# РОЗДІЛ 4

## 4.2. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування.

Нехай маємо умову цілком керованості:

$$rang(\ z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) = n, \tag{4.16}$$

де
$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt}, k = \overline{2,n} \tag{4.17}$$

для лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Запишемо також умову спостережуваності для лінійної системи

$$\frac{dx}{dy} = A(t)x(t):$$

$$rang(\ G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)) = n,$$

де
$$G_1^*(t) = G^*(t),\ G_{v+1}^*(t) = G_v^*(t)A(t) + \frac{dG_v^*(t)}{dt}.$$

Ці дві умови подібні між собою за формою. Але існує зв`язок між ними і за змістом.

*Твердження 4.1.* Якщо виконується умова цілком керованості системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^*(t)x(t) + G(t)u(t), \tag{4.18}$$

$$rang(\ z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) = n,$$

де
$$z_1(t) = G(t), \quad z_k(t) = -A^*(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt},\ k = \overline{2,n}$$

то виконується умова спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

з виходом

$$y(t) = G^*(t)x(t)$$

- умови (4.4) - (4.6).

Без доведення.

Таким чином, це твердження дозволяє зводити дослідження задач спостережуваності лінійних систем до дослідження задач керованості спряжених систем вигляду (4.18). Це дає можливість використовувати результати, що стосуються керованості, при розв`язуванні задач спостережуваності.

Розглянемо випадок, коли $A$, $G$ не залежать від $t$ і перенесемо результати з теорії керованості на задачу спостережуваності.

*Теорема 4.3:* Для того щоб існував розв'язок задачі спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{4.19}$$

з виходом

$$y = G^* x, \tag{4. 20}$$

необхідно і досить, щоб

$$rang(G, A^*G, \mathbf{K}, A^{*n-1}G) = n. \tag{4.21}$$

*Доведення.* Достатність дає *теорема 4.1.* –вже доведена.

Необхідність. Доведемо від супротивного. Нехай (4.21) не виконується, тобто

$$rangS_n = rang(G, A^*G, \mathbf{K}, A^{*n-1}G) = r < n.$$

Покажемо, що тоді в системі (4.19), (4.20) відсутня спостережуваність. Оскільки $rang\ S_n < n$, то можна застосувати теорему 3.4 з розділу 3 стосовно керованості спряженої системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^* x + Gu. \tag{4.22}$$

Тобто оскільки $rang\ S_n < n$ означає некерованість системи (4.22), то існує матриця $T$ невироджена, згідно теореми 3.4 така що:

$$P = -T^{-1}A^*T = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}, \qquad Q = T^{-1}G = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

де $P_1 - r \times r -$ матриця, $P_2 - r \times (n - r)$, $P_3 - (n - 2)(n - 2)$, $Q_1 - r \times m$ - матриці.

Тоді, застосовуючи до вектора *x* перетворення $x = T^{-1} h$ координат замість (4.19), (4.20) отримаємо:

$$\frac{dh}{dt} = -P^* h, \quad y = G^* T^{*-1} h = Q^* h \; ,$$

де
$$P = \begin{bmatrix} P_1^* & 0 \\ P_2^* & P_3^* \end{bmatrix}, \quad Q = (Q_1^*, 0) .$$

Це означає, що компоненти вектора виходу є лінійними комбінаціями координат $\eta_1, \ldots, \eta_r$ для автономної підсистеми:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{bmatrix}, \quad y = Q_1^* \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{bmatrix}.$$

Тоді очевидно, що $\eta_{r+1}(t), \ldots, \eta_n(t)$ не можна визначити за відомим виходом $y(t)$, які б умови ми не вводити для $Q_1$ і, разом з тим, для $G$. А оскільки компоненти векторів $\eta(t)$ і $x(t)$ зв'язані взаємно-однозначною залежністю, то це означає, що компоненти вектора $x(t)$ не можуть бути визначені за відомим виходом для даної системи.

Теорема доведена.

*Теорема 4.4.* Розв'язок задачі спостережуваності системи (4.1), (4.3)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \qquad y(t) = G^* x(t)$$

зводиться до знаходження керування $u(t)$ спряженої системи (4.18), за допомогою якого система (4.18) переходить з однієї заданої точки в іншу задану точку фазового простору.

*Доведення*. Припустимо, що система (4.1) і матриця $G$ із (4.3) задовольняють умовам *теореми 4.2*. Тоді компоненти вектора стану $x(t)$ можна знайти за формулою (4.14), де $v_j(t, x)$ - розв'язок (4.13) при $j = \overline{1, n}$.

Доведемо, що розв'язок інтегральних рівнянь (4.13) визначає такий вектор $u(t)$ - керування системи (4.18), за допомогою якого ця система переходить із точки $x=0$ в момент $t$-$t$ в точку $x = e_j$ в момент часу t .

Позначимо $X(t,x)$ - нормована матриця фундаментальної системи розв'язків рівняння (4.1). Тоді відомо, що $X^{*-1}(t,x)$ буде нормованою фундаментальною матрицею спряженого до (4.1) рівняння.

Також справедливо

$$X^*(x,t) = X^{*-1}(t,x). \tag{4.23}$$

Дійсно $X^*(x,t) = (X(x)\cdot X^{-1}(t))^* = X^{*-1}(t)\cdot X^*(x).$

Справа в (4.23) маємо такий самий вираз:

$$\begin{aligned}(X^{*-1}(t,x) &= [[X(t)\cdot X^{-1}(x)]^{-1}]^* = \\ &= (X(x)\cdot X^{-1}(t))^* = X^{*-1}(t)\cdot X^*(x).\end{aligned}$$

Тоді рівняння (4.13) приймуть вигляд :

$$\int_{t-t}^{t} X^{*-1}(t,x)G(x)v_j(t,x)dx = e_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{4.24}$$

і співпадають з рівнянням

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t_1,x)u(x)dx = x^1 - X(t_1,t_0)x^0.$$

(дивись розділ 3, *теорема 3.1*, формула (3.4)).

Це рівняння відносно керування $u(t)$ для системи (4.18) з крайовими умовами: $x^0 = x(t-t) = 0,\ x^1 = x(t) = e_j.$

Теорема доведена.

*Зауваження 4.4.* Як правило, задачі спостережуваності виникають в системах керування, тому вони розв'язуються паралельно із задачею керування рухом системи.

Щодо лінійних систем це означає, що задача спостережуваності виникає не для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t),$$

а для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{4.25}$$

де $u(t)$ – $m_1$-вимірний вектор керування. При цьому вектор виходу

$$y(t) = G^*(t)x(t) \tag{4.26}$$

має розмірність *m*.

Покажемо, що задачу спостережуваності для системи (4.25), (4.26) можна звести до задачі спостережуваності (4.1),(4.3):

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t),\ y(t) = G^*(t)x(t).$$

*Доведення*. Запишемо розв'язок (4.25) для $t > t = const$ у формі Коші:

$$x(t) = X^{-1}(t,t)x(t) + \int_t^t X(t,x)B(x)u(x)dx.$$

(тут враховано, що $X^{-1}(t,t) = X(t,t)$.

Дійсно:

$$\left.\begin{aligned} X(t,t) &= X(t)\cdot X^{-1}(t) \\ X^{-1}(t,t) = [X(t)\cdot X^{-1}(t)]^{-1} &= X(t)\cdot X^{-1}(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(t,t) = X^{-1}(t,t).$$

Перепишемо розв'язок системи (4.25) у вигляді:

$$x(t) = X^{-1}(t,t)x(t) - \int_t^t X(t,x)B(x)u(x)dx$$

Маємо

$$\begin{aligned} y(t) = G^*(t)x(t) = G^*(t)X^{-1}(t,t)x(t) - \\ - G^*(t)\int_t^t X(t,x)B(x)u(x)dx. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Позначимо: $\tilde{x}(t) = X^{-1}(t,t)x(t)$.

Зауважимо, що для знаходження вектора *x(t)* досить знайти вектор $\tilde{x}(t)$ за відомим $y(t)$, або за вектором $\tilde{y}(t) = G^*(t)\tilde{x}(t)$.

Із (4.27) знайдемо цей $\tilde{y}(t)$:

$$y(t) = G^*(t)\tilde{x}(t) - G^*(t)\int_t^t X(t,x)B(x)u(x)dx$$

Звідси $$\tilde{y}(t) = y(t) + G^*(t)\int_{t}^{t} X(t,x)B(x)u(x)dx .$$

Оскільки $\tilde{x}(t)$ задовольняє рівнянню:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A(t)\tilde{x}(t), \tag{4.28}$$

то початкова задача спостережуваності стану неоднорідної керованої системи (4.25 ) зведена до задачі спостережуваності однорідної системи (4.28) за відомим виходом $\tilde{y}(t)$.

*Зауваження 4.4* доведено.

Одночасно зауважимо, що справедлива формула :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j(t) &= \int_{t-t}^{t} \tilde{y}(x)v_j(t,x)dx = \\ &= \int_{t-t}^{t} \Big[\, y(x) + G^*(x)\int_{x}^{t} X(x,h)B(h)u(h)dh \,\Big]^* v_j(t,x)dx , \end{aligned} \tag{4.29}$$

де $v_j(t,x),\ j = \overline{1,n}$, як і раніше, - розв’язок інтегрального рівняння (4.13).