РОЗДІЛ 5

5.4. Доведення принципу максимуму.

Розглянемо випадок, коли правий кінець траєкторії – вільний, лівий кінець траєкторії – закріплений, початковий і кінцевий моменти часу закріплені. Постановка задачі:

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt+\Phi(x(T))\to inf \qquad (5.48)$$

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),t_0\le t\le T,x(t_0)=x_0 \qquad (5.49)$$

$$u(t)\in V,t_0\le t\le T \qquad (5.50)$$

де керування $u(\cdot)$ - кусково-неперервне на $[t_0,T]$, $u(t)=u(t+0)$ при $t_0\le t<T$, $u(T)=u(T-0)$, моменти t_0,T точка x_0- задані, V - задана множина $V\subseteq E^r$, $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $u=(u_1,\ldots,u_r)^T$.

Вважаємо: функції $f^0(x,u,t),f(x,u,t),F(x)$ мають частинні похідні $f^0{}_x=(f^0_{x_1},\ldots,f^0_{x_n}),\ f_x=\{f^j_{x_i},\ i,j=\overline{1,n}\},F_x=(F_{x_1},\ldots,F_{x_n})$ і неперервні разом з цими похідними за сукупністю аргументів при $x\in E^n$, $u\in V$, $t\in[t_0,T]$.

Теорема 5.4 (Принцип максимуму - необхідна умова оптимальності) Нехай $(u(t),x(t))$, $t_0\le t\le T$- розв’язок задачі (5.48)-(5.49).

Тоді

$$\sup_{u\in V} H(x(t),u,t,\Psi(t))=H(x(t),u(t),t,\Psi(t)),t_0\le t\le T, \qquad (5.51)$$

де

$$H(x,u,t,\psi)=-f^0(x,u,t)+(\psi,f(x,u,t)), \qquad (5.52)$$

а функція $\psi(t)=\psi(t,u)$ являється розв’язком спряженої системи:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t)&=-H_x(x,u,t,\Psi(t))\Big|_{\substack{u=u(t)\\x=x(t)}}=\\&=f^0_x(x(t),u(t),t)-(f_x(x(t),u(t),t))^T\psi(t),\quad t_0\le t\le T,\end{aligned} \qquad (5.53)$$

$$\psi(T)+\Phi_x(x(T))=0. \qquad (5.54)$$

(ця теорема – частинний випадок *теореми 5.2*: тут зразу покладемо $y_0 = -1$, тому умова (5.8) *теореми 5.2* – завжди виконана, а умова трансверсальності (5.24) набуває вигляду (5.54).

Доведення *теореми 5.4*. Додатково припускаємо, що функції f, f_x, f^0, f_x^0, F_x задовольняють умові Ліпшиця по змінним x,u:

$$\left\| f(x+\Delta x,u+h,t) - f(x,u,t) \right\| \le L\left(|\Delta x| + |h|\right), \tag{5.55}$$

$$\left\| f_x(x+\Delta x,u+h,t) - f_x(x,u,t) \right\| \le L\left(|\Delta x| + |h|\right), \tag{5.56}$$

$$\left\| f_x^0(x+\Delta x,u+h,t) - f_x^0(x,u,t) \right\| \le L\left(|\Delta x| + |h|\right), \tag{5.57}$$

$$\left\| \Phi_x(x+\Delta x) - \Phi_x(x) \right\| \le L|\Delta x| \tag{5.58}$$

для всіх $(x,u,t),(x+\Delta x,u+h,t) \in E^n \times V \times [t_0,T]$. Сталі Ліпшиця для всіх функцій позначені однією літерою L, оскільки в подальшому значення цих констант не знадобляться. Із теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші у класі кусково-неперервних функцій (розділ 2) випливає: задача Коші (5.49) при умові (5.55) має розв'язок $x(\cdot,u)$ визначений на відрізку $[t_0,T]$ для всіх кусково-неперервних керувань, що задовольняють (5.50).

Керуванню $u = u(\cdot), u(t) \in V, t_0 \le t \le T$ надамо кусково-неперервний приріст $h(t),\ t_0 \le t \le T$:

$$u+h=u(t)+h(t) \in V(t),\ t_0 \le t \le T.$$

Тоді траєкторія $x(t)=x(t,u),\ t_0 \le t \le T$, отримає приріст

$$\Delta x(t)=x(t,u+h)-x(t,u),\ t_0 \le t \le T.$$

Із умов (5.49) випливає, що $\Delta x(t)$ задовольняє умовам:

$$\Delta \dot{x}(t)=f(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t)-f(x(t),u(t),t) \tag{5.59}$$

$t_0 \le t \le T,\ \Delta x(t_0)=0.$

Покажемо, що

$$|\Delta x(t_o)|=|x(t,u+h)-x(t,u)|\le C_1\int_{t_0}^{T}|h(t)|dt,\ t_o\le t\le T, \qquad (5.60)$$

де $C_1= Le^{L(T-t_o)}$=const.

Для цього потрібне буде твердження, яке відоме в літературі як нерівність Грануола.

Лема (Грануола). Нехай функції $\varphi(t),\ b(t)$ невід’ємні і неперервні на відрізку $t_o\le t\le T,\ a=$ const.

Нехай

$$\varphi(t)\le a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau+b(t),\ t_o\le t\le T, \qquad (5.61)$$

Тоді

$$0\le\varphi(t)\le a\int_{t_0}^{t}b(\tau)e^{a(t-\tau)}d\tau+b(t),\ t_o\le t\le T, \qquad (5.62)$$

Зокрема, якщо $b(t)=b=const\ge 0$, то

$$0\le\varphi(t)\le b\,e^{a(t-t_0)},\ t_o\le t\le T \qquad (5.63)$$

Якщо ж:

$$\varphi(t)\le a\int_{t}^{T}\varphi(\tau)d\tau+b(t),\ t_o\le t\le T,$$

то

$$0\le\varphi(t)\le a\int_{t}^{T}b(\tau)e^{a(\tau-t)}d\tau+b(t),\ t_o\le t\le T,$$

а при $b(t)\equiv b$=const ≥ 0 будемо мати

$$0\le\varphi(t)\le b\,e^{a(T-t)},\ t_o\le t\le T.$$

Доведення *леми*. Покладемо $R(t)=a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau$.

Зауважимо, що: $R(t_o)=0,\ R(t)\ge 0,\ \dot R(t)=a\,\varphi(t),\ t_o\le t\le T$.

З урахуванням (5.61) маємо:

$\dot R(t)\le a\,R(t)+ab(t)$, тобто $\dot R(t)-aR(t)\le ab(t),\ t_o\le t\le T$.

Домножимо обидві частини останньої нерівності на $e^{-a(t-t_0)}$:

$$\frac{d}{dt}(R(t)e^{-a(t-t_0)}) \le ab(t)\ e^{-a(t-t_0)},\ t_o \le t \le T.$$

Інтегрування від t_o до t з урахуванням $R(t_o)=0$ приводить до оцінки:

$$R(t)e^{-a(t-t_0)} \le a\int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-a(\tau-t_0)}d\tau,$$

тобто $R(t) \le a\int_{to}^{t} b(\tau)^{a(t-\tau)}d\tau,\ t_o \le t \le T.$

Підставивши цю оцінку в праву частину (5.61) отримаємо нерівність (5.62). Якщо $b(t)\equiv b$=const, то безпосередньо обчислюючи інтеграл в правій частині (5.62), прийдемо до оцінки (5.63).

Друге твердження леми доводиться аналогічно за допомогою допоміжної функції:

$$R(t)=a\int_{t}^{T}\varphi(\tau)d\tau,\ t_o \le t \le T.$$

Лема доведена.

Із співвідношень (5.59) для $\Delta x(t)$ з урахуванням (5.55), маємо:

$$|\Delta x(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(x(\tau)+\Delta x(\tau),u(\tau)+h(\tau),\tau)-f(x(\tau),u(\tau),\tau)\right]d\tau\right| \le$$

$$\le L\int_{t_0}^{t}|\Delta x(\tau)|d\tau + L\int_{t_0}^{t}|h(\tau)|d\tau.$$

Звідси, поклавши в (5.61) (в лемі Грануола)

$$\varphi(\tau)=|\Delta x(t)|,\ \ a=L,\ \ b(t)=L\int_{t_0}^{t}|h(\tau)|d\tau$$

з леми отримаємо оцінку (5.60).

Доведемо тепер, що приріст $\Delta J = J(u+h)-J(u)$ функціоналу (5.48) може бути представлений у вигляді:

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{T}\left[H(x(t),u(t)+h(t),t,\psi(t))-H(x(t),u(t),t,\psi(t))\right]dt + R, \qquad (5.64)$$

де залишковий член R задовольняє нерівності:

$$\left|R\right| \le C_2\left(\int_{t_0}^{T}\left|h(t)\right|dt\right)^2,\ C_2=\text{const}\ ^{з}\ 0. \tag{5.65}$$

Оскільки $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=(\Phi'_x(x+\Delta x),\Delta x),0\le\Theta\le 1$,
то із (5.48) отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta J=-\int_{t_0}^{T}\left[f^0(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t,)-f^0(x(t),u(t),t)\right]dt+\\+(\Phi_x(x(T)),\Delta x(T))+R_1.\end{aligned}, \tag{5.66}$$

Тут $R_1=(\Phi_x(x(T)+\Theta\Delta x(T))-\Phi_x(x(T)),\Delta x(T))$.

Із (5.58), (5.60) випливає оцінка:

$$\left|R_1\right|\le L\left|\Delta x(T)\right|^2\le LC_1^2\left(\int_{t_0}^{T}\left|h(t)\right|dt\right)^2. \tag{5.67}$$

Перетворимо другий доданок в (5.66). З урахуванням (5.53),(5.54),(5.59) маємо:

$$(\Phi_x(x(T)),\Delta x(T))=-(y\ (T),\Delta x(T))=-\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}(y\ (t),\Delta x(t))dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\left[(\Psi(t),\Delta\dot{x}(t))+(\dot{\Psi}(t),\Delta x(t))\right]dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}(\Psi(t),f(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t)-f(x(t),u(t),t))dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(H_x(x(t),u(t),t,y\ (t)),Dx(t))dt.$$

Підставимо це в (5.66):

$$\Delta J=-\int_{t_0}^{T}\left[f^0(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t)-f^0(x(t),u(t),t)\right]dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(y\ (t),f(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t)-f(x(t),u(t),t))dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(H_x(x(t),u(t),t,\Psi(t)),\Delta x(t))dt+R_1.$$

Звідси з допомогою функції H згідно (5.52)

$$H = -f^0 + (y , f)$$

маємо:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{T}\left[f^0(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t)-(y(t),f(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t))\right]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left[-f^0(x(t),u(t),t)+(y(t),f(x(t),u(t),t))\right]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T}(H_x(x(t),u(t),t,y(t)),\Delta x(t))dt + R_1 = \qquad (5.68)$$

$$= -\int_{t_0}^{T}\left[H(x(t)+\Delta x(t),u(t)+h(t),t,y(t)) - H(x(t),u(t),t,y(t))\right]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T}(H_x(x(t),u(t),t,y(t)),\Delta x(t))dt + R_1$$

Із формули скінченних приростів випливає:

$$H(x+\Delta x,u+h,t,y) = H(x,u+h,t,y) + (H_x(x+\Theta\Delta x,u+h,t,y),\Delta x),$$

де $0 \le Q \le 1$.

Звідси і з (5.68) отримаємо (5.64), де $R=R_1+R_2$,

$$R_2 = -\int_{t_0}^{T}(H_x(x+\Theta\Delta x,u+h,t,y) - H_x(x,u,t,y),\Delta x)dt$$

Знайдемо оцінку для R. Оскільки

$$H_x(x,u,t,y) = -f_x^0(x,u,t) + (f_x(x,u,t))^T y\ ,,$$

то з урахуванням (5.56),(5.57) для R_2 маємо оцінку:

$$|R_2| \le L(1+max|y(t,u)|)\int_{t_0}^{T}(|\Delta x(t)|+|h(t)|)|Dx(t)|dt =$$

$$= L(1+max|y(t,u)|)[\int_{t_0}^{T}|\Delta x(t)|^2 dt + \int_{t_0}^{T}|\Delta x(t)||h(t)|dt\ ] \le$$

$$\le L(1+max|y(t,u)|)C_1^2\left(\int_{t_0}^{T}|h(t)|dt\right)^2\int_{t_0}^{T}dt + C_1\left(\int_{t_0}^{T}|h(t)|dt\right)^2 =$$

$$= L(1 + max|y\ (t,u)|)\,(C_1^2(T - t_0) + C_1)\left(\int_{t_0}^{T} |h(t)|dt\right)^2 \qquad (5.69)$$

Оскільки *R=R₁+R₂*, то із (5.67),(5.69) отримаємо (5.65).

Далі, нехай $u = u(\cdot)$ - оптимальне керування задачі (5.48)-(5.50). Тоді

$$\Delta J = J(u + h) - J(u) \geq 0$$

для всіх кусково-неперервних $h = h(\cdot)$, для яких *u(t)+h(t) Î V, t₀£ t£T.*

Візьмемо *∀v Î V*, довільні *t, t+e Î [t₀,T], e>0* і розглянемо приріст $h(\cdot)$ спеціального вигляду

$$h(\tau) = \begin{cases} v - u(\tau), t \leq \tau \leq t + \varepsilon \\ 0, \tau \in [t_0, T]/[t, t + \varepsilon] \end{cases} \qquad (5.23)$$

Такі прирости називають голчатими варіаціями керування. Приріст (5.70) кусково-неперервний і *u(t)+h(t) Î V* при всіх *t Î [t₀,T]*.

Для (5.70) із (5.64),(5.65) маємо

$$\Delta J = -\int_{t}^{t+\varepsilon} g(\tau)d\tau + R \geq 0, |R| \leq \varepsilon C_2 \int_{t}^{t+\varepsilon} |h(\tau)|^2 d\tau\,. \qquad (5.71)$$

Тут

$$g(\tau) = H(x(\tau), v, t\ , y\ (\tau)) - H(x(\tau), u(\tau), \tau, y\ (\tau)), t \leq \tau \leq t + \varepsilon\,.$$

Оцінка для R отримана із (5.64) за допомогою нерівності Коші-Буняковського. Оскільки функція $u(\cdot)$ кусково-неперервна, *u(t)=u(t+0)*, а $x(\tau), y\ (\tau), H(x,u,\tau,y\ )$- неперервні функції своїх аргументів, то взявши *e>0* досить малим, можемо вважати, що $g(\tau)$ неперервна на *[t,t+e]*.

Тоді за теоремою про середнє: $\int_{t}^{t+\varepsilon} g(\tau)d\tau = \varepsilon g(t + \Theta\varepsilon), 0 \leq \Theta \leq 1$

Тому із (5.71) маємо:

$$0 \leq \Delta J = -\varepsilon g(t + \Theta\varepsilon) + R \leq -\varepsilon g(t + \Theta\varepsilon) + \varepsilon C_2 \int_{t}^{t+\varepsilon} |h(\tau)|^2 d\tau.$$

Поділимо на $\varepsilon > 0$ і спрямуємо $\varepsilon \to +0$:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} g(t + \Theta\varepsilon) = g(t) \leq 0,$$

тобто

$$g(t) = H(x(\tau), v, t, y\ (\tau)) - H(x(t), u(t), t, y\ (t)) \leq 0,$$

або

$$H(x(t), v, t, y\ (t)) \leq H(x(t), u(t), t, y\ (t)), \forall v \in V.$$

В силу довільності v Î V маємо умову максимуму (5.51) для " t: t_o £t < T.

Для доведення (5.51) при $t=T$ треба взяти:

$$h(\tau) = \begin{cases} v - u(\tau), T - \varepsilon \leq \tau \leq T \\ 0, \tau \in [t_0, T] \setminus [T - \varepsilon, T] \end{cases}$$

і привести аналогічні викладки.

Теорема 5.4 доведена.

Зауваження 5.1. Функція

$$H(t) = \sup_{u \in V} H(x(t), u, t, y\ (t)),$$

неперервна на $[t_o, T]$ і умова максимуму (5.51) справедлива для всіх t Î $[t_o, T]$ при будь-якому з двох способів довизначення $u(\cdot)$ в точках розриву: $u(t)=u(t+0)$ при t_o £t < T, $u(T)=u(T-0)$, або $u(t)=u(t-0)$ при t_o < t £ T, $u(t_o)=u(t_o+0)$.

Ця властивість має місце і для більш загальних ніж (5.48)-(5.50) задач оптимального керування(доведення властивості дивись [5]).

Зауваження 5.2. *Теорема 5.4* справедлива і в тому випадку, коли взамін умов (5.55)-(5.58) вимагати лише неперервність функцій $f, f_x, f^0, f_x^0, \Phi, \Phi_x$ за сукупністю своїх аргументів.