РОЗДІЛ 5

5.6.Зв’язок між принципом максимуму та класичним варіаційним численням.

Запишемо основну задачу варіаційного числення: серед усіх неперервних кривих $x=x(t)$, $t_o \le t \le T$, що мають кусково-неперервні похідні і задовольняють умовам $x(t_0)\in S_0, x(T)\in S_I$, знайти таку, що доставляє функціоналу (функції)

$$J=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),\dot{x}(t),t)dt$$

екстремум (мінімальне значення).

Нехай $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, S_o,S_I - задані множини із E^n, $f^0(x,u,t)$ - неперервна і має неперервні похідні $f_x^0, f_u^0, f_t^0, f_{ut}^0, f_{ux}^0, f_{uu}^0$ при $(x,u,t)\in E^n\times E^n\times[t_0,\infty)$.

Для простоти обмежимося випадком:

лівий кінець закріплений: $x(t_o)=x_o$, t_o-задане, правий кінець $x(T)$ - або закріплений: $x(T)=x_I$, T-задане, або вільний: $S_I \equiv E^n$, T- задане;

або лівий кінець рухомий і лежить на заданій гладкій кривій:

$$S_I=S_I(T)=\{x\in E^n : g(x,T)=x-\varphi(T)=0\}, T\in R=\{-\infty<t<+\infty\}.$$

Позначимо $\dot{x}(t)=u(t)$ і запишемо задачу в еквівалентному вигляді як задачу оптимального керування:

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt\to inf$$

$$\dot{x}(t)=u(t), t_0\le t\le T$$

$$x(t_0)=x_0, x(T)\in S_I(T).$$

За принципом максимуму згідно *теореми 5.3*:

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0)=\psi_0 f^0(x,u,t)+(\psi,u) \tag{5.72}$$

$$\dot{\psi}=-H_x=-\psi_0 f_x^0(x,u,t), \psi_0=const\le 0. \tag{5.73}$$

Для розв’язку *(u(t), x(t)),* t_o £ t £ T даної задачі оптимального керування повинна виконуватись необхідна умова:

$$H\left(x(t),u(t),t,y\ (t),y_{\ 0}\right)=\sup_{u\in E^n} H\left(x(t),u,t,y\ (t),y_{\ 0}\right) \tag{5.74}$$

Тут $y(t)$ - розв’язок системи (5.73) при $u=u(t)$, $x=x(t,u)$, t_o £ t £ T. Оскільки $V=E^n$, то (5.74) може виконуватись лише в стаціонарній точці:

$$H_u=y_{\ 0}\, f_u^0\left(x(t),u(t),t\right)+y\ (t)=0\,. \tag{5.75}$$

Звідси: $y_o\neq 0$, бо інакше при $y_o=0$ із (5.75) отримаємо $y(t)°0$, що протирічить умові *теореми 5.3*. Значить, можна вважати: $y_o=-1$.

Тоді (5.72)-(5.75) приймуть вигляд:

$$H(x,u,t,y)=-f^0(x,u,t)+(y,u). \tag{5.56}$$

$$\dot{y}(t)=\ f_x^0\left(x(t),u(t),t\right). \tag{5.77}$$

$$H\left(x(t),u(t),t,y\ (t)\right)=\sup_{u\in E} H\left(x(t),u,t,y\ (t)\right). \tag{5.78}$$

Із (5.75):

$$y\ (t)=\ f_u^0\left(x(t),u(t),t\right),t_0\le t\le T\,. \tag{5.79}$$

Із (5.77): $$y\ (t)=\int_{t_0}^{t} f_x^0\left(x(t\ ),u(t\ ),t\ \right)dt\ +y\ (t_0).$$

Із останніх двох виразів для $y\,(\,t\,)$ випливає, що

$$f_u^0\left(x(t),u(t),t\right)=\int_{t_0}^{t} f_x^0\left(x(\tau),u(\tau),\tau\right)d\tau+y\ (t_0). \tag{5.80}$$

Це рівняння Ейлера в інтегральній формі, де $u(t)=\dot{x}(t)$, $t_0\le t\le T$. Якщо (5.80) продиференціювати по t, то отримаємо рівняння Ейлера класичного варіаційного числення в диференціальній формі:

$$\frac{d}{dt}\left(f_u^0\left(x(t),u(t),t\right)\right)-\ f_x^0\left(x(t),u(t),t\right)=0,\qquad u(t)=\dot{x}(t).$$

Необхідною умовою досягнення функцією $H\left(x(t),u,t,y\ (t)\right)$ максимуму при $u=u(t)$ є недодатність квадратичної форми: $\sum_{i,j=1}^{n} H_{u_i u_j}\left(x(t),u(t),t,y\ (t)\right)\xi_i\xi_j\le 0$ при будь-яких $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$, $t_0\le t\le T$.

Звідси, враховуючи (5.76), отримаємо:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f^{0}_{u_i u_j}\big(x(t),u(t),t\big)\xi_i \xi_j \geq 0, \xi \in E^n . \tag{5.81}$$

Це необхідна умова Лежандра. Зокрема, при *n=1:*

$$f^{0}_{uu}\big(x(t),u(t),t\big) \geq 0 , \quad t_0 \leq t \leq T .$$

Виведемо тепер необхідну умову Вейєрштраса. Перепишемо (5.78) з урахуванням (5.76),(5.79):

$$\begin{aligned} &0 \leq H\big(x(t),u(t),t,y\,(t)\big) - H\big(x(t),v,t,y\,(t)\big) = \\ &= f^{0}\big(x(t),v,t\big) - f^{0}\big(x(t),u(t),t\big) - \big(v-u(t), f^{0}_{u}\big(x(t),u(t),t\big)\big) \end{aligned}$$

для $\forall v \in E^n, t \in [t_0, T]$; за умови, що *(u(t),x(t)),* $t_0 \leq t \leq T$ - розв'язок початкової задачі.

Введемо функцію:

$$E(t,x,u,v) \equiv f^0(x,v,t)-f^0(x,u,t)-(v-u,\ f^{0}_{u}\,(x,u,t)). \tag{5.83}$$

Це функція Вейєрштраса. Тоді відома умова Вейєрштраса:

$$E(t,x(t),u(t),v) \geq 0,\ t_o \leq t \leq T,\ v \in E^n$$

випливає із (5.82).

Далі, із принципу максимуму (*теореми 5.1,-5.3*, *зауваження 5.1* до *теореми 5.4*) випливає неперервність функцій *y (t)* та

$$H(t) = \sup_{u \in E^n} H\big(x(t),u,t,y\,(t)\big)$$

на $[t_0, T]$.

Тому з урахуванням (5.76),(5.78),(5.79):

$$\begin{aligned} &[\ f^{0}_{u}\big(x(t),u(t),t\big)\ ]_t = 0 \\ &\big[\big(u(t), f^{0}_{u}\big(x(t),u(t),t\big)\big) - f^{0}\big(x(t),u(t),t\big)\big]_t = 0 \end{aligned} \tag{5.84}$$

Тут позначено: *[z(t)]*$_t$*=z(t+0)-z(t-0).*

Оскільки (5.84) виконані при всіх t: $t_0 \le t \le T$, то вони виконуються, зокрема, і тоді, коли $x(t)$ може мати злам, тобто $\dot{x}(t)$ має розрив. Якщо врахувати: $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, то (5.84) переходять в відомі умови Вейєрштраса-Ердмана.

Розглянемо умови на правому кінці. Якщо кінець оптимальної траєкторії $x(t)$- вільний, то $\psi(T) = 0$.

Тоді, згідно (5.79):-

$$\psi(T) = f_u^0(x(T),u(T),T) = 0. \tag{5.85}$$

Якщо правий кінець рухомий, тобто

$$x(T) \in S_1(T) = \left\{x \in E^n : g_j(x,T) \equiv x_j - \varphi_j(T) \equiv 0, j = \overline{1,n}\right\},$$

то існують сталі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такі, що:

$$\psi_i(T) = \sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_x}(x(T),T) = a_i,$$

$$H(x(T),u(T),T,\psi(T)) = -\sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_t}(x(t),T) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \dot{\varphi}_j(T) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(T)\dot{\varphi}_j(T) = (\psi(T), \dot{\varphi}(T))$$

Оскільки $H(x,u,t,\psi) \equiv (\psi,u) - f^0(x,u,t)$, і $\psi(t)$- виражається згідно (5.79), то маємо:

$$f^0(x(T),u(T),T) + (f_u^0(x(T),u(T),T), \dot{\varphi}(T) - u(T)) = 0. \tag{5.86}$$

Умови (5.85),(5.86), де $u(t) \equiv \dot{x}(t)$ - є відомі умови для вільного і рухомого правого кінця відповідно.

Висновок: Для $V \equiv E^n$ із принципу максимуму випливають всі основні необхідні умови екстремуму, відомі в класичному варіаційному численні. Але, якщо $V \ne E^n$, то (5.75) не виконується і умова Вейєрштраса може не виконуватись. А умова максимуму (дивись, наприклад, *теорему 5.1*) є узагальненням умови Вейєрштраса із варіаційного числення. Перевага умови максимуму перед умовою Вейєрштраса та, що вона може застосовуватись для будь-якої множини $V \subseteq E^r$ (зокрема, замкненої) і для більш загальних задач. А якраз випадок замкненої множини V більш цікавий, оскільки значення оптимальних керувань частіше всього лежать на границі V.