РОЗДІЛ 1.

1.1. Приклади систем керування та їх математичних моделей.

Проблеми керування реальними системами у вік швидкого науково-технічного розвитку набувають значну важливість і актуальність. В цьому напрямку викликає значний інтерес керування системами з позицій оптимізації певних характеристик системи, наприклад, максимізації дальності польоту літального апарату, максимізації прибутку підприємства, мінімізації енергії або витрат, необхідних для досягнення певного цільового стану, мінімізації відхилення траєкторії руху системи від заданої та ін. Можна навести ще багато подібних задач. Знаходження та дослідження керування, за допомогою якого може бути досягнута задана ціль шляхом оптимізації певного критерію, складає фундаментальну основу теорії керування.

Для постановки задач оптимального керування необхідно, в першу чергу, визначити цільову функцію оптимізаційного процесу. З цією метою потрібно зробити відповідне формулювання задачі у фізичній формі і здійснити переклад цього фізичного опису на формальну мову математичних співвідношень. Для здійснення ефективного керування процесом необхідно знати поточний стан системи, охарактеризувати процес за допомогою адекватної математичної моделі, залежної від дії різноманітних зовнішніх факторів. За умови відомої функції цілі, стану і параметрів системи можна ставити задачу знаходження найкращого керування, яке оптимізує цільову функцію.

Для ілюстрації постановок задач теорії керування наведемо найбільш прості та наочні приклади.

Приклад 1.1.[5]. Розглянемо рух у площині маятника, підвішаного до точки опори за допомогою жорсткого невагомого стержня. Рівняння руху маятника, після певних перетворень, можна привести до вигляду:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \sin x = u(t)\ , \tag{1.1}$$

де $x = x(t)$ - кут відхилення маятника, $\dot{x}(t)$ - швидкість маятника, b - параметр, $u(t)$ - керуючий момент, вибором якого можна впливати на рух маятника.

Позначимо $x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t).$ Тоді рівняння (1.1) можна переписати у формі еквівалентної системи двох рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = -b\,x_2(t) - \sin x_1(t) + u(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Нехай у початковий момент часу t_0 маятник відхилено на певний кут і з певною початковою швидкістю, тобто

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1^0 \\ x_2(t_0) &= x_2^0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Будемо вважати також, що на керуючий параметр накладені обмеження

$$|u(t)| \le u^*,\ u^* = const > 0,\ t_0 \le t \le t_1\ . \tag{1.4}$$

Маючи математичний опис, можемо поставити задачу оптимального керування, наприклад: зупинити маятник у точці стійкої рівноваги за мінімальний час, тобто мінімізувати функціонал

$$T_{min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt, \tag{1.5}$$

за умови, що

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= 2p \\ x_2(t_1) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Приклад 1.2.[4]. Нехай математична точка *A* маси m рухається вздовж прямої. На неї діє сила u. Положення точки *A* характеризується координатою: $x=x(t)$.

Нехай також виконані умови:

$$x(t_0) = x_0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{1.7}$$

$$|u| \le \bar{u},\ \ (\bar{u} > 0). \tag{1.8}$$

Ставиться задача: визначити силу $u=u_0(t)$, під дією якої точка *A* рухається так, що із заданого стану (1.7) переміститься в інший заданий стан на момент $t=t_1$:

$$x(t_1) = x_1\ ,\ \ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \tag{1.9}$$

за мінімально можливий час:

$$T_{min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt. \ (1.5)$$

Для розв'язку задачі треба записати рівняння руху точки *A*. Згідно з другим законом Ньютона це рівняння можна представити у вигляді:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=u. \tag{1.10}$$

Точку *A*, рух якої змінюється за рахунок зовнішньої сили *u*, розглядаємо як приклад керованої системи.

Величину *u* називають керуючим впливом, функцією керування або просто керуванням.

Поставлена задача називається задачею швидкодії.

При розв'язуванні таких задач використовують так звані фазові координати та фазовий простір.

Тут фазовими координатами є дві змінні $x_1(t)$ і $x_2(t)$, зв'язані із змінною $x(t)$ рівностями:

$$x_1=x(t), x_2=\frac{dx}{dt}.$$

Тоді рівняння (1.10) можна записати у вигляді двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=x_2\\&m\frac{dx_2}{dt}=u\end{aligned} \tag{1.11}$$

а граничні умови (1.7), (1.9) у вигляді:

$$\begin{matrix}x_1(t_0)=x_1^0=x^0 & x_1(t_1)=x_1^1=x^1\\ x_2(t_0)=0 & x_2(t_1)=0\end{matrix}. \tag{1.12}$$

Точку A_1 з координатами $(x_1(t),x_2(t))$ на площині $X_1 0 X_2$ називають фазовою точкою системи. Площину (Рис. 1.1) називають фазовою площиною, або, взагалі кажучи, - фазовим простором, елементами якого є вектори фазових координат.

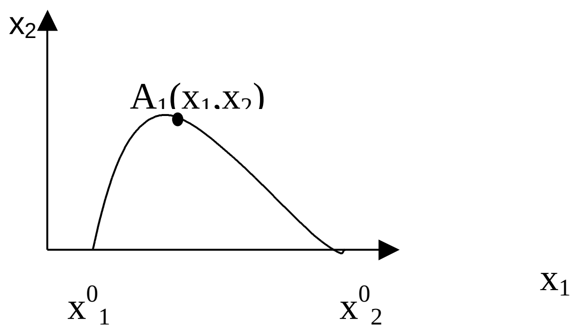

Рис. 1.1.

Із зміною часу t точка змінює своє положення і утворює фазову траєкторію системи.

Тоді поставлену задачу можна сформулювати так: знайти таке керування u з допустимої області (1.8) за допомогою якого система (1.11) із однієї заданої точки фазового простору $(x_1^0, 0)$ переходить в іншу задану точку $(x_1^1, 0)$ за мінімальний час.

В цьому прикладі фазовий простір є площиною. В інших випадках його розмірність може бути більшою.

Приклад 1.3. Нехай рух об'єкту описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u \end{aligned}. \tag{1.13}$$

Модель (1.13) можна інтерпретувати як математичну модель польоту літаючого об'єкту (наприклад, ракетоносія) сталої потужності.

Відомо:

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1^0 \quad x_1(t_1) = x_1^1 \\ x_2(t_0) &= x_2^0 \quad x_2(t_1) = x_2^1 \end{aligned}. \tag{1.14}$$

Початковий та кінцевий моменти часу – відомі.

Прискорення тягової сили обмежене:

$$|u| \le \bar{u}. \tag{1.15}$$

Ставиться задача: знайти керування $u^0(t)$ на відрізку $[t_0,t_1]$, яке переводить систему з точки (x_1^0, x_2^0) у точку (x_1^1, x_2^1) за фіксований час $T = t_1 - t_0$ і забезпечує мінімальні витрати пального:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \to \min_u.$$

Таке керування називається оптимальним керуванням.

Приклад 1.4. Наведемо одну із задач оптимального розподілу ресурсів в динамічних системах, на прикладі моделі бою двох сторін. Динаміку бою можна записати такою системою рівнянь [4]:

$$\frac{dx_1}{dt} = -bx_2 + u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + v(t) \quad ,$$

де $x_1(t)$ – кількість бойових одиниць з боку *A*, що залишились боєздатними на момент часу $t \in [t_0, t_1]$,

$x_2(t)$- кількість бойових одиниць, що залишились боєздатними на момент часу t для сторони *B*;

$u(t)$, $v(t)$- темпи надходження бойових одиниць резерву для сторін *A* і *B* відповідно в момент часу t;

a, b - середні ефективності швидкості стрільби бойових одиниць сторін *A* і *B* відповідно;

$T = t_1 - t_0$ – заданий час бою.

Нехай відомі:

$$x_1(t_0) = x_1^0$$
$$x_2(t_0) = x_2^0 \quad ,$$

а також величина $v(t)$.

Задача оптимального керування боєм: знайти керування $u_0(t)$ за обмеженнь:

$$0 \le u(t) \le \bar{u}, \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \le \bar{\bar{u}} \ ,$$

таке, щоб досягався екстремум функціоналу $Q(u(t))$.

Тут $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ - задані величини.

В якості функціоналу може бути вибрана певна мета бою, наприклад:

$Q = x_2(t_1) \to \min\limits_u$ - на кінець бою сторона *B* має менше бойових одиниць;

$Q = x_1(t_1) \to \max\limits_u$ - мета сторони *A*: максимальне збереження своїх бойових одиниць на кінець бою;

$Q = x_1(t_1) - x_2(t_1) \to \max\limits_u$ - мета сторони *A*: на кінець бою різниця в кількості бойових одиниць - на користь сторони *A*;

$Q = \int_{t_0}^{t_1} x_2(t)dt \to \min\limits_u$ - мета сторони *A*: щоб протягом усього проміжку ведення бою залишалося якомога менше боєздатних одиниць сторони В.

Приклад 1.5. Системи з випадковими збуреннями

$$\frac{dx_1}{dt} = u\,, \tag{1.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x(t)\,, \tag{1.17}$$

$$Q_1 = \int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)^2 + u^2]dt \;\to\; \min_u .$$

Тут $x(t)$ - випадковий процес, $|u(t)| \le k = const, t \in [t_0, t_1]$.

Мета керованої системи (1.16) - відтворити рух некерованої системи (1.17). Оскільки $x_2(t)$ - випадковий процес, то Q_1 - випадкова величина. Тоді критерій оптимальності матиме вигляд:

$$Q = M\{Q_1\} = M\{\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)]^2 + u^2\} \to \min_u . \tag{1.18}$$