РОЗДІЛ 6.

6.1. Метод динамічного програмування розв‘язування задач оптимального керування.

Розглянемо задачу:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + F(x(t_1)) \to inf\ , \tag{6.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{6.2}$$

$$x(t) \in W_t(x), \tag{6.3}$$

$$u(t) \in W(U) = \{u(t) : u(t) \in W_t(U), t_0 \le t \le t_1\}. \tag{6.4}$$

Метод динамічного програмування є наслідком принципу оптимальності, який був сформульований Р.Белманом. Принцип оптимальності справедливий для досить широкого класу задач оптимального керування, але не для всіх.

Для задачі (6.1)–(6.4) принцип оптимальності може бути сформульований таким чином:

якщо деяка траєкторія АС керованої системи (6.2) є оптимальною траєкторією задачі (6.1)–(6.4), то траєкторія ВС також буде оптимальною при будь-якому виборі точки В на оптимальній траєкторії АС.

В задачі (6.1)–(6.4) моменти часу t_0, t_1 в загальному випадку вважаються невідомими і підлягають визначенню. Ці моменти, після їх визначення, будемо позначати через t_0^0, t_1^0.

Інше формулювання принципу оптимальності.

Нехай існує оптимальний розв’язок $(u^0(t), x^0(t)),\ t_0^0 \le t \le t_1^0$ – задачі (6.1)–(6.4), і нехай t^* довільно фіксований момент часу, $t^* \in [t_0^0, t_1^0]$. Тоді оптимальний розв‘язок задачі (6.1)-(6.4) при $t \ge t^*$ визначається значенням $x^0(t^*)$ при $t = t^*$ і залежить від $u^0(t), x^0(t)$ при $t < t^*$.

Або:

Розв’язок $u^0(t), x^0(t), t_0^0 \le t \le t_1^0$ задачі (6.1)–(6.4) співпадає при $t > t^*$ з розв’язком задачі, що відрізняється від (6.1)–(6.4) тим, що початковий момент часу фіксованій і співпадає з t^*, і тим, що початкова точка фазової траєкторії фіксована і співпадає з $x^0(t^*)$.

$$\inf_{u\in W(U,x^0(t^*))}\left\{\int_{t^*}^{t_1} G(x,u,t)dt+F(x(t_1))\right\}=\int_{t^*}^{t_1} G(x^0,u^0,t)dt+F(x^0(t_1^0)) \qquad (6.5)$$

Тут $t^*, x^0(t^*)$–фіксовані, а $W_t(U,x^0(t^*))$–множина допустимих керувань $u(t)\in W_t(U)$ при $t>t^*$, яким відповідають всі можливі траєкторії $x(t)$ з початковою точкою $x^0(t^*)$: $x(t)\in W_t(X)$ при $t>t^*$.

Справедливість принципу оптимальності для задач типу (6.1)–(6.4) встановлюється на основі властивості адитивності інтервалу як функції інтервалу інтегрування.

Доведення принципу оптимальності:

Нехай:

$$Q^0 = \inf_{\substack{u(t)\in W_t(U)\\ x(t)\in W_t(X)\\ t_{min}\le t\le t_{max}}} Q(u) = \int_{t_0^0}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt + F(x^0(t_1^0)) =$$

$$=\int_{t_0^0}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt+\int_{t^*}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt+F(x^0(t_1^0))=Q_1^0+Q_2^0. \qquad (6.6)$$

Тут t_{min}, t_{max} – мінімально і, відповідно, максимально можливі моменти часу t, для яких задача має зміст, t^* – довільна точка з $[t_0^0, t_1^0]$.

Розглянемо задачу (6.1)–(6.4) при умові:

$t_0^0=t^*, x(t^*)=x^0(t^*)$.

Розв’язок цієї задачі позначимо через $\tilde u(t)$, $\tilde x(t)$, $t^*\le t\le \tilde t_1$.

Доведення від супротивного. Припустимо, всупереч принципу оптимальності, що цей розв’язок не співпадає з $u^0(t)$, $x^0(t)$ при $t>t^*$,тоді

$$\tilde Q=\int_{t^*}^{\tilde t_1} G(\tilde x,\tilde u,t)dt+F(\tilde x(\tilde t_1))<Q_2^0. \qquad (6.7)$$

Побудуємо допустиме керування для задачі (6.1)-(6.4) у вигляді кусково-неперервної функції:

$$u_*(t)=\begin{cases} u^0(t), & t_0^0 \le t < t^* \\ \tilde{u}(t), & t^* \le t < \tilde{t}_1 \end{cases}. \tag{6.8}$$

Відповідна йому траєкторія:

$$x_*(t)=\begin{cases} x^0(t), & t_0^0 \le t < t^* \\ \tilde{x}(t), & t^* \le t \le \tilde{t}_1 \end{cases}. \tag{6.9}$$

Для розв'язку (6.8), (6.9) задачі (6.1)-(6.4) будемо мати:

$$Q(u_*) = Q_1^0 + \tilde{Q} < Q_1^0 + Q_2^0 = Q^0 \tag{6.10}$$

Остання нерівність вказує на те, що розв'язок $u^0(t)$, $x^0(t)$ не є оптимальним, оскільки u_* дає менше значення функціоналу Q.

Протиріччя доводить справедливість принципу оптимальності.