; j = \overline{1,n} \, . \tag{3.9}$$

Отже, задача про оптимальний розкрій полягає у максимізації змінної x за виконання умов (3.7), (3.8), (3.9).

Приклад 4. Транспортна задача.

Змістовна постановка задачі. Знайти найбільш дешевий план перевезень однорідного продукту з пунктів із відомими запасами цього продукту до пунктів з заданими його потребами при відомій вартості перевезення одиниці продукту з кожного пункту зберігання у кожний пункт споживання.

Математична постановка задачі. Нехай маємо m пунктів відправлення і n пунктів призначення. Позначимо через: a_i ($i = \overline{1,m}$) – об'єм запасу продукту на i-му пункті відправлення; b_j ($j = \overline{1,n}$) – об'єм потреби продукті в j-му пункті призначення; c_{ij} ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) – вартість перевезення однієї одиниці продукту безпосередньо із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Нехай за планом перевезень із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення перевозиться x_{ij} одиниць продукту. Тоді вартість всіх перевезень буде рівна значенню функції

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \, , \tag{3.10}$$

де матриця $\boldsymbol{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ – план перевезень.

Кількість одиниць продукту, що вивозиться з i-го пункту рівна сумі $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $i = \overline{1,m}$. Кількість одиниць продукту, що завозиться у j-й пункт рівна сумі $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, $j = \overline{1,n}$. У найпростішому випадку транспортної задачі весь продукт повинен бути вивезений із всіх пунктів відправлення, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \ \ i = \overline{1,m} \ , \qquad (3.11)$$

і завезений рівно за потребами у всі пункти призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ \ j = \overline{1,n} \ . \qquad (3.12)$$

За змістом задачі всі перевезення невід'ємні

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ (\ i = \overline{1,m} \ , \ \ j = \overline{1,n} \ ). \qquad (3.13)$$

Отже, транспортна задача полягає у відшуканні такого плану перевезень – матриці $\boldsymbol{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$, який мінімізує функцію (3.10) і задовольняє умови (3.11)-(3.13).

Зауважимо, що без додаткових умов, накладених на величини a_i ($i = \overline{1,m}$) і b_j ($j = \overline{1,n}$) ця задача може виявитись нерозв'язною.

Необхідною і достатньою умовою її розв'язку є виконання умови балансу*: *загальний об'єм запасу продукту повинен бути рівний загальному об'єму потреби в ньому, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (3.14)$$

За виконання умови балансу (3.14) транспортна задача називається ***збалансованою або закритою***.

Ми розглянули кілька моделей задач ЛП не надаючи їх параметрам конкретних числових значень. Для прикладу побудуємо ще одну лінійну модель з конкретними числовими значеннями параметрів, що її визначають.

Приклад 5. Задача про суміш.

Нафтопереробний завод отримує *4* напівфабрикати: P_1 – *400000*л, P_2 – *250000* л, P_3 – *350000* л, P_4 – *300000* л. В результаті змішування цих чотирьох компонентів: у відношенні *2*:*3*:*5*:*2* одержують бензин марки A, вартістю *120* гр. од. за *1000* л; у відношенні *3*:*2*:*2*:*1* – бензин марки B вартістю *100* гр. од. за *1000* л; у відношенні *2*:*2*:*1*:*3* – бензин марки C вартістю *150* гр. од. за *1000* л.

Знайти такий план змішування компонентів, який максимізує загальну вартість виробленої продукції за умови, що завод повинен випустити бензину A не менше, ніж *400000* л, бензину B – не менше, ніж *100000* л, бензину C – не менше, ніж *100000* л.

<u>Розв'язування.</u> Нехай завод випускає: x_1 тисяч літрів бензину A, x_2 тисяч літрів бензину B і x_3 тисяч літрів бензину C.

Кожна тисяча літрів бензину A за об'ємом ділиться на $2+3+5+2=12$ частин, з яких складають: 2 частини – напівфабрикат P_1; 3 частини – напівфабрикат P_2; 5 частин – напівфабрикат P_3; 2 частини – напівфабрикат P_4.

Тоді x_1 тисяч літрів бензину A містять: $\frac{2}{12}x_1 = \frac{1}{6}x_1$ тисяч літрів P_1, $\frac{3}{12}x_1 = \frac{1}{4}x_1$ т. літрів P_2, $\frac{5}{12}x_1$ т. літрів P_3, $\frac{2}{12}x_1 = \frac{1}{6}x_1$ т. літрів P_4.

Аналогічно знаходимо, що x_2 тисяч літрів бензину B містять: $\frac{3}{18}x_2 = \frac{1}{6}x_2$ т. літрів P_1; $\frac{2}{8}x_2 = \frac{1}{4}x_2$ т. літрів P_2; $\frac{2}{8}x_2 = \frac{1}{4}x_2$ т. літрів P_3; $\frac{1}{8}x_2$ т. літрів P_4;

і що x_3 тисяч літрів бензину C містять: $\frac{2}{8}x_3 = \frac{1}{4}x_3$ т. літрів P_1; $\frac{2}{8}x_3 = \frac{1}{4}x_3$ т. літрів P_2; $\frac{1}{8}x_3$ т. літрів P_3; $\frac{3}{8}x_3$ т. літрів P_4.

Витрати напівфабрикатів не повинні перевищувати їх запаси:

$$\begin{aligned}
&(P_1)\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 400,\\
&(P_2)\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 250,\\
&(P_3)\ \frac{5}{12}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \le 350,\\
&(P_4)\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{3}{8}x_3 \le 300.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

За умовами задачі компоненти плану виробництва повинні задовольняти умови

$$x_1 \ge 400,\ x_2 \ge 100,\ x_3 \ge 100. \tag{3.16}$$

Загальна вартість виробленого бензину всіх марок, очевидно, описується функцією

$$L(x_1, x_2, x_3) = 120x_1 + 100x_2 + 150x_3. \tag{3.17}$$

Отже, задача про оптимальний план змішування полягає у мінімізації функції (3.17) за умов (3.15), (3.16).

3.2. Вправи.

Побудувати математичні моделі для таких оптимізаційних задач.

1. З пункту A в пункт B кожного дня відправляються пасажирські і швидкі поїзди. У наступній таблиці вказаний наявний парк вагонів різних типів, з яких кожного дня можна комплектувати поїзди, і кількість пасажирів, що вміщуються у кожному з вагонів:

Поїзди	Вагони				
	багажн.	пошт.	ж. плацк.	куп.	м'як.
Швидкий	*1*	*1*	*5*	*6*	*3*
Пасажирський	*1*	–	*8*	*4*	*1*
Число пасажирів	–	–	*58*	*40*	*32*
Парк вагонів	*12*	*8*	*81*	*70*	*26*

Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, при якому число перевезених пасажирів досягає максимуму.

2. Обладнання фабрики дозволяє випускати фруктові компоти в трьох видах тари: скляної – у кількості 10 ц, жерстяної – у кількості 8 ц, поліетиленової – у кількості 5 ц.

Знайти виробничу програму підприємства, що максимізує прибуток, якщо собівартість 1 ц компоту складає: в скляній тарі – 16 грн., у жерстяній – 10 грн., і в поліетиленовій – 16 грн. Відпускна ціна незалежно від тари складає 40 грн. за 1 ц.

3. При складанні добового раціону при відгодівлі худоби можна використовувати свіже сіно (не більше 50 кг) і силос (не більше 85 кг). Раціон повинен мати визначену поживність (число кормових одиниць не менше 30) і вміщувати поживні речовини: білок (не менше 30 кг), кальцій (не менше 100 г) і фосфор (не менше 80 г).

У наступній таблиці наведені дані про вміст вказаних компонентів у 1 кг кожного продукту та собівартості (коп./кг) цих продуктів:

Продукти\комп.	Кількість кормових одиниць	Білок г/кг	Кальцій г/кг	Фосфор г/кг	Собівар-тість Коп./кг
Сіно свіже	*0.5*	*40*	*1.25*	*2*	*1.2*
Силос	*0.5*	*10*	*2.5*	*1*	*0.8*

Визначити оптимальний раціон із умови мінімуму собівартості.

4. В цеху три токарних верстати і один автомат. Необхідно організувати виробництво двох деталей у комплекті: на кожну деталь №1 три деталі №2 і дві №3.

Скласти, використовуючи графічний розв'язок, програму роботи верстатів, за якою буде виготовлено максимальне число комплектів, якщо денна виробнича здатність кожного верстата по кожній із деталей задана у таблиці:

Станки/деталі	№1	№2	№3
Токарний	*50*	*40*	*80*
Автомат	*120*	*90*	*60*

5. Для виготовлення двох видів виробів A і B фабрика використовує як сировину сталь і кольорові метали, запаси яких обмежені. На виготовленні вказаних двох виробів зайняті токарні і фрезерні верстати. У таблиці приведені вихідні дані задачі:

Види ресурсів	Об'єм ресурсів	Норми витрат на один виріб	
		виріб A	виріб B
Сталь (кг)	*570*	*10*	*70*
Кольорові метали (кг)	*420*	*20*	*50*
Токарні верстати (станко-г)	*5600*	*300*	*400*
Фрезерні верстати (станко-г)	*3400*	*200*	*100*
Прибуток (тис. грн.)		*3*	*8*

Визначити план випуску продукції, при якому буде досягнутий максимальний прибуток.

6. Підприємство має ресурси сировини, робочої сили та устаткування, необхідного для виробництва будь-якого з чотирьох видів товарів. Затрати ресурсів на виготовлення одиниці кожного виду товару, прибуток, що отримується підприємством, а також запаси ресурсів вказані у наступній таблиці:

Вид товару / Вид ресурсу	*1*	*2*	*3*	*4*	Об'єм ресурсів
Сировина, кг	*3*	*5*	*2*	*4*	*60*
Робоча сила, ч.	*22*	*14*	*18*	*30*	*400*
Обладнання, станко-ч	*10*	*14*	*8*	*16*	*128*
Прибуток на одиницю товару, грн.	*30*	*25*	*56*	*48*	

З цими вихідними даними розв'язати такі задачі:

1) визначити асортимент товару, що максимізує прибуток;

2) визначити оптимальний асортимент за додаткових умов: 1-го товару випустити не більше 5 од., 2-го – не менше 8 од., 3-го і 4-го – у відношенні 1:2;

3) додатково до умов задачі 1) задані виробничі витрати у гривнях на одиницю кожного виробу, відповідно – 6, 9, 12, 3; потрібно знайти

оптимальний асортимент, що максимізує прибуток, за умови, що сумарні виробничі витрати не повинні перевищувати 96 грн.;

4) у задачі 1) визначити, як вплине на максимальний прибуток збільшення кожного з видів ресурсів на одиницю;

5) визначити зміну в оптимальному асортименті, що знайдений у задачі 1), якщо ресурси сировини збільшені на 50%, а ресурси робочої сили і устаткування на 30.

7. Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро та книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дощок, причому фабрика має у наявності 1500 м дощок 1-го типу і 1000 м дощок 2-го типу. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 чол.-г.

У таблиці приведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення 1 од. виробу і прибуток від 1 од. виробу:

Вироби / Ресурси	Витрати на 1 од. виробу			
	столи	стільці	бюро	Книжкові шафи
Дошки 1-го типу, м	*5*	*1*	*9*	*12*
Дошки 2-го типу, м	*2*	*3*	*4*	*1*
Трудові ресурси люд.-г.	*3*	*2*	*5*	*10*
Прибуток, грн./шт.	*12*	*5*	*15*	*10*

З цими вихідними даними розв'язати такі задачі:

1) визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток;

2) розв'язати ту ж задачу при додаткових умовах, що накладаються на асортимент: столів – не менше 40, стільців – не менше 130, бюро – не менше 30 і книжкових шаф – не більше 10;

3) розв'язати задачу 1) при умові комплектності: кількість столів відноситься до кількості стільців, як 1:6;

4) задані додатково ціни: стіл – 32 грн., стілець – 15 грн., бюро – 12 грн. і книжкова шафа 80 грн; потрібно визначити оптимальний асортимент, що максимізує товарну продукцію, при єдиному обмежені на асортимент – умові комплектності столів і стільців 1:6;

8. Тканина трьох артикулів виробляється на ткацьких верстатах двох типів з різною продуктивністю. Для виготовлення тканини використовується пряжа і барвники.

Види ресурсів	Об'єм ресурсів	Продуктивність і норми витрат		
		1	*2*	*3*
Верстати 1-го типу	*30*	*20*	*10*	*25*
Верстати 2-го типу	*45*	*8*	*20*	*10*
Пряжа	*30*	*120*	*180*	*210*
Барвники	*1*	*10*	*5*	*8*
Ціна		*15*	*15*	*20*

В таблиці вказані потужності верстатів (в тис. станко.-г.), ресурси пряжі і барвників (в тис. кг), продуктивності верстатів по кожному виду пряжі (м/ч), норми витрат пряжі і барвників (в кг на 1000 м) і ціна (в грн.) 1 м тканини.

З цими вихідними даними розв'язати такі задачі:

1) визначити оптимальний асортимент, що максимізує товарну продукцію фабрики;

2) прийнявши умову, що кількості тканин трьох артикулів повинні знаходитись у відношенні 2:1:3, визначити яку максимальну кількість комплектів тканини може виробити фабрика;

3) визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток, якщо собівартість 1 м тканин складає відповідно 8, 5 і 15 грн;

4) розв'язати задачу 1) за умови, що станки 1-го типу тканину 1-го артикулу не виробляють;

9. Тваринна ферма складає раціон годування корів на зиму. Є два науково розроблених раціони A і B і довільний раціон C з таким складом:

Раціон A	Не менше 40% кукурудзяного силосу, не більше 40% кормових трав
Раціон B	Не менше 30% кукурудзяного силосу, не більше 50% кормових трав
Раціон C	Корм без обмеження

Задані такі граничні норми розходу кожного продукту, виходячи із заготівлі кормів: кукурудзяного силосу – 200ц, кормових трав – 300ц.

Яку кількість кожного із раціонів повинна використати ферма, щоб отримати максимальний прибуток, якщо при раціоні A він складає 10 грн./ц, при раціоні B – 12 грн./ц, при довільному раціоні – 5 грн./ц?

10. Раціон піддослідної тварини повинен містити не менше 15 одиниць хімічної речовини A_1 (вітаміну або деякої солі) і не менше 15 одиниць хімічної речовини A_2. Не маючи можливості давати речовину A_1 або A_2 в чистому вигляді, можна купувати продукт B_1 по 1 коп. або продукт B_2 по 3 коп. за 1 кг, причому, кожний кілограм B_1 вміщає 1 од. A_1 і 5 од. A_2, а кілограм B_2 – 5 од. A_1 і 1 од. A_2.

Визначити оптимальний вміст продуктів B_1 та B_2 у щоденному раціоні.

11. З чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) виготовляють три види сплавів латуні: звичайний, спеціальний, і для художніх виробів. Вартості одиниць ваги міді, цинку, свинцю і нікелю складають відповідно 0.8 грн., 0.6 грн., 0.4 грн. і 1.0 грн., а одиниць ваги сплавів, відповідно, 2 грн., 3 грн., 4грн.

Сплав для художніх виробів повинен містити не менше 6% нікелю, не менше 50% міді і не більше 30% свинцю; спеціальний – не менше 4% нікелю, не менше 70% міді, не менше 10% цинку і не більше 20% свинцю. У звичайний сплав компоненти можуть входити без обмежень.

Виробнича потужність підприємства дозволяє випускати (за визначений строк) не більше 400 од. ваги звичайного сплаву, не більше 700 од. ваги спеціального сплаву і не більше 100 од. ваги декоративного сплаву.

Знайти виробничий план, що забезпечує максимальний прибуток.

12. Для виготовлення брусів трьох розмірів: 0.6 м, 1.5 м і 2.5 м у відношенні 2:1:3 на розпил надходять колоди довжиною у 3 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальне число комплектів.

13. Визначити за даними задачі **12** оптимальний план розпилу, якщо на обробку надходять також двометрові колоди, причому співвідношення між 3- і 2-метровими колодами складає 1:3.

14. Провести розпил 5-метрових колод на бруси розмірів 1.5; 2.4 і 3.2 м у відношенні 2:3:5 так, щоб мінімізувати загальну величину відходів.

15. Полуфабрикати надходять на підприємство у вигляді листів фанери. Всього є дві партії матеріалів, причому, перша партія має 400 листів, а друга – 250 листів фанери. Із листів фанери, що поступають, необхідно виготовити комплекти, що містять 4 деталі 1-го типу, 3 деталі 2-го типу і 2 деталі 3-го типу. Лист фанери кожної партії може розкроюватись різними способами.

Кількість деталей кожного типу, яку отримують при розкрої одного листа відповідної партії тим чи іншим способом розкрою, наведена в наступній таблиці.

Перша партія				Друга партія		
Деталі \ Спосіб розкрою	1	2	3	Деталі \ Спосіб розкрою	1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Потрібно розкроїти матеріал так, щоб забезпечити виготовлення максимального числа комплектів.

4. Загальна, стандартна та канонічна форми задачі ЛП.

4.1. Основні факти.

У загальному випадку задачу ЛП можна сформулювати так: знайти вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$, який задовольняє систему умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0}\,,\;\; i = \overline{1,r}\;; \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge a_{i0}\,,\;\; i = \overline{r+1,l}\;; \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0}\,,\;\; i = \overline{l+1,m}\;; \tag{4.3}$$

$$x_j \ge 0\,,\;\; j = \overline{1,k} \le n \tag{4.4}$$

і максимізує (або мінімізує) лінійну функцію

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c^T x \to \max\,. \tag{4.5}$$

Таку форму задачі ЛП, як правило, отримують в результаті моделювання оптимізаційної задачі за змістовною постановкою.

Множина точок $D \subset R^n$, координати яких задовольняють умови (4.1)–(4.4), називається ***допустимою областю*** задачі (4.1)–(4.5).

Довільний елемент $\boldsymbol{x} \in D$ називається ***планом*** **(*розв'язком*, *вектором*)** задачі (4.1)–(4.5).

Лінійна функція (форма) (4.5) називається ***цільовою*** **або** ***критеріальною*** функцією задачі (4.1)–(4.5).

Допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}^* \in D$, який максимізує (або мінімізує) цільову функцію задачі (4.1)–(4.5), позначається

$$\boldsymbol{x}^* = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in D} L(\boldsymbol{x}) \;\; (\text{або}\;\; \boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in D} L(\boldsymbol{x})),$$

називається ***оптимальним розв'язком*** задачі ЛП (4.1)–(4.5).

Задача мінімізації функції $L(\boldsymbol{x})$ еквівалентна задачі максимізації функції $-L(\boldsymbol{x})$, при цьому $\min L(\boldsymbol{x}) = -\max(-L(\boldsymbol{x}))$.

Системи нерівностей (4.1), (4.2) обертаються в системи рівнянь шляхом введення в ліві частини (4.1), (4.2) невід'ємних змінних $x_{n+i} \ge 0$ ($i = \overline{1,l}$), які називаються ***балансними або слабими змінними***, з відповідними знаками:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + x_{n+i} = a_{i0}\,,\;\; i = \overline{1,r}\;; \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - x_{n+i} = a_{i0}\,,\;\; i = \overline{r+1,l}\,. \tag{4.7}$$

Вважається, що балансні змінні входять у цільову функцію задачі ЛП з нульовими коефіцієнтами.

Система рівнянь (4.3) обертається у систему нерівностей шляхом заміни кожного рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0}$$

системою двох нерівностей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge a_{i0}. \end{cases} \tag{4.8}$$

При необхідності завжди можна вважати, що всі $a_{i0} \ge 0$ в задачі (4.1)-(4.5), оскільки в іншому випадку відповідні рівняння або нерівність можна помножити на -1 і поміняти знак нерівності на протилежний.

Також при розгляді задачі ЛП можна вважати, що всі змінні задачі невід'ємні, оскільки кожну змінну x_j, на яку не накладена умова невід'ємності, завжди можна замінити різницею двох невід'ємних змінних

$$x_j = x'_j - x''_j\,,\ x'_j \ge 0\,,\ x''_j \ge 0\,.$$

Надалі будемо називати :

1) загальною задачею ЛП – задачу

$$\max\left\{ L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0}, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \right\}; \tag{4.9}$$

2) стандартною задачею ЛП – задачу

$$\max\left\{ L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0}, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \right\}; \tag{4.10}$$

3) канонічною задачею ЛП – задачу

$$\max\left\{ L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}, i = \overline{1,m}, \alpha_{i0} \ge 0, x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \right\}. \tag{4.11}$$

Зауважимо що визначальним фактором при такій класифікації задач ЛП є в першу чергу тип обмежень, а не критерій оптимізації.,

Потрібно вміти перетворювати одну форму задач ЛП в іншу. Зазначимо, що приведення задачі (4.1)–(4.5) зі змішаною системою обмежень до загальної форми, а також перехід від загальної форми до стандартної і, навпаки, особливих труднощів не викликає. Зведення ж довільної задачі ЛП у стандартній формі до канонічної вимагає застосування симплекс-методу і тому розглядається нижче (див. розділ 7).

4.2. Приклади.

Розглянемо приклади взаємних перетворень задач ЛП, записаних у різних формах.

Приклад 1. Звести до загальної форми задачу ЛП:

$$z = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування.

Перший спосіб. Спочатку приведемо ло потрібного вигляду основну систему обмежень.

Перше обмеження має потрібну форму:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5 .$$

Замінимо друге обмеження еквівалентною системою нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_3 \ge 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 \le 8, \\ -x_1 - 2x_3 \le 8. \end{cases}$$

Трете обмеження множимо почленно на (–*1*):

$$x_1 + 2x_2 \le -1 .$$

Остаточно отримаємо таку систему обмежень-нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 \qquad + 2x_3 \le 8, \\ -x_1 \qquad - 2x_3 \le -8, \\ x_1 + 2x_2 \qquad \le -1. \end{cases}$$

Покладемо $L = -z = -x_1 + x_2 - 3x_3$ і замінимо задачу $\min z$ еквівалентною задачею $\max L$.

І, накінець, замінимо змінну x_3, на яку не накладена умова невід'ємності, різницею двох невід'ємних змінних: $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3' \ge 0$, $x_3'' \ge 0$. Отримаємо таку загальну задачу ЛП:

$$L=-x_1+x_2-3x_3'+3x_3''\to \max,$$
$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3'-3x_3''\le 5,\\ x_1\qquad +2x_3'-2x_3''\le 8,\\ -x_1\qquad -2x_3'+2x_3''\le -8,\\ x_1\;+2x_2\qquad\qquad \le -1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3'\ge 0, x_3''\ge 0.\end{cases}$$

Останню задачу зручніше розглядати у еквівалентному вигляді з послідовною нумерацією змінних.

$$L=-y_1+y_2-3y_3+3y_4\to \max,$$
$$\begin{cases}2y_1-y_2+3y_3-3y_4\le 5,\\ y_1\qquad +3y_3-3y_4\le 8,\\ y_1\qquad -3y_3+3y_4\le 8,\\ y_1+2y_2\qquad\qquad \le -1,\\ y_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.\end{cases}$$

<u>Другий спосіб</u>. Недоліком першого способу є збільшення на число рівнянь-обмежень вихідної задачі числа обмежень перетвореної задачі.

Другий спосіб не збільшує числа обмежень при перетвореннях іі полягає у використанні вибраного рівняння-обмеження для виключення однієї і тієї ж самої змінної із системи обмежень та цільової функції з наступним відкиданням цієї змінної із цього рівняння і перетворенням його у нерівність, тобто другий спосіб зменшує число змінних задачі. Виключення змінної доцільно здійснювати методом Жордана-Гаусса.

Однак цей спосіб можна застосовувати лише тоді, коли відомий знак змінної яка вилучається. Оскільки вихідна задача має лише одне рівняння-обмеження, то виключити можна лише одну змінну.

Отже, за допомогою другого рівняння виключимо змінну $x_1\ge 0$ з інших обмежень.

Запишемо розширену матрицю системи обмежень:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{A_3} & \boldsymbol{A_0}\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 2 & 8\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Виконаємо на матриці крок повного виключення методу Жордана-Гаусса з ведучим елементом $a_{21} = 1$. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{A_3} & \boldsymbol{A_0} \\ 0 & -1 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right).$$

Після такого перетворення вихідна задача набуває вигляду

$$z = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 \le -11, \\ x_1 + 2x_3 = 8, \\ -2x_2 + 2x_3 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Виключивши за допомогою другого рівняння змінну x_1 з цільової функції та помноживши останню нерівність на (–*1*) і змінивши її знак на протилежний, отримаємо, відкинувши у другому рівнянні невід’ємну змінну x_1,

$$z = 8 - x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \le -11, \\ 2x_3 \le 8, \\ 2x_2 - 2x_3 \le -9, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Змінивши критерій оптимізації з мінімізації функції z на максимізацію функції $L = -z$ та замінивши змінну x_3 різницею двох невід'ємних змінних: $x_3 = x_3' - x_3''$, де $x_3' \ge 0$, $x_3'' \ge 0$, остаточно отримаємо таку загальну задачу ЛП

$$L = -8 + x_2 - x_3' + x_3'' \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3' - x_3'' \le -11, \\ 2x_3' - x_3'' \le 8, \\ 2x_2 - 2x_3' - x_3'' \le -9, \\ x_2 \ge 0, x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0. \end{cases}$$

Після відшукання компонент $x_2^*, x_3^{*\prime}, x_3^{*\prime\prime}$ оптимального розв'язку цієї задачі, оптимальний розв'язок вихідної задачі отримують у вигляді $\boldsymbol{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, де $x_3^* = x_3^{*\prime} - x_3^{*\prime\prime}$, $x_1^* = 8 - 2x_3^*$.

Приклад 2. Звести до стандартної форми задачу ЛП.

$$z = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 \qquad + 3x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad \le -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Щоб перетворити систему обмежень задачі у систему рівнянь, додамо:

а) у ліву частину першої нерівності балансну змінну $x_4 \ge 0$ зі знаком "+";

б) у ліву частину третьої нерівності балансну змінну $x_5 \ge 0$ зі знаком "+".

Отримаємо

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 5, \\ x_1 \qquad + 2x_3 \qquad = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad + x_5 = -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Змінюючи критерій оптимізації з $\min$ на $\max$ і замінивши змінну x_3 різницею двох невідомих так, як це ми зробили при розгляді прикладу 1, остаточно отримаємо таку задачу ЛП у стандартній формі

$$L = -x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + x_4 \qquad = 5, \\ x_1 \qquad + 2x_3' - 2x_3'' \qquad = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad + x_5 = -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3' \ge 0, x'' \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Цю задачу знову ж таки як і у прикладі 1 зручно розглядати у еквівалентному вигляді з послідовною нумерацією змінних

$$L = -y_1 + y_2 - 3y_3 + 3y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 - 3y_4 + y_5 \qquad = 5, \\ y_1 \qquad + 2y_3 - 2y_4 \qquad = 8, \\ -y_1 - 2y_2 \qquad + y_6 = -1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0, y_5 \ge 0, y_6 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 3. Звести задачу ЛП у стандартній формі до задачі ЛП у загальній формі

$$L = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 \qquad = 4, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Найпростіший спосіб перетворення задачі, як вже відзначалося раніше, полягає у заміні кожного рівняння парою двох нерівностей протилежного змісту. Однак, цей спосіб не можна вважати раціональним, оскільки він збільшує удвічі число обмежень задачі.

Тому знову ж, як і при розв'язуванні другим способом прикладу 1, застосуємо метод повного виключення невідомих Жордана-Гаусса до перетворення системи обмежень задачі. Одночасно з виключенням невідомих з рівнянь системи будемо їх виключати і з цільової функції.

Для цього перепишемо систему обмежень і цільову функцію у вигляді:

$$\begin{cases} 2 = x_1 \qquad - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5, \\ 6 = 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5, \\ 4 = -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4, \\ 4 = L - 2x_1 + x_2 - 3x_4 - 2x_5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Результати обчислень заносимо у **таблицю 2**.

Пояснення до обчислень. ***На вихідному нульовому кроці*** вибираємо ведучим другий рядок і стовпчик A_2 і методом повного виключення приводимо стовпчик A_2 до виду $e_2 = (0,1,0)^T$. Отримуємо таблицю кроку 1.

На першому кроці вибираємо ведучим перший рядок і стовпчик A_3 і методом повного виключення приводимо стовпчик A_3 до виду $e_1 = (1,0,0)^T$. Отримуємо таблицю кроку 2.

На другому кроці вибираємо ведучим третій рядок і стовпчик A_4 іметодом повного виключення приводимо стовпчик A_4 до виду $e_3 = (0,0,1)^T$. Отримуємо остаточну таблицю кроку 3.

Таблиця 2.

№ кр	$X_б$	A_0	L	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0		2	0	1	0	-1	2	-3
	x_2	4	0	2	1	1	0	1
		6	0	-1	2	0	3	0
		4	1	-2	1	0	-3	-2
1	x_3	2	0	1	0	-1	2	-3
	x_2	6	0	2	1	1	0	1
		-8	0	-5	0	2	3	-2
		-2	1	-4	0	-1	-3	-3
2	x_3	-2	0	-1	0	1	-2	3
	x_2	8	0	3	1	0	2	-2
	x_4	-12	0	-7	0	0	-1	4
		-4	1	-5	0	0	-5	0
3	x_3	22	0	13	0	1	0	-5
	x_2	-16	0	-11	1	0	0	6
	x_4	12	0	7	0	0	1	-4
		56	1	30	0	0	0	-20

Отже, після перетворення цільова функція і система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} 56 = L + 30x_1 \qquad\qquad - 20x_5, \\ 22 = \quad 13x_1 \quad + x_3 \quad - 5x_5, \\ -16 = -11x_1 + x_2 \qquad\quad + 6x_5, \\ 12 = \quad 7x_1 \qquad\quad + x_4 - 4x_5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Оскільки базисні змінні x_2, x_3, x_4 невід'ємні, то відкидаючи їх із відповідних обмежень, отримаємо таку задачу:

$$L = 30x_1 - 20x_5 - 56 \to \max,$$
$$\begin{cases} 13x_1 - 5x_5 \le 22, \\ -11x_1 + 6x_5 \le -16, \\ 7x_1 - 4x_5 \le 12, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Якщо змінні x_1 і x_5 у оптимальному розв'язку цієї задачі мають відповідні значення x_1^* і x_5^*, то оптимальний розв'язок X^* вихідної задачі матиме вигляд $X^* = (x_1^*; -16 + 11x_1^* - 6x_5^*; 22 - 13x_1^* + 5x_5^*; 12 - 7x_1^* + 4x_5^*; x_5^*)$.

4.3. Вправи.

1. Привести до канонічної форми такі задачі лінійного програмування:

1) $z = x_1 - x_2 + 3x_3 (\min),$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0;$

2) $z = 2x_1 + x_2 - x_3 (\max),$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0;$

3) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 (\min),$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 \le 4, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0;$

4) $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 (\max),$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

2. Привести до стандартної моделі такі задачі лінійного програмування:

1) $z = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 (\max),$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \ge 0;$

2) $z = x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 (\min),$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 8, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \ldots, x_5 \ge 0;$

3) $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 (\max),$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \ldots, x_5 \ge 0;$

4) $z = 3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 (\min),$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 9, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \ldots, x_5 \ge 0.$

5. Геометрична інтерпретація та графічний спосіб розв'язування задач лінійного програмування.

5.1. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.

Розглянемо задачу лінійного програмування у просторі $\boldsymbol{R}^2$, тобто на площині. Нехай вона має вигляд:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max, \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_{10}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_{m0}, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Будемо вважати, що система (5.2) сумісна. Кожна нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le a_{i0}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5.3}$$

цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = a_{i0}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.4}$$

Прямі умови $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ визначають перший квадрант координатної площини.

Оскільки система (5.2) сумісна, то перетин всіх півплощин (5.3) як опуклих множин з першим квадрантом є непорожньою, опуклою, многокутною множиною.

Отже, задача лінійного програмування у двовимірному випадку являє собою задачу відшукання екстремуму лінійної функції (5.1) на опуклій многокутній області, що лежить у першому квадранті координатної площини.

Припустимо, що ця область обмежена (див. рис 5.1). Розглянемо цільову функцію, поклавши

$$c_1x_1 + c_2x_2 = h = const. \tag{5.5}$$

Множину точок площини, координати яких задовольняють це рівняння, називають лінією рівня цільової функції, а сталу h називають сталою рівня.

Назвемо опорною прямою опуклого многокутника таку пряму, яка має з многокутником, розміщеним по один бік від неї, принаймні одну спільну точку.

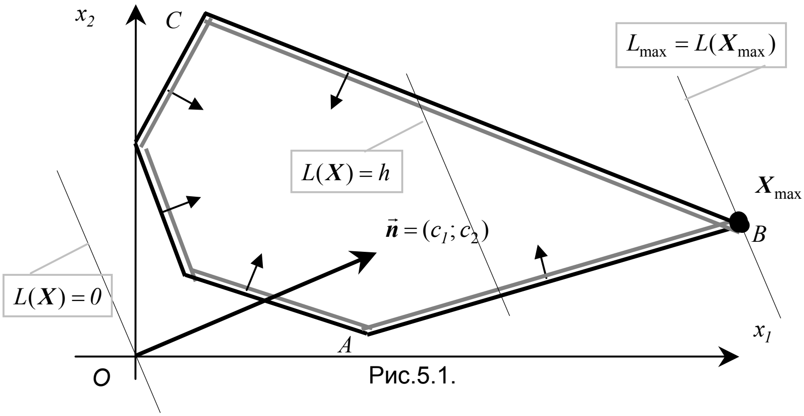


Рис.5.1.

Тоді задачі лінійного програмування (5.1), (5.2) можна дати таку геометричну інтерпретацію: знайти множину точок її многокутника допустимих розв'язків, в яких пряма (5.5) стає опорною і h ***досягає при цьому максимального значення.***

5.2. Графічний спосіб розв'язування задачі лінійного програмування.

З геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування безпосередньо випливає такий спосіб її графічного розв'язування:

1) будуємо на координатній площині множину допустимих розв'язків задачі (5.1), (5.2);

2) будуємо довільну лінію рівня цільової функції так, щоб вона перетинала допустиму множину і так, щоб точки допустимої множини лежали по обидва боки від лінії рівня;

3) будуємо вектор $\vec{n} = (c_1, c_2)$ і, оскільки він задає напрямок зростання функції $L = c_1x_1 + c_2x_2$, пересуваємо лінію рівня у напрямку вектора $\vec{n}$ доти, поки вона не стане опорною для допустимої множини (якщо розв'язується задача мінімізації, то лінію рівня пересуваємо у напрямку, протилежному $\vec{n}$);

4) обчислюємо координати точок, в яких ***опорна*** лінія рівня цільової функції перетинає допустиму область, розв'язуючи відповідні системи двох

лінійних рівнянь з двома невідомими (ці точки утворюють множину оптимальних розв'язків задачі (5.1), (5.2));

5) обчислюємо оптимальне значення цільової функції $L = c_1x_1 + c_2x_2$, підставляючи замість її аргументів координати довільного оптимального розв'язку.

<u>Зауваження до п.1</u>). Щоб побудувати півплощину, яка визначається нерівністю $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le a_{i0}$, $i = \overline{1,m}$, спочатку потрібно побудувати за двома точками її граничну пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = a_{i0}$, $i = \overline{1,m}$; потім взяти довільну точку координатної площини, що не лежить на цій граничній прямій, і підставити її координати у нерівність. Якщо нерівність задовольняється, то точка належить шуканій півплощині, в іншому випадку шуканою є півплощина, що не містить вибраної точки. Знайдену півплощину позначаємо стрілкою, як зображено на рис.5.1.

Якщо задача (5.1), (5.2) не має допустимих розв'язків, то перетин всіх побудованих півплощин з першим квадрантом буде порожнім.

<u>Зауваження до п.4</u>). Якщо задача (5.1), (5.2) розв'язна, то таких точок буде або одна, або безліч, і серед них буде, принаймні, одна вершина допустимого многокутника. Зокрема, ***на рис.5.1 наведена інтерпретація задачі ЛП, що має єдиний оптимальний розв'язок*** – вершину $B = X^*$. Її координати знаходимо як розв'язок системи двох лінійних рівнянь, що відповідають прямим AB і BC.

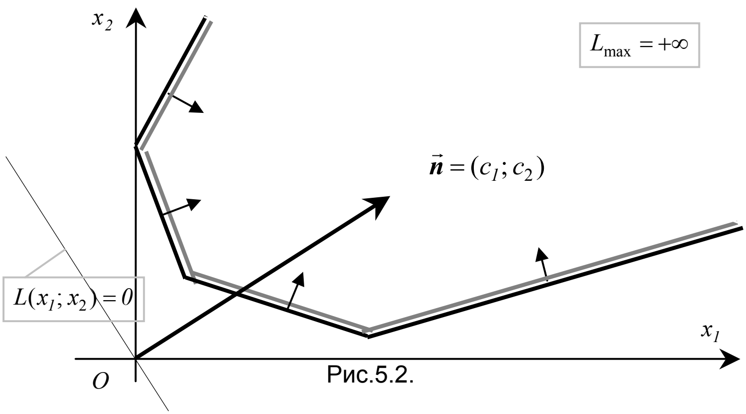


Рис.5.2.

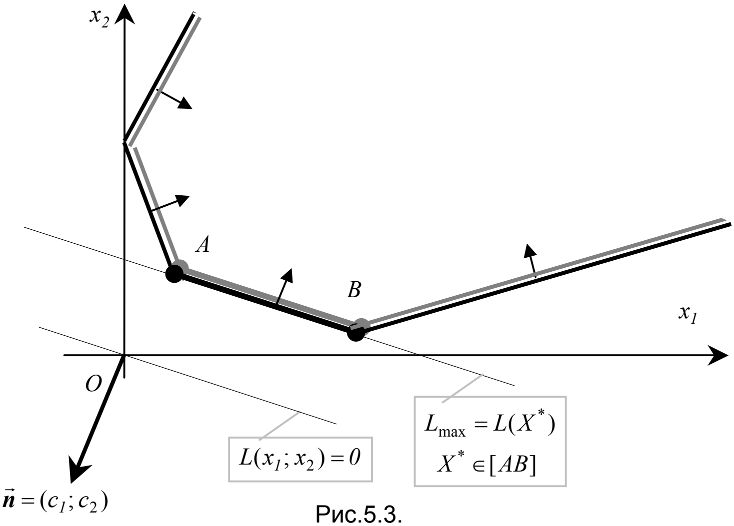


Рис.5.3.

Зупинимось тепер на інших важливих випадках, які можуть виникнути при графічному розв'язуванні задач ЛП:

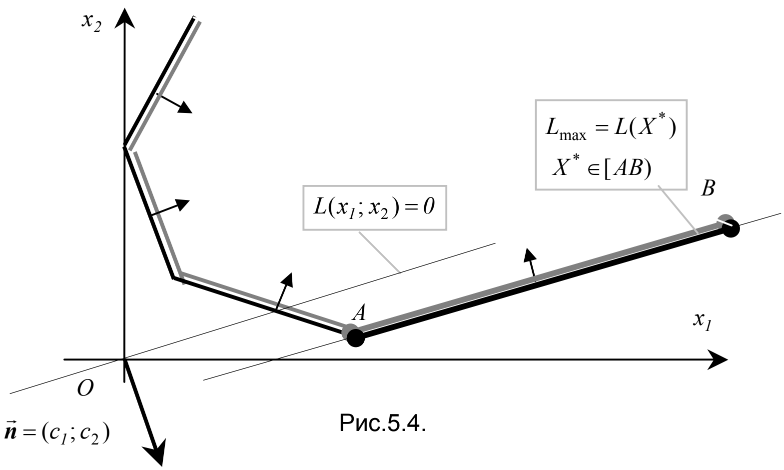


Рис.5.4.

– ***допустима множина необмежена*** у напрямку зростання цільової функції (рис.5.2.), задача ЛП нерозв'язна із-за необмеженності зверху її цільової функції на допустимій множині;

– ***множина оптимальних розв'язків нескінченна***; вона є або ***відрізком*** (рис.5.3.) або ***променем*** (рис. 5.4.) і складається із всіх точок деякої сторони AB допустимої множини (якщо AB – промінь,

то B – нескінченна точка). Лінія рівня цільової функції паралельна цій стороні.

Розглянута задача (5.1), (5.2) є основною при графічному розв'язуванні задач ЛП. Якщо вихідну задачу ЛП не можна звести до вигляду (5.1), (5.2), то така задача не розв'язується графічно.

Вихідна задача у стандартній формі

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \to \max,$$
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A_0},$$
$$\boldsymbol{x} \geq 0,$$

зводиться до задачі (5.1), (5.2) лише за умови, що $n - r \leq 2$, де n – число змінних задачі, а $r = rangA$.

5.3. Приклади.

Приклад 1. Розв'язати графічно задачу ЛП:

$$L = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, (\mathrm{I}) \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, (\mathrm{II}) \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, (\mathrm{III}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Будуємо область допустимих розв'язків системи нерівностей-обмежень задачі.

Граничною прямою першого обмеження є пряма $2x_1 + 3x_3 = 18$. Будуємо її за двома точками, через які вона проходить.

Якщо $x_1 = 0$ то $x_2 = 6$, тобто, пряма проходить через точку $A(0;6)$. Якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 9$, тобто, пряма проходить через точку $B(9;0)$. Наносимо точки A і B на координатну площину і проводимо через них пряму. Ця пряма розбиває координатну площину на дві півплощини таких, що координати точок однієї з них задовольняють перше обмеження, а координати точок протилежної їй півплощини не задовольняють перше обмеження. Щоб визначити потрібну півплощину, вибираємо довільну точку, що не лежить на прямій AB, і підставляємо її координати у перше обмеження.

Якщо пряма не проходить через початок координат, то доцільно для такої підстановки вибирати точку O – початок координат.

Координати точки O задовольняють перше обмеження, тому шуканою півплощиною є та, що містить точку O, позначимо її стрілкою.

Аналогічно будуються всі інші півплощини, які визначаються обмеженнями задачі:

– другим обмеженням $-x_1+3x_2 \le 9$ (гранична пряма $-x_1+3x_2=9$ проходить через точки $C(0,3)$ і $D(3;4)$);

– третім обмеженням $2x_1-x_2 \le 10$ (гранична пряма $2x_1-x_2=10$ проходить через точки $E(5;0)$ і $F(7;4)$);

– умовами невід'ємності $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Перетином всіх півплощин є опуклий прямокутник $OCDGE$ (див. рис.5.5.). Він і являє собою область допустимих розв'язків задачі.

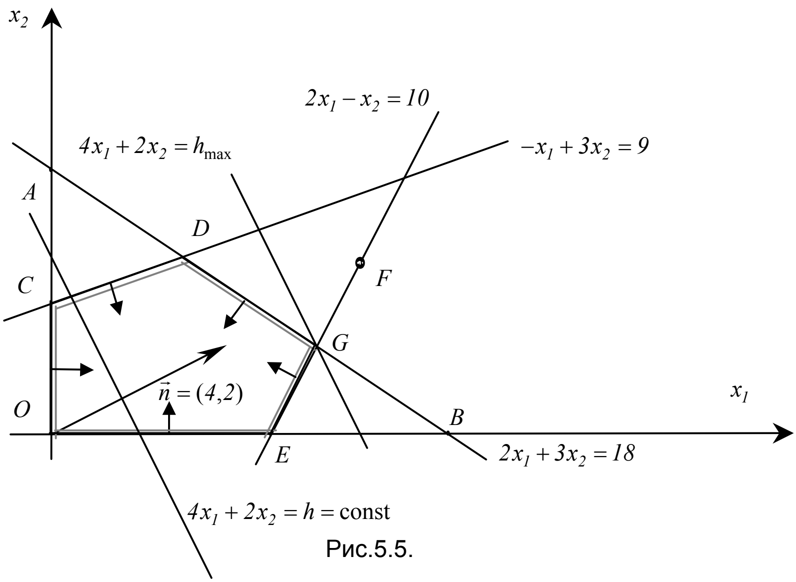


Рис.5.5.

Будуємо на тій же координатній площині вектор $\vec{n}=(4;2)$ та проводимо довільну лінію рівня $4x_1+2x_2=h=\text{const}$ цільової функції $L=4x_1+2x_2$ ортогонально вектору $\vec{n}$ і так, щоб допустима область задачі знаходилась по обидва боки від цієї лінії рівня.

Оскільки ми розв'язуємо задачу максимізації функції L, то переміщуємо побудовану лінію рівня паралельно самій собі у напрямку вектора $\vec{n}$ доки, поки вона не стане опорною.

Легко бачити, що опорне положення лінія рівня приймає у точці G. Отже, $X^*_{\max}=G$ і $L_{\max}=L(X^*_{\max})$.

Координати точки $X^*_{\max}$ знаходимо, розв'язуючи систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=18,\\ 2x_1-x_2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x_2=8,\\ 2x_1-x_2=10,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=6,\\ x_2=2.\end{cases}$$

Остаточно отримаємо $X^*_{\max}=(6;2)$; $L_{\max}=4\cdot 6+2\cdot 2=28$.

Приклад 2. Розв'язати графічно задачу ЛП

$$z=x_1-2x_2+x_3-x_4+9\to\min,$$

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=1,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=2,\\ 2x_2+x_3-x_4+3x_5=12,\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Зведемо задачу до загального виду (5.1)–(5.2).

Спочатку змінимо критерій оптимізації з мінімізації функції z на максимізацію функції $L=-z$ та перепишемо цільову функцію і систему обмежень у вигляді

$$\begin{cases}1=\quad -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5,\\ 2=\quad 2x_1-x_2+x_3-3x_4,\\ 12=\quad 2x_2+x_3-x_4+3x_5,\\ -9=L+x_1-2x_2+x_3-x_4,\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

Тепер скористаємось методом повного виключення Жордана-Гаусса для приведення вибраних на кожному кроці векторів-стовпчиків A_j матриці коефіцієнтів системи до одиничного вигляду. Результати обчислень заносимо у **таблицю 3.**

Таблиця 3.

№ кроку	$X_б$	A_0	L	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	$x_1 \rightarrow$	1	0	-1	1	-1	1	1
		2	0	2	-1	1	-3	0
		12	0	0	2	1	-1	3
		-9	1	1↑	-2	1	-1	0
1	x_1	-1	0	1	-1	1	-1	-1
	$x_2 \rightarrow$	4	0	0	1	-1	-1	2
		12	0	0	2	1	-1	3
		-8	1	0	-1↑	0	0	1
2	x_1	3	0	1	0	0	-2	1
	x_2	4	0	0	1	-1	-1	2
	$x_4 \rightarrow$	4	0	0	0	3	1	-1
		-4	1	0	0	-1	-1↑	3
3	x_1	11	0	1	0	6	0	-1
	x_2	8	0	0	1	2	0	1
	x_4	4	0	0	0	3	1	-1
		0	1	0	0	2	0	2

Використовуючи таблицю кроку 3, записуємо вихідну задачу у еквівалентному вигляді

$$L = -2x_3 - 2x_5 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_3 - x_5 = 11, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 8, \\ 3x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи обмежень цієї задачі має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = 11 - 6x_3 + x_5, \\ x_2 = 8 - 2x_3 - x_5, \\ x_4 = 4 - 3x_3 + x_5. \end{cases} \tag{5.6}$$

Оскільки, $x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$, то

$$\begin{cases} 11 - 6x_3 + x_5 \geq 0, \\ 8 - 2x_3 - x_5 \geq 0, \\ 4 - 3x_3 + x_5 \geq 0. \\ x_3 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

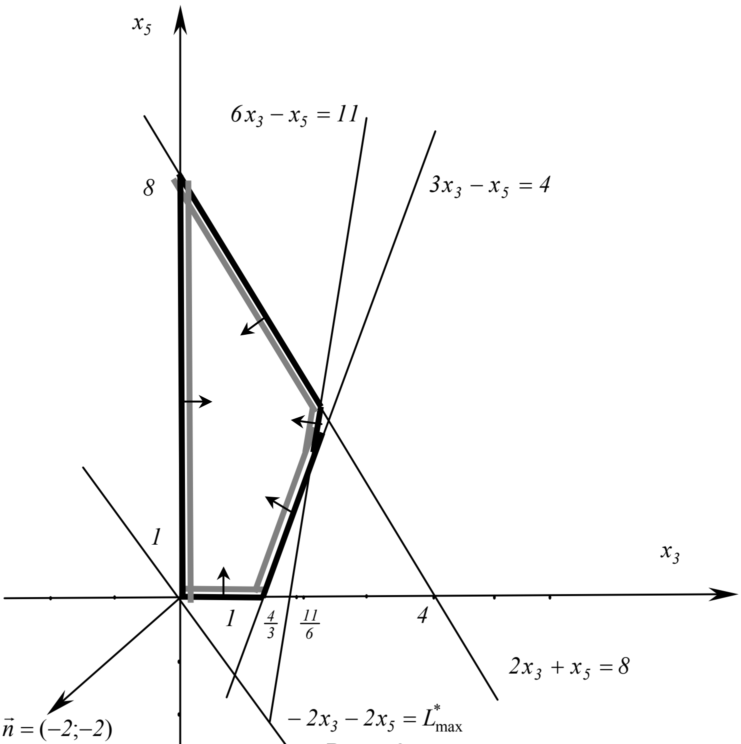


Рис.5.6.

Тому, остаточно, отримуємо таку загальну задачу ЛП

$$L = -2x_3 - 2x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_3 - x_5 \le 11, \\ 2x_3 + x_5 \le 8, \\ 3x_3 - x_5 \le 4, \\ x_3 \ge 0, x_5 \ge 0, \end{cases}$$

яку розв'язуємо графічно (див. рис.5.6).

Отже, максимальне значення $L^*_{\max} = 0$ цільової функції $L = -2x_3 - 2x_5$ досягається у точці $(x_3^*, x_5^*) = O = (0,0)$ координатної площини x_3Ox_5, тобто $x_3 = 0, x_5 = 0$.

Значення координат x_1^*, x_2^*, x_4^* оптимального розв'язку вихідної задачі обчислюємо за формулами (5.6): $x_1^* = 11,\ x_2^* = 8,\ x_4^* = 4$.

Тоді оптимальний розв'язок вихідної задачі та її оптимальне значення відповідно рівні вектору $\boldsymbol{X}^*_{\min} = (11;8;0;4;0)$ та числу $Z^*_{\min} = -L^*_{\max} = 0$.

5.4. Вправи.

Розв'язати графічно такі задачі лінійного програмування:

1) $z = x_1 - 2x_2 (\min)$,
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

2) $z = x_1 + x_2 (\max)$,
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3) $z = x_1 + 3x_2 (\max)$,
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

4) $z = 5x_1 + 3x_2 (\max)$,
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

5) $z = 2x_1 + 3x_2 (\max)$,
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

6) $z = 2x_1 + 3x_2 (\min)$,
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 + x_2 (\min)$,
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5; \end{cases}$$

8) $z = x_1 - x_2 (\max)$,
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

9) $z = 2x_1 + x_2 (\max)$,
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \end{cases}$$

10) $z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 (\max),$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_i \ge 0 (i = 1,...,4); \end{cases}$$

11) $z = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 (\min),$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_i \ge 0 (i = 1,...,5); \end{cases}$$

12) $z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 (\max),$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_i \ge 0 (i = 1,...,6); \end{cases}$$

13) $z = -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 (\max),$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 = -13, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 - x_6 = 0, \\ x_i \ge 0 (i = 1,...,6); \end{cases}$$

14) $z = x_1 - x_2 (\max),$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_i \ge 0 (i = 1,...,5); \end{cases}$$

15) $z = x_1 - x_2 (\max),$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_i \ge 0 (i = 1,...,6). \end{cases}$$

6. Симплекс-алгоритм для розв'язування канонічних задач лінійного програмування.

6.1 Основні факти.

Теорема 5.1 (про оптимальні розв'язки задачі ЛП і вершини її допустимої області).

1. Якщо цільова функція задачі ЛП

$$\max \left\{ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} : \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{x} \ge 0 \right\} \qquad \textbf{(6.1)}$$

набуває максимального значення в деякій допустимій точці $\boldsymbol{x}^* \in D = \{\boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a_0, \boldsymbol{x} \ge 0\}$ ***, то вона набуває цього ж значення і в деякій вершині*** D ***.***

2. Якщо цільова функція задачі (6.1) набуває максимального значення у кількох вершинах допустимої області D, то вона набуває цього значення і в довільній їх опуклій комбінації.

Теорема 6.2 (про опорні розв'язки задачі ЛП і вершини її допустимої області).

Допустимий розв'язок задачі ЛП (6.1) є вершиною її допустимої області D тоді і тільки тоді, коли він базисний (опорний).

Зауваження 6.1.

За теоремою 1 оптимальний розв'язок задачі ЛП, якщо він існує, є вершиною допустимої області задачі.

За теоремою 2 кожній вершині допустимої області задачі ЛП відповідає опорний (базисний, допустимий) розв'язок системи

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{x} \ge 0. \qquad (6.2)$$

Отже перехід він однієї вершини допустимої області D до іншої означає перехід від одного опорного розв'язку системи (6.2) до іншого.

У симплекс-методі здійснюються послідовні переходи від одного опорного розв'язку (плану) задачі ЛП до іншого так, щоб базис наступного опорного плану відрізнявся від базису попереднього тільки одним вектором.

Лема 6.1 (про заміну вектора у базисі)

Нехай $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n$ система m-вимірних векторів ($m < n$) рангу m і $x_j \ge 0,\ j = 1,...,5.$ *деякий її базис.*

Система векторів $\boldsymbol{B}' = \{\boldsymbol{A}_{i_1}, \boldsymbol{A}_{i_2}, ..., \boldsymbol{A}_{i_{l-1}}, \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{A}_{i_{l+1}}, ..., \boldsymbol{A}_{i_m}\}$, де $\boldsymbol{A}_k$ ($k \ne i_s; s = \overline{1,m}$) – небазисний вектор, буде базисом системи $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n\}$, тоді і тільки тоді коли у розкладі

$$\boldsymbol{A}_k = \alpha_{1k} \boldsymbol{A}_{i_1} + ... + \alpha_{lk} \boldsymbol{A}_{i_l} + ... + \alpha_{mk} \boldsymbol{A}_{i_m} \qquad \textbf{(6.3)}$$

вектора $\boldsymbol{A}_k$ по базису $\boldsymbol{B}$ коефіцієнт α_{lk} задовольняє умову

$$\alpha_{lk} \ne 0. \qquad \textbf{(6.4)}$$

Теорема 6.3 (достатні умови переходу до кращого опорного розв'язку задачі ЛП).

Нехай $\boldsymbol{x} = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, ..., \alpha_{m0}, \underbrace{0,...,0}_{n-m})^T$ відомий опорний розв'язок задачі (6.1), $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m]$ відповідна йому базисна матриця.

Якщо існує небазисний вектор A_k у системі $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{A}_{m+1}, ..., \boldsymbol{A}_n\}$, для якого $\Delta_k < 0$ ($\Delta_s = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_s) - c_s = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{is} - c_s$), і у розкладі якого

$$\boldsymbol{A}_k = \alpha_{1k}\boldsymbol{A}_{i_1} + ... + \alpha_{lk}\boldsymbol{A}_{i_l} + ... + \alpha_{mk}\boldsymbol{A}_{i_m} \qquad (6.5)$$

по базису B існує принаймні один додатний коефіцієнт $\alpha_{ik} > 0$, то заміна вектором A_k базисного вектора з порядковим номером $l = \arg\min_{\{i\alpha_{ik}>0\}} \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}}$ у базисі B приведе до нового базису $\boldsymbol{B}' = [\boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_{l-1}, \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{A}_{l+1}, ..., \boldsymbol{A}_m]$, якому відповідає, новий базисний розв'язок $\boldsymbol{x}' = (\alpha'_{10}, ..., \alpha'_{l-1,0}, 0, \alpha'_{l+1,0}, ..., \alpha'_{m0}, 0, ..., 0, \underset{k}{\alpha'_{l0}}, 0, ..., 0)^T$, де

$$\begin{aligned} &\alpha'_{i0} = \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}}\alpha_{ik}, i = \overline{1,m}, i \neq l, \\ &\alpha'_{l0} = \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}}, \end{aligned} \qquad (6.6)$$

і для якого $\boldsymbol{c}^T x \le \boldsymbol{c}^T x'$, зокрема, $\boldsymbol{c}^T x < \boldsymbol{c}^T x'$, якщо задача (6.1) невироджена.

Зауваження 6.2.

Якщо система (2) приведена до канонічної форми

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e}_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j x_j = \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_0 \ge 0, \boldsymbol{x} \ge 0, \qquad (6.7)$$

де $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_i, i = \overline{1,m}$, $\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j, j = \overline{m+1,n}$; $\boldsymbol{\alpha_0} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_0$, то заміну вектора $\boldsymbol{e}_l$ у канонічному базисі вектором $\boldsymbol{\alpha}_k$ практично здійснюють методом повного виключення Жордана-Гаусса, виконуючи один крок повного виключення з ведучим елементом $\boldsymbol{\alpha}_{lk}$ на розширеній матриці $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & \alpha_{1,m+1} & .. & \alpha_{1k} & .. & \alpha_{1n} & \alpha_{10} \\ 0 & 1 & .. & 0 & .. & 0 & \alpha_{2,m+1} & .. & \alpha_{2k} & .. & \alpha_{2n} & \alpha_{20} \\ ... & ... & .. & ... & .. & ... & .... & .. & ..... & .. & ..... & ..... \\ 0 & 0 & .. & 1 & .. & 0 & \alpha_{l,m+1} & .. & \alpha_{lk} & .. & \alpha_{1n} & \alpha_{10} \\ ... & ... & .. & ... & .. & ... & .... & .. & ..... & .. & ..... & ..... \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 1 & \alpha_{m,m+1} & .. & \alpha_{mk} & .. & \alpha_{mn} & \alpha_{m0} \end{pmatrix}$$

коефіцієнтів канонічної системи (6.7).

Теорема 6.4 (ознака оптимальності опорного розв'язку задачі ЛП).

Якщо для деякого опорного розв'язку $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0)^T$ ***задачі (6.1) всі симплекс-різниці невід'ємні***

$$\Delta_j = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_j) - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j \geq 0 ,$$

то x ***– оптимальний розв'язок задачі (6.1).***

Теорема 6.5 (ознака необмеженості цільової функції на допустимій області задачі ЛП).

Якщо для деякого опорного розв'язку x ***задачі (6.1), якому відповідає базис*** $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_{i_1}, \boldsymbol{A}_{i_2}, ..., \boldsymbol{A}_{i_m}]$***, існує принаймні один небазисний вектор*** A_k***, для якого*** $\Delta_k = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_k) - c_k = \sum_{s=1}^{m} c_{i_s} \alpha_{i_k} - c_k < 0$ ***і*** $\alpha_{ik} \leq 0$***,*** $i = \overline{1,m}$***, то цільова функція задачі (6.1) необмежена зверху на її допустимій області.***

6.2. Алгоритм симплекс-методу.

Зауваження 6.3.

Не обмежуючи загальності можна вважати, що початковому опорному плану $\boldsymbol{x}^0$ задачі ЛП

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{6.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}_0 , \tag{6.9}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \tag{6.10}$$

відповідає базис $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m]$. Тоді канонічна форма обмежень (6.9),, яка відповідає базису $\boldsymbol{B}$, має вигляд

$$\begin{aligned} & x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0} \geq 0, \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Вона і визначає початковий опорний план $\boldsymbol{x}^0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, ..., \alpha_{m0}, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m})^T$.

Коефіцієнти канонічної форми α_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = 0; \overline{m+1,n}$ є координатами векторів $\boldsymbol{\alpha}_j$, $j = 0; \overline{m+1,n}$ в одиничному базисі $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_m$

системи $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$, $j = 0;\overline{m+1,n}$ або коефіцієнтами розкладу векторів $\boldsymbol{A}_j$ по неканонічному базису $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m]$, $\boldsymbol{A}_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \boldsymbol{A}_i$.

Нехай $\boldsymbol{x}^s$ – поточний опорний план задачі (6.8)–(6.10), $\boldsymbol{\alpha}^s$ –матриця коефіцієнтів канонічної форми обмежень (6.9), що визначає $\boldsymbol{x}^s$.

Симплекс-алгоритм для канонічної задачі ЛП.

1. Обчислити симплекс-оцінки $\Delta_j^s = (\boldsymbol{c}_б^s, \boldsymbol{\alpha}_j^s) - c_j$ небазисних векторів $\boldsymbol{A}_j$ (для базисних $\Delta_j^s = 0$). Перейти до наступного пункту.

2. Перевірити умову: $\Delta_j^s \geq 0$, $j = \overline{1,n}$. Якщо умова виконується, то – кінець обчислень, поточний базисний допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}^s$ є оптимальним. В іншому випадку – перейти до наступного пункту.

3. Перевірити умову: $\exists$ небазисна змінна x_k для якої $\Delta_k^s < 0$ і $\alpha_{ik}^s \leq 0$, $i = \overline{1,m}$. Якщо умова виконується, то – кінець обчислень, цільова функція задачі необмежена на допустимій області зверху. В іншому випадку перейти до наступного пункту.

4. Знайти номер $k = \arg\min\limits_{\{j:\Delta_j^s < 0\}} \Delta_j^s$ найменшої від'ємної симплекс-різниці (k – номер направляючого стовпця симплекс-перетворення, вектор $\boldsymbol{A}_k$ повинен бути введений у базис). Перейти до наступного пункту.

5. Знайти номер $l = \arg\min\limits_{\{i:\alpha_{ik}^s > 0\}} \frac{\alpha_{io}^s}{\alpha_{ik}^s}$ направляючого рядка симплекс-перетворення. Перейти до наступного пункту.

6. Виконати крок повного виключення методом Жордана-Гаусса на розширеній матриці $[\boldsymbol{\alpha}^s, \boldsymbol{\alpha}_0^s]$ канонічної системи рівнянь-обмежень з l-м направляючим рядком і k-м направляючим стовпцем (ведучий елемент – α_{lk}^s). Перейти до пункту **1**.

Кінець алгоритму.

Проміжні результати обчислень зручно зберігати у так званій симплекс-таблиці (див. **таблицю 4**).

В ній позначено: i – номер рядка матриці $\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{c}_б$ – вектор коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних; $\boldsymbol{x}_б$ – вектор базисних змінних; $\boldsymbol{A}_0$ – вектор правих частин системи рівнянь-обмежень;

Таблиця 4.

i	$\boldsymbol{c}_б$	$\boldsymbol{x}_б$	$\boldsymbol{A}_0$	c_1	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	θ_i
				$\boldsymbol{A}_1$	…	$\boldsymbol{A}_m$	$\boldsymbol{A}_{m+1}$	…	$\boldsymbol{A}_n$	
1	c_1	x_1	α_{10}	1	…	0	α_{1m+1}	…	α_{1n}	
2	c_2	x_2	α_{20}	0	…	0	α_{2m+1}	…	α_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
m	c_m	x_m	α_{m0}	0	…	1	α_{mm+1}	…	α_{mn}	
	Δ_j	L	$L(\boldsymbol{x})$	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n	

$\boldsymbol{A}_j\,(j=\overline{1,n})$ – вектори умов; $\theta_i=\dfrac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}}$; $\Delta_j=(\boldsymbol{c}_б,\boldsymbol{\alpha}_j)-c_j$, $j=\overline{1,n}$ – симплекс-різниці; c_j ($j=\overline{1,n}$) – коефіцієнти цільової функції.

6.3. Приклади.

Приклад 1. Розв’язати симплекс-методом задачу ЛП:

$$L=x_1-x_2\to\max$$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=3,\\ x_1-2x_2+x_4=2,\\ x_1+x_2+x_5=5,\\ x_j\ge 0, j=\overline{1,5}.\end{cases}$$

Розв’язування. Результати обчислень заносимо у симплекс-таблицю (див. **таблицю 5**).

Обчисливши симплекс-різниці на ***першому*** кроці, з’ясовуємо,що початковий опорний план $\boldsymbol{x}^0=(0,0,2,2,5)^T$, для якого $L\left(\boldsymbol{x}^0\right)=0$, не є оптимальним, оскільки $\Delta_1=-1<0$. Тому до базису вводимо вектор $\boldsymbol{A}_1$ (позначений стрілкою). За мінімумом θ_i – відношень визначаємо направляючий рядок симплекс-перетворення (другий), позначаємо його стрілкою біля змінної x_4 у стовпчику $x_б$. Симплекс-перетворенням з базису буде виведений вектор $\boldsymbol{A}_4$. Виконуємо симплекс-перетворення елементів таблиці з ведучим елементом $\alpha_{12}=1$ (клітина виділена півтоном). Отримаємо опорний план $\boldsymbol{x}^1=(2,0,6,0,3)^T$, для якого $L\left(\boldsymbol{x}^1\right)=2$. Переходимо до другого кроку.

Таблиця 5.

i	$c_б$	$x_б$	A_0	1	–1	0	0	0	θ_i
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	0	x_3	2	–2	1	1	0	0	
2	0	$\leftarrow x_4$	2	$\boxed{1}$	–2	0	1	0	2
3	0	x_5	5	1	1	0	0	1	5
	Δ_j	L	0	–1↑	1	0	0	0	
1	0	x_3	6	0	–3	1	2	0	
2	1	x_1	2	1	–2	0	1	0	
3	0	$\leftarrow x_5$	3	0	$\boxed{3}$	0	–1	1	
	Δ_j	L	2	0	–1↑	0	1	0	
1	0	x_3	9	0	0	1	1	1	
2	1	x_1	4	1	0	0	$1/3$	$2/3$	
3	–1	x_2	1	0	1	0	$-1/3$	$1/3$	
	Δ_j	L	3	0	0	0	$2/3$	$1/3$	

На ***другому*** кроці з'ясовуємо, що $\Delta_2 = -1 < 0$, тобто опорний план $\boldsymbol{x}^1 = (2,0,6,0,3)^T$ неоптимальний. Виконуємо симплекс-перетворення елементів таблиці з ведучим елементом $\alpha_{32} = 3$, при цьому направляючий третій рядок перетворення визначається без додаткових обчислень за єдиним додатним елементом $\alpha_{32} = 3$ вектора $\boldsymbol{A}_2$, що вводиться в базис.

Отримаємо опорний план $\boldsymbol{x}^2 = (4,1,9,0,0)^T$, для якого $L(\boldsymbol{x}^1) = 3$. Всі симплекс-різниці відносно базису цього плану невід'ємні (клітини останнього рядка таблиці, в які вони занесені, виділені напівтоном), тому він оптимальний. Отже, оптимальним розв'язком задачі є вектор $\boldsymbol{x}^* = (4,1,9,0,0)^T$, а її оптимальне значення рівне $L(\boldsymbol{x}^*) = 3$.

Приклад 2. Розв'язати симплекс-методом задачу ЛП:

$$L = 2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1, \quad x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

<u>Розв'язування.</u>Зводимо задачу до канонічної форми:

$$L = 2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 1, \\ -2x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad = 2, \\ x_1 - x_2 \qquad + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Результати обчислень заносимо у симплекс-таблицю (див. **таблицю 6**).

Таблиця 6.

i	$c_б$	$x_б$	A_0	2	1	0	0	0	θ_i
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	0	$\leftarrow x_3$	1	**1**	–2	1	0	0	1
2	0	x_4	2	–2	1	0	1	0	
3	0	x_5	2	1	–1	0	0	1	2
	Δ_j	L	0	–2↑	–1	0	0	0	
1	2	x_1	1	1	–3	1	0	0	
2	0	x_4	4	0	–2	2	1	0	
3	0	$\leftarrow x_5$	1	0	**1**	–1	0	1	
	Δ_j	L	2	0	–5↑	2	0	0	
1	2	x_1	3	1	0	–1	0	2	1
2	0	x_4	7	0	0	–1	1	3	
3	1	x_2	1	0	1	–1	0	1	2
	Δ_j	L	6	0	0	–3	0	4	

До перших двох симплекс-перетворень додаткові коментарі непотрібні (клітини, в яких стоять їх ведучі елементи, виділені напівтоном).

На останньому кроці від'ємна симплекс-різниця $\Delta_3 = -3 < 0$ відповідає вектору $\boldsymbol{A}_3 = (-1, -1, -1)^T$ з від'ємними координатами (стовпчик таблиці виділений напівтоном), тому задача нерозв'язна – її цільова функція необмежена зверху на допустимій множині.

6.4.Вправи.

Розв'язати симплекс-методом задачі ЛП, при можливості дати геометричну інтерпретацію процесу розв'язування:

1) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5$ (max)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2) $z = 3x_1 - 2x_2$ (min),

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 27, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 + 3x_2 - x_4$ (max),

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

4) $z = 2x_1 + 3x_2$ (max),

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

5) $z = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6$ (max),

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

6) $z = 4x_1 + 2x_2$ (max),

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

7) $z = x_1 + x_2 + x_3$ (min),

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

8) $z = x_1 + x_2$ (max),

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

9) $z = x_1 + 3x_2 - 5x_4$ (max),

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

10) $z = x_1 + x_2$ (max),

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

11) $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4$ (max),

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 3, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

12) $z = 3x_2 - x_4$ (max),

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

13) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

14) $z = x_1 - 2x_2 (\max)$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

15) $z = 8x_2 + 7x_4 + x_6 (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

16) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 (\max)$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

17) $z = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 (\max)$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

18) $z = 8x_1 + 2x_2 (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

19) $z = -2x_2 + x_4 + 3x_5 (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 8, \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

20) $z = 3x_1 + x_2 (\max)$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

7. Методи штучного базису

Основна ідея методів штучного базису полягає у побудові та розв'язуванні симплекс-методом допоміжної канонічної задачі, по розв'язку якої можна або відновити допустимий чи оптимальний розв'язок вихідної задачі, або встановити її нерозв'язність.

У всіх методах штучного базису система обмежень задачі ЛП змінюється шляхом введення у рівняння-обмеження нових невідомих змінних (їх називають штучними) таким чином, щоб змінена система мала канонічний вигляд. З цією системою обмежень розв'язують симплекс-методом допоміжну лінійну задачу ЛП (вже канонічну) зі спеціальним чином побудованою цільовою функцією.

В залежності від вигляду цільової функції допоміжної задачі або одержують початковий базисний розв'язок вихідної задачі ЛП, або її оптимальний розв'язок, або з'ясовують, що вона недопустима.

7.1 Метод штучного базису у найпростішій формі

У найпростішій формі метод штучного базису допомагає з'ясувати чи є допустимою вихідна задача, та знайти її початковий опорний план, якщо вона допустима.

Нехай вихідна задача зведена до вигляду

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max , \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + x_{r+1} & = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r \quad + x_{r+2} & = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kr}x_r \qquad + x_n & = a_{k0}, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,r}x_r & = a_{k+1,0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r & = a_{m0}, \end{cases} \tag{7.2}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n} , \tag{7.3}$$

$$a_{i0} \ge 0, i = \overline{1,m} . \tag{7.4}$$

Припустимо, що $rang\boldsymbol{A} = m$, що загальності не обмежить.

Очевидно, що змінні $x_{r+1},\ldots,x_n$ можна вважати базисними, оскільки відповідні їм вектори умов одиничні:

$$\boldsymbol{A}_{r+1} = e_1,\ldots,\boldsymbol{A}_n = e_k .$$

Внаслідок того, що $rang\boldsymbol{A} = m$, довільний базис системи векторів $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_n\}$ повинен складатися з m векторів, однак $k < m$.

Додамо у ліву частину кожного з рівнянь системи (7.2), починаючи з $k+1$-го, відповідні штучні змінні: $y_1 \ge 0$ – в $(k+1)$-е, $y_2 \ge 0$ – в $(k+2)$-е, і т.д., $y_{m-k} \ge 0$ – в m-е рівняння. Отримаємо таку канонічну лінійну систему обмежень

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + x_{r+1} & = a_{10}, \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r \quad + x_{r+2} & = a_{20}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kr}x_r \qquad + x_n & = a_{k0}, \\
a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,r}x_r \qquad + y_1 & = a_{k+1,0}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r \qquad + y_{m-k} & = a_{m0},
\end{cases} \tag{7.5}
$$

$$
x_j \geq 0, j = \overline{1,n}\ , \tag{7.6}
$$

$$
a_{i0} \geq 0, i = \overline{1,m}\ . \tag{7.7}
$$

Система (7.5)–(7.7) має опорний план $\widetilde{\boldsymbol{x}}^0 = (\underbrace{0,\ldots,0}_{r}, a_{10},\ldots,a_{m0})^T$, якому відповідає одиничний базис $\{\boldsymbol{A}_{r+1}, \boldsymbol{A}_{r+2},\ldots, \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_{n+1},\ldots, \boldsymbol{A}_{n+m-k}\}$.

Допоміжна задача у найпростішому випадку полягає у мінімізації суми штучних змінних або максимізації суми штучних змінних зі знаком “мінус”, тобто

$$
L_\partial(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = -\sum_{i=1}^{m-k} y_i \to \max\ , \tag{7.8}
$$

за виконання умов (7.5)–(7.7).

Вкажемо на ту особливість задачі (7.8), (7.5)–(7.7), що вона завжди має оптимальний розв'язок, оскільки вона допустима і її цільова функція обмежена зверху

$$
L_\partial(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = -\sum_{i=1}^{m-k} y_i \leq 0\ . \tag{7.9}
$$

Теорема 7.1 (про розв'язок допоміжної задачі у методі штучного базису). Нехай:

Задача (7.8), (7.5)–(7.7) розв'язана симплекс-методом і $\widetilde{\boldsymbol{x}}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*, y_1^*,\ldots,y_{m-k}^*)^T$ ***– її оптимальний розв'язок.***

Тоді:

1) якщо серед чисел $y_1^*,\ldots,y_{m-k}^*$ ***є відмінні від нуля, то вихідна задача (7.1)–(7.4) не має допустимих розв'язків;***

2) якщо $y_1^* = y_2^* = \ldots = y_{m-k}^* = 0$ ***і серед векторів базису розв'язку*** $\widetilde{\boldsymbol{x}}^*$ ***немає штучних, то вектор*** $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*)^T$ ***є опорним планом задачі (7.1)–(7.4);***

3) якщо $y_1^* = y_2^* = ... = y_{m-k}^* = 0$ ***і серед векторів базису розв'язку*** $\tilde{x}^*$ ***є*** l ***штучних, то вектор*** $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$ ***є допустимим виродженим розв'язком задачі (7.1)–(7.4), для якого існує базис, що складається лише із векторів системи*** $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ***який можна отримати шляхом*** l ***однократних замін штучних векторів у базисі.***

7.1.1. Приклади.

Приклад 1. Розв'язати задачу ЛП:

$$L = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \ - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язування. Задача має стандартну форму. Матриця A коефіцієнтів системи обмежень $A = [A_1, A_2, A_3] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ не має жодного одиничного стовпця, тому вводимо повний штучний базис. З цією метою доповнюємо A двома штучними базисними векторами $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; отримаємо таку матрицю коефіцієнтів системи обмежень допоміжної задачі $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Записуємо допоміжну задачу:

$$L_\partial = -y_1 - y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \ - x_2 + x_3 + y_1 \qquad = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 \qquad + y_2 = 0, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3}, \\ y_1, y_2 \ge 0 - \text{штучні змінні.} \end{cases}$$

Ця задача має канонічну форму, тому розв'язуємо її розглянутим вище симплекс-алгоритмом. Результати обчислень заносимо до симплекс-таблиці (див. **таблицю 7**).

Пояснення до змісту таблиці. ***Нульовий крок***: $\tilde{x}^0 = (0,0,0,3,0)^T$, $B^0 = [A_4, A_5]$, $L_\partial(\tilde{x}^0) = (c_б, \alpha_0^0) = -3$, $\Delta_1^0 = (c_б, \alpha_0^0) - c_1 = -3$, $\Delta_2^0 = (c_б, \alpha_2^0) - c_2 = 6$, $\Delta_3^0 = (c_б, \alpha_3^0) - c_3 = 0$, $\Delta_4^0 = \Delta_5^0 = 0$.

Таблиця 7.

№ кр.	$c_б$	$x_б$	A_0	0 x_1	0 x_2	0 x_3	-1 y_1	-1 y_2	θ
0	–1	y_1	3	1	-1	1	1	0	$3/1$
	–1	$\leftarrow y_2$	0	$\boxed{2}$	-5	-1	0	1	$0/2$
	Δ_j	L_∂	-3	$-3\uparrow$	6	0	0	0	
1	-1	$\leftarrow y_1$	3	0	$\boxed{3/2}$	$3/2$	1		
	0	x_1	0	1	$-5/2$	$-1/2$	0		
	Δ_j	L_∂	-3	0	$-3/2\uparrow$	$-3/2$	0		
2	0	x_2	2	0	1	1			
	0	x_1	5	1	0	2			
	Δ_j	L_∂	0	0	0	0			

$\Delta_1^0 = -3 < 0$, тому A_1 вводиться в базис. A_1 – ведучий стовпчик для симплекс-перетворення.

$\theta_0 = \min(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 = 0$, тому A_5 виводиться з базису. Другий рядок є ведучим для симплекс-перетворення.

Після симплекс-перетворення кроку 0 стовпчик A_5 відкинутий, оскільки штучна змінна y_2 вже не є базисною.

Перший крок: $\tilde{x}^1 = (0,0,0,3,0)^T$, $B^1 = [A_4, A_1]$, $L_\partial(\tilde{x}^1) = (c_б^1, \alpha_0^1) = -3$, $\Delta_2^1 = (c_б^1, \alpha_2^1) - c_2 = -3/2$ $\Delta_3^1 = (c_б^1, \alpha_3^1) - c_3 = -3/2$. При симплекс-перетворенні кроку 1 в базис вводиться вектор A_3, з базису виводиться вектор A_4.

Отже, вектор $\tilde{x}^* = (5,2,0,0,0)^T$ є оптимальним розв'язком допоміжної задачі. Серед векторів його базису немає штучних. Тому обведена жирною лінією частина таблиці кроку 2 містить коефіцієнти канонічної форми вихідної задачі, яка визначає її початковий опорний план $\boldsymbol{x}^0 = (5,2,0)^T$.

Заносимо знайдену канонічну форму вихідної задачі у симплекс-таблицю (див. **таблицю 8**) і розв'язуємо вихідну задачу.

Таблиця 8.

№ кр.	$c_б$	$x_б$	A_0	0	0	0	θ	*Пояснення*
				x_1	x_2	x_3		
0	*4* *1*	x_2 x_1	*2* *5*	*0* *1*	*1* *0*	*1* *2*		$\boldsymbol{x}^0 = (5,2,0)^T$, $L(\boldsymbol{x}^0) = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_0) = 13$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_3) - c_3 = 5 > 0.$
	Δ_j	L	*13*	*0*	*0*	*5*		

Всі симплекс-різниці $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,3}$. Тому опорний план $\boldsymbol{x}^0$ є оптимальним розв'язком вихідної задачі. Йому відповідає оптимальне значення цільової функції $L(\boldsymbol{x}^0) = 13$.

Приклад 2. Розв'язати задачу лінійного програмування.

$$L = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Задача має стандартну форму. Доповнюємо матрицю коефіцієнтів $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ двома штучними векторами $\boldsymbol{A}_4 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{A}_5 = (0, 1)^T$ та записуємо допоміжну канонічну задачу:

$$L_д = -y_1 - y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_1 \qquad = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad + y_2 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}, \ y_i \geq 0, i = \overline{1,2} - \text{штучні змінні}, \end{cases}$$

яку розв'язуємо симплекс методом (див. **таблицю 9**).

Пояснення до змісту таблиці. На ***нульовому*** кроці $\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (0,0,0,2,1)^T$, $L_д(\boldsymbol{x}^{(0)}) = -3,$ $\Delta_4 = \Delta_5 = 0$ $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_2) - c_2 = -4$, $\Delta_3 = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_3) - c_3 = -7 < 0$.

Таблиця 9.

№ кр.	$c_б$	$x_б$	A_0	0 x_1	0 x_2	0 x_3	–1 y_1	–1 y_2	θ
0	–1	y_1	2	–2	1	3	1	0	$2/3$
	–1	y_2 ←	1	2	3	$\boxed{4}$	0	1	$1/4$
	Δ_j	$L_д$	–3	0	–4	$-7\uparrow$	0	0	
1	–1	y_1	$5/4$	$-7/2$	$-5/4$	0	1	╳	
	0	x_3	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1	0	╳	
	Δ_j	$L_д$	$-5/4$	$7/2$	$5/4$	0	0	╳	

На ***першому*** кроці $\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1)} = (0,0,1/4,5/4,0)^T$, $L_д(\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1)}) = -5/4$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, $\Delta_1 = 7/2, \Delta_2 = 5/4$. Всі оцінки $\Delta_j > 0$, тому вектор $\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1)} = (0,0,1/4,5/4,0)^T$ є оптимальним розв'язком допоміжної задачі.

Оскільки значення штучної змінної y_1 у цьому розв'язку відмінне від нуля: $y_1^{(1)} = 5/4 \neq 0$, то вихідна задача допустимих розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати задачу ЛП.

$$L = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \quad -x_1 - x_2 \le -4, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \quad x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Задача має загальну форму. Зводимо її до стандартної форми

$$L = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 - x_2 - x_5 = -4, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів при невідомих

$$A = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

має два одиничних вектори: $A_3 = (1, 0, 0)^T$, $A_4 = (0, 1, 0)^T$. Доповнюємо матрицю вектором $A_6 = (0, 0, 1)^T$. Відповідну йому штучну змінну позначимо через $x_6 \geq 0$. Отримаємо таку матрицю

$$[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як система векторів-умов A_j, $j = \overline{1,6}$, вона має одиничний базис $[A_3, A_4, A_6]$, в якому A_6 – штучний базисний вектор. Записуємо допоміжну канонічну задачу

$$L_д = -x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}; x_6 - \text{штучна змінна}, \end{cases}$$

яку розв'язуємо симплекс-методом (див. **таблицю 10**).

Пояснення до змісту таблиці. На ***першому*** кроці $\tilde{x}^{(1)} = (4,0,0,8,0,0)^T$, і всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,6}$, тому $\tilde{x}^{(1)}$– оптимальний розв'язок допоміжної задачі. Відповідний йому базис $B^1 = [A_1, A_4, A_6]$ містить штучний вектор A_6.

Вибираємо перший ***не штучний*** вектор, який має ненульову третю компоненту $A_2 = (2; 3; -1)^T$ і виконуємо крок повного виключення з ведучим елементом $\alpha_{32} = -1$. При цьому штучний вектор A_6 виводиться з базису. Новий базис $B^1 = [A_1, A_4, A_2]$ розв'язку $\tilde{x}^{(1)}$ не містить штучних векторів.

Отже, вектор $\tilde{x}^{(1)} = (4,0,0,8,0,0)^T$ є початковим опорним планом вихідної стандартної задачі. Коефіцієнти канонічної форми системи обмежень вихідної задачі, яка визначає цей опорний план, містяться у виділеній жирною лінією частині таблиці кроку 2.

Таблиця 10.

№ кр	$c_б$	$x_б$	A_0	0	0	0	0	0	–1	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	$\leftarrow x_3$	4	1	2	1	0	0	0	4
	0	x_4	4	–1	1	0	1	0	0	
	–1	x_6	4	1	1	0	0	–1	1	4
	Δ_j	$L_д$	–4	–1↑	–1	0	0	1	0	
1	0	x_1	4	1	2	1	0	0	0	
	0	x_4	8	0	3	1	1	0	0	
	–1	x_6	0	0	–1	–1	0	–1	1	
	Δ_j	$L_д$	0	0	1	1	0	1	0	
2	0	x_1	4	1	0	–1	0	–2		
	0	x_4	8	0	0	–2	1	–3		
	0	x_2	0	0	1	1	0	1		
	Δ_j	$L_д$	0	0	0	0	0	0		

Записуємо цю канонічну форму у симплекс-таблицю (див. **таблицю 11**) та розв'язуємо вихідну задачу.

Таблиця 11.

№ кр	$c_б$	$x_б$	A_0	0	0	0	0	0	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	x_1	4	1	0	–1	0	–2	
	0	x_4	8	0	0	–2	1	–3	
	2	x_2	0	0	1	1	0	1	
	Δ_j	L	4	0	0	1	0	0	

Всі елементи Δ-рядка невід'ємні, тому початковий опорний план $\tilde{\boldsymbol{x}}^1 = (4,0,0,8,0)^T$ є і оптимальним розв'язком стандартної задачі. Її оптимальне значення рівне $L(\tilde{\boldsymbol{x}}^1) = 4$.

Якщо повернутись до вихідної загальної задачі, то її оптимальним розв'язком та оптимальним значенням будуть відповідно вектор $x^* = (4,0)^T$ та число $L_{\max} = 4$.

7.2 М-метод побудови допоміжної задачі.

Система обмежень вихідної задачі (7.1–(7.4) доповнюється штучними змінними так, як і у попередньому випадку.

Цільова функція допоміжної задачі будується інакше. Вона складається з двох доданків, першим з яких є цільова функція вихідної задачі, а другим (в задачі максимізації) – сума штучних змінних, помножена на коефіцієнт ($-M$), де $M >> 0$ – велике число (практична нескінченність).
Для вихідної задачі (7.1)–(7.4) допоміжна М-задача має вигляд

$$L_M = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m-k} y_k \to \max \qquad (7.10)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + x_{r+1} = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r + x_{r+2} = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kr}x_r + x_n = a_{k0} \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,r}x_r + y_1 = a_{k+1,0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + y_{m-k} = a_{m0} \end{cases} \qquad (7.11)$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$,

$y_i \geq 0, i = \overline{1, m-k}$ - штучні змінні, (7.12)

$a_{i0} \geq 0, i = \overline{1,n}$ (7.13)

Теорема 7.2 (про розв'язок допоміжної задачі у М-методі).

Нехай задача (7.10)–(7.13) розв'язана симплекс-методом і $\widetilde{\boldsymbol{x}}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*,y_1^*,\ldots,y_{m-k}^*)^T$ ***– її оптимальний розв'язок.***

Тоді:

1) якщо серед чисел $y_1^*,\ldots,y_{m-k}^*$ ***є відмінні від нуля, то вихідна задача (7.1)–(7.4) не має допустимих розв'язків;***

2) якщо $y_1^* = y_2^* = \ldots = y_{m-k}^* = 0$ ***, то вектор*** $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*)^T$ ***є оптимальним розв'язком задачі (7.1)–(7.4).***

Теорема 7.3 (про необмеженість цільової функції М-задачі на її допустимій множині).

Нехай на деякому кроці симплекс-методу при розв'язуванні М-задачі виконується ознака необмеженості цільової функції на її допустимій множині, тобто, $\exists$ ***вектор*** α_k ***, для якого***

$$\Delta_k = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_k) - c_k < 0 \ \ \textbf{\textit{і всі}} \ \ \alpha_{ik} \le 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Тоді цільова функція вихідної задачі (7.1)–(7.4) також необмежена на її допустимій області, якщо та не порожня.

Зауваження до теореми 7.2.

Покажемо на прикладі, що можливий випадок, коли цільова функція М-задачі при великих $M >> 0$ необмежена зверху на її допустимій множині, а вихідна задача є недопустимою. Розглянемо задачу

$$L = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 = 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, що ця задача допустимих розв'язків немає. Будуємо М-задачу

$$L_M = x_1 + x_2 - My_1 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + y_1 = 1, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ y_1 \ge 0 \text{ - штучна змінна.} \end{cases}$$

М-задача допустима, зокрема, її допустимим розв'язком є вектор $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (0, \theta, 1) \ \ \forall \theta > 0$. Значення цільової функції М-задачі на розв'язку $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ рівне $\theta - M$ і $\forall M >> 0$ (фіксованого) прямує до $+\infty$ при $\theta \to +\infty$.

Із сформульованих теорем та зауваження до теореми 7.2 випливає таке ***правило аналізу результатів розв'язування М-задачі***:

1) якщо при досить великих $M >> 0$ (при розв'язуванні М-задачі на ЕОМ за М можна прийняти $10 \cdot \max\limits_{j=\overline{1,n}} |c_j|$) М-задача має оптимальний розв'язок, в якому принаймні одна штучна змінна відмінна від нуля, то вихідна задача допустимих розв'язків не має;

2) якщо в оптимальному розв'язку М-задачі всі штучні змінні рівні нулю, то відкинувши їх, отримаємо оптимальний розв'язок вихідної задачі;

3) якщо М-задача нерозв'язна, то нерозв'язна і вихідна задача.

7.2.1. Приклади.

Приклад 1. Розв'язати задачу ЛП

$$L = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \quad x_j \ge 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язування. Будуємо допоміжну М-задачу

$$L_M = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - Mx_4 - Mx_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5},\ x_4, x_5 - \text{штучні змінні.} \end{cases}$$

Зауважимо, що при складанні цільової функції L_M М-задачі ми змінили критерій оптимізації з мінімуму на максимум, тому $L_M = -L - Mx_4 - Mx_5$. Розв'язуємо М-задачу симплекс-методом (див. **таблицю 12**).

Таблиця 12.

№ кр	$c_б$	$x_б$	A_0	-2	2	-3	$-M$	$-M$	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	$-M$	x_4	2	-2	1	3	1	0	$2/3$
	$-M$	$\leftarrow x_5$	1	2	3	$\boxed{4}$	0	1	$1/4$
	Δ_j	L_M	$-3M$	2	$-4M-2$	$-7M+3\uparrow$	0	0	
1	$-M$	x_4	$5/4$	$-7/2$	$-5/4$	0	1		
	-3	x_3	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1	0		
	Δ_j	L_M	$-\frac{5}{4}M-\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}M+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}M-\frac{17}{4}$	0	0		

Пояснення до змісту таблиці. $\boldsymbol{B}^0 = [\boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5]$, $\tilde{\boldsymbol{x}}^0 = (0,0,0,2,1)^T$. Оцінка $\Delta_3 = -7M + 3 < 0$ найменша, тому $\boldsymbol{A}_3$ вводимо в базис.

$\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$, тому $\boldsymbol{A}_5$ буде виведений з базису за допомогою симплекс-перетворення з ведучим стовпчиком $\boldsymbol{A}_5$ і другим ведучим рядком.

$\boldsymbol{\alpha}_5$ не обчислюємо, оскільки він штучний і небазисний; штучна змінна x_5 у опорному розв'язку $\tilde{\boldsymbol{x}}^1$ М-задачі є вільною змінною, тому $x_5 = 0$ в $\tilde{\boldsymbol{x}}^1$. Всі оцінки на 1-му кроці невід'ємні: $\Delta_1 = \frac{7}{2}M + \frac{1}{2}$, $\Delta_2 = \frac{5}{4}M - \frac{17}{4}$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$; отже, вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}^1 = (0,0,\frac{1}{4},\frac{5}{4},0)^T$, якому відповідає базис $\boldsymbol{B}^1 = [\boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_3]$, є оптимальним розв'язком М-задачі.

Оскільки у розв'язку $\widetilde{\boldsymbol{x}}^1$ штучна змінна x_4 має значення $\frac{5}{4} \neq 0$, то вихідна задача допустимих розв'язків немає.

Приклад 2. Розв'язати задачу лінійного програмування.

$$\begin{cases} L = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3,\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язування. Будуємо М-задачу.

$$L_M = x_1 + 4x_2 + x_3 - Mx_4 - Mx_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 3, \quad x_j \geq 0, j = \overline{1,5}, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \quad + x_5 = 0, \quad x_4, x_5 - \text{штучні змінні}. \end{cases}$$

Розв'язуємо М-задачу симплекс-методом (див. **таблицю 13**).

Таблиця 13.

№ кр	$\boldsymbol{c}_б$	$\boldsymbol{x}_б$	$\boldsymbol{A}_0$	1	4	1	–M	–M	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	–M	x_4	3	1	–1	1	1	0	$\frac{3}{1}$
	–M	x_5 ←	0	$\boxed{1}$	–5	–1	0	1	0
	Δ_j	L_M	–3M	$-2M-1$ ↑	6M – 4	–1	0	0	
1	–M	x_4 ←	3	0	$\boxed{4}$	2	1		
	1	x_1	0	1	–5	–1	0		
	Δ_j	L_M	–3M	0	$-4M-9$ ↑	–2M-2	0		
2	4	x_2	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$			
	1	x_1	$\frac{15}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$			
	Δ_j	L_M	$\frac{27}{4}$	0	0	$\frac{5}{2}$			

Пояснення до змісту таблиці. Симплекс-різниці обчислюємо на всіх кроках за формулою $\Delta_j = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_j) - c_j$. На першому кроці $\alpha_{12} = 4$ єдина додатна компонента вектора $\boldsymbol{\alpha}_2$, тому θ_i не обчислюємо. Отже, $\widetilde{\boldsymbol{x}}^* = (\frac{15}{4}; \frac{3}{4}; 0)^T$ –

оптимальний розв'язок вихідної задачі. Її оптимальне значення рівне $L^* = {}^{27}\!/_{4}$.

Приклад 3. Розв'язати задачу ЛП.

$$\begin{cases} L = -x_1 - x_2 - x_3 \to \min, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \quad x_j \ge 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язування. Змінюємо критерій оптимізації з мінімізації на максимізацію, множимо почленно друге рівняння на (-1) та записуємо допоміжну М-задачу.

$$L_M = x_1 + x_2 + x_3 - Mx_4 - Mx_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 4, \quad x_j \ge 0, j = \overline{1,5}, \\ \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 1, \quad x_4, x_5 - \text{штучні змінні}. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу симплекс-методом (див. **таблицю 14**).

Таблиця 14.

№ кр	$c_б$	$x_б$	A_0	1	1	1	$-M$	$-M$	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	$-M$	x_4	4	-2	1	1	1	0	${}^4\!/_1$
	$-M$	x_5 $\leftarrow$	1	1	-2	1	0	1	${}^1\!/_4$
	Δ_j	L_M	$-5M$	$M-1$	$M-1$	$-2M-1\uparrow$	0	0	
1	$-M$	x_4 $\leftarrow$	3	-3	3	0	1		
	1	x_3	1	1	-2	1	0		
	Δ_j	L_M	$-3M+1$	$3M$	$3M-3\uparrow$	0	0		
2	1	x_2	1	-1	1	0			
	1	x_3	3	-1	0	1			
	Δ_j	L	4	-3	0	0			

Пояснення до змісту таблиці. На всіх кроках симплекс-різниці обчислюємо за формулою $\Delta_j = (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{\alpha}_j) - c_j$,

На ***нульовому*** кроці $\alpha_{23} = 1$ – ведучий елемент перетворення; $\boldsymbol{A_3}$ вводиться у базис, $\boldsymbol{A_5}$ виводиться з базису.

На ***першому*** кроці $\alpha_{12} = 3$ – ведучий елемент перетворення; A_2 вводиться у базис, A_4 виводиться з базису.

На ***другому*** кроці $\Delta_1 = -3 < 0$ і $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{21} = -1$. Отже, цільова функція М-задачі не обмежена зверху на її допустимій множині.

Таблиця кроку 2 містить коефіцієнти канонічної форми вихідної задачі, тобто вихідна задача допустима і для неї також виконується ознака необмеженості цільової функції на її допустимій множині.

Зауважимо, що відкидати штучні вектори з симплекс-таблиці після їх виведення з базису можна лише за умови, що остання симплекс-таблиця, яка визначає оптимальний розв'язок М-задачі, не використовується надалі для додаткових обчислень, наприклад, для обчислення матриці, що є оберненою до початкової базисної матриці B^0.

7.3. Вправи.

Розв'язати задачі ЛП:

1) використати М-метод,

$L = -2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + x_2 \geq 15, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) використати метод штучного базису,

$L = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3) використати М-метод,

$L = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4) використати метод штучного базису,

$L = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5) використати М-метод,

$L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 2x_2 = 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6) використати метод штучного базису,

$L = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. Розв'язування задач ЛП модифікованим симплекс-методом.

8.1. Основні факти.

При розв'язуванні канонічної задачі ЛП симплекс-методом на кожному його кроці відбувається переобчислення всіх елементів розширеної матриці коефіцієнтів системи обмежень (за винятком компонент базисних векторів – вони одиничні).

Модифікований симплекс-метод дозволяє здійснювати кроки симплекс алгоритму, знаючи лише розширену матрицю коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі та обернену до базисної матриці поточного опорного розв'язку задачі. При цьому вихідна задача може мати стандартну форму.

Розглянемо задачу ЛП

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}_0 \geq 0, \ \ j = \overline{0,n}, \tag{8.2}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,n}, \tag{8.3}$$

де $\boldsymbol{A}_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}\right)^T$, $j = \overline{0,n}$, і ранг матриці $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n]$ рівний m.

Нехай для деякого невідомого опорного розв'язку $\boldsymbol{x}$ задачі (8.1) – (8.3) відома матриця $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$, що є оберненою до базисної матриці $\boldsymbol{B}(s)$ цього розв'язку. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\boldsymbol{B}(s) = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m]$, оскільки цього завжди можна досягти перестановкою стовпчиків матриці $\boldsymbol{A}$, тобто перенумеруванням невідомих x_j системи (8.2). Очевидно, що тоді $\boldsymbol{x}^s$ матиме вигляд: $\boldsymbol{x}^s = (\alpha_{10}^s, \alpha_{20}^s, ..., \alpha_{m0}^s, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m})^T$, де $\alpha_{i0}^s \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ – компоненти вектора

$$\boldsymbol{\alpha}_0^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\boldsymbol{A}_0 . \tag{8.4}$$

Щоб перевірити опорний розв'язок $\boldsymbol{x}^s$ на оптимальність спочатку потрібно обчислити симплекс-оцінки Δ_j^s, $j = \overline{1,n}.$ Маємо для задачі максимізації (8.1) – (8.3):

$$\Delta_j^s = (\boldsymbol{c}_б(s), \boldsymbol{\alpha}_j^s) - c_j = \boldsymbol{c}_б^T(s) \cdot \boldsymbol{A}_j - c_j \ , \ \ j = \overline{1,n}, \qquad (8.5)$$

де $\boldsymbol{\alpha}_j^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\boldsymbol{A}_j$, а $\boldsymbol{c}_б(s)$ – вектор коефіцієнтів при бажаних змінних розв'язку $\boldsymbol{x}^s$ у цільовій функції задачі (8.1) – (8.3). Тому

$$\Delta_j^s = \boldsymbol{c}_б^T(s) \cdot \boldsymbol{B}^{-1}(s) \cdot \boldsymbol{A}_j - c_j \ , \ \ j = \overline{1,n}. \qquad (8.6)$$

Компоненти вектора

$$(Y^s)^T = \boldsymbol{c}_б^T(s) \cdot \boldsymbol{B}^{-1}(s) \qquad (8.7)$$

називають ***симплекс-множниками***, що відповідають розв'язку $\boldsymbol{x}^s$.

Отже, знаючи матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$ та номери векторів базису розв'язку $\boldsymbol{x}^s$, можна обчислити симплекс-множники y_i^s , $i = \overline{1,m}$ за формулою (8.7), а потім і симплекс-оцінки

$$\Delta_j^s = (\boldsymbol{y}^s)^T \boldsymbol{A}_j - c_j \ , \ \ j = \overline{1,n}; \qquad (8.8)$$

після чого перевірити їх знак і з'ясувати, чи буде розв'язок $\boldsymbol{x}^s$ оптимальним.

Якщо серед оцінок Δ_j^s є від'ємні , то по мінімальній з них знаходимо номер

$$k = \arg\min_{\{j:\Delta_j^s < 0\}} \Delta_j^s \qquad (8.9)$$

вектора $\boldsymbol{A}_k$, який належить ввести у базис (номер направляючого стовпця симплекс-перетворення).

Щоб визначити у базисі порядковий номер l вектора, який повинен бути виведений з базису (номер направляючого рядка сиплекс-перетворення), обчислюємо вектори

$$\boldsymbol{\alpha}_0^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\boldsymbol{A}_0, \ \ \boldsymbol{\alpha}_k^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\boldsymbol{A}_k \ , \qquad (8.10)$$

і знаходимо

$$l = \arg\min_{\{i:\alpha_{ik}^s > 0\}} \frac{\alpha_{i0}^s}{\alpha_{ik}^s} \ . \qquad (8.11)$$

Знаючи елемент b_{ij}^s матриці $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$ та компоненти α_{ik}^s вектора α_k^s , елементи матриці $\boldsymbol{B}^{-1}(s+1)$, оберненої до базисної для нового опорного розв'язку $\boldsymbol{x}^{s+1}$, обчислюємо за формулами повного виключення Жордана-Гаусса

$$b_{lj}^{s+1} = \frac{b_{lj}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}}, \quad j = \overline{1,n},$$
$$b_{ij}^{s+1} = b_{ij}^{s} - \frac{b_{lj}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}} \alpha_{ik}^{s}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad i \neq l. \tag{8.12}$$

Далі, знаючи матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(s+1)$ ми знову можемо обчислити відповідний їй опорний розв'язок $\boldsymbol{x}^{s+1}$ та перевірити його на оптимальність і т.д. Ці дії здійснюються доти, поки не отримаємо оптимальний розв'язок задачі (8.1) – (8.3) або не з'ясуємо , що вона недопустима.

Якщо ввести матрицю

$$\boldsymbol{E}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & -\frac{\alpha_{1k}^{s}}{a_{lk}^{s}} & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & -\frac{\alpha_{l-1,k}^{s}}{a_{lk}^{s}} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & -\frac{1}{a_{lk}^{s}} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & -\frac{\alpha_{l+1,k}^{s}}{a_{lk}^{s}} & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 & -\frac{\alpha_{mk}^{s}}{a_{lk}^{s}} & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow l\text{-й рядок,} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow l$ - й стовпчик

яку називають елементарною, то матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(s+1)$ можна подати у мультиплікативному вигляді

$$\boldsymbol{B}^{-1}(s+1) = \boldsymbol{E}(s)\boldsymbol{B}^{-1}(s) = \boldsymbol{E}(s) \cdot \boldsymbol{E}(s-1) \cdot ... \cdot \boldsymbol{E}(0)\boldsymbol{B}^{-1}(0),$$

де $\boldsymbol{B}^{-1}(0)$ – обернена до базисної матриці $\boldsymbol{B}(0)$ початкового опорного розв'язку $\boldsymbol{x}^{0}$ задачі (8.1) – (8.3).

8.2. Алгоритм модифікованого симплекс-методу.

1. Обчислити матрицю, обернену до початкової базисної $\boldsymbol{B}^{-1}(0)$. Бажано, щоб початкова базисна матриця була одиничною $\boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{E}$. В іншому випадку базисна матриця повинна бути вибрана так, щоб виконувалась умова $\boldsymbol{\alpha}_{0}^{0} = \boldsymbol{B}^{-1}(0)\boldsymbol{A}_{0} \geq 0$. Перейти до наступного пункту.

2. Обчислити вектор $(\boldsymbol{y}^s)^T = \boldsymbol{c}_б^T(s)\boldsymbol{B}^{-1}(s)$. Перейти до наступного пункту.

3. Обчислити оцінки $\Delta_j^s = (\boldsymbol{y}^s)^T \boldsymbol{A}_j - c_j$, $j = \overline{1,n}$. Перейти до наступного пункту.

4. Перевірити умову $\Delta_j^s \ge 0$, $j = \overline{1,n}$. Якщо умова виконується, то кінець обчислень – поточний розв'язок є оптимальним. В іншому випадку перейти до наступного пункту.

5. Знайти номер $k = \arg\min\limits_{\{j:\Delta_j^s<0\}} \Delta_j^s$. Перейти до наступного пункту.

6. Обчислити вектор $\boldsymbol{\alpha}_k^s = \left(\alpha_{1k}^s, \alpha_{2k}^s, ..., \alpha_{mk}^s\right)^T = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\boldsymbol{A}_k$. Перейти до наступного пункту.

7. Перевірити умову: всі $\alpha_{ik}^s \le 0$, $i = \overline{1,m}$. Якщо умова виконується, то кінець обчислень – цільова функція необмежена зверху на допустимій множині. В іншоому випадку перейти до наступного пункту.

8. Якщо вектор $\boldsymbol{\alpha}_0^s$ невідомий, то обчислити його $\boldsymbol{\alpha}_0^s = \boldsymbol{B}^{-1}(s)\boldsymbol{A}_0 = (\alpha_{10}^s, \alpha_{20}^s, ..., \alpha_{m0}^s)^T$. Якщо $\boldsymbol{\alpha}_0^s$ відомий, то перейти до наступного пункту.

9. Знайти номер $l = \arg\min\limits_{\{i:\alpha_{ik}^s>0\}} \dfrac{\alpha_{i0}^s}{\alpha_{ik}^s}$. Перейти до наступного пункту.

10. Виконати крок методу повного виключення з направляючим стовпцем $\boldsymbol{\alpha}_k^s$ і направляючим рядком з номером l на матриці $\boldsymbol{B}^{-1}(s)$, тобто обчислити матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(s+1)$ за формулами (8.12). Перейти до пункту **2**.

8.3. Приклади.

Приклад 1. Розв'язати модифікованим симплекс-методом задачу ЛП.

$$L = 4x_1 + 2_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 6, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Задача має канонічну форму, тому базисна матриця $\boldsymbol{B}(0)$, обернена до неї $\boldsymbol{B}^{-1}(0)$ та початковий опорний розв'язок визначаються легко:

$$B(0)=[A_3,A_4,A_5]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ x^0=(0;0;2;4;6)^T .$$

Запишемо коефіцієнти задачі в **допоміжну таблицю 15**. Зміст її стовпчиків та рядків зрозумілий із відповідних позначень.

Допоміжна таблиця 15.

№ ряд.	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	y^0	y^1	y^2
1 2 3	–1 1 1	1 –1 1	1 0 0	0 1 0	0 0 1	0 0 0	0 4 0	0 1 3
c_j	4	2	0	0	0	$\to \max$		
Δ_j^0	–4	–2	0	0	0	Основні формули, що використовуються: $(y^s)^T=c_б^T(s)B^{-1}(s)$, $s=0,1,2,...$, $\Delta_j^s=(y^s)^T A_j-c_j$, $j=\overline{1,n}$.		
Δ_j^1	0	–6	0	4	0			
Δ_j^2	0	0	0	1	3			

У **основну таблицю 16** записуємо обернену до базисної матрицю $B^{-1}(s)$, вектор α_0^0, $\alpha_0^0=B^{-1}(0)A_0$, а також допоміжні інформаційні стовпчики,, зміст яких також зрозумілий з позначень.

Пояснення до основної таблиці. Обчислюємо: $y_1^0=(c_б,b_1^s)=0,$ $y_2^0=(c_б,b_2^s)=0,$ $y_3^0=(c_б,b_3^s)=0.$ Отже, $\left(y^0\right)^T=\left(0;0;0\right).$

Переписуємо вектор y^0 у відповідний стовпчик допоміжної таблиці, та обчислюємо симплекс-оцінки: $\Delta_1^0=(y^0,A_1)-c_1=-4,$ $\Delta_2^0=(y^0,A_2)-c_2=-2,$ $\Delta_3^0=\Delta_4^0=\Delta_5^0=0.$

Початковий опорний план $x^0=(0;0;2;4;6)^T$ неоптимальний, оскільки $\exists\Delta_j<0$, з них найменша $\Delta_1^0=-4$. Вектор A_1 введемо у базис. Переписуємо його у основну таблицю та обчислюємо $\alpha_1^0=B^{-1}(0)A_1=(-1;1;1)^T$. Знаходимо номер l направляючого рядка для перетворення Жордана-Гаусса: $l=\arg\min\limits_{i=2,3}\theta_i=2$.

Обчислюємо $B^{-1}(1)$ та вектор α_0^1, за формулами Жордана-Гаусса (8.12), з ведучим 2-м рядком і стовпчиком α_1^0 на частині основної симплекс-таблиці, що містить вектор $\boldsymbol{\alpha}_0^0$ та матрицю $\boldsymbol{B}^{-1}(0)$ (обведена жирною лінією). Результат записуємо у таблицю кроку 1.

Основна таблиця 16.

№ кр.	$c_б$	$x_б$	$\boldsymbol{\alpha}_0^s$	$\boldsymbol{B}^{-1}(s)$			$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_1^0$	θ_i
				$\boldsymbol{b}_1^s$	$\boldsymbol{b}_2^s$	$\boldsymbol{b}_3^s$			
	0	x_3	2	1	0	0	-1	-1	
0	0	$\leftarrow x_4$	4	0	1	0	1	$\boxed{1}$	$\theta_2 = 4/1$
	0	x_5	6	0	0	1	1	1	$\theta_3 = 6/1$
	$(\boldsymbol{y}^0)^T$	L	0	0	0	0	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{\alpha}_2^1$	
	0	x_3	6	1	1	0	1	0	
1	4	x_1	4	0	1	0	-1	-1	
	0	$\leftarrow x_5$	2	0	-1	1	1	$\boxed{2}$	
	$(\boldsymbol{y}^1)^T$	L	16	0	4	0			
	0	x_3	6	1	1	0			
2	4	x_1	5	0	$1/2$	$1/2$			
	2	x_2	1	0	$-1/2$	$1/2$			
	$(\boldsymbol{y}^2)^T$	L	22	0	1	3			

Переходимо до кроку 1, виконавши який заповнюємо основну таблицю кроку 2, яка містить оптимальний розв'язок задачі $\boldsymbol{x}^{(2)} = (5;1;6;0;0)^T$, оскільки всі оцінки Δ_j^2 (див. допоміжну таблицю) невід'ємні.

Оптимальне значення цільової функції $L(\boldsymbol{x}^{(2)}) = 22$.

8.4. Вправи.

Розв'язати задачі модифікованим симплекс-методом, при необхідності використати один із методів штучного базису:

1) $L = -2x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2) $L = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3) $L = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

4) $L = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

5) $L = x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

6) $L = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

7) $L = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

8) $L = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

9) $L = 2x_1 + 4x_2 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2, \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

10) $L = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -4, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

11) $L = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

12) $L = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

13) $L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

14) $L = 2x_1 + 4x_2 + 23x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

15) $L = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

16) $L = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

9. Побудова двоїстих задач та застосування теорем двоїстості у лінійному програмуванні

9.1. Економічна інтерпретація двоїстості. Взаємодвоїсті задачі ЛП.

Розглянемо два об‘єкти, які умовно назвемо “виробництво” і “ринок” та відповідно позначимо як “В” і “Р”. Об‘єкт “В” виробляє деякі продукти і продає їх об‘єкту “Р” за фіксованими цінами. При виробництві цих продуктів об‘єкт “В” використовує деякі ресурси, обмежені запаси яких він має. Об‘єкт “В” може реалізувати довільний план виробництва продуктів, докупивши у об‘єкта “Р” необхідну кількість ресурсів, але за вільними цінами. За цими ж цінами об‘єкт “В” може також продати об‘єкту “Р” залишки невикористаних ресурсів.

Виробництво кожного продукту здійснюється окремим технологічним способом. Способи різняться між собою кількістю одиниць ресурсів, які витрачаються на виробництво одиниці продукту.

За розглянутих умов можна ставити дві оптимізаційні задачі взаємодії об‘єктів “В” і “Р”:

а) максимізації прибутку “виробництва” при мінімізації витрат “ринку” на обслуговування “виробництва”;

б) мінімізації витрат “ринку” на обслуговування “виробництва” при максимізації прибутку “виробництва”.

Нехай $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]$ – матриця технологічних способів виробництва, в якій вектор $j-$*го* способу $\boldsymbol{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^T$ $(j = \overline{1,n})$ характеризує витрати ресурсів на виробництво одиниці $j-$*го* виробу; $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ – вектор, який характеризує запаси ресурсів; $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ – вектор цін на вироблені продукти на “ринку”.

Введемо два невід‘ємні вектори змінних: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, який характеризує фактичне виробництво продуктів; $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$, який характеризує фактичні ціни на ресурси на “ринку”.

Тоді загальний прибуток "виробництва" (або, що те саме, загальні витрати "ринку") з урахуванням можливих додаткових витрат на закупівлю ресурсів та з оцінкою можливого прибутку від продажу запасів невикористаних ресурсів описується функцією $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$ і задача а) полягає у відшуканні

$$\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\min_{\boldsymbol{y}\geq 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{9.1}$$

а задача б) – у відшуканні

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\max_{\boldsymbol{x}\geq 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{9.2}$$

Розглянемо задачу (9.1). Маємо:

$$\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\min_{\boldsymbol{y}\geq 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\left[(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\right]=$$

$$=\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\begin{cases}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) & \text{при}\quad \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}),\\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})-\infty & \text{в іншому випадку}\end{cases}=\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}):\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}\}, \tag{9.3}$$

оскільки

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}),\\ -\infty & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Аналогічно, розглядаючи задачу (9.2), отримаємо

$$\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\max_{\boldsymbol{x}\geq 0} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\left[(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\right]=$$

$$=\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\left[(\boldsymbol{b},\boldsymbol{y})+\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\right)\right]= \tag{9.4}$$

$$=\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\begin{cases}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}) & \text{при}\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\leq 0\,(\boldsymbol{c}\leq\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}),\\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{y})+\infty & \text{в іншому випадку}\end{cases}=\min_{\boldsymbol{y}\geq 0}\{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}):\ \boldsymbol{c}\leq\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\},$$

оскільки

$$\max_{\boldsymbol{x}\geq 0}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\right)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\leq 0,\\ \infty & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Задачі (9.3), (9.4) називаються взаємодвоїстими задачами лінійного програмування. Надалі задачу (9.3) відшукання оптимального плану виробництва будемо називати прямою задачею лінійного програмування, а задачу (9.4) відшукання оптимальних цін ринку на ресурси – двоїстою.

Запишемо їх так:

пряму:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\to\max\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b},\\ &\boldsymbol{x}\geq 0.\end{aligned} \tag{9.5}$$

двоїсту:

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \to \min$$
$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \qquad (9.6)$$
$$\boldsymbol{y} \geq 0.$$

Пару двоїстих задач (9.5), (9.6) називають ***симетричною***. Якщо пряма задача задана у стандартній формі

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (9.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m}, \qquad (9.8)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \qquad (9.9)$$

то двоїстою для неї називається задача

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \qquad (9.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j, j = \overline{1,n}. \qquad (9.11)$$

Ці ж задачі, записані у матрично-векторній формі, мають вигляд:
пряма:

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \to \max$$
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \qquad (9.12)$$
$$\boldsymbol{x} \geq 0,$$

двоїста:

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \to \min$$
$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}. \qquad (9.13)$$

Задачі (9.12), (9.13) називають ***несиметричною*** парою двоїстих задач.

Зауважимо, що двоїста задача, записана правильно, якщо двоїста задача, записана по відношенню до двоїстої, буде збігатися з прямою.

Тому покажемо, що задача (9.12) збігається з двоїстою задачею, побудованою для задачі (9.13) за правилом (9.12) $\overset{\text{двоїста}}{\Rightarrow}$ (9.13).

Приведемо задачу (9.13) до стандартної форми. Маємо:

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \to \min & \text{або} & -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \to \max \\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}, & & -\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \le -\boldsymbol{c}. \end{array}$$

Покладемо $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}''$, де $\boldsymbol{y}' \ge 0$, $\boldsymbol{y}'' \ge 0$. Отримаємо:

$$-\boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}'') \to \max$$
$$-\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}'') \le -\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y}' \ge 0, \ \boldsymbol{y}'' \ge 0.$$

Вводячи вектор балансних змінних $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$, остаточно матимемо:

$$-\boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}'') \to \max$$
$$-\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}'') + \boldsymbol{E}\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{y}' \ge 0, \ \boldsymbol{y}'' \ge 0, \ \boldsymbol{z} \ge 0.$$

Остання задача має стандартну форму, аналогічну (9.12). Записуємо двоїсту до неї за правилом (9.12) $\overset{\text{двоїста}}{\Rightarrow}$ (9.13):

$$\begin{array}{lcl} -\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \to \min & & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \to \max \\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge -\boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}, & \text{або} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} \ge 0, & & \boldsymbol{x} \ge 0, \end{array}$$

що і треба було довести.

9.1.1. Приклади.

При побудові двоїстих задач потрібно враховувати кілька важливих правил, зокрема таких:

1) кожному i – му $(i = \overline{1,m})$ обмеженню (або рядку $\boldsymbol{A}^i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ матриці $\boldsymbol{A}$) вихідної задачі відповідає змінна y_i двоїстої задачі і, навпаки, кожному j – му $(j = \overline{1,n})$ обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна x_j (або стовпчик $\boldsymbol{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T$ матриці $\boldsymbol{A}$) вихідної задачі, тому ліва частина j – го $(j = \overline{1,n})$ обмеження двоїстої задачі є скалярним добутком вектора двоїстих змінних $\boldsymbol{y}$ на стовпчик $\boldsymbol{A}_j$, тобто $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_j$, а ліва частина i – го $(i = \overline{1,m})$ обмеження вихідної задачі є скалярним добутком $\boldsymbol{A}^i \boldsymbol{x}$;

2) вільні члени обмежень однієї із двоїстих задач є коефіцієнтами при відповідних змінних у цільовій функції іншої задачі, до того ж при переході до двоїстої задачі змінюється критерій оптимізації на протилежний– максимізація заміняється мінімізацією, і навпаки;

3) у вихідній задачі знак обмежень повинен бути узгодженим з критерієм оптимізації – при максимізації всі обмеження повинні бути типу "$\le$" або "=", при мінімізації всі обмеження повинні бути типу "$\ge$" або "=", тому для уникнення помилок перед записом двоїстої задачі всі обмеження-нерівності вихідної задачі доцільно звести до рівнянь введенням балансних змінних;

4) кожному i – му $(i = \overline{1,m})$ обмеженню-нерівності вихідної задачі відповідає у двоїстій задачі умова невід'ємності $y_i \ge 0$, а для обмежень-рівнянь така умова відсутня, відповідна двоїста змінна y_i вважається вільною за знаком; навпаки, невід'ємній змінній $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,n})$ у двоїстій задачі відповідає j – е обмеження-нерівність, при відсутності умови невід'ємності – рівняння.

Приклад 1. Побудувати двоїсту для такої задачі ЛП:

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \le 5, \\ x_2 + x_5 \ge 3, \\ x_j \ge 0, \ j = 2, 4. \end{cases}$$

Розв'язування. Зводимо систему обмежень до системи рівнянь шляхом введення у ліву частину третього та четвертого обмеження балансних змінних $x_6 \ge 0$ та $x_7 \ge 0$ з відповідними знаками. Отримаємо задачу:

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, & \Big| \ y_1 \\ x_3 - 2x_4 = 2, & \Big| \ y_2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, & \Big| \ y_3 \\ x_2 + x_5 - x_7 = 3, & \Big| \ y_4 \\ x_j \ge 0, \ j = 2, 4, 6, 7. \end{cases}$$

Відповідно кожному рівнянню-обмеженню цієї задачі вводимо вільну за знаком двоїсту змінну y_i $(i = \overline{1,4})$ (ці змінні зображені за вертикальною рискою). На змінні вихідної задачі x_1, x_3, x_5 не накладені умови невід'ємності, тому відповідні цим змінним 1-е, 3-є та 5-е обмеження двоїстої задачі будуть рівняннями. Всі інші обмеження двоїстої задачі будуть нерівностями типу "$\le$", оскільки критерієм оптимізації двоїстої задачі є максимізація.

Записуємо двоїсту задачу, починаючи з її цільової функції $L^*(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ – вектор двоїстих змінних, $\boldsymbol{b}$ – вектор вільних членів системи обмежень вихідної задачі. Далі, використовуючи скалярні добутки вектора $\boldsymbol{y}$ на вектори умов $\boldsymbol{A}_j\ (j=\overline{1,7})$, коефіцієнти c_j цільової функції вихідної задачі та умови невід'ємності змінних вихідної задачі (або їх відсутність) записуємо двоїсту задачу:

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \to \max, \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1 = c_1, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_2 \le c_2, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_3 = c_3, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_4 \le c_4, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_5 = c_5, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_6 \le c_6, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_7 \le c_7, \end{cases} \quad \text{або} \quad -3y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 3y_4 \to \max, \quad \begin{cases} y_1 = 1, \\ -2y_1 + 3y_3 + y_4 \le 1, \\ y_2 = -1, \\ y_1 - 2y_2 - y_3 \le 0, \\ y_3 + y_4 = -2, \\ y_3 \le 0, \\ -y_4 \le 0, \end{cases}$$

9.1.2. Вправи.

Побудувати двоїсті задачі та показати взаємоспряженність відповідних пар задач для таких задач ЛП:

1) $L = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

2) $L = 3x_2 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

3) $L = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4, \\ x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

4) $L = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \\ x_2, x_3, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

5) $L = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

6) $L = 2x_1 + 4x_2 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2, \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

7) $L = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 \quad + x_3 \leq -2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8) $L = x_1 + 14x_2 - 3x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 13x_2 + 3x_3 \leq -1, \\ 2x_1 + 17x_2 - 7x_3 \geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

9.2. Теореми двоїстості.

Лема (про зв‘язок значень цільових функцій двоїстих задач на їх допустимих розв‘язках).

Для довільних допустимих розв‘язків прямої задачі (9.12) – $\overline{\boldsymbol{x}} = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)^T$ ***і двоїстої задачі (9.13)*** – $\overline{\boldsymbol{y}} = \left(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m\right)^T$ ***має місце нерівність***

$$\boldsymbol{c}^T \overline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}^T \overline{\boldsymbol{y}} \, . \qquad (9.14)$$

Якщо для деяких $\overline{\boldsymbol{x}}$ ***і*** $\overline{\boldsymbol{y}}$

$$\boldsymbol{c}^T \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^T \overline{\boldsymbol{y}} \, , \qquad (9.15)$$

то $\overline{\boldsymbol{x}}$ ***і*** $\overline{\boldsymbol{y}}$ – ***оптимальні розв‘язки відповідно задач (9.12) і (9.13).***

Теорема 9.1 (перша або основна теорема двоїстості, теорема дає умови розв’язності пари взаємодвоїстих задач ЛП).

1. Якщо одна з пари двоїстих задач (9.12), (9.13) має оптимальний розв‘язок, то і двоїста їй також має оптимальний розв‘язок, причому їх оптимуми збігаються.

2. Якщо цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена на допустимій області (для (9.12) зверху, для (9.13) знизу), то двоїста їй не має допустимих розв‘язків.

Теорема 9.2 (друга теорема двоїстості, теорема дає необхідні і достатні умови оптимальності в лінійному програмуванні).

Допустимі розв‘язки $\overline{\boldsymbol{x}} = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)^T$ ***і*** $\overline{\boldsymbol{y}} = \left(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m\right)^T$ ***відповідно прямої (9.12) і двоїстої (9.13) задач є їх оптимальними розв‘язками тоді і тільки тоді, коли виконуються умови***

$$\left(\boldsymbol{A}_j^T \overline{\boldsymbol{y}} - c_j\right) \overline{x}_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (9.16)$$

Зауваження 9.1. Досить часто другу теорему двоїстості формулюють так:

Нехай $\overline{\boldsymbol{x}} = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)^T$ ***і*** $\overline{\boldsymbol{y}} = \left(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m\right)^T$ – ***допустимі розв‘язки відповідно прямої (9.12) і двоїстої (9.13) задач.***

Якщо для кожного j ***, такого, що***

$$A_j^T\bar{\boldsymbol{y}} > c_j \text{ **відповідне** } \bar{x}_j = 0\text{ ,} \qquad (9.17)$$

то $\bar{x}$ ***і*** $\bar{y}$ ***– оптимальні розв'язки відповідно прямої і двоїстої задач. І навпаки, якщо*** $\bar{x}$ ***і*** $\bar{y}$ ***оптимальні розв'язки прямої (9.12) і двоїстої (9.13) задач, то для кожного*** j ***, для якого*** $A_j^T\bar{\boldsymbol{y}} > c_j$ ***, відповідне*** $\bar{x}_j = 0$ ***.***

Зауваження 9.2. Друга теорема двоїстості також відома під назвою двоїстого критерію оптимальності:

Нехай $\bar{x}$ ***допустимий розв'язок задачі ЛП***

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \max \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ &\boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \min \\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ &\boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}\right) \qquad (9.18)$$

Для того, щоб $\bar{x}$ ***був оптимальним розв'язком задачі (9.18) необхідно і достатньо, щоб існував вектор*** $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)^T$ ***такий, що***

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_j^T\bar{\boldsymbol{y}} = c_j, \text{ якщо } x_j > 0, \\ &\boldsymbol{A}_j^T\bar{\boldsymbol{y}} \geq c_j, \text{ якщо } x_j = 0. \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_j^T\bar{\boldsymbol{y}} = c_j, \text{ якщо } x_j > 0, \\ &\boldsymbol{A}_j^T\bar{\boldsymbol{y}} \leq c_j, \text{ якщо } x_j = 0. \end{aligned}\right)$$

Зауваження 9.3. Теореми двоїстості доведені нами для пари несиметричних задач, аналогічно вони доводяться і для випадку симетричної пари двоїстих задач. При цьому змінюється лише формулювання другої теореми двоїстості:

Допустимі розв'язки $\bar{x}$ ***і*** $\bar{y}$ ***, відповідно прямої (9.5) і двоїстої (9.6) задач є їх оптимальними розв'язками тоді і тільки тоді, коли виконуються умови***

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A}^i\bar{\boldsymbol{x}} - b_i)\bar{y}_i = 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ &(\boldsymbol{A}_j^T\bar{\boldsymbol{y}} - c_j)\bar{x}_j = 0, \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \qquad (9.19)$$

($\boldsymbol{A}^i$ – i -й рядок матриці $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_j$ – j -й стовпець матриці $\boldsymbol{A}$).

Умови (9.19), називаються умовами ***ортогональності*** або ***доповнюючої нежорсткості***.

9.2.1. Приклади.

Приклад 1. На основі графічного аналізу двоїстої задачі дослідити розв'язність даної задачі ЛП; у випадку розв'язності знайти її оптимальне значення:

$$L = 18x_1 + 9x_2 + 10x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ \\ \end{array} \right.$$

<u>Розв'язування</u>. Відповідно до обмежень даної задачі вводимо двоїсті змінні $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ і записуємо двоїсту задачу:

$$\overline{L} = 4y_1 + 2y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \leq 18, \\ -y_1 + 3y_2 \leq 9, \\ 2y_1 - y_2 \leq 10, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ця задача була розв'язана графічно вище (див. **5.3.Приклади. Приклад 1.**) Вона має єдиний оптимальний розв'язок $\boldsymbol{y}^*_{\max} = (6;2)$, а її оптимальне значення дорівнює $\overline{L}_{\max} = 28$. Тому за першою теоремою двоїстості вихідна задача також розв'язна, а її оптимальне значення $L_{\min}$ також рівне 28.

Приклад 2. З'ясуватити, чи є дана пара векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ оптимальними розв'язками даної задачі та двоїстої до неї:

$$\boldsymbol{x} = (1;0;1)^T, \ \boldsymbol{y} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)^T,$$

$$L = x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

<u>Розв'язування</u>. Перевіримо вектор $\boldsymbol{x}$ на допустимість за обмеженнями даної задачі. Маємо:

$$\boldsymbol{x} = (1;0;1)^T \geq 0, \ \boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Отже $\boldsymbol{x}$ є допустимим розв'язком даної задачі. Перевіримо тепер, чи буде $\boldsymbol{y}$ допустимим розв'язком двоїстої до даної задачі. Записуємо двоїсту задачу:

$$\overline{L} = 2y_1 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 \quad + y_2 \geq 1, \\ 4y_1 + 2y_2 \geq 10, \\ y_1 \quad - y_2 \geq 8. \end{cases}$$

Перевіряємо вектор $\boldsymbol{y}$ на допустимість за обмеженнями двоїстої задачі. Маємо:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}.$$

Отже $\boldsymbol{y}$ є допустимим розв'язком двоїстої задачі. Тепер обчислимо оптимальні значення прямої та двоїстої задач. Маємо:

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1, & 10, & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \;, \; \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = 9 \;.$$

Ці оптимальні значення рівні між собою, тому за лемою про зв‘язок значень цільових функцій двоїстих задач на їх допустимих розв‘язках вектори $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ є оптимальними розв’язками відповідно даної і двоїстої до неї задач.

Приклад 3. Для даної задачі

$$L(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 4x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = 1,2. \end{cases} \quad \begin{array}{|l} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ \end{array}$$

побудувати двоїсту. Розв’язати одну з цієї пари двоїстих задач і по її розв’язку відшукати оптимальний розв’язок двоїстої до неї задачі.

<u>Розв’язування</u>. Відповідно до обмежень даної задачі вводимо двоїсті змінні $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ і записуємо двоїсту задачу:

$$L^*(y) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \leq 3, \\ 2y_1 + y_2 \leq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

З двох задач ЛП, що розглядаються, доцільніше розв'язувати симплекс-методом двоїсту, оскільки вона легко зводиться до канонічної форми без застосування методу штучного базису. Дійсно, додаючи у ліву частину її першого обмеження балансну змінну $y_3 \geq 0$, а у ліву частину її другого обмеження – балансну змінну $y_4 \geq 0$, отримаємо таку канонічну задачу ЛП:

$$L^*(y) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 \quad = 3, \\ 2y_1 + y_2 \quad + y_4 = 2, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Отриману канонічну задачу розв'язуємо симплекс-методом (див. **таблицю 17**).

Таблиця 17.

№ кр.	$c_б$	$x_б$	A_0	4	2	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	
0	0	y_3	3	1	4	1	0	3
	0	$\leftarrow y_4$	2	$\boxed{2}$	1	0	1	1
	Δ_j	L^*	0	$-4\uparrow$	-2	0	0	
1	0	y_3	2	0	$7/2$	1	$-1/2$	
	4	y_1	1	1	$1/2$	0	$1/2$	
	Δ_j	L^*	4	0	0	0	2	

Отже, оптимальним розв'язком канонічної двоїстої задачі є опорний план $\overline{y}^* = (1, 0, 2, 0)^T$, її оптимальним значенням є число $L^*(y^*) = 4$. Відповідним оптимальним розв'язком двоїстої загальної задачі є вектор $y^* = (1, 0)^T$.

Базис оптимального розв'язку $\overline{y}^*$ утворюють вектори A_3, A_1 (вони одиничні у таблиці кроку 1, яка визначає цей розв'язок). Тому, взявши ці вектори у тому самому порядку з таблиці кроку 0, ми утворимо базисну матрицю $B_{опт} = [A_3; A_1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ оптимального розв'язку $\overline{y}^*$. Як базисна ця матриця неособлива, тому вона має обернену $B_{опт}^{-1}$, яку завжди можна обчислити одним із відомих методів обчислення обернених матриць. Однак, при застосуванні симплекс-методу до розв'язування канонічної задачі ЛП робити це недоцільно, оскільки обернена до поточної базисної матриці обчислюється на кожному кроці симплекс-методу, зокрема, її стовпчики відповідають одиничним векторам $\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4$ базису початкового опорного плану $\overline{\boldsymbol{y}}^0$ канонічної задачі, який визначається таблицею кроку 0.

Вибравши з останньої симплекс-таблиці, яка визначає оптимальний розв'язок $\overline{\boldsymbol{y}}^*$ двоїстої канонічної задачі, матрицю $\boldsymbol{B}_{опт}^{-1} = [\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4] = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ та вектор $\boldsymbol{c}_{баз} = (0, 4)^T$, обчислюємо оптимальний розв'язок двоїстої до двоїстої, тобто вихідної: $(\boldsymbol{x}^*)^T = \boldsymbol{c}_{баз}^T \boldsymbol{B}_{\text{опт}}^{-1} = (0, 4)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (0, 2)$. Оптимальне значення вихідної задачі за першою теоремою двоїстості збігається з оптимальним значенням двоїстої задачі, тому $L(\boldsymbol{x}^*) = 4$.

Приклад 4. Не розв'язуючи задачу

$$L = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \ - x_2 + 2x_3 - x_4 = \ 2, \\ 2x_1 \ + x_2 - 3x_3 + x_4 = \ 6, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}, \end{cases} \qquad (9.20)$$

дослідити, чи є вектор $\boldsymbol{x}^* = (3, 0, 1, 3)^T$ її оптимальним розв'язком.

<u>Розв'язування</u>. Підставимо вектор $\boldsymbol{x}^*$ у обмеження задачі (9.20). Очевидно, що він їх задовольняє. Отже, $\boldsymbol{x}^*$ є допустимим розв'язком задачі (9.20).

Відповідно до обмежень-рівностей даної задачі вводимо двоїсті змінні y_1, y_2, y_3 і записуємо двоїсту задачу:

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \to \min, \qquad 2y_1 + 6y_2 - 2y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1 \ge c_1, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_2 \ge c_2, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_3 \ge c_3, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_4 \ge c_4, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y_1 + 2y_2 \ + y_3 \ge -2, \\ -y_1 \ + y_2 - 3y_3 \ge -1, \\ 2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \ge \ 1, \\ -y_1 \ + y_2 \ \ - y_3 \ge \ 1. \end{cases} \qquad (9.21)$$

Зауважимо, що прямі умови невід'ємності на двоїсті змінні y_1, y_2, y_3 не накладаються, оскільки всі обмеження прямої задачі є рівняннями.

За другою теоремою двоїстості вектор $\boldsymbol{x}^*$ буде оптимальним розв'язком задачі (9.20) тоді і тільки тоді, коли існує допустимий розв'язок $\boldsymbol{y}$ двоїстої задачі (9.21) такий, що для векторів $\boldsymbol{x}^*$ і $\boldsymbol{y}$ виконуються умови доповнюючої нежорсткості

$$\begin{cases} x_1^*\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1 - c_1\right) = 0, \\ x_2^*\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_2 - c_2\right) = 0, \\ x_3^*\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_3 - c_3\right) = 0, \\ x_4^*\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_4 - c_4\right) = 0. \end{cases} \qquad (9.22)$$

Оскільки компоненти $x_1^* = 3,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 3$ вектора x^* додатні, то вектор $\boldsymbol{y}$ повинен бути розв'язком системи

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1 - c_1 = 0, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_3 - c_3 = 0, \\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_4 - c_4 = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = -2, \\ 2y_1 - 3y_2 - 2y_3 = 1, \\ -y_1 + y_2 - y_3 = 1. \end{cases} \qquad (9.23)$$

Систему (9.23) розв'язуємо методом Жордана-Гаусса (див. **таблицю 18**).

Таблиця 18.

№ кр.	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{A}_0$	№ кр.	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{A}_0$
0	**1**	2	1	−2	2	1	0	1	$-4/3$
	2	−3	−2	1		0	0	**−4**	$8/3$
	−1	1	−1	1		0	1	0	$-1/3$
1	1	2	1	−2	3	1	0	0	$-2/3$
	0	−7	−4	5		0	0	1	$-2/3$
	0	**3**	0	−1		0	1	0	$-1/3$

Виділені клітини таблиці містять ведучі елементи виконаних кроків методу.

Отже, система (9.23) має єдиний розв'язок $y_1^* = -2/3$, $y_2^* = -1/3$, $y_3^* = -2/3$ і шуканим допустимим розв'язком двоїстої задачі є вектор $\boldsymbol{y}^* = \left(-2/3, -1/3, -2/3\right)^T$. Тоді за другою теоремою двоїстості допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}^*$ задачі (9.20) є її оптимальним розв'язком, оскільки вектори $\boldsymbol{x}^*$

та $\boldsymbol{y}^*$ задовольняють умови доповнюючої нежорсткості (9.22). Оптимальне значення задачі (9.20) рівне $L(\boldsymbol{x}^*) = -2$.

9.2.2. Вправи.

1. Для даних задач записати двоїсті, розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом і по її розв'язку знайти розв'язок двоїстої до неї:

1) $L = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

2) $L = 3x_1 + 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

3) $L = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

4) $L = 8x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

5) $L = x_1 - 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

6) $L = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 30, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7) $L = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

8) $L = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 3x_1 - x_2 \le 12, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

2. Дослідити, чи є запропонована пара векторів оптимальними розв'язками даної задачі та двоїстої до неї:

1) $\boldsymbol{x} = \left(\frac{6}{5}, 0\right)^T$, $\boldsymbol{y} = (0, 0, 0, 1)^T$,

$L^* = 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 6y_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + 5y_4 \ge 5, \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4 \ge 4, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2) $\boldsymbol{x} = \left(\frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right)^T$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{17}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0\right)^T$,

$L^* = 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 + 3y_4 \to \min,$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - 3y_3 - y_4 \ge 7, \\ y_1 - 3y_2 \ \ - y_3 + y_4 \ge -2, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3) $\boldsymbol{x} = (6, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)^T$,

$L = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 16, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

4) $\boldsymbol{x} = \left(\frac{21}{4}, \frac{3}{2}\right)^T$, $\boldsymbol{y} = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)^T$,

$L^* = 3y_1 + 42y_2 + 6y_3 - 4y_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -y_1 + 6y_2 + 2y_3 - 4y_4 \ge 2, \\ y_1 + 7y_2 - 3y_3 - y_4 \ge 1, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

5) $\boldsymbol{x} = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)^T$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0\right)^T$

$L = x_1 + 2x \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ \ + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 \ \ + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

6) $\boldsymbol{x} = (0, 5)^T$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)^T$;

$L = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ \ + x_2 \le 8, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

3. Дані задачі дослідити шляхом графічного аналізу двоїстих до них, у випадках розв'язності знайти оптимальні розв'язки даних задач:

1) $L = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 \ \ + x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2) $L = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ \ - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 \ \ + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3) $L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 \ \ + x_2 \ \ + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

4) $L = 2x_1 + 4x_2 + 23x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 \ \ + x_4 \le -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le \ 2, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

5) $L = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6) $L = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

10. Розв'язування задач ЛП двоїстим симплекс-методом.

10.1. Спряжений базис, псевдоплан задачі лінійного програмування.

Нехай задача ЛП має стандартну форму:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \to \max \\ &\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j x_j = \boldsymbol{b}, \\ &\boldsymbol{x} \ge 0, \end{aligned} \tag{10.1}$$

в якій $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ і $rang\ \boldsymbol{A} = rang[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n] = m < n$. Запишемо двоїсту для задачі (10.1):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \to \min \\ &\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_j \ge c_j,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Розглянемо деякий базис $\{\boldsymbol{A}_{k_i}\},\ i = \overline{1,m},$ системи векторів $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n$ і відповідну йому систему рівнянь

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_{k_i} = c_{k_i}\ i = \overline{1,m}, \tag{10,3}$$

яку отримаємо з відповідних обмежень двоїстої задачі (10.2), обертаючи їх у рівності.

Якщо розв'язок $\boldsymbol{y}$ цієї системи задовольняє всі обмеження двоїстої задачі (10.2), то базис $\{\boldsymbol{A}_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ називають спряженим або двоїстим базисом.

Очевидно, що такий розв'язок $\boldsymbol{y}$ є деякою вершиною допустимої області двоїстої задачі, тобто її базисним допустимим розв'язком.

Базисний розв'язок прямої задачі (10.1) відносно спряженого базису $\{\boldsymbol{A}_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ називається її псевдопланом.

Вкажемо на відмінність псевдоплану від майже допустимого базисного розв'язку прямої задачі (10.1).

Майже допустимим базисним розв'язком (МДБР) задачі (10.1) називається довільний її базисний розв'язок, який не задовольняє пряму умову $x \geq 0$, тобто псевдоплан є частинним випадком МДБР (спряжений базис є частинним випадком базису).

Теорема 10.1 (необхідні і достатні умови спряженості базису).

Нехай $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***– деякий базис системи векторів*** $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ***і відомі розклади векторів*** A_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ ***і*** $b = A_0$ ***по базису*** $\{A_{k_i}\}_{i=1,m}$ ***:***

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A_{k_i}, \tag{10.4}$$

$$A_0 = b = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i0} A_{k_i}. \tag{10.5}$$

Базис $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***– є спряженим базисом, а відповідний йому базисний розв'язок*** x^0 ***системи*** $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$***, для якого***

$$x_{k_i}^0 = \alpha_{i0}, \; j = \overline{0,n},$$

$$x_j^0 = 0, \; j = \overline{1,n}, \; j \neq k_i \; \left(i = \overline{1,m}\right),$$

є псевдопланом задачі (10.1) тоді і тільки тоді, коли всі симплекс-оцінки відносно базису $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***невід'ємні***

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{k_i} \alpha_{ij} - c_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}. \tag{10.6}$$

Теорема 10.2 (ознака оптимальності псевдоплану).

Нехай x ***– псевдоплан задачі (10,1),*** $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***відповідний йому спряжений базис системи*** $\{A_j\}_{j=\overline{1,n}}$ ***і відомі розклади (10.4), (10.5) векторів*** A_j ***і*** A_0 ***по спряженому базису.***

Якщо виконується умова $x \geq 0$***, то*** x ***є оптимальним розв'язком прямої задачі (10,1), а розв'язок системи*** $y^T A_{k_i} = c_{k_i}$***,*** $i = \overline{1,m}$***, вектор*** y ***є оптимальним розв'язком двоїстої задачі (10,2).***

Теорема 10.3 (ознака недопустимості прямої задачі).

Нехай $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n)^T$ ***– деякий псевдоплан прямої задачі (10.1),*** $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***– відповідний йому спряжений базис системи*** $\{A_j\}_{j=\overline{1,n}}$ ***і відомі розклади (10.4), (10.5) векторів*** A_j ***і*** A_0 ***по спряженому базису.***

Якщо серед базисних компонент $\widetilde{x}_{k_i}=\alpha_{i0}$, $i=\{1,2,...,m\}$ ***псевдоплану*** $\widetilde{x}$ ***знайдеться принаймні одна*** α_{l0} ***така, що*** $\alpha_{l0}<0$ ***і*** $\alpha_{lj}\geq 0$, $j=\overline{1,n}$ ***, то пряма задача (10.1) не має допустимих розв'язків.***

Теорема 10.3 (Достатні умови поліпшення псевдоплану).

Нехай $\widetilde{\boldsymbol{x}}=(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_n)^T$ ***– деякий псевдоплан прямої задачі (10.1),*** $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***– відповідний йому спряжений базис системи*** $\{A_j\}_{j=\overline{1,n}}$ ***, відомі розклади (10.4), (10.5) векторів*** A_j ***і*** A_0 ***по спряженому базису і для будь-якого псевдоплану задачі (10.1) всі небазисні оцінки додатні:***

$$\Delta_j>0,\ j=\overline{1,n},\ j\neq k_i\ (i=\overline{1,m}). \qquad \textbf{(10.7)}$$

Якщо серед базисних компонент $\widetilde{x}_{k_i}=\alpha_{i0}$, $i\in\{1,2,...,m\}$ ***псевдоплану*** $\widetilde{x}$ ***знайдеться принаймні одна*** α_{l0} ***така, що*** $\alpha_{l0}<0$ ***і*** $\exists\alpha_{lj}<0$, $j\neq k_i$, $i=\overline{1,m}$, $j\in\{1,2,...,n\}$***, то заміна у спряженому базисі*** $\{A_{k_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ ***вектора*** A_{k_l} ***небазисним вектором*** A_k***, знайденим з умови***

$$\left|\frac{\Delta_k}{\alpha_{lk}}\right|<\left|\frac{\Delta_j}{\alpha_{lj}}\right|,\ \alpha_{lk},\alpha_{lj}\leq 0 \qquad \textbf{(10.8)}$$

приведе до нового спряженого базису, якому відповідає псевдоплан з меншим значенням цільової функції задачі (10.1).

Зауваження 10.1. За умов **теореми 10.3** вектор A_k для введення в базис визначається однозначно. Якщо зняти умову (10.7), то множина

$$\operatorname{Arg}\min_{\{j:\alpha_{lj}<0\}}\left|\frac{\Delta_j}{\alpha_{lj}}\right| \qquad (10.9)$$

може виявитись неодноелементною, тобто k може визначатись неоднозначно. У цьому випадку за k можна приймати, наприклад, найменший елемент множини (10.9).

10.2. Алгоритм двоїстого симплекс-методу.

1. Знайти спряжений базис прямої задачі (10.1), а також відповідний йому початковий псевдоплан $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Це можна зробити за означенням або методом штучного базису для двоїстої задачі знайти деякий базисний допустимий розв'язок та визначити ті з обмежень двоїстої задачі, які він обертає в рівності; відповідні їм вектори умов прямої задачі A_{k_i} і утворюють спряжений базис.

Поточний псевдоплан позначимо через $\boldsymbol{x}^{(s)}$ (зауважимо, що відповідну форму задачі ЛН, яка його визначає, називають псевдоканонічною).

Перейти до наступного пункту.

2. Перевірити умову: $\alpha_0^{(s)} \ge 0$. Якщо умова виконується, то – кінець обчислень, розв'язок $\boldsymbol{x}^{(s)}$ – оптимальний. В іншому випадку перейти до наступного пункту.

3. Перевірити умову: Існує номер рядка l такий, що $\alpha_{l0}^{(s)} < 0$ і всі $\alpha_{lj}^{(s)} \ge 0$, $j = \overline{1,n}$. Якщо умова виконується, то – кінець обчислень, задача (10.1) допустимих розв'язків немає. В іншому випадку перейти до наступного пункту.

4. Визначити номер направляючого рядка l для перетворення Жордана-Гаусса:

$$l = \arg\min_{\{i:\alpha_{i0}^{(s)}<0\}} \{\alpha_{i0}^{(s)}\}.$$

Перейти до наступного пункту.

5. Визначити номер направляючого стовпця k для перетворення Жордана-Гаусса:

$$k = \arg\min_{\{j:\alpha_{lj}^{(s)}<0\}} \left| \frac{\Delta_j^{(s)}}{\alpha_{lj}^{(s)}} \right|.$$

Перейти до наступного пункту.

6. Виконати крок повного виключення методу Жордана-Гаусса на розширеній матриці коефіцієнтів поточної псевдоканонічної форми з ведучим елементом $\alpha_{lk}^{(s)}$:

$$\alpha_{ij}^{(s+1)} = \alpha_{ij}^{(s)} - \frac{\alpha_{lj}^{(s)}}{\alpha_{lk}^{(s)}} \alpha_{ik}^{(s)}, \ i = \overline{1,m}, \ i \ne l, \ j = \overline{0,n}$$

$$\alpha_{lj}^{(s+1)} = \frac{\alpha_{lj}^{(s)}}{\alpha_{lk}^{(s)}}, \ j = \overline{0,n}.$$

Перейти до пункту **2**.

Зауваження 10.2. Симплекс-таблиця для двоїстого симплекс-методу має той же самий вигляд, що і для звичайного симплекс-методу, тільки замість θ - стовпця таблиця обрамляється рядком γ - відношень:

$$\gamma_j = \left| \frac{\Delta_j}{\alpha_{lj}} \right|_{\{j:\alpha_{lj}<0\}}.$$

10.3. Приклади.

Приклад 1. Для даної задачі ЛП

$$z = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

знайти за означенням який-небудь спряжений базис, обчислити відповідний йому псевдоплан та розв'язати задачу двоїстим симплекс-методом.

Розв'язування. Зводимо задачу до стандартної форми, додаючи у ліву частину кожного обмеження відповідну невід'ємну балансну змінну:

$$z = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \quad = 11, \\ 4x_1 \ + x_2 \quad + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{10.10}$$

Відповідно до обмежень-рівностей даної задачі вводимо вільні за знаком двоїсті змінні y_1, y_2 і записуємо двоїсту задачу:

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \to \min, \qquad 11y_1 + 10y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_1 \ge c_1, \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_2 \ge c_2, \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_3 \ge c_3, \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_4 \ge c_4, \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \ge 8, \\ 5y_1 \ + y_2 \ge 6, \\ \quad y_1 \ge 0, \\ \qquad y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Перевіримо базис $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3\}$ на спряженість. Обертаючи відповідні цим векторам нерівності-обмеження двоїстої задачі у рівняння, отримаємо систему

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 8, \\ y_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 2, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи не задовольняє друге обмеження двоїстої задачі, тому базис $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3\}$ не є спряженим. Розглянемо тепер базис $\{\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$. Відповідна йому система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 = 6, \\ y_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 6, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Всі обмеження двоїстої задачі цим розв'язком задовольняються, тому $\{A_2, A_3\}$ є спряженим базисом системи векторів $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Зауважимо, що $\{A_3, A_2\}$ також буде спряженим базисом.

Методом повного виключення Жордана-Гаусса зводимо стандартну задачу (10.10) до псевдоканонічної форми відносно базису $\{A_2, A_3\}$ ii розв'язуємо її двоїстим симплекс-методом (див. **таблицю 19**).

Таблиця 19.

№ кр.	$c_{баз}$	$x_{баз}$	A_0	8	6	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
0		x_3	11	2	5	1	0
		x_2	10	4	$\boxed{1}$	0	1
1	0	$\leftarrow x_3$	-39	$\boxed{-18}$	0	1	-5
	6	x_2	10	4	1	0	1
	Δ_j	L	60	16	0	0	6
	γ			$8/9 \uparrow$			$6/5$
2	8	x_1	$39/18$	1	0		
	6	x_2	$4/3$	0	1		
	Δ_j	L	$76/3$				

Пояснення до таблиці. У таблиці кроку 0 записані коефіцієнти стандартної задачі (10.10). За початковий вибраний спряжений базис $\{A_3, A_2\}$. Вектор A_3 одиничний і перетворень не потребує. Вектор A_2 потрібно привести до вигляду $(0, 1)^T$, ведучим елементом перетворення Жордана-Гаусса, що це здійснює, є елемент $a_{22} = 1$ таблиці кроку 0.

Таблиця кроку 1 містить коефіцієнти псевдоканонічної форми задачі, яка відповідає одиничному спряженому базису $\{A_3, A_2\}$ і визначає її початковий псевдоплан $x^0 = (0, 10, -39, 0)^T$. Псевдоплан x^0 має від'ємну компоненту і не задовольняє ознаку оптимальності двоїстого симплекс-методу. За цією від'ємною компонентою визначається направляючий рядок, а за мінімумом γ – відношень – направляючий стовпчик (позначені стрілками) перетворення Жордана-Гаусса, за допомогою якого здійснюється перехід до нового спряженого базису $\{A_1, A_2\}$ і нового псевдоплану задачі

$x^1 = \left({}^{39}\!/_{18}, {}^{4}\!/_{3}, 0, 0\right)^T$, Цей псевдоплан є оптимальним. Оптимальне значення задачі $L(x^1) = {}^{76}\!/_{3}$.

Зауважимо, що при застосуванні двоїстого симплекс-методу у першу чергу на кожному кроці потрібно обчислювати елементи стовчика вільних членів A_0 , тобто ненульові компоненти нового псевдоплану, оскільки їх знаки перевіряються за ознакою оптимальності. Якщо псевдоплан оптимальний, то немає необхідності обчислювати всі інші елементи симплекс-таблиці.

Приклад 2. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу ЛП:

$$-x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8, \; x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \; x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Введенням у обмеження-нерівності вихідної задачі балансних змінних $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ з відповідними знаками зводимо загальну задачу до стандартної, при цьому змінюємо знаки коефіцієнтів двох перших рівнянь на протилежні. Отримаємо:

$$-x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -6, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases} \qquad (10.11)$$

Задачу (10.11) розв'язуємо двоїстим симплекс-методом (див. **таблицю 20**).

Пояснення до таблиці. Всі симплекс-оцінки Δ_j в таблиці кроку 0 невід'ємні, тому за критерієм спряженості базису задача (10.11) має псевдоканонічну форму. Вона визначає початковий псевдоплан $x^0 = \left(0, 0, -8, -6, 3\right)^T$, який відповідає спряженому базису $\{A_3, A_4, A_5\}$. Початковий псевдоплан x^0 неоптимальний, оскільки він має від'ємні компоненти. Для переходу до нового спряженого базису за направляючі рядок і стовпчик перетворення Жордана-Гаусса вибираємо перший рядок і перший стовпчик таблиці кроку 0 (позначені стрілками). Направляючий рядок вибираємо за мінімальним номером рядка з від'ємною компонентою псевдоплану у стовпчику A_0, направляючий стовпчик – за мінімумом γ – відношень. Виконуємо перетворення повного виключення з ведучим елементом $a_{11} = -3$ на таблиці кроку 0 і заповнюємо таблицю кроку 1.

Таблиця 20.

№ кр.	$c_{баз}$	$x_{баз}$	A_0	-1	-1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	0	$\leftarrow x_3$	–8	$\boxed{-3}$	–1	1	0	0
	0	x_4	–6	–1	–2	0	1	0
	0	x_5	3	1	–1	0	0	1
	Δ_j	L	0	1	1	0	0	0
	γ			$1/3 \uparrow$	1			
1	–1	x_1	$8/3$	1	$1/3$	$-1/3$	0	0
	0	$\leftarrow x_4$	$-10/3$	0	$\boxed{-5/3}$	$-1/3$	1	0
	0	x_5	$1/3$	0	$-4/3$	$1/3$	0	1
	Δ_j	L	$-8/3$	0	$2/3$	$1/3$	0	0
	γ				$2/5 \uparrow$	1		
2	–1	x_1	2	1	0			0
	–1	x_2	2	0	1			0
	0	x_5	3	0	0			1
	Δ_j	L	–4					

Новий псевдоплан $\boldsymbol{x}^1 = \left(8/3, 0, 0, -10/3, 1/3\right)^T$, який відповідає спряженому базису $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5\}$, також неоптимальний. Тому виконуємо ще одне перетворення повного виключення з ведучим елементом $a_{22} = -5/3$ на таблиці кроку 1 і заповнюємо таблицю кроку 2.

Елементи цієї таблиці є коефіцієнтами псевдоканонічної форми задачі (10.11), яка є водночас і канонічною і яка визначає невід’ємний, тобто оптимальний, псевдоплан $\boldsymbol{x}^2 = \left(2, 2, 0, 0, 3\right)^T$ з відповідним йому спряженим базисом $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_5\}$. Оптимальне значення задачі (10.11) рівне $L(\boldsymbol{x}^2) = -4.$

10.4. Вправи.

Розв'язати дані задачі двоїстим симплекс-методом, при необхідності початковий спряжений базис знайти за означенням або прямим перебором базисних розв’язків методом Жордана-Гаусса з перевіркою за критерієм спряженості базису:

1) $L = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

2) $L = -2x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

3) $L = 6x_1 + 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

4) $L = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 20, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

5) $L = x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 6x_1 + x_2 \le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

6) $L = -x_1 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

7) $L = 2x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

8) $L = x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

9) $L = 2x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

10) $L = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

11) $L = -x_1 - 10x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 \qquad + 2x_5 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = -2, \\ -4x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \qquad = -1, \\ \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

12) $L = \qquad -x_2 \qquad -2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 \qquad\qquad = -1, \\ \qquad -3x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad = -2, \\ \qquad +6x_2 \quad -12x_4 + x_5 = -2, \\ \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

13) $L = \quad -2x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 \quad -2x_3 - 2x_4 \quad = -1, \\ \quad 4x_2 - 32x_3 + 4x_4 \quad = -7, \\ \quad\quad 8x_3 - 16x_4 + 4x_5 = -1, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

14) $L = -x_1 \quad - 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -12x_1 \quad + 3x_4 + 3x_5 = -8, \\ 3x_1 \quad + 3x_3 - 9x_4 \quad = -8, \\ x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 \quad = -3, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

15) $L = \quad -x_3 - 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} \quad 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1, \\ 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 \quad = -3, \\ 2x_1 \quad + 2x_3 - 6x_4 \quad = -1, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

16) $L = \quad -2x_2 \quad - 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} \quad 4x_2 + 4x_3 - 8x_4 \quad = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 \quad - 6x_4 \quad = -1, \\ \quad -8x_2 \quad + 2x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Література.

1. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.
2. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях, – М.: Наука, 1991.– 447 с.
3. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач.– К.: Вища шк., 1990. – 239 с.
4. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 192 с.
5. Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Інформатика», «Соціальна інформатика». – К.: Абрис, 1999. – 217 с.

Зміст

Навчальне електронне видання

ШЕВЧЕНКО Віталій Іванович
ТЮПТЯ Володимир Іванович
ІКСАНОВ Олександр Маратович

Методична розробка до проведення практичних занять з лінійного програмування