РОЗДІЛ 5

5.3. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування з невідомими початковими і кінцевими моментами часу.

Розглянемо задачу оптимального керування: початковий і кінцевий моменти часу, взагалі кажучи, невідомі і підлягають визначенню

$$J(t_0,T,x_0,u(\cdot))=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt+F(x(T),T), \tag{5.36}$$

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t).t_0\le t\le T, \tag{5.37}$$

$$x(t_0)\in S_0, x(T)\in S_I(T), \tag{5.38}$$

$$u(t)\in V, t_0\le t\le T, \tag{5.39}$$

де керування $u(\cdot)$ - кусково-неперервне на $[t_0,T]$, $u(t)=u(t+0)$ при $t_0\le T$, $u(T)=u(T-0)$.

Задача (5.36)-(5.39) - частинний випадок загальної задачі оптимального керування (розділ 1).

Вважаємо: правий кінець або вільний:

$$S_I(T)\equiv E^n, t\in R,$$

або $S_I(T)$ має вигляд:

$$S_I=\{x\in E^n : g_j(x,T)\le 0, j=\overline{1,m_I}, g_j(x,T)=0, j=\overline{m_I+1,s_I}\}, T\in R. \tag{5.40}$$

Лівий кінець: або $S_0(t_0)\equiv E^n, t_0\in R$, або

$$S_0(t_0)=\{x\in E^n, h_j(x,t_0)\le 0, j=\overline{1,m_0}, h_j(x,t_0)=0, j=\overline{m_0+1,s_0}\}, \tag{5.41}$$

Випадки $m_I=0$ або $s_I=0$, $m_0=0$, або $s_0=m_0$ в (5.40),(5.41) - не виключаються.

Нехай $f^j(x,u,t), j=\overline{0,n}$ та їх частинні похідні $f_x{}^j(x,u,t)$ неперервні за сукупністю $(x,u,t)\in E^n\times V\times R$, а функції $F(x,t), g_j(x,t), j=\overline{1,s_I}$, $h_j(x,t), j=\overline{1,s_0}$ та їх частинні похідні $F_x, F_t, g_{j_x}, g_{j_t}, h_{j_x}, h_{j_t}$- неперервні за сукупністю $(x,t)\in E^n\times R$.

Теорема 5.3 (Принцип максимуму - необхідна умова оптимальності. Кінці траєкторії - або вільні, або рухомі, або закріплені. Початковий і кінцевий моменти часу невідомі і підлягають визначенню).

Нехай набір $(t_0, T, u(\cdot), x(\cdot))$ є розв'язком задачі (5.36)-(5.39). Тоді необхідно існують неперервна вектор-функція $y(t), t_0 \le t \le T$ і параметр y_0, такі що:

1)$y_0 \le 0, |y_0| + \|y(t)\| \neq 0, \ \ t_0 \le t \le T$,(5.8)

2)$y(\cdot)$ - розв'язок спряженої системи (5.6), що відповідає розв'язку, який розглядається - $(u(t), x(t))$ на проміжку $t_0 \le t \le T$;

3)при кожному $t \in [t_0, T]$ функція $H(x(t), u, t, y(t), y_0)$ від змінної u досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, y(t), y_0) = H(x(t), u(t), t, y(t), y_0), \quad (5.9)$$

4)на лівому і правому кінцях траєкторії $x(\cdot)$ виконуються умови трансверсальності.

Без доведення.

Розглянемо умови трансверсальності.

1)Правий кінець вільний.

$$y(t) - y_0 F_x(x(T), T) = 0, \quad (5.24)$$

$$H(x(T), u(T), T, y(T), y_0) - y_0 F_t(x(T), T) = 0, \qquad (5.42)$$

2)Правий кінець рухомий.

Множина $S_I(T)$ має вигляд (5.40), причому виконується, що $(g_{j_x}(x(T), T), g_{j_t}(x(T), T)) \neq 0, \ \ j = \overline{1, s_I}$,

Тоді існують числа $a_1, ..., a_{S_I}$

$$y(T) - y_0 F_x(x(T), T) = \sum_{j=1}^{S_I} a_j g_{j_x}(x(T), T),, \quad (5.27)$$

$$\begin{array}{l} a_j g_j(x(T), T) = 0, a_j \ge 0, j = \overline{1, m_I}, \\ g_j(x(T), T) = 0, j = \overline{m_I + 1, s_I} \end{array}, \quad (5.28)$$

$$H(x(T),u(T),T,y(T),y_0)-y_0F_t(x(T),T)= \\ =-\sum_{j=1}^{S_1}a_j g_{j_t}(x(T),T) \tag{5.43}$$

3)Правий кінець закріплений.

$$x(T)=x_1, \\ H(x_1,u(T),T,y(T),y_0)-y_0F_t(x_1,T)=0, \tag{5.44}$$

Лівий кінець:

1) Лівий кінець вільний.

$$y(t_0)=0, \quad (5.30)$$

$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,y(t_0),y_0)=0, \tag{5.45}$$

2)Лівий кінець рухомий:

У випадку, коли множина $S_0(t_0)$ - має вигляд (5.41), причому $(h_{j_x}(x(t_0),t_0),\ h_{j_t}(x(t_0),t_0))\neq 0$ то існують числа $b_1,...,b_{S_0}$:

$$y(t_0)=\sum_{j=1}^{s_0}b_j h_{j_x}(x(t_0),t_0), \quad (5.33)$$

$$b_j h_j(x(t_0),t_0)=0,\ b_j\geq 0, j=\overline{1,m_0}, \\ h_j(x(t_0),t_0)=0,\ j=\overline{m_0+1,s_0}, \quad (5.34)$$

$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,y(t_0),y_0)=\sum_{j=1}^{s_0}b_j h_{j_t}(x(t_0),t_0). \tag{5.46}$$

3) Лівий кінець закріплений.

$$x(t_0)=x_0, \quad (5.35)$$

$$H(x_0,u(t_0),t_0,y(t_0),y_0)=0, \tag{5.47}$$

Невідомі моменти часу t_0,T знаходяться із додаткових умов вигляду (5.42)-(5.47).