РОЗДІЛ 6

6.3. Метод динамічного програмування для систем з неперервним часом.

Розглянемо задачу:

$$J(t_0,x_0,u(\cdot))=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t),u(t),t)dt+F(x(T))\to inf\,, \qquad (6.34)$$

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t), \quad t_0\le t\le T, \qquad x(t_0)=x_0\,, \qquad (6.35)$$

$$x(t)\in G(t), \quad t_0\le t\le T\,, \qquad (6.36)$$

$$u=u(t)\in V(t), \quad t_0\le t\le T\,, \qquad (6.37)$$

де $u(t)$- кусково-неперевна функція.

Отримати явний аналітичний вигляд оптимального керування такої задачі вдається тільки в деяких випадках. Тому для таких задач виписують рівняння Белмана.

Введемо функцію

$$B(x,t)=\inf_{D(x,t)} J(t,x,u(\cdot)).$$

Це функція Белмана для задачі (6.34)-(6.37). Тут $D(x,t)$- множина всіх керувань $u(t),\ t\le t\le T$, що задовольняють обмеженням (6.37),

$$u(t)=u(t+0)=\lim_{s\to t+0} u(s),\ t\le t\le T\,,$$

таких що відповідна траєкторія $x(t)=x(t,u),\ \ t\le t\le T$ визначена на всьому відрізку $[t_0,T]$ і задовольняє обмеженню (6.36).

Якщо задача (6.34)-(6.37) задовольняє деяким обмеженням і функція $B(x,t)$ неперервна і диференційовна, то можна показати, що функція Белмана $B(x,t)$ задовольняє рівнянню Белмана задачі (6.34)-(6.37):

$$\inf_{u\in D(x,t)} [(B'_x(x,t),f(x,u,t))+B'_t(x,t)+f^0(x,u,t)]=0 \qquad (6.38)$$

$$x\in X(t), \quad t_0\le t\le T$$

$$B(x,T)=F(x), \quad x\in X(T)=G(T) \qquad (6.39)$$

де $B_X = (B_{x_1}, \mathbf{K}, B_{x_n})$, B_{x_i}, B_t - частинні похідні функції $B(x,t)$ а $D(x,t)$ - множина всіх тих $u \in V(t)$, для яких існує хоча б одне керування $u(\cdot) \in D(x,t)$ із значенням $u(t)=u(t+0)=u$.

Наведемо еврістичні міркування, з яких випливають співвідношення (6.38),(6.39). Випишемо рівняння Белмана для дискретної системи в такій формі:

$$\inf_{u \in D(x,t)} [B_{k+1}(F_k(x,u)) - B_k(x) + F_k^0(x,u)] = 0, \qquad (6.40)$$

$$x \in X_K, \ K = \overline{0, N-1},$$

$$B_N(x) = \Phi(x), \qquad x \in X_N = G_N. \qquad (6.41)$$

Згадаємо позначення

$$F_K^0(x,u) = (t_{K+1} - t_K) f^0(x,u,t_K),$$
$$F_K(x,u) = x + (t_{K+1} - t_K) f(x,u,t_K).$$

Виключаючи з цих позначень і співвідношень індекс K, прийнявши $t_K=t$, $Dt = t_{K+1} - t_K$, $t_N=T$, $B_K(x)=B(x,t)$, $B_{K+1}(y)=B(y,t+\Delta t)$, $D_K(x)=D(x,t)$, $X_K=X(t)$. Тоді співвідношення (6.40), (6.41) можуть бути переписані в безіндексній формі:

$$\inf_{u \in D(x,t)} [B(x + Dt \cdot f(x,u,t), t + Dt) - B(x,t) + Dt \cdot f^0(x,u,t)] = 0,$$

$$x \in X(t), \quad t_0 \le t \le T,$$

$$B(x,T) = F(x), \quad x \in X(T) = G(T).$$

Якщо поділити першу рівність на $\Delta t > 0$ і зробити формальний граничний перехід при $\Delta t \to +0$, то прийдемо до співвідношень (6.38), (6.39). Наведені міркування не претендують на строгість. Рівняння Белмана (6.38) є диференціальним рівнянням (може бути нелінійним) в частинних похідних першого порядку. Ліва частина його складна, оскільки там є операція відшукання нижньої грані - *inf*. Питання існування та єдиності розв'язку задачі (6.38), (6.39), властивості її розв'язку досліджені до цього часу не повністю.

Під розв'язком задачі (6.38), (6.39) будемо розуміти функцію $B(x,t)$, що визначена та неперервна при всіх (x,t), $x \in X(t)$, $t_0 \le t \le T$, має кусково неперервні похідні B_x, B_t та задовольняє рівнянню (6.38) всюди, де існують похідні, і задовольняє умові (6.39).

Крім того, для будь якої допустимої пари ($u(.)$, $x(.)$) задачі (6.34)-(6.37). для всіх $x \in X(t)$, $t_0 \le t \le T$, функція $B(x(\tau), \tau)$ змінної τ має кусково-неперервну похідну на $[t, T]$ (або $B(x(\tau), \tau)$ абсолютно неперервна на $[t, T]$).

Теорема 6.2: Нехай $B(x, t)$ – розв'язок задачі (6.38), (6.39) і, крім того, нехай нижня грань в лівій частині (6.38) досягається на кусково-неперервній функції $u(x, t)$,

$$u(x, t) \in D(x, t), x \in X(t), t_0 \le t \le T.$$

Тоді $u(x, t)$ – синтезуюча функція задачі (6.34)-(6.37).

Доведення. Візьмемо довільні t, $t_0 \le t \le T$, і $x \in X(T)$. Нехай $x_*(\tau)$, $t \le \tau \le T$ є розв'язком задачі Коші :

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(x(\tau), \tau), \tau), \quad t \le \tau \le T$$

$$x(t) = x$$

і нехай

$x_*(\tau) \in X(\tau)$ при всіх $\tau \in [t, T]$.

Покладемо

$$u_*(\tau) = u(x_*(\tau), \tau), \; t \le \tau \le T.$$

Ясно, що $u_*(\cdot) \in D(x, t)$ і $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$- допустима пара задачі (6.34)-(6.37).

Для доведення теореми досить показати, що пара $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ є розв'язком задачі (6.34)-(6.37).

Спочатку покажемо, що для будь-якої допустимої пари $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ задачі (6.34)-(6.37) справедлива формула

$$J(t, x, u(.)) = \int_t^T R(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + B(x, t), \tag{6.42}$$

де

$$R(x, u, t) = (B_x(x, t), f(x, u, t)) + B_t(x, t) + f^0(x, u, t). \tag{6.43}$$

Дійсно, за умовою функція $B(x(\tau), \tau)$ змінної τ неперервна і має кусково-неперервну похідну. Тоді, в силу рівняння (6.35), маємо:

$$\frac{dB(x(\tau), \tau)}{d\tau} = R(x(\tau), u(\tau), \tau) - f^0(x(\tau), u(\tau), \tau)$$

всюди на $[t, T]$, за винятком, можливо, скінченої кількості точок.

Проінтегруємо цю тотожність по t на $[t, T]$ і з урахуванням умови (6.39) отримаємо:

$$\Phi(x(T) - B(x, t)) = \int_t^T R(x(t), u(t), t)dt - \int_t^T f^0(x(t), u(t), t)dt,$$

що еквівалентно (6.42).

Рівняння (6.38), за допомогою функції (6.43), можна переписати у вигляді

$$\inf_{u \in D(x,t)} R(x, u, t) = 0.$$

Звідси та з визначення функції $u(x, t)$ маємо:

$$R(x, u(x, t), t) = 0 = \inf_{u \in D(x,t)} R(x, u, t) \le R(x, u, t), \qquad (6.44)$$

для всіх $u \in D(x, t), x \in X(t), t \le t \le T$.

Якщо $(u(\cdot), x(\cdot))$ - допустима пара задачі (6.34)–(6.37), то

$$x(t) \in X(t), \; u(t) = u(t + 0) = u \in D(x(t), t), t \le t \le T.$$

Тому із (6.44) отримаємо :

$$R(x_*(t), u(x_*(t)), t) = R(x_*(t), u_*(t), t) = 0 \le R(x(t), u(t), t), \qquad (6.45)$$

$t \le t \le T$ для будь – якої допустимої пари задачі (6.34)–(6.37).

Звідси та з формули (6.42) із врахуванням умови $x_*(t) = x(t) = x$ маємо :

$$J(t, x, u(.)) - J(t, x, u_*(.)) = \int_t^T R(x(t), u(t), t)dt \ge 0 \qquad (6.46)$$

для всіх допустимих пар $(u(\cdot), x(\cdot))$ задачі (6.34)–(6.37).

Із (6.42), (6.45), (6.46) випливає, що

$$J(t, x, u_*(.)) = \inf_{D(x,t)} J(t, x, u(.)) = B(x, t).$$

Таким чином показано, що функція $B(x, t)$, яка визначається співвідношеннями (6.38), (6.39), справді є функцією Белмана задачі (6.34) –

(6.37), і функція $B(x, t)$, на якій досягається нижня грань в лівій частині (6.38), є синтезуючою для цієї задачі.

Теорема 6.2 доведена.

За допомогою функцій $B(x, t), u(x, t)$ неважко отримати розв'язок для початкової задачі (6.34)-(6.37).

Теорема 6.3. Нехай $B(x, t)$ - розв'язок задачі (6.38), (6.39), і нехай нижня грань в лівій частині (6.38) досягається на кусково–неперервній функції $u(x,t)$. Крім того, нехай точка $x_0^* \in X(t_0)$ визначена із умови

$$B(x_0^*, t_0) = \inf_{x \in X(t_0)} B(x, t_0),$$

а пара $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$, де $x_*(\cdot)$ - розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t), t), t), \ \ t_0 \le t \le T, \ x(t_0) = x_0^*$$

і $u_*(t) = u(x_*(t), t)$ є допустимою парою задачі (6.34)-(6.37).

Тоді пара $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ є розв'язком задачі (6.34)-(6.37), тобто

$$J(t_0, x_0^*, u_*(.)) = \inf_{x \in X(t_0)} \ \inf_{u(.) \in D(x, t_0)} J(t_0, x, u(.)) = J_*.$$

Доведення. Візьмемо довільну допустиму пару $(u(t), x(t)),\ t_0 \le t < T$, $x(t_0) = x_0 \in X(t_0)$ задачі (6.34)-(6.37). Із формули (6.42) і нерівностей (6.45) при $t = t_0$ із врахуванням умови (6.47) маємо:

$$J(t_0, x_0, u(.)) - J(t_0, x_0^*, u_*(.)) = \int_{t_0}^{T} R(x(t), u(t), t)dt + B(x_0, t_0) -$$

$$- \inf_{x \in X(t_0)} B(x, t_0) \ge 0,$$

що й треба було довести.

Теорема 6.3. доведена.

Згідно *теореми 6.2*, для розв'язку задачі синтезу досить розв'язати задачу (6.38), (6.39). Як її розв'язати? Зауважимо, що конструктивний опис множин $X(t)$, $D(x, t)$, що входять в задачу (6.38), (6.39) часто відсутні. Тому на практиці замість задачі (6.38), (6.39) розглядають більш конструктивну задачу, що одержується із задачі (6.38), (6.39) заміною $D(x, t), X(t)$ на $V(t), G(t)$ відповідно:

$$\inf_{u \in V(t)} [(B_x (x, t), f (x, u, t)) + B_t (x, t) + f^0(x, u, t)] = 0 \qquad (6.48)$$

$$x \in G(t), \qquad t_0 \le t \le T$$

$$B(x, T) = \Phi(x(T)), \quad x \in G(t).$$

Задача (6.48) може й не мати розв'язку, а задача (6.38), (6.39) може мати розв'язок.

Найбільш ефективними для розв'язку задачі (6.38), (6.39) або задачі (6.48) є методи, які фактично розв'язують задачу, що є дискретною апроксимацією задачі (6.38), (6.39) або (6.48) і використовують наближення значення функції Белмана – $B(x, t_k)$.

Інколи вдається знайти розв'язок $B(x, t)$ задачі (6.48) у вигляді поліному від змінних $x_1, \ldots, x_n$ з неозначеними коефіцієнтами, що залежать від часу:

$$B(x, t) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} y_{i_1 \ldots i_n} (t)(x_1)^{i_1} \ldots . (x_n)^{i_n} .$$

Після підстановки цього виразу в (6.48) для визначення коефіцієнтів $y_{i_1 \ldots \; i_n} (t)$ отримують диференціальне рівняння з початковою умовою.