ТЕМА 4.

4.1. Спостережуваність в лінійних системах керування.

В теорії автоматичного керування розглядаються задачі про спостережуваність. Зміст цих задач: встановити алгоритм визначення частини або всіх координат системи при умові, що відома друга частина координат або деякі функції від цих координат, а також відома математична модель системи керування у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t). \tag{4.1}$$

Означення 4.1. Задачу знаходження вектора *x(t)* стану системи (4.1) або окремих його компонент за відомою на деякому проміжку $[t_0, t_1]$ функцією

$$y(t) = q^{*}(t)x(t), \tag{4.2}$$

де *q(t)* - відома *n*-вимірна вектор-функція, будемо називати задачею спостережуваності лінійної системи (4.1). Функцію *y(t)* називають функцією (сигналом) виходу системи (4.1).

Зауваження 4.1. Узагальнення *означення 1*: знайти вектор *x(t)* або окремі його компоненти за відомою вектор-функцією

$$y(t) = G^{*}(t)x(t), \tag{4.3}$$

де *G(t)*- відома матриця $n \times m$.

Означення 4.2. Якщо задача спостережуваності (4.1), (4.2) має розв`язок, то система називається цілком спостережуваною або частково спостережуваною, в залежності від того, всі чи частину компонент вектора *x(t)* вдається встановити.

Означення 4.3. Пара матриць *A(t), G(t)* називається спостережуваною, якщо можна розв`язати задачу спостережуваності для системи (4.1) за вектором виходу (4.3).

Розглянемо найбільш прості розв`язки задач спостережуваності.

Теорема 4.1. Нехай для кожного $t \in [t_0, t_1]$ існують і відомі *n-1* похідні від вектору (4.3) системи (4.1). Тоді для існування розв`язку задачі спостережуваності для системи (4.1) в фіксованій точці t у вигляді лінійної комбінації значень $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ достатньо, щоб

$$rang\ \tilde{S}_n(t) = n, \tag{4.4}$$

де
$$\tilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)), \tag{4.5}$$

$$G_1^*(t) = G^*(t),\ G_{\nu+1}^*(t) = G_\nu^*(t)A(t) + \frac{dG_\nu^*(t)}{dt}. \tag{4.6}$$

Доведення. Продиференціюємо $(n\text{-}1)$ разів співвідношення (4.3) і отримаємо n рівностей

$$\begin{aligned} &y(t) = G_1^*(t)x(t),\\ &y'(t) = \left[\frac{dG_1^*(t)}{dt} + G_1^*(t)A(t)\right]x(t) = G_2^*(t)x(t),\\ &\vdots\\ &y^{(n-1)}(t) = \left[\frac{dG_{n-1}^*(t)}{dt^{n-1}} + G_{n-1}^*(t)A(t)\right]x(t) = G_n^*(t)x(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Розглянемо (4.7) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектору $x(t)$. Її розв`язок існує, якщо ранг матриці системи дорівнює n (достатня умова). Але ранг матриці системи дорівнює рангу $\tilde{S}_n(t)$, що й треба було довести .

Зауваження 4.2. Коли $G_1(t) = q(t)$, то (4.4) має вигляд:

$$det\ \tilde{S}_n(t) = det(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \neq 0, \tag{4.8}$$

де
$$q_1^*(t) = q^*(t),\ q_\nu^*(t) = q_{\nu-1}^*(t)A(t) + \frac{dq_{\nu-1}^*(t)}{dt},\ n = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді для фіксованого t маємо:

$$x(t) = \tilde{S}_n^{*^{-1}}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ \vdots\\ y^{n-1}(t)\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

(це випливає із системи (4.7)).

Зауваження 4.3. Якщо система рівнянь (4.1) - стаціонарна і $G_1(t)=const$ (*або* $q(t)=const$), то тоді матриця $\tilde{S}_n(t)$, умови (4.8) і (4.9) приймуть вигляд:

$$\tilde{S}_n(t)=(G,A^*G,\ldots,A^{*n-1}G) \tag{4.10}$$

$$det\,\tilde{S}_n(t)=det(q,A^*q,\ldots,A^{*\,n-1}q)\neq 0. \tag{4.11}$$

$$x(t)=\begin{pmatrix} q^* \\ q^*A \\ \vdots \\ q^*A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Але розв’язок задачі спостережуваності через вектор виходу та його похідні буває незручним на практиці, що пов’язано з необхідністю обчислювати похідні.

Розглянемо інший підхід.

Теорема 4.2. Нехай $X(t,x)$ - нормована фундаментальна матриця для системи (4.1), G^* - матриця, що визначає вектор виходу (4.3). Тоді якщо існує розв`язок інтегрального рівняння

$$\int_{t-t}^{t} X^*(x,t)G(x)v_j(t,x)dx=e_j, \tag{4.13}$$

де $[t-t,t]$ - проміжок, на якому задана вектор-функція виходу (4.3), e_j - n-вимірний вектор:

$$e_j=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\leftarrow j,$$

де стрілка вказує на j-й рядок, то система (4.1) буде спостережуваною за координатою $x_j(t),\ j=\overline{1,n}$.

Доведення. Розглянемо рівняння (4.13) відносно невідомого вектора $v_j,\ j=\overline{1,n}$. Будемо знаходити $x_j(t)$ у вигляді лінійної операції

$$x_j(t)=\int_{t-t}^{t} y^*(x)v_j(t,x)dx\,, \tag{4.14}$$

де
$$v_j(t,x)=\begin{pmatrix} v_{j1}(t,x) \\ v_{j2}(t,x) \\ M \\ v_{jm}(t,x) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функцію $x(x), x \in [t-t,t]$, як розв`язок однорідної системи (1) запишемо у вигляді: $x(x)=X(x,t)x(t)$. Тому вихід системи в точці x має вигляд

$$y(x)=G^*(x)x(x)=G^*(x)X(x,t)x(t).$$

Підставимо це в (4.14):

$$\int_{t-t}^{t} x^*(t)X^*(x,t)G(x)v_j(t,x)dx=x_j(t). \tag{4.15}$$

Але $x_j(t)$ через e_j можна представити так:

$$x_j(t)=x^*(t)e_j\,.$$

Використавши це, із рівняння (4.15) отримаємо (4.13) – рівняння відносно $v_j(t,x)$:

$$x^*(t)\int_{t-t}^{t} X^*(x,t)G(x)v_j(t,x)dx=x^*(t)e_j\,.$$

Тобто із (4.14) отримали (4.15), а із (4.15) отримали (4.13) (після скорочення на $x^*(t)$). Якщо розв`язок (4.13) існує, то невідома компонента $x_j(t)$ знаходиться по формулі (4.14).

Теорема доведена.