РОЗДІЛ 3.

3.2. Керованість лінійних стаціонарних систем.

Нехай система описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{3.12}$$

де A і B - матриці зі сталими елементами.

Лема 3.1. Якщо ранг матриці

$$rang\ \ S_n = rang\,(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = r < n,$$

то r лінійно-незалежних стовпців в матриці S_n зберігається і в матриці S_r, при цьому довільний інший стовпець матриці $A^{(s)}B$ $(s=0, 1, \ldots)$ можна представити як лінійну комбінацію r цих лінійно-незалежних стовпців.

Доведення цієї леми можна знайти, зокрема, у підручнику [ ].

Теорема 3.2. Для цілком керованості стаціонарної системи (3.12) n-го порядку необхідно і достатньо, щоб

$$rang\ S_n = rang\,(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n. \tag{3.13}$$

Доведення. Достатність. Нехай $rang\ S_n = n$. Покажемо, що вектор-функції (3.2) при $t = t_1$ лінійно-незалежні на будь-якому інтервалі $[t_0, t_1]$. Тобто, треба довести: якщо $rang\ S_n = n$, то не існує такого сталого вектору l $(\| l \| > 0)$, що має місце тотожність:

$$l^* W(t_1, x) = l^* X(t_1, x)B \equiv 0, \tag{3.14}$$

$$x \in [t_0, t_1],\ \| l \| > 0.$$

Або це рівносильне такому твердженню: якщо існує деякий відрізок $[t_0, t_1]$ і деякий вектор l, для яких виконуються (3.14), то $rang\ S_n < n$.

Для доведення цього твердження продиференціюємо n-1 разів тотожність (3.14) по x :

$$\begin{aligned}
& l^* X(t_1, x)B \equiv 0 \\
& l^* \frac{d}{dx} X(t_1, x)B \equiv 0 \\
& \vdots \\
& l^* \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} X(t_1, x)B \equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Врахуємо, що $X(t,x)=\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(x)$, де $\Phi(t)=(j_{ik}(t))_{i,k=1}^{n}$ - фундаментальна матриця однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (3,12).

Фундаментальна матриця $\Phi(t)$задовольняє матричному рівнянню

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}=A(t)\cdot\Phi(t), \Phi(0)=E.$$

Лінійно-незалежні розв`язки $j_i(t)=\begin{pmatrix} j_{i1}(t) \\ \vdots \\ j_{in}(t) \end{pmatrix}$, $i=\overline{1,n}$ утворюють цю фундаментальну матрицю.

Тоді можемо записати:

$$\frac{d}{dx}X(t_1,x)\cdot B=\frac{d}{dx}\left[\Phi(t_1)\cdot\Phi^{-1}(x)\right]\cdot B=\Phi(t_1)\frac{d}{dx}\Phi^{-1}(x)\cdot B,$$

де $\Phi^{-1}(x)$- обернена матриця до $\Phi(x)$.

Відомо, що матриця $\Phi^{-1}(t)$ задовольняє рівнянню:

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t)=-\Phi^{-1}(t)\cdot A.$$

А тому маємо

$$\frac{d}{dx}X(t_1,x)B=-\Phi(t_1)\cdot\Phi^{-1}(x)AB,$$

або
$$\frac{d}{dx}X(t_1,x)=-\Phi(t_1)\cdot\Phi^{-1}(x)A. \tag{3.16}$$

Використавши (3.16), із рівності (3.15) отримаємо:

$$l^{*}X\left(t_1,x\right)B\equiv 0$$
$$l^{*}X\left(t_1,x\right)AB\equiv 0$$
$$\vdots$$
$$l^{*}X\left(t_1,x\right)A^{n-1}B\equiv 0.$$

Поклавши тут $x=t_1$ маємо:

$$\begin{aligned} & l^* B \equiv 0 \\ & l^* AB \equiv 0 \\ & \vdots \\ & l^* A^{n-1} B \equiv 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Це можливо тоді і тільки тоді, коли ранг матриці $S_n = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ менше *n*. Достатність доведена.

Необхідність буде доведена, коли довести, що із лінійної незалежності вектор-функції $W_i(t,x), i = \overline{1,n}$ при $t = t_1$ на довільному $[t_0, t_1]$ випливає рівність рангу S_n числу *n*.

Але це еквівалентно такому твердженню: якщо ранг S_n менше *n*, то функції $W_i(t,x)$ при $t = t_1$ лінійно-залежні на довільному $[t_0, t_1]$. Доведемо це. Нехай $rang\, S_n < n$.

Тоді обов`язково існує такий *n*-мірний вектор l $\left(\| l \| > 0\right)$, що

$$l^* A^k B \equiv 0,\ k = \overline{0, n-1}. \tag{3.18}$$

Враховуючи *Лему 1*, прийдемо до висновку:

$$l^* A^k B \equiv 0 \tag{3.19}$$

для всіх цілих *k*>*0*.

Матрицю $X(t,x)$ можна представити степеневим рядом

$$X(t,x) = e^{A(t-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}(t-x)^k,$$

то для лінійної комбінації векторів $w_i(t,x)$ отримаємо вираз:

$$l^* W(t,x) = l^* X(t,x) B = \sum_{k=0}^{\infty} l^* \frac{A^k}{k!}(t-x)^k. \tag{3.20}$$

Якщо в цій рівності за вектор *l* взяти вектор , що фігурує в (3.19), то отримаємо:

$$l^* W(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} l^* \frac{A^k}{k!}(t-x)^k \equiv 0,$$

що означає лінійну залежність векторів $w_i(t,x)$. Теорема доведена.

Зауваження 2. Якщо в системі (3.12) вектор керування $u(t)$-одномірний, і $B = b$ - стовпчик, то необхідна і достатня умова цілком керованості має вигляд:

$$det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0. \qquad (3.21)$$

Співвідношення (3.13) і (3.21) назвемо умовами цілком керованості стаціонарних систем.

Означення 2. (Цілком керованість на заданому проміжку). Система

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

називається цілком керованою на заданому проміжку $[t_0, t_1]$, якщо для 2-х довільних значень $x^0, x^1 \in X$ - фазового простору можна вказати таку функцію керування $u(t), t \in [t_0, t_1]$, що розв`язок цієї системи задовольняє крайовим умовам:

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1.$$

Теорема 3.3. Якщо для деякого t із заданого проміжку $[t_0, t_1]$ виконується умова

$$rang\left[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\right] = n, \qquad (3.22)$$

де $z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}}{dt}, \quad k = \overline{2, n},$

то система (3.1) цілком керована на заданому проміжку.

Якщо вектор-функції $w_i(t, x)$ $(i=1,...,n)$ при $t = t_1$ лінійно-залежні на заданому проміжку $[t_0, t_1]$, то

$$rang\left[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\right] < n. \qquad (3.23)$$

Доведення. Доведення першої частини повторює доведення теореми 3.2. Доведення другої частини теореми. Лінійна залежність функцій $w_i(t, x)$ означає тотожність (3.10): $l^* W(t_1, x) \equiv 0 \quad (x \in [t_0, t_1])$.

Диференціюємо цю тотожність по x і отримаємо:

$$\begin{aligned} & l^* X(t_1, x)B(x) \equiv 0 \\ & l^* \frac{d}{dx}\left[X(t_1, x)B(x)\right] \equiv 0 \\ & \vdots \\ & l^* \frac{d^n}{dx^{n-1}} X(t_1, x)B(x) \equiv 0. \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Далі : $\frac{d}{dx}\left[X(t_1,x)B(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[X(t_1,x)z_1(x)\right]$.

Враховуючи (3.16), отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\left[X(t_1,x)z_1(x)\right]=-X(t_1,x)\left[A(x)z_1(x)-\frac{dz\ \ (x)}{dx}\right]=-X(t_1,x)z_2(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[X(t_1,x)B(x)\right]=\ldots=X(t_1,x)z_3(x),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[X(t_1,x)B(x)\right]=\ldots=(-1)^{n-1}X(t_1,x)z_n(x).$$

Підставимо це в (3.24), позначивши $l_1^*(x)=l^*X(t^1,x)$.

Тоді:

$$l_1^*(x)z_1(x)\equiv 0,\ldots,\equiv l_1^*(x)z_n(x)\equiv 0,\quad x\in\left[t_0,t_1\right]. \tag{3.25}$$

Оскільки $\| l_1(x)\|\geq\frac{\| l\|}{\| X^{*-1}(t_1,x)\|}>0$, то (3.25) означають лінійну залежність рядків матриці $\left[z_1(x),z_2(x),\ldots,z_n(x)\right]$, тобто справедлива нерівність (3.23). Теорема доведена.

Зауваження 3.3. Для цілком керованості системи (3.1) (на довільному проміжку $[t_0,t_1]$) досить, щоб (3.25) виконувалось для будь-яких t_0,t_1.

Припустимо тепер, що для системи (3.12)

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\quad (A=const,B=const)$$

умова цілком керованості не виконується. Розглянемо деякі властивості стаціонарних систем в цьому випадку.

Лема 3.2. Нехай $rang\,(B,AB,\ldots,A^{n-1}B)=r<n$ і $k_1,k_2,\ldots,k_r$ - лінійно-незалежні стовпці цієї матриці. Тоді лінійний підпростір K_r, що породжений векторами $K_p\ (p=\overline{1,r})$ утворює інваріантний підпростір системи (3.12): тобто розв`язок $x(t)$ системи (3.12) належить K_r для $t>t_0$ при довільних $u(t)$ і $x(t_0)\in K_r$.

Без доведення.

Теорема 3.4. Стаціонарну систему керування, для якої виконується умови *леми 3.2*, за допомогою неособливого лінійного перетворення $x=Ty$, де T- прямокутна матриця:

$$T=(k_1,k_2,\ldots,k_r,l_1,l_2,\ldots,l_{n-r}), \tag{3.26}$$

в якій k_j- лінійно-незалежні стовпці матриці S_n, l_j- довільні сталі стовпці, що забезпечують невиродженість матриці T, можна привести до вигляду:

$$\frac{dy}{dx}=Py+Qu,$$

де $P=T^{-1}AT$, $Q=T^{-1}B$.

При цьому матриці P і Q будуть мати структуру:

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

де $P_1 - r\times r,\ P_2 - r\times(n-r),\ P_3 - (n-r)\times(n-r),\ Q_1 - r\times m,$ матриці, при цьому

$$rang\,(Q_1,P_1Q_1,\ldots,P_1^{r-1}Q_1)=r, \tag{3.28}$$

(тобто підсистема розмірності $r\times r$ буде цілком керованою).

Без доведення.