Розділ 1.

1.3. Постановки задач оптимального керування.

Перейдемо до постановки задачі оптимального керування у загальному випадку.

Нехай:

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \le t \le T \ , \tag{1.19}$$

$$t_0 \in Q_0, T \in Q_1 \ , \tag{1.20}$$

де $G(t)$ - деяка задана множина із E^n: $G(t) \subset E^n$, а Q_0, Q_1 – задані множини на числовій осі: $R = \{ t : -\infty < t < +\infty \}$, не виключено, що $Q_0 = R, W_1 = R$.

Обмеження (1.20) потрібні, бо початковий та кінцевий моменти часу можуть залежать від керування (наприклад в задачах швидкодії) і не завжди можуть бути задані наперед. Тоді вказують обмеження типу (1.20).

Розглянемо умови на кінцях траєкторії $x(t)$. Із (1.19) випливає при $t=t_0$ і $t=T$: $x(t_0) \in G(t_0),\ x(T) \in G(T)$.

Але бувають ситуації, наприклад при $G(t)=E^n$, $t_0<t<T$, коли обмеження на кінцях зручніше виділяти і розглядати окремо.
Будемо вважати, що в E^n при кожному $t_0 \in Q_0$ задана множина $S_0(t_0)$ і при кожному $T \in Q_1$ - множина $S_1(T)$.

Умови на кінцях траєкторії будемо записувати у вигляді:

$$\begin{aligned} &x(t_0) \in S_0(t_0), t_0 \in Q_0 \\ &x(T) \in S_1(T), T \in Q_1 \end{aligned}. \tag{1.21}$$

В задачах оптимального керування прийнята така класифікація умов (1.20), (1.21): якщо множина Q_0 складається з єдиної точки, то <u>початковий момент часу</u> називають <u>закріпленим</u>, якщо Q_1 складається з єдиної точки T, то <u>кінцевий момент часу</u> називають <u>закріпленим</u>.

Якщо множина $S_0(t_0)$ (або $S_1(T)$) складається з однієї точки і не залежить від t_0: $S_0(t_0) = \{ x_0 \}, t_0 \in Q_0$ (або відповідно $S_1(T) = \{ x_1 \}, T \in Q_1$), то кажуть: <u>лівий (або правий) кінець траєкторії закріплений</u>.

Якщо $S_0(t_0) \equiv E^n, t_0 \in Q_0$, або $S_1(T) \equiv E^n, T \in Q_1$, то <u>лівий (або правий) кінець траєкторії</u> називають <u>вільним</u>.

В інших випадках лівий (або правий) кінець траєкторії називають рухомим (може рухатись по заданій кривій).

Наприклад:

$$S_0(t_0)=\begin{Bmatrix} y : y\in G(t_0), h_i(y,t_0)\le 0, i=\overline{1,m}, \\ h_i(y,t_0)=0, i=\overline{m_0+1,s_0} \end{Bmatrix}, \tag{1.22}$$

де функції $h_i(y,t_0)$ визначені при $y\in G(t), t\in Q_0$.

В прикладних застосуваннях часто виникають задачі, в яких лівий і правий кінці траєкторії вибираються в залежності один від одного. Це можна записати так:

$$(x(t_0),x(T))\in S(t_0,T), t_0\in Q_0, T\in Q_1, \tag{1.23}$$

де $S(t_0,T)$ – при кожному $(t_0,T)\in Q_0\times Q_1$– є задана множина із $E^n\times E^n$.

Приклад такої множини:

$$S_0(t_0,T)=\begin{Bmatrix} (x,y)\in E^n\times E^n, g_i(x,y,t_0,T)<0, i=\overline{1,m}, \\ g_i(x,y,t_0,T)=0, i=\overline{m+1,s} \end{Bmatrix}, \tag{1.24}$$

де $g_i(x,y,t,T)$–задані функції змінних $(x,y,t,T)\in E^n\times E^n\times Q_0\times Q_1$.

Зрозуміло, що множини (1.21) – частинний випадок множини (1.23), коли $S(t_0,T)=S_0(t_0)\times S_1(T)$, множина (1.22) - частинний випадок (1.24).

Далі, нехай задані множини Q_0, Q_1 на числовій осі R і $sup Q_0 < inf Q_1$ $V(t)\, Í\, E^r$, $G(t)\, Í\, E^n$ при всіх t: $sup Q_0 < t < inf Q_1$ задана множина $S(t_0,T)$, $t_0\in Q_0$, $T\in Q_1$.

Нехай рух фазової точки $x=(x_1,\mathbf{K},x_n)$ описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}=f(x,u,t), \tag{1.25}$$

де функція $f(x,u,t)$ визначена при $x\in G(t)$, $u\in V(t)$, $t\in [t_0,T]$.

Означення. Набір $(t_0,T,x_0,u(.),x(.))$ назвемо допустимим, якщо $t_0\in Q_0$, $T\in Q_1$, $t_0\le T$, керування $u=u(.)=(u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ визначено і кусково неперервне на $[t_0,T]$ і задовольняє обмеженню $u(t)\in V(t)$, $t_0\le t\le T$, $x=x(.)=x(.,u(.),x_0)$ – траєкторія задачі Коші:

$$\dot{x} = f(x(t),u(t),t),\ \ t_0 \le t \le T,\ x(t_0)=x_0, \tag{1.26}$$

що визначена на $[t_0,T]$ і задовольняє фазовому обмеженню (1.19), і $(x(t_0)=x_0, x(T)) \in S(t_0,T)$.

Будемо вважати, що множина допустимих наборів непорожня.

Зауваження. Позначення $z(t)$, $z(t)=(z_1(t),\dots,z_m(t))$, наприклад, означає значення функції в точці t; саму функцію будемо позначати $z(t)$, або просто z. Сама функція - це відображення області визначеності в E^m, що ставить у відповідність кожній точці t із області визначення деяку точку з E^m.

Обмеження в задачах можуть бути обмеженнями на значення функції, наприклад, $u(t) \in V(t)$. Якщо ж обмеження накладається на всю функцію $u(\cdot)$ в цілому і не є обмеженням на значення функції, тоді використовується позначення $u(\cdot)$ (тобто функція $u(\cdot)$, що задовольняє цьому обмеженню, в окремих точках або проміжках малої довжини може приймати довільні значення). Треба дивитись по контексту.

Нехай на множині допустимих наборів задана функція (або цільова функція, функціонал)

$$J(x_0,u(\cdot),x(\cdot),t_0,T) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt + g_0(x_0,x(T),t_0,T), \tag{1.27}$$

де $f^0(x,u,t), g_0(x,y,t,T)$- задані функції при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$, $\sup Q_0 < t < \inf Q_1$.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб мінімізувати, або максимізувати функціонал (1.27) на множині допустимих наборів.

Зауваження. Обмежимося розглядом задач на мінімум, оскільки задача на максимум функціонала J завжди може бути зведена до еквівалентної задачі на мінімум функціоналу $(-J)$.

Позначимо $J_* = \inf J(x_0,u(\cdot),x(\cdot),t_0,T)$, де нижня грань береться по усім допустимим наборам.

Означення. Допустимий набір $(x_{0*},u_*(\cdot),x_*(\cdot),t_{0*},T_*)$ називається розв’язком задачі оптимального керування, $u_*(\cdot)$ - оптимальним керуванням, $x_*(\cdot)$ - оптимальною траєкторією системи, якщо $J(x_{0*},u_*(\cdot),x_*(\cdot),t_{0*},T_*) = J_*$.

Тоді задачу оптимального керування можна записати у вигляді :

$$J(x_0,u(\cdot),x(\cdot),t_0,T)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt+g_0(x_0,x(T),t_0,T)\rightarrow inf \qquad (1.28)$$

$$\dot{x}=f(x(t),u(t),t),\ t_0\le t\le T \qquad (1.29)$$

$$x\in G(t),\ t_0\le t\le T \qquad (1.30)$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(T)\in S(t_0,T),\ t_0\in Q_0,\ \ T\in Q_1 \qquad (1.31)$$

$$u(t)\in V(t),\ t_0\le t\le T\ . \qquad (1.32)$$

вважаючи керування $u=u(\cdot)$ – кусково-неперервним на $[t_0,T]$ (якщо не сказане інше).

Зокрема:

- при $f^0\equiv 1, g_0\equiv 0$ – тоді $J(.)\equiv T\text{-}t_0$ – маємо задачу швидкодії.
- якщо початковий момент часу закріплений, тобто $Q_0=\{t_0\}$, то в задачі (1.28)-(1.32) включення $t_0\in Q_0$ опускають, на місці $J(.)$ пишуть: $J(x_0,u(\cdot),x(\cdot),t_0,T)$, на місці $S(t_0,T)$ пишуть $S(T)$.

Аналогічно роблять, якщо закріплений кінцевий момент T або один з кінців траєкторії. Якщо $G(t)\equiv E^n$, $V(t)\equiv E^r$, $S(t_0,T)=E^n\times E^n$, то відповідні обмеження в постановці задачі (1.28)-(1.32) опускають.

На практиці зустрічаються задачі оптимального керування більш загального вигляду, ніж задача (1.28)-(1.32). В теорії керування розглядаються також задачі, що враховують запізнення інформації, задачі з параметрами, з дискретним часом, з більш загальним виглядом цільової функції, задачі для інтегро-диференціальних рівнянь, для рівнянь з частинними похідними, для стохастичних рівнянь, тощо.