РОЗДІЛ 6.

6.2. Рівняння Белмана для дискретних систем оптимального керування.

Виведемо тепер рівняння Белмана для дискретних систем. Запишемо задачу оптимального керування у вигляді:

$$J(t_0,x_0,u(\cdot))=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt+F(x(T))\to \inf, \tag{6.11}$$

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t), \quad t_0\le t\le T, \qquad x(t_0)=x_0 \tag{6.12}$$

$$x(t)\in G(t), \tag{6.13}$$

$$u=u(t)\in V(t). \tag{6.14}$$

Тут $u(t)$- кусково-неперевна функція, моменти t_0, T-задані.

Перейдемо до дискретної задачі, зробивши дискретизацію: $t_0<t_1<...<t_{N-1}<t_N=T$, інтеграл в (6.11) замінимо формулою прямокутників.

Отримаємо:

$$I_0(x,[u_i]_0)=\sum_{i=0}^{N-1}F_i^0(x_i,u_i)+F(x_N)\to \inf \tag{6.15}$$

$$x_{i+1}=F_i(x_i,u_i), \ \ i=\overline{0,N-1}, \tag{6.16}$$

$$x_i\in G_i, \tag{6.17}$$

$$[u_i]_0=(u_0,u_1,\ldots,u_{N-1}),u_i\in V_i,i=\overline{0,N-1} \tag{6.18}$$

де

$$F_i^0(x_i,u_i)=f^0(x_i,u_i,t_i)(t_{i+1}-t_i),$$

$$F_i(x_i,u_i)=x_i+f(x_i,u_i,t_i)(t_{i+1}-t_i),$$

$$G_i=G(t_i),\ V_i=V(t_i).$$

Задача (6.15)-(6.18) має також і самостійне значення.

Якщо задати дискретне керування $[u_i]_0=(u_0,u_1,\ldots,u_{N-1})$ і початкову умову $x_0 = x \in G$, то (6.16) однозначно визначає дискретну траєкторію $[x_i]_0=(x_0,x_1,\ldots,x_N)$.

Зафіксуємо деяке $x \in G_0$, позначимо через $D_0(x)$ множину керувань $[u_i]_0$:

1. Виконано (6.18).
2. Траєкторія $[x_i]_0$, що відповідає $[u_i]_0$ і вибраній початковій умові $x_0=x$ задовольняє (6.17).

Пару $([x_i]_0,[u_i]_0)$ назвемо допустимою, якщо вона задовольняє (6.16)-(6.18), тобто $[u_i]_0\in D_0(x_0)$.

Множина $D_0(x)$ може бути порожньою, або не порожньою. Якщо $D_0(x)=\varnothing$ при всіх $x\in G_0$, то (6.16)-(6.18) - несумісні умови і функція (6.15) буде визначена на порожній множині. Тому, щоб задача (6.15)-(6.18) мала зміст, треба вимагати, щоб існувала хоча б одна точка $x\in G_0$, $D_0(x)\neq\varnothing$.

Позначимо: $X_0=\{x:\ x\in G_0,\ D_0(x)\neq Æ\}$.

Тоді задачу (6.15)-(6.18) сформулюємо коротко:

$$I_0^* = \inf_{x\in X_0} \inf_{[u_i]_0\in D_0(x)} I_0(x,[u_i]_0)$$

Допустиму пару $([x_i]_0,[u_i]_0)$ назвемо розв'язком задачі (6.15)-(6.18), якщо $I_0([x_i^*],[u_i^*])=I_0^*$, і $[u_i^*]_0$ - назвемо оптимальним керуванням, $[x_i^*]_0$ - оптимальною траєкторією задачі (6.15)-(6.18).

Задача (6.15)-(6.18) - задача мінімізації функції від $n+Nr$ змінних, де n – розмірність початкового вектору x_0, r – розмірність кожного з векторів $u_0,u_1,\mathbf{K},u_{N-1}$.

За допомогою методу динамічного програмування задача (6.5)-(6.8) великої кількості змінних зводиться до послідовності скінченої кількості задач мінімізації функцій меншої кількості змінних.

Для викладення методу динамічного програмування розглянемо допоміжні задачі:

$$J_k(x,[u_i]_k)=\sum_{i=k}^{N-1}F_i^0(x_i,u_i)+F(x_N)\to \inf \tag{6.19}$$

$$x_{i+1}=F_i(x_i,u_i),\ \ i=\overline{k,N-1},\quad x_k=x \tag{6.20}$$

$$x_i \in G_i\,, \qquad i=\overline{k,N} \tag{6.21}$$

$$[\,u_i\,]_k=(\,u_k\,,u_{k+1}\,,\mathbf{K}\,,u_{N-1}\,), \quad u_i \in V_i\,, \qquad i=\overline{k,N-1} \tag{6.22}$$

де точка x_i, та ціле число k -фіксовані, $x\in G_k$, $0\le k \le N-1$.

При $k=0$ отримаємо початкову задачу (6.15)-(6.18). Позначимо: $D_k(\,x\,)$- множина керувань $[u_i]_k$, що задовольняють (6.22) і таких, що відповідна траєкторія $[x_i]_k=(x_k=x,x_{k+1},...,x_N)$ задовільняє (6.21).

Пару $([\,u_i^*\,]_k\,,[\,x_i^*\,]_k\,)$ назвемо допустимою для задачі (6.19)-(6.22), якщо $[u_i]_k\in D_k(\,x\,)$. Допустиму пару $([\,u_i^*\,]_k\,,[\,x_i^*\,]_k\,)$ назвемо розв'язком задачі (6.19)-(6.22), якщо

$$I_k(\,x,[\,u_i^*\,]_k\,)=I_k^* = \inf_{D_k(\,x\,)} I_k(\,x,[\,u_i\,]_k\,)$$

Неважко бачити, що якщо $X_0\neq Æ$, то $D_k(\,x\,)\neq Æ$ хоча б для одного $x\in G_k$.

Введемо функцію

$$B_k(\,x\,)=\inf_{D_k(\,x\,)} I_k(\,x,[\,u_i\,]_k\,), \quad k=\overline{0,N-1}.$$

Дана функція називається функцією Белмана для задачі (6.15)-(6.18).

Покажемо, що функція Белмана задовольняє рівнянню Белмана:

$$B_k(\,x\,)=\inf_{u\in D_k(\,x\,)} [\,F_k^0(\,x,u\,)+B_{k+1}(\,F_k(\,x,u\,))], \quad k=\overline{0,N-1} \tag{6.23}$$

$$B_N(\,x\,)=F(\,x\,), \qquad x\in G_N\,, \tag{6.24}$$

де $D_k(x)$ - множина усіх тих $u\in V_k$, для яких існує хоча б одне керування $[u_i]_k\in D_k(\,x\,)$ із компонентою $u_k=u$.

Звідси видно, що множини $D_k(x)$ і $D_k(\,x\,)$- обидва порожні, або не порожні одночасно.

Оскільки

$$x_{k+1}=F_k(x,u),$$

то для того, щоб ці множини були непорожні необхідно і досить, щоб $D_{k+1}(F_k(x,u)) \neq Æ$.

Доведення рівняння Белмана (6.23).

Справедливість (6.23) при $k=N\text{-}1$ очевидно виплиає із умови $B_N(x) \equiv F(x)$ і представлення

$$J_{N-1}(x,[u_i]_{N-1}) \equiv F^0_{N-1}(x,u) + F(F_{N-1}(x,u)),$$

справедливого для

$$\forall u \in D_{N-1}(x) \equiv D^{(x)}_{N-1} \equiv \{u : u \in V_{N-1}, x_N = F_{N-1}(x,u) \in G_N, x \in G_{N-1}\}.$$

Доведемо (6.23) при k, $0 \leq k < N-1$. Для цього спочатку переконаємось, що

$$B_k(x) \leq \inf_{u \in D_k(x)} [F^0_k(x,u) + B_{k+1}(F_k(x,u))], \tag{6.25}$$

Візьмемо довільне $u \in D_k(x)$ $(D_k(x) \neq Æ)$ і з цим керуванням вийдемо із точки x в момент k. В момент $k+1$ прийдемо в точку $x_{k+1}=F_k(x,u)$, для якої $D_{k+1}(x_{k+1}) \neq \varnothing$.

За означенням $B_{k+1}(x_{k+1}) = \inf\limits_{D_{k+1}(x_{k+1})} J_{k+1}(x_{k+1},[u_i]_{k+1})$, тобто для $\forall e > 0$ знайдеться керування $[u^e_i]_{k+1} \in D_{k+1}(x_{k+1})$ таке, що

$$B_{k+1}(x_{k+1}) \leq J_{k+1}(x_{k+1},[u^e_i]_{k+1}) \leq B_{k+1}(x_{k+1}) + e\ .$$

Оскільки $[\bar{u}_i]_k = (u, u^e_{k+1}, \mathbf{K}, u^e_{N-1}) \in D_k(x)$, то

$$\begin{gathered} B_k(x) \leq J_k(x,[\bar{u}_i]_k) = F^0_k(x,u) + \\ J_{k+1}(x_{k+1},[u^e_i]_{k+1}) \leq F^0_k(x,u) + B_{k+1}(x_{k+1}) + e \equiv \\ \equiv F^0_k(x,u) + B_{k+1}(F_k(x,u)) + e \end{gathered}$$

В силу довільності $u \in D_k(x)$ і $e > 0$, звідси випливає нерівність (6.25).

Тепер покажемо, що в (6.25) нерівність можна замінити знаком рівності. За означенням $\inf\limits_{D_k(x)} J_k(x,[u_i]_k)=B_k(x)$ для кожного $e>0$ знайдеться таке керування $[n_i^e]_k\in D_k(x)$:

$$B_k(x)\le J_k(x,[n_i^e]_k)\le B_k(x)+e$$

Але $[\bar{n}_i]_{k+1}\equiv(n_{k+1}^e,\mathbf{K},n_{N-1}^e)\in D_{k+1}(F_k(x,n_k^e))$, тому

$$F_k^0(x,n_k^e)+B_{k+1}(F_k(x,n_k^e))\le F_k^0(x,n_k^e)+J_{k+1}(F_k(x,n_k^e),[\bar{n}_i]_{k+1})=$$
$$=J_K(x,[n_i^e]_k)\le B_k(x)+e.$$

Оскільки $n_k^e\in D_k(x)$, то

$$\inf_{u\in D_k(x)}[F_k^0(x,u)+B_{k+1}(F_k(x,u))]\le B_k(x)+e,$$

або в силу довільності $e>0$

$$\inf_{u\in D_k(x)}[F_k^0(x,u)+B_{k+1}(F_k(x,u))]\le B_k(x).$$

Звідси та із (6.25) випливає (6.13). Рівняння Белмана доведено.

Користуючись (6.23),(6.24) можна послідовно визначити функції $B_k(x)$ та їх області визначення X_k, $k=N,N-1,...,0$. Очевидно, функція $B_k(x)$ визначена в точці x тоді і тільки тоді, коли $D_k(x)\neq Æ$.

Припустимо, що вдалося знайти функції $B_k(x)$ із умов (6.23),(6.24), і, крім того, нехай відомі функції $u_k(x)\in D_k(x)$, $x\in X_k$, $k=\overline{0,N-1}$, на яких досягається $\inf$ в правій частині (6.23). Тоді можна вимагати розв'язки задач (6.15)-(6.18) і (6.19)-(6.22). А саме, нехай оптимальне керування $[u_i^*]_0$ і відповідна траєкторія $[x_i^*]_0$ для задачі (6.15)-(6.18) визначається так: спочатку із умови

$$\inf B_0(x)=B_0(x_0^*) \tag{6.26}$$

знаходять $x_0^*\in X_0$, потім послідовно покладають

$$\begin{array}{ll} u_0^* = u_0(x_0^*), & x_1^* = F_0(x_0^*, u_0^*), \\ u_1^* = u_1(x_1^*), & x_2^* = F_1(x_1^*, u_1^*) \\ \mathbf{L\,L\,L\,L\,L} & \mathbf{L\,L\,L\,L\,L\,L\,L\,L} \\ & x_N^* = F_{N-1}(x_{N-1}^*, u_{N-1}^*) \end{array} \tag{6.27}$$

Оптимальне керування $[u_i^*]_k$ і траєкторія $[x_i^*]_k$ для задачі (6.19)-(6.22) визначаються аналогічно

$$\begin{array}{ll} x_k^* = x, & u_k^* = u_k(x_k^*), \\ x_{k+1}^* = F_k(x_k^*, u_k^*), & u_{k+1}^* = u_{k+1}(x_{k+1}^*) \\ \mathbf{L\,L\,L\,L\,L\,L\,L} & \mathbf{L\,L\,L\,L\,L\,L\,L\,L\,L} \\ & x_N^* = F_{N-1}(x_{N-1}^*, u_{N-1}^*) \end{array} \tag{6.28}$$

Для доведення цього введемо допоміжні функції

$$R_i(x,u) \equiv B_{i+1}(F_i(x,u)) - B_i(x) + F_i^0(x,u), \quad i = \overline{0, N-1} \tag{6.29}$$

Тоді рівняння Белмана (6.23) перепишемо в еквівалентному вигляді:

$$\inf_{u \in D_k(x)} R_k(x,u) \equiv R_k(x, u_k(x)) = 0, \quad k = \overline{0, N-1} \tag{6.30}$$

Крім того, за допомогою функцій $R_i(x,u)$ значення функції (6.19) на будь-якому керуванні $[u_i]_k \in D_k(x)$, $x \in X_k$ можна записати формулою

$$I_k(x, [u_i]_k) = \sum_{i=k}^{N-1} R_i(x_i, u_i) + B_k(x) \quad k = \overline{0, N-1}. \tag{6.31}$$

Дійсно, враховуючи $B_N(x) \equiv F(x)$, із (6.20),(6.29) маємо:

$$\sum_{i=k}^{N-1} R_i(x_i, u_i) = \sum_{i=k}^{N-1} [B_{i+1}(x_{i+1}) - B_i(x_i) + F_i^0(x_i, u_i)] =$$
$$= B_N(x_N) - B_k(x) + \sum_{i=k}^{N-1} F_i^0(x_i, u_i) = I_k(x, [u_i]_k) - B_k(x),$$

що рівносильно (6.31).

Теорема *6.1* Нехай знайдені функції $B_k(x)$ із (6.23), (6.24) та їх області визначення X_k, а також функції $u = u_k(x),\ x \in X_k,\ k = \overline{0, N-1}$ на яких досягається нижня грань в (6.23) або (6.30), і нехай x_0^* визначене умовою (6.26).

Тоді оптимальне керування $[u_i^*]_0$ траєкторія $[x_i^*]_0$ для задачі (6.15)-(6.18) визначаються співвідношеннями (6.26),(6.27).

Доведення. Із визначення $u(x)$, $[u_i^*]_0$, $[x_i^*]_0$ та еквівалентності записів рівнянь Белмана (6.23) і (6.30) маємо:

$$R_i(x_i^*, u_i^*) \equiv R_i(x_i^*, u_i(x_i^*)) = \inf_{u \in D_i(x_i^*)} R_i(x_i^*, u) = 0, \quad i = \overline{0, N-1} \tag{6.32}$$

Візьмемо довільні $x \in X_0$,керування $[u_i]_0 \in D_0(x)$ з відповідною траєкторією $[x_i]_0$ із (6.16). Так як $u_i(x) \in D_i(x_i)$, то із рівняння (6.30) і визначення $u_i(x)$ випливає:

$$R_i(x_i, u_i) \geq \inf_{u \in D_i(x_i)} R_i(x_i, u) = R_i(x_i, u_i(x_i)) = 0, i = \overline{0, N-1} \tag{6.23}$$

За допомогою формули (6.31) при $k=0$ з урахуванням співвідношень (6.26), (6.32), (6.33) отримаємо:

$$I_0(x, [u_i]_0) - I_0(x_i^*, [u_i^*]_0) =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} [R_i(x_i, u_i) - R_i(x_i^*, u_i^*)] + B_0(x) - B_0(x_0^*) \geq 0$$

для будь-яких $x \in X_0$ *і* $[u_i]_0 \in D_0(x)$, що й треба було довести.

Теорема *6.2.* Нехай відомі $B_k(x)$, $x \in X_k$ із (6.23), (6.24), а також функції $u_k(x)$, на яких досягається нижня грань в рівнянні (6.23) (або (6.30)).

Тоді оптимальне керування $[u_i^*]_k$ і траєкторія для задачі (6.19)-(6.22) визначаються формулами (6.28).

Доведення. Візьмемо довільне керування $[u_i]_k \in D_k(x)$ і відповідну траєкторію $[x_i]_k$ із (6.20). Очевидно (6.32), (6.33) залишаються справедливими при всіх $i = \overline{k, N-1}$. Звідси за допомогою (6.31) отримаємо:

$$I_k(x,[u_i]_k) - I_k(x,[u_i^*]_k) = \sum_{i=k}^{N-1} [R_i(x_i,u_i) - R_i(x_i^*,u_i^*)] \ge 0$$

що й треба було довести.

Зауважимо, що

$$\inf_{[u_i]_k \in D_k(x)} I_k(x,[u_i]_k) = I_k(x,[u_i^*]_k) = B_k(x),$$

що випливає з формули (6.31) із врахуванням (6.32). Тим самим показано, що функції $B_k(x)$, що визначаються згідно (6.23), (6.24) - дійсно являються функціями Белмана для задачі (6.15)-(6.18).

Зауваження 6.1. В теорії оптимального керування та її застосуваннях важливе місце займає так звана задача синтезу. Вона полягає в побудові функції керування $u=u_k(x)$ як функції стану системи. Тобто, це оптимальне керування за умови, що в момент k об'єкт знаходиться в точці x фазового простору. Така функція $u_k(x)$ називається синтезуючою. Розв'язок рівняння Белмана (6.23) еквівалентно розв'язку задачі (проблеми) синтезу для задачі (6.15)-(6.18). А саме: функція $u_k(x)$, на якій досягається нижня грань в (6.23) є синтезуючою, тобто якщо в момент k об'єкт знаходиться в точці $x \in X_k$, то подальший оптимальний рух об'єкту визначається умовами: $x_{i+1}=F(x_i,u_i(x_i))$, $i=\overline{k,N-1}$, $x_k=x$.

Зауваження 6.2. Зустрічаються задачі типу (6.15)-(6.18), в яких нижня грань в (6.23) або (6.26) не досягається. Тоді користуються величинами, що наближено реалізують нижню грань. Але навіть коли нижня грань в (6.23) або (6.26) досягається, отримати точні вирази для $B_k()$, $u_k(x)$ із (6.23) і точки x_0^* із (6.26) часто буває важко. Тому на практиці часто користуються співвідношеннями (6.26), (6.27) для наближених $B_k()$, $u_k(x)$ і замість точних керувань $[u_i^*]_0$ і траєкторії $[x_i^*]_0$ отримують деякі їх наближення.

Зауваження 6.3. Метод динамічного програмування є ефективним засобом розв'язку задач вигляду (6.15)-(6.18). З його допомогою початкова задача зводиться до послідовності більш простих задач мінімізації функції меншої кількості змінних для визначення $B_k()$, $u_k(x)$. Якщо ці задачі розв'язані з великою точністю, то і в початковій задачі глобальний мінімум функції буде знайдений з великою точністю.