РОЗДІЛ 4

4.3. Обчислення матриці імпульсних перехідних функцій.

Нехай маємо лінійну багатомірну неперервну систему керування:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Із курсу диференціальних рівнянь відомо: лінійно – незалежні розв’язки

$$j_{j}(t) = \begin{pmatrix} j_{1j}(t) \\ . \\ . \\ . \\ j_{nj}(t) \end{pmatrix}, \qquad j = \overline{1,n}$$

однорідного рівняння

$$\frac{dj_{j}}{dt} = A(t)j_{j}(t) \tag{4.30}$$

утворюють фундаментальну матрицю

$$\varPhi(t) = \left[j_{ij}(t) \right]_{i,j=1}^{n} \tag{4.31}$$

Фундаментальна матриця задовольняє матричному рівнянню

$$\frac{d\varPhi(t)}{dt} = A(t)\varPhi(t) \qquad \varPhi(o) = E, \tag{4.32}$$

де E – одинична $n \times n$ -матриця.

Для фундаментальної матриці існує обернена $\varPhi^{-1}(t)$ в тому розумінні, що

$$\varPhi^{-1}(t)\varPhi(t) = \varPhi(t)\varPhi^{-1}(t) = E. \tag{4.33}$$

Знайдемо розв’язок (4.25) при $x(t_o) = 0$ застосувавшм деякі перетворення. Диференціюємо (4.33):

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}\Phi^{-1}(t)+\Phi(t)\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}=0\,.$$

Враховуючи (4.32), маємо:

$$A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)+\Phi(t)\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}=A(t)+\Phi(t)\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}=0\,.$$

Домножимо на матрицю $\Phi^{-1}(t)$ зліва:

$$\Phi^{-1}(t)A(t)+\Phi^{-1}(t)\Phi(t)\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}=0$$

Звідси:

$$\Phi^{-1}(t)A(t)=-\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}\,. \tag{4.34}$$

Домножимо (4.34) на $x(t)$, що задовольняє (4.25) при $x(t)=0$:

$$\Phi^{-1}(t)A(t)x(t)=-\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}x(t).$$

На місце $A(t)x(t)$ підставимо його значення із (4.25):

$$\Phi^{-1}(t)\left[\frac{dx(t)}{dt}-B(t)u(t)\right]=-\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}x(t),$$

$$\Phi^{-1}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}x(t)=\Phi^{-1}(t)B(t)u(t)$$

Або: $$\frac{d}{dt}\left[\Phi^{-1}(t)x(t)\right]=\Phi^{-1}(t)B(t)u(t).$$

Інтегруємо від 0 до t:

$$\Phi^{-1}(t)x(t)=\int_0^t\Phi^{-1}(x)B(x)u(x)dx\,.$$

Домножимо на $\Phi(t)$ зліва:

$$x(t)=\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(x)B(x)u(x)dx\ . \tag{4.35}$$

Позначимо

$$W(t,x)=\Phi(t)\Phi^{-1}(x). \tag{4.36}$$

Тоді отримаємо:

$$x(t)=\int_0^t W(t,x)B(x)u(x)dx\ . \tag{4.37}$$

Означення 4.4. Матриця $W(t,x)$, що обчислюється згідно (4.36), називається <u>матрицею імпульсних перехідних функцій</u> або <u>імпульсною перехідною матрицею</u> лінійної нестаціонарної системи керування (4.25).

Нехай

$$W(t,x)=\left[w_{ij}(t,x)\right]_{i,j=1}^{n}. \tag{4.38}$$

Елемент $w_{ij}(t,x)$ визначає імпульсну перехідну функцію для i-го виходу багатомірної системи за умови, що вхідний сигнал подається тільки на j-й вхід. Така інтерпретація функцій $w_{ij}(t,x)$ дозволяє визначити елементи матриці $W(t,x)$ як імпульсні перехідні функції деяких одномірних систем з одним входом і одним виходом.

Означення 4.5. Дві системи, що описуються рівняннями

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t) \tag{4.39}$$

$$\frac{dy}{dt}=-A^{*}(t)y(t), \tag{4.40}$$

де $A^{*}(t)$ - матриця, спряжена до $A\ (t)$, називаються спряженими.

Теорема 4.5. Нехай $x(t),y(t)$ - деякі розв’язки рівнянь (4.39), (4.41) відповідно, $\Phi(t),y\,(t)$ -фундаментальні матриці цих рівнянь (систем), тобто $\Phi(t)$ - розв’язок задачі (4.32), а $y\,(t)$ - розв’язок задачі

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A^*(t)y(t)$$
$$y(0) = E. \tag{4.41}$$

Тоді справедливі рівності:

$$x^*(t)y(t) = const \tag{4.42}$$

$$j^*(t)\Phi(t) = E. \tag{4.43}$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$\frac{d}{dt}x^*(t)y(t) = \frac{dx^*}{dt}y + x^*\frac{dy}{dt} = (Ax)^*y + x^*(-A^*y) =$$
$$= x^*A^*y - x^*A^*y \equiv 0$$

Звідси, (4.43) доведено.

Залежність функції від часу там, це не викликає непорозумінь, опущена.

Далі :

$$\frac{d}{dt}[y^*(t)F(t)] = \frac{dy^*(t)}{dt}F(t) + \frac{y^*(t)dF(t)}{dt} =$$
$$= -y^*(t)A(t)F(t) + y^*A(t)F(t) \equiv 0. \quad \forall t \geq 0.$$

Але при $t=0$ маємо $y^*(t) \cdot F(t)/t = 0 = y^*(0)F(0) = E \cdot E = E$.

Значить, в силу останньої рівності, (4.43) виконується для всіх $t>0$. Теорема доведена.

Зауваження 4.6. Рівність (4.43) вказує на те, що $y^*(t) = F^{-1}(t)$.

Тому імпульсну перехідну матрицю системи (4.25) із врахуванням (4.36) можна представити так:

$$W(t,x) = F(t) \cdot y^*(x) \tag{4.44}$$

Тому спряжені системи в теорії лінійних нестаціонарних систем відіграють важливу роль.

Для лінійних стаціонарних систем це поняття не має суттєвого значення, оскільки спряжена система отримується із даної заміною t на $-t$, тобто спряжена лінійна стаціонарна система співпадає із заданою системою з оберненим часом.

Означення 4.6. Нехай імпульсна перехідна матриця $W(t,x)$ системи (4.25) як функції змінної t задовольняє умовам оригіналу за Лапласом. Матрицю

$$W(p,x) = \int_{0}^{\infty} W(t,x) e^{-pt} dt \tag{4.45}$$

називають параметричною передаточною матрицею лінійної багатомірної нестаціонарної системи.

За допомогою матриці $W(p,x)$ можна зручно записати співвідношення між зображеннями за Лапласом вхідного сигналу $V(p) \leftrightarrow u(t)$ і вихідного сигналу $X(p) \leftrightarrow x(t)$ лінійної нестаціонарної системи (4.25).

Це співвідношення отримується шляхом застосування перетворення Лапласа до формули (4.37) і переходу в простір зображень.