РОЗДІЛ 3.

3.1. Постановка та дослідження задач керованості для лінійних нестаціонарних систем.

Розглянемо систему керування що описується лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{3.1}$$

де $x(t)$ – n- вимірний, $u(t)$ – m-вимірний вектор-стовпці.

Означення. Система (3.1) називається цілком керованою, якщо для двох довільних точок x^0, x^1 із фазового простору X і двох довільних значень t_0, t_1 аргументу t існує така функція керування $u(t)$, $t\in [t_0,t_1]$, при якій розв'язок системи рівнянь (3.1) задовольняє умовам $x(t_0)=x^0$, $x(t_1)=x^1$.

Позначимо: $X(t,x)$ - фундаментальна матриця для однорідних рівнянь, що відповідають рівнянням (3.1), нормована в точці x. Позначимо матрицю $W(t,x)=X(t,x)\cdot B(x)$. Матрицю $W(t,x)$ називають матрицею імпульсних перехідних функцій.

Вважаємо

$$W(t,x) = \begin{pmatrix} w_1(t,x) \\ . \\ . \\ . \\ w_n(t,x) \end{pmatrix},$$

де $w_i(t,x)$– вектор-рядок:

$$w_i(t,x) = (w_{i1}(t,x),\ldots,w_{in}(t,x)),\ i=\overline{1,n}\ . \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Для того щоб система (3.1) була цілком керованою, необхідно і достатньо, щоб вектор-функції $w_{i1}(t,x),\ldots,w_{in}(t,x)$ були лінійно-незалежними на довільному проміжку $[t_0,t_1]$.

Доведення. Достатність. Розглянемо дві довільні точки x^0, $x^1\in X$ і два довільні t_0, t_1 – значення аргументу t. Побудуємо розв'язок задачі Коші для рівняння (3.1) з початковою умовою $x(t_0)=x^0$:

$x(t) = X(t_0,t_1)\cdot x^0 + \int_{t_0}^{t_1} X(t,x)\cdot B(x)u(x)dx$ – за формулою Коші.

або

$$x(t)=\int_{t_0}^{t_1} W(t,x)u(x)dx + X(t,t_0)x^0 . \qquad (3.3)$$

Враховуємо, що $x(t_1)=x^1$. Тоді для забезпечення умов цілком керованості системи (3.1) досить існування такого керування $u(t)$, при якому виконується:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)u(x)dx = x^1 - X(t_1,t_0)x^0 . . \qquad (3.4)$$

Покажемо що така функція керування існує і має вигляд:

$$u^0(t)=u(t)=W^*(t_1,t)l^0, \qquad (3.5)$$

де $W^*(t_1,t)$ – матриця, спряжена до $W(t_1,t)$, l^0 - деякий n-мірний сталий вектор.

Дійсно, підставивши (3.5) в (3.4), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора l^0:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)\cdot W^*(t_1,x)dx\ l^0 = x^1 - X(t_1,t_0)x^0 . \qquad (3.6)$$

Позначимо праву частину рівнянь через c: $c = x^1 - X(t_1,t_0)x^0$. Залишилося показати, що визначник системи (3.6) не дорівнює нулю. Для цього зауважимо, що для довільного n-вимірного вектора l $(||l||>0)$, за умови лінійної незалежності векторів (3.2), справедливі співвідношення:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|W^*(t_1,x)l\|^2 dx = l^* \int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)W^*(t_1,x)dxl > 0 , \qquad (3.7)$$

які означають додатню визначеність матриці $\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)W^*(t_1,x)dx$

Звідси, з урахуванням умови Сільвестра маємо нерівність

$$det\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)W^*(t_1,x)dx > 0 . \qquad (3.8)$$

Таким чином, враховуючи невиродженість матриці в системі рівнянь (3.6), запишемо:

$$l^0=\left(\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)W^*(t_1,x)dx\right)^{-1}c.$$

Це разом з формулою (3.5) дає керування у вигляді:

$$u^0(t)=W^*(t_1,t)(\int_{t_0}^{t_1} W\ (t_1,x)W^*(t_1,x)dx)^{-1}[x^1 - X(t_1,t)x^0]\ . \qquad (3.9)$$

Необхідність. Доведення від супротивного. Нехай вектор-функції (3.2) при $t=t_1$ на деякому інтервалі $[t_0,t_1]$ лінійно-залежні, але, незважаючи на це, система цілком керована: спеціальним набором функцій $u(t)$ можна забезпечити виконання довільних крайових умов: $x(t_0)=x^0$, $x(t_1)=x^1$.

Із лінійної залежності вектор-функцій (3.2) при $t=t_1$ маємо:

$$l^*W(t_1,x)\equiv 0,\ x\in[t_0,t_1], \qquad (3.10)$$

де l - деякий спеціально підібраний n-вимірний сталий вектор, $||l||>0$.

Довільні точки x^0, x^1 виберемо з умови: $l^*[x^1-X(t_1,t_0)x^0]\neq 0$.

На основі (3.10) можна стверджувати, що для довільної функції $u(x)$ справедлива рівність

$$l^*\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)u(x)dx\equiv 0,$$

а тому $$l^*\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)u(x)dx\neq l^*[x^1-X(t_1,t_0)x^0].$$

Це суперечить тому, що система (3.1) цілком керована, бо остання нерівність говорить: для вибраних x^0, x^1 не можна вказати вектор-функцію $u(t)$, яка забезпечить виконання (3.4).

Теорема доведена.

Зауваження 1. Як випливає з доведення, зокрема з (3.6), для системи (3.1) існує не єдина функція керування $u(t)$, яка забезпечує виконання заданих крайових умов. Серед них функція, що дається формулою (3.9), є оптимальною у тому розумінні, що

$$\int_{t_0}^{t_1}\|u(t)\|^2 dt > \int_{t_0}^{t_1}\|u^0(t)\|dt, \qquad (3.11)$$

де $\|u(t)\|^2=\sum_{k=1}^{m}u_k^2(t)=u^*(t)u(t).$

Дійсно проінтегруємо рівність:

$\|u^0(t)\|^2+\|u(t)-u^0(t)\|^2-\|u(t)\|^2-2u^{0*}[u(t)-u^0(t)]$ від t_0 до t_1.

Із врахуванням (3.9) видно, що

$$\int_{t_0}^{t_1}u^{0*}[u(t)-u^0(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}l^{0*}W(t_1,t)[u(t)-u^0(t)]dt=l^{0*}(c-c)=0.$$

Тоді буде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \|u^0(t)\|^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} \|u(t) - u^0(t)\|^2 dt .$$

Звідси випливає нерівність (3.11).

Але умови, наведені в теоремі 3.1, практично важко використовувати, бо матриця *W(t,x)* наперед не задається, і її треба кожен раз обчислювати для різних значень *t* і *x*.

Тому бажано знайти умови цілком керованості, що виражаються через матриці *A(t), B(t).* Розглянемо це питання для стаціонарних систем.