РОЗДІЛ 5

5.2. Формулювання принципу максимуму для задачі з вільними або рухомими кінцями траєкторій і фіксованим часом.

Розглянемо задачу оптимального керування з граничними умовами більш загального вигляду, хоча початковий і кінцевий моменти часу, як і раніше, закріплені:

$$J(x_0,u(\cdot))=\int_{t_0}^{T}(x(t),u(t),t)dt+F(x(t))\to inf\ , \qquad (5.16)$$

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),\ \ t_0\le t\le T\ , \qquad (5.17)$$

$$x(t_0)\in S_0\ ,\ \ x(T)\in S_I\ , \qquad (5.18)$$

$$u(t)\in V\ ,\ \ \ t_0\le t\le T\ , \qquad (5.19)$$

де керування $u(\cdot)$ -кусково-неперервні на $t_0\le t\le T$, $u(t)=u(t+0)$ при $t_0<t<T$, $u(T)=u(T-0)$.

Ця задача є частинним випадком більш загальної задачі оптимального керування (див. розділ 1).

Вважаємо, що правий кінець або вільний: $S_I=E^n$, або

$$S_I=\{x\in E^n: g_j(x)=0, j=\overline{1,s_I}\}, \qquad (5.20)$$

або

$$S_I=\{x\in E^n: g_j(x)\le 0, j=\overline{1,m_I},\ g_j(x)=0, j=\overline{m_I+1,s_I}\}, \qquad (5.21)$$

(тобто правий кінець рухомий).

Зокрема, якщо $g_j=x_j-x_{j_I}$, $j=\overline{1,n}$, $S_I=n$, то із (5.20) отримаємо випадок закріпленого кінця: $x(T)=x_I$.

Аналогічно, на лівому кінці: або $S_0=E^n$, (кінець вільний), або

$$S_0=\{x\in E^n: h_j(x)=0, j=\overline{1,s_0}\}, \qquad (5.22)$$

або

$$S_0=\{x\in E^n: h_j(x)\le 0, j=\overline{1,m_0};\quad h_j(x)=0, j=\overline{m_0+1,s_0}\}. \qquad (5.23)$$

Далі будемо вважати: функції $f^j(x,u,t),(j=\overline{0,n}),\quad g_j(x),(j=\overline{1,s_I}),$ $h_j(x),(j=\overline{1,s_0}),F(x)$ - мають частинні похідні по $x_1,...,x_n$ і неперервні разом з цими похідними за сукупностю своїх аргументів при всіх $x\in E^n, u\in V, t\in[t_0,T]$.

Також будемо позначати:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x=(F_{x_1},...,F_{x_n}),\quad \frac{\partial g_j}{\partial x}=g_{jx}=(g_{j_x},...,g_{j_{x_n}}),$$
$$\frac{\partial h_i}{\partial x}=h_{j_x}=(h_{j_{x_1}},...,h_{j_{x_n}}).$$

Теорема 5.2 (Принцип максимуму - необхідна умова оптимальності. Кінці не закріплені - вільні або рухомі, час - початковий і кінцевий моменти закріплені).

Нехай $(u(t),x(t)),\ t_0\le t\le T$ - розв'язок задачі (5.16)-(5.19). Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $y(t), t_0\le t\le T$ і стала y_0 такі, що:

1) $y_0\le 0, |y_0|+\|y(t)\|\ne 0,\quad t_0\le t\le T$, (5.8)

2) $y(\cdot)$ - являється розв'язком спряженої системи (5.6), що відповідає розв'язку $(u(\cdot),x(\cdot))$, який розглядається;

3) при кожному $t\in[t_0,T]$ функція $H(x(t),u(t),t,y(t),y_0)$. як функція змінної $u=(u_1,...,u_r)$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u=u(t)$,тобто:

$$\sup_{u\in V}H(x(t),u,t,y(t),y_0)=H(x(t),u(t),t,y(t),y_0),\quad t_0\le t\le T\ , \quad (5.9)$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(\cdot)$ виконуються умови трансверсальності, які у випадку задачі (5.16)-(5.19) означають, що вектор $y(T)-y_0F_x(x(T))$ ортогональний до множини S_I в точці $x(T)\in S_I$, а вектор $Y(t_0)$ ортогональний до множини S_0 в точці $x(t_0)\in S_0$.

Без доведення.

Якщо $u(\cdot)$ є обмеженою вимірною функцією, то формулювання *теореми* 5.2 зберігається, лише (5.9) і включення (5.19) будуть виконуватись майже всюди на $[t_0,T]$. Зауважимо, що (5.13) (однорідність функції u) зберігає силу , а ортогональність вектору $y(T)-y_0F_x(x(T))$ до S_I і вектору $y(t_0)$ до S_0 не порушиться, якщо $y_0,y_1,...,y_n$ помножити на одне і те ж число $a>0$.

Тому тут так само можна прийняти умову нормування (5.14) або умову $y_0=-1$, якщо відомо, що $y_0<0$.

Ще треба $2n$ умов для визначення $2n$ констант із заданого розв'язку системи (5.11). Для цього розглянемо умови трансверсальності при різних режимах. Почнемо з правого кінця:

1)Правий кінець вільний: $S_I=E^n$.

Тоді умова ортогональності вектора $y(T)-y_0F_x(x(T))$ до всього простору E^n означає:

$$y(T)-y_0F_x(x(T))=0, \tag{5.24}$$

Це дає n граничних умов.

2) Правий кінець рухомий:

а) спочатку нехай S_I у вигляді (5.20), і $g_{j_x}(x(T))\neq 0,\ j=\overline{0,s_I}$.

Тоді гіперплощина $(g_{j_x}(x(T)),x-x(T))=0$ - це дотична площина до поверхні, яка визначається з $g_j(x)=0$ в точці $x(T)$, а множина - $G=\{x\in E^n:(g_{j_x}(x(T)),x-x(T))=0,\ j=\overline{1,s_I}\}$ - це дотична площина до S_I в точці $x(T)$.

Умова ортогональності вектора a до множини S_I в точці $x(T)$ за означенням означає ортогональність a до дотичної площини G, тобто $(a,x-x(T))=0$ при $\forall x\in G$.

Тоді з умови трансверсальності маємо:

$$(y(T)-y_0F_x(x(T)),x-x(T))=0$$

для всіх x: $(g_{i_x}(x(T)),x-x(T))=0, i=\overline{1,s_I}$.

Тоді за теоремою Фаркаша існують числа $a_1,...,a_{S_I}$ такі, що

$$y(T)-y_0F_x(x(T))=\sum_{j=1}^{S_I}a_j g_{j_x}(x(T)). \tag{5.25}$$

Сюди ж додамо умову $x(T)\in S_I$, тобто:

$$g_j(x(T))=0, j=\overline{1,s_I}. \tag{5.26}$$

Всього (5.25),(5.26) дають $n+s_I$ умов, з яких s_I умов можна використати для визначення додаткових параметрів $a_1,...,a_n$, а n умов - приєднати до умови (5.11).

б) коли множина S_I - у вигляді (5.21) і $g_{j_x}(x(T))\neq 0, \quad j=\overline{1,s_I}$,то умова трансверсальності означає, що існують числа $a_1,...,a_{s_I}$:

$$y(T)-y_0F_x(x(T))=\sum_{j=1}^{S_I}a_jg_{j_x}(x(T)), \tag{5.27}$$

$$a_jg_j(x(T))=0, a_j\geq 0, j=\overline{1,m_I}, \quad g_j(x(T))=0, j=\overline{m_I+1,s_I}, \tag{5.28}$$

Значить (5.27),(5.28) дають $n+s_I$ рівностей з яких s_I умов для визначення $a_1,...,a_{S_I}$, а решту n умов треба приєднати до системи (5.11). Для тих $j, 1\leq j\leq m_I$ для яких $g_j(x(T))<0$ (неактивні обмеження), із (5.28) випливає, що $a_j=0$ і невизначеними залишаються лише a_j з номерами j, для яких $g_j(x(T))=0$ (активні обмеження).

3) Правий кінець закріплений:

$$x(T)=x_I, \tag{5.29}$$

Тут умова трансверсальності - це умова ортогональності вектору $y(T)-y_0F_x(x(T))$ до вектору нульової довжини - точки x_I. Це завжди тривіально виконується. Значить, у випадку закріпленого кінця умова трансверсальності вироджується і не несе в собі ніякої інформації.

Тут ми маємо n граничних умов.

Лівий кінець траєкторії.

1)Лівий кінець вільний: $S_0=E^n$.

Тоді:

$$y(t_0)=0. \tag{5.30}$$

2)Лівий кінець рухомий.

Якщо S_0 має вигляд (5.22), і $h_{j_x}(x(t_0))\neq 0$, то умова трансверсальності така:

існують числа $b_1,...,b_{S_0}$:

$$y(t_0)=-\sum_{j=1}^{S_0}b_jh_{j_x}(x(t_0)), \tag{5.31}$$

і треба додати умову: $x(t_0)\in S_0$, що означає:

$$h_j(x(t_0))=0,\ j=\overline{1,s_0}\ , \tag{5.32}$$

Якщо S_0 має вигляд (5.23) і $h_{j_x}(x(t_0))\neq 0,\ j=\overline{1,s_0}$

то умова трансверсальності:

$$y(t_0)=-\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)). \tag{5.33}$$

$x(t_0)\in S_0$ означає:

$$b_j h_j(x(t_0))=0, b_j\geq 0,\ j=\overline{1,m_0}\ , \tag{5.34}$$

$$h_j(x(t_0))=0,\ j=\overline{m_0+1,s_0}.$$

3)лівий кінець закріплений:

$$x(t_0)=x_0 \tag{5.35}$$

Умова трансверсальності тривіально виконується. Співвідношення (5.30)-(5.35) дають *n* граничних умов, яких не вистачає, для системи (5.11).