РОЗДІЛ 2

2.2. Існування та єдиність узагальнених розв’язків диференціальних рівнянь з розривними правими частинами

В диференціальних рівняннях теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші доводяться при умовах неперервності вектор-функції правої частини та її похідної по *x* за сукупністю змінних в деякій області (умова неперервності похідної по *x* часто замінюється умовою Ліпшиця по *x*). Але якщо $u(t)\in L^1_p[t_0,T]$, $(p\geq 1)$, неперервності функції $f(x,u(t),t)$ по *t* не буде. Тоді класичних теорем існування та єдиності розв’язку недостатньо.

Використовуючи техніку доведення класичних теорем існування та єдиності, можна отримати умови існування та єдиність розв’язку задачі (2.3), (2.4) для кусково-неперервних $u(t)$ або $u(t)\in L^r_p[t_0,T]$, $(p\geq 1)$.

Теорема 2.1. 1) Нехай функція $f(x,u,t)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних при всіх $(x,u,t)\in E^n \times E^r \times [t_0,T]$ і нехай

$$2)\quad |f(x,u,t)-f(y,u,t)|\leq L(t)|x-y| \tag{2.6}$$

при всіх $(x,u,t), (y,u,t)\in E^n \times E^r \times [t_0,T]$,
де $L(t)$ - невід’ємна функція, що належить класу $L_1[t_0,T]$.

Тоді для будь-якого обмеженого вимірного керування $u(t)$ (тобто $u(t)\in L^r_\infty[t_0,T]$) і для будь-якої початкової умови x_0 задача (2.3), (2.4) має, і притому єдиний розв’язок $x=x(t)$, визначений на відрізку $[t_0,T]$.

Цей розв’язок має похідну $\dot{x}(t)$ майже всюди на $[t_0,T]$, $\dot{x}\in L^n_\infty[t_0,T]$ і задовольняє рівнянню (2.3) при майже всіх $t\in[t_0,T]$.

Доведення. Позначимо: простір неперервних вектор-функцій $x(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))$, $(t_0\leq t\leq T)$ з нормою

$$||x||_c=\max_{t_0\leq t\leq T}|x(t)|$$

через $C^n[t_0,T]$. Відомо, що $C^n[t_0,T]$ - повний нормований простір. Зафіксуємо довільну точку x_0 і якесь обмежене вимірне керування $u=u(t)$, $t_0\leq t\leq T$. Можна показати, що тоді для будь-якої функції $x(t)\in C^n[t_0,T]$ функція $f(x(t),u(t),t)$ буде обмеженою вимірною функцією змінної *t* на відрізку $[t_0,T]$.

Визначимо відображення A:

$$z(t)=Ax=\int_{t_0}^{t} f(x(t),u(t),t)dt + x_0,\ t_0\le t\le T, \tag{2.7}$$

що діє із $C^n[t_0,T]$ в $C^n[t_0,T]$. Значення функції $z(\cdot)=Ax(\cdot)$ в точці t будемо позначати через $Ax(t)$. Покажемо, що A^m - m-та степінь відображення А - при досить великому m буде стискаючим відображенням. Для цього за індукцією доведемо, що для будь-яких $x(\cdot),y(\cdot)\in C^n[t_0,T]$

$$|A^m x(\cdot)(t)-A^m y(\cdot)(t)|\le \frac{1}{m!}\max_{t_0\le t\le t}|x(t)-y(t)|(\int_{0}^{t} L(t)dt)^m \tag{2.8}$$

при всіх t, $t_0\le t\le T$ $(m=1,2,\ldots)$.

Дійсно, із (2.7), згідно умови (2.6), маємо:

$$|A^m x(\cdot)(t)-A^m y(\cdot)(t)|=|\int_{t0}^{t}[f(x(t),u(t),t)-f(y(t),u(t),t)]dt|$$

$$\le\int_{t0}^{t} L(t)|x(t)-y(t)|dt\le\max_{t0\le t\le t}|x(t)-y(t)|\int_{t0}^{t} L(t)dt. \tag{2.9}$$

Оцінка (2.8) при $m=1$ доведена. Нехай ця оцінка (2.8) вірна для деякого $m\ge 1$. Тоді для $m+1$ за допомогою нерівності (2.9) отримаємо:

$$|A^{m+1}x(\cdot)(t)-A^{m+1}y(\cdot)(t)|=|A(A^m x(\cdot)(t)-A^m y(\cdot)(t))|\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t} L(t)|A^m x(\cdot)(t)-A^m y(\cdot)(t)|dt\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t} L(t)\frac{1}{m!}\max_{t_0\le x\le t}|x(x)-y(x)|(\int_{t_0}^{t} L(x)dx)^m dt)\le$$

$$\le\frac{1}{m!}\max_{t_0\le x\le t}|x(x)-y(x)|\int_{t_0}^{t} L(t)(\int_{t_0}^{t} L(x)dx)^m dt=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\max_{t_0\le t\le t}|x(t)-y(t)|\int_{0}^{t}\frac{d}{dt}(\int_{t_0}^{t} L(x)dx)^m dt=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\max_{t_0\le t\le t}|x(t)-y(t)|(\int_{t_0}^{t} L(t)dt)^{m+1}.$$

для будь-яких $t\in[t_0,T]$.

Із цієї оцінки випливає, що

$$||A^m x(\cdot)-A^m y(\cdot)||_c\le\frac{1}{m!}(\int_{t_0}^{T} L(t)dt)^m\ ||x(\cdot)-y(\cdot)||_c.$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m!}(\int\limits_{t_0}^{T} L(t)dt)^m = 0$, то при досить великому m будемо мати: $\dfrac{1}{m!}(\int\limits_{t_0}^{T} L(t)dt)^m < 1$.

Таким чином, відображення A^m є стискаючим. Із принципу стискаючих відображень випливає існування єдиної функції $x(\cdot)\in C^n[t_0,T]$, для якої $x(\cdot)=A^m x(\cdot)$, що еквівалентно виконанню рівності (2.5).

Із властивостей інтегралу Лебега із змінною верхньою границею і із (2.5) випливає, що функція $x(t)$, $t_0\le t\le T$, яку отримали, абсолютно неперервна, її похідна $\dot{x}(t)\in L^n_\infty[t_0,T]$ і рівняння (2.3) задовольняється майже всюди на $[t_0,T]$.

Теорема 2.1 доведена.

Зауваження 1. Замість умови (2.6) можна вимагати неперервність $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left\{ \dfrac{\partial f^i(x,u,t)}{\partial x^j} \right\} (i,j=\overline{1,n})$ при $(x,u,t)\in E^n \times E^r \times [t_0,T]$, але в цьому випадку існування розв'язку задачі (2.3), (2.4) можна гарантувати, взагалі кажучи, лише на відрізку $[t_0,t_0+a]$, де a – як завгодно мале число.

Зауваження 2. Якщо керування $u(t)\in L^r_p[t_0,T],\ (1\le p<\infty)$, то теорема 2.1 та її доведення залишаються в силі, якщо, наприклад, додатково вимагати

$$|f(x,u,t)|\le C_0(|x|+|u|^p)+C_1(t), \tag{2.10}$$

для всіх $(x,u,t)\in E^n \times E^r \times [t_0,T]$, де $C_0=\mathrm{const}\ge 0$, $C_1(t)\ge 0$, $C_1\in L_1[t_0,T]$.
Умова (2.10) потрібна, щоб забезпечити включення $f(x,u,t)\in L_1[t_0,T]$ для будь-яких $x(\cdot)\in C^n[t_0,T]$, $u(\cdot)\in L^r_p[t_0,T]$, щоб відображення $z(t)$ за (2.7) мало сенс.

Розглянемо тепер лінійні системи:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t),\quad t_0\le t\le T, \tag{2.11}$$

де $A(t)=\{a_{ij}(t)\}$, $B(t)=\{b_{ij}(t)\}$ – матриці $(n\times n)$ і $(n\times r)$ відповідно,

$$f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t)),\ t_0\le t\le T.$$

Теорема 2.2. Нехай елементи $\{a_{ij}(t)\}$, $\{b_{ij}(t)\}$ матриць $A(t)$, $B(t)$ належать $L_\infty[t_0,T]$, а $f(t)\in L_1^n[t_0,T]$. Тоді для кожного керування $u=u(t)\in L_p^r[t_0,T]$, де p - деяке фіксоване число, $1\le p\le\infty$, і будь-якої точки $x_0\in E^n$ задача Коші для системи (2.11) з початковою умовою $x(t_0)=x_0$ має і притому єдиний розв'язок (2.5), визначений на всьому відрізку $[t_0,T]$. Цей розв'язок має похідну $\dot{x}(t)$ майже всюди на $[t_0,T]$, $\dot{x}(t)\in L_1^n[t_0,T]$ і задовольняє рівнянню (2.11) майже всюди на $[t_0,T]$.

Якщо крім наведених умов ще має місце включення $f(t)\in L_p^n[t_0,T]$, то $\dot{x}(t)\in L_p^n[t_0,T]$.

Доведення. Доведення зводиться до доведення *Теореми 2.1*. Неважко бачити, що права частина рівняння (2.11) задовольняє умову (2.6) з $L(t)=||A(t)||\in L_\infty[t_0,T]$.

Крім того,

$$g(t)\equiv A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t)\in L_1^n[t_0,T]$$

для $\forall x^0(t)\in C^n[t_0,T]$, $u(t)\in L_p^r[t_0,T]$.

Подальше доведення проводиться так само як доведення *Теореми 2.1*.