РОЗДІЛ 5

5.7. Принцип максимуму для дискретних систем.

Розглянемо керований процес, що описується системою різницевих рівнянь

$$x(k+1)=f_k(x(k),u(k)),k=\overline{0,N-1}, \quad (5.87)$$

$$x(0)=a. \quad (5.88)$$

Тут $x(k)=\{x_1(k),...,x_n(k)\}^T$ вектор стовпчик із простору E^n,

$$\begin{aligned} &u(k)=\{u_1(k),...,u_m(k)\}^T, \\ &u(k)\in G_k\subset E^m, \quad k=0,\overline{N-1}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

де *G(5.k)* -- деяка множина.

Вектор-функції $f_k=\{f_k^1,...,f_k^n\}^T$ визначені на $E_n\times G_k$, *N*-фіксовано.

Критерій

$$J(u,x)=f_N^0(x_N)+\sum_{k=0}^{N-1}f_k^0(x(k),u(k))\to min\ . \quad (5.90)$$

Введемо функцію Гамільтона:

$$\begin{aligned} H_k(y(k+1),x(k),u(k))&=-f_k^0(x(k),u(k))+\sum_{i=1}^{n}y_{k+1}^{i}f_k^i(x(k),u(k))= \\ &=-f_k^0(x(k),u(k))+(y(k+1),f_k(x(k),u(k))), \end{aligned}$$

де функції $y(k)$ такі що:

$$\begin{aligned} &y(N)=-\left.\frac{\partial f_N^0(x(N))}{\partial x(N)}\right|_{x(N)=\tilde{x}(N)} \\ &y(k)=-y_0\frac{\partial f_k^0}{\partial x(k)}+y(k+1)\frac{\partial f_k}{\partial x(k)}=\frac{\partial H(y(k+1),\tilde{x}(k),\tilde{u}(k))}{\partial x(k)}, \\ &k=N-1,...,0. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Тут - $\tilde{x}(k),\tilde{u}(k)$- розв’язок задачі (5.87)-(5.90).

Теорема 5.5. (дискретний принцип максимуму).

Нехай $\tilde{x},\tilde{u}$ - оптимальні траєкторія і керування в задачі (5.87)-(5.90). Нехай $\tilde{y}(1),...,\tilde{y}(N)$ розв’язок рівнянь (5.91) зв’язаних з $\tilde{x},\tilde{u}$.

Нехай виконуються обмеження:

1) f_k^0, f_k - неперервно-диференційовані по *u(k);*

2) f_k^0 - опуклі по $u(k)$;

3) f_k-лінійні по $u(k)$;

4) G_k - опуклі замкнені множини.

Тоді при $\forall k = 0,1,...,N-1$ Гамільтоніан

$$H_k(\tilde{y}(k+1),\tilde{x}(k),u(k))$$

досягає свого максимуму по $u(k) \hat{I}\, G_k$ в точці $\tilde{u}(k)$.

Без доведення.

*Зауваження 5.3.*Якщо функції f_k^0 опуклі по $u(k)$, а f_k лінійні не тільки по керуванням, але й по фазовим змінним $x(k)$, то умови теореми будуть і достатніми .

Зауваження 5.4. Чим менше крок різницевої схеми, тим точніше виконується принцип максимуму. Якщо ж дискретна система не зв'язана із різницевою апроксимацією неперервних процесів, то принцип максимуму взагалі кажучи, може не виконуватися.

Функція H_k вздовж оптимальної траєкторії відрізняється від свого максимального значення на величину порядку $O(h)$, де h –крок різницевої схеми.

Зауваження5.5. В дискретних задачах оптимальні керування $\tilde{u}(k)$ при кожному k завжди є стаціонарними точками функції H_k, тобто

$$\left.\frac{\partial H_k}{\partial u(k)}\right|_{u(k)=\tilde{u}(k)} = 0.$$