РОЗДІЛ 2.

2.1. Системи оптимального керування з розривними функціями керування.

Класичні теореми існування та єдності розв'язку задачі Коші:

$$\dot{x} = g(x,t), \tag{2.1}$$

$$x(t_0)=x_0 , \tag{2.2}$$

доводяться, як правило, за умови неперервності $g(x,t)$, $g_x(x,t)$ за сукупністю змінних в деякій області, що містить точку (x_0,t_0) (неперервність $g_x(x,t)$ часто замінюють умовою Ліпшиця для $g(x,t)$ за змінною x).

Але якщо $u(t) \in L_p^1[t_0,T]$ ($p \ge 1$), то неперервності функції $g(x,t) \equiv f(x,u(t),t)$ по змінній t не буде і, отже, класичні теореми існування і єдиності розв'язку стають недостатніми. Але, використовуючи ту ж техніку доведення, можна отримати існування і єдиність розв'язку задачі Коші для системи керування для кусково-неперервних керувань $u(t)$ або для керувань $u(t) \in L_p^r[t_0,T]$ ($p \ge 1$).

Розглянемо задачу Коші:

$$\dot{x} = f(x(t),u(t),t),\ t_0 \le t \le T \tag{2.3}$$

$$x(t_0)=x_0 , \tag{2.4}$$

де $u(t)$ – керування , $x(t)$ – фазові координати.

Функція $u(t)$ має задовольняти певним вимогам "гладкості ", тому при сильно "поганих" $u(t)$

- задача (2.3), (2.4) не буде мати сенсу;
- сильно "погане" $u(t)$ не буде мати фізичного змісту керування.

В більшості прикладних задач за керування $u=u(t)$ можуть бути взяті кусково-неперервні функції.

Означення. Функція $u(t)$ називається кусково-неперервною на $[t_0,T]$, якщо $u(t)$ неперервна в усіх точках за винятком, можливо, лише скінченої кількості точок $t_1,\dots t_p \in [t_0,T]$, в яких функція $u(t)$ може мати лише розриви типу скачка, тобто існують скінченні границі :

$$\lim_{t \to t_i - 0} u(t) = u(t_i - 0). \qquad \lim_{t \to t_i + 0} u(t) = u(t_i + 0).$$

але, взагалі кажучи, $u(t_i - 0) \neq u(t_i + 0)$, $(i = \overline{1,p})$.

Зустрічаються також задачі, в яких крім неперервності $u(t)$ вимагається і існування кусково-неперервної похідної $\dot{u}(t)$ - це кусково-гладкі керування.

Але класи кусково-неперервних і кусково-гладких керувань бувають вузькими, і замість них доводиться розглядати більш широкі класи керувань: простір $L_p^r[t_0,T], 1 \leq p < \infty$..

Означення. $L_p^r[t_0,T]$, $1 \leq p < \infty$ - простір вимірних вектор-функцій $u(t)=(u_1(t),\dots,u_r(t))$, $t_0 \leq t \leq T$, для яких функція $|u(t)|^p$ сумується на $[t_0,T]$ в смислі Лебега і, значить, існує норма

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_{t_0}^{T} |u(t)|^p dt\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty.$$

Якщо $p=\infty$, то під $L_p^r[t_0,T]$ розуміємо простір обмежених вимірних вектор-функцій $u(t)$ з нормою

$$\|u\|_{L_p} = \inf_{v(t)} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |v(t)|,$$

де $v(t)$ пробігає множину усіх вимірних функцій, що співпадають з $u(t)$ майже всюди на відрізку $[t_0,T]$.

В частинному випадку вважатимемо $u(t)$ кусково-неперервними функціями. Тоді всі викладки зберігаються. Наприклад, обмеження $u(t) \in V(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ для кусково-неперервних керувань повинні виконуватись для всіх $t \in [t_0,T]$, а для вимірних керувань - майже всюди на $[t_0,T]$.

Розглянемо задачу Коші (2.3), (2.4) для керованої системи. Нехай задані точка $x_0 \in E^n$ і деяке кусково-неперервне керування $u=u(\cdot)=u(t)$, $(t_0 \leq t \leq T)$ або керування $u(t) \in L_p^r[t_0,T]$ при деякому $p \geq 1$. Що розуміти під розв'язком цієї задачі? Для випадку кусково-неперервних або вимірних керувань вимагати існування неперервно-диференційованого розв'язку задачі (2.3), (2.4) (як в диференціальних рівняннях) не має сенсу. Тому будемо користуватися більш загальним означенням розв'язку задачі Коші.

Означення. Неперервну функцію $x=x(\cdot)=u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ що задовольняє рівності

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(t),u(t),t)dt + x_0, \ t_0 \leq t \leq T \qquad (2.5)$$

будемо називати розв'язком або траєкторією задачі (2.3), (2.4), що відповідає початковій умові x_0 і керуванню $u=u(\cdot)$.

Будемо позначати його через $x=x(\cdot,u,x_0)= x(\cdot,u(\cdot),x_0)$, або $x=x(t,u,x_0)$ $(t_0 \leq t \leq T)$.

Початкова точка $x(t_0,u,x_0)$ називається лівим кінцем траєкторії, t_0 - початковим моментом часу, $x(T,u,x_0)$ - правим кінцем траєкторії, T – кінцевим моментом часу.

Коли ясно, якому саме керуванню $u(\cdot)$ і початковому стану x_0 відповідає траєкторія, будемо просто писати $x=x(\cdot)=x(t)$, $t_0 \le t \le T$.