РОЗДІЛ 5.

5.1. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування з закріпленими кінцями і часом.

Розглянемо задачу оптимального керування з закріпленими кінцями і закріпленим часом

$$J(u(\cdot))=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt, \tag{5.1}$$

за умов:

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{5.2}$$

$$x(t_0)=x_0, x(T)=x_1, \tag{5.3}$$

$$u(t)\in V, \quad t_0 \le t \le T, \tag{5.4}$$

де $u=u(\cdot)$ - вважаються кусково-неперервними функціями на $[t_0,T]$, і точки x_0,x_1 - задані, $V \subseteq E^r$ - не залежить від часу і фазові обмеження при $t_0 < t < T$ відсутні.

Значення керування $u(\cdot)$ в точках розриву не впливають на розв'язок рівняння (5.2), і на значення інтегралу (5.1), а значить, і на задачу (5.1)-(5.4).

Тому в точках розриву керування можна довизначити довільно, аби не порушувалось обмеження (5.4).

Вважаємо $u(t)=u(t+0)=\lim\limits_{t\to t+0} u(t)$, при $t_0 \le t < T$, $u(T)=u(T-0)$.

Вважаємо $f^j(x,u,t), j=\overline{0,n}$, мають частинні похідні: $\dfrac{\partial f^j}{\partial x_i}=f^j_{x_i}$.

Позначимо: $$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \dots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f^n_{x_1} & \dots & f^n_{x_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^1_x \\ \vdots \\ f^n_x \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial x}=f_x^0=(f_{x_1}^0,\dots,f_{x_n}^0).$$

Вважаємо: $f^j(x,u,t), j=\overline{0,n}, f_x(x,u,t), f_x^0(x,u,t)$- неперервні за сукупністю аргументів $(x,u,t)\in E^n \times E^r \times [t_0,T]$.

Введемо допоміжні змінні $y(t)=(y_1(t),\dots,y_n(t))\in E^n$ і сталу y_0.

Визначимо функцію :

$$
\begin{aligned}
H(x,u,t,y,y_0) &= y_0 f^0(x,u,t) + y_1 f^1(x,u,t) + \ldots + y_n f^n(x,u,t) = \\
&= \sum_{j=0}^{n} y_j f^j(x,u,t) = y_0 f^0(x,u,t) + (y, f(x,u,t)),
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

яка називається функцією Гамільтона-Понтрягіна.

Нехай $u = u(\cdot)$ - кусково-неперервне керування, що задовольняє умові (5.4) ,а $x(\cdot) = x(\cdot, u, x_0)$ - розв'язок (5.2), що відповідає цьому $u(\cdot)$, початковій умові x_0 і визначений на $[t_0, T]$.

Парі $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le T$ поставимо у відповідність систему диференціальних рівнянь відносно $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_i(t) &= -\frac{\partial H(x,u,t,y(t),y_0)}{\partial x_i}\bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} = \\
&= -\sum_{j=0}^{n} y_j(t) \frac{\partial f^j(x,u,t)}{\partial x_i}\bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}},
\end{aligned}
\qquad i = \overline{1,n}
\tag{5.6}
$$

де y_0 -стала.

Систему (5.6) називають спряженою системою, що відповідає парі $(u(t), x(t, u, x_0))$, $t_0 \le t \le T$.

У векторній формі (5.20) запишемо таким чином:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= -H_x(x,u,t,y(t),y_0)\Big|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} = \\
&= -y_0 f_x^0(x(t),u(t),t) - (f_x(x(t),u(t),t))^T y(t), \quad t_0 \le t \le T,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

де $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$.

Теорема 5.1.(Принцип максимуму - необхідна умова оптимальності. Закріплені кінці, закріплений час).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le T$ - розв'язок задачі (5.1)-(5.4).Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $y(t)$, $t_0 \le t \le T$ і стала y_0,

такі що :

$$
1)\; y_0 \le 0, |y_0| + \| y(t) \| \ne 0, \quad t_0 \le t \le T \tag{5.8}
$$

2) $y(\cdot)$ є розв'язком спряженої системи (5.6), яка відповідає розв’язку $(u(\cdot),x(\cdot))$;

3) при кожному $t\in[t_0,T]$ функція $H(x(t),u,t,y(t),y_0)$ змінної $u=(u_1,...,u_r)$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u=u(t)$:

$$\sup_{u\in V} H(x(t),u,t,y(t),y_0)=H(x(t),u(t),t,y(t),y_0),\ t_0\le t\le T \tag{5.9}$$

Без доведення.

Теорема 5.1 сформульована для випадку, коли керування $u(t)$ - кусково-неперервна функція.

Якщо $u(t)$ є обмеженою вимірною функцією, тобто $u(\cdot)\in L^r_\infty[t_0,T]$, то формулювання *теореми 5.1* цілком зберігається, але (5.9) (і обмеження (5.4) в умові) будуть виконуватись, взагалі кажучи, майже всюди на $[t_0,T]$.

Центральне місце в *теоремі 5.1* займає умова максимуму. Тому *теорему 5.1* і наступні три теореми прийнято називати *принципом максимуму*. Умова (5.8) гарантує, що функція не перетвориться в тотожній нуль, і робить умову (5.9) змістовною.

Як користуватися *теоремою 5.1* на практиці?

Нехай функція $u=u(x,t,y,y_0)$, що дає $\sup_{u\in V} H$, відома. І нехай $u=u(x,t,y,y_0)\in V$ (5.10).

Складають систему із диференціальних рівнянь :

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u(x,t,y,y_0),t),\\ \dot{y}=-H_x(x,u(x,t,y,y_0),t,y,y_0),\ t_0\le t\le T\end{cases} \tag{5.11}$$

відносно невідомих $x(\cdot),y(\cdot)$.

Загальний розв'язок системи (5.11) містить $2n$ довільних сталих. Для їх визначення треба мати $2n$ умов. В задачі (5.1)-(5.4) це умови:

$$\begin{aligned}x(t_0)&=x_0\\ x(T)&=x_1\end{aligned}.$$

Система (5.11) містить ще один невідомий параметр $y_0\le 0$. Як його визначити? Зауважимо, що функція $H(x,u,t,y,y_0)$ лінійна і однорідна відносно змінних $y_0,y_1,...,y_n$ - згідно визначенню (5.5), тобто $H(x,u,t,ay,ay_0)=aH(x,u,t,y,y_0)$ для $\forall a$.

Звідси з умови

$$H(x,u(x,t,y,y_0),t,y,y_0)=\sup_{u\in V} H(x,u,t,y,y_o) \tag{5.12}$$

маємо

$$u(x,t,ay,ay_0)\equiv u(x,t,y,y_0) \tag{5.13}$$

для $\forall a$.

Звідси випливає, що *теорема 5.1* визначає $y_0,y_1,...,y_n$ лише з точністю до додатнього множника, і цим множником можна розпорядитися на свій розсуд. На практиці, з урахуванням умови теореми, і обмежень (5.8) найчастіше покладають

$$|y_0|^2+\|y(\bar{t})\|^2\neq 1,\ \ y_0\leq 0, \tag{5.14}$$

де $\bar{t}$ - деякий момент часу $,t_0\leq\bar{t}\leq T$, наприклад, $\bar{t}=t_0$ або $\bar{t}=T$.

В тих задачах, в яких вдається заздалегідь показати , що $y_0<0$, взамін умови нормування часто вибирають $y_0=-1$.

Значить, для визначення $2n+1$ параметрів системи (5.11) - тобто $2n$ сталих із загального розв'язку плюс параметр y_0 - маємо $2n+1$ умову (5.3), (5.14). Як правило, можна очікувати, що існують лише окремі ізольовані функції $(x(t),y(t)),\ t_0\leq t\leq T$ і значення y_0, що задовольняють умовам (5.11),(5.3),(5.14).

Нехай вдалося визначити із цих умов якісь $(x(t),y(t),y_0)$. Підставимо їх в (5.10), отримаємо функцію:

$$u(t)=u(x(t),t,y(t),y_0)\in V,\quad t_0\leq t\leq T. \tag{5.15}$$

Нехай ця функція виявилась кусково-неперервною. Із (5.10),(5.12),(5.15) випливає, що це керування $u(t),\ t_0\leq t\leq T$ задовольняє умові максимуму (5.9), а значить, згідно *теореми 5.1*, може претендувати на роль оптимального керування задачі (5.1)-(5.4), а функція $x(t)=x(t,u(\cdot),x_0),t_0\leq t\leq T$ - на роль оптимальної траєкторії цієї задачі. Тобто вони будуть підозрілими на оптимальність. Чи буде знайдена пара $(u(t),x(t)),\ t_0\leq t\leq T$ насправді розв'язком задачі (5.1)-(5.4) *теорема 5.1* не гарантує, оскільки ця теорема, взагалі кажучи, дає лише необхідну умову оптимальності. Може бути, що пара $(u(t),x(t)),t_0\leq t\leq T$ задовольняє *теоремі 5.1*, але не є розв'язком задачі (5.1)-(5.4).

Але, якщо з якихось міркувань відомо, що задача (5.1)-(5.4) має розв'язок, а із крайової задачі принципу максимуму знайдені $(x(t), y(t), y_0), t_0 \le t \le T$ однозначно, то керування (5.15) і буде оптимальним.

Якщо ж інформації про існування розв'язку задачі (5.1)-(5.4) наперед немає, або крайовій задачі принципу максимуму задовольняє кілька керувань, підозрілих на оптимальність, то для з'ясування питання про їх оптимальність потрібні додаткові і, часом, складні дослідження.

Крім того, верхня грань (5.12) може досягатися в кількох точках , тоді функція (5.10) , що дає $\sup_{u \in V} H$, буде визначатися неоднозначно. Тоді треба знайти всі набори $(x(t), y(t), y_0)$ і керування $u(t)$, що задовольняють (5.11),(5.3),(5.14),(5.15) для всіх функцій із (5.12).

Отже, схема використання принципу максимуму описана.

Крайову задачу: (5.12), система (5.11), умови (5.3) і умови нормування (5.14) називають *крайовою задачею принципу максимума* для задачі оптимального керування (5.1)-(5.4).