РОЗДІЛ 7

7.2. Фільтр Калмана-Б’юсі

За допомогою результатів детермінованої теорії керування була визначена функція u, яка дає найкращу оцінку. Запишемо цей результат так, щоб отримати для оцінки стохастичне диференціальне рівняння.

Оцінка задається формулою:

$$\widehat{a^T x(t_1)} = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)dy(t) + b^T m,$$

де u визначається за (7.19).

Щоб отримати для оцінки стохастичне диференціальне рівняння, продиференціюємо (7.5). Зауважимо, що u і b неявно залежать від t_1. Тому перепишемо (7.5) в такому вигляді, в якому ця залежність буде явною.

Із рівнянь(7.6),(7.19) знаходимо:

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u = -(A - KC)^T z. \tag{7.22}$$

Нехай $y(t,t_1)$- розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dt} = (A - KC)y, \tag{7.23}$$

$$y(t_1,t_1) = E, \tag{7.24}$$

де E – одинична матриця відповідної розмірності.

Тоді розв’язок рівняння (7.22) з початковою умовою

$$z(t_1) = a, \tag{7.25}$$

дорівнює:

$$z(t) = y^T(t_1,t)a. \tag{7.26}$$

Тоді

$$u(t) = -K^T y^T(t_1,t)a, \tag{7.27}$$

$$b = y^T(t_1,t_0)a. \tag{7.28}$$

Вираз (7.5) для оцінки прийме вигляд:

$$a^T \hat{x}(t_1) = a^T \int_{t_0}^{t_1} y\ \ (t_1,t)Kdy(t) + a^T y\ \ (t_1,t_0)m. \qquad (7.29)$$

Значить, якщо виберемо

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y\,(t_1,t)Kdy(t) + y\,(t_1,t_0)m, \qquad (7.30)$$

то отримаємо оцінку $\hat{x}$ таку, що середньоквадратична похибка оцінки буде мінімальною при всіх a.

Диференціюємо (7.30) і отримаємо

$$d\hat{x}(t_1) = [\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial y\,(t_1,t)}{\partial t_1} Kdy(t) + \frac{\partial y\,(t_1,t_0)}{\partial t_1} m\,]\,dt_1 + Kdy(t_1) =$$

$$= (A - KC)\hat{x}(t_1)dt_1 + Kdy(t_1) =$$

$$= A\hat{x}(t_1)dt_1 + K[\,dy(t_1) - C\hat{x}(t_1)dt_1\,]\,. \qquad (7.31)$$

Значить, лінійна, що мінімізує середньоквадратичну похибку оцінювання, задовольняє лінійному стохастичному диференціальному рівнянню (7.31). Початкове значення отримаємо із врахуванням умови (7.30):

$$\hat{x}(t_0) = m. \qquad (7.32)$$

Віднімемо (7.31) із (7.1) і знайдемо, що похибка оцінювання задовольняє лінійному стохастичному диференційному рівнянню:

$$d\tilde{x} = (A - KC)\tilde{x}dt + dv - Kde, \qquad (7.33)$$

де $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ - вектор похибки оцінювання.

Для коваріації похибки оцінювання можна отримати диференціальне рівняння

$$\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^T + R_1 - KCQ - QC^T K^T + KR_2 K^T =$$

$$= AQ + QA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CQ -$$

$$- QC^T R_2^{-1} CP + PC^T R_2^{-1} CP, \qquad (7.34)$$

$$Q(t_0) = R_0. \qquad (7.35)$$

Віднімемо (7.34) із рівняння (7.21) і отримаємо:

$$\frac{d}{dt}(Q-P)=A(Q-P)+(Q-P)A^T-$$
$$-(Q-P)C^TR_2^{-1}CP-PC^TR_2^{-1}C(Q-P).$$

Оскільки $Q(t_0)=P(t_0)=R$, то $Q(t)=P(t)$.

Таким чином, коваріація похибки оцінювання визначається рівнянням (7.21).

Отже довели наступну теорему

Теорема (Калмана–Б'юсі). Лінійна оцінка вектору стану системи, що описується рівняннями (7.1),(7.2) і задовольняє стохастичному диференціальному рівнянню

$$d\hat{x}(t)=A\hat{x}dt+K[dy-C\hat{x}dt]. \tag{7.31}$$

$$\hat{x}(t_0)=m, \tag{7.32}$$

де $K=PC^TR_2^{-1}$, P- коваріаційна матриця похибки оцінювання, яка задовольняє рівнянню:

$$\frac{dP}{dt}=AP+PA^T+R_1-PC^TR_2^{-1}CP.$$
$$P(t_0)=R_0.$$

Зауваження 7.1. Оскільки рівняння (7.31) є стохастичним диференціальним рівнянням, то його розв'язок можна представити лише за допомогою стохастичних інтегралів.

Зауваження 7.2. Оскільки стохастичні процеси $\{x(t),\ t\in T\}$ і $\{y(t),\ t\in T\}$ - мають гаусів розподіл, то умовний розподіл $x(t)$ при відомому $y(s)$, $t_0\le s\le t$ теж буде гаусів з умовним математичним сподіванням $M\,x/y=\hat{x}$, і умовною коваріацією

$$M[(M\,x/y)(M\,x/y)^T]=P.$$