РОЗДІЛ 7

7.1. Двоїстість між задачею оцінювання станів стохастичних систем та задачею оптимального керування для лінійних детермінованих систем

Нехай стохастичний процес з неперервним часом описується рівняннями:

$$dx = A(t)\,x(t)\,dt + dv \tag{7.1}$$

$$dy = C(t)\,x(t)\,dt + de \tag{7.2}$$

де $x(t_0)$ - початковий стан, $Mx(t_0) = x_0$, $Mx(t_0)x^T(t_0) = R_0$.

Нехай $\{v(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ - стохастичні процеси з некорельованими приростами і з коваріаціями $R_1\,dt$, $R_2\,dt$ відповідно.

Нехай процеси $\{e(t), t \in T\}$, $\{v(t), t \in T\}$ - взаємно некорельовані і не корельовані з $x(t_0)$.

Будемо шукати оцінку скалярного добутку $a^T x(t_1)$ у вигляді:

$$\widehat{a^T x(t_1)} =- -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)dy(t) + b^T m \tag{7.3}$$

за спостереженнями на проміжку $[t_0, t_1]$.

Найкращу оцінку будемо шукати з критерію:

$$M[a^T x(t_{11}) - \widehat{a^T x(t_1)}]^2 \to inf \tag{7.4}$$

Треба знайти $u(t)$ - неперервну функцію часу і вектор b – сталий вектор. Вектор m фіксований сталий вектор.

Покажемо, що задача оцінки стану двоїста задачі детермінованого керування.

Перепишемо критерій:

із (7.2) і (7.3) отримуємо:

$$a^T \hat{x}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)dy(t) + b^T m =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} [u^T(t)Cx(t)dt + u^T(t)de(t)] + b^T m. \qquad (7.5)$$

Надалі, там, де це не викликатиме непорозумінь, залежність величин від часу t будемо опускати.

Введемо вектор z як розв’язок диференціального рівняння:

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u \qquad (7.6)$$

$$z(t_1) = a \qquad (7.7)$$

(7.7) – початкова умова. Тоді матимемо:

$$a^T x(t_1) = z^T(t_1)\, x(t_1) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d[z^T(t)x(t)]\ . \qquad (7.8)$$

Але:

$$\begin{aligned} &d(z^T x) = dz^T x + z^T dx = \\ &= -z^T Axdt - u^T Cxdt + z^T Axdt + z^T dv = . \\ &= -u^T Cxdt + z^T dv. \end{aligned}$$

Значить:

$$a^T x(t_1) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [-u^T(t)Cx(t)dt + z^T(t)dv(t)]\ . \qquad (7.9)$$

Із рівнянь (7.5) і (7.9) знаходимо:

$$a^T [x(t_1) - \hat{x}(t_1)] = z^T(t_0)x(t_0) - b^T m + \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)dv(t) + u^T(t)de(t)]\ . \quad (7.10)$$

Візьмемо математичне сподівання:

$$Ma^T [x(t_1) - \hat{x}(t_1)] = [z(t_0) - b]^T m\ .$$

Якщо покласти $b = z(t_0)$, то оцінка (7.5) буде незміщеною при всіх a та при довільному виборі u.

Піднесемо (7.10) до квадрату і візьмемо математичне сподівання:

$$M[a^T x(t_{11}) - a^T \hat{x}(t_1)]^2 = [(z(t_0) - b)^T m]^2 + z^T(t_0) R_0 z(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t) R_1 z(t) + u^T(t) R_2 u(t)]\, dt. \qquad (7.11)$$

Таким чином, знаходження функції u, такої що лінійна оцінка (7.3) є оптимальною в середньоквадратичному розумінні, еквівалентне задачі оптимального керування для динамічної системи (7.6) з початковою умовою (7.7) та критерієм:

$$z^T(t_0) R_0 z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t) R_1 z(t) + u^T(t) R_2 u(t)]\, dt. \qquad (7.12)$$

Таким чином довели теорему:

<u>Теорема 7.1(теорема двоїстості):</u> Задача оцінювання стану системи, що описується рівняннями (7.1) і (7.2), при умові, що оцінка шукається у вигляді (7.3) – у класі лінійних за середньоквадратичним критерієм (7.4) еквівалентна задачі знаходження найкращого закону керування для лінійної детермінованої системи (7.6) з критерієм (7.12).

Задача керування, що розглянута в теоремі двоїстості, дещо відрізняється в позначеннях від звичайного формулювання її в теорії лінійного оптимального керування.

Щоб полегшити порівняння, сформулюємо результати в стандартній формі.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad (7.13)$$

$x(t_0) = x_0$ - задане, для якої треба знайти керування, що мінімізує критерій

$$x^T(t_1)Q_0x(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[x^T(t)Q_1x(t)+u^T(t)Q_2u(t)]dt \tag{7.14}$$

Припускається, що матриці Q_0, Q_1- додатньонапіввизначені, Q_2- додатньовизначена. Елементи всіх матриць є кусково-неперервними функціями часу. Розв'язок такої задачі відомий із літератури [ ]:

$$u=-Lx, \tag{7.15}$$

де

$$L=Q_2^{-1}B^TS, \tag{7.16}$$

де S- розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$-\frac{dS}{dt}=A^TS+SA+Q_1-SBQ_2^{-1}B^TS \ , \tag{7.17}$$

$$S(t_1) = Q_0.$$

Тобто, (7.15)- лінійний по x закон керування. Якщо рівняння Ріккаті має розв'язок, то розв'язок поставленої вище задачі існує і єдиний (доведення див. в книгах по детермінованій теорії керування, наприклад[2,10]).

Із порівняння із стандартним формулюванням випливає, що задача (7.6), (7.12) має розв'язок:

$$u(t) = -K^T z(t)\ , \tag{7.19}$$

де

$$K = PC^TR_2^{-1}\ , \tag{7.20}$$

P-розв'язок матричного рівняння Ріккаті:

$$\frac{dP}{dt}=AP+PA^T+R_1-PC^TR_2^{-1}CP, \tag{7.21}$$

$$P(t_0)=R_0\ .$$

Еквівалентність задачі (7.6), (7.12) і стандартної задачі оптимального керування (7.13), (7.14) проілюструємо таблицею:

Стандартна задача оптимального керування	Задача оцінювання стану

t -- $-t$

t_0 -- t_1

t_1 -- t_0

A -- A^T

B -- C^T

Q_0 -- R_0

Q_1 --- ------------- R_1

Q_2 -- R_2

S -- P

L -- K^T